ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 517.925
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-4-428-434

Поступила в редакцию 18.06.2021
Received 18.06.2021

Е. Р. Бабич, И. П. Мартынов

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь

ОБ ОТСУТСТВИИ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ ОСОБЕННОСТЕЙ У РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ЛАМЕ-ТИПА

Аннотация. Объектом исследования являются линейные дифференциальные уравнения второго порядка с регулярными особенностями. Понятие регулярной особенности распространим и на линейные дифференциальные уравнения с частными производными. Общее решение линейного дифференциального уравнения с регулярной особенностью является линейной комбинацией двух линейно независимых решений, одно из которых в общем случае содержит логарифмическую особенность. Известное уравнение Ламе, где в качестве одного из коэффициентов является эллиптическая функция Вейерштрасса, имеет только мероморфные решения. Рассмотрим такие линейные дифференциальные уравнения второго порядка с регулярными особенностями, если в качестве коэффициента вместо эллиптической функции Вейерштрасса принять функцию, являющуюся решением первого уравнения Пенлеве, либо функцию, являющуюся решением уравнения Кортевега – де Фриза. Эти уравнения будем называть уравнениями Ламе-типа. Возникает вопрос: при каких условиях общее решение уравнений Ламе-типа не содержит логарифмов? С этой целью в настоящей работе были исследованы решения уравнений Ламе-типа и найдены условия, которые позволяют судить о наличии или отсутствии в решениях исследуемых уравнений логарифмических особенностей. Приведен пример уравнения с иррегулярной особенностью, которое имеет решение с существенной особенностью, а также уравнение с регулярной особенностью, решение которого содержит логарифмическую особенность, так как определяющее для него уравнение имеет кратный корень.

Ключевые слова: уравнение Ламе, уравнение с регулярной особенностью, уравнение с иррегулярной особенностью, первое уравнение Пенлеве, уравнение Кортевега – де Фриза, логарифмическая особенность

Для цитирования. Бабич, Е. Р. Об отсутствии логарифмических особенностей у решений уравнений Ламе-типа / Е. Р. Бабич, И. П. Мартынов // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2021. – Т. 57, № 4. – С. 428–434. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-4-428-434

Elena R. Babich, Ivan P. Martynov

Yanka Kupala State University of Grodno, Grodno, Belarus

ON THE ABSENCE OF LOGARITHMIC SINGULARITIES IN THE SOLUTIONS OF LAMÉ-TYPE EQUATIONS

Abstract. The object of this research is linear differential equations of the second order with regular singularities. We extend the concept of a regular singularity to linear partial differential equations. The general solution of a linear differential equation with a regular singularity is a linear combination of two linearly independent solutions, one of which in the general case contains a logarithmic singularity. The well-known Lamé equation, where the Weierstrass elliptic function is one of the coefficients, has only meromorphic solutions. We consider such linear differential equations of the second order with regular singularities, for which as a coefficient instead of the Weierstrass elliptic function we use functions that are the solutions to the first Painlevé or Korteweg – de Vries equations. These equations will be called Lamé-type equations. The question arises under what conditions the general solution of Lamé-type equations contains no logarithms. For this purpose, in the present paper, the solutions of Lamé-type equations are investigated and the conditions are found that make it possible to judge the presence or absence of logarithmic singularities in the solutions of the equations under study. An example of an equation with an irregular singularity having a solution with an logarithmic singularity is given, since the equation, defining it, has a multiple root.

