UAD PRESS
Kampus IV Universitas Ahmad Dahlan
Jl. Ringroad Selatan, Tamanan
Banguntapan Bantul Yogyakarta
E-mail: uadpress@uad.ac.id
HP/WA: 082134455340

Dasar-dasar

MATEMATIKA DISKRIT DAN GRAF

Soffi Widyanesti Priwantoro S.Pd.Si., M.Sc.

Dasar-dasar Matematika

DISKRIT DAN GRAF

Soffi Widyanesti Priwantoro S. Pd. Si., M. Sc.

UAD PRESS

Sanksi Pelanggaran Pasal 113
Undang-Undang Nomor 28 Tahun 2014
Tentang Hak Cipta

1. Setiap orang yang dengan tanpa hak melakukan pelanggaran hak ekonomi sebagaimana dimaksud dalam Pasal 9 ayat (1) huruf i untuk penggunaan secara komersial dipidana dengan pidana penjara paling lama 1 (satu) tahun dan/atau pidana denda paling banyak Rp100.000.000 (seratus juta rupiah).
2. Setiap orang yang dengan tanpa hak dan/atau tanpa izin Pencipta atau pemegang Hak Cipta melakukan pelanggaran hak ekonomi Pencipta sebagaimana dimaksud dalam Pasal 9 ayat (1) huruf c, huruf d, huruf f, dan/atau huruf h untuk penggunaan secara komersial dipidana dengan pidana penjara paling lama 3 (tiga) tahun dan/atau pidana denda paling banyak Rp500.000.000,00 (lima ratus juta rupiah).
3. Setiap orang yang dengan tanpa hak dan/atau tanpa izin Pencipta atau pemegang Hak Cipta melakukan pelanggaran hak ekonomi Pencipta sebagaimana dimaksud dalam Pasal 9 ayat (1) huruf a, huruf b, huruf e, dan/atau huruf g untuk penggunaan secara komersial dipidana dengan pidana penjara paling lama 4 (empat) tahun dan/atau pidana denda paling banyak Rp1.000.000.000,00 (satu miliar rupiah).
4. Setiap orang yang memenuhi unsur sebagaimana dimaksud pada ayat (3) yang dilakukan dalam bentuk pembajakan, dipidana dengan pidana penjara paling lama 10 (sepuluh) tahun dan/atau pidana denda paling banyak Rp. 4.000.000.000,00 (empat miliar rupiah).

DASAR-DASAR MATEMATIKA DISKRIT DAN GRAF

Soffi Widyanesti Priwantoro S. Pd. Si., M. Sc.

UAD PRESS

Dasar-dasar Matematika Diskrit dan Graf

ISBN: xxxxxxxxxxxxx
16 x 24 cm, viii + 86 hlm
Cetakan Pertama, September 2020

Penulis: Soffi Widyanesti Priwantoro S. Pd. Si., M. Sc.
Editor: Fadhlurrahman
Layout: Ratih Purwandari
Desain Cover: Hafidz Irfana

Diterbitkan Oleh:
UAD PRESS
Anggota IKAPI dan APPTI

Alamat Penerbit:
Kampus IV Universitas Ahmad Dahlan
Jl. Ringroad Selatan Tamanan Banguntapan Bantul Yogyakarta
E-mail: uadpress@uad.ac.id
HP/WA: 082134455340

Prakata

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Rasa syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT atas perkenannya untuk menyelesaikan Bahan Ajar Dasar-dasar Matematika Diskrit dan Graf ini. Mulai dari diselesaikannya bahan ajar ini, diharapkan mahasiswa akan memiliki setidaknya pedoman kecil untuk mempelajari matematika diskrit dan graf. Bahan ajar ini dibuat oleh penulis untuk membantu penulis dalam melaksanakan kegiatan perkuliahan matematika diskrit.

Seperti semua buku maupun tulisan yang lain, bahan ajar ini juga dapat dipastikan tidak akan luput dari kekurangan maupun kesalahan. Saran, rekomendasi, atau apa pun yang bersifat memperbaiki atau menyempurnakan bahan ajar ini sangat diharapkan oleh penulis. Dengan demikian, bahan ajar ini akan semakin dapat bermanfaat bagi banyak kalangan.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Yogyakarta, Desember 2019

Penulis

Daftar Isi

Bab 1

Relasi Biner

Capaian Pembelajaran:

1. Mahasiswa dapat menjelaskan definisi relasi biner.
2. Mahasiswa dapat memberikan contoh relasi biner dan bukan relasi biner.
3. Mahasiswa dapat menyajikan relasi biner ke dalam berbagai cara.
4. Mahasiswa dapat menjelaskan sifat-sifat relasi biner.
5. Mahasiswa dapat membedakan sifat-sifat relasi biner.
6. Mahasiswa dapat menjelaskan relasi ekuivalensi.
7. Mahasiswa dapat membedakan relasi ekuivalensi dan bukan relasi ekuivalensi.

A. Perkalian Cartesius

Definisi 1.A.1

Diketahui dua himpunan yaitu $A \neq \emptyset$ dan $B \neq \emptyset$. Perkalian cartesius antara A dan B dinotasikan A $\times B$ dengan definisi:

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}$$

Contoh 1.A.1

Diberikan $A = \{2, 4, 6\}$ dan $B = \{d, e, f\}$. Tentukan $B \times A$, $A \times B$.

$B \times A = \{(d, 2), (d, 4), (d, 6), (e, 2), (e, 4), (e, 6), (f, 2), (f, 4), (f, 6)\}$

$A \times B = \{(2, d), (2, e), (2, f), (4, d), (4, e), (4, f), (6, d), (6, e), (6, f)\}$

Definisi 1.A.2

Diketahui himpunan $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$ dengan masing-masing himpunan bukan merupakan himpunan kosong. Didefinisikan perkalian cartesius dari himpunan $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$ adalah

$$A_1 \times A_2 \times A_3 \times \ldots \times A_n = \{ (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) | a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, a_3 \in A_3, \ldots a_n \in A_n\}$$

Contoh 1.A.2

Diberikan $A_1 = \{1, 2, 3\}, A_2 = \{ \alpha, \beta\}$, dan $A_3 = \{c, d\}$. Tentukan $A_1 \times A_2$ dan $(A_1 \times A_2) \times A_3$

$$A_1 \times A_2 = \{(1, \alpha), (1, \beta), (2, \alpha), (2, \beta), (3, \alpha), (3, \beta)\}$$

$$(A_1 \times A_2) \times A_3 = \{(1, \alpha, c), (1, \alpha, d), (1, \beta, c), (1, \beta, d), (2, \alpha, c), (2, \alpha, d), (2, \beta, c), (2, \beta, d), (3, \alpha, c), (3, \alpha, d), (3, \beta, c), (3, \beta, d)\}$$

B. Relasi Biner

Definisi 1.B.1

Diketahui dua himpunan yaitu $A \neq \emptyset$ dan $B \neq \emptyset$. Relasi (relasi biner) dari himpunan A ke himpunan B dinotasikan dengan $\mathfrak{R}$ dan didefinisikan sebagai **himpunan bagian** dari perkalian cartesius A $\times$ B.

Definisi 1.B.2

Diketahui dua himpunan yaitu $A \neq \emptyset$ dan $B \neq \emptyset$ dengan $a \in A$ dan $b \in B$, $(a, b) \in \Re$ dibaca " a berelasi $\Re$ dengan b", dan dinotasikan dengan $a\Re b$.

Definisi 1.B.3

Diketahui $= B$, sehingga $\Re$ disebut sebagai "relasi biner pada A".

Definisi 1.B.4

Diketahui himpunan $A \neq \emptyset$. Relasi (biner) dari himpunan A ke himpunan A disebut relasi biner pada himpunan A.

NOTASI:

$a, b \in A$

a berelasi dengan b dinotasikan dengan $a \ \Re \ b$ atau $(a, b) \in \ \Re$

a tidak berelasi dengan b dinotasikan dengan $a \not\Re \ b$ atau $(a, b) \notin \not\Re$

Contoh 1.B.1

Diberikan $A = \{2, 4, 6\} \ dan \ B = \{d, e, f\}$ dengan

$A \times B = \{(2, d), (2, e), (2, f), (4, d), (4, e), (4, f), (6, d), (6, e), (6, f)\}$

Tentukan apakah $\Re$ berikut merupakan relasi biner.

a. $\Re = \{(2, d), (2, f), (e, 4), (6, d)\}$
   $\Re$ bukan relasi biner karena $(e, 4) \in A \times B$
b. $\Re = \{(4, d), (6, f)\}$
   $\Re$ merupakan relasi biner
c. $\Re = \{(2, d), (4, e), (d, 6), (6, d)\}$
   $\Re$ bukan relasi biner karena $(d, 6) \in A \times B$
d. $\Re = \{(2, d), (2, e), (2, f), (4, d), (4, e), (4, f), (6, d), (6, e), (6, f)\}$
   $\Re$ merupakan relasi biner
e. $\Re = \{(4, d), (4, e), (4, f), (6, d)\}$
   $\Re$ merupakan relasi biner

C. Penyajian Relasi Biner

Relasi biner dapat disajikan dengan tiga cara yaitu mendaftar, tabel dan diagram.

1. Mendaftar

   Diketahui $A = \{2, 4, 6\}\ dan\ B = \{d, e, f\}$ dengan relasi biner

$$\Re = \{(2, e), (2, f), (4, d), (4, e), (4, f)\}$$

2. Tabel

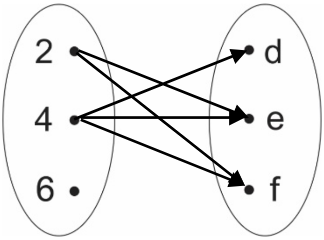
   Diketahui $A = \{2, 4, 6\}\ dan\ B = \{d, e, f\}$ dengan relasi biner

$$\Re = \{(2, e), (2, f), (4, d), (4, e), (4, f)\}$$

$A \times B$	d	e	F
2		√	√
4	√	√	√
6			

3. Diagram

   Diketahui $A = \{2, 4, 6\}\ dan\ B = \{d, e, f\}$ dengan relasi biner



$$\Re = \{(2, e), (2, f), (4, d), (4, e), (4, f)\}$$

Latihan Soal 1.1

1. Diberikan himpunan $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}\ dan\ B = \{8, 9, 10, 12, 14\}$. Tentukan:
   a. $A \times B$
   b. $B \times A$
   c. $A \times A$

d. Diketahui $a\Re b$ dengan definisi a faktor dari b, untuk setiap $a \in A\ dan\ b \in B$, tentukan $\Re$ dalam bentuk:
   1) Mendaftar
   2) Diagram
   3) Tabel

2. Diberikan $D = \{2,4,6,8,10\}$, didefinisikan relasi sebagai berikut:
   a. $\forall a, b \in D, a\Re b\ jika\ dan\ hanya\ jika\ a \geq b$
   b. $\forall a, b \in D, a\Re b\ jika\ dan\ hanya\ jika\ a + 1 \leq b$
   c. $\forall a, b \in D, a\Re b\ jika\ dan\ hanya\ jika\ a.b \leq 20$

   Sajikan relasi di atas dalam bentuk:
   i) Mendaftar
   ii) Diagram
   iii) Tabel

D. Sifat-Sifat Relasi Biner

1. Sifat I

   Diketahui A sebarang himpunan tak kosong, relasi biner $\Re$ pada himpunan A mempunyai sifat berikut.
   a. Jika $(\forall a \in A)\ a\Re a$ maka $\Re$ dikatakan refleksif
   b. Jika $(\forall a, b \in A), a\Re b \rightarrow b\Re a$ maka $\Re$ dikatakan simetris, untuk $a, b \in A$
   c. Jika $(\forall a, b, c \in A), a\Re b \wedge b\Re c \rightarrow a\Re c$ maka $\Re$ dikatakan transitif

2. Sifat II

   Diketahui A sebarang himpunan tak kosong, relasi biner $\Re$ pada himpunan A mempunyai sifat berikut.
   a. Jika $(\exists a \in A)\ a\Re a$ maka $\not\Re$ dikatakan non-refleksif
   b. Jika $(\exists a, b \in A), a\Re b\ \wedge b\Re a$ maka $\not\Re$ dikatakan non-simetris
   c. Jika $(\exists a, b, c \in A), a\Re b\ \wedge b\Re c\ \wedge a\Re c$ maka $\not\Re$ dikatakan non-transitif

3. Sifat III

Diketahui A sebarang himpunan tak kosong, relasi biner $\Re$ pada himpunan A mempunyai sifat berikut.

a. Jika $(\forall a \in A)\ a \not\Re\ a$ maka $\Re$ dikatakan irrefleksif
b. Jika $(\forall a, b \in A), a \Re b \rightarrow b \not\Re a$ maka $\Re$ dikatakan asimetris, untuk $a, b \in A$
c. Jika $(\forall a, b \in A), a\Re b \wedge b\Re a \rightarrow a = b$ maka $\Re$ dikatakan antisimetris, untuk $a, b \in A$
d. Jika $(\forall a, b, c \in A), a\Re b \wedge b\Re c \rightarrow a \not\Re c$ maka $\Re$ dikatakan intransitif, untuk $a, b, c \in A$

Contoh 1.D.1

1. $\Re = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d)\}$
   a) $\Re$ mempunyai sifat refleksif karena setiap anggota himpunan A berpasangan dengan dirinya sendiri.
   b) $\Re$ mempunyai sifat simetri karena setiap anggota pasangan berurutan di $\Re$ selalu mempunyai kebalikan dari pasangan berurutannya. Misal , $a\Re a$ maka , $a\Re a$
   c) $\Re$ jelas empunyai sifat transitif ambil contoh $a\Re a \wedge a\Re a \Rightarrow a\Re a$
   d) $\Re$ jelas mempunyai sifat antisimetris

2. $\Re = \{(a, b), (b, a), (a, c), (c, a)\}$
   a) Terlihat jelas bahwa $\Re$ mempunyai sifat simetris
   b) $\Re$ mempunyai sifa non refleksif yaitu $\exists\ a \in A, \ni a \not\Re\ a$
   c) $\Re$ mempunyai sifat non transitif yaitu
      $\exists\ a, b \in A, \ni a \Re b \wedge b \Re a \Rightarrow a \not\Re a$
   d) $\Re$ mempunyai sifat irrefleksif yaitu $\forall\ a \in A, \ni a \not\Re\ a$
   e) $\Re$ mempunyai sifat intransitif yaitu
      $\forall a, b \in A, \ni a \Re b \wedge b \Re a \Rightarrow a \not\Re a$

3. $\Re = \{(a, b), (b, a), (a, c), (c, b), (c, a), (a, a)\}$
   a) $\Re$ mempunyai sifat non refleksif yaitu $\exists\ b \in A, \ni b \not\Re\ b$
   b) $\Re$ mempunyai sifat non simetris yaitu
      $\exists\ b, c \in A, \ni c\ \Re\ b \land b \not\Re\ c$
   c) $\Re$ mempunyai sifat non transitif yaitu
      $\exists a, b, c \in A, \ni b\ \Re\ a \land a\ \Re\ c \land b \not\Re\ c$
   d) $\Re$ mempunyai sifat anti simetris yaitu
      $\forall\ a \in A, \ni a\ \Re\ a \land a\ \Re\ a \implies a = a$

4. $\Re = \{(a, b), (b, c), (b, d)\}$
   a) $\Re$ mempunyai sifat non refleksif yaitu $\exists\ a \in A, \ni a \not\Re\ a$
   b) $\Re$ mempunyai sifat non simetris yaitu
      $\exists\ a, b \in A, \ni a\ \Re\ b \land b \not\Re\ a$
   c) $\Re$ mempunyai sifat non transitif yaitu
      $\exists\ a, b, c \in A, \ni a\ \Re\ b \land b\ \Re\ c \land a \not\Re\ c$
   d) $\Re$ mempunyai sifat irrefleksif yaitu $\forall\ a \in A, \ni a\ \Re\ a$
   e) $\Re$ mempunyai sifat asimetris yaitu
      $\forall\ a, b \in A, \ni a\ \Re\ b \implies b \not\Re\ a$
   f) $\Re$ mempunyai sifat intransitif yaitu
      $\forall a, b, c, d \in A, \ni a\ \Re\ b \land b\ \Re\ d \Rightarrow a \not\Re\ d$

