

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ENGENHARIA - CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA
TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

ANÁLISE DINÂMICA DE PASSARELA METÁLICA SUBMETIDA A
CARREGAMENTO DECORRENTE DA AÇÃO HUMANA

por

Reviel Fochezatto

Monografia apresentada ao Departamento de Engenharia Mecânica da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Engenheiro Mecânico.

Porto Alegre, novembro de 2021

CIP - Catalogação na Publicação

Fochezatto, Reviel
ANÁLISE DINÂMICA DE PASSARELA METÁLICA SUBMETIDA A
CARREGAMENTO DECORRENTE DA AÇÃO HUMANA / Reviel
Fochezatto. -- 2021.
30 f.
Orientador: Prof^a. Dr^a. Leticia Fleck Fadel Miguel.

Trabalho de conclusão de curso (Graduação) --
Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Escola de
Engenharia, Curso de Engenharia Mecânica, Porto
Alegre, BR-RS, 2021.

1. Análise dinâmica. 2. Passarela. 3. Vibrações
Análise. 4. Análise modal. I. Miguel, Prof^a. Dr^a.
Leticia Fleck Fadel, orient. II. Título.

Reviel Fochezatto

ANÁLISE DINÂMICA DE PASSARELAS METÁLICAS SUBMETIDAS A
CARREGAMENTOS DECORRENTES DA AÇÃO HUMANA

ESTA MONOGRAFIA FOI JULGADA ADEQUADA COMO PARTE DOS
REQUISITOS PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
ENGENHEIRO MECÂNICO
APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELA BANCA EXAMINADORA DO
CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Prof. Cirilo Seppi Bresolin
Coordenador do Curso de Engenharia Mecânica

Escolher uma das áreas de concentração: Energia e Fenômenos de Transporte/Processos de
Fabricação/Mecânica dos Sólidos

Orientador: Prof^ª. Dr^ª. Letícia Fleck Fadel Miguel

Comissão de Avaliação:

Prof. Edson Aseka

Prof. Juan Pablo Raggio Quintas

Prof^ª. Letícia Fleck Fadel Miguel

Porto Alegre, novembro de 2021

Aos meus pais e irmãos

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, por todos os privilégios e por guiar meu caminho.

Aos meus pais, Virginio Fochezatto e Leni G. P. Fochezatto por terem compartilhado esse sonho comigo e batalhado, incansavelmente, para se tornar realidade. Agradeço também por todos os sacrifícios, por me concederem disponibilidade para estudar e, principalmente, pelos dois melhores presentes que já recebi: meus irmãos Leivir Fochezatto e Rezia Pavanatto Fochezatto.

À minha cunhada, Dr^a. Roberta Cristina Sawitzki, pela prontidão, presteza e voluntariedade na revisão deste estudo.

À minha namorada, Ana Paula de Lima, por dividir minhas ansiedades e angústias, por sempre me incentivar a atingir os meus objetivos e me alegrar em dias esmorecidos. Te amo.

Aos amigos, por nossos caminhos terem se cruzado.

Ao colega Thiago Friedrich, pelo apoio em momentos cruciais na execução deste estudo.

Agradeço à UFRGS, pela metodologia de ensino rígida e eficaz, por ter moldado meu caráter e me ensinado a sair da inércia.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ENGENHARIA - CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA
TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO – 2021

ANÁLISE DINÂMICA DE PASSARELA METÁLICA SUBMETIDA A
CARREGAMENTO DECORRENTE DA AÇÃO HUMANA

Fochezatto, Reviel
revielf@gmail.com

RESUMO

Estudos indicam que estruturas chegam a sofrer colapso a partir da ação de vandalismo por parte de pedestres. Neste contexto, este trabalho objetivou analisar o comportamento da passarela metálica devido às ações provocadas por humanos e, adicionalmente, verificar se a estrutura foi dimensionada corretamente e se é capaz de suportar uma travessia segura e confortável para os pedestres. Foram calculadas as matrizes de massa, rigidez e amortecimento, bem como as frequências naturais pelo software Matlab. Após, foi definido o carregamento de um pedestre pulando no centro da estrutura. Com o problema e suas condições de contorno elaboradas, o método de integração numérica de Newmark foi utilizado para determinar a resposta dinâmica das passarelas em termos de deslocamento, velocidade e aceleração em cada nó. Os resultados demonstraram que a passarela estudada é facilmente excitada pela ação de pedestres, encontrando-se acelerações que extrapolam os limites de estudos e normas. Diante destes resultados, pode-se perceber que a estrutura situou-se fora da faixa de segurança e conforto, assim, ficando evidente a necessidade de um sistema de controle de vibrações.

Palavras-chave: Análise dinâmica; Passarela; Vibrações; Análise modal.

ABSTRACT

**DYNAMIC ANALYSIS OF METALLIC FOOTBRIDGE SUBMITTED TO LOADING
RESULTING FROM HUMAN ACTION**

Studies show that the structure suffers degradation by the action of pedestrians. In this context, the objective was to analyze the behavior of the metallic footbridge due to the actions caused by humans, verifying if the structure was correctly dimensioned and if it is capable of supporting a safe and comfortable crossing for pedestrians. The mass, stiffness and damping matrices were calculated, as well as the natural frequencies by the Matlab software. Afterwards, the loading of a pedestrian jumping in the center of the structure was defined. With the problem and its boundary conditions elaborated, the Newmark numerical integration method was used to determine the dynamic response of the footbridge in terms of displacement, velocity and acceleration at each node. The results showed that the studied footbridge is easily deformed by the action of pedestrians, accelerations were found that go beyond the limits of studies and standards, soon, the structure is outside the safety and comfort range, thus the need for a vibration control system is evident.

Keywords: Dynamic analysis; Footbridge; Vibrations; Modal analysis.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1.1 – Millennium Bridge.....	12
Figura 1.2 – Passarela Simone de Beauvoir.....	13
Figura 2 – Função do carregamento para o saltar.....	14
Figura 3 – Fluxograma de realização do trabalho.....	15
Figura 4 – Passarela Warren.....	15
Figura 5 – Primeiro e segundo modo de vibração da frequência natural passarela Warren ($f_{01}= 5,996$ Hz e $f_{02}= 16,036$ Hz).....	19
Figura 6 – Terceiro e quarto modo de vibração da frequência natural passarela Warren ($f_{03}= 33,916$ Hz e $f_{04}= 41,245$ Hz).....	19
Figura 7 – Quinto modo de vibração da frequência natural passarela Warren ($f_{05}= 55,977$ Hz).....	19
Figura 8 – Deslocamento e velocidade vertical do nó central em relação ao carregamento dinâmico.....	21
Figura 9 – Aceleração vertical do nó central em relação ao carregamento dinâmico.....	21
Figura 10 – Deslocamento e velocidade do nó central em relação ao carregamento dinâmico com frequência de pulso de 1,6 Hz.....	21
Figura 11 – Aceleração vertical do nó central em relação ao carregamento dinâmico com frequência de pulso de 1,6 Hz.....	22

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Áreas das seções transversais da estrutura estudada.....	16
Tabela 2 – Comparação analítica e numérica das cinco primeiras frequências naturais.....	19
Tabela 3 – Parâmetros para análise dinâmica e Newmark.....	20
Tabela 4 – Acelerações máximas da passarela Warren.....	22
Tabela 5 – Comparação entre a aceleração vertical limite e os resultados encontrados.....	23

SUMÁRIO

1.	INTRODUÇÃO.....	10
2.	FUNDAMENTAÇÃO.....	11
2.1	Carregamento humano.....	13
2.2	Normas e Estudos.....	14
3.	METODOLOGIA.....	14
3.1	Descrição da Passarela.....	15
3.2	Formulações Matemáticas.....	16
3.3	Método de Newmark.....	17
3.4	Método de Elementos Finitos.....	18
4.	RESULTADOS.....	18
4.1	Análise modal.....	18
4.2	Análise dinâmica.....	20
4.3	Análise de conforto e segurança.....	23
5.	CONCLUSÃO.....	23
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	25
	ANEXO.....	27
	APÊNDICE.....	29

ANÁLISE DINÂMICA DE PASSARELAS METÁLICAS SUBMETIDAS A CARREGAMENTOS DECORRENTES DA AÇÃO HUMANA

Fochezatto, Reviel
revielf@gmail.com

INTRODUÇÃO

Pontes e passarelas são projetadas e construídas para possibilitar a travessia de um ponto a outro sobrepondo, por exemplo terrenos acidentados, rodovias, lagos, lagoas e rios. Com o avanço tecnológico da Engenharia, novos materiais foram sendo utilizados para projetar pontes e passarelas, passando das pontes de madeira ou pedra (situação encontrada até o final do século XVIII), pela utilização de ferro fundido (a partir de 1734) e também de aço estrutural (por volta de 1840) (PINHO; BELLEI, 2007). A partir da revolução industrial, houve a difusão de novas tecnologias, e no caso da indústria siderúrgica, a aceleração da utilização de estruturas metálicas. Segundo Pinho e Bellei (2007), em 1840 surgiu, nos Estados Unidos, a primeira ponte inteiramente de treliça metálica; já nos países europeus, como Alemanha e Inglaterra, essas pontes surgiram no final do século 19.

Atualmente, as passarelas desempenham um papel fundamental quando se trata de mobilidade, pois criam uma passagem segura entre dois pontos e podem ser instaladas sobre obstáculos naturais, como lagos, ou sobre obstáculos artificiais, como rodovias (FRANCO, 2015). Adicionalmente, são utilizadas como ponto turístico e cartões postais de grandes cidades, por exemplo, a passarela “516 Arouca”, maior passarela do mundo, localizada ao norte de Portugal.

Os benefícios dessas estruturas metálicas são atrativos: a) a facilidade e rapidez da montagem acabam diminuindo o tempo e, portanto, o custo da obra; b) a estrutura é mais leve e versátil do que as passarelas feitas de concreto e conta com uma resistência elevada; c) devido à essa resistência do material, é possível utilizar estruturas menores e grandes vãos entre apoios, consequentemente, é obtido um arranjo com baixo amortecimento estrutural e elevada flexibilidade. Todos esses pontos trazem como consequência negativa a problemática de tornar a construção sensível às cargas dinâmicas (PEREIRA, 2017).

