



UNIVERSITÉ PARIS 13
Paris

LUISS Guido
Carli
LIBERA UNIVERSITÀ INTERNAZIONALE DEGLI STUDI SOCIALI



UNIVERSITÀ LUISS GUIDO CARLI
Roma

et/e

TESI

pour le grade de **DOCTEUR** de
l'**Université de Paris 13**
Discipline : **Mathématiques**

per il titolo di **DOTTORE DI RICERCA**
dell' **Università LUISS GUIDO CARLI**
Indirizzo : **Metodi Matematici per**
l'Economia, l'Azienda, la Finanza
e le Assicurazioni.

par

Cristina DI GIROLAMI

Infinite dimensional stochastic calculus via regularization with financial motivations

Francesco	RUSSO	Université de Paris 13	Direttore di Tesi
Fausto	GOZZI	LUISS Guido Carli	Co-Direttore di Tesi

December 21, 2009

Titolo : Calcolo stocastico via regolarizzazione in dimensione infinita e motivazioni finanziarie.

Riassunto : Questa tesi di dottorato sviluppa certi aspetti del calcolo stocastico via regolarizzazione per dei processi a valori in uno spazio di Banach generale B . Viene introdotto un concetto originale di χ -variazione quadratica, dove χ è un sottospazio del duale de prodotto tensoriale $B \otimes B$, munito della topologia proiettiva. Una attenzione particolare é dedicata al caso in cui B é lo spazio della funzioni continue su l'intervallo $[-\tau, 0]$, $\tau > 0$. Viene dimostrata una classe di risultati di stabilità attraverso funzioni di classe C^1 di processi che ammettono una χ -variazione quadratica e viene dimostrata una formula di Itô per tali processi. I processi continui reali a variazione quadratica finita Y (ad esempio processi di Dirichlet o anche Dirichlet debole) giocano un ruolo significativo. Viene definito un processo associato chiamato processo *finestra* e indicato con $Y_t(\cdot)$ definito da $Y_t(y) = Y_{t+y}$ per $y \in [-\tau, 0]$. $Y(\cdot)$ è un processo a valori nello spazio di Banach $C[-\tau, 0]$. Se Y è un processo reale con varazione quadratica uguale a $[Y]_t = t$ e $h = F(Y_T(\cdot))$ dove F è una funzione di classe $C^2(H)$ Fréchet e $H = L^2([-T, 0])$, è possibile rappresentare h come somma di un numero reale H_0 più un integrale forward di tipo $\int_0^T \xi d^-Y$ dove ξ è un processo di cui diamo la forma esplicita. Questo generalizza la formula di Clark-Ocone valida quando Y è un moto Browniano standard W . Una delle motivazioni viene dalla teoria di copertura di opzioni che dipendono da tutta la traiettoria del sottostante o quando il prezzo dell'azione sottostante non è una semimartingala.

Titre : Calcul stochastique via régularisation en dimension infinie avec motivations financières.

Résumé : Ce document de thèse développe certains aspects du calcul stochastique via régularisation pour des processus à valeurs dans un espace de Banach général B . Il introduit un concept original de χ -variation quadratique, où χ est un sous-espace du dual d'un produit tensoriel $B \otimes B$, muni de la topologie projective. Une attention particulière est dévouée au cas où B est l'espace des fonctions continues sur $[-\tau, 0]$, $\tau > 0$. Une classe de résultats de stabilité de classe C^1 pour des processus ayant une χ -variation quadratique est établie ainsi que des formules d'Itô pour de tels processus. Un rôle significatif est joué par les processus réels à variation quadratique finie Y (par exemple un processus de Dirichlet, faible Dirichlet). Le processus naturel à valeurs dans $C[-\tau, 0]$ est le dénommé processus *fenêtre* $Y_t(\cdot)$ où $Y_t(y) = Y_{t+y}$. Si Y est un processus dont la variation quadratique vaut $[Y]_t = t$ et $h = F(Y_T(\cdot))$ où F est une fonction de classe $C^2(H)$ Fréchet where $H = L^2([-T, 0])$, il est possible de représenter h comme un nombre réel H_0 plus une intégrale progressive du type $\int_0^T \xi d^-Y$ où ξ est un processus donné explicitement. A certains égards, ceci généralise la formule de Clark-Ocone valide lorsque Y est un mouvement brownien standard W . Une des motivations vient de la théorie de la couverture d'options lorsque le prix de l'actif soujacent n'est pas une semimartingale.