Latihan 1.D.1

Tentukan sifat-sifat yang memenuhi relasi pada $A = \{1, 2, 3, 4\}$ berikut:

1. $\Re = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$
2. $\Re = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (1, 4), (1, 3), (2, 4)\}$
3. $\Re = \{(1, 4), (4, 2), (1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 2), (4,1)\}$
4. $\Re = \{(2, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 2)\}$

E. Relasi Ekuivalensi

Definisi 1.E.1

Diketahui A himpunan tak kosong, relasi biner $\Re$ pada A disebut relasi ekuivalensi pada A, jika memenuhi:

1. $\Re$ bersifat refeksif
2. $\Re$ bersifat simetris
3. $\Re$ bersifat transitif

Contoh 1.E.1

1. Diberikan himpunan $A = \{2, 3, 4, 6, 8, 9\}$, dengan relasi biner $\Re$ pada A yaitu: $\Re = \{(2,2), (3,3), (4,4), (6,6), (8,8), (9,9), (4,6), (6,4)\}$
   Apakah $\Re$ merupakan relasi ekuivalensi? berikan penjelasanmu.
   Penyelesaian:
   Relasi $\Re$ pada A memenuhi:
   a. Sifat Refleksif karena setiap anggota di A beranggotakan dirinya sendiri di $\Re$
   b. Sifat Simetri, karena $\forall\, a, b \in A\ a\Re b \implies b\Re a$
   c. Sifat Transitif, karena $\forall\, a, b, c \in A,\ a\Re b \wedge b\Re c \implies a\Re c$

2. Diberikan Himpunan $B = \{9, 10, 11, 12\}$, dengan relasi biner $\Re$ pada B yaitu:
   $\Re = \{(9, 9), (10,10), (11,11), (12,12), (9,10), (10,9), (10,11), (11,12)\}$
   Apakah $\Re$ merupakan relasi ekuivalensi? berikan penjelasanmu.
   Penyelesaian:
   Relasi $\Re$ pada B memenuhi sifat refleksi karena setiap anggota di $\Re$ mempunyai relasi dengan dirinya sendiri. Tetapi relasi $\Re$ pada B tidak mempunyai sifat simetri karena $\exists\, a, b \in B \ni a \not\Re\, b \implies b\Re a$, yaitu $10\Re 11$ tetapi $11 \not\Re\, 10$. Demikian pula relasi $\Re$ pada B tidak mempunyai sifat transitif yaitu $\exists a, b, c \in B \ni a\Re b \wedge b\not\Re c \wedge a\Re c$, yaitu:
   $10\Re 11 \wedge \in 11\Re 12$ tetapi $10 \not\Re\, 12$

Latihan Soal 1.2

1. Diberikan bilangan asli $n \in \mathbb{N}$. Didefinisikan relasi $\equiv_n$ pada $\mathbb{N}$, sebagai berikut:
   $(\forall\ a, b \in \mathbb{N})\ a \equiv_n b$ jika dan hanya jika $n|a - b$
   Apakah $\equiv_n$ merupakan relasi ekuivalensi?berikan penjelasanmu.

2. Diberikan himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$, didefinisikan relasi biner $\Re$, sebagai berikut:
   $(\forall\ a, b \in \mathbb{Z})\ a \Re b$ jika dan hanya jika $a - b$ bilangan genap
   Apakah $\Re$ merupakan relasi ekuivalensi? Berikan penjelasanmu.

3. Diberikan himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$, didefinisikan relasi biner $\Re$, sebagai berikut:
   $(\forall\ a, b \in \mathbb{Z})\ a \Re b$ jika dan hanya jika $a - b$ bilangan ganjil
   Apakah $\Re$ merupakan relasi ekuivalensi? Berikan penjelasanmu.

4. Diberikan himpunan $H = \{2, 4, 5, 6, 7, 12, 14\}$
   Didefinisikan relasi biner $\Re$ sebagai berikut:
   $\forall a, b \in H, a \Re b$ jika dan hanya jika a kelipatan b.

5. Diberikan himpunan $A = \{2, 4, 6, 8\}$, didefinisikan relasi
   -$\forall a, b \in A, a \Re b$ jika dan hanya jika $a + 1 \leq b$
   -$\forall a, b \in A, a \Re b$ jika dan hanya jika $a \geq b$
   -$\forall a, b \in A, a \Re b$ jika dan hanya jika $ab \geq 20$

Bab 2

POSET
(*Partially Ordered Set*)

Capaian Pembelajaran:

1. Mahasiswa dapat menjelaskan definisi POSET.
2. Mahasiswa dapat membedakan POSET dan bukan POSET.
3. Mahasiswa dapat menjelaskan definisi rantai (*chain*).
4. Mahasiswa dapat membedakan rantai (*chain*) dan bukan rantai (*anti chain*).
5. Mahasiswa dapat menggambarkan POSET ke dalam diagram hasse.
6. Mahasiswa dapat menjelaskan elemen maksimal dan elemen minimal.
7. Mahasiswa dapat menentukan elemen maksimal dan elemen minimal dari suatu POSET.
8. Mahasiswa dapat menjelaskan batas atas terkecil dan batas bawah terbesar.
9. Mahasiswa dapat menentukan batas atas terkecil dan batas bawah terbesar dari suatu POSET.

A. Himpunan Terurut Parsial (*Partially Ordered Set*/POSET)

Definisi 2.A.1

Diketahui A himpunan tak kosong, relasi biner $\mathfrak{R}$ pada himpunan A yang memenuhi:

1. $\mathfrak{R}$ bersifat refleksif
2. $\mathfrak{R}$ bersifat antisimetris
3. $\mathfrak{R}$ bersifat Transitif

disebut relasi terurut parsial (*partially ordered relation*).

Definisi 2.A.2

Himpunan A yang memuat relasi terurut parsial $\mathfrak{R}$ disebut himpunan terurut parsial (*Partially Ordered Set*/POSET), dinotasikan dengan $(A, \mathfrak{R})$.

Jika $(A, \mathfrak{R})$ POSET maka $a \, \mathfrak{R} \, b$ dinotasikan dengan $a \leq b$ dengan $(a, b) \in \mathfrak{R}$ POSET biasanya menggunakan notasi $(A, \leq)$

Contoh 2.A.1

1. Diberikan Himpunan bilangan Asli $\mathbb{N}$, dengan relasi biner $\mathfrak{R}$ yang didefinisikan sebagai berikut:

   $$(\forall \, a, b \in \mathbb{N}) \; a\mathfrak{R}b \text{ jika dan hanya jika } a|b$$

   Apakah $\mathfrak{R}$ merupakan relasi terurut parsial pada $\mathbb{N}$? Berikan penjelasanmu!

   Penyelesaian

   a. Sifat Refleksif

      Akan ditunjukkan: $\forall \, a \in \mathbb{N}, a \, \mathfrak{R} \, a$ yaitu $a|a$

      Bukti

      Ambil $a \in \mathbb{N}$

      $a = a$

      $a = 1.a$, $1 \in \mathbb{N}$

      Sehingga $a|a$ dengan kata lain $a\mathfrak{R}a$

      Ingat: $a|b \Leftrightarrow b = \hbar a \in \mathbb{Z}$

b. Sifat Antisimetris

Akan ditunjukan $\forall\ a, b \in \mathbb{N}, a\Re b \wedge b\Re a \implies a = b$

Bukti:

Ambil $a, b \in \mathbb{N}$

Diketahui $a\Re b \Leftrightarrow a|b \Leftrightarrow b = k.a\ , k \in \mathbb{N}$

$b\Re a \Leftrightarrow b|a \Leftrightarrow a = l.b\ , l \in \mathbb{N}$

$$b = ka$$
$$\underline{a = lb}$$
$$ba = (kl)ab$$

Nilai (kl) yang memenuhi adalah $kl = 1$, dengan kata lain

$k = 1\ dan\ l = 1$

Sehingga $b = ka, k = 1$ dan $a = lb\ , l = 1$

$b = a$ $\qquad$ $a = b$

c. Sifat Transitif

Akan ditunjukkan $\forall\ a, b, c \in \mathbb{N}\ a\Re b \wedge b\Re c \implies a\Re c$

Bukti:

$a \Re b \Leftrightarrow a|b \Leftrightarrow b = k.a\ , k \in \mathbb{N}$

$b \Re c \Leftrightarrow b|c \Leftrightarrow c = l.b\ , l \in \mathbb{N}$

$\Leftrightarrow c = lb$

$c = l(ha)$

$c = (lh)a$ dengan kata lain $a|c$ atau $a\Re c$

Dari a., b., dan c. terbukti $a\Re b \Leftrightarrow a|b$ merupakan relasi terurut parsial.

2. Diberikan Himpunan bilangan Bulat $\mathbb{Z}$, dengan relasi biner $\Re$ yang didefiniskan sebagai berikut:

$$(\forall\ a, b \in \mathbb{Z})\ a\Re b \text{ jika dan hanya jika } a \leq b$$

Apakah $\Re$ merupakan relasi terurut parsial pada $\mathbb{Z}$? Berikan penjelasanmu.

Penyelesaian:

a. Sifat Refleksif

Akan ditunjukkan: $\forall\ a \in \mathbb{Z}, a\Re a$ yaitu $a \leq a$

Jelas bahwa $a = a$ maka $a \leq a$ atau $a\Re a$

b. Sifat Antisimetri

Akan ditunjukkan: $\forall\ a, b \in \mathbb{Z}, a\Re b \wedge b\Re a \Leftrightarrow a = b$

Bukti:

Ambil $a, b, c\ \in \mathbb{Z}$

Diketahui: - $a\Re b\ sehingga\ a \leq b$ dan

- $b\Re a\ sehingga\ b \leq a$, dengan kata lain $a = b$

Sehingga diperoleh $a \leq b \leq c$

Dengan kata lain $a \leq c$ atau $a\Re c$

c. Sifat Transitif

Akan ditujukkan $\forall\ a, b, c \in \mathbb{Z}\ a\Re b \wedge b\Re c \Leftrightarrow a\Re c$

Bukti:

Ambil $a, b, c \in \mathbb{Z}$

Diketahui: $a\Re b\ sehingga\ a \leq b, dan$

$b\Re c\ yang\ berarti\ b \leq c$

Sehingga diperoleh $a \leq b \leq c$ atau $a \leq c$ atau $a\Re c$

Definisi 2.A.3

Diketahui $(A, \leq)$ POSET, sehingga berlaku berikut ini:

a. Diketahui himpunan $B \subseteq A$ yang memenuhi $a \leq b\ atau$ $b \leq a$ maka disebut rantai (*chain*). Dengan kata lain $B \subseteq A$ dikatakan rantai (*chain*) jika setiap dua elemen di dalam B saling berelasi.

b. Diketahui himpunan $B \subseteq A$ dan tidak ada dua elemen yang berbeda di B yang saling berelasi, B bukan rantai (*anti chain*). Dengan kata lain, $B \subseteq A$ adalah *anti chain* ketika setiap elemen di B berelasi dengan dirinya sendiri.

Contoh 2.A.2

1. Diketahui himpunan $A = \{a, b, c, d\}$ dengan definisi relasi terurut parsial $\Re$ pada A sebagai berikut:
   $\Re = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (b, b), (b, d), (c, c), (c, d), (d, d)\}$
   Manakah dari himpunan di bawah ini yang merupakan rantai?
   a. $A_1 = \{a, b, d\}$ (a, b) , (a, d) , (b, d)
   b. $A_2 = \{b, c\}$
   c. $A_3 = \{b, c, d\}$
   d. $A_4 = \{b\}$
   e. $A_5 = \{a, c, b\}$
   f. $A_6 = \{a, c, d\}$

Definisi 2.A.4

Suatu POSET yang merupakan rantai disebut dengan TOSET (*Totally Ordered Set*).

Definisi 2.A.5

Banyaknya elemen dalam satu rantai disebut panjang rantai.

B. Diagram Hasse

Definisi 2.B.1

Diketahui (A, ≤) merupakan poset dengan banyaknya anggotanya berhingga sehingga poset (A, ≤) dapat dinyatakan dalam suatu diagram yang disebut dengan **diagram hasse.**

Untuk menggambar suatu poset ke dalam diagram hasse dibutuhkan ketentuan berikut ini, yaitu setiap elemen diwakili oleh suatu titik/lingkaran kecil dan dua elemen yang berelasi tidak boleh terletak sejajar, tetapi untuk dua titik yang tidak berelasi boleh diletakkan sejajar. Beberapa ketentuan untuk menggambar suatu poset ke dalam diagram hasse, diuraikan sebagai berikut:

1. Setiap elemen diawali oleh suatu titik (lingkaran luar)
2. Dua elemen yang berelasi tidak boleh terletak sejajar.
3. Dua elemen yang tidak berelasi boleh diletakkan sejajar.

Contoh 2.B.1

1. Diketahui himpunan $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ dengan relasi $\leq$ didefinisikan dengan relasi “lebih kecil sama dengan”.

   Jelas, $(A, \leq)$ merupakan POSET dan juga rantai. Gambar diagram hasse dari relasi $\leq$, sebagai berikut.

   a. Mendaftar elemen-elemen relasi $\leq$, yaitu:

   “$\leq$” $= \{(1,3), (1,5), (1,7), (1,9), (3,5), (3,7), (3,9), (5,7),$
   $(5,9), (7,9)\}$

   b. Gambar diagram hassenya berdasarkan elemen-elemen dari relasi $\leq$

2. Diketahui himpunan $B = \{2, 3, 4, 6, 8, 24\}$ dengan relasi $\leq$ yang didefinisikan dengan “kelipatan dari”, buatlah diagram hasse dari relasi $\leq$.

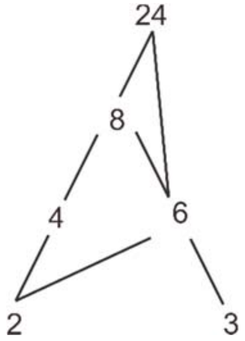
   Penyelesaian:

   Jelas bahwa $(B, \leq)$ merupakan POSET dan juga rantai. Gambar diagram hasse dari relasi $\leq$, sebagai berikut.

   a. Mendaftar elemen-elemen relasi $\leq$, yaitu:

   "$\leq$" $= \{(2,4), (2,6), (2,8), (2,24), (3,6), (3,24), (4,8),$
   $(4,24), (6,24), (8,24)\}$

b. Gambar diagram hasse berikut ini berdasarkan relasi $\leq$.



3. Diketahui himpunan $C = \{2, 5, 10, 15, 20, 25, 30\}$ dengan relasi ≤ yang didefinisikan sebagai relasi "faktor dari"

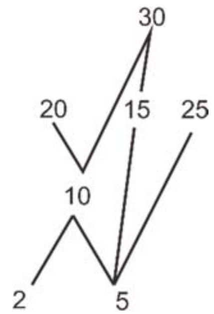
   Penyelesaian:

   Jelas bahwa $(C, \leq)$ merupakan POSET dan juga rantai. Gambar diagram hasse dari relasi $\leq$, sebagai berikut.

   a. Mendaftar elemen-elemen relasi $\leq$, yaitu:

   $$\text{"}\leq\text{"} = \{(2,10),(2,20),(2,30),(5,10),(5,15),(5,20),\\ (5,25),(5,30),(10,20),(10,30),(15,30)\}$$

   b. gambar diagram hasse berikut ini berdasarkan relasi $\leq$.