Tradicionalmente, profissionais habilitados não levam em consideração os efeitos dinâmicos ao efetuarem projetos, assim, preferindo superdimensionar a estrutura aplicando um elevado fator de segurança (AOKI, 2008). Isso ocorre, principalmente, devido à baixa qualificação do engenheiro projetista e também ao tempo disposto para executar o projeto. Essas questões são preocupantes, pois as ações dinâmicas de pedestres em frequências próximas aos modos naturais da estrutura podem apresentar elevadas amplitudes de vibração, logo, as cargas dinâmicas provenientes desta amplitude de vibração podem ser significativas, gerando solicitações à estrutura acima do previsto no cálculo estático (FIGUEIREDO, 2005). Vibrações excessivas além de causarem desconforto aos pedestres ocasionam degradação estrutural por fadiga (CARVALHO, 2017). Uma das alternativas para minimizar as vibrações seria projetar um dispositivo de controle, como um amortecedor de massa sintonizado (AMS) (VALENCIA, 2007); (MIGUEL; RIERA, 2008); (SILVA, 2020). O equipamento consiste em uma massa, uma mola e um amortecedor viscoso conectado ao sistema principal. A frequência do amortecedor é sintonizada em uma frequência natural próxima à da massa principal. Por fim, a vibração da estrutura é dissipada pelo dispositivo de controle passivo (MIGUEL; RIERA, 2008); (SILVA, 2020).

Dada a importância e relevância do tema e, a partir da leitura de trabalhos anteriores (FIGUEIREDO, 2005); (VALENCIA, 2007); (MIGUEL; RIERA, 2008); (CARVALHO, 2017); (SILVA, 2020), surgiu o interesse em investigar parte da dissertação de mestrado de Gustavo Ayres da Silva intitulada “Otimização de parâmetros de projeto de amortecedores de

massa sintonizados para controle de vibrações em passarelas metálicas” (SILVA, 2020), trabalho de grande contribuição na área de mecânica dos sólidos, onde foi realizado uma otimização de parâmetros em amortecedores de massa sintonizados para controle de vibrações em passarelas metálicas. No presente trabalho de conclusão de curso, realizou-se um recorte nas sessões 5.2 e 5.3, referentes à “Verificação do algoritmo de análise modal” e à “Verificação do algoritmo de análise dinâmica”, respectivamente. As passarelas e suas condições de contorno a serem validadas foram apresentadas no artigo da “*A firefly algorithm for the design of force and placement of friction dampers for control of man-induced vibrations in footbridges*”, uma referência na área (MIGUEL, 2015).

Diante do exposto, estipulou-se como problemática a ser investigada a seguinte questão de pesquisa: como se comportam as passarelas metálicas a partir das ações provocadas por humanos? Com o intuito de responder a essa questão, elaborou-se como objetivo geral: **analisar o comportamento das passarelas metálicas devido às ações provocadas por humanos, verificar se esta foi dimensionada corretamente e se a estrutura é capaz de suportar uma travessia segura e confortável para os pedestres.**

Para alcançar o objetivo geral, optou-se por focar o trabalho sobre a análise modal tanto analiticamente quanto numericamente, com o intento de encontrar as frequências naturais da passarela. Posteriormente, utilizou-se o método Newmark para simular a carga dinâmica (pedestre pulando no centro da passarela) para se obter uma resposta dinâmica.

O presente trabalho está assim estruturado: após esta introdução é apresentada a Fundamentação Teórica abordando os principais pilares que embasaram o carregamento dinâmico aplicado a estrutura e as normas utilizadas para verificação de conforto da passarela; na sequência é abordada a metodologia utilizada para resolver a questão de pesquisa deste estudo (quais sejam: descrição de parâmetros da estrutura; equação do movimento; método Newmark; matrizes do sistema; métodos dos elementos finitos (MEF) em passarelas); após são apresentados os resultados obtidos a partir do emprego da metodologia e, por fim, é exposta a conclusão do estudo trazendo as considerações finais, achados e limites desta pesquisa.

2. FUNDAMENTAÇÃO

Segundo os autores Stoyanoff e Hunter (2003), as vibrações provocadas por pedestres não chegam a causar suscetibilidade em estruturas com vãos pequenos. Porém, quando a distância entre os vãos é ampliada, as frequências naturais da estrutura diminuem. Nesse sentido, para impedir a amplificação das vibrações, deve-se empreender esforços para evitar o fenômeno de ressonância, “isto é, que a frequência das forças produzidas por pedestres não esteja em sincronia com as frequências naturais da estrutura” (LAGO; BIRCK; TOSO, 2020, p. 70).

O movimento de caminhar dos pedestres resulta em esforços verticais com frequências variando entre 0,75 Hz a 2,0 Hz e forças laterais entre 0,75 Hz a 2,0 Hz, sendo assim, quando as frequências naturais forem menores do que 5,0 Hz na direção vertical e 2,5 Hz na direção lateral é necessário que se desenvolva um estudo aprofundado e robusto sobre vibrações em passarelas (STOYANOFF; HUNTER, 2003). Durante a caminhada são geradas forças dinâmicas via aceleração e desaceleração da massa do corpo nas seguintes direções: vertical, horizontal-lateral e horizontal-longitudinal (LAGO; BIRCK; TOSO, 2020). Cabe reforçar que algumas interações entre humanos e estruturas podem coincidir com frequências naturais ocorridas em estruturas de aço concreto, madeira, materiais compósitos, entre outros (ZIVANOVIC et al., 2005a).

Em outro trabalho, esses mesmos autores (ZIVANOVIC et al., 2005b) alertam que os projetos desenvolvidos tendem a avaliar os níveis de vibrações estruturais assumindo que força de excitação se trata de uma força senoidal com velocidade constante. Ainda, para esses autores,

a frequência gerada a partir da caminhada vertical varia entre 1,5 e 2,4 Hz, “ou em múltiplos inteiros do valor, caso harmônicos subsequentes sejam considerados” (LAGO; BIRCK; TOSO, 2020, p. 70). A tendência é de se aferir os três primeiros harmônicos da ação de caminhar, averiguando se estas frequências coincidem com as frequências naturais estruturais (ZIVANOVIC et al., 2005b).

Estudos posteriores indicam que os pedestres tendem a modificar sua maneira de caminhar quando sentem vibrações nas estruturas, alterando a quantidade de passos assim como reduzindo a força vertical empregada, o que corrobora com o entendimento de que o homem é receptor das vibrações estruturais (ZIVANOVIC et al., 2009), adicionalmente, indivíduos tendem a atravessar uma passarela caminhando sobre ela, mas existem situações em que o fazem via movimento de corrida ou **pulo**. Autores como Blanchard et al. (1977) e Bachmann (2002) salientam que estruturas chegaram a sofrer colapso a partir da ação de vandalismo por parte de pedestres. As vibrações estruturais podem não somente causar desconforto ao ser humano como também, em alguns casos, provocar colapso na estrutura, como já se observou na Millennium Bridge (Figura 1a) e na passarela Simone de Beauvoir (Figura 1b). Enquanto no primeiro caso o excesso de vibrações ocorridas durante a cerimônia de abertura realizada no ano 2000 provocou a sua interdição por dois anos (período em que se focou na investigação e eliminação do excesso de vibrações laterais provocadas a partir da circulação de um número alto de pedestres, acima de duas mil pessoas), no segundo caso foram relatadas sensações de desconforto sentidas pelos pedestres ao cruzarem a estrutura, provocando a investigação e avaliação das vibrações estruturais (LAGO; BIRCK; TOSO, 2020).

Figura 1.1 – Millennium Bridge.



Fonte: Arquitecturaviva (2021)¹

¹ Disponível em: <https://arquitecturaviva.com/works/puente-del-milenio-1>. Consultado em 02/11/2021.

Figura 1.2 – Passarela Simone de Beauvoir.



Fonte: Arqusetablog (2021)²

Diante desse cenário, muitos estudos foram realizados com o intuito de investigar e definir procedimentos para calcular a dimensão adequada de estruturas tais como pontes e passarelas no que diz respeito ao impacto da caminhada humana (IGLESES, 2015).

Dentre os carregamentos que podem ser simulados, neste trabalho optou-se por utilizar a ação de um pedestre pulando no centro da estrutura, assim, obtendo um carregamento agressivo se comparado aos esforços de um pedestre caminhando ou correndo. Adicionalmente, foram comparados os limites encontrados em normas e estudos para verificar a necessidade de tomar medidas para contenção de vibrações na estrutura. As seções 2.1 e 2.2 trazem informações que embasam esta escolha

2.1. Carregamento humano.

O carregamento de um pedestre pulando é uma ação de impacto, condiz unicamente ao deslocamento vertical e tem caráter periódico. Logo, a força transmitida à estrutura devido essa ação ocorre no sentido vertical. Segundo Bachmann e Ammann (1987) a carga para a ação de uma pessoa pulando é expressa pela equação a seguir.

$$F_p(t) = k_p G \operatorname{Sen} \left(\pi \frac{t}{t_p} \right) \quad \text{Para } t \leq t_p$$

$$F_p(t) = 0 \quad \text{Para } t_p < t \leq T_p$$
(2.1)

Onde:

k_p = Fator de impacto dinâmico;

G = Peso da pessoa, em N;

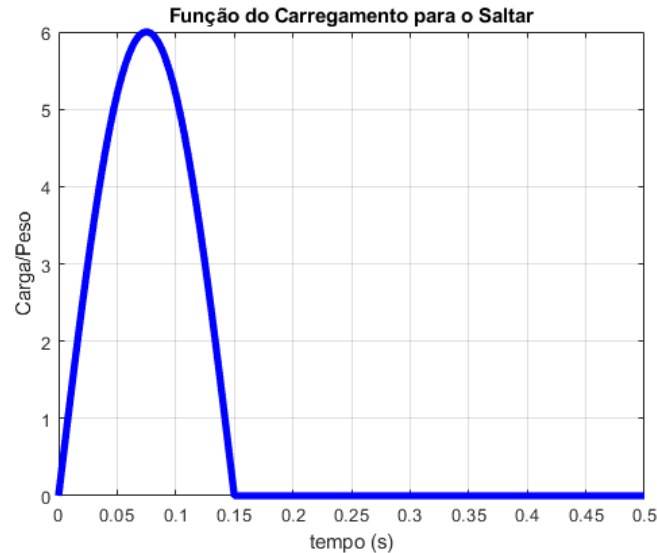
t_p = Duração do contato, em segundos;

$T_p = 1/f_p$ = Período do pulo

² Disponível em: <http://arqusetablog.blogspot.com/2012/04/passarela-simone-de-beauvoir.html>. Consultado em: 02/11/2021.

