

**DLR-IB-AS-BS-2021-227**

**Prolongationsoperatoren für ein  
nichtlineares Mehrgitterverfahren  
auf unstrukturierten Gittern**

**Forschungsbericht**

Cedric Fallet



**DLR**

**Deutsches Zentrum  
für Luft- und Raumfahrt**



**DLR-IB-AS-BS-2021-227**

**Prolongationsoperatoren für ein nichtlineares  
Mehrgitterverfahren auf unstrukturierten Gittern**

**Cedric Fallet**

**Herausgeber:**

Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt e.V.  
Institut für Aerodynamik und Strömungstechnik  
Lilienthalplatz 7, 38108 Braunschweig

**ISSN 1614-7790**

Stufe der Zugänglichkeit: 1  
Braunschweig, im November 2021

Institutsdirektor:  
Prof. Dr.-Ing. habil. C.-C. Rossow

Verfasser:  
Cedric Fallet

Abteilung: Center of Computer Applications in  
Aerospace Science and Engineering

Abteilungsleiter:  
Prof. Dr. S. Görtz

Der Bericht enthält:  
80 Seiten  
35 Bilder  
9 Tabellen  
29 Literaturstellen

## Kurzfassung

In dieser Studienarbeit wurde innerhalb des nichtlinearen Mehrgitters im unstrukturierten Strömungslöser CODA der Einfluss der Prolongationsordnung und der Ordnung der Grobgitterdiskretisierung auf die Beschleunigung und die Robustheit untersucht. Darüber hinaus wurde eine positivitätserhaltende Grobgitterkorrektur implementiert und untersucht. Diese modifizierte Grobgitterkorrektur soll verhindern, dass notwendigerweise positive Größen wie die Dichte nach der Korrektur auf dem feinen Gitter negativ werden. Anhand von zwei zweidimensionalen Testfällen konnte eine Verringerung der Iterationen und der Rechenzeit aufgrund einer erhöhten Prolongationsordnung gezeigt werden. Eine genauere Grobgitterdiskretisierung führte für die turbulente, reibungsbehaftete Strömung ebenfalls zu einer Verringerung von Rechenzeit und Iterationen. Für den untersuchten reibungslosen Fall zeigte sich diese Beschleunigung nicht. Die Trends wurden zusätzlich an einem dreidimensionalen, reibungsbehafteten Testfall bestätigt. Die Robustheit nahm durch eine Grobgitterdiskretisierung 2. Ordnung gegenüber einer Diskretisierung 1. Ordnung ab, sodass das Beschleunigungspotential durch eine Verringerung der Robustheit erkauft werden müsste. Eine höhere Prolongationsordnung hatte hingegen einen deutlich geringeren Einfluss auf die Robustheit, welcher ohne erkennbaren Trend war. Für die positivitätserhaltende Grobgitterkorrektur ergab sich ein sehr geringer Einfluss auf das Konvergenzverhalten. Durch eine Variation von der physikalischen Randbedingungen konnten anhand eines reibungslosen Testfalls gezeigt werden, dass es Fälle gibt, in denen eine positivitätserhaltende Grobgitterkorrektur die Stabilität des Lösungsprozesses verbessern kann.

## Abstract

In this research project the influence of an increased order of the prolongation and coarse grid discretization within the nonlinear multigrid of the unstructured flow solver CODA was investigated. In particular the influence on the acceleration and the robustness was the main subject. Besides the implementations for these investigations, additional implementations were done for a positivity preserving coarse grid correction. The modified coarse grid correction shall prevent quantities, which are necessarily positive, like the density, from becoming negative. On the basis of two two-dimensional test cases a reduction of iterations and computational time caused by an increased prolongation order could be shown. In case of a turbulent, viscous flow a more accurate coarse grid discretization also led to a reduction of iterations and computational time. For the non-viscous flow this kind of acceleration could not be observed. The trend for the viscous flow were verified by an additional three-dimensional test case. The results for the robustness showed, that a coarse grid discretization, which is of second order, is less robust than a first order coarse grid discretization. Therefore a potential acceleration through a more accurate coarse grid discretization simultaneously comes to a reduced robustness. The increased prolongation order did not have such a distinct influence on the robustness. The results for the positivity preserving coarse grid correction showed a minor influence on the convergence behaviour of the test cases. However for a variation of the physical boundary conditions of the non-viscous flow there were cases, which only converged with the modified coarse grid correction.

# Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich, Cedric Fallet, geb. am 16.09.1996, an Eides statt, die vorliegende Studienarbeit selbstständig und ohne fremde Hilfe verfasst und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet zu haben.

C. Fallet

Braunschweig, 15.11.2021

---

# Inhaltsverzeichnis

<b>Nomenklaturverzeichnis</b>	<b>iii</b>
<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>vii</b>
<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>ix</b>
<b>1. Einleitung</b>	<b>10</b>
1.1. Ziel der Arbeit	10
1.2. Der Strömungslöser CODA	11
<b>2. Theoretische Grundlagen</b>	<b>12</b>
2.1. Erhaltungsgleichungen	12
2.2. Diskretisierungsansätze	13
2.2.1. Finite-Volumen Methode	14
2.2.2. Upwind-Schema und Rekonstruktion	14
2.2.3. Implizites Euler-Verfahren	15
2.3. Das Mehrgitterverfahren	17
2.3.1. Prinzip des Mehrgitterverfahrens	17
2.3.2. Grundsätzlicher Mehrgitteralgorithmus	19
2.3.3. Strategien für einen Mehrgitterzyklus	22
2.3.4. Transferoperatoren: Restriktion und Prolongation	22
2.3.5. Relaxation der Grobgitterkorrektur (positivity preservation)	26
2.4. Eigenschaften eines iterativen Strömungslösers	26
2.4.1. Konvergenz	27
2.4.2. Robustheit	28
<b>3. Methodik für numerische Untersuchungen</b>	<b>29</b>
3.1. Nichtlineares Mehrgitter in CODA	29
3.2. Prolongation	30
3.3. Positivitätserhaltende Grobgitterkorrektur	31
3.4. Die Referenzfälle	33
3.4.1. RAE2822: Diskretisierung und Lösereinstellungen	33
3.4.2. NACA0012: Diskretisierung und Lösereinstellungen	37
3.4.3. NASA-CRM: Diskretisierung und Lösereinstellungen	39
3.5. Numerische Untersuchungen	40
<b>4. Ergebnisdarstellung</b>	<b>42</b>
4.1. Einfluss der Prolongationsordnung	42
4.1.1. RAE2822: Reibungsbehaftete, transsonische Strömung	44
4.1.2. NACA0012: Reibungsfreie, subsonische Strömung	53
4.1.3. NASA-CRM: Reibungsbehaftete, dreidimensionale Strömung	59
4.2. Einfluss der positivitätserhaltenden Grobgitterkorrektur	61
<b>5. Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>64</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>67</b>

<b>Anhang</b>	<b>68</b>
<b>A. Zusätzliche Ergebnisdarstellungen</b>	<b>69</b>
<b>B. Simulationseinstellungen</b>	<b>74</b>

# Nomenklaturverzeichnis

## Lateinische Formelzeichen

$\vec{F}_c$	konvektive Flüsse	
$\vec{F}_v$	viskose Flüsse	
$\vec{J}$	Jacobimatrix	
$\vec{n}$	Oberflächennormale	$m$
$\vec{r}$	Abstandsvektor	$m$
$\vec{v}$	Strömungsgeschwindigkeitsvektor	$\frac{m}{s}$
$\vec{W}$	konservative Variablen	
$a$	Ausbreitungsgeschwindigkeit	$\frac{m}{s}$
$A_{Roe}$	Roe-Matrix	
$c_v$	Wärmekapazität	$\frac{J}{kgK}$
$E$	Innere Energie	$\frac{J}{kg}$
$H$	Enthalpie	$\frac{J}{kg}$
$k$	turbulente kinetische Energie	$\frac{J}{kg}$
$M$	Massenmatrix	
$Ma$	Machzahl	—
$p$	Druck	$\frac{N}{m^2}$
$Q$	Quellterm	
$R_i$	spezifische Gaskonstante	$\frac{J}{kgK}$
$Re$	Reynoldszahl	—
$S$	Glättungsoperator	
$S_A$	Oberfläche	$m^2$
$T$	Temperatur	$K$
$k_j$	Wellenzahl	$\frac{1}{m}$
$V_j$	Amplitude	—
$\vec{R}, r$	Residuum	
$f_h$	rechte Seite	
$L$	Differentialoperator	
$\bar{u}_h$	Approximierte Feingittergröße	
$u_h$	Exakte Feingittergröße	



$v_H$	Grobgitterkorrektur	
$v_h$	Feingitterfehler	
$I_H^h$	Prolongationsoperator	
$I_h^H$	Restriktionsoperator	
$Q^F$	<i>forcing function</i>	
$2m$	Ordnung des Differentialoperators	—
$m_P$	Ordnung des Prolongationsoperators	—
$m_R$	Ordnung des Restriktionsoperators	—

### Griechische Formelzeichen

$\alpha$	Anstellwinkel	◦
$\delta u_h$	Korrektur Feingittergröße	
$\Delta$	Differenz	
$\delta_{ij}$	Kroneckersymbol	
$\lambda$	Wellenlänge	$m$
$\mu_t$	turbulente dynamische Viskosität	$Pa\cdot s$
$\Omega$	Volumen	$m^3$
$\omega$	Relaxations-/Korrekturfaktor	
$\rho$	Dichte	$\frac{kg}{m^3}$
$\tau$	Spannungstensor	
$\theta$	Phasenwinkel	◦
$\Psi$	Limiterfunktion	

### Abkürzungen

CRM	Common Research Model
DLR	Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt
FAS	Full Approximation Storage
FMG	Full Multigrid
NASA	National Aeronautics and Space Administration
RANS	Reynoldsgemittelte Navier-Stokes Gleichungen

## Indizes

$\infty$	Umgebung
H	Größe auf grobem Gitter
h	Größe auf feinem Gitter
i,j,k,l	Zählvariablen
max	maximal
prol	Prolongation
rek	Rekonstruktion

# Abbildungsverzeichnis

2.1.	Ausschnitte strukturierter (links) und unstrukturierter (rechts) Rechnernetze	14
2.2.	Iterative Verfahren im Lösungsprozess nach [12]	16
2.3.	Glättung hochfrequenter Fehleranteile	17
2.4.	Eindimensionale Gitter unterschiedlicher Auflösung	18
2.5.	Exemplarische Mehrgitterzyklen: V- und W-Zyklus	22
2.6.	Volumengewichtete Restriktion zwischen strukturierten Netzen	23
2.7.	Prolongation zwischen strukturierten Netzen	24
3.1.	Filterfunktion für Positivitätserhaltung	31
3.2.	Wert der Feingittergröße nach der Grobgitterkorrektur	32
3.3.	RAE2822: Unstrukturiertes Netz a) mit zwei agglomerierten Netzen b) und c)	34
3.4.	RAE2822: Strukturiertes Netz a) mit zwei agglomerierten Netzen b) und c)	35
3.5.	Netzkonvergenzstudie für das RAE2822	36
3.6.	NACA0012: Strukturiertes Netz a) mit zwei agglomerierten Netzen b) und c)	38
3.7.	NASA-CRM: Draufsicht auf Geometrie a) und Darstellung des Netzlevels 1 b)	39
3.8.	Untersuchte Themen im Mehrgitter	40
4.1.	Residuenverläufe für untersuchte Prolongationsordnungen auf unstrukturiertem Netzlevel 1	44
4.2.	RAE2822, unstrukturierte Netze: Einfluss einer erhöhten Prolongationsordnung auf die Beschleunigung (konstante Rekonstruktion auf groben Gittern)	46
4.3.	RAE2822, strukturierte Netze: Einfluss einer erhöhten Prolongationsordnung auf die Beschleunigung (konstante Rekonstruktion auf groben Gittern)	46
4.4.	RAE2822, unstrukturierte Netze: Einfluss einer erhöhten Prolongationsordnung auf die Beschleunigung (limitiert lineare Rekonstruktion auf groben Gittern)	47
4.5.	RAE2822, unstrukturierte Netze: Einfluss des Mehrgitterzyklus auf die Beschleunigung durch eine erhöhte Prolongationsordnung (limitiert lineare Rekonstruktion auf groben Gittern)	48
4.6.	RAE2822, unstrukturierte Netze: Einfluss einer höheren Ordnung der Grobgitterdiskretisierung auf die Beschleunigung (limitiert lineare Prolongation)	49
4.7.	RAE2822: Robustheitsuntersuchung für die strukturierten Netze	52
4.8.	RAE2822: Robustheitsuntersuchung für die unstrukturierten Netze	53
4.9.	NACA0012: Einfluss einer erhöhten Prolongationsordnung auf die Beschleunigung (lineare Rekonstruktion auf groben Gittern)	54
4.10.	NACA0012: Einfluss einer höheren Ordnung der Grobgitterdiskretisierung auf die Beschleunigung (lineare Prolongation)	55
4.11.	Robustheitsuntersuchung für das NACA0012	57
4.12.	Verlauf des Dichteresiduums für Berechnungen des NSA-CRM (Netzlevel 1)	59
4.13.	Verläufe des Dichteresiduums mit und ohne positivitätserhaltende Grobgitterkorrekturen	61
4.14.	Anzahl konvergierter Rechnungen mit und ohne positivitätserhaltender Grobgitterkorrektur	62

A.1. RAE2822, strukturierte Netze: Einfluss einer erhöhten Prolongationsordnung auf die Beschleunigung (lim. lineare Rekonstruktion auf groben Gittern)	69
A.2. RAE2822, unstrukturierte Netze: Einfluss des Mehrgitterzyklus auf die Beschleunigung durch eine erhöhte Prolongationsordnung (konstante Rekonstruktion auf groben Gittern)	70
A.3. RAE2822, unstrukturierte Netze: Einfluss einer höheren Ordnung der Grobgitterdiskretisierung auf die Beschleunigung (konstante Prolongation)	71
A.4. NACA0012: Einfluss einer erhöhten Prolongationsordnung auf die Beschleunigung (konstante Rekonstruktion auf groben Gittern)	72
A.5. NACA0012: Beschleunigung durch höhere Ordnung der Grobgitterdiskretisierung (konstante Prolongation)	73

# Tabellenverzeichnis

3.1.	Zellenanzahl der Sequenz unstrukturierte Netze für das RAE2822 . . . . .	33
3.2.	Zellenanzahl der Sequenz strukturierte Netze für das RAE2822 . . . . .	34
3.3.	Zellenanzahl der Sequenz strukturierter Netze für das NACA0012 . . . . .	37
3.4.	Zellenanzahl der strukturierten Netze für den NASA-CRM Testfall . . . . .	40
4.1.	Abkürzungen der variierten Parameter . . . . .	42
4.2.	Varierte Paramater für Robustheitsuntersuchung am RAE2822 . . . . .	51
4.3.	Varierte Paramater für die Robustheitsuntersuchung am NACA0012 . . . . .	57
4.4.	Iterationen und wall clock time für Berechnungen des NASA-CRM mit Netzlevel 1 . . . . .	60
4.5.	Iterationen und wall clock time für Berechnungen des NASA-CRM mit Netzlevel 2 . . . . .	60

# Kapitel 1.

## Einleitung

### 1.1. Ziel der Arbeit

Im Bereich der numerischen Strömungsmechanik hat sich das nichtlineare Mehrgitterverfahren als eine der wichtigsten Beschleunigungstechniken für die Lösung der Navier-Stokes Gleichungen etabliert [13][17]. Das nichtlineare Mehrgitterverfahren ermöglicht eine approximative Lösung nichtlinearer partieller Differentialgleichungssysteme basierend auf einer sukzessiven Vereinfachung des Ausgangsproblems. Dafür wird das diskretisierte Rechengebiet schrittweise vergrößert. Diese Vergrößerung kann durch eine Agglomeration erfolgen, welche feine Zellen des Ausgangsgitters zu größeren Zellen eines neuen Gitters zusammenfügt. Auf den so vergrößerten Gittern kann das Ausgangsproblem mit einer verringerten Anzahl von Unbekannten gelöst werden. Hinzu kommt, dass auf den groben Gittern Fehleranteile in der approximierten Lösung hochfrequenter erscheinen und so durch iterative Verfahren (Glätter) effektiv gedämpft werden können [6]. Nachdem die Lösung vom feinen Ausgangsgitter auf die groben Gitter transferiert wurde und dort eine weitere iterative Approximation mittels Glätter erfolgt, werden die Grobgitterlösungen als Korrekturen zurück auf das feine Gitter transferiert. Der Austausch der verschiedenen Größen zwischen den Gittern erfolgt mittels Transferoperatoren. Die Genauigkeit des Transfers wird durch die Ordnung des Transferoperators bestimmt, die Einfluss auf die Konvergenz des Mehrgitterverfahrens hat. In dieser Arbeit wird speziell die Ordnung des Prolongationsoperators untersucht, welcher die Korrekturen von den Grobgittern auf das feine Gitter transferiert. Insbesondere soll die Frage geklärt werden, wie sich eine höhere Genauigkeit des Prolongationsoperators auf die Beschleunigung und Robustheit des nichtlinearen Mehrgitters auswirkt. Diese Untersuchungen werden im unstrukturierten Strömungslöser CODA durchgeführt. Die Algorithmen und Datenstrukturen in unstrukturierten Strömungslösern erschweren die Konstruktion genauerer Prolongationsoperatoren gegenüber strukturierten Strömungslösern. Während auf strukturierten Rechnernetzen die Prolongation aufgrund der Netzstruktur und Zellform mittels Interpolation durchgeführt werden kann, ist dies auf unstrukturierten Rechnernetzen nicht ohne weiteres möglich [11]. Daher wird in unstrukturierten Strömungslösern wie dem am *Deutschen Zentrum für Luft- und Raumfahrt* entwickelten Löser *TAU* für den Transfer zwischen den Gittern auf eine Injektion zurückgegriffen, die der Genauigkeit einer konstanten Interpolation entspricht [13]. Die Infrastruktur von CODA bietet die Möglichkeit, die Genauigkeitsordnung der Prolongation zu erhöhen, sodass damit der Einfluss der Prolongation auch in einem unstrukturierten Löser untersucht werden kann. Darüber hinaus wird untersucht, wie sich eine Dämpfung der vom groben Gittern transferierten Größen, den Grobgitterkorrekturen, auswirkt. Mittels einer positivitätserhaltenden Grobgitterkorrektur soll das Auftreten negativer Größen auf dem feineren Gitter durch die Grobgitterkorrektur verhindert werden und so die Robustheit des Mehrgitterverfahrens gesteigert werden.

Die Ausführungen dieser Arbeit beginnen in Kapitel 2 mit den theoretischen Grundlagen zu den verwendeten Erhaltungsgleichungen sowie die für ihre numerische Lösung genutzten Diskretisierungsansätze. In Kapitel 2.3 wird die Idee und der Aufbau des Mehrgitterverfahrens in seiner linearen und nichtlinearen Form dargestellt. Den Abschluss bilden

Erklärungen zu wichtigen Eigenschaften numerischer Strömungslöser wie Konvergenz und Robustheit innerhalb des Kapitel 2.4. Im Kapitel 3 wird das in CODA implementiert nicht-lineare Mehrgitter beschrieben, sowie die für diese Arbeit eingeführten Änderungen an der Prolongation und der Grobgitterkorrektur erläutert. Anschließend werden in Kapitel 3.4 drei untersuchte Testfälle vorgestellt, die für die Bewertung verwendet wurden. Das Kapitel 4 stellt die Resultate bezüglich des Einflusses der Genauigkeit von Prolongation und zusätzlich von der Grobgitterdiskretisierung dar sowie die Auswirkungen der positivitätserhaltenden Grobgitterkorrektur. Für die untersuchten Testfälle wird jeweils der Einfluss auf die Beschleunigung und die Robustheit gezeigt. Im abschließenden Kapitel 5 werden die Ergebnisse zusammengefasst und die Vor- und Nachteile einer erhöhten Genauigkeit in der Prolongation und auf den Grobgittern abgewogen. Darüber hinaus werden mögliche Ansatzpunkte für weitere Untersuchungen, insbesondere für die positivitätserhaltende Grobgitterkorrektur, vorgeschlagen.

## 1.2. Der Strömungslöser CODA

Der numerischen Strömungslöser CODA (CFD for Onera, DLR and Airbus) wird gemeinschaftlich von den drei Kooperationspartnern, dem *Deutschen Zentrum für Luft- und Raumfahrt*, der französischen *ONERA* und *Airbus* entwickelt. Die kooperative Arbeit am CODA Strömungslöser begann 2018 und basiert auf dem Prototypencode *Fluc* des DLR [14]. Zu den Entwicklungszielen von CODA gehört neben etablierten Diskretisierungsmethoden wie der *Finite-Volumen Methode* auch die Umsetzung Methoden höherer Ordnung wie der *Discontinuous Galerkin Methode*. Darüber hinaus gehören strukturelle und algorithmische Anpassungen an die parallelisierten Architekturen von Hochleistungsrechnern sowie die Berücksichtigung algorithmischer Neuerungen wie implizite Schemata oder Mehrgittermethoden zu den angestrebten Funktionalitäten [9]. Zudem soll eine hohe Flexibilität bei der Gittererzeugung durch lokale Netzverfeinerungen, bewegliche und verformbare Netze und die Kombination unterschiedlicher Netzarten ermöglicht werden. Einige dieser Funktionalitäten wurden in Prototypen bereits erfolgreich getestet und sollen nun in CODA gebündelt werden. Die verwendeten Programmiersprachen sind *C++* für die Kernfunktionalitäten und *Python* für die Programmsteuerung und Nutzerschnittstellen. Da strömungsmechanische Probleme heutzutage im Zusammenhang mit vielen weiteren Fachbereichen wie der Akustik oder Elastik stehen, wird CODA als Modul einer multidisziplinären Simulationsumgebung entwickelt. Die Simulationsumgebung *FlowSimulator* bietet den Rahmen für die Kopplung von Simulationswerkzeugen aus unterschiedlichen Disziplinen [24]. CODA befand sich zum Zeitpunkt der Untersuchungen noch in der Entwicklung und obwohl noch weitere Jahre an Entwicklungsarbeit benötigen wird, sind die wichtigsten Basisfunktionalitäten in CODA bereits implementiert und durch einige Testfälle verifiziert und validiert. Auch das untersuchte Mehrgitterverfahren befindet sich gegenwärtig noch in der Entwicklungsphase und ist noch nicht vollständig im zu der Zeit aktuellsten Stand des Codes integriert. Hinsichtlich der Untersuchungsergebnisse in dieser Arbeit ist also zu beachten, dass der verwendete Mehrgitteralgorithmus grundsätzlich verifiziert wurde, aber zukünftige Änderungen z.B. am Agglomerationsalgorithmus die in der Arbeit vorgestellten quantitativen Ergebnisse beeinflussen können. Qualitativen Aussagen und abgeleitete Trends sollten von derartigen Änderungen allerdings nicht betroffen sein und damit auch für ähnliche Implementierungen gültig sein.

# Kapitel 2.

## Theoretische Grundlagen

Zu Beginn sollen die Navier-Stokes-Gleichungen, die den numerischen Untersuchungen zugrundeliegen, mit wesentlichen Aspekten ihrer Diskretisierung vorgestellt werden, um so nachfolgend das Mehrgitterverfahren und spätere Untersuchungsergebnisse einordnen zu können. Das nichtlineare Mehrgitter wird aufbauend auf der Beschreibung des linearen Mehrgitters erklärt. Der Fokus liegt dabei auf den Transferoperatoren, insbesondere auf den zu untersuchenden Prolongationsoperatoren. Abschließend werden Eigenschaften von iterativen Lösungsverfahren und Größen zur Bewertung von Konvergenzbeschleunigung und Robustheit beschrieben.

### 2.1. Erhaltungsgleichungen

Grundlage jeder kontinuumsmechanischen Beschreibung einer Strömung sind die Navier-Stokes-Gleichungen. Diese lassen sich aus den Erhaltungsgleichungen für die Masse, dem Impuls in alle Raumrichtungen und der Energie in einem definierten Kontrollvolumen herleiten. Zusammen bilden die Gleichungen ein gekoppeltes System von fünf nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen. Zusammengefasst in vektorieller Schreibweise für das Kontrollvolumen  $\Omega$  ergibt sich die Integralform der Navier-Stokes-Gleichungen [3].

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \vec{W} d\Omega + \int_{\partial\Omega} (\vec{F}_c - \vec{F}_v) dS_A = \int_{\Omega} \vec{Q} d\Omega \quad (2.1)$$

Der erste Term beschreibt die zeitliche Änderung der konservativen Variablen  $\vec{W}$  im Kontrollvolumen.  $\vec{W}$  umfasst im dreidimensionalen die fünf Komponenten Dichte, den Impuls in alle drei Raumrichtungen und die Energie:

$$\vec{W} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho E \end{bmatrix} \quad \vec{F}_c = \begin{bmatrix} \rho(\vec{v} \circ \vec{n}) \\ \rho u(\vec{v} \circ \vec{n}) + p\vec{n}_x \\ \rho v(\vec{v} \circ \vec{n}) + p\vec{n}_y \\ \rho w(\vec{v} \circ \vec{n}) + p\vec{n}_z \\ \rho H(\vec{v} \circ \vec{n}) \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Im zweiten Term ist der konvektive Fluss  $\vec{F}_c$  und der viskose Fluss  $\vec{F}_v$  über die Oberfläche des Kontrollvolumens zusammengefasst. Die rechte Seite wird durch den Quellterm  $\vec{Q}$  gebildet, der über das gesamte Volumen integriert wird. Da dieses Gleichungssystem mit den sieben Unbekannte Dichte, Druck, Temperatur, innerer Energie und den drei Strömungskomponenten unterbestimmt ist, wird bei der Behandlung von Gasen häufig die Annahme eines idealen Gases getroffen, die mit dem idealen Gasgesetz

$$p = \rho R_i T \quad R_i : \text{spezifische Gaskonstante} \quad (2.3)$$



und dem Zusammenhang für die innere Energie

$$E = c_v T \quad c_v : \text{Wärmekapazität} \quad (2.4)$$

zwei weitere Gleichungen zur Schließung des Gleichungssystems liefert.

**Erweiterungen für turbulente Strömungen** Soll eine turbulente Strömung vollständig berechnet werden, müssten theoretisch alle Skalen der Turbulenz, sowohl räumlich als auch zeitlich, aufgelöst werden, was zu einer Direkten Numerischen Simulation führen würde. Da dafür extrem feine Rechenetze und kleine Zeitschritte notwendig werden, wird für konventionelle Strömungslöser nur der mittlere Einfluss turbulenter Schwankungen berücksichtigt. Grundlage dafür ist die Aufspaltung der Strömungsgrößen in den Navier-Stokes-Gleichungen in eine zeitlich gemittelte Komponente und eine zeitabhängige Schwankungskomponente sowie eine anschließende zeitliche Mittelung. Die daraus entstehenden Gleichungen sind die Reynolds-gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen, kurz RANS [26]. Dieses System ist wiederum nicht geschlossen, da bei der Mittelung ein Tensor aus zeitlich gemittelten Schwankungskomponenten entsteht. Dieser Tensor enthält aufgrund seiner Symmetrie die sechs unbekanntenen Reynoldsspannungen. Entsprechende Turbulenzmodelle lösen dieses Schließungsproblem durch Modellierung der unbekanntenen Größen basierend auf den mittleren Strömungsgrößen. Zu den verbreitetsten Modellen gehören die auf der Boussinesq-Hypothese basierenden Ein- und Zweigleichungsmodelle. Die Hypothese stellt einen Zusammenhang zwischen dem Reynoldsspannungstensor und den mittleren Gradienten der Strömungsgeschwindigkeit über die sogenannte turbulente Viskosität her. In Analogie zum viskosen Spannungstensor ergibt sich <sup>1</sup>

$$(\tau_{ij})_{turb} = \mu_t \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij}. \quad (2.5)$$

Als einzige Unbekannte verbleibt die turbulente dynamische Viskosität  $\mu_t$ , welche als Ergebnis einer Dimensionsanalyse durch zwei freie Parameter beschrieben werden kann [26]. Aufgabe des Turbulenzmodells ist es nun für diese Parameter definierende Zusammenhänge zu liefern. Das etablierte und auch in CODA genutzte Eingleichungsmodell von Spalart und Allmaras fasst die freien Parameter zu einer modifizierten Wirbelviskosität  $\tilde{\nu}_t$  zusammen und stellt für diese Größe eine weitere Transportgleichung auf [1]. Für die Lösung der turbulenten Strömung mit dem Spalart-Allmaras-Turbulenzmodell kommt also zu den bestehenden fünf Transportgrößen Masse, Impuls und Energie die turbulente kinematische Viskosität hinzu, wodurch sich sechs gekoppelte Differentialgleichungen ergeben. Die einzelnen Terme der zusätzlichen Transportgleichung können zumeist in gleicher Art und Weise diskretisiert werden wie die Terme der N-S-Gleichung. Neben der Klasse der Eingleichungsmodelle gibt es die Klasse der Zweigleichungsmodelle, welche für jeden der zwei freien Parameter bzw. für daraus abgeleitete Größen Transportgleichungen definieren. Häufig verwendete Ersatzgrößen für die freien Parameter sind etwa die turbulente kinetische Energie, die Dissipationsfrequenz oder die Dissipationsrate.

## 2.2. Diskretisierungsansätze

Für die beschriebenen Erhaltungsgleichungen wird im Folgenden zum einen die verwendete Diskretisierungsmethode vorgestellt und zum anderen Ansätze zur räumlichen und zeitlichen Diskretisierung der einzelnen Terme. Es wird sich auf die wichtigsten Verfahren beschränkt, die im Rahmen der numerischen Untersuchungen verwendet wurden.

<sup>1</sup>Der übersichtlicher wird die Einsteinsche Summenkonvention zur Darstellung genutzt.

### 2.2.1. Finite-Volumen Methode

Statt die Navier-Stokes-Gleichungen analytisch zu lösen, was im allgemeinen Fall nicht möglich ist, wird das physikalische Rechengebiet in kleinere Zellen zerlegt, die das Rechnetz bilden. Da die Integralform der Grundgleichungen auch an Diskontinuitäten gilt und gleichzeitig für endliche Volumina definiert ist, kann aus ihr direkt die Idee einer Diskretisierung in endliche Kontrollvolumina abgeleitet werden [3]. Bei der *Finite-Volumen-Methode* werden aus dem physikalischen Raum kleinere Kontrollvolumen gebildet, welche durch das Rechnetz definiert werden. In jedem dieser Volumen erfolgt die Lösung der Gleichung (2.1), wobei der Verlauf der konservativen Variablen  $\vec{W}$  im Volumen zunächst als konstant angenommen wird. Neben der Relation von Rechnetz und Kontrollvolumen wird auch die Form der Kontrollvolumen durch die Art des Rechnetzes vorgegeben. Während auf strukturierten Netzen die Zellen Hexaedern (2D: Vierecken) (siehe Abbildung 2.1) entsprechen und direkt durch Indizierung entlang der Netzlinien adressiert werden können, fehlt auf unstrukturierten Netzen diese Form der Ordnung. Die Zellen liegen dort ohne übergeordnete Struktur vor, was zu einer größeren geometrischen Flexibilität der Zellen führt, aber zu einem weniger effizienten Zugriff. Auf unstrukturierten Netzen können die Zellen nahezu beliebige Formen annehmen (Hexaeder, Tetraeder, Polyeder) [4]. Inwieweit die durch das Rechnetz definierten Zellen mit den Kontrollvolumen übereinstimmen, hängt davon ab, ob eine zellzentrierte oder eine knotenbasierte Struktur vorliegt. Mit dem zellzentrierten Ansatz, der auch in CODA verwendet wird, entsprechen die Netzzellen gerade den Volumenelementen. Der Zustand der Zelle ist dann im Zellmittelpunkt definiert. Mit dem knotenbasierten Ansatz entspricht jeder Knoten einem Zellmittelpunkt, das Kontrollvolumen wird um diesen Knoten herum gebildet. Diese grundlegenden Unterschiede in der Struktur des Rechnetzes beeinflussen auch die notwendige Datenstruktur des Strömungslösers. Im konkreten Fall von CODA mit seinen zellzentrierten, unstrukturierten Netzen ist eine effiziente kantenbasierte Datenstruktur durch Speicherung von oberflächenbezogenen Daten implementiert.