4. 2. {2, 3, 6, 12, 24, 36) dan relasi ≤ yang didefinisikan sebagai "relasi membagi habis"

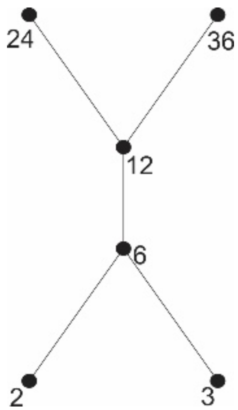
   Penyelesaian:

   Jelas bahwa $(A, \leq)$ merupakan POSET dan juga rantai. Gambar diagram hasse dari relasi $\leq$, sebagai berikut

a. Mendaftar elemen-elemen relasi $\leq$, yaitu:

"≤" = $\{(2,6),(2,12),(2,24),(2,36),(3,6),(3,12),(3,24),$
$(3,36),(6,12),(6,24),(6,36),(12,24),(12,36)\}$

b. gambar diagram hasse berikut ini berdasarkan relasi $\leq$.



C. Elemen Maksimal dan Minimal

Definisi 2.C.1

Diketahui $(A, \leq)$, maka

1. Suatu elemen $a \in A$ disebut **elemen maksimal** jika tidak ada $b \in A$ dengan $b \neq a$ sedemikan hingga $a \leq b$
2. Suatu elemen $a \in A$ disebut **elemen minimal** jika tidak ada $b \in A$ dengan $b \neq a$ sedemikan hingga $b \leq a$
3. Suatu elemen $a \in A$ disebut **cover** dari b jika $b \leq a$ dan tidak ada elemen lain c yang memenuhi $b \leq c \leq a$

Perlu diketahui bahwa elemen maksimal, elemen minimal dan cover pada suatu POSET tidaklah harus tunggal.

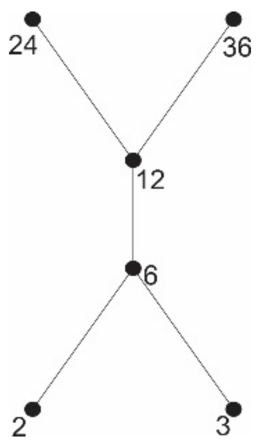
Contoh 2.C.1

1. Berdasarkan contoh 2.B.1.i
   a. Elemen Maksimal : 9
   b. Elemen Minimal : 1
   c. Cover dari 1 adalah 3
   d. Cover dari 3 adalah 5

2. Berdasarkan 2.B.2.ii
   a. Elemen Maksimal : 24
   b. Elemen Minimal : 2 dan 3
   c. Cover dari 6 adalah 24
   d. Cover dari 4 adalah 8

3. Berdasarkan contoh 2.B.2.iii
   a. Elemen Maksimal : 20, 30, 25
   b. Elemen Minimal : 2, 5
   c. Cover dari 15 adalah 30
   d. Cover dari 5 adalah 10, 15, 25

4. Berdasarkan contoh 2.B.2.iv
   a. Elemen Maksimal : 24, 36
   b. Elemen Minimal : 2, 3
   c. Cover dari 3 adalah 6
   d. Cover dari 12 adalah 24, 36



Definisi 2.C.2

Diketahui $(A, \leq)$ POSET dan $a, b, c \in A$, sehingga berlaku:

1. Elemen $c \in A$ disebut **batas atas** dari a dan b sedemikian sehingga $a \leq c$ dan $b \leq c$,
2. Elemen $c \in A$ disebut **batas atas terkecil (bat)** dari a dan b jika memenuhi:
   i) c batas atas dari a dan b
   ii) tidak ada batas atas dari a dan b yang lain, misal d, sehingga $d \leq c$

Definisi 2.C.3

Diketahui $(A, \leq)$ POSET dan elemen $a, b, c \in A$, sehingga berlaku:

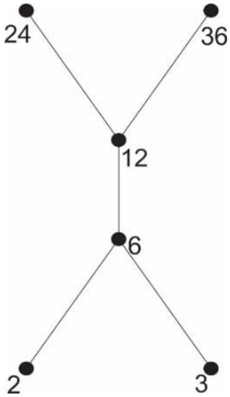
1. Elemen $c \in A$ disebut **batas bawah** dari a dan b jika, $c \leq a$ dan $c \leq a$,
2. Elemen $c \in A$ disebut **batas bawah terbesar (bbt)** dari a dan b jika, memenuhi:
   i) c batas bawah dari a dan b
   ii) tidak ada batas bawah dari a dan b yang lain, misal d, sehingga $c \leq d$

Contoh 2.C.2

1. Berdasarkan contoh 2.B.2.i
   a. Batas atas terkecil dari 2 dan 3 adalah 6
   b. Batas atas terkecil dari 4 dan 6 adalah 24
   c. Batas bawah terbesar dari 4 dan 6 adalah 2
   d. Batas bawah terbesar dari 8 dan 6 adalah 2

2. Berdasarkan contoh 2.B.2.iii
   a. Batas atas dari 2 dan 5 adalah 10, 20
   b. Batas atas terkecil dari 2 dan 5 adalah 10
   c. Batas bawah dari 10 dan 15 adalah 5
   d. Batas bawah terbesar dari 10 dan 15 adalah 5
   e. Batas bawah dari dari 2 dan 15 adalah tidak ada

3. Berdasarkan contoh 2.B.2.iv
   a) Batas atas dari 2 dan 3 adalah 6, 12, 24, 36
   b) Batas atas dari 6 dan 12 adalah 12, 36, 24
   c) Batas bawah 24 dan 36 adalah 12, 6, 3, 2
   d) Batas bawah 24 dan 12 adalah 12, 6, 3, 2
   e) Batas atas terkecil dari 3 dan 6 adalah 6
   f) Batas atas terkecil dari 2 dan 3 adalah 6
   g) Batas bawah terbesar dari 6 dan 12 adalah 6
   h) Batas bawah terbesar dari 24 dan 36 adalah 12

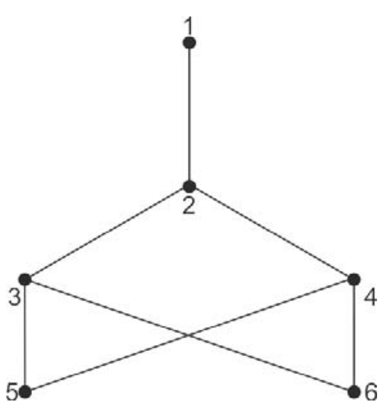


Latihan Soal 2

1. Diberikan himpunan $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24\}$. Jika $(A, \leq)$ merupakan poset dengan $\leq$ didefinisikan sebagai relasi "membagi habis", maka
   a. Buatlah diagram Hasse dengan $(A, \leq)$
   b. Elemen Maksimal dan minimal dari $(A, \leq)$
   c. Batas atas dari $(2\ dan\ 6)$ & $(4\ dan\ 8)$
   d. Batas atas terkecil dari $(1, 3)$ & $(9, 8)$
   e. Batas bawah dari $(6\ dan\ 9)$ & $(6\ dan\ 18)$
   f. Batas bawah terbesar $(2, 3)$ & $(2, 4)$

2. Diberikan himpunan $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 36, 72\}$. Relasi pada A didefinisikan dengan relasi " Faktor dari" Apakah A merupakan suatu poset? Jika A poset, maka
   a. Buatlah diagram Hasse dengan $(A, \leq)$
   b. Elemen Maksimal dan minimal dari $(A, \leq)$
   c. Batas atas dari $(4\ dan\ 6)$
   d. Batas atas terkecil dari $(8, 12)$ & $(4, 9)$
   e. Batas bawah dari $(8\ dan\ 9)$
   f. Batas bawah terbesar $(2, 9)$ & $(4, 36)$

3. Diketahui $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ dengan diagram hasse berikut



   a. Elemen maksimal
   b. Elemen Minimal
   c. Batas atas dari 3 dan 4
   d. Batas atas terkecil dari 3 dan 4
   e. Batas bawah dari 3 dan 4
   f. Batas bawah terbesar dari 3 dan 4

Bab 3

Lattice (Latis)

Capaian Pembelajaran:

1. Mahasiswa dapat menentukan suatu POSET merupakan latis atau bukan.
2. Mahasiswa dapat memberi contoh latis dan bukan latis.
3. Mahasiswa dapat menjelaskan sifat-sifat latis.
4. Mahasiswa dapat membedakan sub latis dan bukan sub latis.
5. Mahasiswa dapat menentukan hasil kali latis.
6. Mahasiswa dapat menggambarkan hasil kali latis dalam diagram hasse.

A. Definisi Latis

Definisi 3.A.1

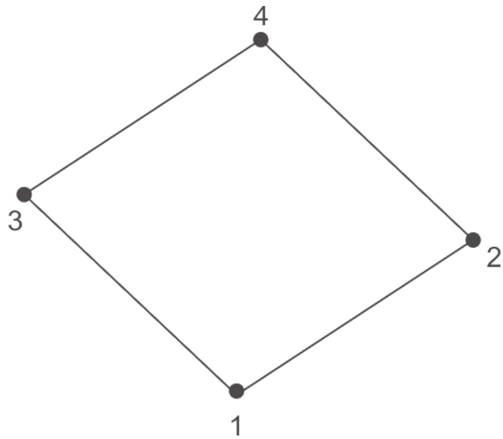
1. Batas atas terkecil (bat) dari a dan b dinotasikan dengan $a \oplus b$ dibaca "**a join b**".
2. Batas bawah terkecil (bbt) dari a dan b dinotasikan dengan $a * b$ dibaca "**a meet b**".

Definisi 3.A.2

Poset $(A, \leq)$ yang setiap elemennya memiliki batas atas terkecil (bat) dan batas bawah terbesar (bbt) **tunggal** disebut latis. Dan dinotasikan dengan($A, \leq, \oplus, *$).

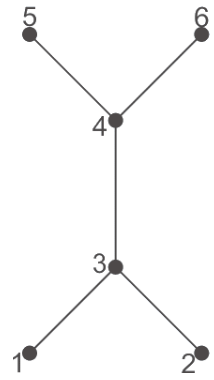
Contoh 3.A.1.

1. Tentukan apakah poset yang dinyatakan dengan diagram hasse berikut merupakan latis.
   a. Poset $(A, \leq)$ merupakan latis karena setiap elemen di $(A, \leq)$ mempunyai batas atas terkecil dan batas bawah terbesar tunggal



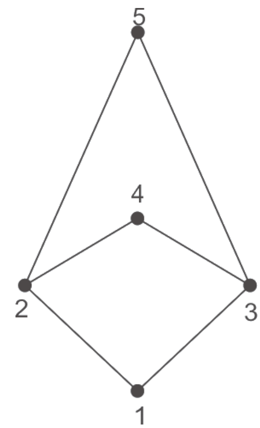
$(A, \leq)$

b. Poset $(H, \leq)$ bukan latis karena elemen 1 dan 2 tidak mempunyai batas bawah terbesar.



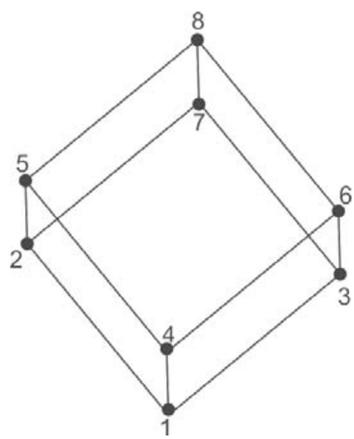
$(H, \leq)$

c. Poset $(B, \leq)$ Bukan latis, karena elemen $2 \oplus 3 = 4$ dan $2 \oplus 3 = 5$.



$(B, \leq)$

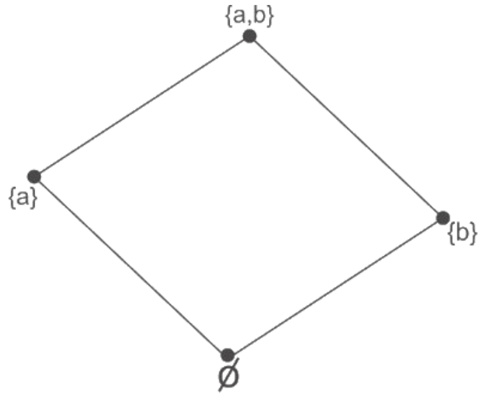
d. Poset $(C, \leq)$ merupakan latis karena setiap elemen di $(C, \leq)$ mempunyai batas atas terkecil dan batas bawah terbesar tunggal.



$(B, \leq)$

2. Diberikan $A = \{a, b\}$ dan himpunan kuasa dari A adalah $\mathcal{P}(a) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\ \}$. Didefinisikan poset $(\mathcal{P}(a), \subseteq)$, kemudian gambarlah dengan diagram hasse dari poset $(\mathcal{P}(a), \subseteq)$, dan tentukan meet dan join dari masing-masing elemen $(\mathcal{P}(a), \subseteq)$,

   Penyelesaian:



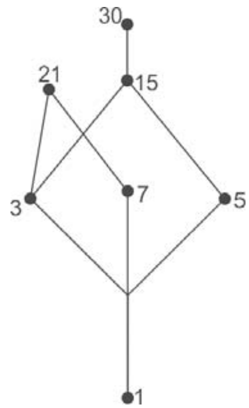
   a. $\{a\} \oplus \{b\} = \{a, b\}$
   b. $\{a\} \oplus \emptyset = \{a\}$
   c. $\emptyset \oplus \{a, b\} = \{a, b\}$
   d. $\{b\} \oplus \emptyset = \{b\}$
   e. $\{a\} \oplus \{a, b\} = \{a, b\}$
   f. $\{a\} * \{b\} = \emptyset$
   g. $\{a\} * \{a, b\} = \{a\}$
   h. $\emptyset * \{b\} = \emptyset$
   i. $\emptyset * \{a\} = \emptyset$
   j. $\emptyset * \{a, b\} = \emptyset$

   Coba diperhatikan Diagram Hasse dari $(\mathcal{P}(a), \subseteq)$ terlihat bahwa join dari dua himpunan adalah gabungan dua himpunan tersebut dan meet dua himpunan adalah irisan dari dua himpunan tersebut dan terlihat pula bahwa batas atas terkecil dan batas bawah terbesar dari $(\mathcal{P}(s), \subseteq)$ tunggal dengan kata lain $(\mathcal{P}(a), \subseteq)$ merupakan latis.

3. Diketahui $A = \{1, 3, 5, 7, 15, 21, 30\}$ didefinisikan $\leq$ sebagai relasi membagi habis sehingga $(A, \leq)$ poset. Apakah $(A, \leq)$ juga merupakan latis?

   Penyelesaian:

   Akan digambarkan diagram hasse dari $(A, \leq)$ sebagai berikut:



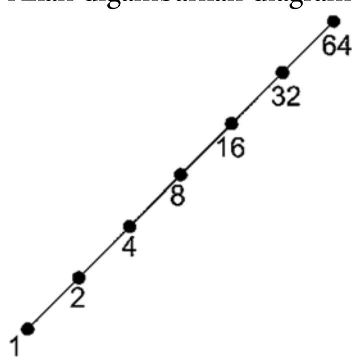
$(A, \leq)$

Terlihat bahwa $(A, \leq)$ bukan latis karena elemen 15 dan 21 tidak mempunyai batas atas terkecil.

4. Diketahui $A = \{1,2,4,8,16,32,64\}$ didefinisikan $\leq$ sebagai relasi membagi habis sehingga $(A, \leq)$ poset. Apakah $(A, \leq)$ juga merupakan latis?

   Penyelesaian:

   Akan digambarkan diagram hasse sebagai berikut:



$(A, \leq)$

Terlihat bahwa $(A, \leq)$ merupakan latis karena setiap elemen dari $(A, \leq)$ mempunyai batas atas terkecil dan batas bawah terbesar tunggal.