Utilizando os parâmetros de Bachmann e Ammann (1987): que são $G = 800\text{N}$; $f_p = 2\text{Hz}$; $k_p = 6$; $t_p = 0,15$. Aplicando os valores a equação 2.1, tem-se:

Figura 2 - Função do carregamento para o saltar.



Comparando a figura 2 com a função do carregamento demonstrada em Bachmann e Ammann (1987), é possível observar a mesma forma de carga/peso na variação de tempo. Tal resultado valida o algoritmo que será aplicado, via matlab, neste estudo.

2.2 Normas e Estudos.

As normas têm como objetivo tornar o desenvolvimento, a fabricação e o fornecimento de equipamentos e serviços de uma maneira mais eficiente e segura. Neste trabalho, normas e estudos foram consultados com o intuito de descobrir se a carga aplicada à passarela fornece segurança e conforto aos pedestres. Segundo Bachmann et al. (1995), a aceleração limite aceitável é fornecida pelas equações abaixo.

$$a_{lim} = 0,5f_1^{0,5} \quad (2.2)$$

$$a_{lim} = 0,25f_1^{0,78} \quad (2.3)$$

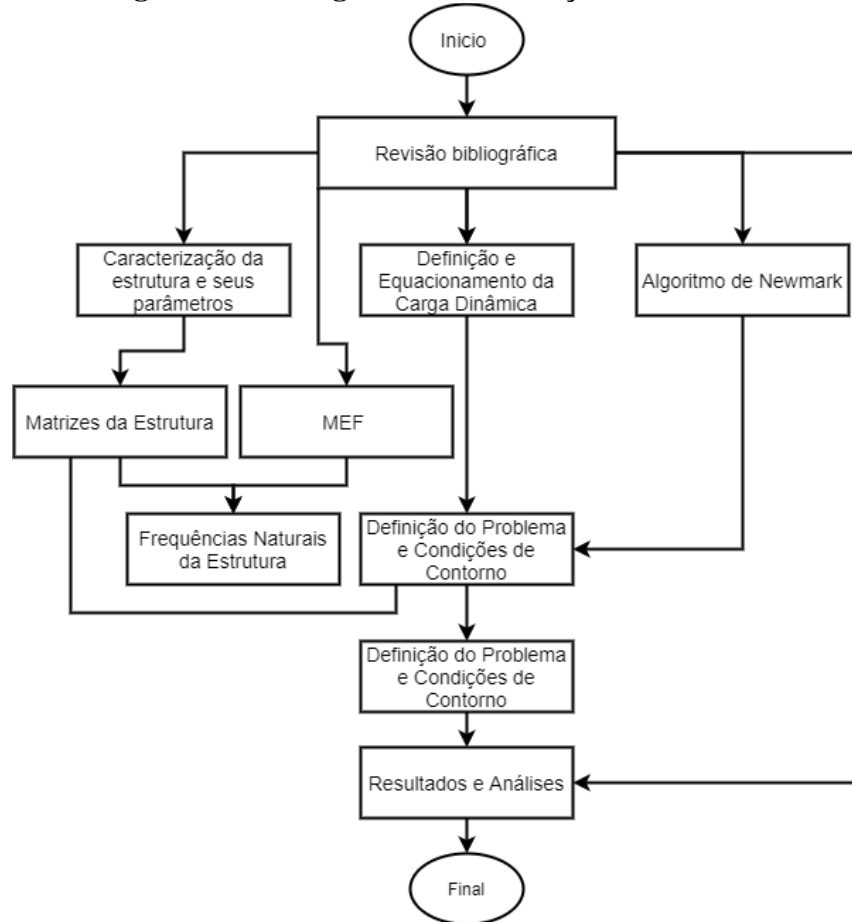
Resumidamente, a norma Eurocode EN1990 (2002), tem como limite de aceleração para vibrações verticais o valor de $a_{lim} = 0,7 \text{ m/s}^2$. No guia *Comité Euro-International Du Béton - CEB 209* (1991), o valor máximo tolerável de aceleração vertical é $a_{lim} = 0,7 \text{ m/s}^2$. Por fim, o guia *L'association Française de Génie Civil - AFGC* (2006), recomenda que os valores de aceleração vertical não ultrapassem a aceleração crítica de $a_{crit} = 0,8 \text{ m/s}^2$.

3. METODOLOGIA

Nesta seção, primeiramente serão abordados a descrição da passarela e a resposta dinâmica da estrutura. Após, se discorrerá sobre o método Newmark para passarelas e pontes, o qual “é baseado na suposição de que a aceleração varia linearmente entre dois instantes de tempo” (IGLESES, 2015, p. 5). Adicionalmente, a formulação das matrizes e modos de vibração das frequências naturais serão apresentados. Por fim, no capítulo também será abordado o método

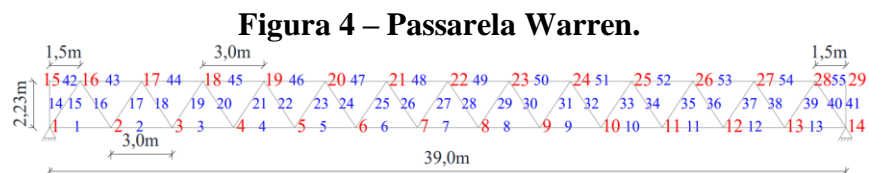
dos elementos finitos (MEF) em passarelas, visto que este foi utilizado para resolver problemas complexos estáticos e dinâmicos. A figura 3 demonstra o fluxograma que foi utilizado para realização deste estudo.

Figura 3 – Fluxograma da realização do trabalho



3.1 Descrição da Passarela.

A estrutura analisada se trata de uma passarela em treliça do tipo Warren. A estrutura da passarela foi proposta no estudo Miguel et al. (2015a), o qual apresenta o comprimento de 39 metros e altura de 2,23 metros, com 55 elementos e 29 nós. A figura 4 mostra a estrutura de Miguel et al. (2015a).



Fonte: Silva (2020)

A estrutura é de aço com o módulo de elasticidade e densidade: $E=200$ GPa e $\rho = 7850$ kg/m, respectivamente. As áreas das seções transversais são descritas na tabela 3.1.1.

Tabela 1 – Áreas das seções transversais da estrutura estudada.

Grupo	Número do Elemento	Área (m ²)
Elemento Inferior	1–13	0,006
Elemento Diagonal	14–41	0,004
Elemento Superior	42–55	0,008

Fonte: Miguel et al. (2015a)

3.2 Formulações Matemáticas.

Uma estrutura discretizada em n graus de liberdade, tem a equação de movimento de um sistema contínuo como sendo:

$$M\ddot{\vec{x}}(t) + C\dot{\vec{x}}(t) + K\vec{x}(t) = \vec{F}(t) \quad (3.1)$$

Onde:

M = matriz de massa, de ordem $n \times n$;

C = matriz de amortecimento, de ordem $n \times n$;

K = matriz de rigidez, de ordem $n \times n$;

$\ddot{\vec{x}}$ = vetor de aceleração, de ordem $n \times 1$;

$\dot{\vec{x}}$ = vetor de velocidade, de ordem $n \times 1$;

\vec{x} = vetor de deslocamento, de ordem $n \times 1$;

\vec{F} = vetor das forças externas, de ordem $n \times 1$;

As dimensões da equação 3.1 são referentes ao número de graus de liberdade do sistema. Esta equação é utilizada como base para a análise dinâmica de estruturas lineares.

Por sua vez, a matriz de amortecimento pode ser definida a partir das matrizes de rigidez e de massa, conforme demonstrado na equação 3.2. Esta equação de amortecimento é conhecida como amortecimento de Rayleigh.

$$C = \alpha_R M + \beta_R K \quad (3.2)$$

Os coeficientes α_R e β_R são coeficientes obtidos a partir das frequências fundamentais do sistema e do amortecimento que este possui. Para determinar estes coeficientes, utiliza-se a equação 3.3.

$$\alpha_R = \zeta \frac{2\omega_i\omega_j}{\omega_i + \omega_j} \quad \beta_R = \zeta \frac{2}{\omega_i + \omega_j} \quad (3.3)$$

Os coeficientes ω_i e ω_j , são referentes às frequências naturais, respectivamente, do i -ésimo e do j -ésimo modos de vibração do sistema. Já o termo ζ é referente à razão de amortecimento. Neste estudo foi utilizado a razão de amortecimento de nível médio para passarelas de aço medidos em Pretlove et al. (1995). Logo, $\zeta = 0,004$.

Considerando a equação 3.1, sem amortecimento e forças iguais a zero, temos a equação:

$$M\ddot{\vec{x}}(t) + K\vec{x}(t) = 0 \quad (3.4)$$

Seguindo o ANEXO A, desenvolvidas por Miguel (2006), chega-se na equação.

$$\det|-\omega_{nn}^2 M + K| = 0. \quad (3.5)$$

Assim, é possível perceber que se trata de um problema característico de determinar os autovalores e autovetores. Sabendo que as raízes positivas do autovalor são as frequências naturais de vibração da estrutura, é possível obter as frequências naturais. A análise modal foi verificada pelo MEF, onde se obteve exatamente os mesmos resultados até a terceira casa decimal.

Considerou-se que os elementos da treliça como: bidimensionais; submetidos apenas a carregamentos axiais; típicos de 2 nós com 2 graus de liberdade por nó. As matrizes de massa e rigidez foram obtidas utilizando as equações 3.6.

$$k = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad m = \frac{\rho AL}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Aplicando as matrizes k e m a matriz de transformação global da equação 3.7 é obtiveram-se as matrizes globais de massa e rigidez.

$$K = T^T k T \quad (3.7)$$

$$M = T^T m T$$

3.3 Método de Newmark.

Segundo Miguel (2006), os métodos de integração implícitos utilizam a equação do movimento (3.1) no instante $(t + \Delta t)$ para calcular a resposta neste instante. Newmark é o mais eficaz dos métodos implícitos. Além disso,

O método de Newmark (Newmark, 1959), permite a solução direta de uma equação diferencial de segunda ordem ou de um sistema de equações diferenciais de segunda ordem sem a necessidade da transformação em um par de equações diferenciais de primeira ordem simultâneas. O método pode ser aplicado em vários campos da engenharia, em particular em sistemas de resposta dinâmica. (LINDFIELD; PENNY, 2019).