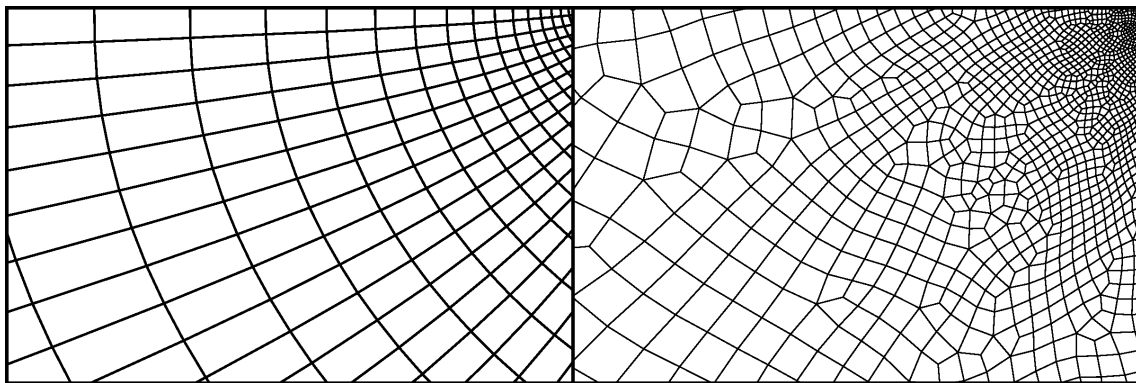


Abbildung 2.1.: Ausschnitte strukturierter (links) und unstrukturierter (rechts) Rechnetze

### 2.2.2. Upwind-Schema und Rekonstruktion

In diesem Abschnitt sollen nur ausgewählte Aspekte der räumlichen Diskretisierung zusammengefasst werden, die ebenfalls Anwendung im später beschriebenen Mehrgitterverfahren finden. Hauptaufgabe der räumlichen Diskretisierung ist die Approximierung der konvektiven und viskosen Flüsse. Das etablierte und oft genutzte Upwind-Schema nach Roe für die konvektiven Flüsse dient hierbei als Ausgangspunkt für die Beschreibung der

sogenannten Rekonstruktion. Das Roe Upwind-Schema approximiert für die Berechnung des konvektiven Flusses das Riemannsche Stoßrohr-Problem und linearisiert dafür die dabei auftretenden Wellen [3]. Der konvektive Fluss durch die Zelloberfläche  $S_i$  ist für dieses Schema dann wie folgt definiert:

$$(\vec{F}_c)_{S_i} = \frac{1}{2}[\vec{F}_c(\vec{W}_R) + \vec{F}_c(\vec{W}_L) - |\bar{A}_{Roe}|(\vec{W}_R - \vec{W}_L)]. \quad (2.6)$$

Die Roe-Matrix  $\bar{A}_{Roe}$  enthält die Wellen des approximierten Riemann-Problems in Form der Eigenvektoren der Matrix sowie die Ausbreitungsgeschwindigkeiten in Form der Eigenwerte. Für die Flussauswertung werden die Zustände links ( $\vec{W}_L$ ) und rechts ( $\vec{W}_R$ ) der Oberfläche benötigt. Mit einer konstanten Verteilung der konservativen Variablen  $\vec{W}$  innerhalb der Zellen ist die räumliche Diskretisierung von 1. Ordnung genau (Diskretisierungsfehler  $\propto \Delta x$ ). Nimmt man hingegen einen linearen Verlauf der Variablen in der Zelle an und rekonstruiert daraus die Zustände links und rechts der Zelloberfläche, erhält man eine Lösung, die eine Genauigkeitsordnung von 2 besitzt (Diskretisierungsfehler  $\propto (\Delta x)^2$ ). Um die Zustände an den Zelloberflächen abbilden zu können, wird die sogenannte Rekonstruktion genutzt. Diese Rekonstruktion nutzt den Wert in der Zelle selbst und die Werte in den Nachbarzellen, um daraus den Verlauf der Variablen in der Ausgangszelle zu beschreiben. Der Zustand links oder rechts von der Zelloberfläche (oder eines beliebigen anderen Punktes in der jeweiligen Zelle) kann dann mit Hilfe einer Taylor-Reihe, die nach dem zweiten Glied abgebrochen wird, berechnet werden.

$$W_L = W_i + (\Delta W_i \vec{r}_L) \quad (2.7)$$

Da es durch die Rekonstruktion in Gebieten mit starken Gradienten zu Oszillationen und zur Bildung neuer Extrema kommen kann, wird die Rekonstruktion in diesen Bereichen häufig durch einen Limiter beschränkt. Eine geeignete Limiterfunktion  $\Psi$  reduziert den Gradienten der Rekonstruktion an Unstetigkeiten, sodass das Verfahren lokal wieder von 1. Ordnung genau ist und so die Monotoniebedingung erfüllt und neue Extrema verhindert [3]. Neben der genutzten Limiterfunktion  $\Psi$  hat auch die Art der Gradientenberechnung Einfluss auf die Rekonstruktion. Häufig verwendete Ansätze zur Berechnung des Gradienten sind der *Green-Gauß*- oder der *Least-squares*-Ansatz [16]. Als Limiterfunktionen werden häufig die Formulierungen von *Barth und Jespersen* und *Venkatakrishan* eingesetzt [27]. Da mit der Rekonstruktion nicht nur die Zustände an den Zelloberflächen berechnet werden können, sondern an jedem Punkt in der beliebig geformten Zelle, wird die Rekonstruktion auch bei der in Kapitel 2.3.4 beschriebenen Prolongation angewandt.

### 2.2.3. Implizites Euler-Verfahren

In dieser Arbeit werden nur stationäre Probleme betrachtet. Die zeitliche Ableitung der konservativen Variablen fällt daher aus den Navier-Stokes-Gleichungen (2.1) heraus. Als iteratives Lösungsschema für stationäre Probleme wird häufig eine Pseudo-Zeitschrittverfahren genutzt. Die Stabilität des gesamten Lösungsprozesses wird maßgeblich durch das gewählte Zeitschrittverfahren beeinflusst, weshalb einige wichtige Aspekte vorgestellt werden sollen [8]. Das für die Untersuchungen genutzte Zeitschrittverfahren ist das implizite Euler-Verfahren, welches mit Hilfe des linearisierten Residuums die folgende Form annimmt.

$$\left[ \frac{(\Omega \bar{M})_i}{\Delta t_i} + \left( \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{W}} \right)_i \right] \Delta \vec{W}^n = -\vec{R}_i^n \quad (2.8)$$

Die linke Seite stellt den *impliziten Operator* dar, bestehend aus dem Volumen  $\Omega$ , der Massenmatrix  $\bar{M}$  (entspricht der Einheitsmatrix für zellzentrierte Gitter), der Zeitschritt-

weite  $\Delta t$  und der Jacobimatrix

$$\vec{J} = \left( \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{W}} \right).$$

Die rechte Seite stellt das Residuum dar, welches die räumliche Diskretisierung der Flüsse und Quellen enthält und bei Erreichen der stationären Lösung zu Null wird [8].

$$\vec{R}_i = \sum_{j=1}^{N_F} (\vec{F}_c)_j \Delta \vec{S}_j + \sum_{j=1}^{N_F} (\vec{F}_v)_j \Delta \vec{S}_j - \Omega_i \vec{Q}_i \quad (2.9)$$

Die Gleichung (2.8) stellt ein lineares Gleichungssystem dar, welches für die Korrektur  $\Delta \vec{W}$  gelöst werden muss. Für dessen Lösung können einfache iterative Verfahren wie das Gauß-Seidel-Verfahren oder ein lineares Mehrgitterverfahren genutzt werden. Das für die Untersuchung verwendete Verfahren ist ein vorkonditioniertes GMRES-Verfahren aus der Klasse der Krylov-Unterraum-Verfahren [18]. Mit der so berechneten Korrektur wird dann die Lösung für den aktuellen Zeitschritt dem stationären Zustand schrittweise angenähert. In der Abbildung 2.2 sind die im gesamten Lösungsprozess verwendeten iterativen Verfahren entsprechend ihrer gegenseitigen Abhängigkeiten dargestellt. Das in

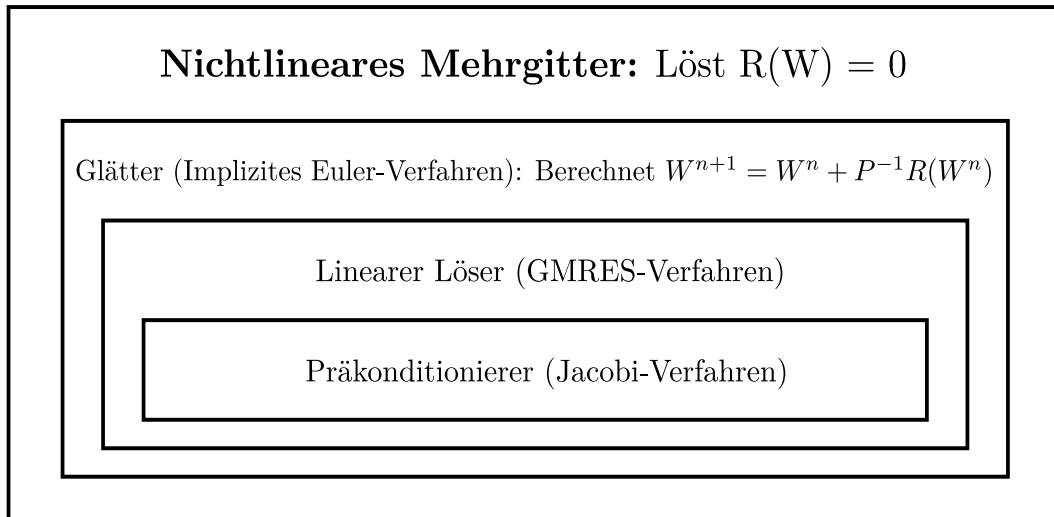


Abbildung 2.2.: Iterative Verfahren im Lösungsprozess nach [12]

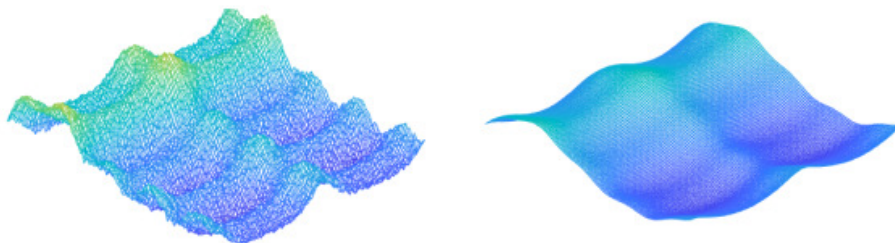
dieser Arbeit betrachtete Verfahren ist das nichtlineare Mehrgitter, welches allerdings auf den dargestellten Verfahren aufbaut. Innerhalb des Mehrgitters iteriert das implizite Euler-Verfahren die Lösung  $\vec{W}$ . Die linearisierten Gleichungen, die innerhalb des Euler-Verfahrens entstehen, werden mittels GMRES-Verfahren näherungsweise gelöst. Vor dem eigentlichen GMRES-Verfahren wird wiederum für eine bessere Konvergenz das Jacobi-Verfahren als Präkonditionierer für das lineare Gleichungssystem genutzt.

## 2.3. Das Mehrgitterverfahren

Das Mehrgitterverfahren ist eine allgemeine Beschleunigungstechnik für das iterative Lösen diskretisierter Differentialgleichungen. Zu Beginn wurde das Verfahren für die Lösung elliptischer Gleichungen wie der Poisson-Gleichung entwickelt. Später wurde es auch für die Anwendung auf strukturierten und unstrukturierten Netzen zur Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen weiterentwickelt und erfolgreich angewendet [8]. Im Mehrgitterverfahren erfolgt die Berechnung der Lösung auf einer Reihe gröber werdender Rechnernetze. Die dabei entstehenden Annäherungen an die Lösung werden zusammengeführt und für die Lösung auf dem ursprünglichen, feinen Netz verwendet. Das Potential des Mehrgitterverfahrens liegt vor allem in der theoretisch netzunabhängigen Konvergenzrate, die mit diesem Verfahren im Idealfall erreicht werden kann [6]. Die grundlegende Idee des Mehrgitters soll im folgenden Abschnitt näher erläutert werden.

### 2.3.1. Prinzip des Mehrgitterverfahrens

Grundlage für die beschleunigende Wirkung des Mehrgitterverfahrens ist zum einen der Umstand, dass auf gröberen Gittern bedingt durch die CFL-Bedingung (siehe Kapitel 2.4.1) größere Zeitschritte genutzt werden können, so dass auf dem groben Gitter mit weniger Iterationsschritten, die stationäre Lösung erreicht werden kann. Gleichzeitig benötigen diese Iterationsschritte weniger Rechenoperationen aufgrund der geringeren Anzahl an Gitterelementen. Zum anderen reduzieren viele iterative Schemata wie auch die meisten Zeitschrittverfahren nur bestimmte Anteile des Lösungsfehlers effektiv (hochfrequente) während andere (niederfrequente) sehr geringe Dämpfung erfahren. Dieses charakteristische Verhalten vieler iterativer Prozesse äußert sich in einer starken Verringerung der Konvergenzrate im frühen Stadium des Lösungsprozesses. Während in den ersten Iterationsschritten der Fehler aufgrund der effektiven Dämpfung hochfrequenter Fehleranteile mit jedem Iterationsschritt stark verringert wird, verlangsamt sich die Konvergenz im späteren Verlauf hin zu einer asymptotischen Konvergenzrate. In diesem Abschnitt sind hauptsächlich nur noch niederfrequente Anteile im Lösungsfehler enthalten. Da der Fehler somit keine lokal stark schwankenden Anteile mehr besitzt, wird häufig von einem „glatten“ Fehler gesprochen und das dazugehörige iterative Verfahren wird als Glätter bezeichnet. Die Auswirkungen des Glättungsprozesses auf den Fehler ist in Abb. 2.3 beispielhaft visualisiert. Ein Ziel der Gittervergrößerungen im Mehrgitterverfahren ist es,



**Abbildung 2.3.:** Glättung hochfrequenter Fehleranteile

den geglätteten Fehler auf einem gröberen Netz darzustellen, sodass die niederfrequenten

Anteile des Fehlers auf dem groben Netz als hochfrequent erscheinen. Für die Verdeutlichung des Zusammenhangs sei der Fehler  $U_i$  an der Stützstelle  $i$  des eindimensionalen und periodischen, diskretisierten Gebietes  $\Omega_h$  als komplexe Fourier-Reihe dargestellt.

$$U_i = \sum_{j=-N}^N V_j e^{Ik_j x_i} \quad (2.10)$$

Hierin stellt  $V_j$  die Amplitude der  $j$ -ten Mode des Fehlers,  $k_j$  die Wellenzahl und  $x_i$  die  $i$ -te Stützstelle im Gitter dar. In Abbildung 2.4 sind zwei exemplarische, äquidistante Gitter dargestellt mit einem Gitterabstand von  $\Delta x$  und  $2\Delta x$ . Die Unterteilung des Fehlers  $U_i$  in

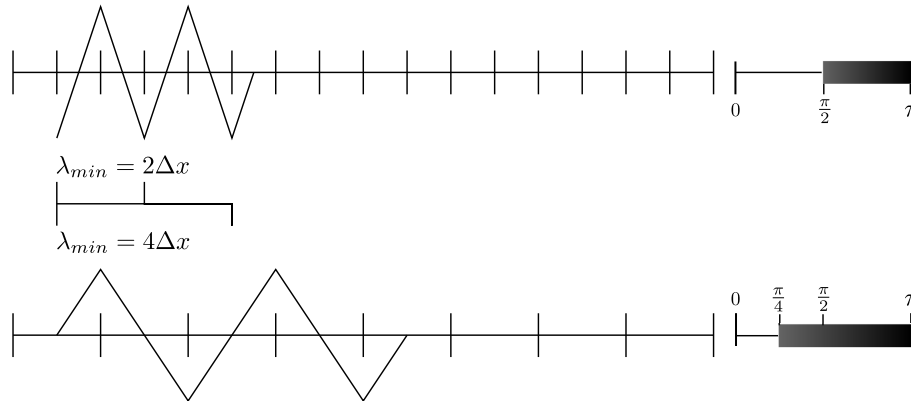


Abbildung 2.4.: Eindimensionale Gitter unterschiedlicher Auflösung

einen hochfrequenten und einen niederfrequenten Bereich erfolgt mittels des Phasenwinkel  $\theta$ , welcher sich aus der Wellenzahl bzw. der Wellenlänge  $\lambda$  ergibt [8].

$$\theta = k_j \Delta x = \frac{2\pi \Delta x}{\lambda} \quad (2.11)$$

Das Spektrum des Fehlers wird dabei von der Größe des Gitters und seiner Gitterabstände bestimmt. Die maximale auf dem Gitter darstellbare Wellenlänge entspricht der Größe  $L$  (1D: Länge) des Rechnernetzes, während die minimale Wellenlänge dem doppelten Gitterabstand beträgt. Für das in Abb. 2.4 dargestellte feinere Gitter gilt also

$$\lambda = [2\Delta x, L] \quad \theta = [0, \pi]$$

und für das grobe Gitter

$$\lambda = [4\Delta x, L] \quad \theta = [0, \frac{\pi}{2}]$$

Für die Unterteilung in einen hochfrequenten und einen niederfrequenten Anteil wird die untere Hälfte des Wertebereiches von  $\theta$  den niedrigen Frequenzen des Fehlers zugeordnet und der obere Wertebereich den hohen Frequenzen. Auf dem groben Gitter entspricht der hochfrequente und effektiv gedämpfte Fehleranteil  $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$  und der schlecht gedämpfte niederfrequente Bereich  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ . Dieser Bereich beinhaltet auf dem in Abb. 2.4 gezeigten groben Gitter gerade das gesamte Spektrum, sodass auf dem groben Gitter Teile des niederfrequenten Bereiches des feinen Netzes effektiv gedämpft werden können ( $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$ ). Also lassen sich durch Netzvergrößerungen sukzessive niederfrequenten Fehleranteile des feinen Gitters auf den entsprechend gröberen Netzen dämpfen. Für eine möglichst vollständige Erhaltung der Informationen des Fehler auf dem feinen Netzes muss vor einem Transfer auf ein gröberes Gitter der Fehler hinreichend glatt sein. Ist dies

nicht der Fall, gehen Fehleranteile mit Wellenlängen unter der minimalen Wellenlänge des groben Gitters auf diesem verloren [6].

### 2.3.2. Grundsätzlicher Mehrgitteralgorithmus

Ein Mehrgitteralgorithmus setzt sich immer aus den gleichen grundlegenden Schritten zusammen. Zunächst bedarf es einer Strategie für die Vergrößerung des Rechnernetzes ausgehend von dem feinen Ausgangsnetz. Für die Definition dieser Grobgitter gibt es verschiedene Ansätze, die entweder ein vorgegebenes Startnetz nutzen, um von diesem aus alle weiteren Gitterebenen zu definieren oder aber voneinander unabhängige Gitter konstruieren. Der Aufbau der unterschiedlichen Gitterebenen hat entscheidenden Einfluss auf die Art des zu implementierenden Algorithmus und auf dessen Lösungsverhalten. Die einzelnen Unterschiede sollen nicht vorgestellt werden. Die in CODA verwendete Vergrößerungsstrategie wird als Agglomeration bezeichnet und basiert auf der Bildung grober Zellen durch das Zusammenführen feiner Zellen. Die Konstruktion der Gitterebenen kann außerhalb des eigentlichen Mehrgitteralgorithmus in einem Präprocessingschritt erfolgen. Ausgehend von einer Startlösung auf dem feinsten Gitter wird das zu lösende System auf das gröbere Netz transferiert (Restriktion). Auf dem groben Netz werden ein oder mehrere Schritte mit dem gewählten Iterationsverfahren / Glätter vollzogen. Bei mehreren Grobgittern werden die Schritte Restriktion und Glättung bis hin zum größten Netz durchgeführt. Anschließend wird der Transfer der auf den groben Gittern korrigierten Lösung zurück auf das feinste Gitter durchgeführt (Prolongation).

#### Das Lineare Mehrgitter

Nahezu alle theoretischen Erkenntnisse über das Mehrgitterverfahren basieren auf der Analyse eines linearen Problems. Da die daraus entwickelten Aussagen, z.B. über das Konvergenzverhalten, in der Regel auch auf das nichtlineare Mehrgitterverfahren übertragen werden, soll zunächst das lineare Mehrgitter mit denen daraus resultierenden Erkenntnissen vorgestellt werden. Für die Unterscheidung von Grob- und Feingittergrößen wird die in [6] verwendete Nomenklatur verwendet, die Größen auf dem feinen Gitter mit einem  $h$  als Indize versieht und Größen auf dem groben Gitter mit einem  $H$ .

Das zugrundliegende Problem sei definiert durch

$$L_h u_h = f_h. \quad (2.12)$$

$L_h$  stellt hierbei den diskretisierten Differentialoperator  $L$  dar, welcher auf die Lösung des Problems  $u_h$  angewandt, der rechten Seite  $f_h$  entspricht. Die exakte Lösung  $u_h$  setzt sich aus der approximierten Lösung  $\bar{u}_h$  und einem Fehler  $v_h$  zusammen.

$$u_h = \bar{u}_h + v_h \quad (2.13)$$

Da innerhalb des Iterationsprozesses die exakte Lösung im Allgemeinen erst nach unendlich vielen Schritten erreicht wird, ergibt die Gleichung (2.12) mit der Näherungslösung  $\bar{u}_h$

$$L_h \bar{u}_h - f_h = r_h. \quad (2.14)$$

Das Residuum  $r_h$  wird zu null, wenn die Näherungslösung gegen die exakte Lösung strebt. Unter Ausnutzung der Linearität des Differentialoperators und Verwendung der vorherigen Gleichungen ergibt sich

$$L_h v_h = -r_h. \quad (2.15)$$

Transferiert man diese Gleichung auf das grobe Gitter erhält man die Grobgittergleichung

$$L_H v_H = -I_h^H r_H . \quad (2.16)$$

Die rechte Seite der Gleichung stellt das mittels Restriktionsoperator  $I_h^H$  auf das grobe Gitter transferierte Residuum dar. Auf dem groben Gitter muss also nicht mehr die Lösung selbst angenähert werden, sondern die Korrektur  $v_H$ . Wie der Restriktionsoperator  $I_h^H$  konstruiert werden kann, wird in Kapitel 2.3.4 beschrieben. Allgemein kann die Restriktion als eine Projektion der Elemente eines Raumes (feines Gitter) auf die eines anderen (grobes Gitter) verstanden werden [12]. Neben der Restriktion und der in Gleichung (2.16) definierten Grobgittergleichung bedarf es für das lineare Mehrgitterverfahren noch eines Zusammenhangs, um die auf den groben Gittern berechneten Korrekturen auf das feine Gitter zurück zu transferieren. Diese Grobgitterkorrektur  $v_H$  wird mittels eines Prolongationsoperators auf das feine Gitter übertragen, um so die Lösung auf dem feinen Gitter anzupassen.

$$\bar{u}_h^{neu} = \bar{u}_h + I_H^h v_H \quad (2.17)$$

Der Prolongationsoperator  $I_H^h$  kann als Interpolation basierend auf den Elementen des groben Gitters auf die Elemente des feinen Gitters verstanden werden. Die genaue Formulierung ist beeinflusst durch Faktoren wie der gewählten Vergrößerungsstrategie oder der Grobgitterdiskretisierung. Da der Einfluss des Prolongationsoperators entscheidender Teil dieser Ausarbeitung ist, wird er in Kapitel 2.3.4 detaillierter erläutert. Für die Grobgitterdiskretisierung, hier in Form des Operators  $L_H$  dargestellt, gibt es zwei unterschiedliche Möglichkeiten diesen Operator zu konstruieren. Zum einen der Galerkin Ansatz, welcher für die Konstruktion des Grobgitteroperators auf die Transferoperatoren (Restriktion und Prolongation) zurückgreift:

$$L_H = I_h^H L_h I_H^h$$

und zum anderen der Ansatz einer Rediskretisierung, bei der die Diskretisierung auf dem feinen Gitter ebenfalls für die groben Gitter verwendet wird [5]. Mit Hilfe der vorgestellten Zusammenhänge sowie einem geeigneten Glätter  $S$  für das grobe Gitter wird der lineare Zweigitteralgorithmus wie folgt formuliert [29]:

### Linearer Zweigitteralgorithmus

1	$\mathcal{S}(\bar{u}_h, f_h, \nu_{h1})$	$\nu_h$ Glätterschritte auf dem feinen Gitter
2	$r_h = f_h - L_h \bar{u}_h$	Feingitterresiduum
3	$f_H = \mathbf{I}_h^H r_h$	Restriktion
4	$\mathcal{S}(\bar{v}_H, f_h, \nu_H)$	$\nu_H$ Glätterschritte auf dem groben Gitter
5	$\bar{u}_h = \bar{u}_h + \mathbf{I}_H^h \bar{v}_H$	Prolongation und Grobgitterkorrektur
6	$\mathcal{S}(\bar{u}_h, f_h, \nu_{h2})$	$\nu_h$ Glätterschritte auf dem feinen Gitter

Die Glätterschritte auf dem feinen Gitter sind notwendig für die Konvergenz des Mehrgitterverfahrens, da die Grobgitterkorrektur (2-5) alleine zu keiner Fehlerreduktion führen würde [6]. Dies ist darauf zurückzuführen, dass vor dem Transfer auf das grobe Gitter möglichst alle hochfrequenten Fehleranteile geglättet sein sollten, weil diese auf dem groben Gitter nicht abgebildet werden können und somit auch nicht reduziert würden. Der Zweigitteralgorithmus steht exemplarisch für Mehrgitteralgorithmen mit einer beliebigen Anzahl gröberer Gitter, da die Konvergenz des linearen Mehrgitters nur gering beeinflusst ist von der genauen Anzahl der Gitterlevel [5].



### Das Nichtlineare Mehrgitter

Möchte man statt des linearen Problems, definiert in (2.12), ein nichtlineares Problem mit dem Mehrgitterverfahren lösen, kann neben einer Linearisierung mittels Newton-Iteration eine andere Formulierung des Mehrgitteralgorithmus gewählt werden, die als „Full Approximation Storage“ (FAS) bekannt ist und im Folgenden beschrieben werden soll. Das nichtlineare Problem sei definiert durch folgende Gleichung:

$$L_h(u_h) = f_h \quad (2.18)$$

Der Differentialoperator  $L_h$  ist wie bei der diskretisierten Navier-Stokes-Gleichung abhängig von der Lösung  $u_h$  selbst und damit nicht mehr linear. Mit

$$\bar{u}_H = \bar{I}_h^H \bar{u}_h + v_H \quad (2.19)$$

ergibt sich die Grobgittergleichung [15] zu

$$L_H(\bar{u}_H) = L_H(\bar{I}_h^H \bar{u}_h) - I_h^H r_h. \quad (2.20)$$

Im nichtlinearen Mehrgitter wird also nicht nur das Residuum vom feinen Gitter auf das grobe transferiert, sondern auch die Lösung des feinen Gitters selbst. Die zwei Restriktionsoperatoren können dabei durchaus unterschiedlich definiert sein. Es ist zu erkennen, dass sowohl die Grobgittergleichung als auch die Feingittergleichung gegen dieselbe Lösung streben für  $\bar{u}_h \rightarrow u_h$  ( $r_h \rightarrow 0$ ). Der rechte Teil der Gleichung wird häufig zur *forcing function*  $Q_H^F$  zusammengefasst. Die Terme der Gleichung können als Teilresiduen aufgefasst werden [3], wobei der linke Term dem eigentlichen Grobgitterresiduum entspricht und die rechte Seite einem konstanten Teil, der dem Residuum des groben Gitters aufgeprägt wird.

$$R = r_H + Q_H^F \quad (2.21)$$

Ein etwaiges Zeitschrittverfahren würde dann auf den groben Gittern mit  $R$  operieren und nicht mit  $r_H$ . Die Grobgitterkorrektur ergibt sich durch Prolongation des Korrekturterms auf das feine Gitter.

$$\bar{u}_h^{neu} = \bar{u}_h + I_H^h(\bar{u}_H - I_h^H \bar{u}_h) \quad (2.22)$$

Der Korrekturterm entspricht der Differenz zwischen der auf dem groben Gitter iterierten Lösung und der auf das grobe Gitter transferierten Lösung. Der große Vorteil des FAS ist die direkte Behandlung nichtlinearer Probleme ohne, dass eine Linearisierung notwendig wird. Der nichtlineare Mehrgitteralgorithmus sei an dieser Stelle exemplarisch für den Fall eines Vergrößerungslevels dargestellt (Zweigitteralgorithmus):

#### Nichtlinearer Zweigitteralgorithmus

1	$\mathbf{S}(\bar{u}_h, f_h, \nu_{h1})$	$\nu_h$ Glätterschritte auf dem feinen Gitter
2	$r_h = f_h - L_h(\bar{u}_h)$	Feingitterresiduum
3	$f_H = L_H(\bar{I}_h^H \bar{u}_h) + \mathbf{I}_h^H r_h$	Restriktion von Residuum und Lösung
4	$\mathbf{S}(\bar{u}_H, f_H, \nu_H)$	$\nu_H$ Glätterschritte auf dem groben Gitter
5	$\bar{u}_h = \bar{u}_h + \mathbf{I}_H^h(\bar{u}_H - I_h^H \bar{u}_h)$	Prolongation und Grobgitterkorrektur
6	$\mathbf{S}(\bar{u}_h, f_h, \nu_{h2})$	$\nu_h$ Glätterschritte auf dem feinen Gitter

Auch vom nichtlinearen Zweigitteralgorithmus aus lässt sich ein allgemeiner Mehrgitteralgorithmus aufbauen, indem nach den Glätterschritten auf dem groben Gitter (Schritt 4) nicht die Lösung direkt zurücktransferiert wird, sondern der gleiche Algorithmus rekursiv

für weitere gröber werdende Netzlevel aufgerufen wird und die Lösung nach Erreichen des größten Gitters über die einzelnen Gitter auf das feinste Gitter prolongiert wird. Der genaue Aufbau eines solchen Mehrgitterzyklus wird im nächsten Abschnitt beschrieben.

### 2.3.3. Strategien für einen Mehrgitterzyklus

Eine Zyklusstrategie beschreibt das Vorgehen beim Wechsel zwischen den verschiedenen Gittern in einem Mehrgitterverfahren. Adaptive Strategien berücksichtigen etwa die Dämpfung des Fehlers für den Wechsel zwischen Gittern. Die häufiger verwendeten Strategien legen eine feste Anzahl Glätterschritte für jedes Gitterlevel fest sowie die Reihenfolge, in der die verschiedenen Gitterlevel durchlaufen werden sollen. Diese Strategie hat den Vorteil geringerer Komplexität und höherer Robustheit [15]. Die zwei etabliertesten Zyklustypen sind in Abbildung 2.5 dargestellt. Der V-Zyklus berechnet die Lösung auf gröber

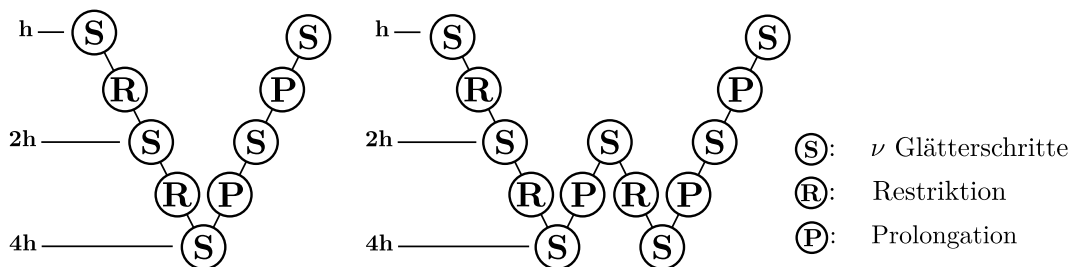


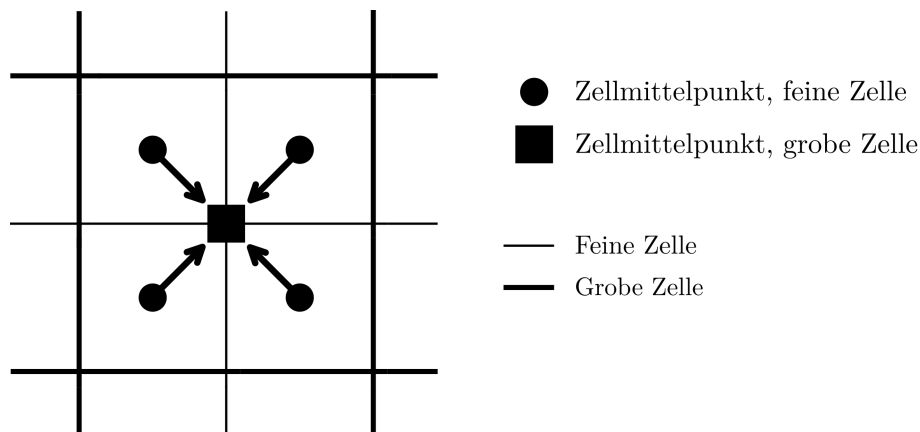
Abbildung 2.5.: Exemplarische Mehrgitterzyklen: V- und W-Zyklus

werdenden Gittern bis zum größten Level, von dem aus die Lösung über die verwendeten Gitter zum feinsten Gitter prolongiert wird. Ob nach jeder Prolongation auf dem feineren Gitter weitere Glätterschritte erfolgen, ist nicht festgelegt. Neben der dargestellten Variante, die auch in CODA verwendet wird, gibt es auch V-Zyklen, in denen jede prolongierte Korrektur direkt auf das nächst feinere Gitter transferiert wird. Der W-Zyklus durchläuft die gleichen Schritte wie der V-Zyklus bis zum größten Gitter, aber prolongiert dann die Lösung nicht bis auf das feinste Gitter, sondern je nach Ausprägung auf einzelne Level darüber, um von dort aus ein weiteres Mal die Lösung auf gröber werdenden Gittern bis hin zum größten Level zu berechnen. Aufgrund seiner höheren Effizienz wird zumeist ein V-Zyklus verwendet, während der W-Zyklus in supersonischen Anwendungsfällen häufig genutzt wird [3]. Der V-Zyklus wird ebenfalls häufig in einer Mehrgittertechnik verwendet, die „Full Multigrid“ (FMG) genannt wird und zumeist in der Anfangsphase eines Lösungsprozesses verwendet wird, in der die Startlösung noch weit von der Endlösung entfernt ist, um so die Robustheit des Lösungsprozesses zu steigern. Statt die Lösung ausgehend von einem feinen Gitter zu berechnen, wird die Berechnung von einem groben Gitter gestartet und durch sukzessives Hinzufügen feinerer Gitter auf das feinste Netz übertragen. Ist das feinste Netz erreicht, kann von dort das eigentliche Mehrgitterverfahren gestartet werden. In CODA wird eine ähnliche „Start-up“-Strategie als *grid sequencing* bezeichnet. Für das *grid sequencing* werden adaptive (Reduktion des Residuums) und konstante (Anzahl Glätterschritte) Kriterien für das Hinzufügen des nächstfeineren Gitterlevels verwendet.

