



УДК 517.977

## Плоское перемещение пятизвенного двуногого робота по поверхности с препятствиями в виде ступеней

Ванькина И. Н.<sup>1</sup>, Фетисов Д. А.<sup>1,\*</sup>

<sup>1</sup>МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

\*[dfetisov@yandex.ru](mailto:dfetisov@yandex.ru)

---

Рассматривается проблема управления плоским перемещением пятизвенного двуногого шагающего робота по поверхности, представляющей собой периодическое чередование горизонтальных участков и ступеней одинаковой высоты. Длины горизонтальных участков и ступеней, а также высота каждой ступени предполагаются известными. Перемещение двуногого шагающего механизма по такой поверхности описывается гибридной системой, состоящей из системы обыкновенных дифференциальных уравнений на фазе одноопорного движения и системы алгебраических уравнений на фазе перехода робота с одной ноги на другую. Для фазы одноопорного движения предложены выходы, равенство которых нулю соответствует перемещению робота с характеристиками, присущими ходьбе человека. Строятся управления, стабилизирующие предложенные выходы за конечное время. Разрабатывается алгоритм, позволяющий найти состояние робота в момент перед первым ударом, соответствующее периодическому решению гибридной системы.

**Ключевые слова:** пятизвенный двуногий шагающий робот; гибридная система; периодическое решение

---

Представлена в редакцию: 03.09.2021.

---

### Введение

Шагающие механизмы нашли широкое применение в современном мире. Их основное преимущество перед колесными и гусеничными роботами состоит в меньшей требовательности к поверхности, по которой перемещается робот: колесным и гусеничным машинам для перемещения необходима непрерывная колея, тогда как шагающему механизму для организации движения нужны лишь дискретные участки поверхности. Вместе с тем задача управления шагающим роботом — это всегда сложная задача управления системой большой размерности. По своей природе динамика шагающего механизма гибридна, т.е. представляет собой чередование фазы одноопорного движения и фазы удара. На фазе одноопорного движения поведение шагающего робота описывается системой обыкновенных

дифференциальных уравнений, на фазе удара — алгебраическим соотношением, описывающим скачкообразную смену роли ног. Первые работы, посвященные исследованию шагающих роботов, появились в конце 1970-х годов [1]. В монографии [2] был предложен подход к управлению антропоморфными механизмами, основанный на приложении импульсных воздействий в момент удара. При этом в промежутках между моментами удара механизм совершал свободное, баллистическое движение. Проблемы кинематики, динамики, стабилизации и управления двуногой ходьбой рассматривались в работе [3]. Различные методики управления автоматическими шагающими аппаратами обсуждались в монографии [4]. Хорошо известны подходы к управлению шагающими механизмами, основанные на свойстве пассивности [5] и понятии плоскостности [6]. Задача управления двуногим роботом с почти линейной динамикой рассматривалась в работе [7]. Проблема отслеживания и стабилизации заданной траектории для шагающих механизмов изучалась в работе [8]. Наиболее важные результаты в области управления двуногой ходьбой по состоянию на начало 2000-ых годов можно найти в обзоре [9].

Новый подход к проблеме управления шагающими роботами был предложен в работе [10]. Этот подход включает в себя два этапа. На первом этапе для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающей поведение робота на фазе одноопорного движения, предлагаются выходы, равенство которых нулю отвечает движению робота с некоторыми заданными характеристиками. Далее решается задача стабилизации предложенных выходов за конечное время [11]. На втором этапе для гибридной системы, замкнутой найденным управлением, ищется такое состояние робота в момент перед первым ударом, которое соответствует периодическому решению системы. Впоследствии указанный подход был применен для управления плоским перемещением пятизвенного [12] и семизвенного [13] шагающих механизмов по горизонтальной поверхности.

В работе [14] указанный подход получил дальнейшее развитие. Для управления шагающим роботом было предложено использовать так называемую гибридную нулевую динамику, которая позволяет уменьшить размерность исследуемой гибридной системы. Позже этот подход был применен для управления перемещением пятизвенного шагающего робота по лестнице [15].

Из работ последних лет стоит отметить монографию [16], где рассмотрены проблемы статической устойчивости, организации походок, построения программного движения и экстренного торможения двуногих механизмов. В обзоре [17] обсуждаются открытые проблемы в области управления шагающими роботами, ставятся задачи, решению которых должно быть уделено первостепенное внимание в ближайшее время.

Настоящая работа посвящена разработке алгоритмов управления плоским перемещением пятизвенного двуножного шагающего робота по поверхности, представляющей собой периодически повторяющееся чередование горизонтальных участков заданной длины и ступеней заданной длины и высоты.

## 1. Постановка задачи

Рассматриваемый в данной работе шагающий робот состоит из туловища и двух ног, каждая из которых включает в себя бедро и голень (рис. 1). Соседние звенья робота соединены между собой шарнирами. Полагаем, что длина каждого звена равна  $L$ .

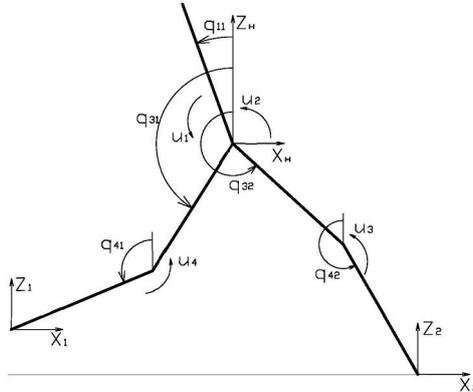


Рис. 1. Схема пятизвенового двуногого робота

Будем использовать следующие обозначения:  $m_t, m_b, m_g$  — массы туловища, бедра и голени соответственно;  $p_b$  — расстояние от тазобедренного сустава до центра масс бедра;  $p_t$  — расстояние от центра масс туловища до тазобедренного сустава;  $p_g$  — расстояние от коленного сустава до центра масс голени;  $J_t, J_b, J_g$  — моменты инерции туловища, бедра и голени соответственно относительно их центров масс. В качестве управлений  $u_1, u_2, u_3, u_4$  рассматриваются крутящие моменты в шарнирах, соединяющих соседние звенья робота (см. рис. 1).