B. Sifat-Sifat Latis

Teorema 3.B.1

Diketahui latis $(A, \leq, *, \oplus)$ $\forall\, x, y \in A$ *berlaku*:

1. $x \leq x \oplus y$
2. $x * y \leq x$

Bukti:

1. Ambil sebarang $x, y \in A$

   Diketahui $x \oplus y$ adalah batas atas terkecil dari x dan y sehingga jelas bahwa $x \ \leq x \oplus y$

2. Ambil sebarang $x, y \in A$

   Diketahui$x * y$ adalah batas bawah terbesar dari x dan y sehingga jelas bahwa $x * y \leq x$

Teorema 3.B.3

Diketahui latis $(A, \leq, *, \oplus)$ dan $a, b, c, d \in A$ jika $a \ \leq b$ dan c$\leq d$, maka

1. $a \oplus c \ \leq \ b \oplus d$
2. $a * c \leq b * d$

Bukti:

1. Ambil sebarang $a, b, c, d \in A$

   Diketahui:

   $a \ \leq b$ dan $b \leq b \oplus d$, sehingga terlihat bahwa $a \leq b \oplus d$

   Selain itu $c \leq d$ dan $d \leq b \oplus d$, sehingga $c \leq b \oplus d$ dengan kata lain $b \oplus d$ adalah batas atas dari a dan c karena batas atas terkecil dari a dan c yaitu $a \oplus c$, sehingga diperoleh kesimpulan

   $a \oplus c \ \leq \ b \oplus d$

2. Ambil sebarang $a, b, c, d \in A$

   Diketahui:

   $a \ \leq b$ dan $a * c \leq a$, sehingga $a * c \leq b$ sedangkan $c \leq d$ dan $a * c \leq c$ sehingga jelas $a * c \leq d$ dapat disimpulkan bahwa $a * c$ adalah batas bawah dari b dan d dan batas bawah terbesar dari b dan d adalah $a * c$ sehingga $a * c \leq b * d$

Teorema 3.B.2

$(A, \leq, *, \oplus)$ latis, berlaku sifat berikut

- $x * x = x$
  $x \oplus x = x$ (Idempoten)
- $x * y = y * x$
  $x \oplus y = y \oplus x$ (Komutatif)
- $(x * y) * z = x * (y * z)$
  $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$
- $x * [x \oplus y] = x$
  $x \oplus [x * y] = x$
- $x \leq y \Leftrightarrow x * y = x \Leftrightarrow x \oplus y = y$
- $y \leq z \Leftrightarrow (x * y) \leq (x * z)$ dan $(x \oplus y) \leq (x \oplus z)$

C. Sublatis

Definisi 3.C.1

Diketahui $(A, \leq, *, \oplus)$ sublatis dan B adalah subhimpunan dari A yang tak kosong yaitu $B \subseteq A$. Himpunan B disebut sublatis dari A jika dan hanya jika B merupakan latis dengan memiliki relasi " $\leq$ " yang sama dengan A. Sederhananya dapat dikatakan bahwa B disebut sublatis dari A jika dan hanya jika $(B, \leq, *, \oplus)$ juga suatu latis.

Jika diubah ke dalam simbol matematika maka menjadi:

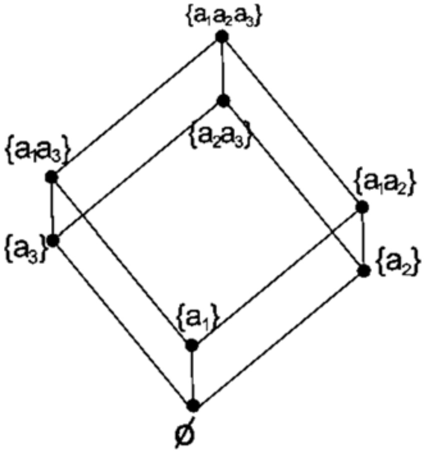
$$((A, \leq, *, \oplus) \text{ latis}, B \subseteq A, B \neq \phi$$

B merupakan sublatis dari $A \Leftrightarrow \forall a, b \in B, a * b \in B \; dan \; a \oplus b \in B$

Contoh 3.C.1

Diberikan $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ himpunan kuasa dari A adalah $\mathcal{P}(a) = \{\emptyset, \{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}, \{a_1 a_2\}, \{a_1 a_3\}, \{a_2 a_3\}, \{a_1 a_2 a_3\}\}$

Didefinisikan latis $(\mathcal{P}(a), \leq, *, \oplus)$ dengan diagram hasse sebagai berikut.



Manakah dari himpunan berikut yang merupakan sublatis dari $(\mathcal{P}(a), \leq, *, \oplus)$?

a. $A_1 = \{\emptyset, \{a_1\}, \{a_2\}, \{a_1 a_2\}\}$ sublatis
b. $A_2 = \{\{a_1\}, \{a_1 a_2\}, \{a_1 a_3\}, \{a_1 a_2 a_3\}\}$ sublatis
c. $A_3 = \{\{a_1\}, \{a_1 a_2\}, \{a_1 a_3\}, \{a_2 a_3\}\}$ bukan sublatis karena $\{a_1 a_2\} * \{a_2 a_3\} = \{a_2\} \notin A_3$
d. $A_4 = \{\emptyset, \{a_1\}, \{a_1 a_2\}, \{a_2 a_3\}\}$ bukan sublatis

D. Hasil Kali Latis

Definisi 3.D.1

Diketahui $(L_1, \leq_1, *_1, \oplus_1)$ dan $(L_2, \leq_2, *_2, \oplus_2)$ adalah Latis, Hasil kali latis adalah hasil kali kartesius $L_1 \times L_2$ dengan relasi dan operasi yang didefinisakn sebagai berikut:

- $(a_1, b_1) \leq (a_2, b_2) \Leftrightarrow (a_1 \leq a_2 \; dan \; b_1 \leq b_2)$
- $(a_1, b_1) * (a_2, b_2) \Leftrightarrow (a_1 *_1 a_2 \, , b_1, *_2, b_2)$
- $(a_1, b_1) \oplus (a_2, b_2) \Leftrightarrow (a_1 \oplus_1 a_2 \, , b_1, \oplus_2, b_2)$

Hasil kali latis L_1 dan L_2 dinotasikan dengan $(L_1 \times L_2, \leq, *, \oplus)$ dan jelas bahwa $(L_1 \times L_2, \leq, *, \oplus)$ adalah latis.

Contoh 3.D.1

Diketahui Latis $(L_1, \leq_1, *_1, \oplus_1)$ dan $(L_2, \leq_2, *_2, \oplus_2)$ dengan

- $L_1 = \{1,2,4\}\ dan\ L_2 = \{1,3,4\}$
- $(\forall a, b \in L_1)\ a \leq_1 b \leftrightarrow a|b$
- $(\forall c, d \in L_2)\ c \leq_2 d \leftrightarrow c|d$

Tentukan hasil kali latis $L_1 \times L_2$ dan gambarkan diagram Hasse!

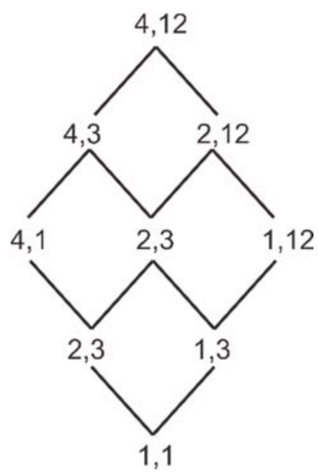
Penyelesaian:

$L_1 \times L_2 = \{(1,1), (1,3), (1,12), (2,1), (2,3), (2,12), (2,3), (2,12),$
$(4,1), (4,3), (4,12)\}$

Relasi $L_1 \times L_2$ didefinisikan sebagai berikut:

$(\forall (a, b)(c, d) \in L_1 \times L_2)\ (a, b) \leq (c, d) \leftrightarrow\ a|c\ dan\ b|d$

Diagram hasse



Latihan soal

1. Diketahui Latis $(L_1, \leq_1, \circledast_1, \oplus_1)$ dan $(L_2, \leq_2, \circledast_2, \oplus_2)$ dengan
   - $L_1 = \{1,3,9\}\ dan\ L_2 = \{2,4,6,24\}$
   - $(\forall a, b\ \in\ L_1)\ a \leq_1 b \leftrightarrow a|b$
   - $(\forall c, b\ \in\ L_2)\ c \leq_2 d \leftrightarrow c|d$

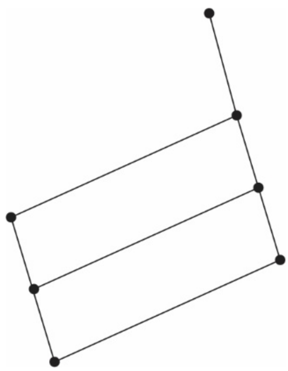
   a. Gambar diagram hasse dari L_1 dan L_2!

   b. Latis $L_1 \times L_2$!

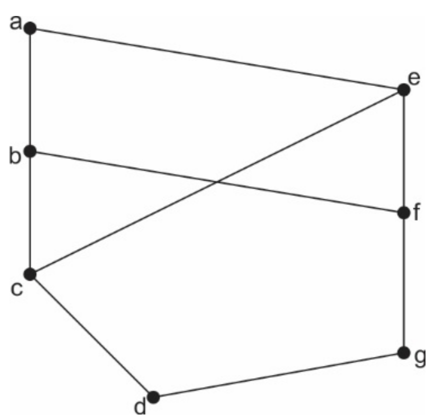
   c. Gambar diagram hassse dari $L_1 \times L_2$

2. Selidiki apakah poset dengan diagram Hasse dibawah ini merupakan latis

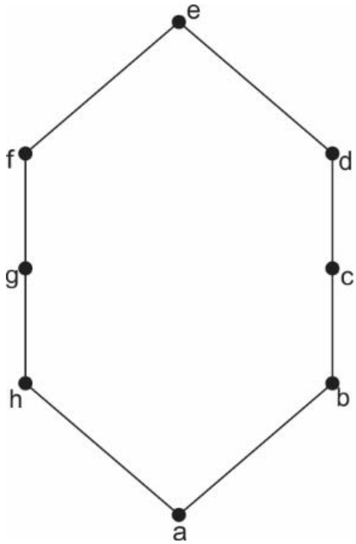
   a.



   b.



c.



Bab 4

Latis Distributif dan Latis Komplementer

Capaian Pembelajaran:
1. Mahasiswa dapat menjelaskan definisi Latis Distributif. 2. Mahasiswa dapat memberi contoh dari Latis Distributif. 3. Mahasiswa dapat membedakan latis Distributif dan Bukan Latis Distributif. 4. Mahasiswa dapat menjelaskan definisi Latis Komplementer. 5. Mahasiswa dapat memberi contoh dari Latis Komplementer. 6. Mahasiswa dapat membedakan latis Komplementer dan Bukan Latis Komplementer.

A. Latis Distributif

Definisi 4.A.1

Suatu latis $(\mathcal{L}, \leq, ⁎, \oplus)$ disebut latis distributif saat memenuhi:

- Operasi meet distributif terhadap operasi join
  $(\forall a, b, c \in \mathcal{L})\ a ⁎ (b \oplus c) = (a ⁎ b) \oplus (a ⁎ c)$
- Operasi join distributif terhadap operasi meet:
  $(\forall a, b, c \in \mathcal{L})\ a \oplus (b ⁎ c) = (a \oplus b) ⁎ (a \oplus c)$

Teorema 4.A.1

Diketahui suatu latis distributif $(A, \leq, ⁎, \oplus)$

1. Jika operasi meet distributif terhadap operasi join, maka operasi join distributif terhadap operasi meet
2. Jika operasi join distributif terhadap operasi meet, maka operasi meet distributif terhadap operasi join

Bukti:

1) Diketahui $(\mathcal{L}, \leq, *, \oplus)$ latis dan $x, y, z \in \mathcal{L}$ berlaku $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$

   Akan dibuktikan $x \oplus (y * z) = (x \oplus y) * (x \oplus z)$

   Bukti:

$$
\begin{aligned}
(x \oplus y) * (x \oplus z &= [(x \oplus y) * x] \oplus [(x \oplus y) * z] \\
&= x \oplus [(x \oplus y) * z] \\
&= x \oplus [(x * z) \oplus (y * z)] \\
&= [x \oplus (x * z)] \oplus (y * z) \\
&= x \oplus (y * z)
\end{aligned}
$$

   Sehingga terbukti $x \oplus (y * z) = (x \oplus y) * (x \oplus z)$

2) Diketahui $(\mathcal{L}, \leq, *, \oplus)$ latis dan $x, y, z \in \mathcal{L}$ berlaku $(x * y) * z = x * (y * z)$

   Akan dibuktikan $x * (y \oplus z) = (x * y) \oplus (x * z)$

Bukti:

$$(x * y) \oplus (x * z) = [(x * y) \oplus x] * [(x * y) \oplus z]$$
$$= x * [(x * y) \oplus z]$$
$$= x * [(x \oplus z) * (y \oplus z)]$$
$$= [x * (x \oplus z)] * (y \oplus z)$$
$$= x * (y \oplus z)$$

Sehingga terbukti $x * (y \oplus z) = (x * y) \oplus (x * z)$

Definisi 4.A.2

Diketahui latis $(\mathcal{L}, \leq, ⁎, \oplus)$ dan $a \in \mathcal{L}$ berlaku:

1. Untuk setiap $b \in \mathcal{L}$ yang memenuhi $a \leq b$, elemen $a \in \mathcal{L}$ disebut batas bawah universal (*universal lower bound*). *Universal Lower Bound (ulb)* dinotasikan dengan $ulb = 0$

   Note: Jika 0 ada, maka nilainya **tunggal**
2. Untuk Setiap $b \in \mathcal{L}$ yang memenuhi $b \leq a$, elemen $a \in \mathcal{L}$ disebut batas atas universal (*universal upper bound*). Universal Upper Bound (uub) dinotasikan dengan $uub = 1$

   Note: Jika 1 ada, maka nilainya **tunggal**

Teorema 4.A.2

Diketahui Latis $(\mathcal{L}, \leq, *, \oplus)$ dengan ulb = 0 dan uub = 1 dan $a \in \mathcal{L}$ berlaku:

1) $a \oplus 1 = 1$
2) $a \oplus 0 = a$
3) $a * 1 = a$
4) $a * 0 = 0$

Bukti:

1) Diketahui $a \in \mathcal{L}$ dan uub = 1

   adit: $a \oplus 1 = 1$

   Bukti:

   $a \in \mathcal{L}$ sehingga berlaku $a = 1 \geq 1$

karena 1 adalah *Universal Upper Bound* (*uub*) sehingga berlaku $a \oplus 1 \leq 1$
diperoleh $a \oplus 1 \geq 1$ dan $a \oplus 1 \leq 1$, dengan kata lain terbukti $a \oplus 1 = 1$

2) Diketahui $a \in \mathcal{L}$ dan ulb = 0
   adit: $a \oplus 0 = a$
   Bukti:
   $a \in \mathcal{L}$ sehingga berlaku $a \leq a \oplus 0$
   karena 0 batas bawah universal, sehingga berlaku $0 \leq a$
   selain itu $a \leq a$ diperoleh $a \oplus 0 \leq a \oplus a$, kemudian $a \oplus 0 \leq a$, sehingga didapat $a \oplus 0 \leq a$ dan $a \leq a \oplus 0$ dengan kata lain $a \oplus 0 = a$

3) Diketahui $a \in \mathcal{L}$ dan uub = 1
   adit: $a * 1 = a$
   Bukti:
   $a \in \mathcal{L}$ berlaku $a * 1 \leq a$
   karena 1 merupakan *Universal Upper Bound* sehingga berlaku $a \leq 1$
   selain itu berlaku juga $a \leq a$
   sehingga diperoleh $a * a \leq a * 1$
   disederhanakan $a \leq a * 1$
   Sehingga diperoleh $a * 1 \leq a$ dan $a \leq a * 1$ dengan kata lain $a * 1 = a$

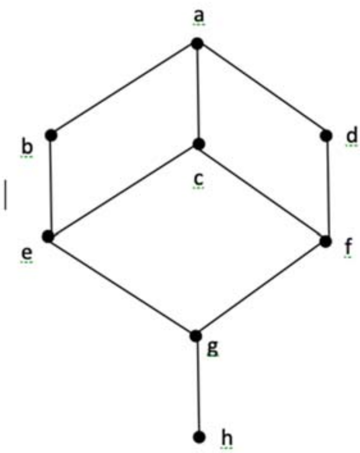
4) Diketahui $a \in \mathcal{L}$ dan ulb = 0
   adit: $a * 0 = 0$
   Bukti:
   $a \in \mathcal{L}$ berlaku $a * 0 \leq 0$
   karena 0 merupakan *Universal Lower Bound* sehingga berlaku $0 \leq a$ dan $0 \leq 0$,
   sehingga berlaku $0 * a \leq 0 * 0$ dengan kata lain $0 * a \leq 0$

Dapat disimpulkan bahwa $a * 0 \leq 0$ dan $0 * a \leq 0$

Sehingga terbukti $a * 0 = 0$

Contoh 4.A.1

Diketahui Latis $(A, \leq, *, \oplus)$ di bawah ini.