### 2.3.4. Transferoperatoren: Restriktion und Prolongation

In diesem Abschnitt wird auf die möglichen Umsetzungen vom Prolongationsoperator eingegangen. Da der Restriktionsoperator mit seiner Ordnung zusammen mit dem Prolongationsoperator allerdings Teil eines häufig zitierten Konvergenzkriteriums für das Mehrgitterverfahren ist, soll dieser ebenfalls kurz beschrieben werden. Dem Ablauf des Zweigitteralgorithmus folgend wird zunächst die Restriktion vorgestellt.

**Der Restriktionsoperator** Wie bereits in Kapitel 2.3.2 erwähnt, beschreibt die Restriktion den Transfer von Größen aus einem Raum auf die eines anderen Raumes. Im Speziellen müssen die Variablen in den Zellen des feinen Gitters auf die Zellen des groben Gitters projiziert werden, um so im Falle des nichtlinearen Mehrgitters die Residuen und die Zustandsvariablen auf das grobe Gitter zu transferieren. Zum Zwecke der Anschaulichkeit soll dieses Vorgehen auf einem strukturierten Gitter mit äquidistanten Stützstellen wie es in Abbildung 2.6 zu sehen ist, gezeigt werden. Entsprechend der Abbildung wird für



**Abbildung 2.6.:** Volumengewichtete Restriktion zwischen strukturierten Netzen

den Wert im Zellmittelpunkt der groben Zelle, die gewichteten Werte in den feinen Zellen herangezogen. Das visualisierte Vorgehen ist die einfachste Umsetzung eines Restriktionsoperators, welches als volumengewichtete Interpolation bezeichnet wird. Der Zustand in der groben Zelle entspricht dabei dem volumengewichteten Mittel aller Werte der  $N$  feinen Zellen.

$$I_h^H(u_h)_j = \frac{\sum_{i=1}^N (V_h u_h)_i}{\sum_{i=1}^N (V_h)_i} \quad (2.23)$$

Im Fall des gezeigten Gitters mit  $(V_h)_i = konst.$  entspräche die Restriktion einem einfachen arithmetischen Mittelwert aller in der groben Zelle  $j$  enthaltenen Zellwerte  $(u_h)_i$ . Der Operator ist damit allgemein definierbar als

$$I_h^H = \left( \frac{((V_h)_{i=1}, \dots, (V_h)_{N_j})}{(V_H)_j} \right)_{j=1, \dots, N_{elem}}, \quad (2.24)$$

wobei  $i$  über alle  $N_j$  in dem groben Element  $j$  enthaltenen feinen Elemente läuft [12]. Diese Art der Restriktion entspricht einer Injektion, die von der Genauigkeit einer Interpolation mit der Ordnung 1 gleichkommt und damit nur konstante Funktionen exakt rekonstruiert. Der Transfer des Residuums auf das gröbere Gitter erfolgt für den Fall, dass die grobe Zelle  $j$  aus den  $N$  feinen Zellen besteht, durch eine Summation der Teilresiduen.

$$I_h^H(R_h)_j = \sum_{i=1}^N (R_h)_i \quad (2.25)$$

### Der Prolongationsoperator

Für die Prolongation werden unterschiedliche Operatoren sowohl für strukturierte als auch unstrukturierten Netze vorgestellt. In beiden Fällen werden Stützstellen des groben Gitters genutzt, um die Stützstellen des feinen Gitters zu interpolieren.

**Strukturierte Netze** Für den Fall eines äquidistanten, strukturierten Netzes, wie es in Abb. 2.7 dargestellt ist, vereinfacht sich die Definition des Prolongationsoperators aufgrund der rechteckigen Interpolationsgebiete. Die Vergrößerung auf strukturierten Netzen erfolgt dadurch, dass jeder zweite Gitterpunkt entfernt wird und sich die grobe Zelle damit aus vier (2D) feinen Zellen zusammensetzt. Die Prolongation mittels Injektion ist in Abb. 2.7 links visualisiert. Hierfür wird der Wert der groben Zelle ohne weitere arithme-

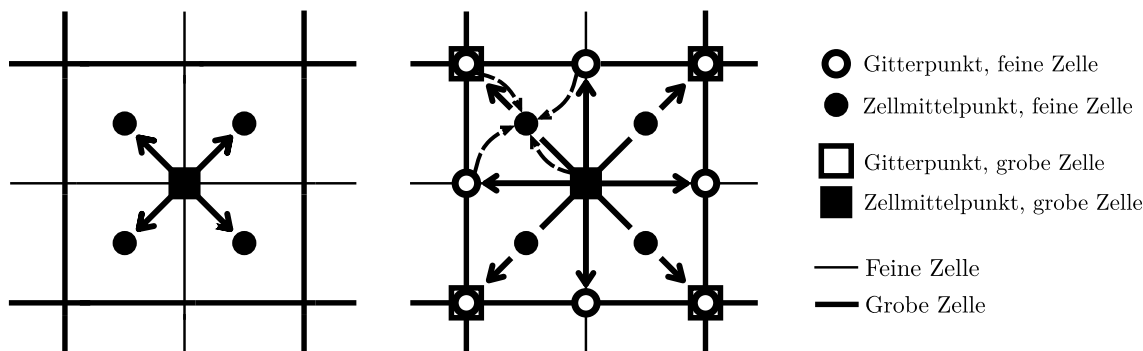


Abbildung 2.7.: Prolongation zwischen strukturierten Netzen

tischen Operationen allen feinen Zellen zugeschrieben, die in der groben Zelle enthalten sind. Ohne die Beschränkung auf strukturierte Netze kann der Prolongationsoperator für die Injektion als

$$I_H^h = (1_{i=1}, \dots, 1_{N_j})_{j=1, \dots, N_{elem}} \quad (2.26)$$

definiert werden [12]. Der so definierte Prolongationsoperator ist damit automatisch die Adjungierte des in Gleichung (2.24) definierten Restriktionsoperators. Diese Art der Prolongation entspricht einer konstanten Interpolation mit der Ordnung 1. Eine Prolongation mittels linearer Interpolation ist in Abb. 2.7 rechts dargestellt. Zunächst werden die Werte an den Zellmittelpunkten entsprechend des Stencils

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

auf die umliegenden feinen Gitterpunkte interpoliert. Der Wert im Zellmittelpunkt der feinen Zelle wird anschließend durch arithmetische Mittelung der Werte an den Gitterpunkten bestimmt. Für das dargestellte Netze ergibt sich die Prolongation für den Korrekturterm  $v_i$  in der Zelle  $i$  dann zu

$$I_H^h(v_h)_i = \frac{1}{16}(9(v_H)_{k,l} + 3(v_H)_{k-1,l} + 3(v_H)_{k,l-1} + (v_H)_{k-1,l-1}). \quad (2.28)$$

Mit dieser Prolongation können auch noch (bi-)lineare Funktionen exakt dargestellt werden, was zu einer Interpolationsordnung von 2 führt [5]. Interpolationen mit Ordnungen  $>2$  sind auf einem äquidistanten Gitter relativ leicht durch eine Hinzunahme weiterer Stützstellen konstruierbar. Beschränken sich die Interpolationsgebiete / Zellen allerdings nicht mehr auf Rechtecke, wird die Interpolation aufwändiger [23].

**Unstrukturierte Netz** Auf unstrukturierten Netzen wird die Konstruktion von Prolongationen mit Ordnungen  $>1$  abhängig von der Vergrößerungsstrategie aufwändiger. Insbesondere wenn komplexere Zellgeometrien als Tetraeder und Hexaeder in den Netzen verwendet werden, ist eine einfache Konstruktion von Interpolationen nicht mehr möglich. Dies ist etwa bei der in CODA verwendeten Agglomeration der Fall, bei der grobe

Zellen durch Zusammenfassen feinerer Zellen konstruiert werden. Dadurch entstehen auf den groben Netzebenen aus den Dreiecken (3D: Tetraeder) oder Vierecken (3D: Hexaeder) Polyeder. Durch den in der Agglomeration verwendeten Aufbau von Grobgitterzellen aus Feingitterzellen ist die Prolongation mittels einfacher Injektion mit dem bereits im vorherigen Abschnitt vorgestellten Operator (siehe Gleichung (2.24)) umzusetzen. Für eine lineare Prolongation wurde in [7] der folgende Ansatz basierend auf einer stückweise linearen Rekonstruktion beschrieben.

$$I_H^h(v_H)_j = (v_H)_j + \Psi_j(\Delta v_H)_j \vec{r}_{ji} \quad \Psi \in [0, 1] \quad (2.29)$$

Die rechte Seite der Gleichung entspricht der Form der Rekonstruktion, welche bereits in Kapitel 2.2.2 beschrieben wurde. Der erste Term gibt eine konstante Verteilung der Korrektur  $v_H$  in der Zelle wieder. Der zweite Term besteht aus der Limiterfunktion  $\Psi$ , dem Gradienten der Korrektur in der Zelle und dem Vektor  $\vec{r}_{ji}$  vom Zellmittelpunkt der groben Zelle  $j$  bis zum Zellmittelpunkt der feinen Zelle  $i$ . Für die Bildung des Gradienten wird in [7] der *Least-squares*-Ansatz vorgeschlagen. Für den Limiter  $\Psi$  kommen grundsätzlich dieselben Funktionen in Frage wie bei der klassischen Rekonstruktion. Der vorgestellte Ansatz für die lineare Prolongation besitzt somit über Netzgeometrie hinaus weitere Einflussparameter. Neben der Art wie die Gradienten in den Zellen berechnet werden, wird auch die gewählte Limiterfunktion, die zusätzliche freie Parameter enthalten kann, Einfluss auf die Genauigkeit der Prolongation besitzen. Da die Limiterfunktion Werte zwischen 0 und 1 annehmen kann, wird von ihr auch die Ordnung der Prolongation abhängen. Ohne Limitierung ( $\Psi = 1$ ) wäre die Ordnung 2 und mit voller Limitierung ( $\Psi = 0$ ) degradiert die Prolongation zur Injektion mit der Ordnung 1.

### Einfluss der Transferoperatoren auf die Konvergenz des Mehrgitterverfahrens

Das entscheidende Kriterium für die Wahl und Konstruktion von Transferoperatoren ist die Genauigkeit, mit der sie die entsprechenden Variablen zwischen den Gittern transferieren. Für einen möglichst geringen Informationsverlust durch diesen Transfer sollte die Ordnung der Transferoperatoren möglichst hoch sein. Die Ordnung  $m$  gibt an bis zu welchem Polynomgrad  $m-1$  der jeweilige Transferoperator den Verlauf der Größe exakt wiedergibt. Eine lineare Interpolation kann etwa Polynome bis zum Grad 1 exakt rekonstruieren und besitzt somit die Ordnung 2. Da jedoch Transferoperatoren höherer Ordnung vor allem auf unstrukturierten Gittern nur sehr aufwendig realisierbar sind, wird häufig auf die einfache Injektion zurückgegriffen. Obwohl sich damit nur stückweise konstante Funktionsverläufe wiedergeben lassen, können auch damit funktionierende Mehrgitterverfahren implementiert werden [13]. Eine mögliche Begründung könnte darin liegen, dass ausreichend glatte Fehlerkomponenten lokal nur noch sehr geringe Schwankungen aufweisen und damit hinreichend genau durch die konstante Interpolation wiedergegeben werden können. Über diese Überlegungen hinaus wird häufig mit einer in [6] entwickelten Ungleichung bei der Wahl der Ordnung der Transferoperatoren argumentiert. Die Gleichung

$$m_R + m_P > 2m \quad (2.30)$$

fordert für die Konvergenz des Mehrgitterverfahrens, dass die Ordnung von Restriktion  $m_R$  und die Ordnung der Prolongation  $m_P$  summiert größer sein muss als die die Ordnung  $2m$  der zu lösenden Differentialgleichung. Für die Lösung der Euler-Gleichungen mit der Ordnung 1 würde es zur Erfüllung der Gleichung also genügen die Injektion sowohl für Restriktion als auch Prolongation zu nutzen. Die Navier-Stokes-Gleichung ist hingegen eine Differentialgleichung 2. Ordnung und benötigt zumindest einen Transferoperator 2. Ordnung. Zu beachten ist allerdings, dass diese Ungleichung für ein lineares Mehrgitterverfahren mit dem Diskretisierungsansatz der Finiten Differenzen hergeleitet wurde. Hinzu kommt, dass die Herleitung in [6] nicht streng mathematisch erfolgt, sondern auf einigen

„wohl begründeten“ Annahmen ruht, ausgehend vom Galerkin-Ansatz für die Grobgitterdiskretisierung. In [15] konnte für die Laplace-Gleichung, diskretisiert mittels zentraler Differenzen und Galerkin-Ansatz, tatsächlich eine deutliche Konvergenzbeschleunigung bei Erfüllung des Kriteriums gezeigt werden. Dem stehen Untersuchungen in [21] gegenüber, wo die Poisson-Gleichung mittels Finiten-Volumen, *Least-squares*-Ansatz für die Gradienten und einer Rediskretisierung auf den groben Gittern gelöst wurde. Die Ergebnisse zeigten so gut wie keinen Einfluss der Prolongationsordnung, selbst bei Erfüllung des vorgestellten Kriteriums. Die unterschiedlichen Untersuchungsergebnisse lassen vermuten, dass das Kriterium nur mit Einschränkungen gültig ist und bei Abweichungen von den zur Herleitung genutzten Annahmen an Aussagekraft verliert.

### 2.3.5. Relaxation der Grobgitterkorrektur (positivity preservation)

Bei der Korrektur der konservativen Variablen auf dem feinen Gitter durch das Update vom groben Gitter, kann es zum Auftreten unphysikalischer Strömungsgrößen kommen. Häufig werden in diesem Fall negativer Drücke oder turbulente Größen beobachtet. Um den destabilisierenden Einfluss einzelner negativer Grobgitterkorrekturen zu verringern, kann in Mehrgitterverfahren die Grobgitterkorrektur mittels Relaxationsfaktor beschränkt werden, so dass unphysikalische Größen seltener auftreten. In [20] wird dafür der Grobgitterkorrektur ein Relaxationsfaktor vorangestellt.

$$\bar{u}_h^{neu} = \bar{u}_h^{alt} + \omega v_h \quad v_h = I_H^h(\bar{u}_H - \bar{u}_H^0) \quad (2.31)$$

Der Relaxationsfaktor  $\omega$  sollte abhängig von der korrigierten Größe und vom Vorzeichen der Korrektur gewählt werden. So wird empfohlen, Korrekturen, die den Druck oder turbulente Größen verringern, nur zu einem gewissen Anteil auf das feinere Gitter zu übertragen. Ebenso wird vorgeschlagen die Dichte und die Energie sowohl für Erhöhungen als auch Absenkungen nur zu einem gewissen Bruchteil ( $\pm 20\%$ ) auf die Größen des feinen Gitters zu addieren. Eine weitere Möglichkeit die Positivität zu erhalten ist eine Umformulierung der an der Grobgitterkorrektur beteiligten Größen. Eine Logarithmierung wie sie [28] durchgeführt wurde, führt implizit zu stets positiven, korrigierten Feingitterlösungen. Mit der logarithmierten Grobgitterkorrektur

$$\log(v_h) = I_H^h(\log(\bar{u}_H) - \log(\bar{u}_H^0)) \quad (2.32)$$

ergibt sich dann für die Lösung auf dem feineren Gitter

$$\bar{u}_h^{neu} = e^{\log(\bar{u}_h^{alt}) + \log(v_h)}. \quad (2.33)$$

Unter der Voraussetzung, dass die Grobgitterlösungen größer null sind, gilt dies ebenfalls für die Lösung auf dem feineren Gitter. Bei Anwendung dieser logarithmischen Grobgitterkorrektur auf die turbulenten Größen eines Zweigleichungsmodells konnten deutliche Konvergenzbeschleunigungen und Steigerungen der Robustheit gegenüber einer unmodifizierten Korrektur beobachtet werden [28]. Inwieweit sich eine Modifikation der Korrekturen mittels der zuerst genannten Methode auf das nichtlineare Mehrgitter auswirkt, ist Teil der Untersuchungen dieser Arbeit.

## 2.4. Eigenschaften eines iterativen Strömungslösers

In diesem Abschnitt sollen die zu untersuchenden Eigenschaften Konvergenz bzw. Konvergenzgeschwindigkeit und Robustheit erklärt werden und die damit verbundenen Kriterien der Konsistenz und Stabilität von iterativen Verfahren.

### 2.4.1. Konvergenz

Ein numerisches Verfahren zur Lösung von Differentialgleichungen ist konvergent, wenn das Verfahren die Lösung dieser Gleichungen global approximiert. Für die Konvergenz muss also die Lösung der diskretisierten Gleichungen gegen die exakte Lösung der Differentialgleichungen streben, für den Fall, dass die diskrete Schrittweite gegen null strebt. Der Nachweis über die Konvergenz eines Verfahrens kann nur für die Klasse der linearen Anfangswertprobleme über den Satz von Lax erfolgen. Dieser besagt, dass ein stabiles und konsistentes lineares Mehrschrittverfahren konvergent ist [23].

**Konsistenz** Konsistenz ist gegeben, wenn das Verfahren die Lösung lokal approximiert und der lokale Abbruchfehler bei verschwindender Schrittweite zu null wird. Für einfache Probleme kann der Abbruchfehler über eine Taylor-Reihenentwicklung berechnet werden, indem die Reihenentwicklung in die diskretisierten Gleichungen eingesetzt wird. Für komplexere, nichtlineare Differentialgleichungen wie die Navier-Stokes-Gleichungen kann der dominierende Abbruchfehler durch eine sukzessive Verringerung der (räumlichen) Schrittweite abgeschätzt werden.

**Stabilität** Ein numerisches Lösungsverfahren ist stabil, wenn es die auftretenden Fehler nicht vergrößert. Für zeitliche Probleme muss die diskrete Lösung beschränkt sein, solange auch die Lösung der exakten Gleichungen beschränkt ist. Der Nachweis ist meist nur für lineare Probleme möglich, wobei die Ergebnisse häufig auf komplexere Ergebnisse übertragbar sind [4]. Für explizite Zeitschrittverfahren gilt aber, dass diese nur bis zu einem bestimmten Wert für den Zeitschritt  $\Delta t$  stabil sind. Die Überlegung, dass das Abhängigkeitsgebiet des numerischen Schemas das gesamte physikalische Abhängigkeitsgebiet umfassen muss, führt auf die CFL-Bedingung. Diese lautet für ein explizites Einschrittverfahren im eindimensionalen

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{a} \quad CFL = |a| \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad (2.34)$$

Mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit  $a$  ergibt sich, dass Informationen innerhalb eines Zeitschrittes maximal um die räumliche Distanz  $\Delta x$  transportiert werden dürfen. Für explizite Verfahren ist das CFL-Kriterium ein notwendiges Stabilitätskriterium, sodass der Zeitschritt immer durch die CFL-Zahl begrenzt wird. Für implizite Schemata ist die Bedingung immer erfüllt, sodass für stationäre Probleme theoretisch  $\Delta t \rightarrow \infty$  möglich wäre. Praktisch ist das nicht möglich, da wie beim in Kapitel 2.2.3 vorgestellten impliziten Euler-Verfahren die Startlösung nicht zu weit von der Endlösung entfernt sein darf [3]. Statt einer konstanten CFL-Zahl kann wie in CODA die CFL-Zahl, abhängig davon wie weit die iterierte Lösung von der Endlösung entfernt ist, angepasst werden.

Aus den beschriebenen Schwierigkeiten für den Nachweis von Konsistenz und Stabilität folgt, dass es für den allgemeinen Fall kaum möglich ist Konvergenz vorherzusagen. Neben der Frage, ob ein Verfahren konvergiert, ist es entscheidend zu wissen, wann die iterierte Lösung der konvergenten Lösung ausreichend nahe ist, dass die Rechnung abgebrochen werden kann. Die einheitliche Formulierung eines solchen Abbruchkriteriums ist entscheidend, wenn man z.B. die Zeit oder die Zahl der Iterationen als Grundlage für Beschleunigungseffekte heranziehen möchte. Häufig wird, wie auch in dieser Arbeit, das Lösungsverfahren abgebrochen, wenn das Residuum um eine festgelegte Zahl von Größenordnungen gesunken ist. Für numerische Untersuchungen wird häufig auf Basis der maximalen Genauigkeit der maschinellen Zahlendarstellung ein Wert von  $10^{-14}$  verwendet. Die Voraussetzung ist, dass mit sinkendem Residuum auch der Fehler der Lösung abnimmt.

Um die Konvergenzgeschwindigkeit quantifizieren zu können, kann etwa die Anzahl der benötigten Iterationen (Zeitschritte) bis zum Erreichen des Abbruchkriteriums herangezogen werden. Da die Anzahl der Rechenoperationen innerhalb eines Zeitschrittes allerdings durch ein Mehrgitterverfahren erhöht wird, muss überprüft werden, ob eine mögliche Verringerung der Zeitschritte auch zu einer Verringerung der Gesamtrechenzeit führt oder ob dieser Vorteil durch den erhöhten Mehraufwand in jedem Zeitschritt kompensiert wird. Darüber hinaus lässt sich aus dem Verlauf des Residuums über die Iterationen eine durchschnittliche Konvergenzrate nach folgender Formel (vgl. [8]) berechnen.

$$\Delta \overline{R}_n = \left( \frac{\|R^n\|}{\|R^0\|} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (2.35)$$

Die Konvergenzrate  $\Delta \overline{R}_n$  ist damit ein Maß für die durchschnittliche Abnahme des Residuums über den Lösungsprozess. Da der Residuumsverlauf in halb-logarithmischer Darstellung bei Erreichen der asymptotischen Konvergenz zu einer Geraden wird, ergibt sich für diesen Fall eine konstante durchschnittliche Konvergenzrate.

### 2.4.2. Robustheit

Der Begriff Robustheit ist im Bereich der numerischen Strömungsmechanik nicht eindeutig und klar definiert. Um dennoch den Einfluss auf die Robustheit des Mehrgitterverfahrens bewerten und untersuchen zu können, wird in dieser Arbeit Robustheit wie folgt verstanden: Robustheit soll das Ausmaß beschreiben, in dem ein iteratives Verfahren konvergentes Lösungsverhalten bei einer Bandbreite unterschiedlicher Verfahrensparameter und Randbedingungen zeigt. Das Lösungsverfahren ist also umso robuster je mehr Kombinationen von Einstellungsparametern und physikalischen Randbedingungen zu einer konvergierten Lösung führen. Die so definierte Robustheit ist damit zum einen relativ zu einem Vergleichsfall und zum anderen abhängig von der untersuchten Nachbarschaft der gegebenen Parameter und Randbedingungen. Ein anderes Maß für die Robustheit beruht auf der Beobachtung, dass nicht-konvergierende Berechnungen in Strömungslösern häufig durch eine Verringerung der CFL-Zahl stabilisiert werden können. Lässt sich durch wiederholte Anpassung der CFL-Zahl, die maximale, gerade noch stabile CFL-Zahl ermitteln und geht man davon aus, dass damit auch alle darunter liegende Werte zur Konvergenz führen, können höhere maximale CFL-Zahlen als ein Indiz für höhere Robustheit genutzt werden. Dieses Maß erleichtert zwar die Auswertung enorm, sollte aber nur in Kombination mit der ersten Möglichkeit verwendet werden, weil es vorkommen kann, dass CFL-Zahlen unterhalb der maximalen instabiles Lösungsverhalten hervorrufen. So kann die Suche nach der maximalen CFL-Zahl frühzeitig abgebrochen werden oder Instabilitätsgebiete übersprungen werden. Hinzu kommt, dass für zwei Fälle mit unterschiedlichen physikalischen Randbedingungen durchaus ähnliche maximale CFL-Zahlen berechnet werden können, der Lösungsprozess aber auf bestimmte Parameteränderungen unterschiedlich sensitiv reagiert.



# Kapitel 3.

## Methodik für numerische Untersuchungen

In diesem Kapitel wird zunächst der ursprüngliche Mehrgitteralgorithmus aus CODA vorgestellt. In dem Algorithmus wurden Änderungen für die Durchführung der Untersuchungen vorgenommen, sodass diese Implementierungen ebenfalls erläutert werden sollen. Danach werden die Referenzfälle vorgestellt, welche für die numerischen Untersuchungen genutzt werden. Dafür wird auf die Charakteristika der genutzten Gleichungstypen, die verwendeten Rechennetze sowie Einstellungen für die Simulation mit CODA eingegangen. Abschließend folgen Erklärungen zu den verwendeten Möglichkeiten zur Messung der Beschleunigung und Robustheit sowie der Durchführung der Rechnungen.

### 3.1. Nichtlineares Mehrgitter in CODA

Nachdem in Kapitel 2.3.2 bereits die grundsätzlichen Elemente eines nichtlinearen Mehrgitterverfahrens beschrieben wurden, soll an dieser Stelle auf die spezifische Umsetzung im Mehrgitteralgorithmus von CODA eingegangen werden. Noch vor dem Start des eigentlichen Iterationsprozesses werden die für das Mehrgitter benötigten groben Gitter erzeugt. Die Erzeugung dieser Gitter basiert auf dem Mechanismus der Agglomeration. Bei der Agglomeration entstehen die groben Zellen durch das Zusammenführen mehrerer feiner Zellen zu einem größeren Agglomerat. Dafür fallen Facetten feiner Zellen, die von feinen Zellen des Agglomerats geteilt werden, weg, während die übrigen Facetten die neue Oberfläche des Agglomerats bilden. In CODA wird diese Konstruktion der Grobgitter durch die Bibliothek *CoMMA* ermöglicht. *CoMMA* ist ein graphenorientierter Agglomerator, der die Knoten des zu vergrößernden Gitters als Knoten eines Graphen abbildet und die Nachbarschaftsbeziehungen zwischen den Knoten als Kanten des Graphen. Der Agglomerationsalgorithmus ermöglicht die Vorgabe, wie viele feine Zellen zu einer groben verbunden werden sollen, sowie die Wahl einer isotropen oder anisotropen Agglomeration. Während die isotrope Agglomeration in alle Richtungen gleich viele Zellen agglomeriert, orientiert sich die Agglomeration im anisotropen Fall entlang bestimmter Vorzugsrichtungen. In hoch aufgelösten Wandgrenzschichten soll etwa die Agglomeration ausschließlich in wandnormalen Richtung die Steifigkeit des zu lösenden Systems verringern und damit die Lösungseigenschaften verbessern. Die Parallelisierung der Agglomeration erfolgt durch eine Aufteilung des Ausgangsnetzes auf mehrere Prozesse. Auf jedem der einzelnen Prozesse läuft ein eigenständiger Agglomerationsprozess, sodass das daraus resultierende Grobgitter abhängig von der Anzahl der verwendeten Prozesse ist. Diese Eigenschaft ist vor allem hinsichtlich der Rechnungen auf dem später vorgestellten Hochleistungsrechner zu beachten.

Vor dem Mehrgitter kann anschließend das sogenannte *grid sequencing* aktiviert werden, welches für eine genauere Startlösung auf dem feinsten Gitter, die Lösung zunächst auf den Grobgittern berechnet und diese auf das feinste Gitter transferiert. Das *grid sequencing* beginnt auf dem größten Gitter, auf dem solange Glätterschritte ausgeführt werden

bis entweder die festgelegte Reduktion des Residuums erfüllt ist oder die maximale Anzahl Glätterschritte erreicht wurde. Anschließend wird die Lösung auf das nächst feinere Gitter übertragen und dort weiter iteriert. Dieser Vorgang wird so oft wiederholt bis das Ausgangsgitter erreicht ist und das eigentliche Mehrgitter startet.

Der nach dem *grid sequencing* folgende Mehrgitterzyklus war in der genutzten CODA-Version ein V-Zyklus, für den die Anzahl der Grobgitter sowie die Anzahl der Glätterschritte für jedes Grobgitter definiert werden kann. Die Behandlung der Grobgittergleichungen erfolgte mittels Rediskretisierung, wobei die genaue Diskretisierung unabhängig von der Feingitterdiskretisierung erfolgen kann. So können beispielsweise unterschiedliche Diskretisierungsordnungen durch eine veränderte Rekonstruktion der Zellzustände realisiert werden. Für die Wahl des Glätters auf den groben Gittern besteht eine ähnliche Freiheit, da die Einstellungen zum Zeitschrittverfahren inklusive des linearen Löser ebenfalls unabhängig vom feinen Gitter definiert werden können. Alle zeitlichen und räumlichen Diskretisierungsmethoden, die für das feine Ausgangsgitter zur Verfügung stehen, können somit auch für die groben Gitter im Mehrgitterzyklus verwendet werden. Der Transfer zwischen den einzelnen Gittern erfolgt im Falle der Restriktion durch die volumengewichtete Interpolation bzw. Summation für das Residuum. Die Prolongation ist als eine Form der Rekonstruktion umgesetzt und wird im folgenden Abschnitt mit den implementierten Änderungen beschrieben.

## 3.2. Prolongation

Die Aufgabe, den Einfluss der Prolongationsordnung innerhalb dieser Arbeit zu untersuchen, setzte Änderungen an der in CODA vorliegenden Infrastruktur für die Prolongation voraus. Die im Rahmen dieser Arbeit implementierten Änderungen sollen nachfolgend erläutert werden. Der Prolongationsoperator in CODA bedient sich der in Kapitel 2.7 vorgestellten Idee, für den Transfer vom groben Gitter auf ein feineres die Rekonstruktion zu verwenden, wie sie für die Berechnung von Zuständen an den Zelloberflächen bereits genutzt wird. Im Unterschied zu der Formulierung in der Gleichung (2.29) wird in der Implementierung allerdings nicht die Korrektur mittels Rekonstruktion auf das feine Gitter transferiert, sondern jeweils einzeln der Zustand  $u_H^{(0)}$ , der auf das grobe Gitter transferiert wurde und noch nicht geglättet wurde, sowie der geglättete Zustand  $u_H^{(\nu)}$  auf dem groben Gitter.

$$\delta u_h = I_H^h u_H^{(\nu)} - I_H^h u_H^{(0)} \quad (3.1)$$

Die Voraussetzung für die Annahme ist die Linearität des Prolongationsoperators  $I_H^h$ , welche zumindest für den Fall einer konstanten Rekonstruktion (Injektion) erfüllt ist. Durch die Verwendung einer nichtlinearen Limiterfunktion in einer linearen Rekonstruktion ist der Prolongationsoperator selbst streng genommen nicht mehr linear, sodass in diesem Fall eine Vereinfachung getroffen wird. Die Parameter, die für die Initialisierung des Prolongationsoperators benötigt werden, wurden ursprünglich aus dem an CODA übergebenen Parameterbaum für die Diskretisierung auf den groben Gittern im Mehrgitterzyklus abgeleitet. Hieraus folgte, dass der Prolongationsoperator nicht unabhängig von der Rekonstruktion auf den groben Gittern gewählt werden konnte. Die eingeführten Änderungen ermöglichen nun die Übergabe weiterer Parameter an CODA, mit denen die Prolongation bzw. die dafür verwendete Rekonstruktion unabhängig von der Grobgitterdiskretisierung gewählt werden kann. Entsprechend den Ausführungen in Kapitel 2.3.4 lässt sich mit Hilfe der genauen Definition der Prolongation über die genannten Rekonstruktionsparameter auch die Ordnung des verwendeten Prolongationsoperators einstellen, um so den Einfluss der Ordnung untersuchen zu können. Zudem ist mit diesen Änderungen auch die Diskretisierungsordnung auf den groben Gittern unabhängig von der Prolongation und wird daher ebenfalls untersucht.