A demonstração do método de Newmark está no ANEXO B, desenvolvida por Silva, (2020). Para este estudo foi adotado tempo incremental igual a 10^{-3} ($\Delta t = 0,001$) segundos.” A estabilidade do método depende dos parâmetros α e δ . Newmark obteve um método incondicionalmente estável na solução de problemas lineares $\alpha = 0,25$ e $\delta = 0,5$ ” (MIGUEL, 2006, p. 128).

$$\vec{x}(t + \Delta t) = (a_0 M + a_1 C + K)^{-1} \left[\vec{F}(t + \Delta t) + M \left(a_0 \vec{x}(t) + a_2 \vec{\dot{x}}(t) + a_3 \vec{\ddot{x}}(t) \right) + C \left(a_1 \vec{x}(t) + a_4 \vec{\dot{x}}(t) + a_5 \vec{\ddot{x}}(t) \right) \right] \quad (3.8)$$

Com a equação 3.8 definida e os valores de: matriz de massa; matriz de rigidez; matriz de amortecimento; velocidades e deslocamentos iniciais; forças; número de graus de liberdade

e tempo incremental temos todas as informações necessárias para analisar o problema. Para validar o algoritmo de Newmark o problema 6 da lista de exercícios da 3ª área da apostila de vibrações de Miguel (2006), foi resolvido. O exercício se trata de um sistema massa, mola, amortecedor com 2 graus de liberdade e solicita a resposta do sistema em termos de deslocamento, velocidade e aceleração. O algoritmo se encontra no APENDICE A.

3.4 Método de Elementos Finitos.

O método de elementos finitos é um método matemático utilizado para resolver equações diferenciais. Tais equações são resolvidas dividindo um meio contínuo através da geração da malha. Neste estudo, os objetivos dessa simulação são validar as frequências naturais, a matriz de massa e a matriz de rigidez. A análise modal pelo MEF foi realizada através do *software* comercial Ansys 2019 R3.

As geometrias da treliça e as propriedades da passarela deste artigo explicitados no capítulo 3.1 foram introduzidas no modelo computacional, sendo que o material foi definido como aço estrutural. Após a malha foi desenvolvida para realizar a análise modal. O tamanho de cada elemento foi definido como 3 metros. A malha gerada consiste em 55 elementos com 29 nós. Na sequência, as condições de contorno do problema foram consideradas, sendo adicionadas restrições nos nós 1 e 14, impedindo o deslocamento. Em *Analysis Settings* foi solicitado que o programa retorne os 17 primeiros modos de vibração, o qual foi introduzido pois as primeiras frequências naturais que o modelo computacional retorna são 0 (zero) chamadas de frequências de corpo rígido. Por fim, os valores das frequências naturais foram obtidos, com o objetivo de serem comparados com os resultados da análise modal analítica. Os resultados encontrados são apresentados no próximo capítulo.

4. RESULTADOS

Neste capítulo a análise modal foi aplicada, tanto analiticamente quanto numericamente. A utilização da análise modal tinha como objetivo validar as matrizes e obter as frequências naturais da passarela Warren.

Na sequência, com as matrizes de massa e rigidez validados, foi executada a análise dinâmica da passarela, onde se obteve as acelerações, velocidades e deformações para um pedestre pulando no centro da estrutura com duas frequências distintas. O intuito era que um dos harmônicos da excitação do pedestre entrasse em ressonância com a frequência natural da passarela e, conseqüentemente, fosse possível obter uma maior aceleração da estrutura para o carregamento.

Por fim, foi realizada uma análise de conforto, comparando as acelerações máximas encontradas com estudos e prescrições normativas. Então, foi verificada se existe a necessidade de um sistema de controle de vibrações.

A seguir são relatados os resultados obtidos a partir da realização da análise modal, análise dinâmica e análise de conforto e segurança. Cada seção traz o detalhamento do trabalho desenvolvido.

4.1 Análise modal.

Foram utilizadas as constantes definidas na seção 3.1 e aplicadas nas equações 3.6. Assim, foram definidas as matrizes de massa, rigidez e amortecimento, respectivamente. Posteriormente, utilizando a matriz de massa e matriz de rigidez foram obtidos os autovalores e autovetores, equação 3.5. Sabendo que as raízes positivas do autovalor são as frequências naturais de vibração da estrutura foram obtidos os resultados da tabela 2. Todos os cálculos

foram estruturados criando um algoritmo no Matlab. Para validar a análise modal utilizou-se o software “Ansys” e então os resultados foram comparados.

As figuras 5,6 e 7 abaixo apresentam os primeiros cinco modos de vibração da frequência natural da passarela Warren.

Figura 5 – Primeiro e segundo modo de vibração da frequência natural passarela Warren ($f_{01}= 5,996$ Hz e $f_{02}= 16,036$ Hz).

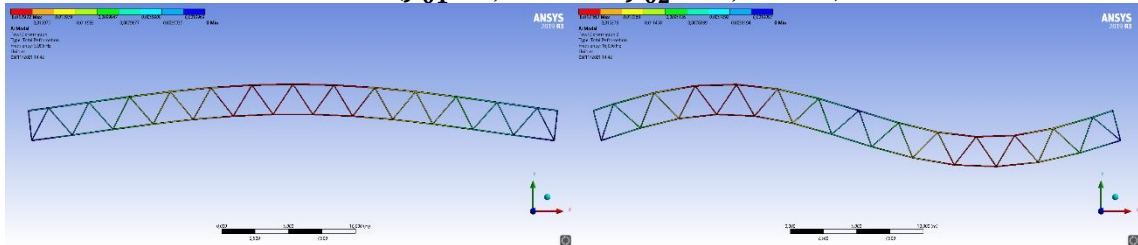


Figura 6 – Terceiro e quarto modo de vibração da frequência natural passarela Warren ($f_{03}= 33,916$ Hz e $f_{04}= 41,245$ Hz).

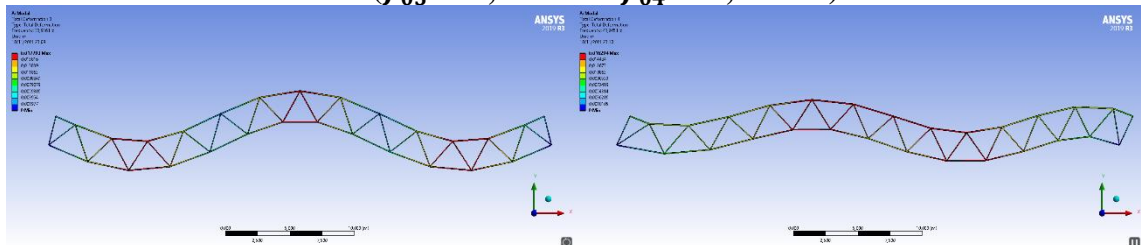
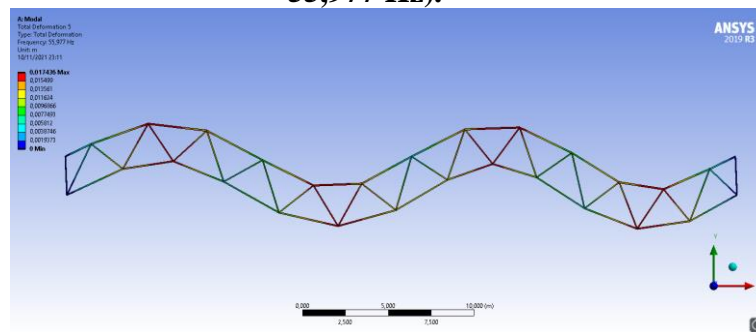


Figura 7 – Quinto modo de vibração da frequência natural passarela Warren ($f_{05}= 55,977$ Hz).



A tabela 2 apresenta a comparação analítica e numérica das cinco primeiras frequências naturais. Nesta tabela são expostas as frequências naturais da passarela Warren (Hz), indicando para os modos de 1 a 5 os valores obtidos via utilização dos softwares Ansys e Matlab.

Tabela 2 – Comparação analítica e numérica das cinco primeiras frequências naturais.

Frequências Naturais Passarela Warren (Hz)		
Modo	Ansys	Matlab
1	5,996	5,996
2	16,036	16,036
3	33,916	33,916
4	41,245	41,245
5	55,977	55,977

Comparando os resultados analíticos com os numéricos temos a validação das matrizes de massa e rigidez, matrizes que serão utilizadas no cálculo da análise dinâmica. Adicionalmente, ainda é possível comparar os dados com os apresentados de Miguel et al. (2015a). No estudo deste autor, foram encontrados exatamente os mesmos resultados. Diante do exposto, percebe-se a confiabilidade em realizar a análise modal pelo método dos elementos finitos.

4.2 Análise dinâmica.

Procurando maximizar os efeitos observados na estrutura estudada, o carregamento de um pedestre pulando foi escolhido para realizar a análise dinâmica, sendo aplicado no nó central da passarela. A ação de pular corresponde a um movimento com contato descontínuo, podendo ser modelada por uma série de pulsos semi-senoidais com duração t_p (tempo de contato com o solo), seguido por um intervalo em que a força é zero, representando o momento em que os pés perdem o contato com o solo. Os valores utilizados e seus autores foram explicitados na seção anterior.

A tabela 3 a seguir apresenta os parâmetros para definir a matriz de carregamento e o Método de Newmark. Para os parâmetros de carregamento são indicados: a) o nó de aplicação do carregamento, b) o nó da resposta dinâmica, c) a frequência de pulso, d) o fator de impacto dinâmico, e) o peso do pedestre, f) o tempo de contato com o piso. Já para os parâmetros Newmark são expostos: a) os valores alpha; b) os valores Beta; c) o tempo; d) o incremento de tempo; e) o deslocamento inicial; f) a velocidade inicial.