Робот движется слева направо по поверхности, состоящей из периодически повторяющихся горизонтальных участков и препятствий в виде ступеней (рис. 2). Будем полагать, что  $l_x$  — длина ступени,  $l_z$  — высота ступени,  $l_{hor} = \frac{3}{2}l_x$  — длина горизонтального участка.



Рис. 2. Поверхность с препятствиями в виде ступеней

Цель настоящей работы – построить управление, которое реализует периодическое движение робота по указанной поверхности с характеристиками, присущими ходьбе человека.

## 2. Фаза одноопорного движения

Перемещение шагающего двуногого робота по любой поверхности представляет собой последовательную смену двух фаз — фазы одноопорного движения и фазы перехода робота

с одной ноги на другую. В настоящем разделе мы рассматриваем фазу одноопорного движения. На этой фазе конец одной из ног, которую мы далее называем опорной, находится в неподвижном контакте с поверхностью. Другую ногу робота будем называть переносимой.

Положение пятизвенного робота на фазе одноопорного движения однозначно определяется пятью обобщенными угловыми координатами  $q_{11}, q_{31}, q_{32}, q_{41}, q_{42}$  (см. рис. 1). Каждая из координат определяет наклон одного из звеньев робота. Положительным направлением отсчета каждой координаты будем считать направление против часовой стрелки.

В работе [12] показано, что поведение робота на фазе одноопорного движения описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$D(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = Bu, \quad (1)$$

где  $q = (q_{11}, q_{31}, q_{32}, q_{41}, q_{42})^T$ ,  $D(q)$  — симметричная положительно определенная матрица пятого порядка с элементами

$$\begin{aligned} D_{11} &= m_t p_t^2 + J_t, & D_{12} &= 0, & D_{13} &= -L m_t p_t c_{32-11}, \\ D_{14} &= 0, & D_{15} &= -L p_t m_t c_{42-11}, & D_{22} &= m_b p_b^2 + m_g L^2 + J_b, \\ D_{23} &= -L(m_b p_b + m_g L) c_{32-31}, & D_{24} &= L p_g m_g c_{32-41}, & D_{25} &= -(L p_b m_b + m_g L^2), \\ D_{33} &= L^2(m_t + m_b + m_g) + m_b(L - p_b)^2 + J_b, & D_{34} &= -m_g L p_g c_{32-41}, \\ D_{35} &= (L^2(m_t + 2m_b + m_g) - m_b L p_b) c_{32-42}, & D_{44} &= m_g p_g^2 + J_g, \\ D_{45} &= -m_g L p_g c_{42-41}, & D_{55} &= L^2(m_g + 2m_b + m_t) + m_g(L - p_g)^2 + J_g, \end{aligned}$$

$C(q, \dot{q})$  — квадратная матрица пятого порядка с элементами

$$\begin{aligned} C_{11} &= 0, & C_{12} &= 0, & C_{13} &= \dot{q}_{32} m_t p_t L s_{32-11}, & C_{14} &= 0, & C_{15} &= \dot{q}_{42} L p_t m_t s_{42-11}, \\ C_{21} &= 0, & C_{22} &= 0, & C_{23} &= \dot{q}_{32} (m_b p_b + m_t L) L s_{32-31}, & C_{24} &= \dot{q}_{41} m_g L p_g s_{31-41}, \\ C_{25} &= \dot{q}_{42} (m_b p_b + m_g L) L s_{42-31}, & C_{31} &= -\dot{q}_{11} m_t p_t L s_{32-11}, \\ C_{32} &= -\dot{q}_{31} (m_b p_b + m_g L) L s_{32-31}, & C_{33} &= 0, & C_{34} &= -\dot{q}_{41} m_g L p_g s_{32-41}, \\ C_{35} &= \dot{q}_{42} (L^2(m_t + 2m_b + m_g) - m_b L p_b) s_{32-42}, & C_{41} &= 0, \\ C_{42} &= -\dot{q}_{31} m_g L p_g s_{31-41}, & C_{43} &= \dot{q}_{32} m_b L p_b s_{32-41}, & C_{44} &= 0, \\ C_{45} &= \dot{q}_{42} m_g L p_g s_{42-41}, & C_{51} &= -\dot{q}_{11} m_t L p_t s_{42-11}, & C_{52} &= -\dot{q}_{31} (m_b p_b + m_t L) L s_{42-31}, \\ C_{53} &= -\dot{q}_{32} (L^2(m_t + 2m_b + m_g) - m_b L p_b) s_{32-42}, & C_{54} &= -\dot{q}_{41} m_g L p_g s_{42-41}, & C_{55} &= 0, \end{aligned}$$

матрицы  $G(q)$  и  $B$  имеют вид

$$G = \begin{pmatrix} m_t g p_t \sin q_{11} \\ -(m_b p_b + m_g L) g \sin q_{31} \\ (L(m_t + 2m_b + m_g) - m_b p_b) g \sin q_{32} \\ -m_g p_g g \sin q_{41} \\ (L(m_t + 2m_b + 2m_g) - m_g p_g) g \sin q_{42} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