Keywords: Lamé equation, equation with a regular singularity, an equation with an irregular singularity, the first Painlevé equation, the Korteweg – de Vries equation, a logarithmic singularity

For citation. Babich E. R., Martynov I. P. On the absence of logarithmic singularities in the solutions of Lamé-type equations. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2021, vol. 57, no. 4, pp. 428–434 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-4-428-434

Постановка задачи. При исследовании дифференциальных уравнений и систем высших порядков иногда удается привести их к такому виду, аналитические свойства решений которого зависят от свойств решений уравнения

$$w'' = \big(\nu(\nu+1)p + \lambda\big)w, \tag{1}$$

где $\nu \in \mathrm{N}, \lambda = \mathrm{const},$ а функция p удовлетворяет уравнению

$$p'' = 6p^2 + c_1 z + c_2, c_1, c_2 = \mathrm{const}. \tag{2}$$

В математической энциклопедии [1, с. 189] для уравнения Ламе

$$w'' = \big(\nu(\nu+1)\wp + \delta\big)w, \tag{3}$$

где $\nu \in \mathrm{N},$ $\wp$ – эллиптическая функция Вейерштрасса, $\delta' = 0,$ сформулировано утверждение о том, что общее решение этого уравнения является мероморфным. Будем говорить, что уравнение (1) является уравнением Ламе-типа, так как имеет схожую структуру с уравнением (3) и в первую очередь потому, что функции p и $\wp$ имеют полюс второго порядка, т. е. уравнения (1) и (3) – линейные дифференциальные уравнения второго порядка с регулярной особой точкой [2, с. 365]. Представляет интерес также рассмотрение дифференциального уравнения второго порядка в частных производных

$$w_{xx} = \big(\nu(\nu+1)u + \lambda\big)w, \tag{4}$$

где $\nu \in \mathrm{N}, \lambda = \mathrm{const},$ а функция u является решением уравнения Кортевега – де Фриза

$$\left(u_{xx} - 6u^2\right)_x = u_t. \tag{5}$$

Так как решение уравнения (5) имеет полярную особенность не выше второго порядка, то можем говорить о том, что уравнение (4) – уравнение с регулярной особенностью, аналогично тому, как применяется понятие регулярной особой точки в аналитической теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Возникла следующая задача: найти условия, при которых решения уравнений Ламе-типа (1), (4) не имеют логарифмических особенностей.

Условия отсутствия логарифмических особых точек у решений уравнения (1). Пусть $t = z - z_0,$ тогда разложение функции p из (2) в ряд Лорана будет иметь вид

$$p = \frac{1}{t^2} + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k t^{k+2}. \tag{6}$$

Подставив ряд (6) в уравнение (2) и обозначив $c_1 = \alpha,\ c_1 z_0 + c_2 = \beta,$ получим, что α_2 – произвольный коэффициент,

$$\alpha_0 = -\frac{\beta}{10}, \quad \alpha_1 = -\frac{\alpha}{6}, \quad \alpha_3 = 0, \quad \alpha_4 = \frac{\beta^2}{300},$$

а для остальных коэффициентов справедлива следующая рекуррентная формула:

$$(k+2)(k+3)\alpha_{k+4} = 6\sum_{m=0}^{k} \alpha_m \alpha_{k-m},\ k = 0,1, \ldots .$$

Точка z_0 является регулярной особой точкой уравнения (1), при этом $\rho_1 = \nu + 1,\ \rho_2 = -\nu$ – корни определяющего уравнения [2, с. 360] для (1), соответствующие точке z_0. Согласно [2, с. 357], два линейно независимых решения уравнения (1) запишем так:

$$w_1 = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{k+\nu+1}, \qquad w_2 = \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^{k-\nu} + \gamma w_1 \ln t, \quad a_0 b_0 \neq 0. \tag{7}$$

Подставляя w_2 из (7) в уравнение (1) и учитывая, что w_1 является решением уравнения (1), получим соотношение

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-2\nu-1)b_k t^k + \gamma\sum_{k=0}^{\infty}(2k+2\nu+1)a_k t^{k+2\nu+1} =$$
$$= \lambda\sum_{k=0}^{\infty} b_k t^{k+2} + \nu(\nu+1)\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{k}\alpha_m b_{k-m} t^{k+4}. \qquad (8)$$

Приравнивая в (8) коэффициенты при $t^{2\nu+1}$, найдем

$$(2\nu+1)a_0\gamma = \lambda b_{2\nu-1} + \nu(\nu+1)\sum_{m=0}^{2\nu-3}\alpha_m b_{2\nu-3-m}, \quad \nu \geq 2, \qquad (9)$$

случай $\nu = 1$ необходимо рассмотреть отдельно.