### 3.3. Positivitätserhaltende Grobgitterkorrektur

Im Rahmen der Arbeit wurde in CODA eine Grobgitterkorrektur implementiert, welche die Positivität von ausgewählten Größen sicherstellt. Durch eine entsprechende Anpassung der Korrekturen von den groben Gittern sollen unphysikalische Größen wie etwa negative Drücke verhindert werden, um so die Robustheit des Mehrgitterverfahrens zu steigern. Die eingeführten Änderungen greifen auf bereits vorhandene Implementierungen zurück, welche für eine positivitätserhaltende Rekonstruktion umgesetzt wurden. In diesem Kontext wurde für die lineare Rekonstruktion von Größen wie der Dichte, dem Druck und der Energie der lineare Anteil durch einen Faktor korrigiert, sodass die Größen keine negativen und daher unphysikalische Werte annehmen. Diese Korrektur soll so ebenfalls die Stabilität des Lösungsprozesses erhöhen. Die gleiche Idee steht hinter der implementierten positivitätserhaltenden Grobgitterkorrektur. Statt die Größen wie die Dichte mit dem gleichen Ansatz wie für die Rekonstruktion anzupassen, wird die Korrektur  $\delta u_h$  auf dem feinen Gitter vor Anwendung mit einem Korrekturfaktor  $\omega$  multipliziert. Dieser Ansatz basiert auf der in Kapitel 2.3.5 dargestellten Idee der Relaxation der Grobgitterkorrekturen. Der eingesetzte Korrekturfaktor wird durch eine Filterfunktion bestimmt, die in der Form auch in der positivitätserhaltenden Rekonstruktion genutzt wird. Die Filterfunktion ist wie folgt definiert:

$$\omega = \begin{cases} \frac{u_h}{u_h - \delta u_h} & u_h > 0; \quad \delta u_h < 0 \\ 1 & u_h > 0; \quad \delta u_h \geq 0 \\ 0 & u_h \leq 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

Der Verlauf dieser Funktion für den Fall einer positiven Feingittergröße ist in Abbildung 3.1 visualisiert. Zu erkennen ist, dass der Korrekturfaktor  $\omega$ , wenn die relative Grobgitter-

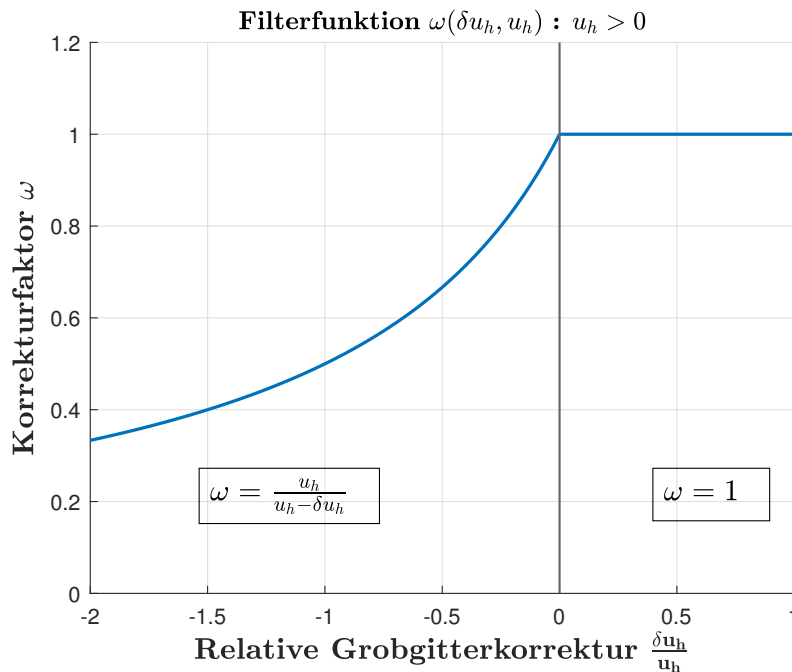


Abbildung 3.1.: Filterfunktion für Positivitätserhaltung

terkorrektur negativ wird, steil abfällt und sich der Abfall mit kleiner werdenden relativen Grobgitterkorrekturen verringert. Der Korrekturfaktor  $\omega$  wird jeweils für die Größen

Dichte, Druck und Energie ermittelt. Die Größen werden dann, multipliziert mit dem minimalen Korrekturfaktor der drei Größen, entsprechend

$$u_h = u_h + \omega_{min}(\delta u_h) \quad (3.3)$$

auf dem feinen Gitter aktualisiert. Der funktionale Zusammenhang für den Korrekturfaktor garantiert, dass negative Korrekturen vom Betrag stets kleiner bleiben als die zu korrigierenden Größen auf dem feinen Gitter. Dieser Einfluss des Korrekturfaktors ist in Abbildung 3.2 dargestellt. Es ist zu erkennen, wie der Wert auf dem feinen Gitter  $u_h$  ohne

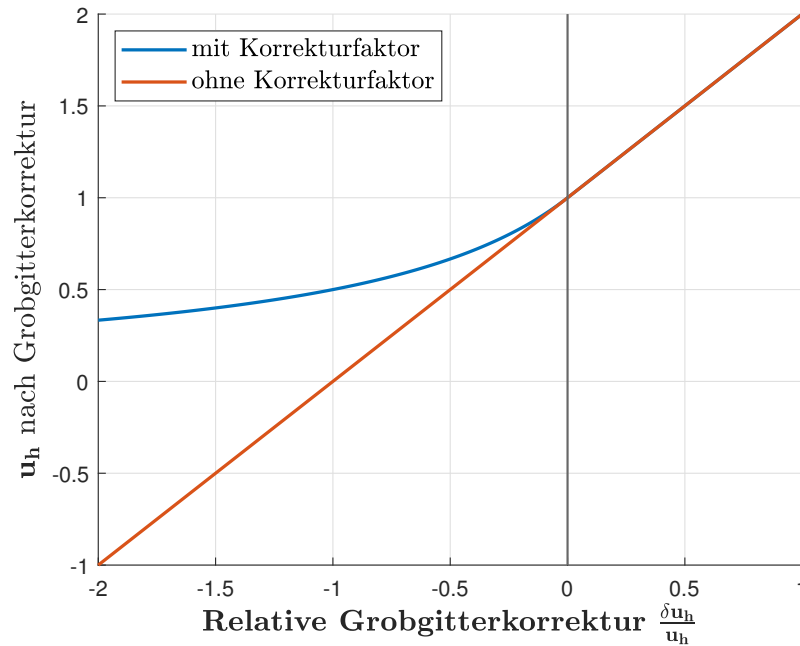


Abbildung 3.2.: Wert der Feingittergröße nach der Grobgitterkorrektur

Korrekturfaktor bei zu hohen negativen Grobgitterkorrekturen ebenfalls negativ werden würde. Durch die Anwendung des Korrekturfaktors  $\omega$  bleibt der Wert hingegen positiv. Für verschwindende Grobgitterkorrekturen schmiegen sich beide Verläufe für die Feingittergröße aneinander an. Da die Filterfunktion geringe negative Grobgitterkorrekturen über das notwendige Maß hinaus reduziert, ist mit einer Abnahme der Konvergenz durch die vorgestellte Positivitätserhaltung zu rechnen. Obwohl sich in den Untersuchungen in dieser Arbeit auf die gezeigte Filterfunktion beschränkt wurde, gibt es weitere Ansätze diese zu definieren, etwa über einen Polynomenansatz. Auch wäre es möglich, abhängig vom Turbulenzmodell, weitere Größen wie die turbulente kinetische Energie in die Positivitätserhaltung mit einzubeziehen.

## 3.4. Die Referenzfälle

### 3.4.1. RAE2822: Diskretisierung und Löseereinstellungen

Das RAE2822 ist ein Tragflügelprofil, welches sich als ein Standardtestfall für numerische Untersuchungen etabliert hat. Neben den Daten aus den numerischen Untersuchungen, wurde das Profil etwa in [2] ausführlich experimentell untersucht. Für die zugrundeliegenden Gleichungen wird eine reibungsbehaftete, turbulente, transsonische Strömung angenommen. Die Anströmbedingungen sind die folgenden:

1. Anströmmachzahl  $Ma_\infty = 0.734$
2. Reynoldszahl  $Re = 6.5 \cdot 10^6$
3. Anstellwinkel  $\alpha = 2.79^\circ$ .

Aufgrund der Beschleunigung auf der Profilloberseite ergibt sich im hinteren Profilbereich ein schwacher Verdichtungsstoß. Die Profilkontur ist in dem oberen Ausschnitt von Abbildung 3.4 zusammen mit einem Teil des strukturierten Rechennetzes dargestellt. Die Untersuchungen in dieser Arbeit erfolgten auf fünf unterschiedlich fein diskretisierten, strukturierten sowie unstrukturierten Netzen. Die strukturierten Netze werden allerdings innerhalb des Löser wie unstrukturierte Netze behandelt. Die Netzeigenschaften sind für die unstrukturierten Netze in Tabelle 3.1 zusammengestellt und für die strukturierten Netze in Tabelle 3.2. Neben der Anzahl der Zellen ist die Anzahl der Freiheitsgrade (Anzahl Zellen \* Anzahl Lösungsvariablen pro Zelle) für jedes Netzlevel angegeben. Für das nichtlineare Mehrgitter werden aus diesen Netzen mittels des Agglomerators *CoMMA* die Grobgitter generiert. In Abbildung 3.3 ist beispielhaft das Netzlevel 3 der unstrukturierten Netze nahe des Profils zusammen mit zwei Vergrößerungsstufen dargestellt. Zu beachten ist, dass die Vergrößerung nicht isotrop in alle Richtungen erfolgt, sondern entlang der Wandnormalen in der anisotrop aufgelösten Wandgrenzschicht, wodurch das Lösungsverhalten des linearen Löser verbessert werden soll. Für die strukturierten Netze ist ebenfalls das Netzlevel 3 sowie zwei sukzessiv vergrößerte Netze in Abbildung 3.4 dargestellt. Sowohl die strukturierten Netze als auch die unstrukturierten sind im wandnahen Bereich stark verfeinert, um so hohe Gradienten in den Wandgrenzschichten auflösen zu können. Die strukturierten Netze wurden zusätzlich im Bereich des Verdichtungsstoßes auf der Profilloberseite verfeinert.

Netzlevel	Anzahl Zellen	Anzahl Freiheitsgrade
Level 1	230084	1150420
Level 2	71970	359850
Level 3	26070	130350
Level 4	11530	57650
Level 5	6418	32090

**Tabelle 3.1.:** Zellenanzahl der Sequenz unstrukturierte Netze für das RAE2822

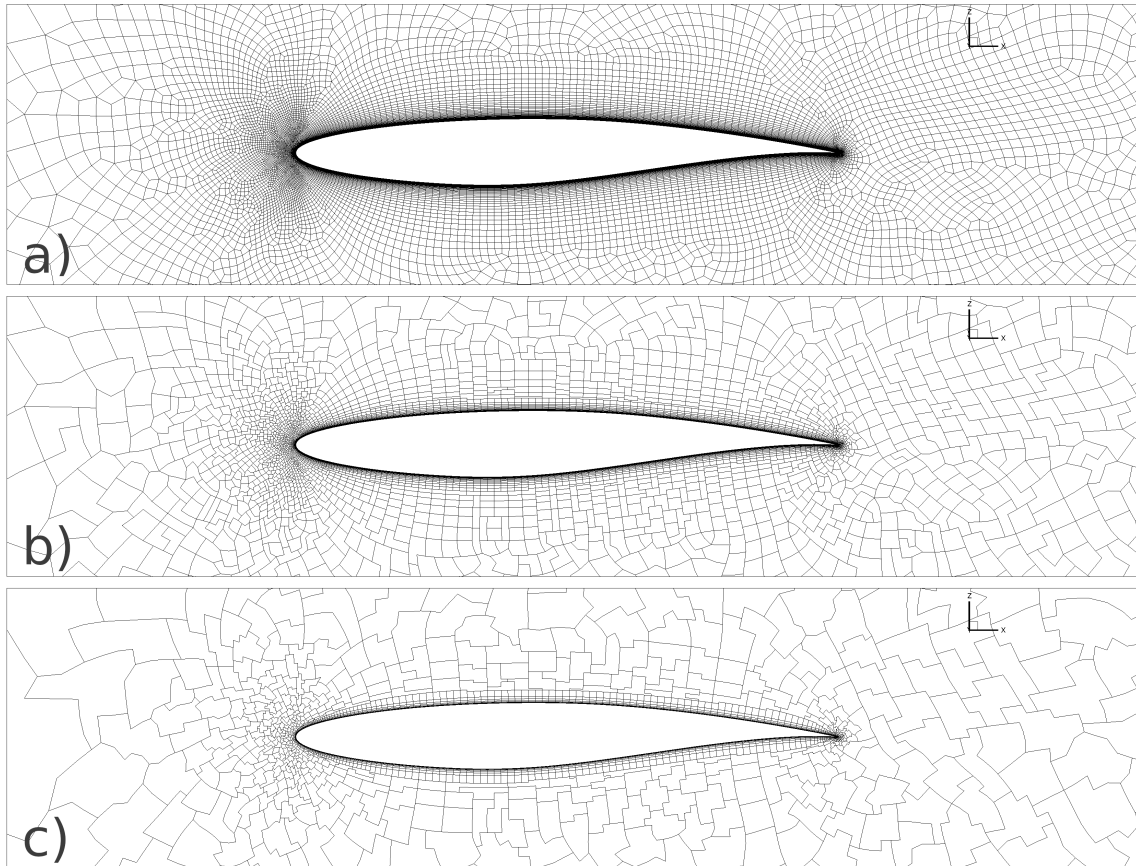
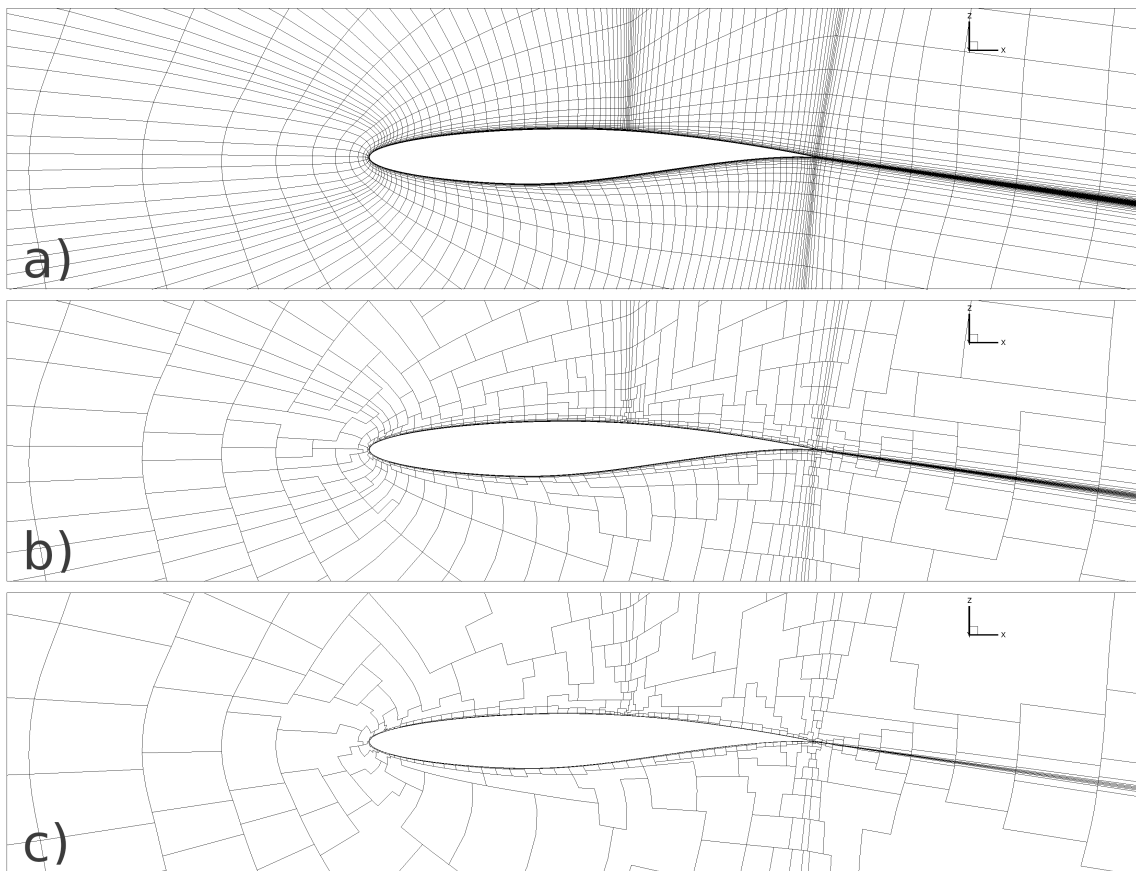


Abbildung 3.3.: RAE2822: Unstrukturiertes Netz a) mit zwei agglomerierten Netzen b) und c)

Netzlevel	Anzahl Zellen	Anzahl Freiheitsgrade
Level 1	129536	647680
Level 2	32384	161920
Level 3	8096	40480
Level 4	2024	10120
Level 5	506	2530

Tabelle 3.2.: Zellenanzahl der Sequenz strukturierte Netze für das RAE2822



**Abbildung 3.4.:** RAE2822: Strukturiertes Netz a) mit zwei agglomerierten Netzen b) und c)

**Simulationseinstellungen** Die verwendeten Gleichungen, die den Untersuchungen zugrunde liegen sind die Reynoldsgemittelten Navier-Stokes-Gleichungen. Für die Turbulenzmodellierung wurde das Eingleichungsmodell von Spalart und Allmaras in seiner negativen Formulierung verwendet [1]. Die Diskretisierung für das feine Gitter ist für alle untersuchten Fälle am RAE2822 die gleiche. Für die konvektiven Flüsse wurde das Upwind-Schema nach Roe genutzt und die Zustände an den Zelloberflächen wurden mittels linearer Rekonstruktion berechnet. Als Limiter diente eine Limiterfunktion basierend auf quintischen Splines. Die Gradientenberechnung erfolgte mittels Least-squares-Ansatz [16]. Für die Zeitintegration wurde das implizite Euler-Verfahren mit einem lokalen Zeitschritt genutzt. Die Start-CFL-Zahl wurde auf 2 gesetzt und in Abhängigkeit der Reduktion des Residuums über ein *CFL-Ramping* gesteigert. Darüber hinaus wurde der nichtlineare Dämpfungsmechanismus aktiviert. Für die Lösung der linearisierten Gleichungen wurde ein GMRES-Verfahren verwendet, zusammen mit einem Jacobi-Verfahren und einer LU-Zerlegung als Prädiktionierer. Die Einstellungen für das Mehrgitter beschränkten sich auf die Aktivierung des *grid sequencing* und der Wahl eines 3V-Zyklus mit jeweils zwei Glätterschritten nach Transferoperationen. Die Parameter für die Grobgitterdiskretisierung waren bis auf eine erhöhte Anzahl Iterationen für den Prädiktionierer und die Entropiekorrektur identisch mit der Feingitterdiskretisierung. Lediglich die Rekonstruktion und Prolongation wurden im Rahmen der Untersuchungen verändert. Die genauen verwendeten Werte für die genannten Parameter sind in Anhang B zu finden. Die Lösungen für diese Einstellungen sind in Abbildung 3.5 in Form einer Netzkonvergenzstudie für den Widerstandsbeiwert dargestellt. Zusätzlich sind Ergebnisse von Rechnungen mittels TAU aufgeführt, die vergleichbare Lösungen zu denen aus CODA liefern. Der Vergleich zeigt, dass die gewählten Einstellungen zu einer für die Bewertung der Konvergenz hinreichenden Genauigkeit führen.

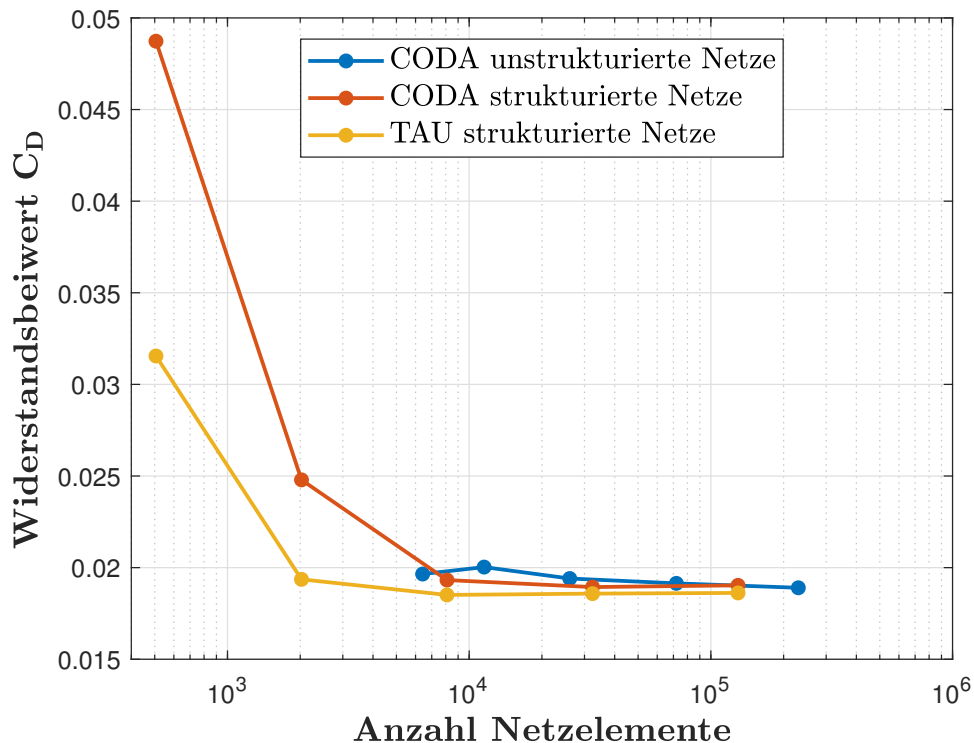


Abbildung 3.5.: Netzkonvergenzstudie für das RAE2822



### 3.4.2. NACA0012: Diskretisierung und Lösereinstellungen

Als weiterer Testfall dient das NACA0012-Profil, welches ebenfalls einen häufig untersuchten Fall in der numerischen Strömungssimulation darstellt. Statt einer reibungsbehafteten Strömung wird eine reibungsfreie Strömung betrachtet, die zudem subsonisch im gesamten Berechnungsgebiet ist. Die Anströmbedingungen wurden entsprechend

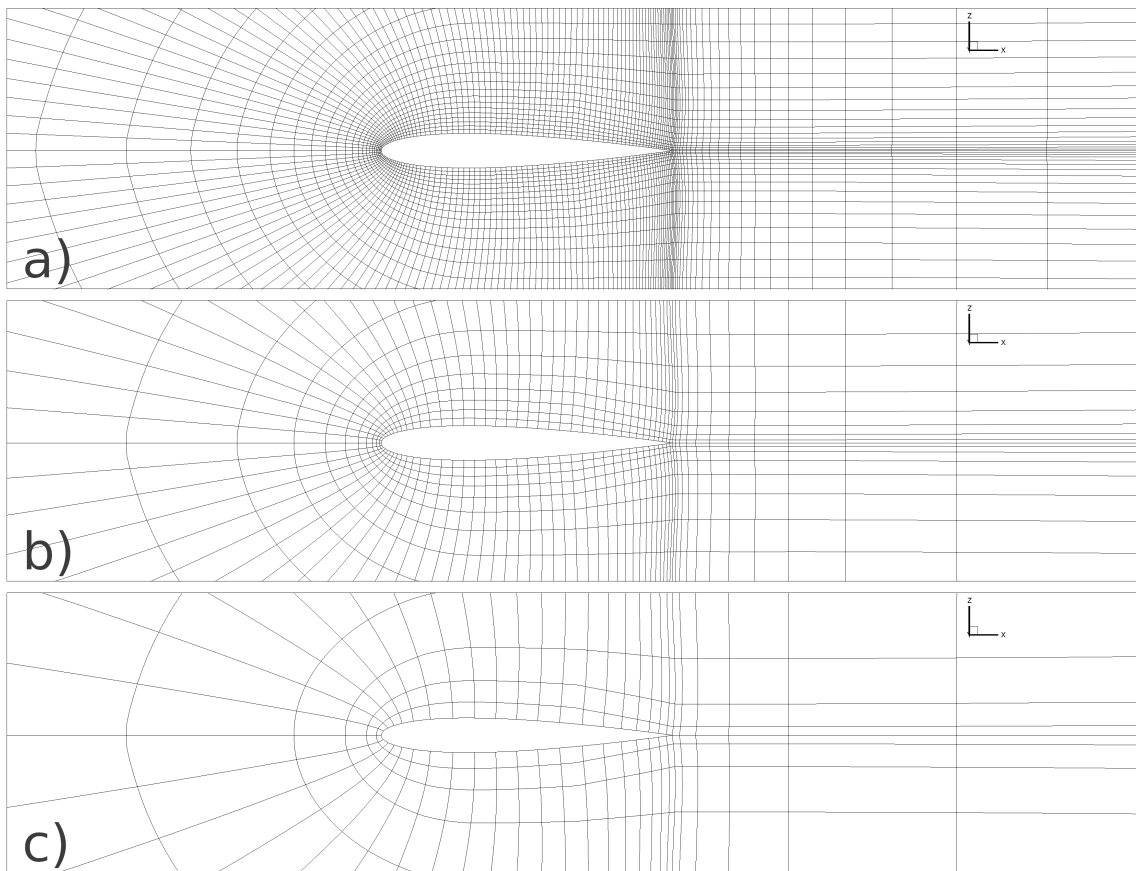
1. Anströmmachzahl  $Ma_\infty = 0.5$
2. Anstellwinkel  $\alpha = 2.0^\circ$

gesetzt. Für die Untersuchungen am NACA0012 standen sechs verschiedene Netzlevel zur Verfügung mit sinkender Anzahl Netzzellen pro Netzlevel. Die einzelnen Werte für die verwendeten Netzlevel sind in Tabelle 3.3 zusammengestellt. Für das Netzlevel 3 sind in Abbildung 3.6 zusätzlich die im Mehrgitter verwendeten agglomerierten Netze abgebildet. Der profilnahe Bereich kommt aufgrund der reibungsfreien Strömung ohne eine weitere Verfeinerung des Netzes aus. Für die agglomerierten Netze erfolgte die Agglomeration der Zellen isotrop. Daher ist gut zu erkennen, wie für die Konstruktion eines vergrößerten Netzes jede zweite Netzlinie entfernt wurde und eine grobe Zelle somit aus vier ursprünglich feinen Zellen besteht.

Netzlevel	Anzahl Zellen	Anzahl Freiheitsgrade
Level 1	114688	458752
Level 2	28672	114688
Level 3	7168	28672
Level 4	1792	7168
Level 5	448	1792
Level 6	112	448

**Tabelle 3.3.:** Zellenanzahl der Sequenz strukturierter Netze für das NACA0012

**Simulationseinstellungen** Die Berechnung der reibungsfreien Strömung beruhte auf der Lösung der Euler-Gleichungen. Die konvektiven Terme der Gleichungen wurden mittels Upwind-Verfahren nach Roe diskretisiert und für die Rekonstruktion der Zustände auf den Zelloberflächen wurde eine unlimitierte lineare Rekonstruktion genutzt. Die Zeitintegration geschah mit Hilfe des impliziten Euler-Verfahrens zusammen mit einem lokalen Zeitschritt. Die CFL-Zahl wurde ausgehend von der Start-CFL-Zahl in Abhängigkeit der Reduktion des Residuums mittels *CFL-Ramping* angepasst. Darüber hinaus wurde die nichtlineare Dämpfung für die Lösung der linearisierten Gleichungen verwendet. Die linearisierten Gleichungen wurden mittels GMRES-Verfahren sowie einem Jacobi-Verfahren und LU-Zerlegung als Prädiktionierer gelöst. Für das Mehrgitter wurde ein 3V-Zyklus verwendet mit jeweils 2 Glätterschritten nach jedem Gittertransfer. Die Diskretisierung auf den groben Gittern innerhalb des nichtlinearen Mehrgitteralgorithmus erfolgte mit den gleichen Einstellungen wie für das feine Gitter. Ausgehend von diesen Grundeinstellungen wurden die Rekonstruktion der groben Gitter und die Prolongation im Rahmen der Untersuchungen variiert. Die genauen verwendeten Werte für die genannten Parameter sind in Anhang B zu finden.



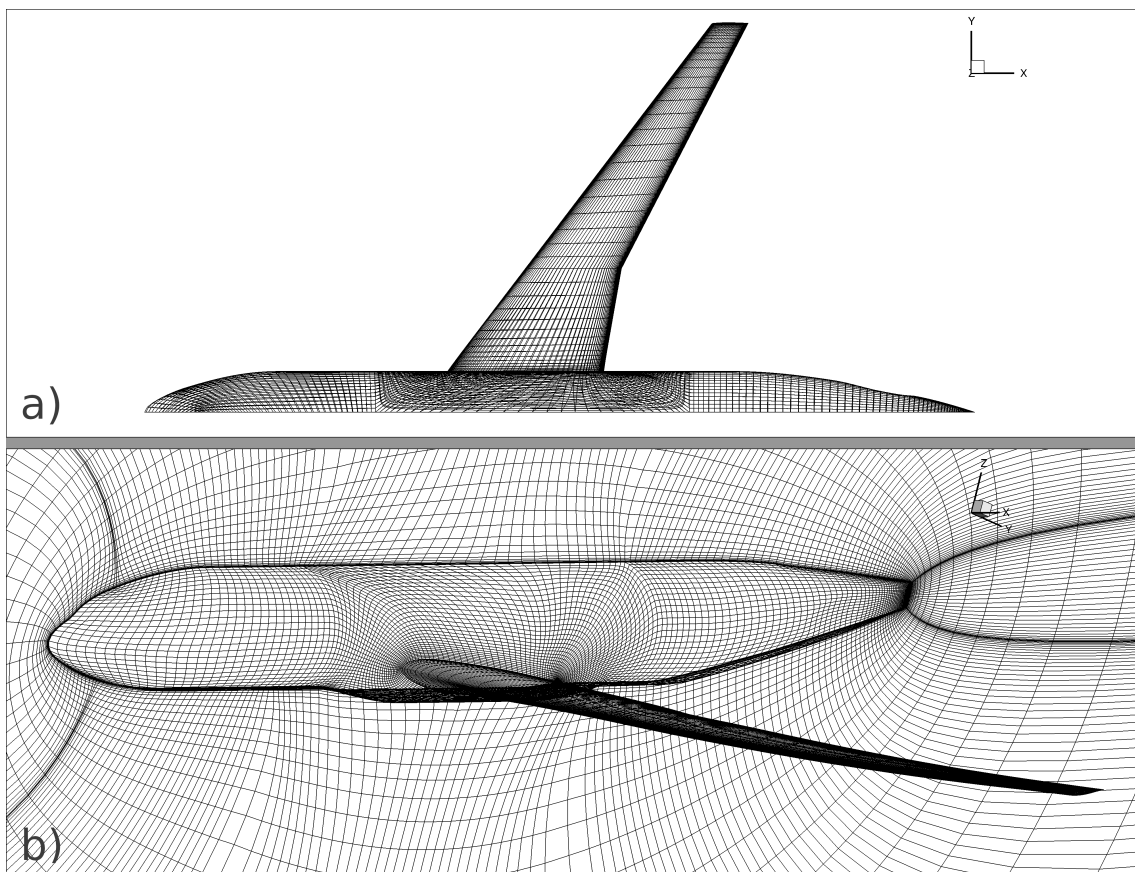
**Abbildung 3.6.:** NACA0012: Strukturiertes Netz a) mit zwei agglomerierten Netzen b) und c)

### 3.4.3. NASA-CRM: Diskretisierung und Löseereinstellungen

Das *Common Research Model (CRM)* der NASA stellt einen dreidimensionalen Testfall dar, bestehend aus einem superkritisch ausgelegtem Tragflügel und einem Rumpf, welcher repräsentativ für kommerzielle Großraumtransportflugzeuge ist [25]. Mit den Anströmbedingungen

1. Anströmmachzahl  $Ma_\infty = 0.85$
2. Reynoldszahl  $Re = 6.0 \cdot 10^6$
3. Anstellwinkel  $\alpha = 2.209^\circ$

ergibt sich eine transsonische, turbulente Strömung. Die Flügel- und Rumpfgeometrie sind in der Draufsicht in Abbildung 3.7 a) dargestellt. Eins der zwei verwendeten strukturierter Hexaeder-Netze ist ebenfalls in Abbildung 3.7 b) zu sehen. Die Anzahl Zellen und



**Abbildung 3.7.:** NASA-CRM: Draufsicht auf Geometrie a) und Darstellung des Netzlevels 1 b)

Freiheitsgrade sind für die verwendeten Netze in Tabelle 3.4 zusammengestellt.

