ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)

ФИЗИКА

PHYSICS

УДК 53.02,530.13,530.145.81
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-4-447-454

Поступила в редакцию 30.04.2021
Received 30.04.2021

А. Н. Лаврёнов[1], И. А. Лаврёнов[2]

[1]Белорусский государственный педагогический университет, Минск, Беларусь
[2]ООО «Октонион технолоджи», Минск, Беларусь

q-АНАЛОГ АЛГЕБРЫ ХИГГСА

Аннотация. Рассмотрено q-обобщение алгебры Хиггса. Показана в явном виде реализация данной алгебры с помощью нелинейного преобразования операторов рождения и уничтожения q-гармонического осциллятора, которое представляет собой выполнение двух операций: «подправка» с помощью функции от исходного гамильтониана и возведение в четвертую степень операторов рождения и уничтожения q-гармонического осциллятора. Выбор «подправочной» функции обосновывается стандартным видом коммутационных соотношений для операторов метаплектической реализации $U_q(SU(1,1))$. Кратко обсуждены дальнейшие возможные направления исследований для обобщения полученных результатов. Первое направление достаточно очевидно – это рассмотрение проблемы при увеличении или при любом значении N размерности операторного пространства. Второе направление можно связать с анализом связи q-обобщений алгебр Хиггса и Хана.

Ключевые слова: q-гармонический осциллятор, q-алгебра Хиггса, нелинейное преобразование, оператор рождения, оператор уничтожения

Для цитирования. Лаврёнов, А. Н. q-Аналог алгебры Хиггса / А. Н. Лаврёнов, И. А. Лаврёнов // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2021. – Т. 57, № 4. – С. 447–454. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-4-447-454

Alexandre N. Lavrenov[1], Ivan A. Lavrenov[2]

[1]Belarusian State Pedagogical University, Minsk, Belarus
[2]Octonion technology Ltd., Minsk, Belarus

THE *q*-ANALOGUE OF THE HIGGS ALGEBRA

Abstract. In this paper, the q-generalization of the Higgs algebra is considered. The realization of this algebra is shown in an explicit form using a nonlinear transformation of the creation-annihilation operators of the q-harmonic oscillator. This transformation is the performance of two operations, namely, a “correction” using a function of the original Hamiltonian, and raising to the fourth power the creation and annihilation operators of a q-harmonic oscillator. The choice of the “correcting” function is justified by the standard form of commutation relations for the operators of the metaplectic realization $U_q(SU(1,1))$. Further possible directions of research are briefly discussed to summarize the results obtained. The first direction is quite obvious. It is the consideration of the problem when the dimension of the operator space increases or for any value N. The second direction can be associated with the analysis of the relationship between q-generalizations of the Higgs and Hahn algebras.

Keywords: q-harmonic oscillator, q-Higgs algebra, nonlinear transformation, creation operator, annihilation operator

For citation. Lavrenov A. N., Lavrenov I. A. The q-analogue of the Higgs algebra. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series,* 2021, vol. 57, no. 4, pp. 447–454 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-4-447-454

Введение. В 1979 г. П. Хиггс рассмотрел существование скрытой симметрии для кулоновской и осцилляторной задач в пространстве постоянной кривизны произвольной размерности и нашел аналоги вектора Рунге – Ленца (кулоновский потенциал) и тензора Фрадкина (потенциал гармонического осциллятора) плоского пространства [1]. Следует отметить, что в это же время для пространств S^3 и S_1^3 независимо это было сделано в [2, 3] для кулоновской задачи. В ней (для простейшего двумерного случая) операторами скрытой симметрии выступают одна компонента углового момента L_z и две компоненты вектора Рунге – Ленца R_x, R_y. Они подчиняются следующим коммутационным соотношениям, которые впоследствии обозначили как коммутационные соотношения алгебры Хиггса. Данная алгебра имеет три генератора $d_0 = L_z$, $d_\pm = R_x \pm iR_y$, удовлетворяющих следующим коммутаторам [4–6]:

$$[d_0; d_\pm] \equiv d_0 d_\pm - d_\pm d_0 = \pm d_\pm; \quad [d_-; d_+] = \alpha_3 d_0^3 + \alpha_1 d_0 + \alpha_0 \tag{1}$$