Apakah Latis $(A, \leq, *, \oplus)$ merupakan Latis Distributif?

Jawab:

Ambil elemen $b, c, d \in A$

Selidiki apakah sifat distributif dipenuhi pada latis $(A, \leq, *, \oplus)$

1. $b * (c \oplus d) = (b * c) \oplus (b * d)$

$$b * a = e \oplus g$$

$$b \neq e$$

2. $\mathrm{b} \oplus (\mathrm{c} * \mathrm{d}) = (\mathrm{b} \oplus \mathrm{c}) * (\mathrm{b} \oplus \mathrm{d})$

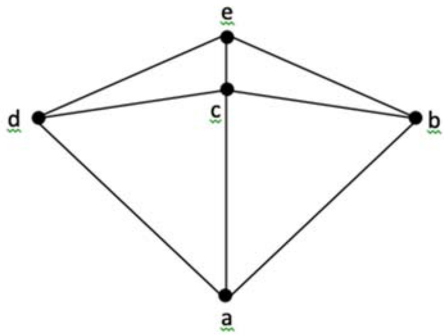
$$b \oplus f = (a) * (a)$$

$$a = (a) * a$$

$$a = a$$

Karena sifat distributif tidak terpenuhi, sehingga Latis $(A, \leq, *, \oplus)$ bukan merupakan Latis Distributif.

Contoh 4.A.2



Coba kalian selidiki apakah Latis $(\beta, \leq, *, \oplus)$ merupakan Latis Distributif?

Jawab:
Latis $(\beta, \leq, *, \oplus)$ merupakan Latis Distributif karena Latis $(\beta, \leq, *, \oplus)$ memenuhi sifat distributif. (coba kalian selidiki alasannya)

B. Latis Komplementer

Definisi 4.B.1

Diketahui latis $(\mathcal{L}, \leq, \circledast, \oplus)$ dengan $ulb = 0$ dan $uub = 1$. Elemen $a \in \mathcal{L}$ disebut komplemen dari $b \in \mathcal{L}$ saat memenuhi

1. $a \oplus b = 1$, dan
2. $a \circledast b = 0$

Definisi 4.B.2

Latis $(\mathcal{L}, \leq, \circledast, \oplus)$ merupakan latis komplementer saat setiap elemen di $\mathcal{L}$ mempunyai komplemen.

Teorema 4.B.1

Diberikan latis $(\mathcal{L}, \leq, \circledast, \oplus)$ distributif. Jika suatu elemen $a \in A$, memiliki komplemen , maka komplementennya tunggal.

Bukti:

Diambil sebarang $a \in \mathcal{L}$.

Andaikan, a memiliki 2 komplemen yaitu $b, c \in \mathcal{L}$ sehingga memenuhi:

$a \oplus b = 1$ $a \circledast b = 0$

$a \oplus c = 1$ $a \circledast c = 0$

akan ditunjukkan $b = c$

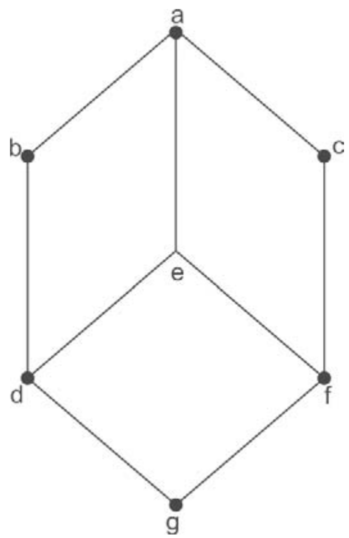
bukti:

$$
\begin{aligned}
b &= b \circledast 1 \\
&= b \circledast (a \oplus c) \\
&= (b \circledast a) \oplus (b \circledast c) \\
&= 0 \oplus (b \circledast c) \\
&= (a \circledast c) \oplus (b \circledast c) \\
&= (a \oplus b) \circledast c \\
&= 1 * c \\
&= c
\end{aligned}
$$

Jadi, terbukti bahwa komplemen setiap $a \in \mathcal{L}$ adalah tunggal.

Contoh 4.B.1

1. Diketahui latis $(A, \leq, *, \oplus)$ dengan diagram hasse di bawah ini.



Selidiki apakah latis di samping merupakan latis komplementer?

Jawab:

Diketahui dari gambar diagram hasse di atas adalah $uub = a\ dan\ ulb = g$

kita akan menentukan apakah setiap elemen di latis $(A, \leq, *, \oplus)$ mempunyai komplemen.

$b \divideontimes c = g\ b \divideontimes f = g\ d \divideontimes c = g\ e \divideontimes \triangle = g$ (1)

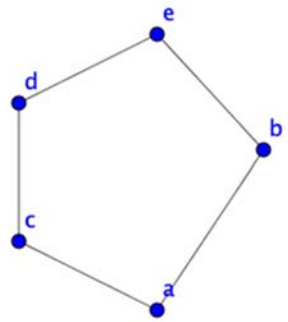
$b \oplus c = a\ b \oplus f = a\ d \oplus c = a\ e \oplus \triangle = a$ (2)

tidak ada △ yang memenuhi (1) dan (2) sehingga elemen e tidak mempunyai komplemen. Sedangkan c dan f adalah komplemen dari b dan d adalah komplemen dari c.

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa latis $(A, \leq, *, \oplus)$ bukan kah latis komplementer karena ada satu elemen di latis $(A, \leq, *, \oplus)$ yang tidak mempunyai komplemen.

(buat 2 soal: satu latis komplementer, satu bukan latis komplementer)

2. Perhatikan pada latis $(B, \leq, *, \oplus)$ di bawah ini



Selidikilah apakah latis $(B, \leq, *, \oplus)$ merupakan latis komplementer?

Jawab:

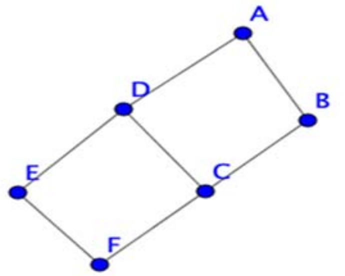
Dari gambar latis $(B, \leq, *, \oplus)$ diperoleh $uub = e\ dan\ ulb = a$. Kita akan menentukan komplemen dari latis $(B, \leq, *, \oplus)$ sebagai berikut.

$$b \divideontimes d = a\ b \divideontimes c = a$$
$$b \oplus d = e\ b \oplus c = e$$

Dari keterangan di atas didapat bahwa d dan c merupakan komplemen dari b, sehingga semua elemen di latis $(B, \leq, *, \bigoplus)$ mempunyai komplemen. Dengan demikian latis $(B, \leq, *, \bigoplus)$ merupakan latis komplemen.

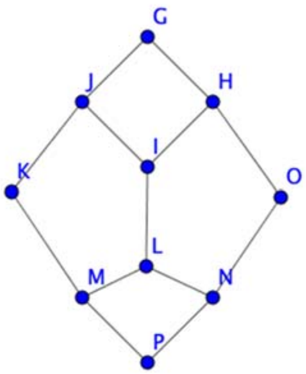
Latihan Soal

1. Diketahui latis $(\mathcal{L}, \leq, ⁎, \bigoplus)$ dengan diagram hasse di bawah ini.



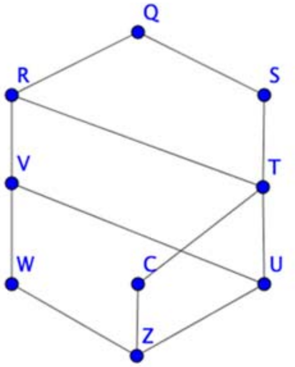
Selidikilah latis $(\mathcal{L}, \leq, ⁎, \bigoplus)$ apakah merupakan latis distributif dan latis komplementer? Berikan alasanmu

2. Diketahui latis $(\mathcal{L}, \leq, ⁎, \bigoplus)$ dengan diagram hasse berikut.



Selidikilah latis $(\mathcal{L}, \leq, ⁎, \bigoplus)$ apakah merupakan latis distributif dan latis komplementer? Berikan alasanmu.

3. Diketahui latis $(\mathcal{L}, \leq, *, \oplus)$ dengan diagram hasse berikut.



Selidikilah latis $(\mathcal{L}, \leq, *, \oplus)$ apakah merupakan latis distributif dan latis komplementer? Berikan alasanmu

4. Diketahui $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$ dengan relasi dapat dibagi. Tentukan:
   a. Gambarkan diagram hassenya.
   b. Apakah N merupakan latis?
   c. Apakah N merupakan latis distributif?
   d. Apakah N merupakan latis komplementer?

Bab 5

Aljabar Boole

Capaian Pembelajaran:
1. Mahasiswa dapat menjelaskan definisi latis Boole dan aljabar Boole. 2. Mahasiswa dapat menyederhanakan ekspresi Boole. 3. Mahasiswa dapat menjelaskan fungsi Boole.

Definisi 5.1
Suatu latis disebut Latis Boole saat latis tersebut memenuhi latis komplementer dan juga latis distributif.

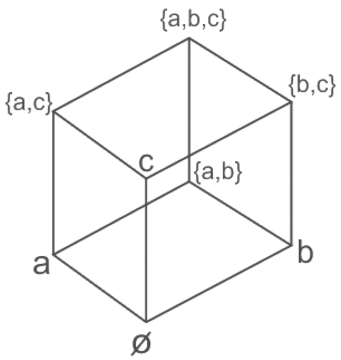
Teorema 5.1
Diberikan Latis (A, ≤, * ⊕) distributif jika suatu elemen $a \in A$ mempunyai komplemen, maka komplemennya tunggal.
Note: Pada Latis Boole, setiap elemen memiliki komplemen tunggal.

Definisi 5.2
Diketahui Latis Boole (A, ≤, *, ⊕) dan didefinisikan suatu operasi " ^{c} ” pada A yaitu $\forall a \in A$, a^c adalah komplemen dari a .
Note: Operasi " ^{c} ” disebut operasi komplementasi.

Definisi 5.3
Aljabar Boole adalah sistem aljabar yang didefinisikan oleh Latis Boole (A, ≤, *, ⊕) dan operasi komplementasi " ^{c} ” . Notasi untuk suatu aljabar Boole adalah sebagai berikut (A, ≤, *, ⊕, ^{c}).

Contoh 5.1
Diberikan himpunan $A = \{a, b, c\}$, didefinisikan $P(A)$ adalah himpunan kuasa dari A, yaitu $P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$. Selidikilah $(P(A), \leq)$ merupakan aljabar Boole.

Jawab:
Buatkah diagram hasse dari $(P(A), \leq)$,



(diberi keterangan)

terlihat bahwa untuk setiap anggota elemen di $P(A)$ mempunyai operasi komplementasi sebagai berikut $\forall\ x \in P(A))\ x^c = A - x.$

Teorema 5.2

Diberikan Aljabar Boole (A, ≤, *, ⊕, ^{c}) untuk setiap a,b ϵ A berlaku hokum De Morgan, yaitu

1. (a ⊕ b)^c = $a^c\ *\ b^c$
2. (a * b)^c = $a^c \oplus b^c$

Bukti:

1. $(A, \leq, *, \oplus, {}^c)$ aljabar Boole

   adit: $(a \oplus b)^c = a^c * b^c$

   bukti:

   kita ketahui bahwa $a * b = 0$

   $a \oplus b = 1$

   Maka b adalah komplemen dari a, sehingga kita akan membuktikan bahwa

   $(a^c * b^c) \oplus (a \oplus b) = 1$

   $(a^c * b^c) * (a \oplus b) = 1$

   Sehingga $a \oplus b$ adalah komplemen dari $(a^c * b^c)$

Bukti I:

$$(a^c * b^c) \oplus (a \oplus b) = 1$$
$$(a^c \oplus a \oplus b) * (b^c \oplus a \oplus b) = 1$$
$$1 \oplus b * (1 \oplus a) = 1$$
$$1 * 1 = 1$$
$$1 = 1$$

Bukti II:

$$(a^c * b^c) * (a \oplus b) = 1$$
$$(a^c * b^c * a) \oplus (a^c * b^c * b) = 0$$
$$(0 * b^c) \oplus (a^c * 0) = 0$$
$$0 \oplus 0 = 0$$
$$0 = 0 \text{ Terbukti}$$

Sehingga terbukti bahwa $a \oplus b$ merupakan komplemen ari $a^c * b^c$, sehingga dapat disimpulkan $(a \oplus b)^c = a^c * b^c$

2. $(A, \leq, *, \oplus, ^c)$ aljabar Boole
   adit $(a * b)^c = a^c \oplus b^c$
   bukti:
   kita akan membuktikan bahwa
   $$(a^c \oplus b^c) \oplus (a * b) = 1$$
   $$(a^c \oplus b^c) * (a * b) = 1$$

Bukti I:

$$(a^c \oplus b^c) \oplus (a * b) = 1$$
$$(a^c \oplus b^c \oplus a) * (a^c \oplus b^c \oplus b) = 1$$
$$(1 \oplus b^c) * (a^c \oplus 1) = 0$$
$$1 * 1 = 1$$
$$1 = 1$$

Bukti II:

$$
\begin{aligned}
(a^c \oplus b^c) * (a * b) &= 0 \\
(a * b * a^c) * (a * b * b^c) &= 0 \\
(0 * b) \oplus (a * 0) &= 0 \\
0 \oplus 0 &= 0 \\
0 &= 0
\end{aligned}
$$

Sehingga dapat disimpulkan bahwa $(a * b)^c = a^c \oplus b^c$

Definisi 5.4

Diketahui latis (A, ≤, *, ⊕) dengan ulb adalah = 0. Elemen $c \in A$ disebut Atom saat c merupakan cover dari 0.

Teorema 5.3

Diberikan (A, ≤, *, ⊕) merupakan latis distributif jika $\forall\, a, c \in A$ memenuhi $a * c^c = 0$ maka $a \leq c$

Bukti:

Diketahui $a * c^c = 0$

$$
\begin{aligned}
a * c^c &= 0 \text{ (kedua ruas dioperasikan dengan } \oplus c) \\
(a * c^c) \oplus c &= 0 \oplus c \\
(a \oplus c) * (c^c \oplus c) &= 0 \oplus c \\
(a \oplus c) * 1 &= c \\
a \oplus c &= c
\end{aligned}
$$

karena batas atas terkecil dari $a \; dan \; c$ adalah c, maka terbukti bahwa $a \leq c$.

Definisi 5.A.5

Diberikan aljabar Boole $(A, \leq, *, \oplus, \;\; ^c)$ dan himpunan tidak kosong $S \subseteq A$. Himpunan S dikatakan sub aljabar Boole dari A saat $(S, \leq, *, \oplus, \;\; ^c)$ juga merupakan aljabar Boole.

Dengan kata lain S sub aljabar Boole dari B dengan syarat S memuat elemen 0 dan elemen 1 serta tertutup terhadap operasi $*, \oplus, dan \;\; ^c$.

Contoh 5.2

Diketahui aljabar Boole $(P(A), \leq, \circledast, \oplus)$ sama seperti pada contoh 5.A.1 yaitu $A = \{a, b, c\}$ dan $0 = \emptyset$ dan $1 = \{a, b, c\}$. Tentukan sub himpunan dari P(A) berikut yang merupakan sub aljabar Boole dari $(P(A), \leq, \circledast, \oplus)$.

1. $S_1 = \{\emptyset, A\}$
   S_1 merupakan sub aljabar Boole dari $(P(A), \leq, \circledast, \oplus)$ karena komplemen dari $\emptyset$ dan A masih menjadi anggota S_1.