**Simulationseinstellungen** Die Berechnung der Strömung basiert auf den Reynoldsgemittelten Navier-Stokes-Gleichungen mit dem negativ formulierten Turbulenzmodell von Spalart und Allmaras [1]. Für die Diskretisierung der konvektiven Flüsse wird das Upwind-Verfahren von Roe verwendet. Die lineare Rekonstruktion der Zellzustände wurde durch

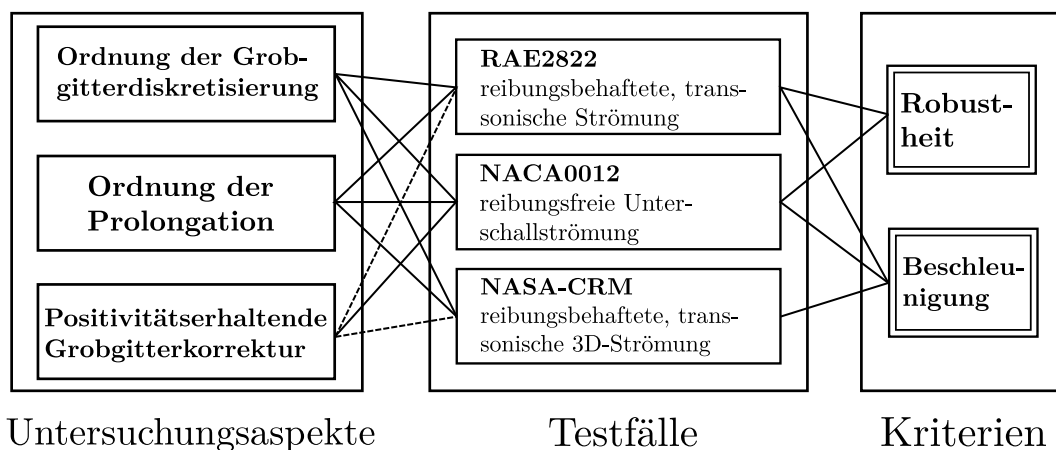
Netzlevel	Anzahl Zellen	Anzahl Freiheitsgrade
Level 1	638976	3833856
Level 2	2156544	12939264

**Tabelle 3.4.:** Zellenanzahl der strukturierten Netze für den NASA-CRM Testfall

den Limiter von Vekatakrishnan [27] limitiert. Für das Zeitschrittverfahren wurde das implizite Euler-Verfahren zusammen mit einem CFL-Ramping genutzt. Die Lösung der linearisierten Gleichungen erfolgte mittels GMRES-Verfahren sowie einem Jacobi-Verfahren und einer LU-Zerlegung als Präkonditionierer. Vor dem Start des Mehrgitter wurde das *grid sequencing* verwendet. Der Mehrgitterzyklus war ein 3V-Zyklus mit jeweils zwei Glätterschritten nach einem Gittertransfer. Die Einstellungen für die groben Gitter waren abgesehen von der variierten Rekonstruktion und Prolongation die gleichen wie auf dem beschriebenen feinen Gitter. Eine genaue Zusammenstellung aller verwendete Parameterwerte ist in Anhang B zu finden.

### 3.5. Numerische Untersuchungen

Eine Aufgabe dieser Arbeit ist die Untersuchung und Bewertung des Einflusses der Prolongationsordnung auf die Beschleunigung und die Robustheit des Mehrgitterverfahrens in CODA. Darüber hinaus soll der Effekt einer Positivitätserhaltung bei der Grobgitterkorrektur untersucht werden. Zusätzlich wurden die Ergebnisse hinsichtlich des Einflusses der Grobgitterdiskretisierung auf Beschleunigung und Robustheit untersucht. Die einzelnen Untersuchungsaspekte sind in Abbildung 3.8 zusammen mit den genutzten Testfällen und Bewertungskriterien grafisch zusammengestellt. Die Quantifizierung der Beschleuni-



**Abbildung 3.8.:** Untersuchte Themen im Mehrgitter

gung erfolgt im anschließenden Kapitel aus der Erhöhung oder Verringerung der Konvergenzrate (siehe Formel (2.35)), welche indirekt durch die Anzahl der Iterationsschritte bzw. Mehrgitterzyklen beschrieben wird, die eine Simulation bis zum Erreichen des Konvergenzkriteriums benötigt. Die Anzahl der Rechenoperationen pro Mehrgitterzyklus ist allerdings nicht konstant, weil diese wiederum von der variablen Anzahl Iterationen im linearen Löser abhängt. Daher wird als Beschleunigungsmaß zusätzlich die Rechenzeit

pro Simulation (*wall clock time*) verwendet. Diese Rechenzeit unterliegt schwer kontrollierbaren Einflüssen durch das genutzte Rechnersystem. Die Einflüsse sollten aufgrund der definierten Testumgebung auf separaten Rechenknoten eines Hochleistungsrechners die Belastbarkeit der Ergebnisse jedoch kaum einschränken. Die zwei Kriterien Iterationsanzahl und Rechenzeit einer Berechnung können durch den Vergleich mit einer Referenzlösung eine Aussage über die Beschleunigung aufgrund eines variierten Parameters liefern. Im folgenden Ergebniskapitel wurde als Referenz die Lösung einer Berechnung mit denselben Parametereinstellungen wie die Vergleichslösung verwendet. Lediglich der untersuchte Parameter wie etwa die Prolongationsordnung wurde zwischen den zwei Lösungen variiert. Da die Variationen lediglich auf den groben Gittern erfolgten und nur konvergierte Lösungen betrachtet werden, wird nur der Lösungsverlauf beeinflusst und nicht die Lösung selbst. Als Maß für die Robustheit wurde die in Kapitel 2.4.2 vorgeschlagene Anzahl konvergierter Rechnungen aus einer Variation von Simulationseinstellungen verwendet. Für einen zu untersuchenden Fall wird die Anzahl konvergierter Rechnungen gezählt und anhand der Anzahl in den jeweiligen Vergleichsfällen beurteilt, um so eine relative Aussage zur Robustheit treffen zu können. Die Ermittlung einer maximalen CFL-Zahl, die gerade die Grenze der Stabilität darstellt, als Maß für die Robustheit erwies sich in den untersuchten Fällen als nicht praktikabel. Die Gründe dafür waren in einem Fall, dass die maximale CFL-Zahl über den Grenzen der Zahlendarstellung lag. In einem anderen Fall war das Maximum nicht bestimmbar, da bestimmte CFL-Zahl-Bereiche zur Konvergenz führten, während darunterliegende Werte nicht zur Konvergenz führten.

**Hochleistungsrechner CARA** Die Berechnungen wurden auf dem Hochleistungsrechner *CARA* durchgeführt, welches vom *Zentrum für Informationsdienste und Hochleistungsrechnen* betrieben wird. Auf dem Rechner wurden jeweils einzelne Rechenknoten verwendet, die aus zwei *AMD EPYC 7601*-Prozessoren bestehen und damit 64 Prozessorkerne zur Verfügung stellen. Sofern nicht explizit erwähnt, wurden die Berechnungen nur über mehrere (8) Threads parallelisiert und nicht über eine Aufteilung auf weitere Prozesse. Lediglich die Rechnungen für die Untersuchung der Robustheit und für das NASA-CRM liefen auf acht Prozessen mit je acht Threads, um so die Gesamtrechenzeit auf wenige Tage senken zu können. Die Anzahl der Prozesse ist aufgrund der prozessabhängigen Agglomeration in *CoMMA* (siehe Kapitel 3.1) hinsichtlich der Vergleichbarkeit von Ergebnisse, die mit unterschiedlicher Anzahl von Prozessen bestimmt wurden, zu beachten.

# Kapitel 4.

## Ergebnisdarstellung

Die Darstellung der Untersuchungsergebnisse wird unterteilt in die Ergebnisse für den Einfluss der Prolongationsordnung, der Ordnung der Grobgitterdiskretisierung, sowie die Ergebnisse für den Einfluss der positivitätserhaltenden Grobgitterkorrektur. Innerhalb des ersten Abschnitts werden die drei Testfälle zunächst getrennt voneinander betrachtet und hinsichtlich Beschleunigung und Robustheit ausgewertet. Die Ergebnisse jedes Testfalls werden zum Abschluss des jeweiligen Unterkapitels zusammengefasst, bewertet und mit bereits vorgestellten Ergebnissen verglichen. Für eine kompakte Darstellung in den Grafiken werden einige verkürzte Schreibweisen für die variierten Parameter verwendet. Diese Abkürzungen sind in Tabelle 4.1 zusammengestellt. Zusätzlich wurden die verwendeten

Parameter	Varianten	verkürzte Schreibweise
Rekonstruktion auf den groben Gittern	konstant	$p_{rek} = 1$
	limitiert linear	$p_{rek} = 2^*$
	linear	$p_{rek} = 2$
Prolongation	konstant	$p_{prol} = 1$
	limitiert linear	$p_{prol} = 2^*$
	linear	$p_{prol} = 2$

Tabelle 4.1.: Abkürzungen der variierten Parameter

Netze anhand der im vorherigen Kapitel eingeführten Benennung mittels verschiedener „Level“ unterschieden. Darüber hinaus ist zu erwähnen, dass im Zusammenhang mit dem nichtlinearen Mehrgitter die Begriffe Iteration und (Mehrgitter-)Zyklus synonym verwendet wurden.

### 4.1. Einfluss der Prolongationsordnung

Für die Prolongation wurden drei verschiedene Varianten untersucht. Die konstante Prolongation mit einer Ordnung von 1, die limitiert lineare Prolongation mit einer Ordnung  $\leq 2$  und die unlimitierte lineare Prolongation mit einer Ordnung von 2. Der genutzt Spline-Limiter hatte einen K-Wert von 5, welcher damit im Bereich häufig verwendeter Werte liegt. Werte nahe von 0 würden den Limitereinfluss deutlich erhöhen und damit gleichzeitig die Genauigkeit der Prolongation absenken. Die untersuchten Prolongationen wurden für unterschiedliche Genauigkeiten der Grobgitterdiskretisierung variiert, um

den Einfluss einer genaueren Grobgitterdiskretisierung auf die Prolongation überprüfen zu können. Die Ordnung der Grobgitterdiskretisierung wurde durch die Rekonstruktion ebenfalls zwischen 1 und 2 variiert. Die Ergebnisse dieser Berechnungen wurden zusätzlich für eine Untersuchung der Diskretisierungs-/Rekonstruktionsordnung auf den groben Gittern auf die Beschleunigung und Robustheit des Mehrgitters genutzt. Als Abbruchkriterium dient für jede Berechnung das Dichteresiduum, welches mindestens um 14 Größenordnungen reduziert wird.

### 4.1.1. RAE2822: Reibungsbehaftete, transsonische Strömung

Das RAE2822 wurde mittels fünf strukturierter und fünf unstrukturierter Netze untersucht. Die Ergebnisse werden allerdings nur in ausgewählten Fällen für beide Netzarten dargestellt. Da die Berechnung reibungsbehafteter, turbulenter Strömungen auch häufig für die Simulation von praktischen Anwendungsfällen genutzt wird, ermöglicht dieser Testfall eine erleichterte Übertragung der Untersuchungsergebnisse auf die Praxis.

#### Konvergenzrate und Rechenzeit

Bevor die Ergebnisse für alle Netzlevel dargestellt werden, soll der grundsätzliche Einfluss der Prolongation anhand des Verlaufes des Dichteresiduums für das feinste Netzlevel dargestellt werden. In Abbildung 4.1 sind die Dichteresiduen für die unterschiedlichen Prolongationsordnungen über die Anzahl der Iterationen bzw. Mehrgitterzyklen aufgetragen. Diese Ergebnisse basieren auf Level 1 der unstrukturierten Netze. Die durchgezogenen

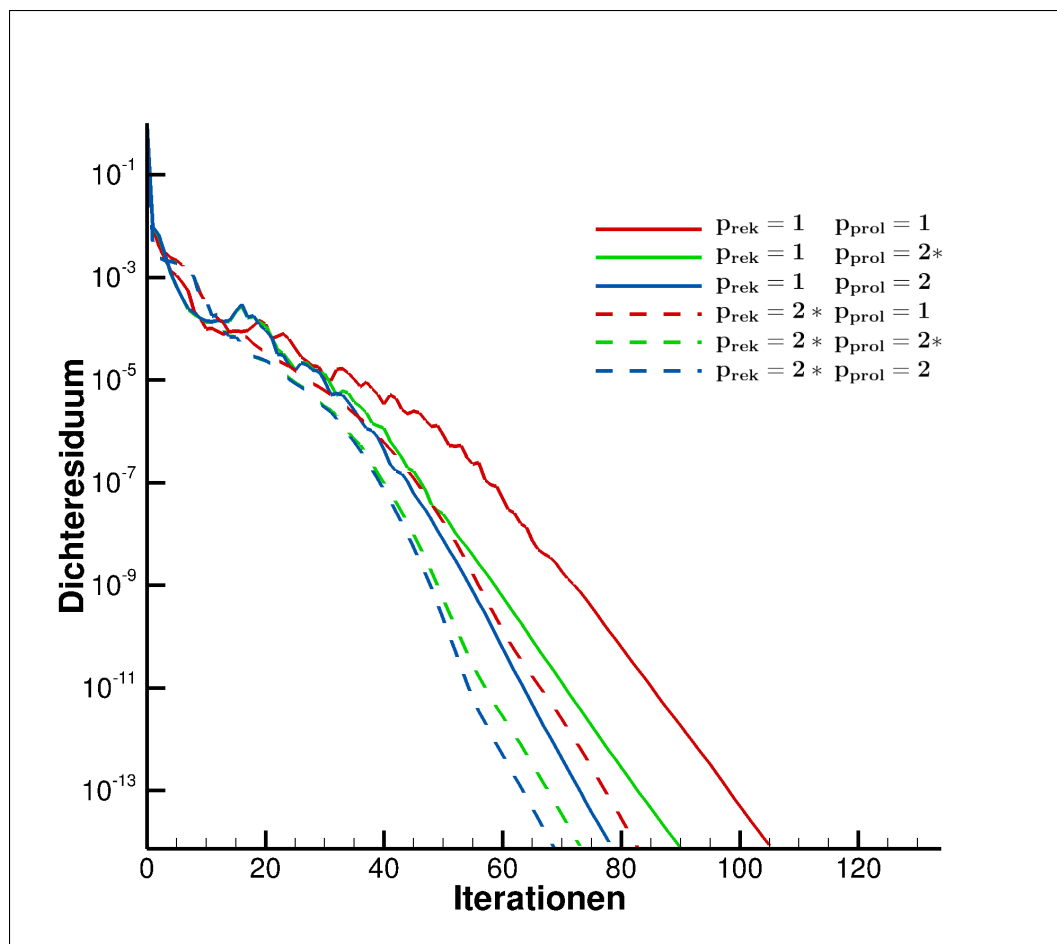


Abbildung 4.1.: Residuenverläufe für untersuchte Prolongationsordnungen auf unstrukturiertem Netzlevel 1

Kurven stellen dabei die Konvergenzverläufe dar, für deren Berechnung eine konstante Rekonstruktion auf den groben Gittern verwendet wurde und für die gestrichelten Kurven eine limitiert lineare Rekonstruktion. Für den Fall einer konstanten Rekonstruktion lässt sich erkennen, dass das Residuum ab einer Größenordnung von  $10^{-5}$  für die limitierte und unlimitierte Prolongation schneller abfällt als mit der konstanten Prolongation.



Die schnellere Konvergenz der beiden linearen Prolongationen führt für die limitierte lineare Prolongation zu einer Verringerung der Iterationszahl von etwa 15 % und im Fall der unlimitierten linearen Prolongation zu einer Verringerung um 25 %. In diesem Fall führt die Verwendung von Prolongationsoperatoren mit einer höheren Genauigkeit also zu einer verbesserten Konvergenzrate. Für den Fall, dass die Diskretisierungsordnung auf den groben Gittern durch eine limitiert lineare Rekonstruktion erhöht wird, zeigt sich ein ähnliches Verhalten. Die konstante Prolongation führt im Vergleich zur höchsten Anzahl Iterationen. Die linearen Prolongationen wirken sich, nachdem das Residuum um mehrere Größenordnungen gesunken, ist positiv auf die Konvergenz aus und senken so die Zahl der benötigten Iterationen bis zum Erreichen des Abbruchkriteriums. Vergleicht man den Einfluss der erhöhten Prolongationsordnung für den Fall der konstanten Rekonstruktion (durchgezogen) mit dem Fall der limitiert linearen Rekonstruktion (gestrichelt) auf den groben Gittern, ist zu erkennen, dass der Gewinn in Iterationen durch die linearen Prolongationen höher ist, wenn die Rekonstruktion konstant ist. Welche von diesen Beobachtungen weiter verallgemeinert auch für die anderen untersuchten Netze und Testfälle gelten, wird nachfolgend dargestellt.

**Prolongation mit konstanter Rekonstruktion auf den Grobgittern** Zunächst wird der Einfluss der Prolongationsordnung auf die Iterationszahl und Rechenzeit (*wall clock time*) für eine konstante Rekonstruktion auf den groben Gittern gezeigt. In Abbildung 4.2 sind die Ergebnisse für die unstrukturierten Netzlevel als relative Änderung zum definierten Referenzfall in Form eines Säulendiagramms dargestellt <sup>1</sup>. Jeder Balken stellt somit die Änderung der Iterationszahl bzw. *wall clock time* für das gegebene Netz aufgrund einer Erhöhung der Prolongationsordnung dar. Auf der linken Seite des Diagramms sind zunächst die relativen Änderungen für eine limitiert lineare Prolongation dargestellt. Für diesen Fall ergibt sich für alle gezeigten Netze eine Verringerung der Iterationszahl und damit auch eine Verringerung der Konvergenzrate. Die Iterationen sinken um 6 % (Level 4) bis etwa 16 % (Level 2). Die *wall clock time* sinkt ebenfalls für jedes Netzlevel. Allerdings sind diese Änderungen mit -2 bis -8 % geringer als für die Iterationszahl. Zudem zeigen die gröberen Netze tendenziell eine deutlichere Verringerung als die feineren. Für die unlimitierte Prolongation (rechte Seite) zeigt sich im Vergleich eine ausgeprägtere Konvergenzverbesserung. Während auf dem größten Netz (Level 4) sich die Iterationszahl um fast 9 % verringert, bewirkt die höhere Prolongationsordnung auf den feineren Netzen eine weitere Verringerung um bis zu 26 % (Level 1). Für die *wall clock time* zeigt sich ein ähnliches Verhalten wie bei der limitierten linearen Prolongation. Die Rechenzeit verringert sich nur leicht und liegt für das feinste Netz sogar über der Rechenzeit mit konstanter Prolongation. Zusammengefasst resultiert aus der erhöhten Prolongationsordnung, im Fall der unstrukturierten Netze, eine Verbesserung der Konvergenzrate sowie eine Verringerung der Rechenzeit, welche allerdings niedriger ausfällt als für die Iterationszahl.

Die Ergebnisse für die strukturierten Netze sind in Abbildung 4.3 in derselben Form dargestellt. Hinsichtlich der Iterationszahl kann ein vergleichbares Verhalten wie für die unstrukturierten Netze beobachtet werden. Mit Ausnahme von Netzlevel 3 zeigt sich sowohl für die limitierte als auch für die unlimitierte lineare Prolongation eine Verringerung der Iterationen verglichen mit einer konstanten Prolongation. Mit Verringerungen von bis 15 % liegen diese Werte allerdings unter denen für die unstrukturierten Netze. Die Rechenzeit sinkt vor allem für die gröberen Netze, während auf den feineren Netzen die erhöhte Prolongationsordnung einen geringeren Einfluss besitzt. Die unlimitierte Prolongation führt wie auch schon auf den unstrukturierten Netzen zu einer Erhöhung der Rechenzeit für das Netzlevel 1. Der Trend, dass die Rechenzeit durch die höhere Prolongationsordnung verringert wird, ist dennoch auch für die strukturierten Netze zu erkennen.

---

<sup>1</sup>Das größte Netz ist nicht dargestellt, da dieses in den meisten Fällen nicht konvergierte.

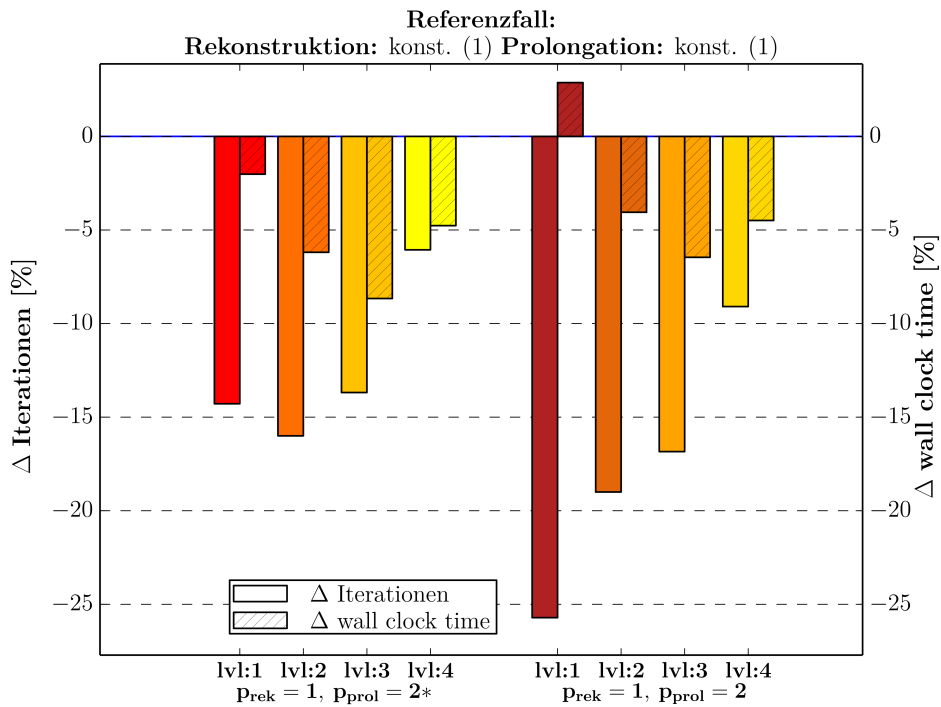


Abbildung 4.2.: RAE2822, unstrukturierte Netze: Einfluss einer erhöhten Prolongationsordnung auf die Beschleunigung (konstante Rekonstruktion auf groben Gittern)

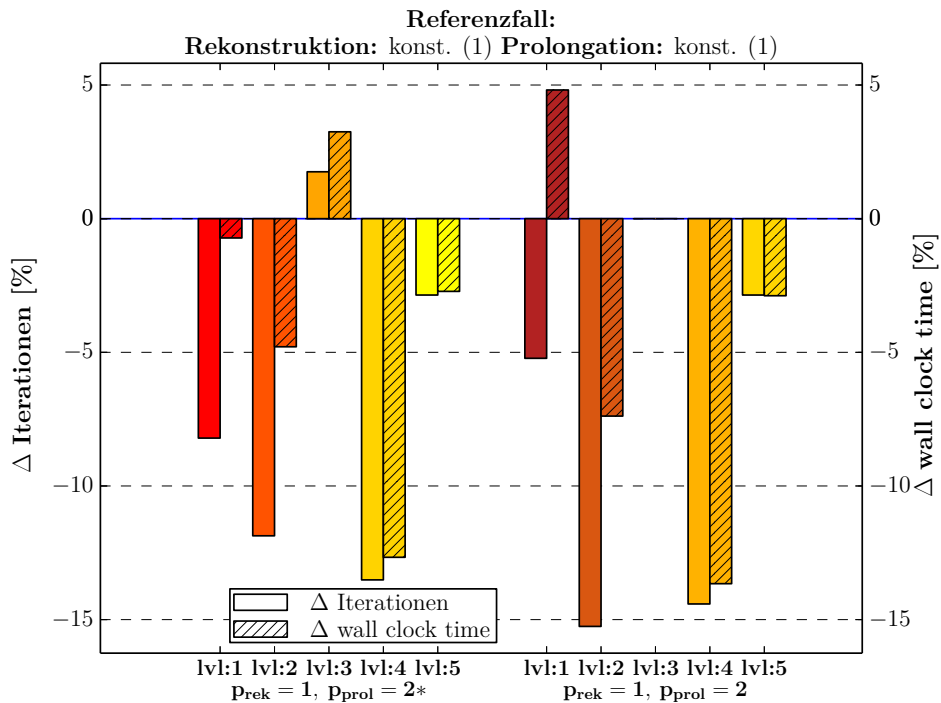
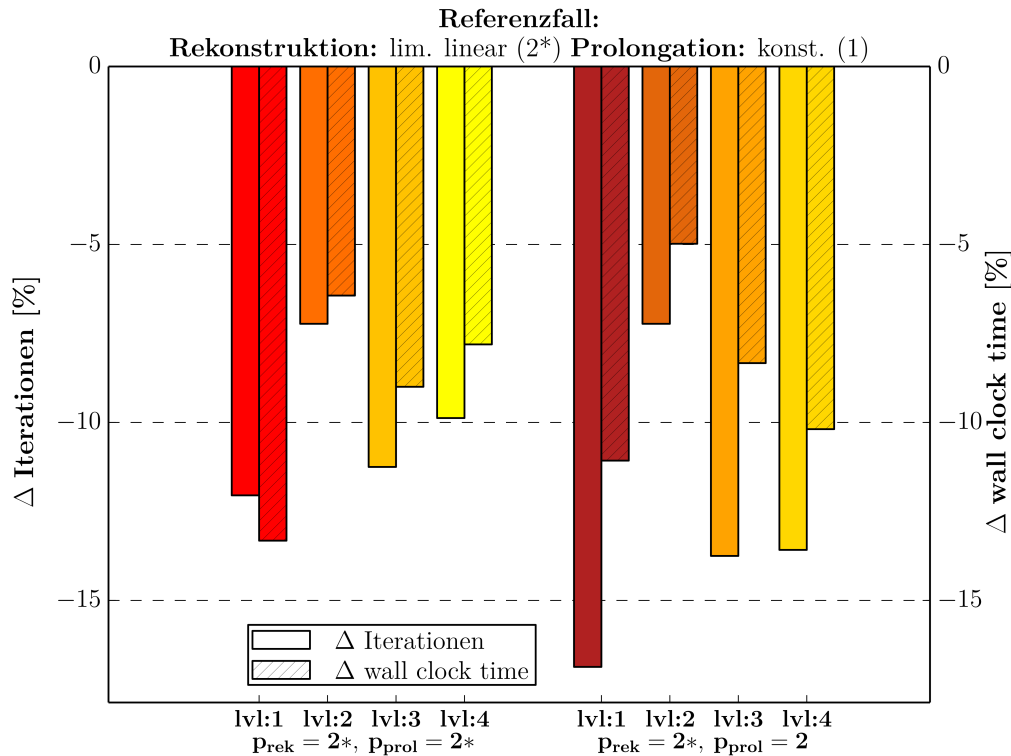


Abbildung 4.3.: RAE2822, strukturierte Netze: Einfluss einer erhöhten Prolongationsordnung auf die Beschleunigung (konstante Rekonstruktion auf groben Gittern)

**Prolongation mit linearer Rekonstruktion auf den Grobgittern** In diesem Abschnitt werden die Auswirkungen einer erhöhten Prolongationsordnung bei einer höheren Genauigkeit auf den Grobgittern, auf denen eine limitiert lineare Rekonstruktion genutzt wird, dargestellt. In Abbildung 4.4 sind für diesen Fall die relativen Änderungen in den Iterationen und der wall clock time für die unstrukturierten Netze zusammengestellt. Der

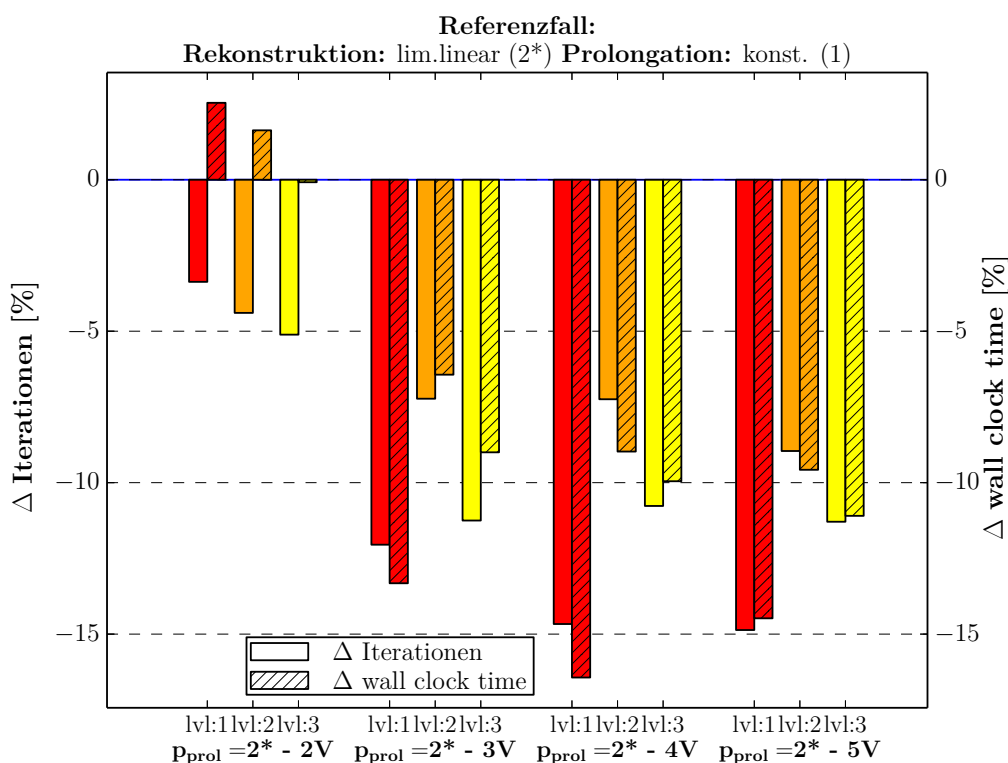


**Abbildung 4.4.:** RAE2822, unstrukturierte Netze: Einfluss einer erhöhten Prolongationsordnung auf die Beschleunigung (limitiert lineare Rekonstruktion auf groben Gittern)

Vergleich der limitierten linearen Prolongation mit der konstanten Prolongation zeigt eine Verringerung der Iterationszahl auf allen Netzleveln von 7 bis 12 %. Die relative Änderung der Rechenzeit liegt in einem ähnliche Bereich mit Reduktionen von etwa 6 bis 14 %. Sowohl für die Iterationen als auch die wall clock time ergibt sich die größte Verbesserung durch die limitierte lineare Prolongation auf dem feinsten Netzlevel. Auch durch die lineare Prolongation zeigt sich eine Reduktion in Iterationszahl und Rechenzeit über alle Netzlevel. Die maximale Reduktion ergibt sich wieder auf dem feinsten Netz mit einer Verringerung um 17 % in den Iterationen und 11 % in der wall clock time. Auf den strukturierten Netzen führt die erhöhte Prolongationsordnung zu grundsätzlich ähnlichem Verhalten. Die Beschleunigungsvorteile sind lediglich ausgeprägter und nehmen mit höherer Netzauflösung stärker zu. In Abbildung A.1 in Anhang A ist das dazugehörige Diagramm aufgeführt.