с центральными элементами $\alpha_3 = -4\lambda$; $\alpha_1 = \lambda/2 - 4H$; $\alpha_0 = 0$, где H – гамильтониан и λ – кривизна пространства. С возникновением квантовых групп было предпринято множество попыток так называемого q-обобщения различных задач математической физики и, в частности, вышеупомянутой алгебры Хиггса. Например, в [4] это было сделано простой формальной заменой кубического выражения на соответствующее ему выражение в q-числах. В [6] было предложено использовать для этой цели коммутантный подход на основе $O(4)\oplus O(4)$ подалгебры $U(8)$. В настоящей работе предложено q-обобщение алгебры Хиггса на другой основе – с помощью нелинейного преобразования операторов рождения и уничтожения q-гармонического осциллятора.

Алгебры Гейзенберга – Вейля, обобщенного ГО, *SU*(1,1), Хиггса и некоторые их *q*-аналоги. В данном разделе напомним об определении алгебры Гейзенберга – Вейля $W(1)$ или гармонического осциллятора (ГО) с ее историческими операторами пары рождения $a_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[-\frac{d}{dx} + x\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}[-\partial + x]$ и уничтожения $a_- = \frac{1}{\sqrt{2}}[\partial + x]$ оператором числа частиц $n = a_+ a_-$ и гамильтонианом $a_0 = \frac{1}{2}[-\partial^2 + x^2] \equiv n + \frac{1}{2}$, где между ними имеются следующие коммутационные соотношения:

$$[a_-; a_+] = 1; \quad [a_0; a_\pm] \equiv [n; a_\pm] = \pm a_\pm, \tag{2}$$

а элемент Казимира дается формулой

$$Q = a_+ a_- - n = a_+ a_- - a_0 + \frac{1}{2} \equiv a_- a_+ - a_0 - \frac{1}{2} \equiv 0.$$

Алгебра осциллятора имеет следующее стандартное представление в пространстве чисел заполнения:

$$a_0 |n\rangle = (n+\alpha)|n\rangle; \quad a_+|n\rangle = r_{n+1}|n+1\rangle \equiv \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle; \quad a_-|n\rangle = r_n |n-1\rangle \equiv \sqrt{n}\,|n-1\rangle,$$

$$\hat{Q}|n\rangle = \left(-\alpha + \frac{1}{2}\right)|n\rangle = \left(a_+ a_- - a_0 + \frac{1}{2}\right)|n\rangle = \left[r_n^2 - (n+\alpha) + \frac{1}{2}\right]|n\rangle$$

или

$$r_n^2 \equiv n; \quad \alpha = \frac{1}{2}.$$

Для $W(1)$ часто рассматривается нелинейное обобщение или так называемый обобщенный (деформированный) [7, 8] гармонический осциллятор (ОГО), который видоизменяет только один коммутатор алгебры по сравнению с коммутационными соотношениями алгебры ГО

$$[a_-; a_+] = f(n). \tag{3}$$

Далее в зависимости от вида данной функции $f(n)$ выделяют различные классы алгебр. Если данная функция имеет полиномиальный вид от оператора числа частиц, т. е. $f(n) = P_k(n)$, то в этом случае говорят о полиномиальном гармоническом осцилляторе (ПГО) или просто полиномиальной алгебре. Когда аргументом функции *f* становится оператор q^n, т. е. $f \equiv f(q^n)$, то мы попадаем в так называемую *q*-область.

В частном случае ПГО при значении $k = 1$ имеем линейные алгебры Ли, например, $SU(1,1)$ или $SU(2)$. Поэтому также часто используют терминологию об их нелинейной или квантовой деформации при замене аргумента функции *f* в формуле (3) [9, 10] или оператора числа частиц $n = a_+a_-$ на гамильтониан a_0. Алгебра Хиггса представляет собой ПГО алгебру с тремя генераторами J_0; $J_\pm$ и кубической ($k = 3$) зависимостью от J_0, где обычно квадратический член зануляется при помощи переопределения J_0 путем его сдвига на конкретную постоянную, т. е. при помощи введения оператора $J_0 = d_0 + \mu = d_0 - \dfrac{\beta_2}{3\beta_3}$:

$$\left[J_-; J_+\right] = \beta_3 J_0^3 + \beta_2 J_0^2 + \beta_1 J_0 + \beta_0 = \beta_3 d_0^3 + \left(3\mu\beta_3 + \beta_2\right) d_0^2 + \left(3\mu^2\beta_3 + 2\mu\beta_2 + \beta_1\right) d_0 + \mu^3\beta_3 + \mu^2\beta_2 + \mu\beta_1 + \beta_0$$