в выражениях для элементов матриц  $D(q)$  и  $C(q, \dot{q})$  использованы обозначения

$$c_{i-j} = \cos(q_i - q_j), \quad s_{i-j} = \sin(q_i - q_j), \quad i, j = 11, 31, 32, 41, 42.$$

Выразим  $\ddot{q}$  из (1):

$$\ddot{q} = -D^{-1}(q)(C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) - Bu),$$

введем обозначение  $x = (q^T, \dot{q}^T)^T$  и перепишем систему (1) в виде

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{j=1}^4 g_j(x)u_j, \quad (2)$$

где

$$f(x) = \begin{pmatrix} \dot{q} \\ -D^{-1}(q)(C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q)) \end{pmatrix}, \quad g_j(x) = \begin{pmatrix} \Theta_{5 \times 1} \\ D^{-1}(q)B_j \end{pmatrix}, \quad j = \overline{1, 4},$$

$\Theta_{5 \times 1}$  — нулевая матрица размера  $5 \times 1$ ,  $B_j$  —  $j$ -й столбец матрицы  $B$ ,  $j = \overline{1, 4}$ .

### 3. Задание выходов

Важной характеристикой перемещения робота по поверхности, изображенной на рис. 2, будет являться желаемая длина одного шага. Примем ее равной  $l_{st} = \frac{1}{2}l_x$ . Из соотношения  $l_{hor} = \frac{3}{2}l_x$  вытекает, что поверхность, по которой перемещается робот, представляет собой периодическое повторение одного и того же профиля  $Q$ , образованного горизонтальным участком длины  $3l_{st}$  и ступенью длины  $2l_{st}$ . На поверхности  $Q$  робот, таким образом, совершает пять шагов, преодолевая при этом одну ступень. Будем далее полагать, что первый шаг совершается полностью на горизонтальном участке, в начале первого шага конец опорной ноги находится на расстоянии  $\frac{3}{2}l_{st}$  от ближайшей ступени, расположенной справа от робота. Соответственно, в конце шага 1 конец переносимой ноги ударяется о горизонтальный участок поверхности на расстоянии  $\frac{1}{2}l_{st}$  от ближайшей ступени, расположенной справа от робота (см. рис. 3). На шагах 2 и 3 робот последовательно поднимает на ступень каждую из ног. На шагах 4 и 5 робот последовательно опускает каждую из ног на следующий горизонтальный участок (рис. 3).

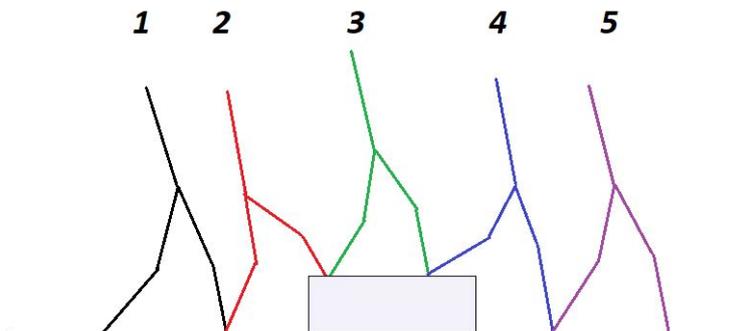


Рис. 3. Пять шагов робота по поверхности с препятствием

Ходьба человека, как известно, обладает рядом особенностей [2]:

- 1) угол наклона туловища на каждом шаге приблизительно постоянный;
- 2) тазобедренный сустав находится посередине между концами ног;
- 3) тазобедренный сустав при движении описывает в пространстве траекторию, близкую к параболе;
- 4) конец переносимой ноги также движется по кривой, близкой к параболе.

Основываясь на этих особенностях, зададим к системе (2) для каждого из пяти шагов четырехмерный выход, равенство которого нулю отвечает движению робота в соответствии с характеристиками 1)–4). На каждом шаге мы работаем в декартовой системе координат  $Ox_2z_2$ , начало которой находится в конце опорной ноги (см. рис. 1). От шага к шагу система координат меняется.

Чтобы удовлетворить требование 1), зададим желаемые значения  $q_{11}^{di}$  для угла наклона туловища на  $i$ -м шаге. Тогда первая составляющая выхода  $y^i$  на  $i$ -м шаге будет описываться формулой

$$y_1^i = q_{11} - q_{11}^{di}, \quad i = \overline{1, 5}.$$

Здесь и далее верхний индекс выхода обозначает номер шага.

Чтобы удовлетворить требование 2), запишем в системе координат  $Ox_2z_2$  координаты тазобедренного сустава:

$$X_H = L(\sin q_{42} + \sin q_{32}), \quad Z_H = -L(\cos q_{42} + \cos q_{32})$$

и координаты конца переносимой ноги:

$$X_1 = X_H - L(\sin q_{31} + \sin q_{41}), \quad Z_1 = Z_H + L(\cos q_{31} + \cos q_{41}).$$

Требование, чтобы тазобедренный сустав находился посередине между концами ног, приводит к равенству  $X_H = (X_1 + X_2)/2$ , которое можно переписать в виде  $(X_H - X_1) + (X_H - X_2) = 0$ . Отсюда получаем выражение для второй составляющей выхода  $y^i$ :

$$y_2^i = d_1 + d_2, \quad i = \overline{1, 5},$$

где  $d_1$  и  $d_2$  определяются выражениями

$$d_1 = X_H - X_1 = L(\sin q_{41} + \sin q_{31}), \quad d_2 = X_H - X_2 = L(\sin q_{42} + \sin q_{32}).$$

Чтобы удовлетворить требование 3), зададим третью составляющую выхода  $y^i$  в виде

$$y_3^i = Z_H - Z_H^{di}(d_2), \quad i = \overline{1, 5},$$

где  $Z_H^{di}(d_2)$  — желаемое изменение высоты таза на  $i$ -м шаге в зависимости от величины  $d_2$ .