**Einfluss Mehrgitterzyklus** Feine Ausgangsnetze benötigen theoretisch eine stärkere Vergrößerung bzw. mehr Vergrößerungsstufen innerhalb des Mehrgitterzyklus, um jeweils die niederfrequenten Fehleranteile in der Lösung effektiv dämpfen zu können, als geringer aufgelöste Ausgangsnetze (vgl. Kapitel 2.3.1). Für sehr feine Netze werden daher auch Mehrgitterzyklen mit zusätzlichen Grobgittern genutzt. Aus diesem Grund wird im

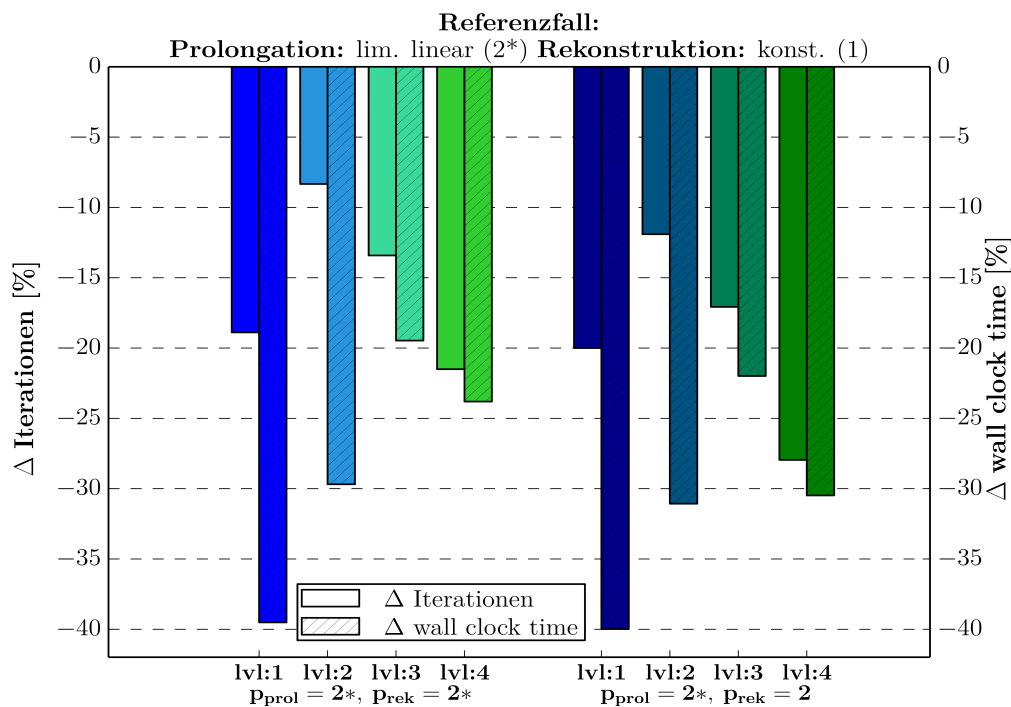
Folgendes wird der Einfluss des Mehrgitterzyklus auf den Effekt einer erhöhten Prolongationsordnung untersucht. Zu diesem Zweck wurden abweichend von den Referenzeinstellungen V-Zyklen mit unterschiedlicher Stufenanzahl verwendet und für jeden der V-Zyklen der Beschleunigungseffekt durch eine erhöhte Prolongationsordnung überprüft. In Abbildung 4.5 wird die relative Änderung der Iterationen und Rechenzeit aufgrund der Änderung der Prolongation von einer konstanten zu einer limitiert linearen für die drei feinsten unstrukturierten Netze dargestellt. Dieser Vergleich ist jeweils für einen 2V-, 3V-, 4V- und 5V-Zyklus dargestellt. Aus dem Vergleich der relativen Änderungen zwischen den Mehrgittern lässt sich zeigen, wie eine höhere Anzahl Grobgitter die Effekte aus der erhöhten Prolongationsordnung beeinflusst. Für den 3V-Zyklus entsprechen die Ergebnisse denen,



**Abbildung 4.5.:** RAE2822, unstrukturierte Netze: Einfluss des Mehrgitterzyklus auf die Beschleunigung durch eine erhöhte Prolongationsordnung (limitiert lineare Rekonstruktion auf groben Gittern)

die bereits in Abbildung 4.4 dargestellten wurden. Ähnliches Verhalten zeigt sich für den 4V- und den 5V-Zyklus, in denen die limitierte lineare Prolongation ebenfalls in einer Konvergenzbeschleunigung und Reduktion der wall clock time resultiert. Lediglich im 2V-Zyklus führt die limitiert lineare Prolongation zu einer Erhöhung der Rechenzeit. Insbesondere der Vergleich zwischen 2V- und 3V-Zyklus zeigt eine zusätzliche Reduzierung der Iterationszahl und Rechenzeit durch ein zusätzliches Grobgitter im Mehrgitterzyklus. Vom 3V- bis zum 5V-Zyklus lässt sich für die Reduktion der Iterationszahl und der Rechenzeit ein vergleichbarer Trend erkennen, welcher allerdings deutlich abgeschwächt ist. Zumindest im Vergleich der Ergebnisse des 3V-Zyklus mit denen des 5V-Zyklus zeigt sich eine weitere Reduktion der Rechenzeit und Iterationen durch die erhöhte Prolongationsordnung. Dieser Trend ergibt sich in vergleichbarer Form für die gleichen Rechnungen mit einer konstanten Rekonstruktion auf den groben Gittern anstatt einer limitiert linearen. Die dazugehörige Abbildung A.2 ist in Anhang A zu finden.

**Einfluss der Ordnung der Grobgitterdiskretisierung** Die Ergebnisdaten wurden zusätzlich genutzt, um zu analysieren, wie die Auswirkungen einer genaueren Diskretisierung auf den Grobgittern sind. Entsprechend des Vorgehens bezüglich der Prolongation werden etwaige Beschleunigungseffekte durch den Vergleich von Iterationszahl und wall clock time mit einer Referenzlösung ermittelt. Die Referenz stellt die Lösung mit einer konstanten Rekonstruktion auf den groben Gittern dar. Die Grobgitterdiskretisierung 1. Ordnung wird in unstrukturierten Mehrgitterverfahren häufig aufgrund des geringeren rechnerischen Aufwandes und der höheren Stabilität gegenüber Diskretisierungen 2. Ordnung für die Grobgitter verwendet [20]. Wie sich die erhöhte Ordnung der Grobgitterdiskretisierung auf die Beschleunigung des Mehrgitters auswirkt, ist in Abbildung 4.6 dargestellt. Die dargestellten Ergebnisse sind die der unstrukturierten Gitter für deren Berechnung auf



**Abbildung 4.6.:** RAE2822, unstrukturierte Netze: Einfluss einer höheren Ordnung der Grobgitterdiskretisierung auf die Beschleunigung (limitiert lineare Prolongation)

eine limitiert linearen Prolongation zurückgegriffen wurde. Zu erkennen ist, dass sich die benötigten Iterationen mit einer limitiert linearen Rekonstruktion auf den groben Gittern um 8 bis 22 % gegenüber der konstanten Rekonstruktion verringern. Mit der unlimitierten linearen Rekonstruktion ist die Reduktion auf den einzelnen Netzen weiter ausgeprägt mit Werten von 12 bis 28 %. Noch deutlicher wird der Beschleunigungseffekt bei Betrachtung der Rechenzeiten. Für beide linearen Rekonstruktionen fällt die wall clock time um 20 bis 40 % durch die Grobgitterdiskretisierung 2. Ordnung, welche damit im Fall der unlimitierten linearen Rekonstruktion vollständig konsistent mit der Feingitterdiskretisierung ist. Vergleichbare Beschleunigungseffekte ergeben sich auch für den Fall einer konstanten Prolongation (siehe Abbildung A.3 Anhang A) und ebenfalls für die strukturierten Netze.

**Zusammenfassung und Bewertung der Ergebnisse** Die bisherigen Ergebnisse für das RAE2822 bezüglich des Einflusses der Prolongationsordnung können wie folgt zusammengefasst werden:

- Die Erhöhung der Prolongationsordnung führt in den meisten Fällen zu einer Beschleunigung des Mehrgitters. Der Effekt ist abhängig von der Ordnung der Grobgitterdiskretisierung und beeinflusst Konvergenzrate und Rechenzeit unterschiedlich stark
  - Bei einer Grobgitterdiskretisierung, die nur von 1. Ordnung genau ist, zeigt sich eine ausgeprägte Abhängigkeit der Beschleunigung durch die erhöhte Prolongationsordnung. Limitierte und unlimitierte lineare Prolongation führten vor allem zu einer Reduktion der Iterationen und in den meisten Fällen zu einer Reduktion der Rechenzeit
  - Bei einer Grobgitterdiskretisierung, die mit einer limitiert linearen Rekonstruktion konsistent ist mit der Feingitterdiskretisierung, werden Iterationszahl und Rechenzeit durch die erhöhte Prolongationsordnung in ähnlichem Maß reduziert. Die Beschleunigung des Mehrgitters ist weniger abhängig von den Netzauflösungen.
  - Limitiert und unlimitiert lineare Prolongationen zeigen für beide Netzarten vergleichbare Ergebnisse.

Der konvergenzbeschleunigende Effekt durch die Erhöhung der Ordnung der Prolongation ist in Übereinstimmung mit der theoretischen Erwartung, dass ein genauere Transfer der Grobgitterkorrekturen auf das feine Gitter zu einer beschleunigten Konvergenz des Mehrgitterverfahrens führt [15], [5]. Bis auf einzelne Ausnahmen resultierte der Wechsel von einer konstanten Prolongation mit der Ordnung 1 zu einer (limitiert) linearen Prolongation mit der Ordnung 2 in einer Verringerung der benötigten Iterationen. Die Rechenzeit verringert sich ebenfalls, allerdings in den meisten Fällen in geringerem Ausmaß als die Anzahl der Iterationen. Eine mögliche Erklärung für dieses Verhalten liegt darin, dass sich bei gleichbleibendem Aufwand für jeden Mehrgitterzyklus eine verringerte Anzahl Zyklen in gleichem Maße auf die Rechenzeit auswirken sollte, aber der zusätzliche Aufwand für die lineare Prolongation eine Teil davon kompensiert. Außerdem kann die Konvergenz des linearen Löser die Rechenzeit beeinflussen, zum Beispiel, wenn eine genauere Prolongation gleichzeitig die Iterationsschritte im linearen Löser erhöht. Zudem wurden für die Rechenzeiten keine gemittelten Wert verwendet, die zufällige Schwankungen durch das verwendete Rechnersystem ausgleichen, sodass einzelne Werte für die wall clock time auch durch diesen Effekt beeinflusst sein könnten.

- Zusätzliche Grobgitter führen zu einem tendenziell gesteigerten Effekt der erhöhten Prolongationsordnung
  - Für die untersuchten Netze zeigte sich insbesondere zwischen einem 2V- und einem 3V-Zyklus ein verstärkt positiver Effekt auf die Beschleunigung durch eine genauere Prolongation.
  - Für Zyklen mit mehr als zwei Grobgittern war der Trend einer stärkeren Beschleunigung durch zusätzliche Grobgitter nur schwach ausgeprägt.

Die Ergebnisse zeigen, dass durch eine höhere Anzahl Grobgitter innerhalb des Mehrgitterzyklus sich auch der Einfluss der Prolongation erhöht. Eine mögliche Ursache liegt in der einfachen Überlegung, dass ein höherwertiger Transfer von Grobgittergrößen durch eine genauere Prolongation einen stärkeren Effekt hat, wenn die Prolongation häufiger im Zyklus genutzt wird. So sollte eine Prolongation von 2. Ordnung gegenüber einer Prolongation 1. Ordnung mit zusätzlichen Grobgittern zu weiter verbesserten Grobgitterkorrekturen führen. Bemerkenswert ist der Unterschied im Einfluss zwischen 2V-, 3V-Zyklus und den übrigen Zyklen. Dass über einen 3V-Zyklus hinaus die Beschleunigung durch die linearen Prolongationen kaum mehr zunimmt, kann an der Auflösung der Netze liegen.

Möglichweise ist selbst das feinste untersuchte Netz bereits durch zwei Grobgitter ausreichend vergrößert, sodass zusätzliche Grobgitter bzw. deren Korrekturen keinen starken Einfluss mehr auf die Konvergenz besitzen. Diese Vermutung stützt sich auf der Beobachtung, dass die absolute Anzahl benötigter Mehrgitterzyklen mit 4V- und 5V-Zyklus gegenüber einem 3V-Zyklus in den meisten Fällen wenig oder gar nicht mehr sank.

- Eine Grobgitterdiskretisierung, die von 2. Ordnung genau ist und damit konsistent mit der Feingitterdiskretisierung, verringert die benötigten Iterationen und die Rechenzeit deutlich gegenüber einer Grobgitterdiskretisierung 1. Ordnung

Dass sich eine genauere Grobgitterdiskretisierung positiv auf das Konvergenzverhalten eines Mehrgitterverfahrens auswirken kann, wurde etwa bereits in [6] beobachtet. Gleichzeitig zeigte sich aber auch in Vergleichsrechnungen mit einer Feingitterdiskretisierung 1. Ordnung, für die ebenfalls eine Variation der Grobgitterdiskretisierung durchgeführt wurde, der entscheidende Einfluss der Konsistenz der Diskretisierungen. Inkonsistenz von Feingitter- und Grobgitterdiskretisierungen verhinderten in diesem Fall zumeist sogar die Konvergenz der Rechnungen. Dass die Konsistenz von Grob- und Feingitterdiskretisierung notwendig für die netzunabhängige Konvergenz des Mehrgitters ist, wurde etwa in [21] und [19] bereits anhand der Diffusionsgleichung festgestellt. Somit kann vermutet werden, dass im untersuchten Fall die Konsistenz von Fein- und Grobgitterdiskretisierung eine entscheidende Größe für den Beschleunigungsvorteil ist.

## Robustheit

Die Robustheit wurde mittels der in Kapitel 2.4.2 vorgeschlagenen Methoden untersucht. Dabei erwies sich die Quantifizierung der Robustheit mittels der maximal möglichen CFL-Zahl als nicht praktikabel, da es Fälle gab, die bei bestimmten CFL-Zahlen fehlschlagen, aber bei einer Erhöhung der CFL-Zahl wieder konvergierten. Dieser Umstand, welcher möglicherweise durch ein zu starkes CFL-Ramping verursacht wird, verhindert die Ermittlung der maximalen CFL-Zahl durch die verwendete Methode der Intervallschachtelung. Stattdessen wird die Robustheit durch die relative Anzahl konvergierter Rechnungen aus einer Menge von Rechnungen, die sich aus einer Variation von Parametern ergibt, bewertet. Die variierten Parameter sind die Start-CFL-Zahl, der entropy-fix, welcher im Roe-Schema das Auftreten von Eigenwerten nahe 0 verhindert, sowie der K-Wert des Spline-Limiters, der die Stärke der Limitierung beeinflusst. Die verwendeten Werte der einzelnen Parameter sind in Tabelle 4.2 aufgeführt. Für jede der neun Kombinationen

Variierter Parameter	Werte
Start-CFL-Zahl	1.5, 3, 6, 12, 25
entropy-fix	0.05, 0.1, 0.2
K-Wert	0.1, 1, 5

**Tabelle 4.2.:** Variierte Parameter für Robustheitsuntersuchung am RAE2822

aus konstanter, limitiert und unlimitiert linearer Prolongation / Rekonstruktion werden diese Parameter variiert und gezählt wie viele der Rechnungen konvergierten. Eine höhere Zahl konvergierter Rechnungen wird entsprechend Kapitel 2.4.2 als höhere Robustheit gewertet. Die Ergebnisse aus diesem Vorgehen sind in Abbildung 4.7 für die strukturierten Netze des RAE2822 dargestellt. Für die unterschiedlichen Grobgitterdiskretisierungen

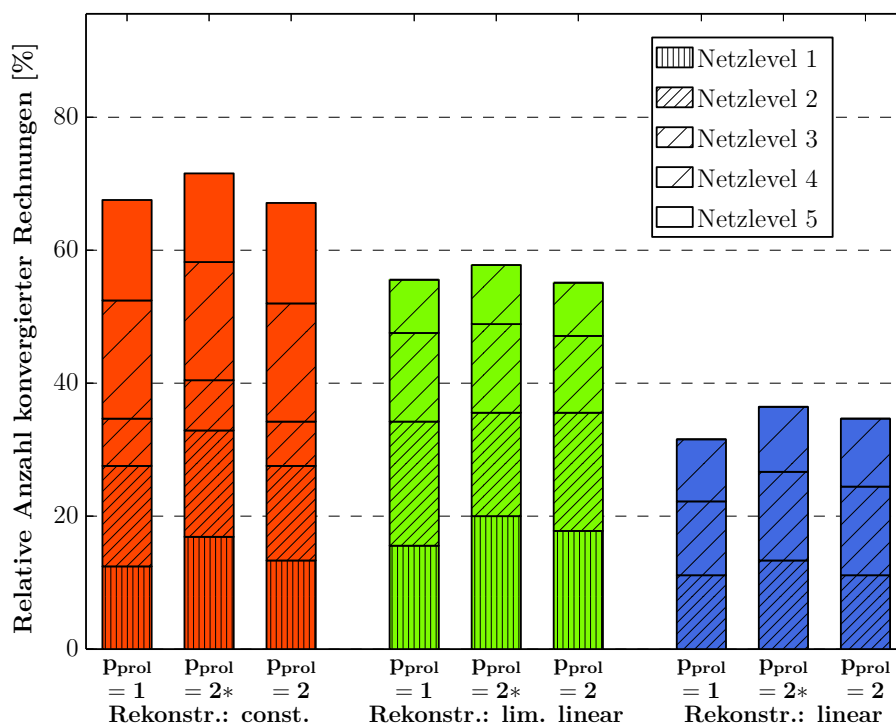


Abbildung 4.7.: RAE2822: Robustheitsuntersuchung für die strukturierten Netze

ergibt sich die höchste Anzahl konvergierter Rechnungen und damit Robustheit für die konstante Rekonstruktion. Unabhängig von der verwendeten Prolongation zeigt die 1. Ordnungsgrobgridterdiskretisierung eine höhere Robustheit als die Diskretisierungen 2. Ordnung. Während zwischen der konstanten und der limitiert linearen Rekonstruktion etwa ein Unterschied von 15 % liegt, sinkt die Robustheit mit der unlimitiert linearen Rekonstruktion weiter ab. Verglichen mit der konstanten Rekonstruktion konvergieren mit der unlimitiert linearen Rekonstruktion nur noch halb so viele Rechnungen. Bei der limitiert linearen Rekonstruktion fällt zudem auf, dass auf den feinen Netzen (Level 1-3) die limitiert lineare Rekonstruktion sogar etwas robuster ist als die konstante Rekonstruktion. Hinsichtlich der Prolongationsordnung ist ein geringerer Einfluss auf die Robustheit zu erkennen. Dennoch lässt sich für die limitiert lineare Prolongation eine leichte Steigerung der Robustheit gegenüber der konstanten Prolongation erkennen. Die unlimitiert lineare Prolongation steigerte nur für den Fall einer ebenfalls linearen Rekonstruktion die Robustheit. Für die unstrukturierten Netze sind die Ergebnisse in Abbildung 4.8 gezeigt. Netzlevel 1 konnte aufgrund der hohen erforderlichen Rechenzeit nicht ausgewertet werden und Netzlevel 5 wurde aus der Darstellung ausgeschlossen, da es als einziges gegensätzliche Verhalten zu den restlichen Netzen zeigte. Auch für die unstrukturierten Netze ergibt sich der Trend, dass eine Diskretisierung 1. Ordnung robuster ist als die beiden Diskretisierungen 2. Ordnung. Im Gegensatz zu den strukturierten Netzen ist der Trend allerdings weniger ausgeprägt. Zudem zeigt sich für die konstante Rekonstruktion auf den Grobgridtern eine Abweichung von dem Trend, dass die Prolongationsordnung die Robustheit nur wenig beeinflusst. Die Absenkung der Robustheit durch die limitiert lineare Prolongation wird hauptsächlich durch die Ergebnisse auf dem Netzlevel 2 verursacht. Im Fall der genaueren Grobgridterdiskretisierung ist der Einfluss der Prolongation auf die Robustheit deutlich geringer. Die Ergebnisse aller untersuchten Netze zeigen bezüglich der Diskretisierung, dass eine Grobgridterdiskretisierung 1. Ordnung, welche aufgrund höherer numerischer Dissipation stabilisierend wirkt, eine höhere Robustheit aufweist als



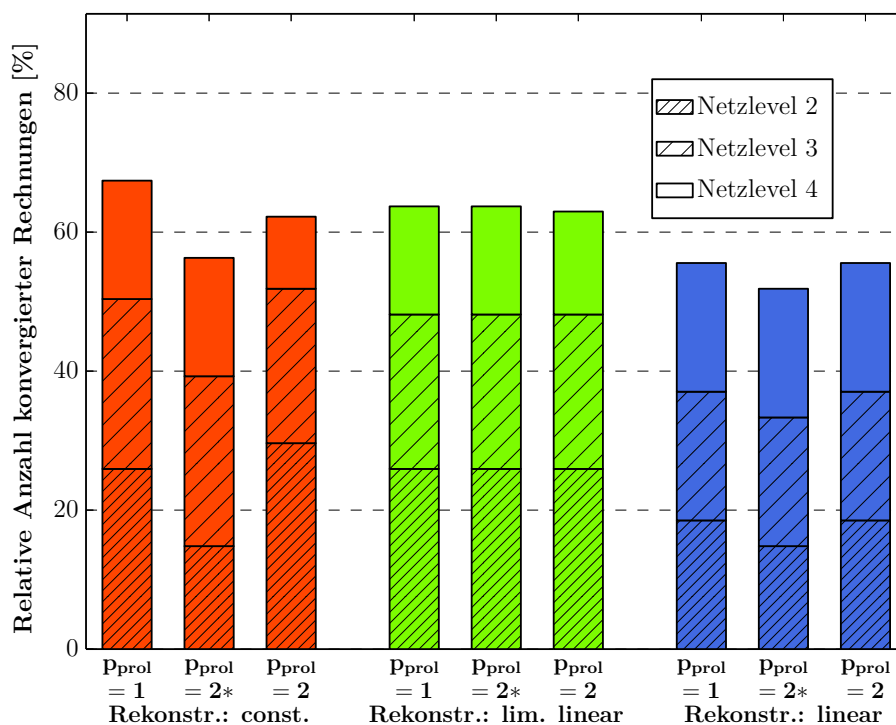


Abbildung 4.8.: RAE2822: Robustheitsuntersuchung für die unstrukturierten Netze

eine Diskretisierung 2. Ordnung. In der Praxis wird häufig auch wegen des geringeren Implementierungsaufwandes auf eine Grobgitterdiskretisierung zurückgegriffen, die nur von 1. Ordnung genau ist [22],[20]. Aus den Ergebnissen des vorherigen Abschnitts zeigt sich allerdings das Beschleunigungspotential, welches durch eine Diskretisierung 1. Ordnung verloren geht. Die konsistente Grobgitterdiskretisierung führte zu Senkungen der Rechenzeit um bis zu 40 %, sodass eine bestimmte Grobgitterdiskretisierung entweder Einbußen in der Robustheit oder der theoretisch erreichbaren Beschleunigung bewirkt. Dieser Kompromiss scheint für die Prolongation nicht nötig, da eine höhere Prolongationsordnung mit einzelnen Ausnahmen keinen deutlichen Abfall der Robustheit hervorrief. Gleichzeitig bewirkt die erhöhte Prolongationsordnung eine Beschleunigung in Rechenzeit und Iterationen. Obwohl die Ergebnisse bezüglich der Robustheit theoretische Erwartungen bestätigen, soll an dieser Stelle darauf hingewiesen werden, dass die Anzahl konvergierter Ergebnisse stark abhängig war von den gewählten Parametern und den genauen Werten. Ebenso wurde eine Abhängigkeit nicht nur der absoluten Zahl konvergierter Rechnungen, sondern auch der Verhältnisse zwischen den untersuchten Kombinationen aus Prolongation und der Rekonstruktion auf den groben Gittern beobachtet. Aus diesem Grund sollten die gezeigten Ergebnisse eher als testfallspezifische Ergebnisse betrachtet werden.

#### 4.1.2. NACA0012: Reibungsfreie, subsonische Strömung

Der NACA0012-Testfall bietet die Möglichkeit die Untersuchungen nicht nur hinsichtlich veränderter physikalischer Randbedingungen weiter zu verallgemeinern, sondern auch bezüglich der gelösten Gleichungen. Statt der Navier-Stokes-Gleichungen, welche partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung darstellen, werden die Euler-Gleichungen gelöst, welche nur die Ordnung 1 besitzen. Dieser Unterschied ermöglicht es, das in Kapitel 2.3.4

dargestellte Konvergenzkriterium für das Mehrgitter auf seine Aussagekraft für das untersuchte Mehrgitter numerisch zu überprüfen. Zuvor soll der Einfluss der Prolongationsordnung und der Ordnung der Grobgitterdiskretisierung auf die Beschleunigung gezeigt werden.

### Konvergenzrate und Rechenzeit

Der Beschleunigungseffekt durch eine erhöhte Prolongationsordnung wird mittels relativer Änderung von Iterationszahl und Rechenzeit (*wall clock time*) einer Berechnung mit (limitiert) linearer Prolongation gegenüber einer Berechnung mit konstanter Prolongation dargestellt. Für die sechs unterschiedlich feinen Netze ergeben sich die in Abbildung 4.9 zusammengestellten Ergebnisse. Die Ergebnisse basieren auf einer Grobgitterdiskretisierung 2. Ordnung. Es zeigt sich, dass sowohl die limitierte als auch die unlimitiert lineare

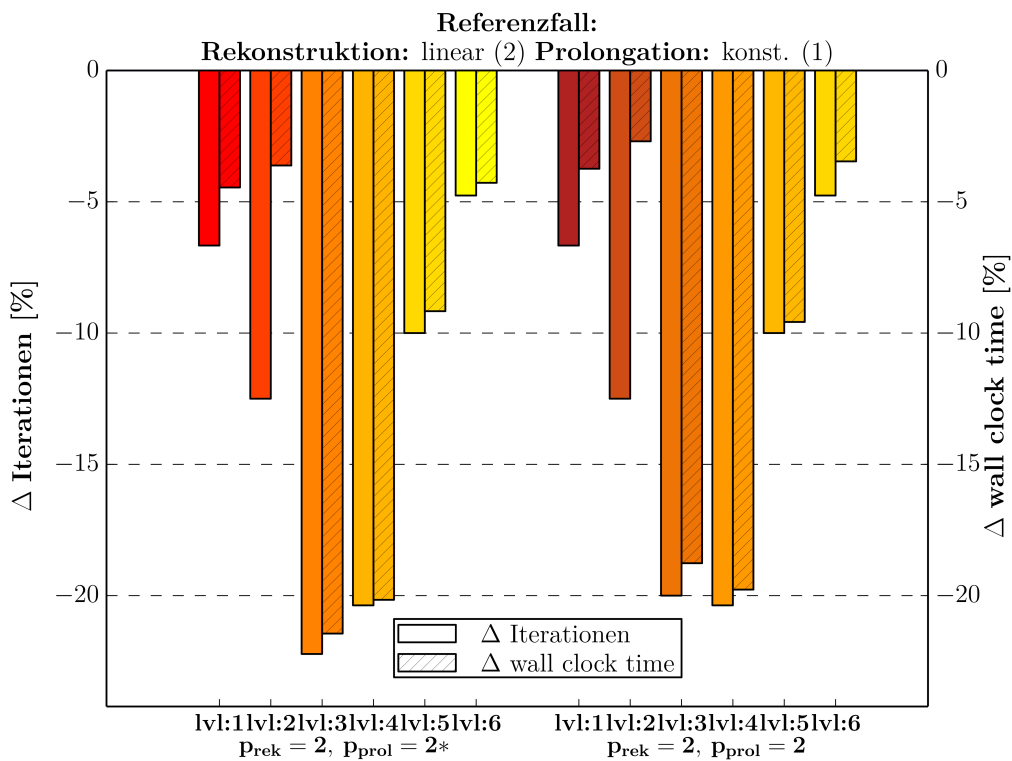
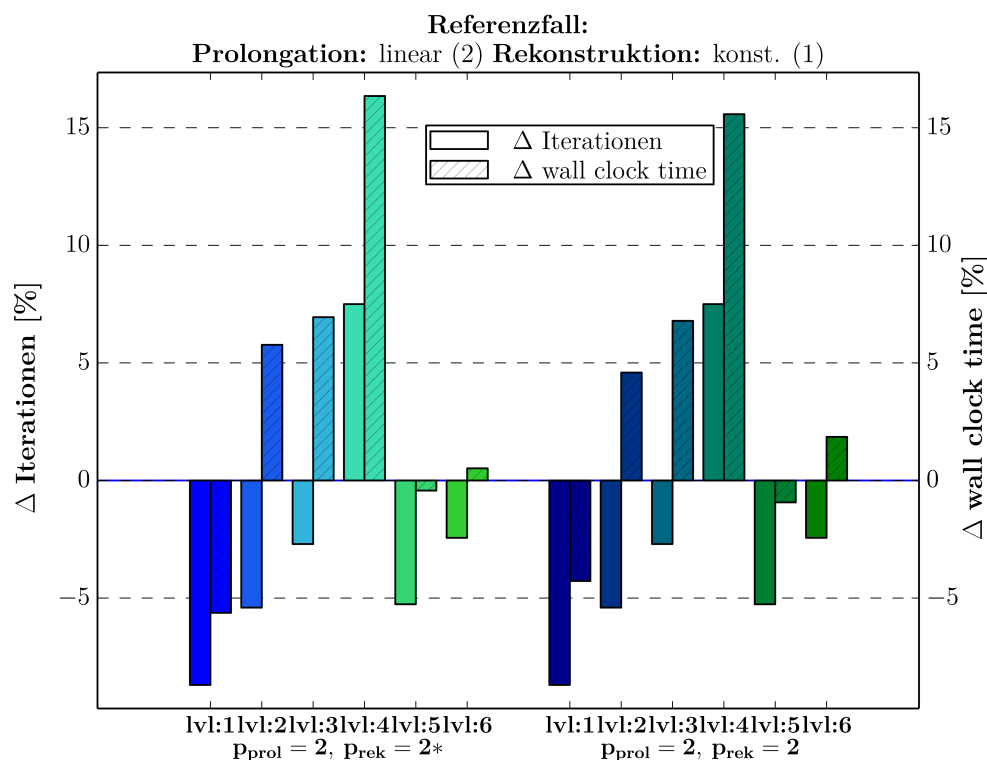


Abbildung 4.9.: NACA0012: Einfluss einer erhöhten Prolongationsordnung auf die Beschleunigung (lineare Rekonstruktion auf groben Gittern)

Prolongation die Anzahl Iterationen und die wall clock time senkt. Bezüglich Iterationen ergibt sich für beide linearen Prolongationen eine Reduktion von etwa 5 bis 23 % gegenüber der konstanten Prolongation. Die stärkste Reduktion zeigt sich für die Netzlevel 3 und 4, während für das größte und das feinste eine deutlich geringere Konvergenzbeschleunigung vorliegt. Die Verringerung der Rechenzeit liegt mit Werten von 3 bis 22 % unterhalb der Reduktion der Iterationen. Dieses Verhalten ist ausgeprägter für die feinsten Netze. Insgesamt liefern die limitierte und unlimitierte lineare Prolongation ähnliche Ergebnisse. Da die Rechnungen für den Fall einer konstanten Rekonstruktion auf den Grobgittern die gleichen Trends zeigen, mit lediglich leicht verringerten Beschleunigungseffekten, sind diese Ergebnisse im Anhang A zu finden.

**Einfluss der Ordnung der Grobgitterdiskretisierung** Wird für den NACA0012-Testfall die Genauigkeit der Grobgitterdiskretisierung erhöht, ergibt sich der in Abbildung 4.10 dargestellte Einfluss auf die Beschleunigung des Mehrgitters. Verglichen wird eine konstante Rekonstruktion auf den Grobgittern mit einer (limitiert) linearen Rekonstruktion, die damit die Ordnung auf 2 erhöht. Sowohl für die limitiert lineare als auch die un-



**Abbildung 4.10.:** NACA0012: Einfluss einer höheren Ordnung der Grobgitterdiskretisierung auf die Beschleunigung (lineare Prolongation)

limitiert lineare Rekonstruktion ist ein ähnliches Verhalten zu erkennen. In beiden Fällen verringert sich die Anzahl der Iterationen mit Ausnahme des Netzlevel 3 um etwa 3 bis 8 %. Für die wall clock time ergibt sich über die verschiedenen Netze kein eindeutiger Trend. Lediglich auf dem feinsten Netz führt die genauere Grobgitterdiskretisierung zu einer Verringerung der Rechenzeit. Auf den mittleren Level zwei bis vier, zeigt sich sogar eine Erhöhung der Rechenzeit von etwa 5 bis 15 %. Im Vergleich zu den relativen Änderungen der Iterationszahl liegen die Änderungen der Rechenzeit für jedes Netzlevel höher, sodass etwa geringe Reduktionen in der Iterationszahl gleichzeitig zu leichten Erhöhungen der Rechenzeit führen. Vergleichbare Ergebnisse sind in Abbildung A.5 in Anhang A für eine konstante Prolongation zu finden.