или, учитывая, что $J_\pm \equiv d_\pm$, имеем

$$[d_-; d_+] = \alpha_3 d_0^3 + \alpha_1 d_0 + \alpha_0$$

с центральными элементами

$$\alpha_3 = \beta_3; \quad \alpha_1 = \beta_1 - \frac{\beta_2^2}{3\beta_3}; \quad \alpha_0 = \beta_0 - \frac{\beta_2\beta_1}{3\beta_3} + \frac{2\beta_2^3}{27\beta_3^2}.$$

Далее основным методом изучения и применения таких сложных алгебр служит метод сведения их к простейшим алгебрам разными способами. Так, например, для операторного подхода к приблизительным оценкам параметров квантовых систем в работах [11, 12] соответственно использовались в качестве базовых алгебры ГО и $SO(2,1)$. С другой стороны, алгебру полиномиального гармонического осциллятора (ГО с $f(n) = P_k(n)$) можно сконструировать из операторов ГО при помощи нелинейного преобразовании операторов рождения и уничтожения или, точнее, их *k* степени, т. е. $x_\pm = a_\pm^k$. В этой связи напомним о метаплектическом представлении $SU(1,1)$, которое строится при помощи алгебры Гейзенберга – Вейля или их квадратичной зависимости ($k = 2$) от $a_\pm$, т. е. операторы алгебры $SU(1,1)$ выражаются следующими формулами:

$$b_0 \equiv \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2}\left(n + \frac{1}{2}\right); \quad b_\pm = \frac{a_\pm^2}{2}, \tag{4}$$

где образующие b_0, $b_\pm$ подчиняются коммутационным соотношениям $SU(1,1)$:

$$[b_0; b_\pm] = \pm b_\pm; \quad [b_-; b_+] = 2b_0, \tag{5}$$

а элемент Казимира дается формулой

$$Q = b_+b_- - b_0^2 + b_0 = b_+b_- - b_0(b_0 - 1).$$

Еще одним примером такого построения алгебры ПГО служит случай степени $k = 4$, который приводит нас к алгебре Хиггса. Данный результат представлен в [13] с использованием формализма периодического замыкания одевающей цепочки в спектральной теории оператора Шредингера [14]. Немного видоизменяя и упрощая его, получим

$$d_0 \equiv \frac{a_0}{4} = \frac{1}{4}\left(n + \frac{1}{2}\right); \quad d_+ = \frac{a_+^4}{4}; \quad d_- = \frac{a_-^4}{4}, \tag{6}$$

$$[d_0; d_\pm] = \pm d_\pm; \quad [d_-; d_+] = n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{7}{2}n + \frac{3}{2} \equiv 64 d_0^3 + 11 d_0. \tag{7}$$

Теперь перейдем к результатам частично выполненного q-обобщения вышеуказанного материала или к случаю алгебры q-осциллятора и метаплектической реализации $U_q\left(su(1,1)\right)$. Известно, что q-осцилляторная алгебра $A_q(1)$ [15–17] определяется как ассоциативная алгебра с единицей над комплексным полем, порожденная независимым набором q-осциллятора ($A_\pm$, A_0), который удовлетворяет следующим коммутационным соотношениям:

$$[A_0; A_\pm]=\pm A_\pm; \quad [A_-; A_+] = q^{A_0}, \tag{8}$$

а элемент Казимира дается формулой

$$Q = A_+A_- - \frac{q^{A_0}}{q-1} = A_-A_+ - \frac{q^{A_0}}{1-q^{-1}}.$$

Данные формулы позволяют выразить $N= A_+A_-$ через A_0:

$$N = A_+A_- = \frac{1-q^{A_0}}{1-q} = (A_0)_q, \tag{9}$$

где введено обозначение $(x)_q = \frac{1-q^x}{1-q}$. В пределе $q \to 1$ $(A_0)_q$ совпадает с обычным числовым оператором n.