Чтобы удовлетворить требование 4), зададим четвертую составляющую выхода  $y^i$  на  $i$ -м шаге в виде

$$y_4^i = Z_1 - Z_1^{di}(d_2), \quad i = \overline{1, 5},$$

где  $Z_1^{di}(d_2)$  — желаемое изменение высоты конца переносимой ноги на  $i$ -м шаге в зависимости от величины  $d_2$ .

Рассмотрим отдельно для каждого из пяти шагов, как можно построить функции  $Z_H^{di}(d_2)$  и  $Z_1^{di}(d_2)$ . Будем выбирать эти функции в виде полиномов второй степени, каждый из которых должен удовлетворять некоторому набору из трех условий. Будем использовать при этом следующие обозначения:

$Z_{H \max}^i$  — максимальное значение высоты таза на  $i$ -м шаге;

$Z_{H \min}^i$  — минимальное значение высоты таза на  $i$ -м шаге;

$Z_{H \text{нач}}^i$  — начальное значение высоты таза на  $i$ -м шаге;

$Z_{H \text{кон}}^i$  — конечное значение высоты таза на  $i$ -м шаге;

$Z_{H \text{пром}}^i$  — промежуточное значение высоты таза на  $i$ -м шаге;

$Z_{1 \max}^i$  — максимальное значение высоты конца переносимой ноги на  $i$ -м шаге;

$Z_{1 \text{пром}}^i$  — промежуточное значение высоты конца переносимой ноги на  $i$ -м шаге.

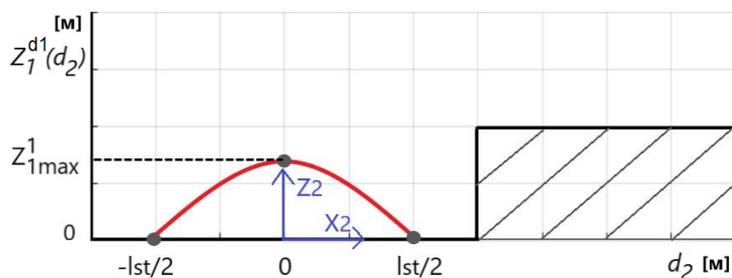
**Шаг 1.** Потребуем, чтобы желаемая высота конца переносимой ноги  $Z_1^{d1}(d_2)$  удовлетворяла условиям

$$Z_1^{d1}\left(-\frac{l_{st}}{2}\right) = 0, \quad Z_1^{d1}(0) = Z_{1 \max}^1, \quad Z_1^{d1}\left(\frac{l_{st}}{2}\right) = 0.$$

Тогда функция  $Z_1^{d1}(d_2)$  будет описываться формулой

$$Z_1^{d1}(d_2) = \left(1 - \frac{4d_2^2}{l_{st}^2}\right) Z_{1 \max}^1.$$

Схематично траектория конца переносимой ноги на первом шаге изображена на рис. 4.



**Рис. 4.** Траектория конца переносимой ноги на шаге 1

Потребуем, чтобы желаемая высота таза  $Z_H^{d1}(d_2)$  удовлетворяла следующим условиям:

$$Z_H^{d1}\left(-\frac{l_{st}}{2}\right) = Z_{H \min}^1, \quad Z_H^{d1}(0) = Z_{H \max}^1, \quad Z_H^{d1}\left(\frac{l_{st}}{2}\right) = Z_{H \min}^1.$$

Тогда функция  $Z_H^{d1}(d_2)$  примет вид

$$Z_H^{d1}(d_2) = Z_{H \min}^1 + \left(1 - \frac{4d_2^2}{l_{st}^2}\right) (Z_{H \max}^1 - Z_{H \min}^1).$$

**Шаг 2.** На втором шаге конец опорной ноги остается внизу, в то время как конец переносимой ноги поднимается на ступеньку. Потребуем, чтобы максимальное значение

высоты конца переносимой ноги достигалось при  $d_2 = l_{st}/4$ . Тогда условия на функцию  $Z_1^{d2}(d_2)$  примут вид

$$Z_1^{d2}\left(-\frac{l_{st}}{2}\right) = 0, \quad Z_1^{d2}\left(\frac{l_{st}}{4}\right) = Z_{1\max}^2, \quad Z_1^{d2}\left(\frac{l_{st}}{2}\right) = l_z,$$

а сама функция  $Z_1^{d2}(d_2)$  будет задаваться выражением

$$Z_1^{d2}(d_2) = \left(-\frac{16Z_{1\max}^2 - 12l_z}{3l_{st}^2}\right) d_2^2 + \frac{l_z}{l_{st}} d_2 + \frac{8Z_{1\max}^2 - 3l_z}{6}.$$

Желаемая траектория конца переносимой ноги робота на втором шаге представлена на рис. 5.