Tabela 3 – Parâmetros para análise dinâmica e Newmark.

Parâmetros Carregamento	
Nó de Aplicação do Carregamento	22
Nó da Resposta Dinâmica	22
Frequência do Pulo f_s	2 Hz
Fator de Impacto Dinâmico (Kp)	6
Peso da Pessoa (G)	800 N
Tempo de Contato com o Piso (tp)	0,15 s
Parâmetros Newmark	
Alpha (α)	0,25
Beta (β)	0,5
Tempo (t)	20 s
Incremento de Tempo (Δt)	0,001 s
Deslocamento Inicial	0 m
Velocidade Inicial	0 m/s

Fonte: adaptado de Miguel et al. (2015^a) e Bachmann e Ammann (1987)

Utilizando os valores dos parâmetros de carregamento foi definida a matriz da força aplicada no nó 22, a qual refere-se ao centro da passarela. Em seguida, a matriz foi introduzida no algoritmo de Newmark, juntamente com os parâmetros pré-definidos e as matrizes da estrutura. Assim, foram obtidos os deslocamentos, velocidades e acelerações da passarela. A metodologia para a execução do cálculo foi demonstrada no capítulo 3. As figura 8 e figura 9 indicam deslocamento, velocidade e aceleração vertical do nó central em relação ao carregamento

dinâmico, expondo os valores referentes ao centro da passarela em relação aos 20 segundos de ação do carregamento semi-senoidal.

Figura 8 – Deslocamento e velocidade vertical do nó central em relação ao carregamento dinâmico.

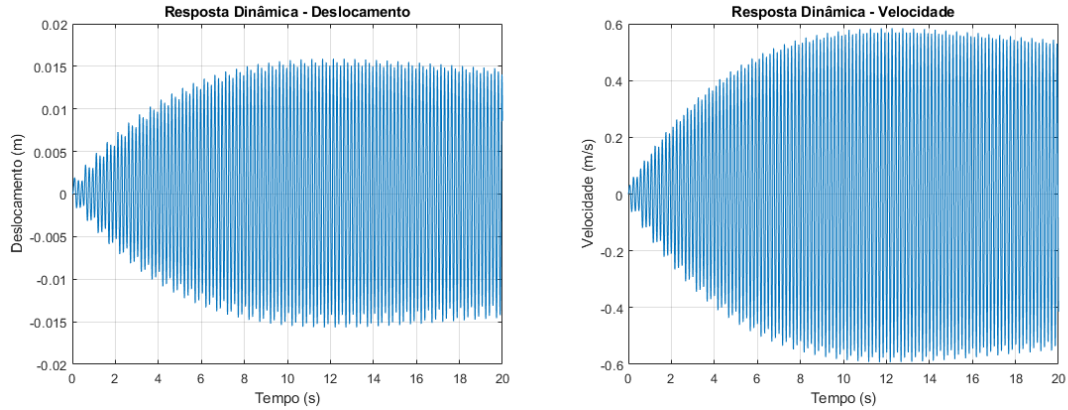
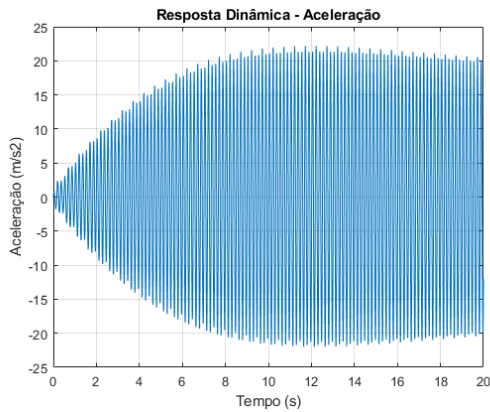


Figura 9 – Aceleração vertical do nó central em relação ao carregamento dinâmico.



O fenômeno de ressonância pode ser verificado nos resultados expostos a partir das figuras 8 e 9, os quais, demonstram valores significativos de deslocamento, velocidade e aceleração para esta ação dinâmica. Para comparação, foi simulado o mesmo carregamento com a frequência de pulso de 1,6 Hz, como demonstrado na figura 10 e figura 11.

Figura 10 – Deslocamento e velocidade do nó central em relação ao carregamento dinâmico com frequência de pulso de 1,6 Hz.

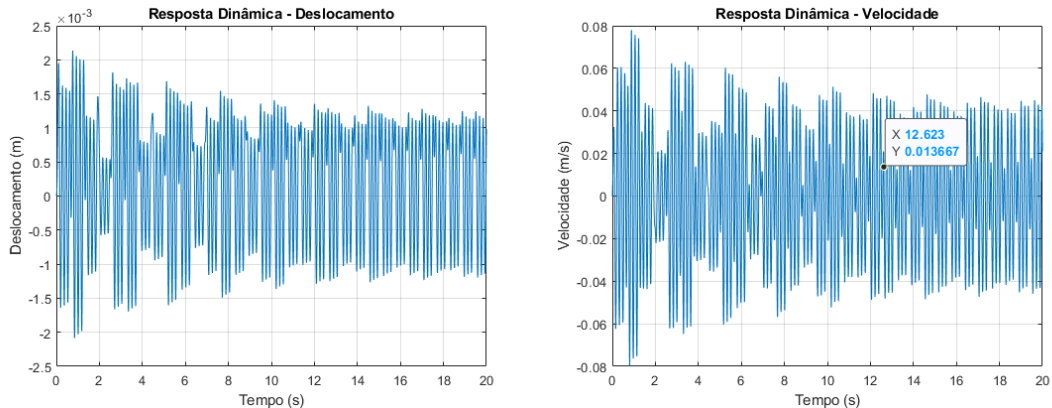
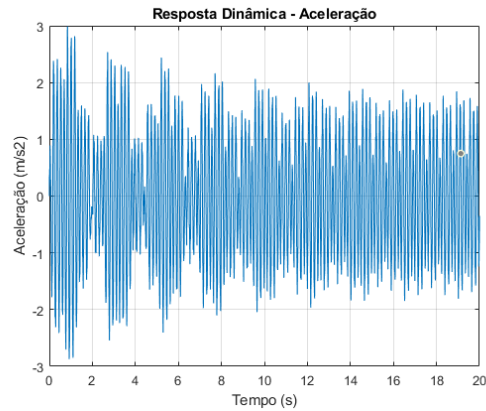


Figura 11 – Aceleração vertical do nó central em relação ao carregamento dinâmico com frequência de pulso de 1,6 Hz.



O resultado da ação dinâmica do pedestre com frequência fora da zona de ressonância traz resultados expressivamente menores. Como é possível observar, a aceleração máxima vertical da estrutura com a frequência de pulso de 1,6 Hz é 86% menor do que com a frequência ressoante.

A tabela 4, concatena os valores obtidos, demonstrando os valores mais relevantes para este estudo: as acelerações máximas nos nós do cordão superior da passarela.

Tabela 4 – Acelerações máximas da passarela Warren.

Nó	Carregamento	Carregamento
	2 Hz	1,6 Hz
Aceleração Máxima (m/s ²)		
16	2,12	0,34
17	6,83	1,02
18	11,55	1,63
19	15,83	2,17
20	19,22	2,60
21	21,42	2,93
22	22,18	3,04
23	21,42	2,93
24	19,22	2,60
25	15,83	2,17
26	11,55	1,63
27	6,83	1,02
28	2,12	0,34

Analisando a tabela 4, é possível perceber a facilidade em excitar a estrutura, pois com apenas com um pedestre foram obtidos valores elevados de aceleração. Comparando os resultados com os demonstrados em Miguel et al, (2015a), o qual simulou pedestres **caminhando** pela mesma estrutura, é possível verificar que o carregamento de pulso tem uma aceleração máxima até 2 (duas) vezes superior. O valor de 22 m/s² extrapola as normas internacionais, chegando a níveis inaceitáveis de aceleração e, conseqüentemente, de conforto e segurança, ficando evidente a necessidade de tomar ações para modificar a estrutura e/ou instalar amortecedores. Na literatura (BACHMANN, 2002) existem relatos de estruturas

entrando em ruína por causa de ações de vândalos, o termo utilizado para esta situação é o “*vandal loading*”. No Brasil, onde atos de vandalismo são frequentes é necessário considerar este tipo de carregamento no momento de projetar estruturas. Adicionalmente, fica evidente a necessidade de um sistema de controle de vibrações para estrutura analisada.

4.3 Análise de conforto e segurança.

As vibrações de passarelas podem ter várias origens, pedestres podem: caminhar, correr, pular, dançar sobre a passarela ou vandalizá-la. Ainda, podem sofrer ações físicas, como de ventos, chuvas, raios etc. (EUROCODE, 1990). Pode-se depreender a partir desta norma que são diversas as ações que causam vibrações em passarelas. Para a máxima confiabilidade é necessário realizar análises com diversos tipos de carregamentos e comparar com normas e estudos disponíveis na literatura. A tabela 5 expõe normas e estudos referentes a aceleração vertical, e realiza um comparativo com os resultados encontrados neste artigo. Percebe-se que os resultados encontrados quanto à aceleração vertical limite variam de 0,7 m/s² (EUROCODE EN1990, 2002; CEB 209, 1991) a 1,22 m/s² (BACHMANN, 1995). Já a aceleração vertical máxima encontrada é: 22 m/s².

Tabela 5 – Comparação entre a aceleração vertical limite e os resultados encontrados.

Norma	Aceleração Limite na Literatura (m/s ²)	Aceleração Máxima Neste Estudo (m/s ²)
Bachmann (1995)	1,22	
Eurocode EN1990, 2002	0,7	22
CEB 209/1991	0,7	
AFGC/2006	0,8	

Para fins deste estudo, foram consideradas acelerações limites conservadoras nas normas da tabela 5 e, ainda assim, a aceleração máxima vertical da passarela ultrapassa 27 (vinte e sete) vezes o permitido pelas normas utilizadas no artigo. Neste caso, a preocupação com a segurança se sobressai em relação à preocupação com o conforto. Adicionalmente, os deslocamentos encontrados não são aceitáveis estruturalmente e a aceleração encontrada causa desequilíbrio e desconforto aos pedestres. A partir dos resultados encontrados, fica comprovada a necessidade de projetar amortecedores para a passarela.