Алгебра q-осциллятора имеет следующее стандартное представление в пространстве чисел заполнения:

$$A_0\left|n\right\rangle = n\left|n\right\rangle; \quad A_+\left|n\right\rangle = r_{n+1}\left|n+1\right\rangle \equiv \sqrt{\frac{1-q^{n+1}}{1-q}}\left|n+1\right\rangle; \quad A_-\left|n\right\rangle = r_n\left|n-1\right\rangle \equiv \sqrt{\frac{1-q^n}{1-q}}\left|n-1\right\rangle;$$

$$\hat{Q}\left|n\right\rangle = -\frac{1}{q-1}\left|n\right\rangle = \left(A_+A_- - \frac{q^{A_0}}{q-1}\right)\left|n\right\rangle = \left(r_n^2 - \frac{q^n}{q-1}\right)\left|n\right\rangle$$

или

$$r_n^2 \equiv \frac{1-q^n}{1-q}.$$

Данный q-осциллятор теперь можно использовать для построения метаплектической реализации $U_q\left(su(1,1)\right)$:

$$B_0 = \frac{1}{2}\left(A_0 + \frac{1}{2}\right); \quad B_\pm = \frac{A_\pm^2}{[2]_{q^{1/2}}}, \tag{10}$$

где введено обозначение

$$[x]_q = \frac{q^x - q^{-x}}{q - q^{-1}}.$$

Сразу видно, что это q-деформация обычного метаплектического представления $SU(1,1)$. Так как дальнейшее продвижение в q-области по вышеуказанной программе авторам не известно, то представляет несомненный интерес реализовать такое построение алгебры Хиггса при помощи операторов рождения и уничтожения q-гармонического осциллятора.

***q*-Обобщение алгебры Хиггса.** В начале данного раздела сделаем согласно [6] одно замечание, которое важно в q-области для последующих действий. Формула (10) метаплектической реализации $U_q\left(su(1,1)\right)$ ведет к следующим несимметричным коммутационным соотношениям для трех генераторов B_0; $B_\pm$ как некомпактной вещественной форме $U_q\left(sl(2)\right)$:

$$[B_0; B_\pm] = \pm B_\pm; \quad B_- B_+ - q^2 B_+ B_- = q^{2B_0} [2B_0]_q, \tag{11}$$

но имеющих правильное выражение в пределе $q \to 1$. Однако такой правильный предел имеют и другие «подправленные» операторы [6]:

$$C_0 = B_0; \quad C_+ = B_+ q^{-B_0}; \quad C_- = q^{-B_0} B_-.$$

Они удовлетворяют более симметричным коммутационным соотношениям

$$[C_0; C_\pm] = \pm C_\pm; \quad [C_-; C_+] = [2C_0]_q. \tag{12}$$

Значит, в имеющемся произволе как подправлять коммутатор и / или исходные операторы мы выбираем вариант с обычным видом коммутатора, который дает только последний вариант «подправленных» операторов. Именно поэтому в дальнейшем мы и используем их в данной работе. В частности, они позволяют представить метаплектическую реализацию $U_q\left(su(1,1)\right)$ следующим образом:

$$C_+ = A_+^2 \frac{q^{-\frac{1}{2}\left(A_0 + \frac{1}{2}\right)}}{[2]_{q^{1/2}}} \equiv \frac{\left(A_+ q^{-\frac{A_0}{4}}\right)^2}{[2]_{q^{1/2}}},$$

$$C_0 = \frac{1}{2}\left(A_0 + \frac{1}{2}\right); \tag{13}$$

$$C_- = \frac{q^{-\frac{1}{2}\left(A_0 + \frac{1}{2}\right)}}{[2]_{q^{1/2}}} A_-^2 \equiv \frac{\left(q^{-\frac{A_0}{4}} A_-\right)^2}{[2]_{q^{1/2}}}.$$