2. $S_2 = \{a, b, c\}$
   S_2 bukan merupakan sub aljabar Boole dari $(P(A), \leq, \circledast, \oplus)$ karena komplemen dari a adalah $\{b, c\}$, yang kita ketahui bahwa $\{b, c\} \notin S_2$.

3. $S_3 = \{\emptyset, A, \{a. b\}, c\}$
   Coba kalian selidiki apakah S_3 merupakan sub aljabar Boole dari $(P(A), \leq, \circledast, \oplus)$ ataukah bukan dengan melihat dari contoh 5.A.2 a dan 5.A.2 b

Definisi 5.6

Aljabar Boole A dan variabel-variabel $x_{1,} x_{2,} \dots x_3$ pada A

Ekspresi Boole dalam n variabel $x_{1,} x_{2,} \dots x_n$ di A adalah ekspresi yang dibangun oleh $x_{1,} x_{2,} \dots x_n$ melalui sejumlah pengulangan operasi (≤, *, ⊕ dan ^{c})

Definisi 5.7

Diketahui aljabar Boole $(A, \leq, *, \oplus, {}^c, 0, 1)$. Elemen Boole di dalam A didefinisikan sebagai berikut:

- Setiap unsur di A adalah suatu ekspresi Boole
- Setiap nama variabel adalah suatu ekspresi Boole
- Jika x_1 dan x_2 adalah ekspresi Boole, maka x_1^c, $x_1 \oplus x_2$ dan $x_1 * x_2$ juga merupakan ekspresi Boole.

Definisi 5.8

Diberikan aljabar Boole $(A, \leq, *, \oplus, {}^c, 0, 1)$ fungsi $f: B^n \to B$ disebut fungsi Boole jika $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ merupakan ekspresi Boole.

Contoh 5.3

Diberikan aljabar Boole $(A, \leq, *, \oplus, {}^c, 0, 1)$ dengan A= {a,b} buatlah tabel nilai fungsi Boole:

$f: A^3 \to A$

(x, y, z) → (x ⊕ y) ∗ z Untuk setiap (x,y,z) ϵ A^3

Jawab:

A^3	$f(A^3)$
(0, 0, 0)	$(0 \oplus 0) * 0 = 0$
(1, 0, 0)	$(1 \oplus 0) * 0 = 0$
(0, 1, 0)	$(0 \oplus 1) * 0 = 0$
(0, 0, 1)	$(0 \oplus 0) * 1 = 0$
(1, 1, 0)	$(1 \oplus 1) * 0 = 0$
(1, 0, 1)	$(1 \oplus 0) * 1 = 1$
(0, 1, 1)	$(0 \oplus 1) * 1 = 1$
(1, 1, 1)	$(1 \oplus 1) * 1 = 1$

Latihan Soal

1. Diberikan Aljabar Boole $(A, \leq, *, \oplus, {}^c, 0, 1)$ dengan A = {a,b} buatlah tabel nilai fungsi Boole:

   $f: A^3 \to A$

   $$(x, y) \to (x^c \oplus y) ⋇ (y^c ⋇ 1)\ \forall (x, y) \in A^2$$

2. Diberikan Aljabar Boole $(A, \leq, *, \oplus, {}^c, 0, 1)$ dengan A = {0,1} buatlah tabel nilai fungsi Boole

   $f: A^3 \to A$

   $$(x, y, z) \to (x \bigoplus (y * z^c)) \oplus (x * (y \bigoplus 1))\ \forall (x, y, z) \in A^3$$

Bab 6

Graf

Capaian Pembelajaran:

1. Mahasiswa dapat menjelaskan definisi dan unsur-unsur Graf.
2. Mahasiswa dapat memberikan contoh Graf.
3. Mahasiswa dapat menyebutkan jenis-jenis Graf.
4. Mahasiswa dapat membedakan jenis-jenis Graf.

A. Definisi Graf

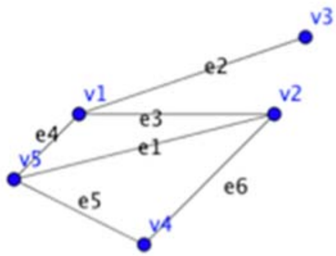
Definisi 6.A.1

Graf *G* didefinisikan sebagai pasangan himpunan (*V*, *E*), dengan *V* adalah himpunan berhingga tak kosong dari simpul-simpul (*vertices*) pada *G*. Sedangkan *E* adalah himpunan rusuk (*edge*) pada *G* yang menghubungkan sepasang simpul.

Himpunan simpul pada Graf *G* dinotasikan dengan *V*, dan himpunan rusuk pada Graf *G* dinotasikan dengan *E*. sehingga Graf G dapat dinotasikan dengan $G = (V, E)$. Biasanya penotasian untuk sebarang graf hanya menggunakan huruf Kapital, misal Graf G.

Contoh 6.A.1

Berikut adalah gambar dari Graf $G = (V, E)$ yang dipenuhi dengan himpunan $V = \{v_1, v_2, v_{3,}, v_4, v_5\}$ dan himpunan $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ dengan definisi $e_1 = \{v_5, v_2\}, e_2 = \{v_1, v_3\}, e_3 = \{v_1, v_2\}, e_4 = \{v_1, v_5\}, e_5 = \{v_5, v_4\}, e_6 = \{v_4, v_2\}$, sehingga kita gambarkan graf dari G adaalah sebagai berikut.



G

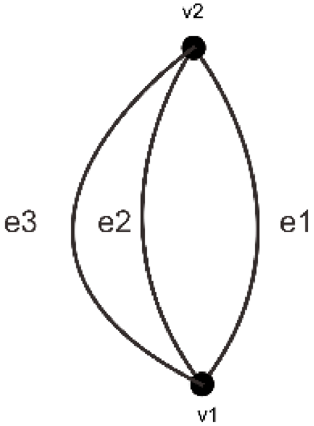
Definisi 6.A.2

Diketahui Graf G suatu rusuk dikatakan gelang (*loop*) saat ujung rusuknya berawal dan berakhir pada simpul yang sama.

Definisi 6.A.3

Diketahui graf G, saat terdapat lebih dari satu rusuk yang bersisian dengan sepasang simpul. Rusuk tersebut dinamakan rusuk ganda.

Contoh 6.A.1



Pada gambar Graf G di samping terlihat pada simpul $v_2\ dan\ v_1$ terdapat 3 rusuk sekaligus yaitu e_1, e_2, e_3

Definisi 6.A.4

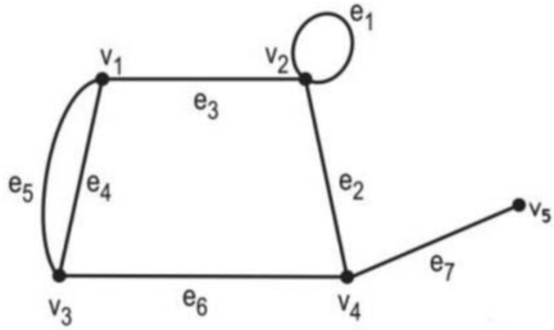
Diketahui Graf G, Dua buah simpul pada graf *G* dikatakan bertetangga (*adjacent*) bila keduanya terhubung langsung dengan sebuah rusuk. Dengan kata lain v_1 bertetangga dengan v_2 jika $\{v_1, v_2\}$ merupakan suatu rusuk di graf G.

Definisi 6.A.5

Diketahui Graf G, untuk sebarang rusuk e_1 dengan definisi $e_1 = \{v_1, v_2\}$, sehingga e_1 dikatakan bersisian (*incident*) dengan simpul v_1 dan simpul v_2.

Contoh 6.A.2

Diketahui Graf G seperti gambar di bawah ini.



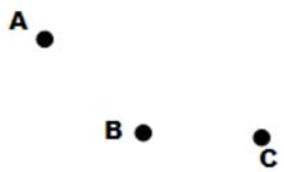
G

Pada Graf G di atas terlihat bahwa e_3 bersisian dengan simpul $v_1\ dan\ v_2$. Kemudian e_1 merupakan loop pada graf G.

Definisi 6.A.6

Graf kosong (*Null Graph or Empty Graph*) adalah graf yang himpunan rusuknya merupakan himpunan kosong. Graf kosong dapat dinotasikan dalam *Nn*, dimana *n* adalah banyaknya simpul.

Contoh 6.A.3



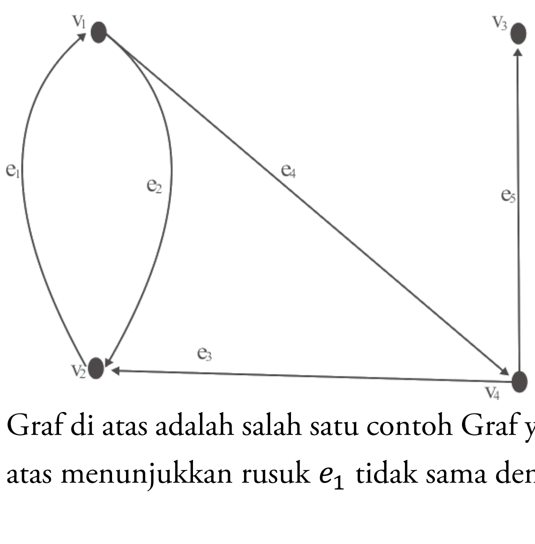
G

Graf G merupakan Graf kosong, Graf G hanya terdiri dari 3 simpul yaitu e_1, e_2 dan e_3.

Definisi 6.A.7

Graf G dikatakan Graf berarah saat rusuk-rusuknya mempunyai orientasi arah.

Contoh 6.A.4



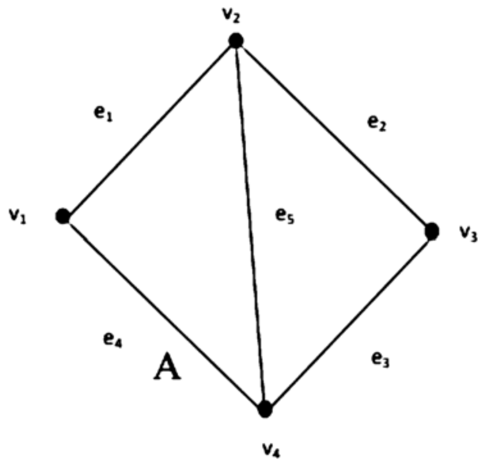
Graf di atas adalah salah satu contoh Graf yang berarah. pada gambar di atas menunjukkan rusuk e_1 tidak sama dengan e_2.

Definisi 6.A.8

Graf G dikatakan Graf tak berarah saat rusuk-rusuk pada Graf G tidak mempunyai orientasi arah

Note: dalam bahasan di buku ini hanya mengenai Graf tak berarah.

Contoh 6.A.5



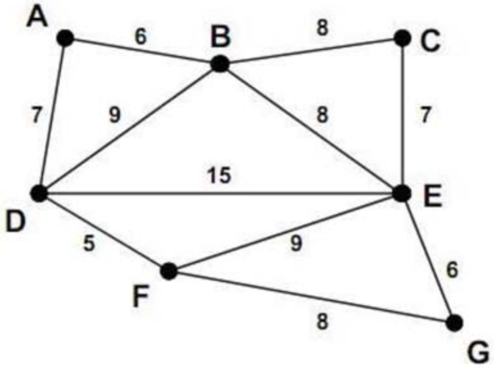
Graf G di samping adalah contoh graf tak berarah yang ditandai dengan setiap rusuknya tidak mempunyai arah.

Definisi 6.A.9

Suatu graf G dikatakan sebagai graf berbobot jika setiap rusuknya mempunyai nilai atau bobot tertentu. Bobot pada graf biasanya dinotasikan dengan w_{ij} dengan i dan j sebagai simpul yang terhubung dengan rusuk yang memiliki bobot w.

Bobot pada tiap rusuk dapat berbeda-beda, tergantung pada masalah yang dimodelkan dengan graf. Bobot pada graf berbobot dapat menyatakan jarak antara dua buah kota, biaya perjalanan antar dua buah kota, ongkos produksi, dan lain sebagainya.

Contoh 6.A.6



Graf di atas adalah contoh dari graf berbobot, dengan setiap rusuk pada graf tersebut memiliki bobot.

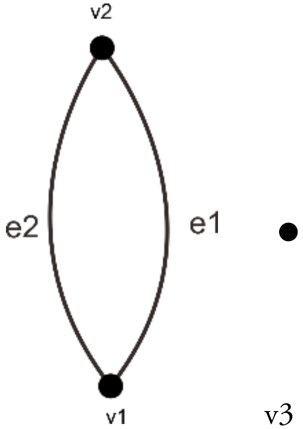
Definisi 6.A.10

Suatu graf dikatakan sebagai graf tidak berbobot jika setiap rusuknya tidak mempunyai nilai atau bobot tertentu.

Definisi 6.A.11

Diketahui Graf G, simpul v dikatakan simpul terasing dari graf G saat simpul tersebut tidak hadir pada sebarang rusuk di graf G.

Contoh 6.A.7



v3 (simpul terasing, tidak ada ikatan apa pun)

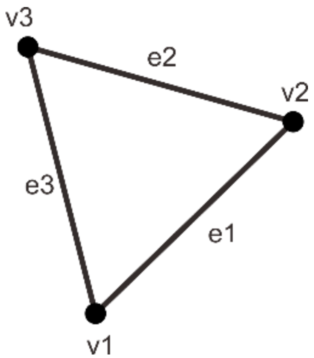
Definisi 6.A.12

Diketahui Graf G, banyaknya simpul pada Graf G disebut Orde.

Definisi 6.A.13

Diketahui Graf G, Banyaknya rusuk pada Graf G disebut size.

Contoh 6.A.8



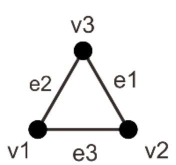
Pada Graf di atas, orde dari graf G di atas adakah 3 yaitu $v_1, v_2, dan\ v_3$, dan size dari Graf G di atas adalah 3 yaitu $e_1, e_2, dan\ e_3$.

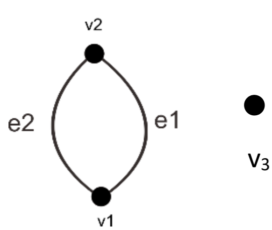
Definisi 6.A.14

Diketahui Graf G, dan misalkan ada simpul v di graf G, Derajat dari simpul v adalah banyaknya rusuk yang hadir di simpul v (*loop* dihitung 2).

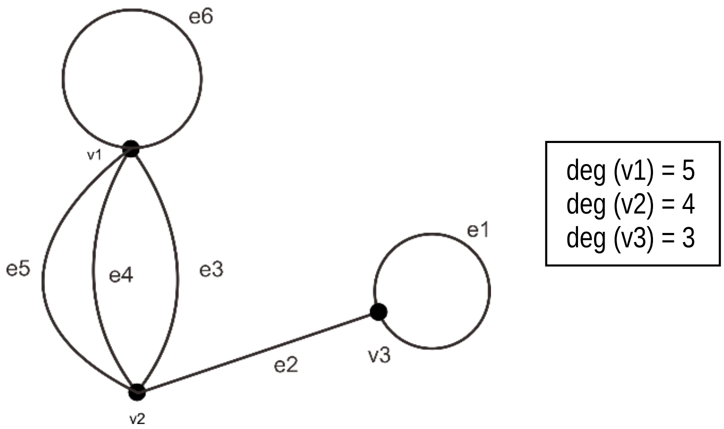
Derajat dari suatu simpul v di Graf G dinotasikan dengan $deg(v)$.

Contoh





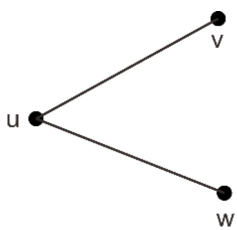
deg (v1) = 2 deg (v2) = 2 deg (v3) = 2	deg (v1) = 2 deg (v2) = 2 deg (v3) = 0



Definisi 6.A.15

Diketahui Graf G, suatu simpul v dikatakan simpul akhir dari suatu graf saat simpul tersebut mempunyai derajat satu.