5. CONCLUSÃO

Este estudo voltou-se para analisar o comportamento da passarela metálica devido às ações provocadas por humanos, verificando se esta foi dimensionada corretamente e se a estrutura é capaz de suportar uma travessia segura e confortável para os pedestres. Para tanto, primeiramente a estrutura foi definida, sendo utilizada a passarela Warren de Miguel et al. (2015a). Assim, foram calculadas as matrizes de massa e rigidez, bem como as frequências naturais pelo software Matlab R2019a; também, utilizou-se o método dos elementos finitos (Ansys 2019 R3), procedimento numérico para validar as soluções do problema. Adicionalmente, as soluções foram comparadas às fornecidas pelos trabalhos de Silva, (2020) e Miguel et al. (2015a), obtendo os mesmos valores. Após, o carregamento de um pedestre pulando no centro da estrutura foi modelada por uma série de pulsos semi-senoidais com duração t_p (tempo de contato com o solo), seguido por um intervalo em que a força é zero, representando o momento em que os pés perdem o contato com o solo. O carregamento foi

equacionado usando os parâmetros de Bachmann (1987) e aplicado à estrutura. Com o problema e suas condições de contorno elaboradas, o método de integração numérica de Newmark foi utilizado para determinar a resposta dinâmica das passarelas em termos de deslocamento, velocidade e aceleração em cada nó, adotando-se um intervalo de tempo igual a 10^{-3} ($\Delta t = 0,001$) segundos. Para validar o algoritmo de Newmark o problema 6 da lista de exercícios da 3ª área da apostila de vibrações de Miguel (2006) foi resolvido. Assim, os resultados para a passarela foram obtidos via Matlab.

Analisando os resultados é possível perceber que a estrutura é facilmente excitada pela ação de pedestres, com acelerações que extrapolam os limites de estudos e normas. O grau de excitação depende se a frequência natural da passarela se encontra dentro das faixas de frequência dos carregamentos aplicados. Caso isso ocorra, o fenômeno de ressonância é visualizado e as respostas obtidas tendem a causar desconforto e insegurança, bem como, danos estruturais.

Diante dos resultados alcançados, a relevância do estudo pode ser comprovada, devido ao fato de o carregamento não ressoante, menor excitação da passarela, já ser o suficiente para ultrapassar os indicadores limites fornecidos pelas normas. Portanto, validando a importância da dissertação de Silva, (2020), onde amortecedores de massa sintonizados foram otimizados para a passarela deste trabalho.

Cabe ressaltar que este estudo apresentou limites em relação à verificação estrutural da passarela, tendo em vista que não foram calculadas as cargas de tração e compressão das treliças nem os suportes da estrutura que devem ser relacionados ao peso próprio da passarela, cargas permanentes (chapas de ligação, corrimão e telhas) e diversos carregamentos. Logo, este artigo se restringiu a solucionar problemas de vibrações. Lembrando que autores como Blanchard et al. (1977) e Bachmann, (2002) salientam que estruturas chegaram a sofrer ruína a partir da ação de vandalismo por parte de pedestres, está ação pode ser relacionada ao carregamento utilizado neste estudo. Sugere-se que estudos futuros realizem a verificação estrutural da passarela referentes ao seu peso e distintos carregamentos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AOKI, Nelson. Dogma do fator de Segurança. **VI Seminário de Engenharia de Fundações Especiais e Geotecnia**, São Paulo, v. 1, p. 9-42, 2008.

ARQUITECTURAVIVA. **Millennium Bridge**, London. Desenvolvido por Norman Foster. Disponível em: <https://arquitecturaviva.com/works/puente-del-milenio-1>. Acesso em 02 nov. 2021

ARQUITETABLOG. **Passarela Simone de Beauvoir**. Blog da Arquiteta. Disponível em: <http://arquitetablog.blogspot.com/2012/04/passarela-simone-de-beauvoir.html>. Acesso em: 02 nov. 2021

BACHMANN, Hugo. Lively footbridges-a real challenge. In: **Proceedings of the International Conference on the Design and Dynamic Behaviour of footbridges**. Paris, France, November, 2002. p. 20-22.

BACHMANN, Hugo; AMMANN, Walter. **Vibrations in structures: induced by man and machines**. 3ª Edição, IABSE, AIPC e IVBH, Zurich, Switzerland, 1987.

BARBOSA, Moisés Martiniano Albuquerque. **Análise dinâmica de uma passarela sujeita ao carregamento de pedestres**. Trabalho de Conclusão de Curso. Universidade Federal do Ceará, 2013.

CARVALHO, Johnny Soares de. **Fadiga em peças de madeira para uso estrutural**. Tese de Doutorado, Universidade Federal de São Carlos, 2017, 82 p.

EN 1991-2. Eurocode 1: Actions on structures–Part 2: Traffic loads on bridges. **CEN-European Committee for Standardization**, 2003.

FIGUEIREDO, Fábio Pereira et al. **Estudo do comportamento dinâmico de passarelas devido ao caminhar de pedestres**. Dissertação de Mestrado, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, 2005, 133 p.

FRANCO, Yasmim Vacarin. **Análise de uma modelagem para passarelas de pedestre sobre rodovias**. Trabalho de Conclusão de Curso. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. 2015.

IGLESES, Marcéu Heinzmann. **Análise do carregamento de multidões em passarelas utilizando um modelo de forças sincronizado no tempo e no espaço**. Trabalho de Conclusão de Curso. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. 2015.

LAGO, Guilherme Leite; BIRCK, Gabriel; TOSO, Marcelo André. Análise modal numérica de uma passarela de pedestres. **Revista Destaques Acadêmicos**, v. 12, n. 4, 2020.

LINDFIELD, G. R., e Penny, J. **Numerical methods using MATLAB**. Amsterdam: Academic Press, 2019.

MIGUEL, Letícia Fleck Fadel. **Introdução ao estudo de vibrações. Apostila de sala de aula. Engenharia Mecânica**. (Professora Doutora Letícia Fleck Fadel Miguel). UFRGS. Mar. de 2006.

MIGUEL, Letícia Fleck Fadel; RIERA, Jorge Daniel. **CONTROLE DE VIBRAÇÕES DE ESTRUTURAS UTILIZANDO AMORTECEDORES POR ATRITO**. **Revista Internacional de Desastres Naturales, Accidentes e Infraestructura Civil**, v. 8, n. 1, 2008.

- MIGUEL, Letícia Fleck Fadel; MIGUEL, Leandro Fleck Fadel; LOPEZ, Rafael Holdorf. A firefly algorithm for the design of force and placement of friction dampers for control of man-induced vibrations in footbridges. **Optimization and Engineering**, v. 16, n. 3, p. 633-661, 2015.
- PEREIRA, Samara Pimentel. **Desempenho dinâmico de sistemas estruturais de passarelas**. Dissertação de Mestrado, Universidade de Brasília, 2017, 130p.
- PINHO, F. O.; BELLEI, I. H. **Manual de construção em aço**: Pontes e viadutos em vigas mistas. Rio de Janeiro: IBS/CBCA, 2007, 138 p.
- PRETLOVE, A. J., Rainer, H., e Bachmann, H. Pedestrian Bridges. In: **Vibrations problems in structures: practical guidelines**. Basel: Birkhäuser Basel, 1995.
- SARAMAGO, Gabriel Araujo et al. **Análise Dinâmica de Passarelas**. Tese de Doutorado. Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2017.
- SILVA, Gustavo Ayres da. **Otimização de parâmetros de projeto de amortecedores de massa sintonizados para controle de vibrações em passarelas metálicas**. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2020, 134 p.
- STOYANOFF, Stoyan; HUNTER, Mark. **Footbridges: Pedestrian induced vibrations**. Rowan Williams Davies and Irwin Inc. Ontario, Canada. 2003.
- VALENCIA, Luis Augusto Lara. **Controle de vibrações em vigas metálicas com distintas configurações de apoio utilizando amortecedores de massa sintonizados**. 2007. 156 f. Dissertação (Mestrado em Estruturas e Construção Civil), Universidade de Brasília, Brasília, 2007.
- ŽIVANOVIĆ, Stana; PAVIC, Aleksandar; REYNOLDS, Paul. Vibration serviceability of footbridges under human-induced excitation: a literature review. **Journal of Sound and Vibration**. Vol. 279, p.1-74. 2005a.
- ŽIVANOVIĆ, Stana; PAVIC, Aleksandar; REYNOLDS, Paul. Human-Structure Dynamic Interaction in Footbridges. **Journal of Bridge Engineering**. Vol. 158 (4), p.165-177. 2005b.
- ŽIVANOVIĆ, Stana; DÍAZ, S.; PAVIC, Aleksandar; Influence of Walking and Standing Crowds on Structural Dynamic Properties. In: **Proceedings of the 27 Conference and Exposition on Structural Dynamics**. Orlando, Flórida USA, 2009.

ANEXO I - ANÁLISE MODAL: FREQUÊNCIAS NATURAIS E MODOS DE VIBRAÇÃO.

79

Aula n° 15

Análise Modal

Frequências Naturais e Modos de Vibração

Resposta de Sistemas com Vários GDL:

Parte-se da equação de movimento de sistemas com n graus de liberdade não amortecidos em vibrações livres:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \vec{0}$$

Sabe-se que a solução é da forma:

$$\vec{x}(t) = \vec{C}_n \text{sen}(\omega_n t + \phi_n) = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \dots \\ C_n \end{bmatrix} \text{sen}(\omega_n t + \phi_n)$$

Então o vetor aceleração é:

$$\ddot{\vec{x}}(t) = -\omega_n^2 \vec{C}_n \text{sen}(\omega_n t + \phi_n) = -\omega_n^2 \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \dots \\ C_n \end{bmatrix} \text{sen}(\omega_n t + \phi_n)$$

Substituindo na equação de movimento, obtém-se:

$$-\omega_n^2 \mathbf{M} \vec{C}_n \text{sen}(\omega_n t + \phi_n) + \mathbf{K} \vec{C}_n \text{sen}(\omega_n t + \phi_n) = \vec{0}$$

Como $\text{sen}(\omega_n t + \phi_n) \neq 0$, então:

$$-\omega_n^2 \mathbf{M} \vec{C}_n + \mathbf{K} \vec{C}_n = \vec{0}$$

O sistema só terá solução diferente da trivial se o determinante da matriz de coeficientes for nulo, então:

$$|\mathbf{K} - \omega_n^2 \mathbf{M}| = 0 \rightarrow \text{equação de frequência ou equação característica}$$

Assim, observa-se que para cada frequência natural há um vetor \vec{C}_n que fornece a maneira de vibrar do sistema para essa frequência. E esta maneira de vibrar é denominada modo de vibração.