Таким образом, формула (13) подсказывает нам вид новых образующих D_0; $D_\pm$ по аналогии с формулами (4) и (6). Следовательно, новые операторы рождения и уничтожения $D_\pm$ конструируем как $k = 4$ степень «подправленных» операторов рождения и уничтожения q-ГО:

$$D_+ = \frac{\left[A_+ q^{-\frac{A_0}{4}}\right]^4}{[4]_{q^{1/2}}} \equiv \frac{\left(q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}\right) A_+^4 q^{-A_0 - \frac{3}{2}}}{\left(q^{\frac{1}{2}}\right)^4 - \left(q^{\frac{1}{2}}\right)^{-4}} = \frac{\left(q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}\right) A_+^4 q^{-A_0 - \frac{3}{2}}}{q^2 - q^{-2}},$$

$$D_0 = \frac{1}{4}\left(A_0 + \frac{1}{2}\right); \tag{14}$$

$$D_- = \frac{\left[q^{-\frac{A_0}{4}} A_-\right]^4}{[4]_{q^{1/2}}} \equiv \frac{\left(q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}\right) q^{-A_0 - \frac{3}{2}} A_-^4}{\left(q^{\frac{1}{2}}\right)^4 - \left(q^{\frac{1}{2}}\right)^{-4}} = \frac{\left(q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}\right) q^{-A_0 - \frac{3}{2}} A_-^4}{(q^2 - q^{-2})}.$$

Достаточно легко проверить, что имеет место следующее коммутационное соотношение:

$$[D_0; D_\pm] = \pm D_\pm.$$

Найдем выражение $D_{-}D_{+}$:

$$D_{-}D_{+} = \frac{\left[q^{-\frac{A_0}{4}}A_{-}\right]^4}{[4]_{q^{1/2}}}\frac{\left[A_{+}q^{-\frac{A_0}{4}}\right]^4}{[4]_{q^{1/2}}} \equiv \frac{\left(q^{\frac{1}{2}}-q^{-\frac{1}{2}}\right)^2 q^{-A_0-\frac{3}{2}}A_{-}^4A_{+}^4q^{-A_0-\frac{3}{2}}}{(q^2-q^{-2})^2} = \frac{\left(q^{\frac{1}{2}}-q^{-\frac{1}{2}}\right)^2 A_{-}^4A_{+}^4q^{-2A_0-3}}{(q^2-q^{-2})^2} =$$

$$= \frac{q^{-2A_0-5}+q^{2A_0+5}+\left(2+(q^2+q^{-1})(1+q)q^{-1}\right)-(q^{-A_0-3}+q^{A_0+2})(q^2+q^{-1}+1+q)}{(q^2-q^{-2})^2\left(q^{\frac{1}{2}}-q^{-\frac{1}{2}}\right)^2}.$$

Аналогично получим для $D_{+}D_{-}$:

$$D_{+}D_{-} = \frac{\left[A_{+}q^{-\frac{A_0}{4}}\right]^4}{[4]_{q^{1/2}}}\frac{\left[q^{-\frac{A_0}{4}}A_{-}\right]^4}{[4]_{q^{1/2}}} \equiv \frac{\left(q^{\frac{1}{2}}-q^{-\frac{1}{2}}\right)^2 A_{+}^4q^{-2A_0-3}A_{-}^4}{(q^2-q^{-2})^2} = \frac{\left(q^{\frac{1}{2}}-q^{-\frac{1}{2}}\right)^2 A_{+}^4A_{-}^4q^{-2A_0+5}}{(q^2-q^{-2})^2} =$$

$$= \frac{q^{-2A_0+3}+q^{2A_0-3}+\left(2+(q^2+q^{-1})(q+1)q^{-1}\right)-(q^{-A_0+1}+q^{A_0-2})(q^2+q^{-1}+q+1)}{(q^2-q^{-2})^2\left(q^{\frac{1}{2}}-q^{-\frac{1}{2}}\right)^2}.$$

Теперь мы в состоянии выразить основное коммутационное соотношение алгебры Хиггса и представить основной результат данной работы в виде следующего утверждения.