Пусть в соотношении (8) $\nu = 1$, тогда, приравнивая коэффициенты при t и при t^3, получим соответственно $b_1 = 0,\ 3\gamma a_0 = \lambda b_1$, т. е. $\gamma = 0$, так как $a_0 \neq 0$ (согласно (7)). Значит, при $\nu = 1$ общее решение уравнения (1), где p удовлетворяет уравнению (2), не содержит логарифма.

Условие (9) определяет наличие логарифмической особой точки у решений уравнения (1), потому что, если правая часть в соотношении (9) не равна нулю, то $\gamma \neq 0$. Рассмотрим следующие частные случаи.

1. Если $\nu = 2$, то из соотношения (8) находим $b_1 = b_3 = 0$, а из (9) получим $5\gamma a_0 = \lambda b_3 + 6(\alpha_0 b_1 + \alpha_1 b_0)$. Значит, $\gamma = 0$ лишь в том случае, когда $\alpha = 0$. Таким образом, при $\nu = 2$ решение уравнения (1) не содержит логарифма только тогда, когда p является эллиптической функцией.

2. Пусть $\nu = 3$, тогда из соотношения (8) получим $b_1 = b_3 = 0$, а из (9) найдем

$$7\gamma a_0 = \lambda b_5 + 12(\alpha_0 b_3 + \alpha_1 b_2 + \alpha_2 b_1 + \alpha_3 b_0), \qquad (10)$$

где $b_2 = -\frac{1}{10}\lambda b_0,\ b_5 = \frac{1}{5}\alpha b_0$, т. е. (10) можно записать в виде $\gamma a_0 = \frac{2}{35}\alpha\lambda b_0$. Значит, $\gamma = 0$, если $\alpha = 0$ либо $\lambda = 0$. Таким образом, при $\nu = 3$ решение уравнения (1) не содержит логарифма тогда, когда p – эллиптическая функция либо когда в уравнении (1) $\lambda = 0$.

3. Если $\nu = 4$, то из соотношения (8) найдем

$$b_1 = b_3 = 0, \quad b_2 = -\frac{1}{14}\lambda b_0, \quad 20b_4 = \frac{1}{14}\lambda^2 b_0 + 2\beta b_0, \quad b_5 = \frac{1}{6}\alpha b_0, \quad b_7 = -\frac{17}{588}\alpha\lambda b_0,$$

$$\gamma a_0 = -\frac{2}{441}\alpha\lambda^2 b_0 - \frac{8}{15}\alpha\beta b_0.$$

Видим, что $\gamma = 0$ лишь в том случае, когда $\alpha = 0$. Значит, при $\nu = 4$ решение уравнения (1) не содержит логарифма только тогда, когда p – эллиптическая функция.

Т е о р е м а 1. *Общее решение уравнения* (1) *при* $\nu = 1,3$ *не содержит логарифмическую особую точку в случаях, когда уравнение имеет вид*

$$w'' = (2p + \lambda)w, \quad \lambda = \text{const}, \qquad (11)$$

либо

$$w'' = 12pw, \qquad (12)$$

причем функция p в (11), (12) *удовлетворяет уравнению* (2). *При* $\nu = 2,4$ *общее решение уравнения* (1) *не содержит логарифмическую особую точку только в случае, если это уравнение Ламе, т. е. когда p является эллиптической функцией Вейерштрасса.*

З а м е ч а н и е 1. Утверждение теоремы 1 согласуется с результатами, полученными в работе [3].

Условия отсутствия логарифмических особенностей у решений линейного дифференциального уравнения второго порядка в частных производных.