Notas de Aula de ENG03374 - Vibrações I.

Prof. Dr. Leticia Fleck Fadel Miguel

80

Os ω_n obtidos da equação característica são as frequências em que o sistema pode oscilar na ausência de excitação externa. Em outras palavras, o sistema dinâmico caracterizado pelas matrizes \mathbf{M} e \mathbf{K} somente pode efetuar vibrações livres em uma ou mais frequências naturais ω_n . O vetor associado a cada frequência denomina-se modo de vibração e constitui fisicamente a forma na qual o sistema vai vibrar nessa frequência. Isto é, quando o sistema oscila em uma de suas frequências naturais, a forma da configuração deformada não varia com o tempo, modificando-se somente a amplitude da mesma.

Agrupando-se todos os modos de vibração de um sistema em uma matriz de maneira que o primeiro modo seja a primeira coluna da matriz, o segundo modo a segunda coluna e assim sucessivamente, forma-se o que se denomina matriz modal. Ressalta-se que os modos são ordenados segundo a ordem das frequências, da menor à maior.

$$\Phi = \begin{bmatrix} \vec{C}_1 & \vec{C}_2 & \dots & \vec{C}_n \end{bmatrix}$$

Do ponto de vista matemático, as frequências naturais são os autovalores e os modos de vibração os autovetores do sistema.

- Ortogonalidade dos modos de vibração:

Os modos de vibração têm uma propriedade muito útil: a ortogonalidade. Essa ortogonalidade é em relação à matriz de massa e de rigidez. Demonstra-se esta propriedade a seguir.

Consideram-se duas soluções ω_m^2 , \vec{C}^m e ω_n^2 , \vec{C}^n do problema das frequências naturais. Estas soluções podem ser escritas da forma:

$$\mathbf{K} \vec{C}^m = \omega_m^2 \mathbf{M} \vec{C}^m \\ \mathbf{K} \vec{C}^n = \omega_n^2 \mathbf{M} \vec{C}^n$$

Pré-multiplicando por \vec{C}^n e \vec{C}^m , obtém-se:

$$\vec{C}^n \mathbf{K} \vec{C}^m = \omega_m^2 \vec{C}^n \mathbf{M} \vec{C}^m \\ \vec{C}^m \mathbf{K} \vec{C}^n = \omega_n^2 \vec{C}^m \mathbf{M} \vec{C}^n$$

Notas de Aula de ENG03374 - Vibrações I.

Prof. Dr. Leticia Fleck Fadel Miguel

81

Transpõe-se a última equação levando em consideração a propriedade de simetria de \mathbf{M} e \mathbf{K} :

$$\vec{C}^n \mathbf{K} \vec{C}^m = \omega_m^2 \vec{C}^n \mathbf{M} \vec{C}^m$$

Subtrai-se a equação transposta da 1ª equação:

$$(\omega_m^2 - \omega_n^2) \vec{C}^n \mathbf{M} \vec{C}^m = 0$$

Como $\omega_m \neq \omega_n$, então:

$$\vec{C}^n \mathbf{M} \vec{C}^m = 0 \quad (r \neq s)$$

Fazendo o mesmo raciocínio em relação à matriz de rigidez, obtém-se:

$$\vec{C}^n \mathbf{K} \vec{C}^m = 0 \quad (r \neq s)$$

- Análise modal:

O objetivo da análise modal é, a partir da equação $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \vec{0}$, encontrar um novo sistema de coordenadas $\vec{r}(t)$, no qual as equações estejam desacopladas, isto é, cada equação dependa de apenas 1 coordenada, de maneira que possam ser facilmente resolvidas.

Para se obter a resposta de um sistema com n GDL, com suas frequências e modos de vibração, o procedimento a ser utilizado é apresentado a seguir:

- 1º) Determinar as matrizes \mathbf{M} e \mathbf{K} ;
- 2º) Calcular a matriz dinâmica $\mathbf{D} = \mathbf{K}/\mathbf{M} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$;
- 3º) Calcular os autovalores (ω_n^2) e os autovetores de \mathbf{D} e montar a matriz Φ ;
- 4º) Fazer $\vec{x}(t) = \Phi \vec{r}(t)$, pré-multiplicar por Φ^T e determinar as equações desacopladas: $\Phi^T \mathbf{M} \Phi \ddot{\vec{r}} + \Phi^T \mathbf{K} \Phi \vec{r} = \vec{0}$;
- 5º) Calcular as condições iniciais modais $\vec{r}(0) = \Phi^{-1} \vec{x}(0)$ e $\dot{\vec{r}}(0) = \Phi^{-1} \dot{\vec{x}}(0)$;
- 6º) Encontrar as soluções desacopladas r_i conforme sistemas com 1 GDL:

$$\ddot{r}_i(t) = \ddot{r}_i(0) \cos \omega_n t + \dot{r}_i(0) \sin \omega_n t;$$
- 7º) Encontrar a solução nas coordenadas originais $\vec{x}(t) = \Phi \vec{r}(t)$.

Exemplo: Dado em sala de aula.

Notas de Aula de ENG03374 - Vibrações I.

Prof. Dr. Leticia Fleck Fadel Miguel

ANEXO II - MÉTODO DE NEWMARK

32

4.2 Método de Newmark

“O método de Newmark (Newmark, 1959), permite a solução direta de uma equação diferencial de segunda ordem ou de um sistema de equações diferenciais de segunda ordem sem a necessidade da transformação em um par de equações diferenciais de primeira ordem simultâneas. O método pode ser aplicado em vários campos da engenharia, em particular em sistemas de resposta dinâmica.”²⁶ [Lindfield e Penny, 2019].

Neste caso, a Equação 4.1 assume a forma $\mathbf{M} \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} + \mathbf{C} \frac{d\mathbf{x}}{dt} + \mathbf{K} \mathbf{x} = \mathbf{f}(t)$, que representa um sistema de equações diferenciais de segunda ordem.

Conforme Cheng, 2001, o Método de Integração de Newmark assume que, durante um tempo incremental Δt , a aceleração varia linearmente, como mostrado na Figura 4.1. A aceleração média de t a $t + \Delta t$ é $\bar{\ddot{x}}_{med} = \frac{1}{2}(\ddot{x}(t) + \ddot{x}(t + \Delta t))$. Portanto o vetor velocidade em $t + \Delta t$ pode ser expresso pela Equação 4.6.

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}(t + \Delta t) &= \dot{\bar{x}}(t) + \Delta t \bar{\ddot{x}}_{med} \\ &= \dot{\bar{x}}(t) + \frac{\Delta t}{2} (\ddot{x}(t) + \ddot{x}(t + \Delta t)) \end{aligned} \quad (4.6)$$

²⁶ Tradução livre do texto originalmente publicado em Inglês.

33

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t + \Delta t) &= \ddot{x}(t) + \left[(1 - \delta_N) \ddot{x}(t) + \delta_N \left\{ \frac{1}{\alpha_N \Delta t^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left[\ddot{x}(t + \Delta t) - \dot{\bar{x}}(t) - \Delta t \ddot{x}(t) - \Delta t^2 \left(\frac{1}{2} - \alpha_N \right) \ddot{x}(t) \right] \right\} \right] \Delta t \end{aligned} \quad (4.11)$$

Empregando as Equações 4.10 e 4.11 na Equação 4.1 no instante $t + \Delta t$ chega-se a:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &\left[\frac{1}{\alpha_N \Delta t^2} \ddot{x}(t + \Delta t) - \frac{1}{\alpha_N \Delta t^2} \ddot{x}(t) - \frac{1}{\alpha_N \Delta t} \dot{\bar{x}}(t) - \left(\frac{1}{2} - \alpha_N \right) \ddot{x}(t) \right] \\ + \mathbf{C} &\left[\dot{\bar{x}}(t) + (1 - \delta_N) \Delta t \ddot{x}(t) + \frac{\delta_N}{\alpha_N \Delta t} \ddot{x}(t + \Delta t) - \frac{\delta_N}{\alpha_N \Delta t} \ddot{x}(t) - \frac{\delta_N \Delta t}{\alpha_N} \left(\frac{1}{2} - \alpha_N \right) \ddot{x}(t) \right] \\ + \mathbf{K} \ddot{x}(t + \Delta t) &= \bar{\mathbf{F}}(t + \Delta t) \end{aligned} \quad (4.12)$$

Baseado na abordagem de incremento de tempo, os parâmetros da resposta são conhecidos em t mas desconhecidos em $t + \Delta t$. Rearranjando a Equação 4.12:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{\alpha_N \Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{\delta_N}{\alpha_N \Delta t} \mathbf{C} + \mathbf{K} \right) \ddot{x}(t + \Delta t) = \bar{\mathbf{F}}(t + \Delta t) + \mathbf{M} \left[\frac{1}{\alpha_N \Delta t^2} \ddot{x}(t) + \frac{1}{\alpha_N \Delta t} \dot{\bar{x}}(t) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\alpha_N} \left(\frac{1}{2} - \alpha_N \right) \ddot{x}(t) \right] + \mathbf{C} \left[\frac{\delta_N}{\alpha_N \Delta t} \dot{\bar{x}}(t) + \left(\frac{\delta_N}{\alpha_N} - 1 \right) \ddot{x}(t) + \left[\frac{\delta_N \Delta t}{\alpha_N} \left(\frac{1}{2} - \alpha_N \right) - (1 - \delta_N) \Delta t \right] \ddot{x}(t) \right] \end{aligned} \quad (4.13)$$

Atribuindo

$$a_0 = \frac{1}{\alpha_N \Delta t^2}, \quad a_1 = \frac{\delta_N}{\alpha_N \Delta t}, \quad a_2 = \frac{1}{\alpha_N \Delta t}, \quad a_3 = \frac{1}{2\alpha_N} - 1, \quad a_4 = \frac{\delta_N}{\alpha_N} - 1, \quad \text{e} \quad a_5 = \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\delta_N}{\alpha_N} - 2 \right) \quad (4.14)$$