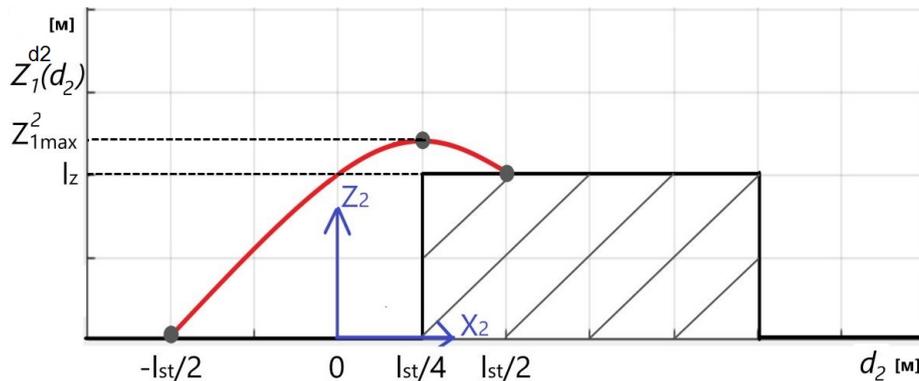


Рис. 5. Траектория конца переносимой ноги на шаге 2

Условия для желаемой траектории таза на каждом шаге будем задавать в тех же точках, что и для конца переносимой ноги. Запишем условия на желаемую траекторию таза на втором шаге:

$$Z_H^{d2}\left(-\frac{l_{st}}{2}\right) = Z_{H\text{нач}}^2, \quad Z_H^{d2}\left(\frac{l_{st}}{4}\right) = Z_{H\max}^2, \quad Z_H^{d2}\left(\frac{l_{st}}{2}\right) = Z_{H\text{кон}}^2.$$

Отметим, что параметры  $Z_{H\text{нач}}^2$ ,  $Z_{H\max}^2$ ,  $Z_{H\text{кон}}^2$  должны удовлетворять неравенствам  $Z_{H\text{нач}}^2 < Z_{H\text{кон}}^2 < Z_{H\max}^2$ . Функция  $Z_H^{d2}(d_2)$  в итоге будет задаваться формулой

$$Z_H^{d2}(d_2) = \frac{8Z_{H\max}^2 - 3Z_{H\text{кон}}^2 + Z_{H\text{нач}}^2}{6} + \frac{d_2(Z_{H\text{кон}}^2 - Z_{H\text{нач}}^2)}{l_{st}} + \frac{4d_2^2(3Z_{H\text{кон}}^2 - 4Z_{H\max}^2 + Z_{H\text{нач}}^2)}{3l_{st}^2}.$$

**Шаг 3.** На третьем шаге на ступень поднимается вторая нога робота. Условия на желаемую высоту конца переносимой ноги зададим следующими:

$$Z_1^{d3}\left(-\frac{l_{st}}{2}\right) = -l_z, \quad Z_1^{d3}\left(-\frac{l_{st}}{4}\right) = Z_{1\text{пром}}^3, \quad Z_1^{d3}\left(\frac{l_{st}}{2}\right) = 0.$$

Для того чтобы переносимая нога не задевала ступеньку, необходимо потребовать выполнения условия  $Z_{1\text{пром}}^3 > 0$ . Непосредственные вычисления показывают, что функция  $Z_1^{d3}(d_2)$  имеет следующий вид:

$$Z_1^{d3}(d_2) = \left(-\frac{16Z_{1\text{пром}}^3 + 12l_z}{3l_{st}^2}\right) d_2^2 + \frac{l_z}{l_{st}} d_2 + \frac{8Z_{1\text{пром}}^3 + 3l_z}{6}.$$

Желаемая траектория конца переносимой ноги робота на третьем шаге представлена на рис. 6.

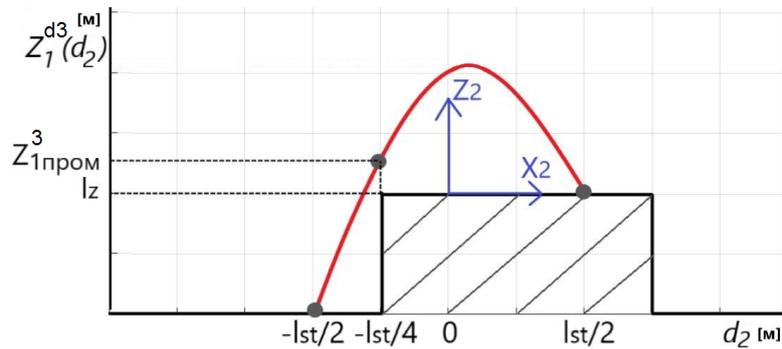


Рис. 6. Траектория конца переносимой ноги на шаге 3

Условия на желаемую траекторию таза на третьем шаге зададим следующими:

$$Z_H^{d3} \left( -\frac{l_{st}}{2} \right) = Z_{Hнач}^3, \quad Z_H^{d3} \left( -\frac{l_{st}}{4} \right) = Z_{Hпром}^3, \quad Z_H^{d3} \left( \frac{l_{st}}{2} \right) = Z_{Hкон}^3.$$

Параметры  $Z_{Hнач}^3$ ,  $Z_{Hпром}^3$ ,  $Z_{Hкон}^3$  в этих условиях должны удовлетворять неравенствам  $Z_{Hнач}^3 < Z_{Hкон}^3 < Z_{Hпром}^3$ . Функция  $Z_H^{d3}(d_2)$  в результате будет задаваться формулой

$$Z_H^{d3}(d_2) = \frac{8Z_{Hпром}^3 + Z_{Hкон}^3 - 3Z_{Hнач}^3}{6} + \frac{d_2(Z_{Hкон}^3 - Z_{Hнач}^3)}{l_{st}} + \frac{4d_2^2(Z_{Hкон}^3 - 4Z_{Hпром}^3 + 3Z_{Hнач}^3)}{3l_{st}^2}.$$

**Шаг 4.** На четвертом шаге опорная нога робота остается на ступени, переносимая нога спускается вниз. Условия на желаемую траекторию конца переносимой ноги задаются аналогично условиям на шаге 3:

$$Z_1^{d4} \left( -\frac{l_{st}}{2} \right) = 0, \quad Z_1^{d4} \left( \frac{l_{st}}{4} \right) = Z_{1пром}^4, \quad Z_1^{d4} \left( \frac{l_{st}}{2} \right) = -l_z,$$

откуда следует, что функция  $Z_1^{d4}(d_2)$  имеет вид

$$Z_1^{d4}(d_2) = \left( -\frac{16Z_{1пром}^4 + 12l_z}{3l_{st}^2} \right) d_2^2 - \frac{l_z}{l_{st}} d_2 + \frac{8Z_{1пром}^4 + 3l_z}{6}.$$

Здесь так же, как и на шаге 3, надо потребовать, чтобы выполнялось условие  $Z_{1пром}^4 > 0$ , отвечающее за то, что нога при движении не задевает ступень. Желаемая траектория конца переносимой ноги на четвертом шаге представлена на рис. 7.