Рассмотрим уравнение (4), в котором функция u является решением уравнения Кортевега – де Фриза (5). Для функции u из (5) имеет место разложение в ряд [4–6]

$$u = \frac{1}{\phi^2} + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \phi^k, \tag{13}$$

где $\alpha_k = \alpha_k(t),\ k = 0,1,2,\dots,\ \phi = x + \gamma(t).$ Подставляя ряд (13) в уравнение (5), найдем

$$\alpha_0 = -\frac{\phi_t}{12}, \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_3 = \frac{\phi_{tt}}{72}, \tag{14}$$

причем функции α_2, α_4 и ϕ_t являются произвольными независимыми функциями от t, а для остальных коэффициентов справедлива следующая рекуррентная формула:

$$(k^2-1)(k+6)\ \alpha_{k+3} = 6\sum_{m=0}^{k+1}(k+1)\alpha_m\alpha_{k+1-m} + (\alpha_k)_t + (k+1)\alpha_{k+1}\phi_t, \quad k \in \mathrm{N}. \tag{15}$$

Учитывая условия (14), можем записать рекуррентную формулу (15) в виде

$$(k^2-1)(k+6)\ \alpha_{k+3} = 6(k+1)\sum_{m=2}^{k-1}\alpha_m\alpha_{k+1-m} + (\alpha_k)_t, \quad k = 3,4,\dots. \tag{16}$$

З а м е ч а н и е 2. Сходимость ряда (13), являющегося решением уравнения Кортевега – де Фриза (5), доказана методом мажорант в [4], сходимость ряда (13) можно также доказать при помощи методов функционального анализа, как это сделано в [5].

Так как в уравнении (5) коэффициент имеет полярную особенность не выше второго порядка, то особое многообразие, заданное уравнением $\phi(x,t) = 0$, будем называть регулярной особенностью уравнения (4), аналогично тому, как применяется понятие регулярной особой точки в аналитической теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Тогда можем построить следующие два линейно независимых решения уравнения (4):

$$w_1 = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \phi^{k+\nu+1}, \tag{17}$$

$$w_2 = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \phi^{k-\nu} + \gamma w_1 \ln\phi, \quad a_0 b_0 \neq 0, \tag{18}$$

аналогично тому, как построены два линейно независимых решения для обыкновенного линейного дифференциального уравнения второго порядка в [2, с. 357].

Докажем сходимость ряда (17). Подставляя ряд (17) в (4), получим, что a_0 – произвольная функция от t, $a_1 = 0$, а все остальные коэффициенты можно найти по рекуррентной формуле

$$(k+2)(k+2\nu+3)\,a_{k+2} = \lambda a_k + \nu(\nu+1)\sum_{m=0}^{k} a_m\alpha_{k-m}, \quad k = 0,1,\dots. \tag{19}$$

Имеет место

Л е м м а 1. *Пусть для коэффициентов ряда* (17) *выполняется условие* $|a_l| \le \delta^l,\ l = 0,1,\dots,k+1.$ *Тогда справедливо неравенство* $|a_{k+2}| \le \delta^{k+2}.$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем δ так, чтобы выполнялись условия

$$|\lambda| \le \delta^2, |a_{k-m}| \le \delta^{k-m}, \tag{20}$$

причем согласно [4] выполняется неравенство $\left|\alpha_m\right| \le \delta^{m+2}$. Тогда из (19) найдем

$$(k+2)(k+2\nu+3)\left|a_{k+2}\right| \le \delta^2 \cdot \delta^k + \nu(\nu+1)\cdot k\delta^{k+2},$$

т. е.

$$\left|a_{k+2}\right| \le \frac{1+\nu(\nu+1)k}{(k+2)(k+2\nu+3)}\delta^{k+2}. \tag{21}$$

Учитывая, что $0 < \dfrac{1+\nu(\nu+1)k}{(k+2)(k+2\nu+3)} < 1$ при $\nu \in \mathrm{N}$, $k = 0, 1, \dots$, из (21) получим $\left|a_{k+2}\right| \le \delta^{k+2}$. Таким образом, справедливость леммы 1 доказана.