Contoh 6.A.10



Pada Graf G di atas simpul v dan w merupakan simpul akhir karena masing-masing simpul tersebut berderajat satu.

Teorema 6.A.1

Jumlah derajat simpul dalam suatu graf *G* adalah dua kali banyaknya rusuk atau

$$\sum_{n=1}^{p} deg(v) = 2q$$

Dengan q adalah banyaknya rusuk dari *G* dan *p* adalah banyaknya simpul dari *G*.

Bukti:

Misalkan graf G terdiri dari satu rusuk, berarti G memiliki dua simpul yang masing- masing berderajat satu, sehingga jumlah derajat simpul dalam G adalah dua. Karena setiap rusuk menghubungkan dua simpul, maka setiap rusuk akan menambah jumlah derajat G sebanyak dua. Dengan kata lain, jumlah derajat simpul dalam G adalah dua kali jumlah rusuk.

Teorema 6.A.2

Banyaknya simpul yang berderajat ganjil pada suatu graf adalah genap.

Bukti:

Misalkan V_1 adalah himpunan simpul berderajat ganjil dengan kardinalitas k dan V_2 adalah himpunan simpul berderajat genap dengan kardinalitas r pada graf G. Misalkan pula p adalah orde graf G dan q adalah size nya. Jika $u_i \in V_1$ dan , $v_i \in V_2$ maka menurut Teorema 6.A.1:

$$\sum_{i=1}^{k} d(u_i) + \sum_{j=1}^{r} d(v_j) = 2(q),$$

$$\sum_{i=1}^{k} d(u_i) = -\sum_{j=1}^{r} d(v_j) + 2(q). \qquad (1)$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa k adalah genap. Karena $v_j \in V_2$ dan V_2 adalah kumpulan simpul berderajat genap maka $\sum_{j=1}^{r} d(v_j)$, adalah genap.

Akibatnya $\sum_{i=1}^{k} d(u_i) = -\sum_{j=1}^{r} d(v_j) + 2(q)$ adalah genap. Misal $d(u_i) = 2r_1 - 1, r_i \in \mathbb{N}$ untuk setiap i.

Maka Persamaan (1) dapat ditulis

$$\sum_{i=1}^{k}(2r_i - 1) = -\sum_{j=1}^{r} d(v_j) + 2(q) = 2l, \text{; untuk } r_i, l \in \mathbb{N} \text{ dan } l < q$$

$$\sum_{i=1}^{k}(2r_i) - \sum_{i=1}^{k} 1 = -\sum_{j=1}^{r} d(v_j) + 2(q) = 2l$$

$$k = \sum_{i=1}^{k}(2r_i) - 2l = 2(\sum_{i=1}^{k} r_i - l)$$

Jelas $2(\sum_{i=1}^{k} r_i - l)$ adalah bilangan genap. Jadi, k adalah bilangan genap, atau banyaknya simpul berderajat ganjil adalah genap.

B. Representasi Graf dalam Matriks

Sebarang Graf dapat direpresentasikan dalam bentuk matriks, yaitu:

1. Matriks Adjacency (bertetangga) atau matriks ikatan, dan
2. Matriks Incidence (bersisian) atau matriks kehadiran

Definisi 6.B.1

Diberikan Graf G, berlaku:

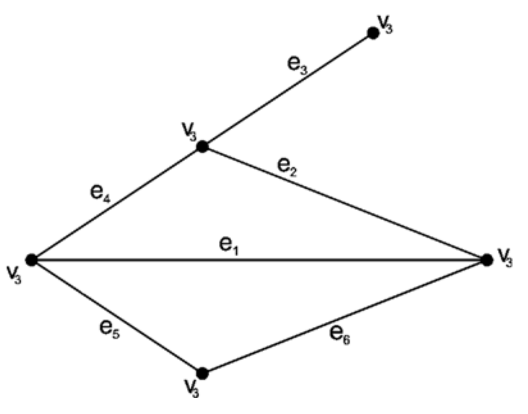
1. setiap simpul dan rusuk yang terhubung menjadi baris atau kolom dalam matrik representasi.
2. Hubungan setiap simpul dan ruas hanya bernilai 1
3. Baris dan kolom menunjukkan urutan simpul-simpul pada graf G.
4. Elemen matriks =1,saat terdapat rusuk antara simpul baris dengan simpul kolom
5. Elemen matriks = 0, saat tidak terdapat rusuk antara simpul baris dan simpul kolom.

Dinotasikan sebagai berikut:

$A = [a_{ij}]$ dengan $a_{ij} \begin{cases} 1\, , jika\ simpul\ i\ dan\ j\ bertetangga \\ 0, , jika\ simpul\ i\ dan\ j\ tak\ bertetangga \end{cases}$

Note: Khusus untuk loop isi pada entri adalah 2.

Contoh 6.B.1

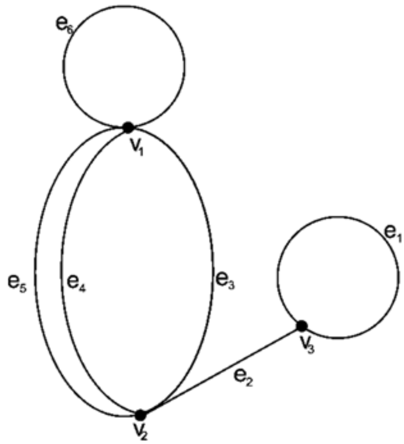


Matrik ikatan dari graf di atas adalah sebagai berikut:

$$\begin{array}{c} \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} V_1 & V_2 & V_3 & V_4 & V_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Contoh 6.B.2

Diberikan Graf G berikut, silahkan kalian tuliskan matrik ikatan dari graf G berikut.



G

Definisi 6.B.2

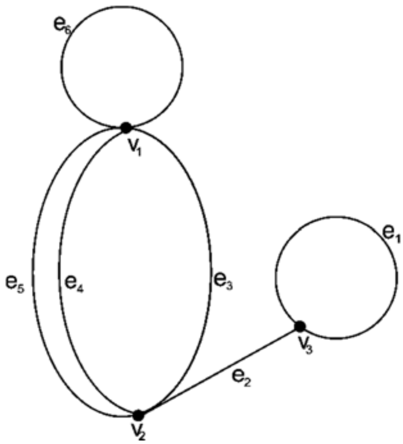
Diketahui Graf G, berlaku:

1. Baris pada matrik kehadiran menunjukkan simpul pada graf G.
2. Kolom pada matrik kehadiran menunjukkan rusuk pada Graf G.
3. Elemenya = 1 saat terdapat rusuk yang hadir pada suatu simpul.
4. Elemennya = 0 saat tidak terdapat rusuk yang hadir pada suatu simpul.

Dinotasikan sebagai berikut:

$A = [a_{ij}]$, dengan $a_ij \begin{cases} 1, jika\ simpul\ i\ hadir\ pada\ rusuk\ j \\ 0, jika\ simpul\ i\ tak\ hadir\ pada\ rusuk\ j \end{cases}$

Contoh 6.B.3



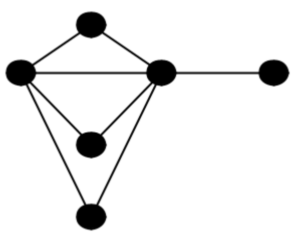
Matrik kehadiran pada graf G di atas adalah sebagai berikut.

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_2 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \begin{array}{c} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

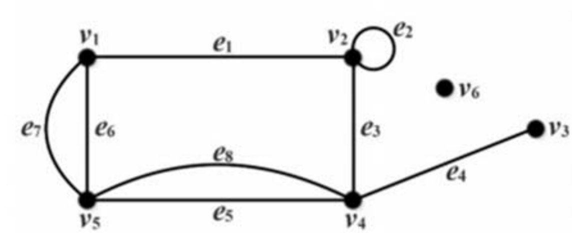
Latihan Soal:

1. Diketahui Graf-graf dibawah ini. Tuliskanlah matriks ikatan dan matriks kehadiran dari graf dibawah ini.

   a.



   b.



2. Diketahui matrik ikatan seperti dibawah ini. Gambarkanlah graf dari masing-masing matriks ikatan yang diketahui.

   a. $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

   b. $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

3. Suatu graf berorde 14 dan ber-size 26. Simpul-simpul pada graf tersebut berderajat 3, 4, atau 5. Jika diketahui terdpat 6 titik berderajat 4, berapakah titik berderajat 3 dan 5?

Bab 7

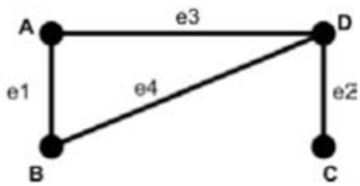
Jenis-jenis Graf

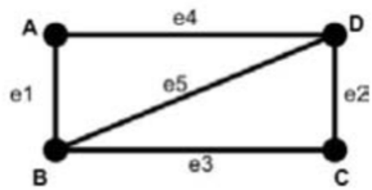
Capaian Pembelajaran:

1. Mahasiswa dapat menjelaskan jenis-jenis Graf.
2. Mahasiswa dapat membedakan jenis-jenis Graf.
3. Mahasiswa dapat memberi contoh pada masing-masing jenis Graf.
4. Mahasiswa dapat menjelaskan sifat-sifat pada masing-masing jenis Graf.

Definisi 7.1
Diketahui g suatu graf, Graf G dikatakan graf sederhana saat graf tersebut tidak mempunyai rusuk ganda dan atau gelang (*loop*).

Contoh 7.1

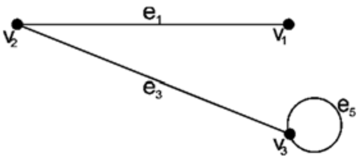




Kedua graf di atas merupakan graf sederhana karena masing-masing graf tidak mempunyai rusuk ganda ataupun loop.

Definisi 7.2
Graf ganda adalah graf yang mengandung rusuk ganda dan atau loop (gelang).

Contoh 7.2

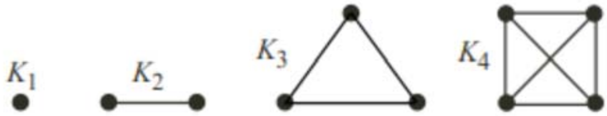


Graf di samping merupakan graf ganda karena terdapat loop yaitu pada rusuk e_5.

Definisi 7.3
Graf lengkap adalah graf sederhana yang setiap dua simpulnya bertetangga.
Note:

1. Graf lengkap dengan *n* buah simpul dilambangkan dengan *Kn*.
2. Setiap simpul pada *Kn* berderajat $n - 1$
3. Banyaknya rusuk pada graf lengkap yang terdiri dari *n* buah simpul adalah $n(n - 1)/2$.

Contoh 7.3



Graf K_1, K_2, K_3 *dan* K_4 merupakan Graf lengkap karena setiap dua simpulnya berikatan (bertetangga).

Definisi 7.4

Graf lingkaran adalah graf sederhana yang setiap simpulnya berderajat dua. Notasi untuk Graf lingkaran dengan n simpul adalah *Cn*

Contoh 7.4

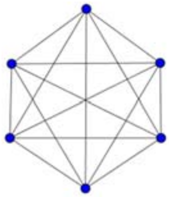
Kedua Graf di atas merupakan Graf lingkaran karena setiap simpul dari masing-masing graf berderajat dua.

Definisi 7.5

Graf teratur adalah graf yang setiap simpulnya mempunyai derajat yang sama.

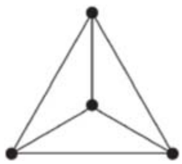
Apabila derajat setiap simpul adalah *r*, maka graf tersebut disebut sebagai graf teratur derajat *r*.

Contoh 7. 5



Graf G di samping merupakan graf teratur karena setiap simpulnya mempunyai derajat yang sama yaitu lima.

G



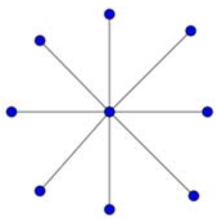
K

Graf K di samping merupakan graf teratur karena setiap simpulnya mempunyai derajat yang sama yaitu tiga.

Definisi 7.6

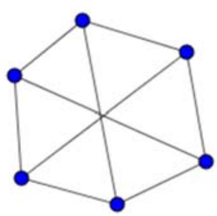
Graf *G* yang himpunan simpulnya dapat dikelompokkan menjadi dua himpunan bagian *V1* dan *V2*, sedemikian sehingga setiap rusuk didalam *G* menghubungkan suatu simpul di *V1* ke suatu simpul di *V2* disebut graf bipartit dan dinyatakan sebagai *G* (*V1*, *V2*).

Contoh 7.6



G

Graf G di samping merupakan graf bipartite karena dari graf G tersebut dapat dihimpun menjadi dua himpunan simpul yang berbeda yang anggotanya berhubungan.



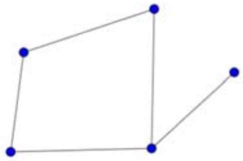
K

Graf K di samping merupakan graf bipartite karena dari graf K tersebut dapat dihimpun menjadi dua himpunan simpul yang berbeda yang anggotanya berhubungan. Dan Graf K disamping merupakan graf bipartite lengkap karena setiap anggota dari dua himpunan graf saling berhubungan.

Definisi 7.7

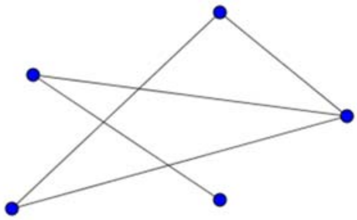
Diketahui G suatu Graf, komplemen dari graf G adalah saat sepasang simpul di graf G berikatan namun pada komplemen graf G sepasang simpul tersebut tidak berikatan, dan sebaliknya. Notasi dari Graf G adalah G^c.

Contoh 7.7



G

Komplemen dari graf G di atas adalah sebagai berikut.

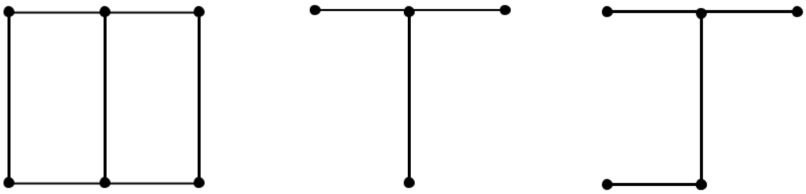


G^c

Definisi 7.8

Misalkan dua graf $H = (V(H), E(H))$ dan $G = (V(G), E(G))$. Graf H disebut subgraf dari G, saat $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$.

Contoh 7.8



G G_1 G_2

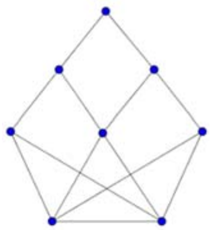
Terlihat dari ketiga graf di atas bahwa G_1 merupakan subgraf dari G. Dikarenakan anggota simpul di G_1 merupakan sub himpunan dari himpunan simpul di G. Begitu pula dengan graf G_2 merupakan subgraf dari G.

Jika $V(H) = V(G)$, maka H dikatakan subgraf perentang dari G. Karena $V(G_2) = V(G)$ pada gambar berikut, maka G_2 merupakan subgraf perentang dari G.

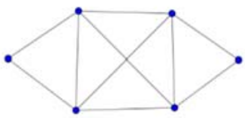
Latihan Soal

1. Tentukan Apakah Graf dibawah ini merupakan Graf Bipartit,dan berikan alasanmu.

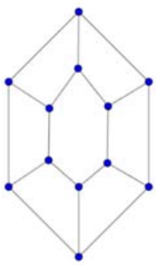
   a.



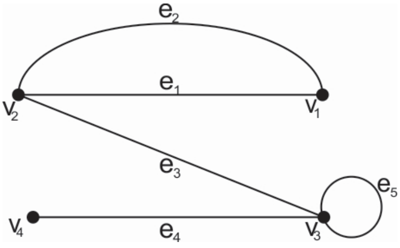
   b.



   c.