**Zusammenfassung und Bewertung der Ergebnisse** Die wesentlichen Ergebnisse für den Testfall des NACA0012-Profiles sind die folgenden.

- Eine Erhöhung der Prolongationsordnung führt sowohl zu einer Verbesserung der Konvergenz als auch der Rechenzeit.
  - Die geringsten Beschleunigungseffekte ergaben sich für die größten und feinsten untersuchten Netze.

Auch für den Fall einer reibungsfreien Unterschallströmung ergibt sich, dass eine genauere Transfer der Grobgitterkorrekturen zu einer verbesserten Konvergenz führt. Dieses Verhalten erfüllt zwar die bereits in Kapitel 4.1.1 beschriebene Erwartung an einen genaueren Prolongationsoperator, zugleich ergibt sich ein unerwartetes Verhalten im Bezug auf das Konvergenzkriterium aus Kapitel 2.3.4.

Da für die reibungsfreie Strömung die Euler-Gleichungen gelöst werden, ist das Konvergenzkriterium bereits durch die Verwendung einer Injektion, also einer Prolongation der Ordnung 1 erfüllt. Das Kriterium ist für die Navier-Stokes-Gleichungen erst durch eine lineare Prolongation erfüllt (Restriktion von Ordnung 1). Dementsprechend wäre für den Testfall mit dem RAE2822 eine deutlich höhere Konvergenzbeschleunigung durch eine 2. Ordnung Prolongation gegenüber eine Prolongation 1. Ordnung zu erwarten gewesen. Die Beschleunigungseffekte für den NACA0012-Fall liegen allerdings in einem vergleichbaren Bereich zu denen des RAE2822. Daher scheint auch im Fall des RAE2822 der Beschleunigungsgewinn weniger auf der Erfüllung des Konvergenzkriteriums zu beruhen als allgemein auf der gesteigerten Genauigkeit des Grobgittertransfers. Diese Beobachtung unterstützt die Hinweise aus der Literatur [21][15], dass das Konvergenzkriterium lediglich bei Erfüllung der zur Herleitung getroffenen Annahmen ein scharfes Kriterium darstellt. Wichtige Annahme wie für ein Lineares Mehrgitter oder die Diskretisierung mittels Finite-Differenzen sind für das nichtlineare Mehrgitter in CODA nicht erfüllt.

- Eine Grobgitterdiskretisierung, deren Ordnung von 1 auf 2 erhöht wird und damit konsistent mit der Feingitterdiskretisierung ist, zeigt insgesamt eine leichte Konvergenzbeschleunigung. Die Rechenzeit wird hingegen tendenziell erhöht.

Die genauere Grobgitterdiskretisierung liefert für den reibungsfreien Fall keinen klaren Beschleunigungseffekt über alle untersuchten Netze und unterscheidet sich damit von den Ergebnisse für die reibungsbehaftete Strömung um das RAE2822. Zwar verringert sich durch die höhere Ordnung der Diskretisierung auch für das NACA0012 die Anzahl der Iterationen, diese Reduktion scheint jedoch nicht ausreichend, um den zusätzlichen Aufwand, der durch die lineare Rekonstruktion entsteht, auszugleichen. Neben der Berechnung von Gradienten und zusätzlichen Iterationen im linearen Löser kann auch die Geometriehaltung auf den groben Gittern zusätzlichen Rechenaufwand generieren. Eventuell zeigt sich der Beschleunigungseffekt für feinere Netze deutlicher, da sowohl für das NACA0012 als auch das RAE2822 die maximale Reduktion der Rechenzeit auf dem feinsten Netz vorlag. Für den NACA0012-Fall ist zudem zu beachten, dass der Lösungsprozess wenige Iterationen (20-50) und geringe Rechenzeiten benötigte. Daher können die relativen Änderungen bereits durch kleinere absolute Änderungen von z.B. ein oder zwei Iterationsschritten hervorgerufen werden, was die Aussagekraft geringer relativer Änderungen einschränkt.

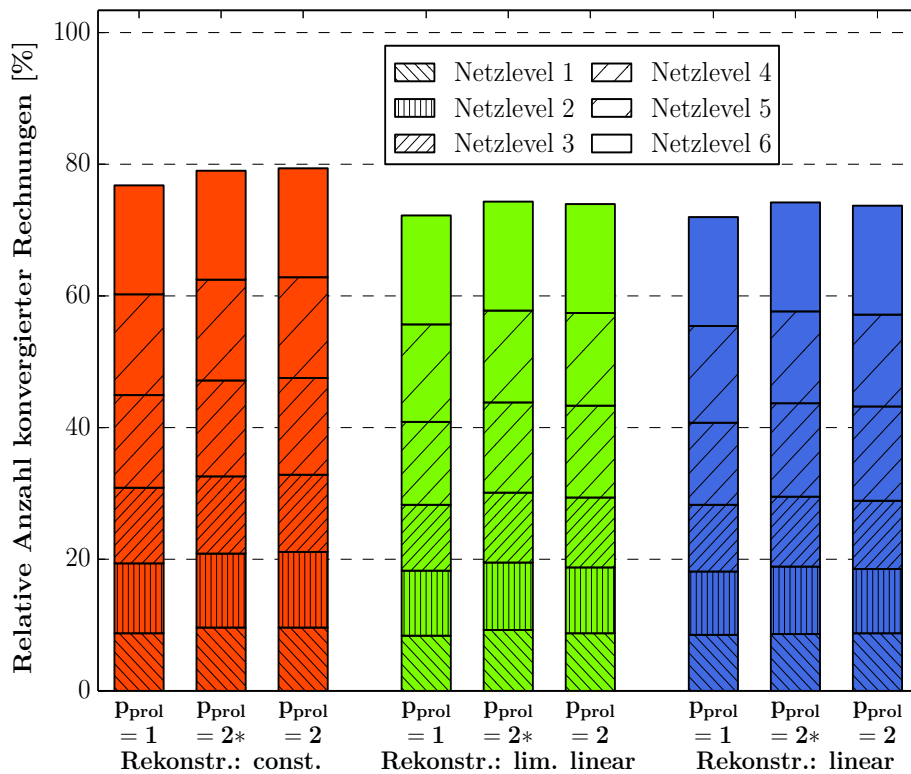
### **Robustheit**

Die Bewertung der Robustheit erfolgte mittels der relativen Anzahl konvergierter Rechnungen aus einem Satz von Rechnungen für die unterschiedliche Parameter variiert wurden. Eine Robustheitsabschätzung über eine maximale CFL-Zahl konnte nicht erfolgen, da diese für die untersuchten Fälle mit verschiedenen Grobgitterdiskretisierungen und Prolongationen Werte oberhalb der maximalen Zahlendarstellung annahm. Stattdessen wurden Parameter für die Diskretisierung und die physikalischen Randbedingungen entsprechend der Werte in Tabelle 4.3 variiert. Daraus ergeben sich summiert über die sechs Netze 810 Rechnungen für jede der neun untersuchten Kombinationen aus konstanter, linearer und limitiert linearer Prolongation / Rekonstruktion auf den groben Gittern. Auf dem feinen Gitter wird für jede Parameterkombination eine limitiert lineare Rekonstruktion verwendet. Die relative Anzahl konvergierter Rechnungen ist für die neun Fälle in

Variierter Parameter	Werte
Start-CFL-Zahl	10, 20, 50, 100, 500
entropy-fix	0.05, 0.1, 0.2
Machzahl	0.5, 0.7, 0.9
Anstellwinkel in °	2, 4, 6

**Tabelle 4.3.:** Variierte Parameter für die Robustheitsuntersuchung am NACA0012

Abbildung 4.11 dargestellt. Gleich eingefärbte Säulen stellen die Fälle mit einer identischen Rekonstruktion auf den groben Gittern dar, während die drei Säulen innerhalb einer Farbgebung für die drei unterschiedlichen Prolongationen stehen (konstant, limitiert linear, linear). Vergleicht man die Anzahl konvergierter Rechnungen zwischen den



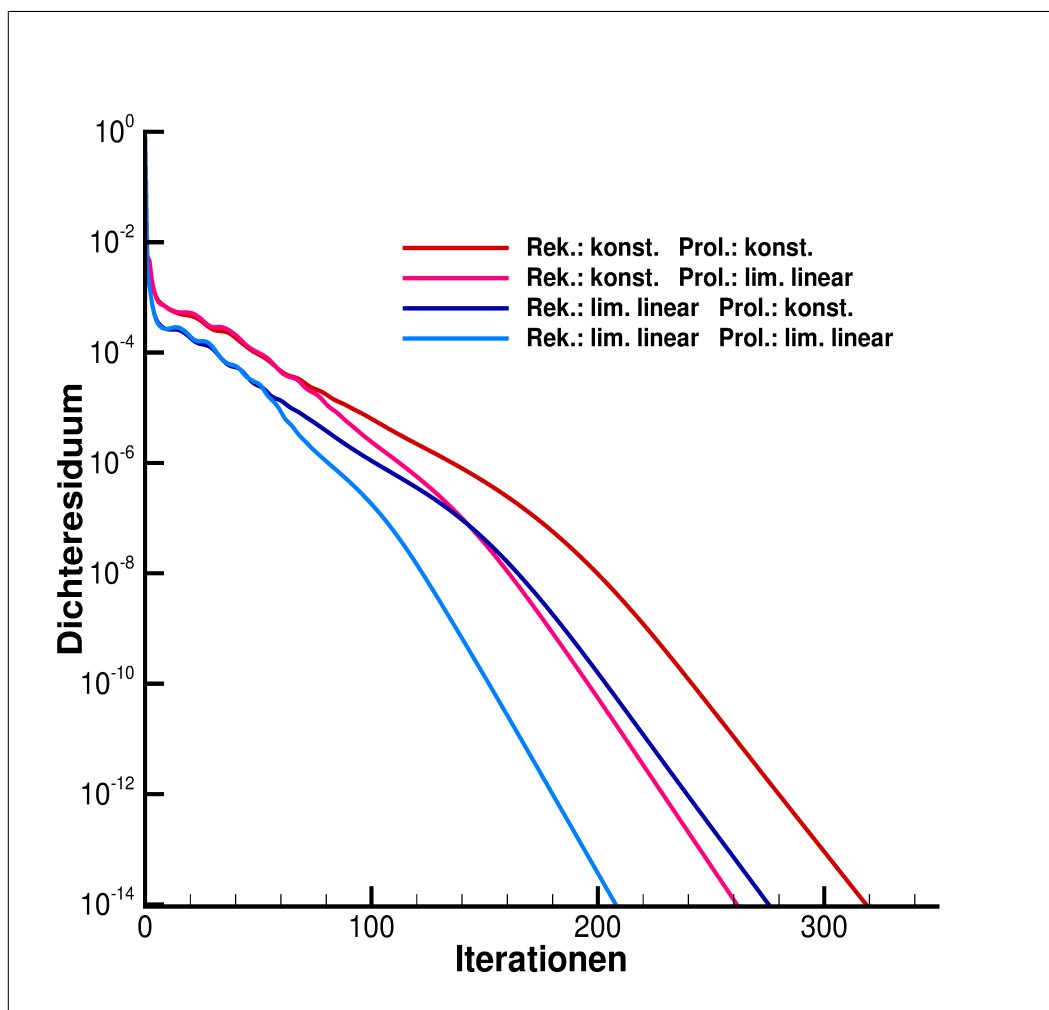
**Abbildung 4.11.:** Robustheitsuntersuchung für das NACA0012

verschiedenen Grobgitterdiskretisierungen lässt sich erkennen, dass für den Fall einer konstanten Rekonstruktion auf den groben Gittern die meisten Rechnungen konvergieren und die so definierte Robustheit damit für diesen Fall am höchsten ist. Die lineare und limitiert lineare Rekonstruktion zeigen keine signifikanten Unterschiede in der Robustheit. Werden die unterschiedlichen Prolongationen betrachtet, zeigt sich unabhängig von der Grobgitterdiskretisierung der Trend einer leicht erhöhten Robustheit durch eine höhere Prolongationsordnung. Dieser Trend ist nicht nur in der Summe über alle Netzlevel zu

erkennen, sondern auch für nahezu jedes Netzlevel einzeln. Die höhere Robustheit einer Grobgitterdiskretisierung 1. Ordnung kann durch die höhere numerische Dissipation von Diskretisierungsschemata 1. Ordnung gegenüber Schemata 2. Ordnung erklärt werden [8]. Da die Konvergenz der Grobgitterdiskretisierung entscheidend ist für ein konvergentes Mehrgitterverfahren [15], wird in der Praxis in unstrukturierten Lösern zumeist ein stabileres Verfahren 1. Ordnung auf den Grobgittern umgesetzt [22],[20]. Für den untersuchten Fall auf Basis der Euler-Gleichungen ergibt sich durch die konstante Rekonstruktion also eine erhöhte Robustheit, die gleichzeitig relativ geringe Beschleunigungseinbußen durch eine inkonsistente Grobgitterdiskretisierung erfährt (vgl. vorherigen Abschnitt). Für den untersuchten Fall resultiert somit kein entscheidender Vorteil aus der Nutzung einer erhöhten Ordnung auf den Grobgittern. Die Erhöhung der Prolongationsordnung scheint hingegen nicht nur die Robustheit leicht zu steigern, sondern ebenfalls die Beschleunigung durch Reduktion von Rechenzeit und Iterationszahl.

### 4.1.3. NASA-CRM: Reibungsbehaftete, dreidimensionale Strömung

Der NASA-CRM-Testfall erlaubt es, die in den vorherigen Abschnitten vorgestellten Ergebnisse auf ihre Übertragbarkeit ins Dreidimensionale zu überprüfen. Zu diesem Zweck wurden für zwei Netze die vier Kombinationen aus konstanter und limitiert linearer Prolongation/Rekonstruktion auf Grobgittern miteinander verglichen. Für das größere der zwei Netze sind in Abbildung 4.12 die Verläufe der Dichteresiduen aufgetragen. Für den



**Abbildung 4.12.:** Verlauf des Dichteresiduums für Berechnungen des NSA-CRM (Netzlevel 1)

Fall einer konstanten Rekonstruktion auf den groben Gittern ist ein deutlicher Unterschied zwischen den Dichteresiduen von konstanter und limitiert linearer Prolongation zu erkennen. Dieser Unterschied entwickelt sich etwa nach einer Absenkung des Residuums um fünf Größenordnungen bis zum Erreichen des Konvergenzkriteriums. Durch die erhöhte Prolongationsordnung ergibt sich eine Reduktion der benötigten Iterationen um etwa 18 %. Neben der Reduktion der Iterationszahl, verringert sich auch die Laufzeit um etwa 14 %. Die Laufzeit für alle vier Fälle ist in Tabelle 4.4 zu finden. Auch die Kombination aus limitiert linearer Rekonstruktion und einer erhöhten Prolongationsordnung führt zu einer beschleunigten Konvergenz, die sich ebenfalls in einem stärkeren Abfall des Dichteresiduums bemerkbar macht. Die Anzahl der Iterationen wird durch die höhere Ordnung der Prolongation um fast 25 % verringert und die Rechenzeit um mehr als 22 % (siehe Tabelle 4.4). Die Verbesserung der Konvergenz aufgrund einer höheren

Ordnung der Grobgitterdiskretisierung kann durch den Vergleich der Dichteresiduen mit identischer Prolongation gezeigt werden. Mit einer konstanten Prolongation führt eine limitiert lineare Rekonstruktion verglichen mit einer konstanten Rekonstruktion zu einer Verringerung der Iterationen um 13 % und einer Reduktion der Rechenzeit um etwa 3 %. Für den Fall der limitiert linearen Prolongation ergeben sich deutlichere Reduktion mit einer Verringerung der Iterationen um etwa 21 % und der Rechenzeit um 12 %. Tabelle 4.4 stellt alle absoluten Werte für das erste untersuchte Netze dar. Die Werte für das

<b>Rekonstruktionsordnung</b>	1	1	2*	2*
<b>Prolongationsordnung</b>	1	2*	1	2*
<b>Anzahl Iterationen</b>	319	262	276	208
<b>wall clock time in s</b>	6820	5869	6629	5150

**Tabelle 4.4.:** Iterationen und wall clock time für Berechnungen des NASA-CRM mit Netzlevel 1

zweite Netz sind in Tabelle 4.5 aufgeführt. Für das Netzlevel 2 ergab sich ebenfalls eine

<b>Rekonstruktionsordnung</b>	1	1	2*	2*
<b>Prolongationsordnung</b>	1	2*	1	2*
<b>Anzahl Iterationen</b>	-	-	282	218
<b>wall clock time in s</b>	-	-	25717	21894

**Tabelle 4.5.:** Iterationen und wall clock time für Berechnungen des NASA-CRM mit Netzlevel 2

Beschleunigung durch eine höhere Prolongationsordnung. Mit den genutzten Simulationseinstellungen konnte im Fall der konstanten Rekonstruktion auf den groben Gittern das Konvergenzkriterium nicht erreicht werden, was ein Indiz für einen robustheitssteigernden Effekt durch eine konsistente Grobgitterdiskretisierung sein könnte. Hinsichtlich der Beschleunigung zeigen sich im dreidimensionalen für den untersuchten Fall die gleichen Trends wie für das RAE2822 im zweidimensionalen Fall. So verringert eine limitiert lineare Rekonstruktion sowohl die benötigten Iterationen als auch die Rechenzeit. Die Reduktion fällt allerdings geringer aus als beim RAE2822. Mögliche Erklärungen für den Beschleunigungseffekt sind die höhere Genauigkeit der Grobgitterkorrekturen sowie die Konsistenz zwischen der Diskretisierung auf Fein- und Grobgitter. Über den Effekt der Ordnung der Grobgitterdiskretisierung hinaus, zeigte auch die Erhöhung der Prolongationsordnung den Beschleunigungseffekt aus dem zweidimensionalen Testfall. Die Reduktionen in Iterationen und Laufzeit lagen sogar etwas höher als beim RAE2822. Zudem ergab sich der gleiche Trend, dass der Effekt der (limitiert) linearen Prolongation deutlich hervortritt, wenn eine genauere Grobgitterdiskretisierung verwendet wird.



## 4.2. Einfluss der positivitätserhaltenden Grobgitterkorrektur

Die Positivitätserhaltung wurde anhand der vorgestellten 2D-Testfälle auf ihren Einfluss auf das Lösungsverhalten untersucht. Für keinen der untersuchten Testfälle konnte ein signifikanter Einfluss auf das Lösungsverhalten beobachtet werden. Beispielhaft sei an dieser Stelle der Einfluss der positivitätserhaltenden Grobgitterkorrektur für das feinste unstrukturierte Netz des RAE2822 gezeigt. In Abbildung 4.13 ist der Verlauf der Dichteresiduen für verschiedene Varianten von Grobgitterdiskretisierung und Prolongation jeweils mit und ohne positivitätserhaltender Grobgitterkorrektur dargestellt. Es ist zu erkennen,

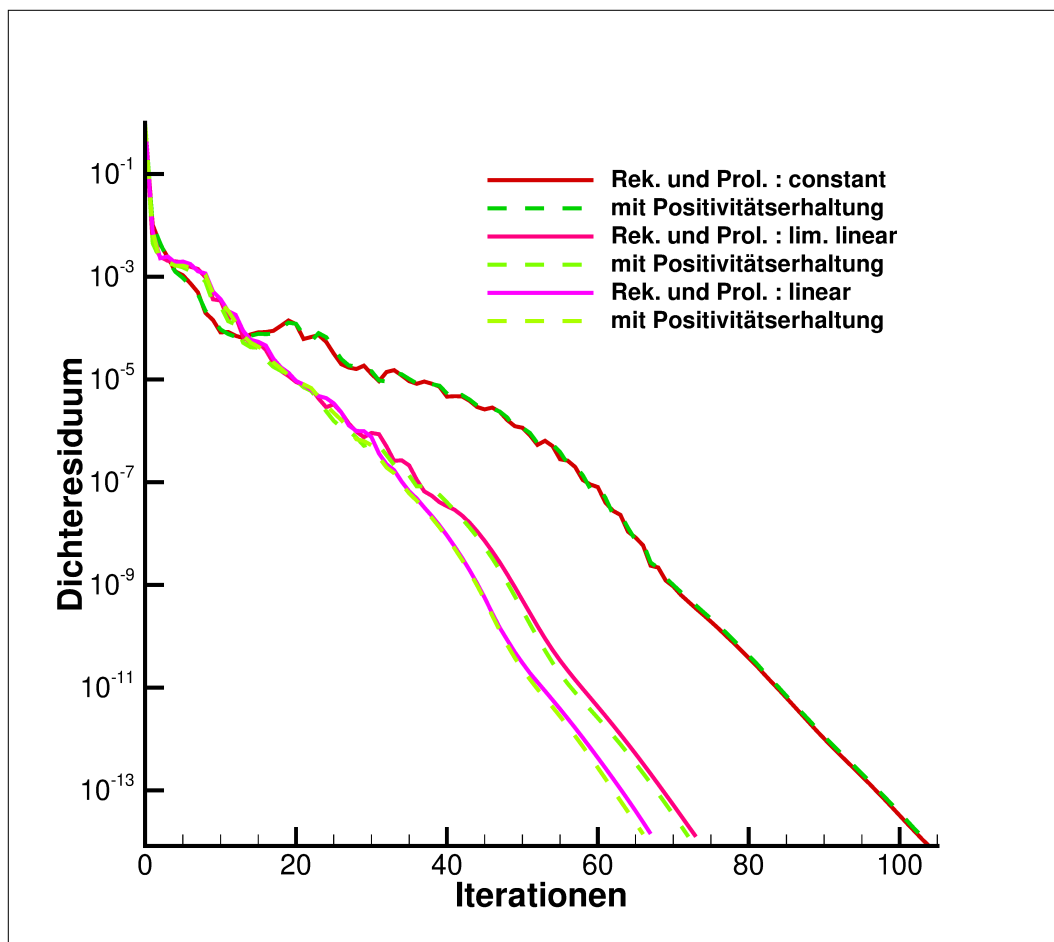
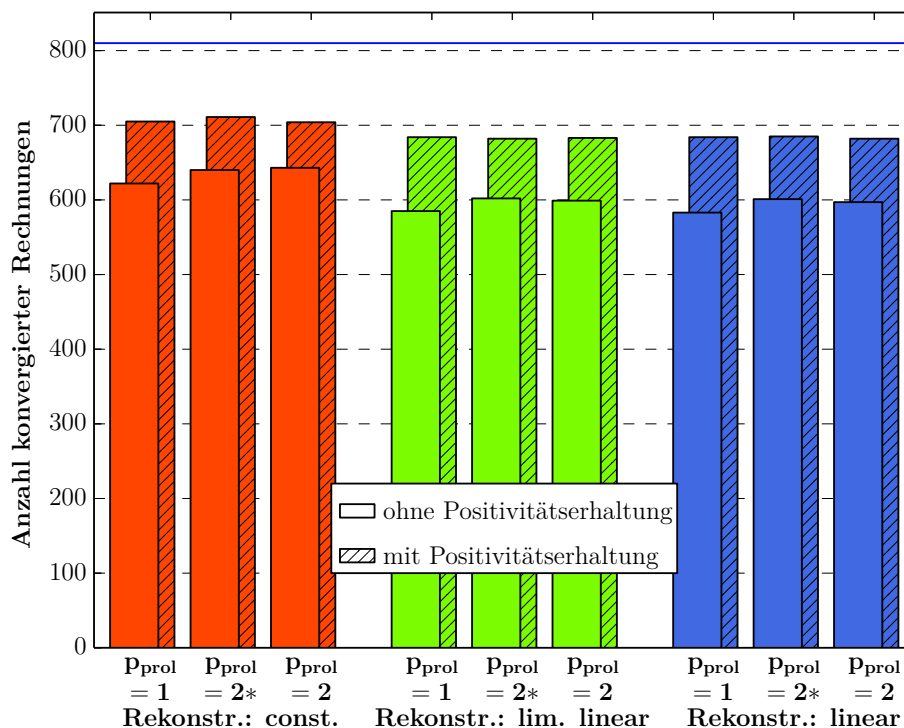


Abbildung 4.13.: Verläufe des Dichteresiduums mit und ohne positivitätserhaltende Grobgitterkorrekturen

dass die Positivitätserhaltung der Grobgitterkorrekturen den Residuumsverlauf kaum beeinflusst. Zwar ist in diesem Fall eine geringe Verbesserung der Konvergenz zu erkennen, allerdings kann dieser Trend nicht verallgemeinert werden. Denn gleichzeitig führte die Positivitätserhaltung auf anderen Netzen zu einer geringen Verschlechterung der Konvergenzrate. Auch der untersuchte Testfall mit dem NACA0012-Profil zeigte keinen eindeutigen Trend hinsichtlich einer Beeinflussung der Konvergenzrate bzw. Iterationszahl. Aufgrund der Dämpfungsfunktion der genutzten Filterfunktion wäre theoretisch eine verschlechterte Konvergenzrate zu erwarten, welche durch eine positive Beeinflussung aufgrund der Erhaltung der Positivität kompensiert werden müsste. Die Rechenzeiten zeigten ebenfalls geringe Veränderungen aufgrund der Positivitätserhaltung, die eher durch

die veränderte Anzahl Iterationen beeinflusst wurden als durch den zusätzlichen Aufwand für die Auswertung der Filterfunktion. In den untersuchten Fällen traten nur geringe negative Grobgitterkorrekturen auf, sodass der Korrekturfaktor mit Werten nahe 1, die Korrektur der Feingittergrößen wenig beeinflusste. Aufgrund des geringen Einwirkens der Filterfunktion im Lösungsprozess konnte auch kein signifikanter robustheitssteigernder Einfluss für die untersuchten Testfälle beobachtet werden. Dennoch ist positiv zu bewerten, dass die eingesetzte Positivitätserhaltung in den Fällen, in denen ein Einwirken nicht benötigt wird, das Lösungsverhalten insgesamt nur gering beeinflusst. Aus Erfahrungsberichten zur positivitätserhaltenden Grobgitterkorrektur in einem strukturierten Löser wurde dem Autor bestätigt, dass dieses Verhalten zumindest für das RAE2822 ebenfalls beobachtet wurde und der Einfluss der Positivitätserhaltung durch den Testfall bestimmt wird. Dieser Zusammenhang konnte durch einen Vergleich mit der in Kapitel 4.1.2 durchgeführten Parametervariation zur Untersuchung der Robustheit am NACA0012-Testfall bestätigt werden. Neben Parametern für die Diskretisierung wurden auch die physikalischen Randbedingungen, abweichend vom definierten Testfall, variiert. Insbesondere auf den feinsten Netzen und Kombinationen aus hoher Machzahl ( $Ma = 0.9$ ) und höherem Anstellwinkel ( $\alpha = 4^\circ, 6^\circ$ ) konvergierten durch die Positivitätserhaltung Fälle, die ohne die Positivitätserhaltung nicht konvergiert waren. In Abbildung 4.14 sind die Ergebnisse der bereits in Kapitel 4.1.2 dargestellten Robustheitsuntersuchung mit den Ergebnissen zusammen mit der Positivitätserhaltung abgebildet. Es ist zu erkennen, dass mit der



**Abbildung 4.14.:** Anzahl konvergierter Rechnungen mit und ohne positivitätserhaltender Grobgitterkorrektur

Positivitätserhaltung von den jeweils 810 Rechnungen etwa 60 bis 100 Rechnungen zusätzlich konvergieren. Die robustheitssteigernde Wirkung ist für alle Kombinationen aus konstanter, limitiert linearer und unlimitiert linearer Rekonstruktion/Prolongation auszumachen. Dennoch zeigt sich, dass die Positivitätserhaltung die Robustheit tendenziell stärker erhöht für die Fälle einer limitierten und unlimitierten linearen Rekonstruktion auf den groben Gittern. Darüber hinaus scheint die positivitätserhaltende Grobgitterkorrek-

den Einfluss durch eine erhöhte Prolongationsordnung zu verringern. Diese Ergebnisse verdeutlichen, dass es Anwendungsfälle gibt, für die negative Korrekturen vom Grobgitter entscheidender Einflussfaktor für die Stabilität des Mehrgitterverfahrens sind und sich eine Dämpfung mittels Positivitätserhaltung stabilisierend auswirkt. Aufgrund der hohen Anzahl Rechnungen, die für diese Untersuchungen benötigt wurden, wurde sich für die Arbeit auf den reibungslosen Testfall beschränkt. Da die Positivitätserhaltung aber gerade in den Fällen mit komplexeren Strömungsphänomenen und stärkeren Gradienten einen entscheidenden Einfluss hat, ist von einem ähnlichen Verhalten für reibungsbehaftete, turbulente Strömungen auszugehen. Vor allem bei der Lösung der RANS-Gleichungen mittels Zweigleichungsturbulenzmodell könnte eine zusätzliche Positivitätserhaltung der turbulenten Größen den Einfluss weiter steigern [10].

# Kapitel 5.

## Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Studienarbeit wurde innerhalb des unstrukturierten Strömungslösers CODA der Einfluss der Ordnung von Prolongation und Grobgitterdiskretisierung auf die Beschleunigung und Robustheit im nichtlinearen Mehrgitterverfahren untersucht. Für diese Aufgabe wurden Implementierungen im nichtlinearen Mehrgitter von CODA umgesetzt, die es ermöglichen den Prolongationsoperator unabhängig von der gewählten Grobgitterdiskretisierung zu initialisieren. Das Bewertungskriterium der Beschleunigung wurde mittels Konvergenzrate/Iterationszahl und der Rechenzeit quantifiziert. Da für die Bewertung von Robustheit bisher keine etablierte Methode bekannt ist, wurde ein eigenes Kriterium definiert, welches auf der relativen Anzahl konvergierter Berechnungen basiert. Als Testfälle für die Untersuchung diente eine reibungsfreie Strömung um das NACA0012, eine reibungsbehaftete, transsonische Strömung um das RAE2822 sowie eine reibungsbehaftete, dreidimensionale Strömung um das NASA-CRM. Alle Ergebnisse sind vor dem Hintergrund eines in der Entwicklung befindlichen Strömungslösers zu betrachten. Zukünftige Optimierungen im nichtlinearen Mehrgitter von CODA werden die vorgestellten Effekte weiter beeinflussen. Beispielsweise könnte eine optimierte Geometrieerhaltung in der Agglomeration, die Anzahl der Randfacetten im 2D reduzieren und damit die Rechenzeit für die untersuchten 2D-Testfälle zusätzlich verringern. Die Untersuchungen zeigen für den Einfluss der Prolongationsordnung einen einheitlichen Trend über die drei Testfälle. Eine genauere Prolongation führt zu einer Verringerung der Rechenzeit und einer Verbesserung der Konvergenzrate. Es konnte beobachtet werden, dass die Reduktion in der Iterationszahl in den meisten Fällen über der Reduktion der Rechenzeit lag. Die Verbesserungen in der Rechenzeit traten deutlicher hervor, wenn die Grobgitterdiskretisierung von 2. Ordnung genau ist und damit konsistent mit der Feingitterdiskretisierung. Diese Erkenntnisse konnte mittels des NASA-CRM Testfalls auch auf einen dreidimensionalen Fall übertragen werden. Die Beschleunigungseffekte lagen tendenziell über denen der 2D-Testfälle. Der Einfluss der Genauigkeit der Prolongation auf die Robustheit war für die strukturierten Netze vom NACA0012 und RAE2822 eher gering. Für diese Netze zeigte sich tendenziell eine Steigerung der Robustheit bei höherer Genauigkeit der Prolongation, während auf den unstrukturierten Netzen der Einfluss abhängig von der Genauigkeit der Grobgitterdiskretisierung war. Insgesamt kann damit eine höhere Prolongationsordnung den Lösungsprozess beschleunigen ohne größere Einbußen in der Robustheit zu verursachen. Diese Erkenntnisse zeigen, dass die bisher in unstrukturierten Lösern verwendete Injektion das Beschleunigungspotential des Mehrgitters nicht vollständig ausschöpft. Die Implementierung einer linearen Prolongation mittels Rekonstruktion entsprechend der linearen Interpolation in strukturierten Mehrgitterverfahren scheint daher empfehlenswert. Der Einfluss der Ordnung der Grobgitterdiskretisierung auf Beschleunigung und Robustheit wurde durch den Vergleich einer Grobgitterdiskretisierung 1. Ordnung mit einer Diskretisierung 2. Ordnung ermittelt. Für das feinste Gitter wurde jeweils eine Diskretisierung 2. Ordnung verwendet. Für die Testfälle mit einer reibungsbehafteten, turbulenten Strömung (RAE2822, NASA-CRM) zeigt sich ein deutliches Beschleunigungspotential durch eine zur Feingitterdiskretisierung konsistenten Grobgitterdiskretisierung. Die Grobgitterdiskretisierung mit linearer Rekonstruktion resultiert in einer verringerten Konvergenzrate und reduzierten Rechenzeit. Der reibungsfreie NACA0012 Testfall ergab eine geringere

Konvergenzbeschleunigung und tendenziell eine Erhöhung der Rechenzeit durch die genauere Grobgitterdiskretisierung. Die Robustheit sank für die untersuchten 2D-Testfälle durch die Änderung der Grobgitterdiskretisierung. Die Diskretisierung mit einer Genauigkeitsordnung von 1 zeigte die höchste Robustheit. Insbesondere eine Grobgitterdiskretisierung mit einer unlimitiert linearen Rekonstruktion ergab eine deutlich verringerte Robustheit. Die möglichen Beschleunigungsvorteile einer genaueren Grobgitterdiskretisierung müssten also durch Robustheitseinbußen erkaufte werden.