Имеет место

Л е м м а 2. *Для коэффициентов ряда* (17) *выполняется неравенство*

$$\left|a_n\right| \le \delta^n, \quad n \in \mathrm{N} \cup \{0\}.$$

Справедливость леммы 2 устанавливается методом математической индукции, если использовать лемму 1 и формулу (19).

Пусть $|\phi| = |x+\gamma| \le |x| + |\gamma| < \sigma + \dfrac{1}{2\delta} < M$. Тогда для ряда (17) можно построить мажорантный ряд $M^{\nu+1}\sum_{k=0}^{\infty}(\delta M)^k$, который сходится при $\delta M < 1$. Следовательно, ряд (17) сходится при $0 \ne |\phi| < M < \delta^{-1}$.

Т е о р е м а 2. *Ряд* (17) *с коэффициентами, заданными рекуррентной формулой* (19)*, где* a_0 *– произвольная функция от t,* $a_1 = 0$, *сходится при* $0 \ne |\phi| < M < \delta^{-1}$, *где* δ *определяется условиями* (20), *а значит, является решением уравнения* (4) *в указанной области.*

Подставляя w_2 из (18) в уравнение (4) и учитывая, что w_1 из (17) является решением уравнения (4), получим соотношение

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-2\nu-1)b_k\phi^k + \gamma\sum_{k=0}^{\infty}(2k+2\nu+1)\,a_k\phi^{k+2\nu+1} =$$
$$= \lambda\sum_{k=0}^{\infty} b_k\phi^{k+2} + \nu(\nu+1)\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{k}\alpha_m b_{k-m}\phi^{k+2}. \tag{22}$$

Приравнивая коэффициенты в соотношении (22) при ϕ в первой степени и $\phi^{2\nu+1}$, получим соответственно $b_1 = 0$,

$$(2\nu+1)a_0\gamma = \lambda b_{2\nu-1} + \nu(\nu+1)\sum_{m=0}^{2\nu-1}\alpha_m b_{2\nu-1-m}, \quad \nu \in \mathrm{N}. \tag{23}$$

Очевидно, что если правые части равенства (23) отличны от нуля, то $\gamma \ne 0$.

Рассмотрим следующие случаи.

1. Пусть $\nu = 1$, тогда из соотношения (23) получим $3\gamma a_0 = \lambda b_1 + 2(\alpha_0 b_1 + \alpha_1 b_0)$. Значит, $\gamma = 0$, так как $\alpha_1 = b_1 = 0$. Таким образом, при $\nu = 1$ общее решение уравнения (4), где *u* является решением уравнения Кортевега – де Фриза (5), не содержит логарифмических особенностей.

2. Если $\nu = 2$, то из соотношения (23) найдем

$$5\gamma a_0 = \lambda b_3 + 6(\alpha_0 b_3 + \alpha_1 b_2 + \alpha_2 b_1 + \alpha_3 b_0),$$

причем $b_3 = 0$. Значит, $\gamma = \dfrac{\phi_{tt} b_0}{60 a_0} \ne 0$. Таким образом, при $\nu = 2$ решение уравнения (4) имеет логарифмическую особенность.

3. Пусть $\nu = 3$, тогда из (23) получим

$$7\gamma a_0 = \lambda b_5 + 12(\alpha_0 b_5 + \alpha_1 b_4 + \alpha_2 b_3 + \alpha_3 b_2 + \alpha_4 b_1 + \alpha_5 b_0),$$

причем

$$b_2 = -\frac{1}{10}(\lambda b_0 + 12\alpha_0 b_0), \quad b_3 = 0, \quad b_5 = -\frac{\phi_{tt} b_0}{60}, \quad \alpha_5 = \frac{1}{18}(\alpha_2)_t,$$

т. е.

$$7\gamma a_0 = \frac{\phi_{tt}}{30}(\phi_t - \lambda) b_0 + 12 b_0 (\alpha_2)_t.$$

Значит, при $\nu = 3$ в разложении (18) $\gamma \neq 0$, т. е. решение уравнения (4) в данном случае имеет логарифмическую особенность.