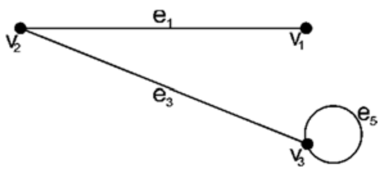


2. Diketahui Graf G adalah sebagai berikut.

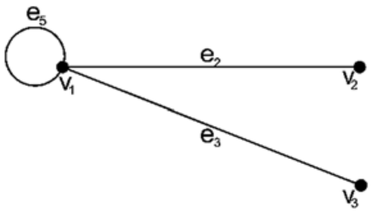


G

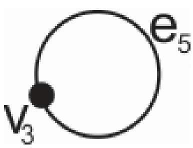
Manakah graf di bawah ini yang merupakan subgraf dari G, dan berikan alasanmu.

a. 

G_1

b. 

G_2

c. 

G_3

Bab 8

Graf Euler dan Hamilton

Capaian Pembelajaran:

1. Mahasiswa dapat menjelaskan definisi lintasan dan *cycle* (sirkuit).
2. Mahasiswa dapat menentukan dari suatu graf suatu lintasan dan *cycle* (sirkuit).
3. Mahasiswa dapat menjelaskan definisi Graf Euler dan Semi Euler.
4. Mahasiswa dapat menentukan suatu graf termasuk Graf Euler, Semi Euler, maupun bukan keduanya.
5. Mahasiswa dapat menjelaskan definisi Graf Hamilton dan Semi Hamilton.
6. Mahasiswa dapay menentukan suatu graf termasuk Graf Hamilton, Semi Hamilton, maupun bukan keduanya.
7. Mahasiswa dapat menyelesaikan masalah sehari-hari dengan menggunakan Graf Euler maupun Hamilton.

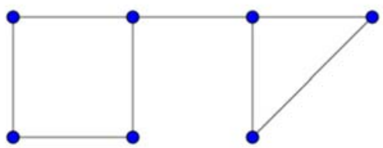
Definisi 8.1

Diketahui Graf G, suatu lintasan di graf G adalah sebuah barisan berhingga (tak kosong) yang suku-sukunya bergantian simpul dan rusuk, sedemikian hinggav_{i-1} dan v_i adalah simpul-simpul dari rusuk e_i , dan dinotasikan $W = (v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_k, v_k)$ untuk $1 \leq i \leq k$.

Definisi 8.2

Sebuah graf G disebut terhubung jika untuk setiap dua simpul u dan v di G terdapat lintasan di G yang menghubungkan kedua simpul tersebut.

Contoh 8.1

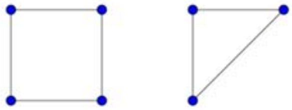


Gambar Graf di samping merupakan graf yang terhubung.

Definisi 8.3

Graf G disebut graf tidak terhubung jika untuk setiap dua simpul u dan v di G tidak terdapat lintasan di G yang menghubungkan kedua simpul tersebut.

Contoh 8.2



G

Graf G di samping merupakan graf tidak terhubung karena di dalam satu graf terdapat 2 graf yang tidak terhubung yaitu e_2 dengan e_5.

Definisi 8.4

Diketahui Graf G, suatu sirkuit pada graf G adalah lintasan pada graf G yang simpul awal dan akhirnya sama.

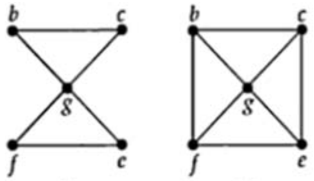
Definisi 8.5

Diketahui G suatu Graf, jika pada graf G terdapat lintasan yang memuat setiap rusuk tepat satu kali pada graf G maka Graf G dikatakan Graf Semi Euler.

Definisi 8.6

Diketahui G suatu Graf, jika pada graf G terdapat sirkuit yang memuat setiap rusuknya tepat satu kali, maka Graf G dikatakan Graf Euler.

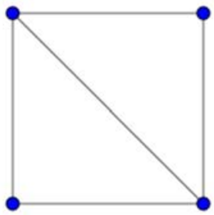
Contoh 8.3



(b) (c)

Graf (b) merupakan Graf euler karena dapat kita temukan sirkuit Euler. (coba kalian tuliskan sirkuit euler dari graf (b)).

Graf (c) Bukanlah Graf Euler maupun Semi Euler karena tidak dapat kita temukan lintasan maupun sirkuit euler.



K

Graf K merupakan Graf Semi Euler karena dapat kita temukan lintasan Euler. (coba kalian tuliskan lintasan Euler dari Graf K).

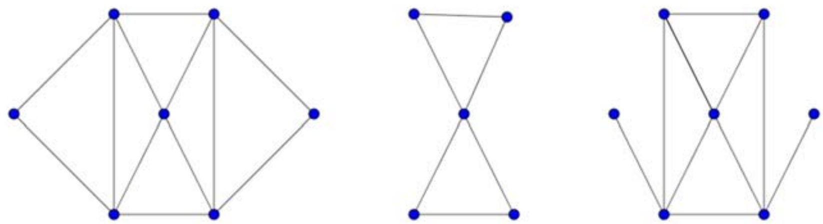
Definisi 8.7

Diketahui Graf G, jika pada Graf G terdapat lintasan yang melalui setiap simpul dan tepat satu kali maka Graf G dikatakan sebagai Graf Semi Hamilton.

Definisi 8.8

Diketahui Graf G, jika pada Graf G terdapat sirkuit yang melalui setiap simpul tepat satu kali maka Graf G dikatakan sebagai Graf Hamilton.

Contoh 8.4



G H K

Perhatikan Graf G, Graf G merupakan Graf Hamilton karena dapat kita temukan sirkuit Hamilton pada graf G (yang melalui setiap simpulnya tepat satu kali dan tidak setiap rusuk dilalui). (coba kalian tuliskan sirkuit Hamilton pada Graf G).

Pada Graf H, Graf ini merupakan Graf Semi Hamilton karena dapat kita temukan lintasan Hamilton pada Graf H. (coba kalian tuliskan lintasan Hamilton pada Graf H).

Pada Graf K, Graf ini bukan termasuk Graf Hamilton Maupun Graf Semi Hamilton, dikarenakan tidak dapat ditemukan lintasan maupun sirkuit Hamilton.

Teorema 8.1

Diketahui G adalah graf terhubung, G adalah graf Euler jika dan hanya jika semua simpul pada G mempunyai derajat genap.

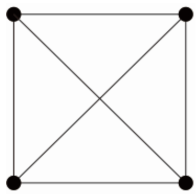
Teorema 8.2

Diketahui G adalah graf terhubung, G adalah Graf Semi Euler jika dan hanya jika mempunyai tepat dua simpul berderajat ganjil.

Definisi 8.9

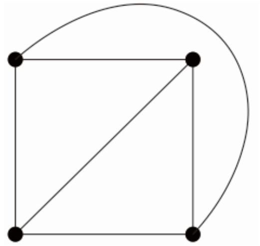
Graf planar adalah graf pada bidang datar dimana rusuk pada graf tersebut tidak bersilangan dengan rusuk yang lain.

Contoh 8.5



G

Graf G di atas merupakan Graf planar karena representasi dari graf G dapat diubah seperti berikut.



H

Dapat dilihat bahwa pada Graf H tidak terdapat rusuk yang bersilangan.

Teorema 8.3

Diketahui graf G adalah graf terhubung planar dengan v adalah simpul, e adalah rusuk, f adalah wajah, maka :

$$v - e + f = 2$$

Bukti:

Dengan menginduksi pada jumlah rusuk. Jika $= 0$, maka graf G hanya mempunyai satu simpul, dan jumlah wajah pada graf G tersebut adalah satu. Jelas bahwa $v - e + f = 2$. Anggap benar untuk graf planar dengan k rusuk, dengan $k > 0$. Dimisalkan sebuah graf terhubung planar dengan $k + 1$ rusuk, maka graf G bisa memiliki sirkuit, dan tidak memiliki sirkuit.

Jika G tidak memiliki sirkuit, maka graf G merupakan sebuah pohon, maka $e = y - 1$ (setiap pohon dengan simpul v memiliki $v - 1$ rusuk) dan $f = 1$ jadi dapat disimpulkan $v - e + f = 2$. Jika graf G memiliki sirkuit C, memilih rusuk x di C dan menghapus x dari graf G maka akan mendapatkan graf planar baru yaitu G'. Karena x ada pada sirkuit, G' masih terhubung dan memiliki simpul yang sama dengan graf G, tetapi G memiliki k rusuk. Induksi di atas diperoleh $v' - e' + f = 2$. Jika x tidak dihapus, maka terdapat 2 wilayah, yaitu terletak di dalam sirkuit dan di luar dihapus, maka terdapat 2 wilayah, yaitu terletak di dalam sirkuit dan di luar sirkuit tersebut. Jadi $v' = v, e' = e - 1, f = f - 1$ berakibat $v - e + f = 2$.

Teorema 8.4
Misalkan G adalah graf sederhana dalam n simpul, dengan n ≥ 3. Jika deg(v) ≥ n/2, untuk setiap simpul v, maka G adalah graf Hamilton.

Teorema 8.5
Misalkan G adalah graf sederhana dalam n simpul, dengan n ≥ 3. Jika deg(v) + deg (w) ≥ n, untuk setiap pasang simpul v dan w yang tidak saling adjacent (berikatan), maka G termasuk graf Hamilton.

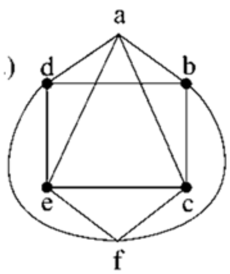
Teorema 8.6
Di dalam graf lengkap G dengan n buah simpul ($n \geq 3$), terdapat $\frac{(n-1)!}{2}$ buah sirkuit Hamilton.

Teorema 8.7
Di dalam graf lengkap G dengan n buah simpul ($n \geq 3\ dan\ n\ ganjil$), terdapat $(n - 1)/2$ buah sirkuit Hamilton yang saling lepas (tidak ada sisi yang beririsan). Jika n genap dan $n > 4$, maka di dalam G terdapat $\frac{n-2}{2}$ buah sirkuit Hamilton yang saling lepas.

Note:

Beberapa Graf dapat memuat sirkuit euler dan sirkuit Hamilton, atau sirkuit euler dan lintasan Hamilton, atau lintasan euler sirkuit Hamilton, atau bahkan tidak memuat sirkuit dan lintasan Euler maupun Hamilton. Berikut akan diberikan contohnya.

Contoh 8.6



G

Graf G di atas merupakan Graf Euler dan Graf Hamilton karena dapat ditemukan sirkuit euler maupun Hamilton. (coba kalian tulis sirkuit Euler dan Hamiltonnya).

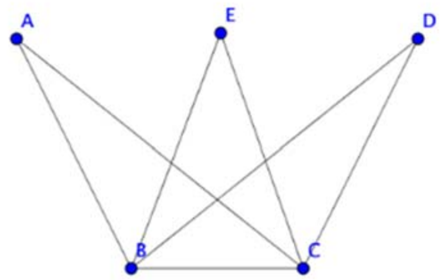
H

Graf H di atas merupakan Graf Semi Euler dan sekaligus Graf Hamilton karena dapat ditemukan lintasan Euler dan Sirkuit Hamilton. (Coba kalian tulis lintasan Euler dan Sirkuit Hamilton pada Graf H).

Definisi 8.10

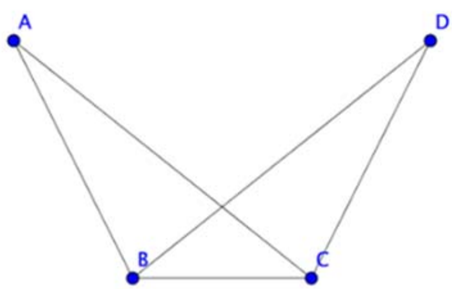
Diketahui G suatu Graf, jika simpul v pada Graf G dihapus/dihilangkan maka rusuk yang hadir pada v juga terhapus.

Contoh 8.7



G

Jika pada Graf G simpul E dihapus maka Graf G menjadi

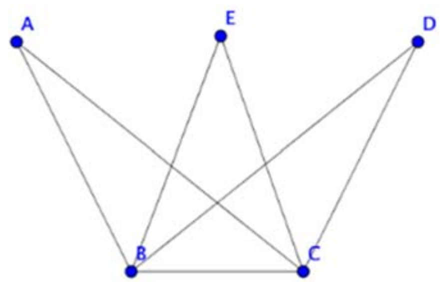


Dua rusuk yang hadir pada simpul E otomatis hilang

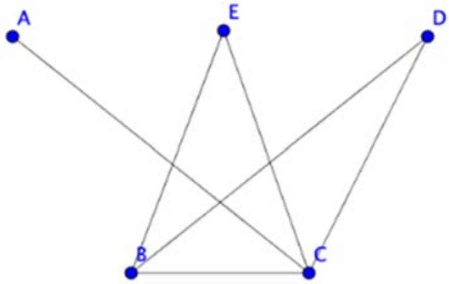
Definisi 8.11

Diketahui G suatu Graf, jika rusuk e pada Graf G dihapus/dihilangkan maka simpul yang berikatan dengan rusuk e, tidak ikut terhapus.

Contoh 8.8



Jika pada Graf G di atas rusuk AB dihapus makan Graf G menjadi.

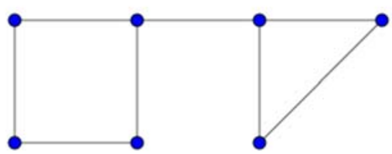


Terlihat bahwa simpul A dan simpul B yang berikatan dengan rusuk AB masih tetap ada pada Graf G.

Definisi 8.12

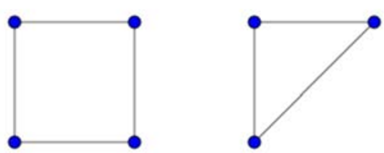
Diketahui G adalah Graf, rusuk pada G dikatakan sebagai jembatan jika rusuk tersebut dihapus maka Graf G menjadi Graf tak terhubung.

Contoh 8.9



H

Pada Graf H di atas jika rusuk e_5 dihapus maka graf H menjadi

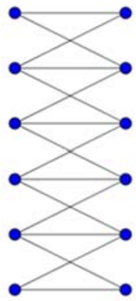


Yang mengakibatkan graf H menjadi Graf tak terhubung.

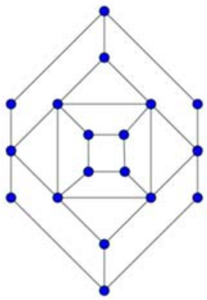
Latihan Soal

1. Selidikilah Graf-Graf berikut termasuk pada Graf Euler, Graf Semi Euler, Graf Hamilton, Graf Semi Hamilton, atau bukan semuanya.

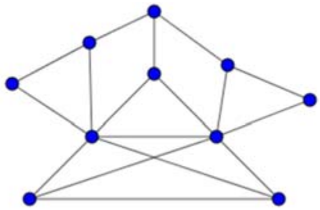
   a.



   b.



   c.



2. Gambarkan Graf yang merupakan Graf Euler sekaligus Semi Hamilton, Graf Semi Euler sekaligus Hamilton, Graf Euler sekaligus Hamilton, dan Graf yang bukan Graf Euler sekaligus bukan Hamilton.

Daftar Pustaka

Lipschutz, Seymour. 2008. *Matematika Diskrit*. Jakarta: Erlangga.

Liu, C. L. 2005. *Dasar-Dasar Matematika Diskrit*. Bandung: Informatika Bandung.

Munir Rinaldi. 2005. *Matematika Diskrit*. Bandung: Informatika Bandung.

Siang, J. J. 2009. *Matematika Diskrit dan Aplikasinya pada Ilmu Komputer.* Yogyakarta: Andi Press.

Rosen Kenneth H. 2007. *Discrete Mathematics and Its Application*. New York: McGrow-Hill Company.

Rahayuningsih, Sri. 2018. *Bahan Ajar Teori Graph dan Penerapannya*. Malang: Unidha Press.