Условия на траекторию таза на четвертом шаге зададим соотношениями

$$Z_H^{d4} \left( -\frac{l_{st}}{2} \right) = Z_{Hнач}^4, \quad Z_H^{d4} \left( \frac{l_{st}}{4} \right) = Z_{Hпром}^4, \quad Z_H^{d4} \left( \frac{l_{st}}{2} \right) = Z_{Hкон}^4.$$

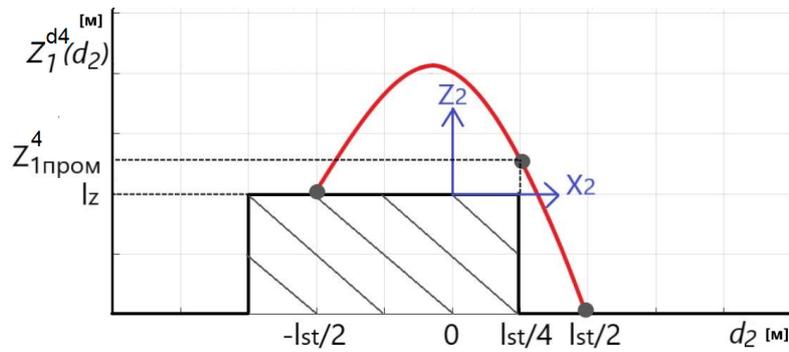


Рис. 7. Траектория конца переносимой ноги на шаге 4

Параметры  $Z_{Hнач}^4$ ,  $Z_{Hпром}^4$ ,  $Z_{Hкон}^4$  в заданных условиях должны удовлетворять неравенствам  $Z_{Hкон}^4 < Z_{Hнач}^4 < Z_{Hпром}^4$ . Непосредственные вычисления показывают, что функция  $Z_H^{d4}(d_2)$  задается формулой

$$Z_H^{d4}(d_2) = \frac{8Z_{Hпром}^4 - 3Z_{Hкон}^4 + Z_{Hнач}^4}{6} + \frac{d_2(Z_{Hкон}^4 - Z_{Hнач}^4)}{l_{st}} + \frac{4d_2^2(3Z_{Hкон}^4 - 4Z_{Hпром}^4 + Z_{Hнач}^4)}{3l_{st}^2}.$$

**Шаг 5.** На пятом шаге опорная нога робота находится внизу, переносимая нога спускается со ступеньки. Задаваемые на траекторию конца переносимой ноги условия будут иметь вид

$$Z_1^{d5}\left(-\frac{l_{st}}{2}\right) = l_z, \quad Z_1^{d5}\left(-\frac{l_{st}}{4}\right) = Z_{1max}^5, \quad Z_1^{d5}\left(\frac{l_{st}}{2}\right) = 0,$$

откуда следует, что функция  $Z_1^{d5}(d_2)$  описывается формулой

$$Z_1^{d5}(d_2) = \left(-\frac{16Z_{1max}^5 - 12l_z}{3l_{st}^2}\right)d_2^2 - \frac{l_z}{l_{st}}d_2 + \frac{8Z_{1max}^5 - 3l_z}{6}.$$

Желаемая траектория конца переносимой ноги на пятом шаге представлена на рис. 8.

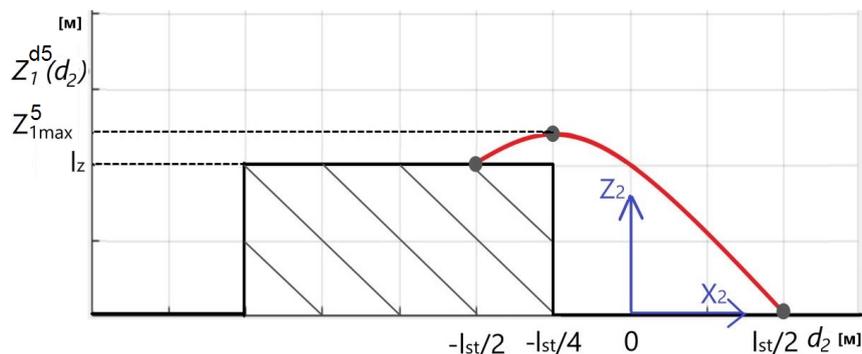


Рис. 8. Траектория конца переносимой ноги на шаге 5

Условия на желаемую траекторию таза на пятом шаге имеют вид

$$Z_H^{d5}\left(-\frac{l_{st}}{2}\right) = Z_{Hнач}^5, \quad Z_H^{d5}\left(-\frac{l_{st}}{4}\right) = Z_{Hmax}^5, \quad Z_H^{d5}\left(\frac{l_{st}}{2}\right) = Z_{Hкон}^5.$$

Параметры  $Z_{Hнач}^5$ ,  $Z_{Hmax}^5$ ,  $Z_{Hкон}^5$  в заданных условиях должны удовлетворять неравенствам  $Z_{Hкон}^5 < Z_{Hнач}^5 < Z_{Hmax}^5$ . Функция  $Z_H^{d5}(d_2)$  в итоге задается формулой

$$Z_H^{d5}(d_2) = \frac{8Z_{Hmax}^5 + Z_{Hкон}^5 - 3Z_{Hнач}^5}{6} + \frac{d_2(Z_{Hкон}^5 - Z_{Hнач}^5)}{l_{st}} + \frac{4d_2^2(Z_{Hкон}^5 - 4Z_{Hmax}^5 + 3Z_{Hнач}^5)}{3l_{st}^2}.$$