Утверждение. *q-Обобщение алгебры Хиггса, которое реализуется с помощью операторов рождения и уничтожения в четвертой степени q-гармонического осциллятора по формуле* (14)*, имеет коммутационные соотношения*

$$[D_0; D_{\pm}] = \pm D_{\pm}; \quad \left[D_{-}; D_{+}\right] = \frac{(q^{4D_0}+q^{-4D_0})(q^2+q^{-2})-(q+q^{-1})\left(q^{-\frac{1}{2}}+q^{\frac{1}{2}}\right)}{(q^2-q^{-2})\left(q^{\frac{1}{2}}-q^{-\frac{1}{2}}\right)^2}[q^{4D_0}-q^{-4D_0}].$$

Заключение. Рассмотрено q-обобщение алгебры Хиггса. Показана в явном виде реализация данной алгебры с помощью нелинейного преобразования операторов рождения и уничтожения q-гармонического осциллятора. Основное коммутационное соотношение представляет собой сумму четырех членов с последовательным набором положительных и отрицательных степеней без нулевой от оператора q^{A_0}. Полученный результат функционально совпадает с результатами работ [4, 6], но имеет разные значения коэффициентов в зависимости от нормировки исходных операторов в первоначальной трактовке. Дальнейшие возможные направления исследований для обобщения полученных результатов следующие. Первое направление достаточно очевидно – это рассмотрение проблемы при увеличении или при любом значении N размерности операторного пространства с учетом существования N-мерных аналогов алгебры Аски – Вильсона $AW(N)$. Второе направление можно связать с анализом связи q-обобщений алгебр Хиггса и Хана, с учетом доказанной изоморфности обычных алгебр Хиггса и Хана между собой [5].

В заключение отметим, что хотя повышенный интерес к тематике квантовых групп ослаб, тем не менее они стали хорошим инструментарием к описанию моделей различных систем в физике частиц, космологии, оптики и твердого тела. В частности, предложенное q-обобщение алгебры Хиггса планируется использовать для описания скрытой симметрии дискретизированных вышеуказанных задач в пространстве постоянной кривизны.

Список использованных источников

1. Higgs, P. W. Dynamical symmetries in a spherical geometry. I / P. W. Higgs // J. Phys. A. – 1979. – Vol. 12, № 4. – P. 309–323. https://doi.org/10.1088/0305-4470/12/3/006

2. Курочкин, Ю. А. Аналог вектора Рунге – Ленца и энергетический спектр в задаче Кеплера на трехмерной сфере / Ю. А. Курочкин, В. С. Отчик // Докл. АН БССР. – 1979. – Т. 23, № 11. – С. 987–990.

3. Богуш, А. А. О квантовомеханической задаче Кеплера в трехмерном пространстве Лобачевского / А. А. Богуш, Ю. А. Курочкин, В. С. Отчик // Докл. АН БССР. – 1980. – Т. 24, № 1. – С. 19–22.

4. Chung, W. S. Holstein-Primakoff realization of Higgs algebra and its q-extension / W. S. Chung // Mod. Phys. Lett. A. – 2014. – Vol. 29, № 10. – P. 1450050–1450062. https://doi.org/10.1142/S0217732314500503

5. The Higgs and Hahn algebras from a Howe duality perspective / L. Frappat [et al.] // Phys. Lett. A. – 2019. – Vol. 383, № 14. – P. 1531–1535. https://doi.org/10.1016/j.physleta.2019.02.024

6. The *q*-Higgs and Askey – Wilson algebras / L. Frappat [et al.] // Nucl. Phys. B. – 2019. – Vol. 944. – P. 114632–114645. https://doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2019.114632

7. Arik, M. Quantum algebraic structures compatible with the harmonic oscillator Newton equation / M. Arik, N. M. Atakishiyev, K. B. Wolf // J. Phys. A. – 1999. – Vol. 32, № 33. – P. L371–L376. https://doi.org/10.1088/0305-4470/32/33/101

8. Daskaloyannis, C. Generalized deformed oscillator and nonlinear algebras / C. Daskaloyannis // J. Phys. A. – 1991. – Vol. 24, № 15. – P. L789–L794. https://doi.org/10.1088/0305-4470/24/15/001