Weitere Untersuchungsergebnisse wurden für eine positivitätserhaltende Grobgitterkorrektur erzielt. Basierend auf bestehenden Implementierungen wurden mit Hilfe einer Filterfunktion negative Grobgitterkorrekturen der Größen Druck, Dichte und Energie korrigiert, umso das Auftreten unphysikalischer Werte zu verhindern. Für die drei untersuchten Testfälle zeigte die Positivitätserhaltung einen geringen Einfluss auf das Konvergenzverhalten. Auch für unterschiedlich genaue Prolongationen und Grobgitterdiskretisierungen war der Einfluss gering und ohne erkennbaren Trend. Es konnte allerdings gezeigt werden, dass es Testfälle gibt, in denen die Positivitätserhaltung den Lösungsprozess stabilisiert und so die Robustheit erhöht. So kann eine Robustheitssteigerung für die Fälle erreicht werden, in denen negative Grobgitterkorrekturen die Stabilität beeinträchtigen, ohne dass die Konvergenz verringert wird in den Fällen, in denen die Positivitätserhaltung nicht benötigt wird. Weitere Untersuchungen erscheinen sinnvoll, etwa um den stabilisierenden Effekt der Positivitätserhaltung auch für Fälle im dreidimensionalen und mit turbulenter Strömung zu überprüfen. Darüber hinaus ist auf Grundlage von Erfahrungen mit Zweigleichungsmodellen in der Literatur eine zusätzliche Positivitätserhaltung der turbulenten Erhaltungsgrößen in Betracht zu ziehen. Neben der untersuchten Variante der Positivitätserhaltung, ist ebenso das in Kapitel 2.3.5 beschriebene Vorgehen mittels Logarithmierung ein vielversprechender Ansatz, welcher allerdings Änderungen an den Randbedingungen in CODA voraussetzte und aus zeitlichen Gründen nicht umgesetzt werden konnte. Bezüglich einer genaueren Prolongation und Rekonstruktion sollten zukünftige Untersuchungen an dreidimensionalen Testfällen erfolgen, um die vorgestellten Einflüsse auf Beschleunigung und Robustheit an praxisnahen Beispielen zu überprüfen. Das in der Arbeit verwendete Maß für die Robustheit wird als verbesserungswürdig angesehen, da die daraus resultierenden Ergebnisse eine Vielzahl von Einflussparametern in einem einzigen Maß (Anzahl konvergierter Ergebnisse) zusammenfassen. So kann zum Beispiel nur schwer überprüft werden, ob die Robustheit einer bestimmten Variante etwa besonders sensitiv auf einen der variierten Parameter reagiert, welcher damit überproportional die Anzahl der konvergierten Ergebnisse beeinflusst. Ob solche Einflüsse sich bei einer hohen Anzahl variierten Parameter gegenseitig aufheben ist nicht klar. Für allgemeinere Aussagen zur Robustheit bedarf es daher eines verbesserten Maßes für die Quantifizierung der Robustheit. Dennoch konnten die durchgeführten Untersuchungen theoretische Erwartungen nicht nur bezüglich der Robustheit bestätigen, sondern auch Erwartungen an höhere Genauigkeiten beim Grobgittertransfer und der Grobgitterdiskretisierung innerhalb des nichtlinearen Mehrgitters. Die Ergebnisse dieser Arbeit können somit als Entscheidungshilfe für zukünftige Optimierungen und weitere Untersuchungen im nichtlinearen Mehrgitter von CODA genutzt werden.

# Literatur

- [1] Allmaras, S. R. und Johnson, Forrester T. Spalart, Philippe R.: „Modifications and Clarifications for the Implementation of the Spalart-Allmaras Turbulence Model“. In: *ICCFD7-1902* (2012).
- [2] Barche, J.: *Experimental data base for computer program assessment: Report of the Fluid Dynamics Panel Working Group 04*. Neuilly-sur-Seine, 1979.
- [3] Blazek, J.: *Computational Fluid Dynamics*. 3rd ed. Burlington: Elsevier Science, 2015. ISBN: 978-0-08-099995-1.
- [4] Ferziger, J. H. und Peric, M.: *Computational methods for fluid dynamics*. Fourth, rev. edition. Berlin, Heidelberg und New York: Springer, 2019. ISBN: 978-3-319-99691-2.
- [5] Hackbusch, W.: *Multi-grid methods and applications: With 48 tables*. Bd. 4. Springer series in computational mathematics. Berlin: Springer, 1985. ISBN: 3-540-12761-5.
- [6] Hackbusch, W. und Trottenberg, U., Hrsg.: *Multigrid methods: Proceedings of the conference held at Köln-Porz, November 23 - 27, 1981*. Bd. 960. Lecture notes in mathematics. Berlin: Springer, 1982. ISBN: 3-540-11955-8.
- [7] Haselbacher, A. C.: „A grid-transparent numerical method for compressible viscous flows on mixed unstructured grids“. Diss. Loughborough: Loughborough University, 1999.
- [8] Hirsch, C.: *Numerical computation of internal and external flows: Fundamentals of computational fluid dynamics*. 2nd ed. Oxford und Burlington, MA: Elsevier/Butterworth-Heinemann, 2007. ISBN: 0750665947.
- [9] Huismann, I., Fechter, S. und Leicht, T.: „HyperCODA – Extension of Flow Solver CODA Towards Hypersonic Flows“. In: *New Results in Numerical and Experimental Fluid Mechanics XIII*. Hrsg. von Dillmann, A., Heller, G., Krämer, E. u. a. Bd. 151. Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design. Cham: Springer International Publishing, 2021, S. 99–109. ISBN: 978-3-030-79560-3.
- [10] Ilinca, F. und Pelletier, D.: „Positivity Preservation and Adaptive Solution for the k-epsilon Model of Turbulence“. In: *AIAA Journal*( 36) (1998). ISSN: 0001-1452.
- [11] Langer, S.: „Agglomeration multigrid methods with implicit Runge-Kutta smoothers applied to aerodynamic simulations on unstructured grids“. In: *Journal of Computational Physics* 277 (2014), S. 72–100. ISSN: 00219991. DOI: 10.1016/j.jcp.2014.07.050. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999114005439>.
- [12] Langer, S.: „Preconditioned Newton methods to approximate solutions of the Reynolds averaged Navier-Stokes equations“. Habilitationsschrift. Kassel: Universität Kassel, 2018.
- [13] Langer, S., Schwöppe, A. und Kroll, N.: „Investigation and Comparison of Implicit Smoothers Applied in Agglomeration Multigrid“. In: *AIAA Journal* 53(8) (2015), S. 2080–2096. ISSN: 0001-1452. DOI: 10.2514/1.J053367.
- [14] Leicht, T., Vollmer, D., Jägersküpper, J. u. a.: „DLR-PROJECT DIGITAL-X: Next Generation CFD Solver ‘FLUCS’“. In: *Deutscher Luft- und Raumfahrtkongress 2016*.

- 
- [15] Mavriplis, D. J.: *Multigrid techniques for unstructured meshes: ICASE Report No. 95-27*. Hrsg. von National Aeronautics and Space Administration. Hampton, VA, 1995.
- [16] Mavriplis, D. J.: *Revisiting the Least-squares Procedure for Gradient Reconstruction on Unstructured Meshes*. Hrsg. von Langley Research Center. Hampton, VA, 2003.
- [17] Mavriplis, D. J. und Mani, K.: „Unstructured Mesh Solution Techniques using the NSU3D Solver“. In: *52nd Aerospace Sciences Meeting 2014*. DOI: 10.2514/6.2014-0081.
- [18] Meister, A.: *Numerik linearer Gleichungssysteme: Eine Einführung in moderne Verfahren*. 5., überarb. Aufl. Wiesbaden: Springer Spektrum, 2015. ISBN: 978-3-658-07199-8. DOI: 10.1007/978-3-658-07200-1.
- [19] Nishikawa, H., Diskin, B. und Thomas, J.: „Development and Application of Agglomerated Multigrid Methods for Complex Geometries“. In: *40th Fluid Dynamics Conference 2010*. DOI: 10.2514/6.2010-4731.
- [20] Nishikawa, H., Diskin, B., Thomas, J. u. a.: „Recent Advances in Agglomerated Multigrid“. In: *51st AIAA Aerospace Sciences Meeting*. DOI: 10.2514/6.2013-863.
- [21] Nishikawa, H., Diskin, B. und Thomas, J. L.: „Critical Study of Agglomerated Multigrid Methods for Diffusion“. In: *AIAA Journal* 48(4) (2010), S. 839–847. ISSN: 0001-1452. DOI: 10.2514/1.J050055.
- [22] Pandya, M. und Frink, N.: „Agglomeration Multigrid for an Unstructured-Grid Flow Solver“. In: *42nd AIAA Aerospace Sciences Meeting 2004*.
- [23] Quarteroni, A., Sacco, R., Saleri, F. u. a.: *Numerische Mathematik*. Springer-Lehrbuch. Berlin: Springer, 2002. ISBN: 978-3-540-43616-4.
- [24] Reimer, L., Heinrich, R., Ritter, M. u. a.: „Virtual Aircraft Technology Integration Platform: Ingredients for Multidisciplinary Simulation and Virtual Flight Testing“. In: *AIAA Scitech 2021 Forum*. DOI: 10.2514/6.2021-1202.
- [25] Rivers, M.: *NASA Common Research Model*. 25.01.2018. URL: <https://common-researchmodel.larc.nasa.gov/home-2/high-speed-crm/>.
- [26] Schlichting, H. und Gersten, K.: *Grenzschicht-Theorie*. 10., überarbeitete Auflage. Berlin und Heidelberg: Springer, 2006. ISBN: 3-540-23004-1.
- [27] Venkatakrisnan, V.: „On the accuracy of limiters and convergence to steady state solutions“. In: *31st Aerospace Sciences Meeting 1993*.
- [28] Wasserman, M., Mor-Yossef, Y. und Greenberg, J. B.: „A positivity-preserving, implicit defect-correction multigrid method for turbulent combustion“. In: *Journal of Computational Physics*( 316) (2016), S. 303–337. ISSN: 00219991.
- [29] Wesseling, P.: *Introduction to multigrid methods: ICASE Report No. 95-11*. Hrsg. von National Aeronautics and Space Administration. Hampton, VA, 1995.

# Anhang



# Anhang A.

## Zusätzliche Ergebnisdarstellungen

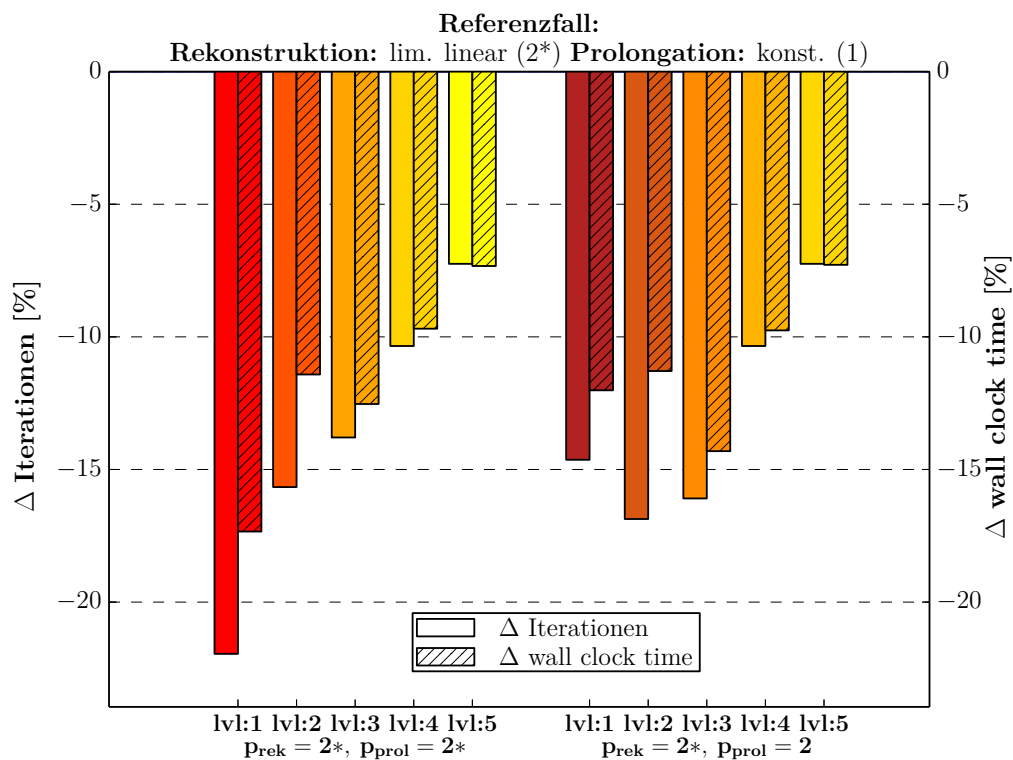
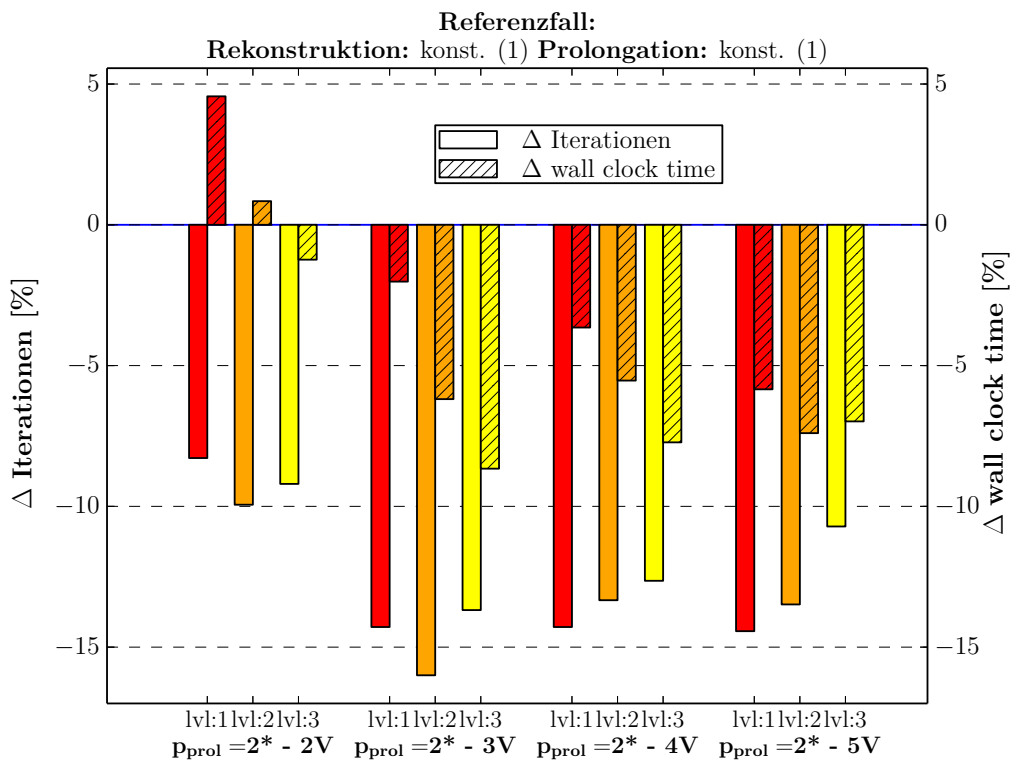
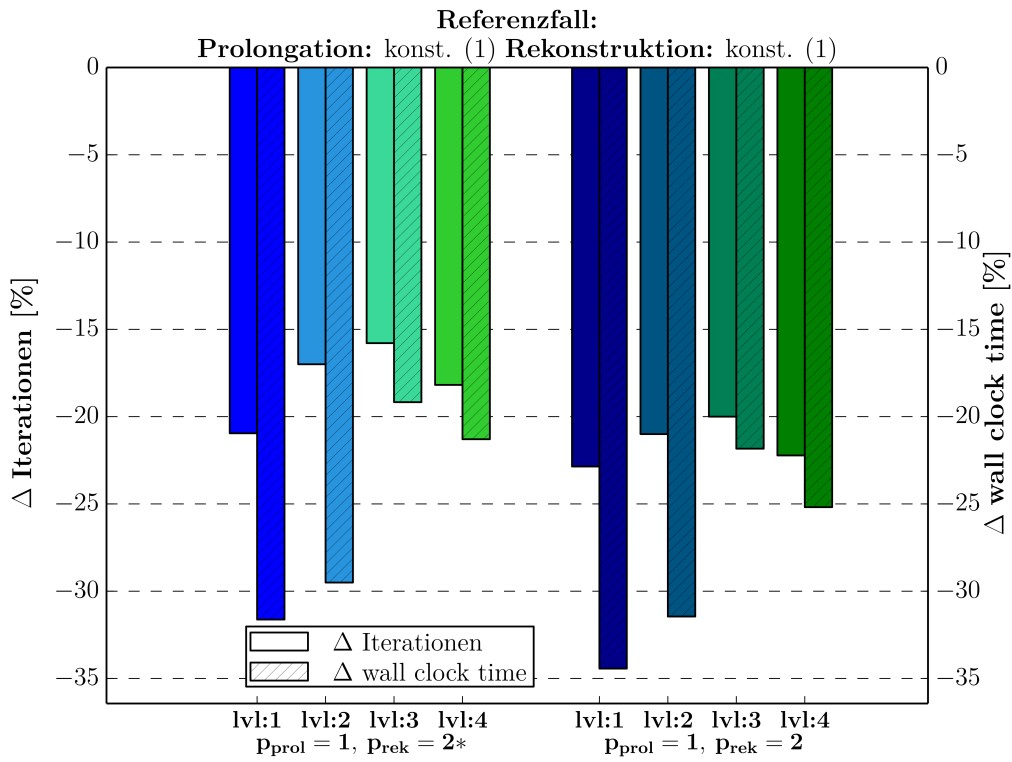


Abbildung A.1.: RAE2822, strukturierte Netze: Einfluss einer erhöhten Prolongationsordnung auf die Beschleunigung (lim. lineare Rekonstruktion auf groben Gittern)



**Abbildung A.2.:** RAE2822, unstrukturierte Netze: Einfluss des Mehrgitterzyklus auf die Beschleunigung durch eine erhöhte Prolongationsordnung (konstante Rekonstruktion auf groben Gittern)



**Abbildung A.3.:** RAE2822, unstrukturierte Netze: Einfluss einer höheren Ordnung der Grobgitterdiskretisierung auf die Beschleunigung (konstante Prolongation)

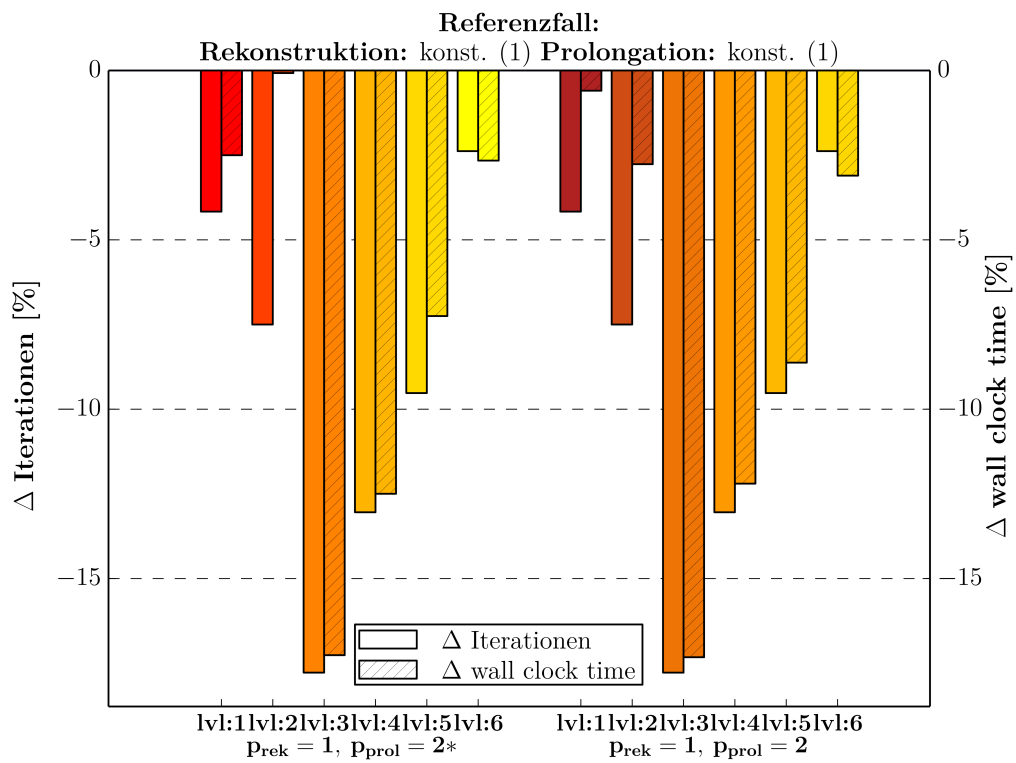


Abbildung A.4.: NACA0012: Einfluss einer erhöhten Prolongationsordnung auf die Beschleunigung (konstante Rekonstruktion auf groben Gittern)

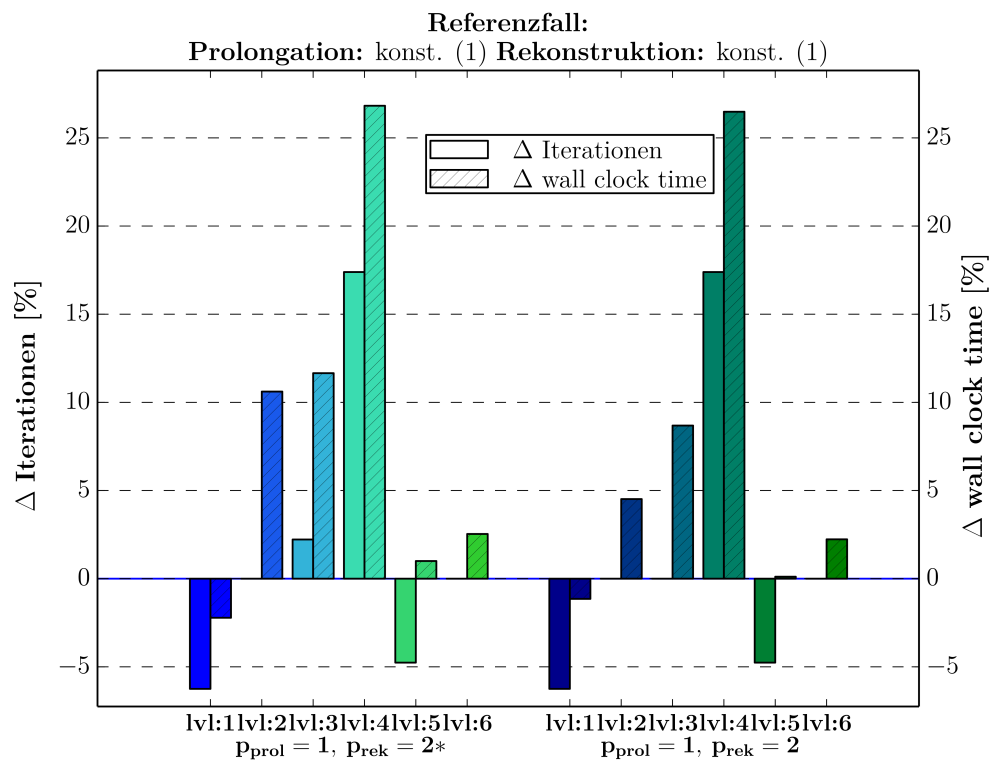


Abbildung A.5.: NACA0012: Beschleunigung durch höhere Ordnung der Grobgitterdiskretisierung (konstante Prolongation)

# Anhang B.

## Simulationseinstellungen

RAE2822

Räumliche Diskretisierung:

- preprocessing
  - agglomeration
    - \* spatial dimension: 2
    - \* enable semi-coarsening: True
- reference state
  - Mach: 0.734
  - flow direction specification
    - \* angle of attack: 2.79
  - viscosity specification
    - \* type: Reynolds based
    - \* Reynolds: 6.5E6
    - \* Reynolds\_Length: 1.0
  - turbulence specification
    - \* type: SA viscosity ratio
    - \* viscosity ratio: 4.0
- boundary treatments
  - treatment type: BCWallViscousAdiabatic
  - boundary markers: wallBoundaryMarkers
  - treatment type: BCSymmetryPlane
  - boundary markers: SymmetryPlaneBoundaryMarkers
  - treatment type: BCFarfield
  - boundary markers: FarfieldBoundaryMarkers
- reconstruction
  - type: limited linear
  - Jacobian: simplified everywhere
  - face gradient augmentation for the Jacobian matrix: edge
  - gradient computation
    - \* type: least-squares

- \* enable cell-to-face variant: True
- \* weighting exponent: 1.0
- gradient limiter
  - \* type: spline quintic
  - \* K: 5.0
- face gradient augmentation: edge
- convection scheme
  - Roe upwinding
    - \* entropy-fix fraction: 0.1 (Grobitter: 0.2)

### Zeitliche Diskretisierung:

- time integration method: linearized implizit Euler
- state backup controler
  - type: none
- time step
  - type: local
  - CFL
    - \* type: SER Ramp
    - \* initial CFL number: 2
    - \* SER exponent: 0.4
    - \* maximum CFL number factor: 5000
  - nonlinear damping
    - \* global damping: 0.8
    - \* local damping: positivity preserving
  - linear solver

### Linearer Löser:

- solver stack
  1. GMRES-Verfahren
    - type: rGMRES
    - requested tolerance: 0.1
    - maximum iterations: 200
    - Krylov subspace size: 200
    - Jacobian
      - \* type: matrix
  2. Jacobi-Verfahren
    - requested tolerance: 0
    - maximum iterations: 10 (Grobitter: 50)
    - relaxation: 0.8
  3. LU-Zerlegung

- type: element-local LU

### Mehrgitter:

- time integration method: nonlinear multigrid
- no. of coarse grids: 2
- initial state computation
  - type: grid sequenced
  - number of sequencing coarse grids: 2
  - reduction threshold: 0.01
  - maximum iterations: 100

### NACA0012

#### Räumliche Diskretisierung:

- preprocessing
  - agglomeration
    - \* spatial dimension: 2
    - \* enable semi-coarsening: False
- reference state
  - Mach: 0.5
  - flow direction specification
    - \* angle of attack: 2.0
- boundary treatments
  - treatment type: BCWallInviscid
  - boundary markers: WallBoundaryMarkers
  - treatment type: BCSymmetryPlane
  - boundary markers: SymmetryPlaneBoundaryMarkers
  - treatment type: BCFarfield
  - boundary markers: FarfieldBoundaryMarkers
- reconstruction
  - type: limited linear
  - Jacobian: simplified everywhere
  - gradient computation
    - \* type: least-squares
    - \* enable cell-to-face variant: True
    - \* weighting exponent: 1.0
  - gradient limiter
    - \* type: NoOp
  - face gradient augmentation: edge



- convection scheme
  - Roe upwinding
    - \* entropy-fix fraction: 0.1

### Zeitliche Diskretisierung:

- time integration method: linearized implizit Euler
- state backup controler
  - type: none
- time step
  - type: local
  - CFL
    - \* type: SER Ramp
    - \* initial CFL number: 10
    - \* SER exponent: 0.4
    - \* maximum CFL number factor: 5000
  - nonlinear damping
    - \* global damping: 0.8
    - \* local damping: positivity preserving
  - linear solver

### Linearer Löser:

- solver stack
  1. GMRES-Verfahren
    - type: rGMRES
    - requested tolerance: 0.1
    - maximum iterations: 200
    - Krylov subspace size: 200
    - Jacobian
      - \* type: matrix
  2. Jacobi-Verfahren
    - requested tolerance: 0
    - maximum iterations: 10 (Grobgrid: 50)
    - relaxation: 0.8
  3. LU-Zerlegung
    - type: element-local LU

### Mehrgitter:

- time integration method: nonlinear multigrid
- no. of coarse grids: 2
- initial state computation
  - type: none

## NASA-CRM

### Räumliche Diskretisierung:

- preprocessing
  - maximum relative surface integral: 1E-10
  - agglomeration
    - \* spatial dimension: 3
    - \* enable semi-coarsening: True
    - \* maximum agglomerate size: 32
- closures
  - Empty closure
    - \* CaloricalPerfectGas
      - SpecificHeatRatio: 1.4
    - \* SutherlandLaw
      - Prandtl: 0.72
      - TemperatureReference: 310.9277
      - SutherlandLawConstant: 110.4
    - \* · PrandtlTurbulent: 0.9
- reference state
  - Mach: 0.85
  - flow direction specification
    - \* angle of attack: 2.209
  - viscosity specification
    - \* type: Reynolds based
    - \* Reynolds: 5.0E6
    - \* Reynolds\_Length: 275.8
  - turbulence specification
    - \* type: SA viscosity ratio
- boundary treatments
  - treatment type: BCWallViscousAdiabatic
  - boundary markers: WallBoundaryMarkers
  - treatment type: BCSymmetryPlane
  - boundary markers: SymmetryPlaneBoundaryMarkers
  - treatment type: BCExteriorState
  - boundary markers: ExteriorStateBoundaryMarkers
- reconstruction
  - type: limited linear
  - Jacobian: simplified everywhere
  - face gradient augmentation for the Jacobian matrix: edge
  - gradient computation

- \* type: least-squares
- \* enable cell-to-face variant: True
- \* weighting exponent: 1.0
- gradient limiter
  - \* type: Venkatakrisnan
  - \* K: 1.0
- face gradient augmentation: edge
- convection scheme
  - Roe upwinding
    - \* entropy-fix fraction: 0.1 (Grobitter: 0.2)
    - \* entropy-fix fraction for the Jacobian matrix: 0.4

### Zeitliche Diskretisierung:

- time integration method: linearized implizit Euler
- state backup controler
  - type: none
- time step
  - type: local
  - CFL
    - \* type: SER Ramp
    - \* initial CFL number: 2
    - \* SER exponent: 0.4
    - \* minimum CFL number factor: 5
    - \* maximum CFL number factor: 5000
  - nonlinear damping
    - \* global damping: 0.6
    - \* local damping: positivity preserving
  - linear solver

### Linearer Löser:

- solver stack
  1. GMRES-Verfahren
    - type: rGMRES
    - requested tolerance: 1E-3
    - maximum iterations: 30
    - Krylov subspace size: 200
    - Jacobian
      - \* type: matrix
  2. Jacobi-Verfahren
    - requested tolerance: 0

- maximum iterations: 100
- relaxation: 0.8
- 3. LU-Zerlegung
  - type: element-local LU

**Mehrgitter:**

- time integration method: nonlinear multigrid
- no. of coarse grids: 2
- initial state computation
  - type: grid sequenced
  - number of sequencing coarse grids: 2
  - reduction threshold: 1E-3
  - maximum iterations: 250

**DLR-IB-AS-BS-2021-227**

**Prolongationsoperatoren für ein nichtlineares  
Mehrgitterverfahren auf unstrukturierten Gittern**

**Cedric Fallet**

Verteiler:

Institutsbibliothek	1 Exemplar
Verfasser	3 Exemplare
Institutsleitung	1 Exemplar
Abteilungsleiter	1 Exemplar
Deutsche Bibliothek in Frankfurt/Main	2 Exemplare
Niedersächsische Landesbibliothek Hannover	1 Exemplar
Techn. Informationsbibliothek Hannover	1 Exemplar
Zentralbibliothek BS	2 Exemplare
Zentralarchiv GÖ	1 Exemplar
Reserve	2 Exemplare