#### 4. Стабилизация выходов

Чтобы реализовать на каждом из пяти шагов движение робота в соответствии с заданными характеристиками, решим задачу стабилизации в нуле каждого из выходов  $y^i = h^i(x)$ ,  $i = \overline{1, 5}$ . С этой целью установим сначала, чему равен относительный порядок выхода

$$y^i = \begin{pmatrix} y_1^i \\ y_2^i \\ y_3^i \\ y_4^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1^i(x) \\ h_2^i(x) \\ h_3^i(x) \\ h_4^i(x) \end{pmatrix} = h^i(x) = \begin{pmatrix} q_{11} - q_{11}^{di} \\ d_1 + d_2 \\ Z_H - Z_H^{di}(d_2) \\ Z_1 - Z_1^{di}(d_2) \end{pmatrix}, \quad i = \overline{1, 5}, \quad (3)$$

системы (2) на  $i$ -м шаге,  $i = \overline{1, 5}$ . Будем далее обозначать через  $f\xi$  производную функции  $\xi$  по векторному полю  $f$ .

Напомним [18], что относительный порядок выхода  $y = h(x)$  системы (2) в точке  $x_0$  равен  $(r_1, r_2, r_3, r_4)$ , если:

- 1)  $g_j f^k h_s(x) = 0$ ,  $s, j = \overline{1, 4}, k = \overline{0, r_s - 2}$ , в окрестности точки  $x_0$ ;
- 2) матрица

$$G(x) = \begin{pmatrix} g_1 f^{r_1 - 1} h_1(x) & \dots & g_4 f^{r_1 - 1} h_1(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ g_1 f^{r_4 - 1} h_4(x) & \dots & g_4 f^{r_4 - 1} h_4(x) \end{pmatrix}$$

невырождена в точке  $x_0$ .

Фактически эти условия означают, что:

- 1) при последовательном дифференцировании функции  $y_s = h_s(x)$  в силу системы (2) управления впервые появляются в производной порядка  $r_s$ ,  $s = \overline{1, 4}$ ;
- 2) матрица  $G(x)$ , составленная из коэффициентов при  $u_1, \dots, u_4$  в выражениях для  $y_1^{(r_1)}, \dots, y_4^{(r_4)}$ , невырождена в точке  $x_0$ .

Поскольку каждая из функций  $h_s^i(x)$ ,  $s = \overline{1, 4}, i = \overline{1, 5}$ , зависит только от обобщенных координат  $q$ , то производная каждой из функций  $h_s^i(x)$  в силу системы (2) описывается формулой  $\dot{h}_s^i(x) = f h_s^i(x)$ , при этом во всем пространстве состояний  $\mathbb{R}^{10}$  выполнены равенства  $g_j h_s^i(x) = 0$ ,  $s, j = \overline{1, 4}, i = \overline{1, 5}$ . Отсюда следует, что

$$\ddot{h}_s^i(x) = f^2 h_s^i(x) + \sum_{j=1}^4 u_j g_j f h_s^i(x), \quad s = \overline{1, 4}, \quad i = \overline{1, 5}.$$

Можно показать, что матрицы

$$G^i(x) = \begin{pmatrix} g_1 f h_1^i(x) & \dots & g_4 f h_1^i(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ g_1 f h_4^i(x) & \dots & g_4 f h_4^i(x) \end{pmatrix}, \quad i = \overline{1, 5},$$

невырождены на физически разумных конфигурациях робота. Следовательно, относительный порядок выхода  $y^i = h^i(x)$  равен  $r^i = (2, 2, 2, 2)$ ,  $i = \overline{1, 5}$ .

Запишем вторые производные функций  $y_s^i$ ,  $s = \overline{1, 4}$ ,  $i = \overline{1, 5}$ , в силу системы (2) в виде

$$\begin{pmatrix} \ddot{y}_1^i \\ \ddot{y}_2^i \\ \ddot{y}_3^i \\ \ddot{y}_4^i \end{pmatrix} = F^i(x) + G^i(x)u, \quad i = \overline{1, 5}, \quad (4)$$

где  $F^i(x) = (f^2 h_1^i(x), \dots, f^2 h_4^i(x))^T$ . Сделаем в соотношении (4) замену управления: введем новые управления  $v^i = (v_1^i, v_2^i, v_3^i, v_4^i)^T$ ,  $i = \overline{1, 5}$ , по формуле

$$v^i = F^i(x) + G^i(x)u, \quad i = \overline{1, 5}. \quad (5)$$

В результате получим из соотношений (4) равенства

$$\ddot{y}_s^i = v_s^i, \quad s = \overline{1, 4}, \quad i = \overline{1, 5}. \quad (6)$$

Задача стабилизации выходов  $y^i$ , таким образом, свелась к задаче стабилизации нулевого положения равновесия в каждом из уравнений (6). Отметим, что для лучшего воспроизведения желаемых траекторий, заданных в предыдущем разделе, выходы должны становиться равными нулю к концу каждого шага. В связи с этим, будем решать для уравнений (6) задачу стабилизации за конечное время. Воспользуемся следующей теоремой.