9. Zhedanov, A. S. The "Higgs algebra" as a 'quantum' deformation of *SU*(2) / A. S. Zhedanov // Mod. Phys. Lett. A. – 1992. – Vol. 07, № 06. – P. 507–512. https://doi.org/10.1142/S021773239200046X

10. Delbecq, C. Nonlinear deformations of *SU*(2) and *SU*(1,1) generalizing Witten's algebra / C. Delbecq, C. Quesne // J. Phys. A. – 1993. – Vol. 26, № 4. – P. L127–L134. https://doi.org/10.1088/0305-4470/26/4/001

11. Feranchuk, I. D. The operator method of the approximate solution of the Schrödinger equation / I. D. Feranchuk, L. I. Komarov // Phys. Lett. A. – 1982. – Vol. 88, № 5. – P. 211–214. https://doi.org/10.1016/0375-9601(82)90229-8

12. Gerry, C. C. Approximate energy eigenvalues from a generalized operator method / C. C. Gerry, S. Silverman // Phys. Lett. A. – 1983. – Vol. 95, № 9. – P. 481–483. https://doi.org/10.1016/0375-9601(83)90501-7

13. Spiridonov, V. Periodic reduction of the factorization chain and the Hahn polynomials / V. Spiridonov, L. Vinet, A. Zhedanov // J. Phys. A. – 1994. – Vol. 27, № 18. – P. L669–L676. https://doi.org/10.1088/0305-4470/27/18/005

14. Веселов, А. П. Одевающая цепочка и спектральная теория оператора Шредингера / А. П. Веселов, А. Б. Шабат // Функцион. анализ и его приложения. – 1993. – Т. 27, вып. 2. – С. 81–96. https://doi.org/10.1007/BF01085979

15. Macfarlane, A. J. On q-analogues of the quantum harmonic oscillator and the quantum group $SU(2)_q$ / A. J. Macfarlane // J. Phys. A. – 1994. – Vol. 22, № 21. – P. 4581–4588. https://doi.org/10.1088/0305-4470/22/21/020

16. Biedenharn, L. C. The quantum group $SU_q(2)$ and a *q*-analogue of the boson operators / L. C. Biedenharn // J. Phys. A. – 1989. – Vol. 22, № 18. – P. L873–L878. https://doi.org/10.1088/0305-4470/22/18/004

17. Floreanini, R. *q*-Oscillator Realizations of the Quantum Superalgebras $SL_q(m,n)$ and $OSP_q(m,2n)$ / R. Floreanini, V. P. Spiridonov, L. Vinet // Commun. Math. Phys. – 1991. – Vol. 137, № 1. – P. 149–160. https://doi.org/10.1007/BF02099120

References

1. Higgs P. W. Dynamical symmetries in a spherical geometry. I. *Journal of Physics A*, 1979, vol. 12, no. 4, pp. 309–323. https://doi.org/10.1088/0305-4470/12/3/006

2. Kurochkin Yu. A., Otchik V. S. Analog of the Runge – Lenz vector and energy spectrum in the Kepler problem on a three-dimensional sphere. *Doklady academii nauk BSSR* [Doklady of the Academy of Sciences of BSSR], 1979, vol. 23, no. 11, pp. 987–990 (in Russian).

3. Bogush A. A., Kurochkin Yu. A., Otchik V. S. The quantum-mechanical Kepler problem in three-dimensional Lobačevskiĭ space. *Doklady academii nauk BSSR* [Doklady of the Academy of Sciences of BSSR], 1980, vol. 24, no. 1, pp. 19–22 (in Russian).

4. Chung W. S. Holstein-Primakoff realization of Higgs algebra and its *q*-extension. *Modern Physics Letters A*, 2014, vol. 29, no. 10, pp. 1450050–1450062. https://doi.org/10.1142/S0217732314500503

5. Frappat L., Gaboriaud J., Vinet L., Vinet S., Zhedanov A. S. The Higgs and Hahn algebras from a Howe duality perspective. *Physics Letters A,* 2019, vol. 383, no. 14, pp. 1531–1535. https://doi.org/10.1016/j.physleta.2019.02.024