A Equação 4.13 se torna:

$$\begin{aligned} (a_0 \mathbf{M} + a_1 \mathbf{C} + \mathbf{K}) \ddot{x}(t + \Delta t) &= \bar{\mathbf{F}}(t + \Delta t) + \mathbf{M} (a_2 \ddot{x}(t) + a_3 \dot{\bar{x}}(t) + a_4 \ddot{x}(t)) \\ &\quad + \mathbf{C} (a_5 \ddot{x}(t) + a_6 \dot{\bar{x}}(t) + a_7 \ddot{x}(t)) \end{aligned} \quad (4.15)$$

onde o termo $\ddot{x}(t + \Delta t)$ pode ser obtido. Substituindo $\ddot{x}(t + \Delta t)$ na Equação 4.10 chega-se a:

O vetor de deslocamento em $t + \Delta t$ pode ser obtido da Equação 4.6 como $\bar{x}(t + \Delta t) = \bar{x}(t) + \Delta t \bar{\dot{x}}_{med}$ no qual $\bar{\dot{x}}_{med} = \frac{1}{2}(\dot{\bar{x}}(t) + \dot{\bar{x}}(t + \Delta t))$ ou:

$$\bar{x}(t + \Delta t) = \bar{x}(t) + \dot{\bar{x}}(t) \Delta t + \frac{(\Delta t)^2}{4} (\ddot{x}(t) + \ddot{x}(t + \Delta t)) \quad (4.7)$$

As Equações 4.6 e 4.7 representam a regra trapezoidal de Newmark ou método de aceleração média. A integração geral de Newmark pode ser expressa como:

$$\dot{\bar{x}}(t + \Delta t) = \dot{\bar{x}}(t) + \left[(1 - \delta_N) \ddot{x}(t) + \delta_N \ddot{x}(t + \Delta t) \right] \Delta t \quad (4.8)$$

$$\bar{x}(t + \Delta t) = \bar{x}(t) + \dot{\bar{x}}(t) \Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \alpha_N \right) \ddot{x}(t) + \alpha_N \ddot{x}(t + \Delta t) \right] (\Delta t)^2 \quad (4.9)$$

onde α_N e δ_N são parâmetros determinados para obter eficiência e estabilidade na integração. Quando $\delta_N = 1/2$ e $\alpha_N = 1/4$, as Equações 4.8 e 4.9 correspondem ao método da aceleração média. Quando $\delta_N = 1/2$ e $\alpha_N = 1/6$, as Equações 4.8 e 4.9 são associadas com o método da aceleração linear. Da Equação 4.9 tem-se que:

$$\ddot{x}(t + \Delta t) = \frac{1}{\alpha_N \Delta t^2} \left[\bar{x}(t + \Delta t) - \bar{x}(t) - \Delta t \dot{\bar{x}}(t) - \Delta t^2 \left(\frac{1}{2} - \alpha_N \right) \ddot{x}(t) \right] \quad (4.10)$$

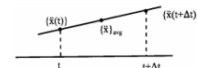


Figura 4.1 – Variação linear da aceleração [Cheng, 2001].

Substituindo a Equação 4.10 na Equação 4.8 chega-se a:

$$\ddot{x}(t + \Delta t) = a_0 [\bar{x}(t + \Delta t) - \bar{x}(t)] - a_2 \dot{\bar{x}}(t) - a_3 \ddot{x}(t) \quad (4.16)$$

Aplicando $\ddot{x}(t + \Delta t)$ da Equação 4.16 na Equação 4.8, tem-se:

$$\dot{\bar{x}}(t + \Delta t) = \dot{\bar{x}}(t) + a_1 [\bar{x}(t) + a_2 \dot{\bar{x}}(t) + a_3 \ddot{x}(t)] \quad (4.17)$$

onde $a_0 = \Delta t(1 - \delta_N)$ e $a_1 = \delta_N \Delta t$. Sendo o deslocamento obtido isolando-se o termo $\bar{x}(t + \Delta t)$ na Equação 4.15:

$$\begin{aligned} \bar{x}(t + \Delta t) &= (a_0 \mathbf{M} + a_1 \mathbf{C} + \mathbf{K})^{-1} \left[\bar{\mathbf{F}}(t + \Delta t) + \mathbf{M} (a_2 \ddot{x}(t) + a_3 \dot{\bar{x}}(t) + a_4 \ddot{x}(t)) \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{C} (a_5 \ddot{x}(t) + a_6 \dot{\bar{x}}(t) + a_7 \ddot{x}(t)) \right] \end{aligned} \quad (4.18)$$

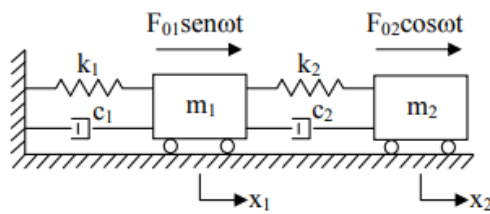
No primeiro instante de tempo t_0 , considera-se que os vetores de velocidade e deslocamento devem ser conhecidos. Com isso, calcula-se o vetor de aceleração inicial, isolando-se o termo $\ddot{x}(t_0)$ na Equação 4.1:

$$\ddot{x}(t_0) = \mathbf{M}^{-1} \left[\bar{\mathbf{F}}(t_0) - \mathbf{C} \dot{\bar{x}}(t_0) - \mathbf{K} \bar{x}(t_0) \right] \quad (4.19)$$

APÊNDICE I.A – EXERCÍCIO 6 DA LISTA 3 DE MIGUEL (2006, P. 133),

133

6) Determinar a resposta do sistema apresentado na figura abaixo em termos de deslocamento, velocidade e aceleração para o tempo de 1 segundo, pelo método exato, pelo método da aceleração constante, pelo método das diferenças finitas centrais e pelo método de Newmark. Considere $\Delta t = 0,01s$.

**Dados:**

$$m_1 = 10\text{kg}$$

$$m_2 = 5\text{kg}$$

$$k_1 = 50\text{N/m}$$

$$k_2 = 25\text{N/m}$$

$$c_1 = 5\text{Ns/m}$$

$$c_2 = 2,5\text{Ns/m}$$

$$\omega = 4\text{rad/s}$$

$$x_{01} = -0,073355\text{m}$$

$$x_{02} = -0,685172\text{m}$$

$$v_{01} = -2,57656\text{m/s}$$

$$v_{02} = 1,61612\text{m/s}$$

$$F_{01} = 40\text{N}$$

$$F_{02} = 50\text{N}$$

Respostas:

Método exato: $x(t) = \begin{bmatrix} 0,5354 \\ 0,1421 \end{bmatrix} \text{m}$, $\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1,4621 \\ -3,1305 \end{bmatrix} \text{m/s}$, $\ddot{x}(t) = \begin{bmatrix} -8,5669 \\ -2,2734 \end{bmatrix} \text{m/s}^2$

Aceleração constante: $x(t) = \begin{bmatrix} 0,5568 \\ 0,1723 \end{bmatrix} \text{m}$, $\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1,5632 \\ -3,1689 \end{bmatrix} \text{m/s}$, $\ddot{x}(t) = \begin{bmatrix} -8,7371 \\ -2,2480 \end{bmatrix} \text{m/s}^2$

Diferenças finitas centrais: $x(t) = \begin{bmatrix} 0,5411 \\ 0,1381 \end{bmatrix} \text{m}$, $\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1,4561 \\ -3,1289 \end{bmatrix} \text{m/s}$, $\ddot{x}(t) = \begin{bmatrix} -8,6441 \\ -2,2128 \end{bmatrix} \text{m/s}^2$

Newmark: $x(t) = \begin{bmatrix} 0,5351 \\ 0,1422 \end{bmatrix} \text{m}$, $\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1,4625 \\ -3,1303 \end{bmatrix} \text{m/s}$, $\ddot{x}(t) = \begin{bmatrix} -8,5642 \\ -2,2755 \end{bmatrix} \text{m/s}^2$

APÊNDICE I.B – ALGORITMO PARA SOLUÇÃO DO PROBLEMA.

```

%% ===== Exercício 6 Lista 3 =====%%

ngl = 2;
M = [10 0;0 5];
K = [75 -25;-25 25];
C = [7.5 -2.5;-2.5 2.5];

ti = 0;
dt = 0.01;
tf = 1;
t = ti:dt:tf;

F01 = 40*sin(4*t);
F02 = 50*cos(4*t);
Fexerc6 = [F01 ; F02];
x = zeros(ngl,length(t));
v = zeros(ngl,length(t));

x (1) = -0.073355;
x (2) = -0.685172;
v (1) = -2.57656;
v (2) = 1.61612;

[x_din_total,v_din_total,a_din_total] =
newmarkfunction(x,v,M,K,C,Fexerc6,ngl,t,dt);

%% ===== NEWMARK =====%%

function [ x,v,a ] = newmarkfunction( x,v,M,K,C,F,n,t,dt )

alpha=0.25; %MIGUEL, 2006, p. 128
delta=0.5; %MIGUEL, 2006, p. 128

a0 = 1/(alpha*(dt^2));
a1 = 1/(alpha*dt);
a2 = (1/(2*alpha))-1;
a3 = (1-delta)*dt;
a4 = delta*dt;
a5 = delta/(alpha*dt);
a6 = (delta/alpha)-1;
a7 = (dt/2)*((delta/alpha)-2);

a = zeros(n,length(t));
a(:,1) = inv(M)*(F(:,1)-C*v(:,1)-K*x(:,1));

    for i = 1:(length(t)-1)

        x(:,i+1) = inv(a0*M+a5*C+K)*(F(:,i+1)+M*(a0*x(:,i)+a1*v(:,i)+
a2*a(:,i))+C*(a5*x(:,i)+a6*v(:,i)+a7*a(:,i)));

        a(:,i+1) = a0*(x(:,i+1)-x(:,i))-a1*v(:,i)-a2*a(:,i);

        v(:,i+1) = a5 * (x(:,i+1)- x(:,i))-a6*v(:,i)-a7*a(:,i);

    end
end

```