Таким образом, справедлива

Теорема 3. *Общее решение уравнения* (4)*, где u – решение уравнения Кортевега – де Фриза* (5)*, является функцией без логарифмической особенности при* $\nu = 1$*, т. е. когда уравнение* (4) *имеет вид*

$$w_{xx} = (2u + \lambda)w, \quad \lambda = \text{const}.$$

Если в уравнении (4) *при* $\nu = 2{,}3$*, то общее решение этого уравнения имеет логарифмическую особенность.*

Замечание 3. Учитывая соотношения (16) и (23), можем прийти к выводу, что при $\nu \in N$, $\nu \geq 4$ решение уравнения (4) содержит логарифмические особенности, так как $\phi_t, \alpha_2, \alpha_4$ – произвольные функции от t, что влечет за собой произвольность последующих коэффициентов согласно (16), а значит, из (23) получим, что при данных условиях $\gamma \neq 0$.

Замечание 4. Утверждение теоремы 3 согласуется с результатами, полученными в работе [6].

Приведем примеры линейных уравнений второго порядка в частных производных с иррегулярной и регулярной особенностями.

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$y_{xx} = \left(\frac{2}{\phi^3} + \frac{1}{\phi^4}\right) y,$$

частным решением которого является функция

$$y = \exp\left(\frac{1}{\phi}\right),$$

где $\phi = x + \gamma(t)$. В этом случае особое многообразие, заданное уравнением $\phi(x,t) = 0$, является иррегулярной особенностью данного уравнения. Рассмотренное уравнение имеет решение с существенной особенностью.

Пример 2. Рассмотрим уравнение

$$y_{xx} = -\frac{1}{4\phi^2} y,$$

решением которого является функция

$$y = A\phi^{\frac{1}{2}} + B\phi^{\frac{1}{2}} \ln \phi,$$

где $\phi = x + \gamma(t)$, A, B – функции от t. В данном случае особое многообразие, заданное уравнением $\phi(x,t) = 0$, является регулярной особенностью уравнения. Рассмотренное уравнение имеет решение с логарифмической особенностью, так как определяющее уравнение для него имеет кратный корень.

Заключение. В данной работе получены условия (9), (23), которые позволяют судить о наличии или отсутствии в решениях уравнений (1), (4) логарифмических особенностей. Анализируя найденные условия (9), (23), удалось доказать, что общее решение уравнения (1) при $\nu = 1,3$ не содержит логарифмическую особую точку в случаях, когда уравнение имеет вид (11) либо (12); при $\nu = 2,4$ общее решение уравнения (1) не содержит логарифмическую особую точку только в случае, когда p является эллиптической функцией Вейерштрасса. Доказано, что решение уравнения (4) не содержит логарифмическую особенность лишь при $\nu = 1$. Приведен пример уравнения с иррегулярной особенностью, которое имеет решение с существенной особенностью, а также уравнение с регулярной особенностью, решение которого содержит логарифмическую особенность, так как определяющее для него уравнение имеет кратный корень.

Список использованных источников

1. Математическая энциклопедия: в 5 т. / редкол.: И. М. Виноградов (гл. ред.) [и др.]. – М.: Сов. энцикл., 1982. – Т. 3. – 1184 с.

2. Смирнов, В. И. Курс высшей математики: в 4 т. / В. И. Смирнов. – М.: Наука, 1974. – Т. 3, ч. 2. – 672 с.

3. Бабич, Е. Р. О мероморфных решениях дифференциальных уравнений и систем / Е. Р. Бабич, И. П. Мартынов, В. А. Пронько // Весн. Гродзен. дзярж. ун-та імя Я. Купалы. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, выліч. тэхніка і кіраванне. – 2016. – Т. 6, № 3. – С. 35–40.