6. Frappat L., Gaboriaud J., Ragoucy E., Vinet L., Vinet S., Zhedanov A. S. The *q*-Higgs and Askey – Wilson algebras. *Nuclear Physics B,* 2019, vol. 944, pp. 114632–114645. https://doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2019.114632

7. Arik M., Atakishiyev N. M., Wolf K. B. Quantum algebraic structures compatible with the harmonic oscillator Newton equation. *Journal of Physics A*, 1999, vol. 32, no. 33, pp. L371–L376. https://doi.org/10.1088/0305-4470/32/33/101

8. Daskaloyannis C. Generalized deformed oscillator and nonlinear algebras. *Journal of Physics A*, 1991, vol. 24, no. 15, pp. L789–L794. https://doi.org/10.1088/0305-4470/24/15/001

9. Zhedanov A. S. The "Higgs algebra" as a 'quantum' deformation of *SU*(2). *Modern Physics Letters A*, 1992, vol. 07, no. 06, pp. 507–512. https://doi.org/10.1142/S021773239200046X

10. Delbecq C., Quesne C. Nonlinear deformations of *SU*(2) and *SU*(1,1) generalizing Witten's algebra. *Journal of Physics A*, 1993, vol. 26, no. 4, pp. L127–L134. https://doi.org/10.1088/0305-4470/26/4/001

11. Feranchuk I. D., Komarov L. I. The operator method of the approximate solution of the Schrödinger equation. *Physics Letters A*, 1982, vol. 88, no. 5, pp. 211–214. https://doi.org/10.1016/0375-9601(82)90229-8

12. Gerry C. C., Silverman S. Approximate energy eigenvalues from a generalized operator method. *Physics Letters A*, 1983, vol. 95, no. 9, pp. 481–483. https://doi.org/10.1016/0375-9601(83)90501-7

13. Spiridonov V., Vinet L., Zhedanov A. Periodic reduction of the factorization chain and the Hahn polynomials. *Journal of Physics A*, 1994, vol. 27, no. 18, pp. L669–L676. https://doi.org/10.1088/0305-4470/27/18/005

14. Veselov, A. P., Shabat, A. B. Dressing Chains and Spectral Theory of the Schrödinger Operator. *Funktsional'nyi analiz i ego prilozheniya = Functional Analysis and Its Applications*, 1993, vol. 27, no. 2, pp. 81–96 (in Russian). https://doi.org/10.1007/BF01085979

15. Macfarlane A. J. On q-analogues of the quantum harmonic oscillator and the quantum group $SU(2)$q. *Journal of Physics A*, 1994, vol. 22, no. 21, pp. 4581–4588. https://doi.org/10.1088/0305-4470/22/21/020

16. Biedenharn L. C. The quantum group $SU_q(2)$ and a q-analogue of the boson operators. *Journal of Physics A*, 1989, vol. 22, no. 18, pp. L873–L878. https://doi.org/10.1088/0305-4470/22/18/004

17. Floreanini R., Spiridonov V. P., Vinet L. q-Oscillator Realizations of the Quantum Superalgebras $SL_q(m,n)$ and $OSP_q(m,2n)$. *Communications in Mathematical Physics*, 1991, vol. 137, no. 1, pp. 149–160. https://doi.org/10.1007/BF02099120

Информация об авторах

Лаврёнов Александр Николаевич – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры информационных технологий в образовании, Белорусский государственный педагогический университет им. М. Танка (ул. Советская, 18, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: lanin0777@mail.ru. https://orcid.org/0000-0001-7384-3621

Лаврёнов Иван Александрович – ведущий специалист, ООО «Октонион технолоджи» (ул. Я. Купалы, 25, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: lanin99@mail.ru. https://orcid.org/0000-0002-3650-8987

Information about the authors

Alexandre N. Lavrenov – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Associate Professor of the Department of the Chair of Information Technologies in Education, Belarusian State Pedagogical University named after Maxim Tank (18, Sovetskaya Str., 220050, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: lanin0777@mail.ru. https://orcid.org/0000-0001-7384-3621

Ivan A. Lavrenov – Leading Specialist, Octonion Technology, Ltd. (25, Ya. Kupala Str., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: lanin099@mail.ru. https://orcid.org/0000-0002-3650-8987