4. Мартынов, И. П. О методах доказательства сходимости рядов, представляющих решения дифференциальных уравнений в частных производных / И. П. Мартынов, Е. Е. Кулеш, М. В. Мисник // Вестн. Брян. гос. ун-та. – 2012. – Т. 2, № 4. – С. 28–34.

5. Joshi, N. A method of proving the convergence of the Painlevé expansions of partial differential equations / N. Joshi, I. A. Petersen // Nonlinearity. – 1994. – Vol. 7, № 2. – P. 595–602. https://doi.org/10.1088/0951-7715/7/2/013

6. Бибило, Е. Р. О некоторых свойствах решений нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных / Е. Р. Бибило, И. П. Мартынов // Весн. Гродзен. дзярж. ун-та імя Я. Купалы. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, выліч. тэхніка і кіраванне. – 2016. – Т. 6, № 1. – С. 15–21.

References

1. *Mathematical Encyclopedia. Vol. 3.* Moscow, Sovetskaya entsiklopediya Publ., 1982. 1184 p. (in Russian).

2. Smirnov V. I. *Course of Higher Mathematics. Vol. 3, part 2.* Moscow, Nauka Publ., 1974. 672 p. (in Russian).

3. Babich E. R, Martynov I. P., Pronko V. A. On meromorphic solutions of differential equations and systems. *Vesnik Hrodzenskaha Dziarzhaunaha Universiteta Imia Ianki Kupaly. Seryia 2. Matematyka. Fizika. Infarmatyka, Vylichal'naia Tekhnika i Kiravanne = Vesnik of Yanka Kupala State University of Grodno. Series 2. Mathematics. Physics. Informatics, Computer Technology and its Control*, 2016, vol. 6, no. 3, pp. 35–40 (in Russian).

4. Martynov I. P., Kulesh E. E., Misnik M. V. Methods for proving the convergence of series representing solutions of partial differential equations. *Vestnik Bryanskogo gosudarstvennogo universiteta = Bryansk State University Herald, 2012*, vol. 2, no. 4, pp. 28–34 (in Russian).

5. Joshi N., Petersen I. A. A method of proving the convergence of the Painlevé expansions of partial differential equations. *Nonlinearity,* 1994, vol. 7, no. 2, pp. 595–602. https://doi.org/10.1088/0951-7715/7/2/013

6. Bibilo E. R., Martynov I. P. On some properties of solutions of nonlinear partial differential equations. *Vesnik Hrodzenskaha Dziarzhaunaha Universiteta Imia Ianki Kupaly. Seryia 2. Matematyka. Fizika. Infarmatyka, Vylichal'naia Tekhnika i Kiravanne = Vesnik of Yanka Kupala State University of Grodno. Series 2. Mathematics. Physics. Informatics, Computer Technology and its Control,* 2016, vol. 6, no. 1, pp. 15–21 (in Russian).

Информация об авторах

Бабич Елена Романовна – преподаватель кафедры математического анализа дифференциальных уравнений и алгебры, Гродненский государственный университет им. Я. Купалы (ул. Ожешко, 22, 230023, г. Гродно, Республика Беларусь). E-mail: elena.bibilo@mail.ru

Мартынов Иван Платонович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математического анализа, дифференциальных уравнений и алгебры, Гродненский государственный университет им. Я. Купалы (ул. Ожешко, 22, 230023, г. Гродно, Республика Беларусь). E-mail: i.martynov@grsu.by

Information about the authors

Elena R. Babich – Lecturer of the Department of Mathematical Analysis, Differential Equations, and Algebra, Yanka Kupala State University of Grodno (22, Ozheshko Str., 230023, Grodno, Republic of Belarus). E-mail: elena.bibilo@mail.ru

Ivan P. Martynov – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Professorof the Department of Mathematical Analysis, Differential Equations and Algebra, Yanka Kupala State University of Grodno (22, Ozheshko Str., 230023, Grodno, Republic of Belarus). E-mail: i.martynov@grsu.by