**Теорема 1 ([11]).** Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{\zeta}_1 = \zeta_2, \\ \dot{\zeta}_2 = u, \end{cases} \quad (7)$$

где  $u \in \mathbb{R}$ . Тогда для всех  $0 < \kappa < 1$  обратная связь

$$u = \psi(\zeta_1, \zeta_2) = -\text{sign}(\zeta_2)|\zeta_2|^\kappa - \text{sign}(\varphi(\zeta_1, \zeta_2))|\varphi(\zeta_1, \zeta_2)|^{\frac{\kappa}{2-\kappa}}, \quad (8)$$

где

$$\varphi(\zeta_1, \zeta_2) = \zeta_1 + \frac{1}{2-\kappa} \text{sign}(\zeta_2)|\zeta_2|^{2-\kappa},$$

удовлетворяет следующим условиям:

- 1) функция  $\psi(\zeta_1, \zeta_2)$  непрерывна в  $\mathbb{R}^2$ ;
- 2) положение равновесия  $\zeta_1 = 0$ ,  $\zeta_2 = 0$  системы (7), замкнутой обратной связью (8), глобально асимптотически устойчиво за конечное время;

### 3) время стабилизации

$$T = \inf\{t > 0 : (\zeta_1(t), \zeta_2(t)) = (0, 0), (\zeta_1(0), \zeta_2(0)) = (\zeta_{10}, \zeta_{20})\}$$

непрерывно зависит от начальных условий  $\zeta_{10}, \zeta_{20}$ .

Как показано в работе [11], стабилизирующее управление  $u$  можно также выбирать в виде  $u = \tilde{\psi}(\zeta_1, \zeta_2)$ , где

$$\tilde{\psi}(\zeta_1, \zeta_2) = \frac{1}{\varepsilon^2} \psi(\zeta_1, \varepsilon \zeta_2),$$

$\varepsilon > 0$  — параметр, позволяющий регулировать время стабилизации  $T$ .

Таким образом, согласно теореме 1, в качестве управлений, стабилизирующих за конечное время нулевые положения равновесия уравнений (6), могут быть выбраны управления

$$v_s^i = \frac{1}{\varepsilon_s^2} \psi(y_s^i, \varepsilon_s y_s^i), \quad s = \overline{1, 4}, \quad i = \overline{1, 5}, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} \psi(y_s^i, y_s^i) &= -\text{sign}(y_s^i) |y_s^i|^\kappa - \text{sign}(\varphi(y_s^i, y_s^i)) |\varphi(y_s^i, y_s^i)|^{\frac{\kappa}{2-\kappa}}; \\ \varphi(y_s^i, y_s^i) &= y_s^i + \frac{1}{2-\kappa} \text{sign}(y_s^i) |y_s^i|^{2-\kappa}, \quad s = \overline{1, 4}, \quad i = \overline{1, 5}. \end{aligned}$$

Подставим управления (9) в соотношения (5):

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon_1^2} \psi(y_1^i, \varepsilon_1 y_1^i) \\ \frac{1}{\varepsilon_2^2} \psi(y_2^i, \varepsilon_2 y_2^i) \\ \frac{1}{\varepsilon_3^2} \psi(y_3^i, \varepsilon_3 y_3^i) \\ \frac{1}{\varepsilon_4^2} \psi(y_4^i, \varepsilon_4 y_4^i) \end{pmatrix} = F^i(x) + G^i(x)u, \quad i = \overline{1, 5}.$$

Поскольку матрицы  $G^i(x)$  являются невырожденными, то эти равенства могут быть единственным образом разрешены относительно исходного управления  $u$ . В результате получим выражения для управлений  $u^i$ , стабилизирующих за конечное время выход  $y^i$ :

$$u^i = (G^i)^{-1}(x) \left[ \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon_1^2} \psi(y_1^i, \varepsilon_1 y_1^i) \\ \frac{1}{\varepsilon_2^2} \psi(y_2^i, \varepsilon_2 y_2^i) \\ \frac{1}{\varepsilon_3^2} \psi(y_3^i, \varepsilon_3 y_3^i) \\ \frac{1}{\varepsilon_4^2} \psi(y_4^i, \varepsilon_4 y_4^i) \end{pmatrix} - F^i(x) \right], \quad i = \overline{1, 5}. \quad (10)$$

Отметим, что стабилизация за конечное время выходов системы (2) на каждом из пяти шагов не решает задачу построения периодического движения робота по поверхности, изображенной на рис. 2. Чтобы выделить из множества решений системы (2), замкнутой управлением (10), какое-то конкретное решение, необходимо задать некоторое начальное условие. Если это начальное условие будет выбрано произвольным, то робот, сделав несколько

шагов, удовлетворяющих характеристикам 1)–4), все равно может упасть. Чтобы построить периодическое движение, требуется дополнительно рассмотреть фазу перехода робота с одной ноги на другую, описать поведение робота на обеих фазах движения гибридной системой с управлением и выбрать для этой гибридной системы, замкнутой управлением (10), начальное условие, соответствующее периодическому решению.

## 5. Уравнения движения на фазе перехода

Фаза одноопорного движения завершается, когда переносимая нога ударяется о поверхность, по которой перемещается робот. Будем использовать допущение, что фаза перехода длится бесконечно малый промежуток времени и при этом выполняются следующие предположения [10]:

- 1) после удара нога, ставшая опорной, не проскальзывает и не отскакивает от поверхности;
- 2) положение робота в результате удара не меняется;
- 3) внешние силы, которые действуют на переносимую ногу в момент удара, являются мгновенными импульсными воздействиями;
- 4) эти воздействия вызывают скачкообразное изменение скоростей всех звеньев робота;
- 5) управляющие моменты  $u_i$  не являются импульсными.

Условие наступления фазы перехода для моделируемых пяти шагов по поверхности  $Q$  будем записывать в виде  $x^- \in S$ , где верхний индекс “-” означает, что речь идет о моменте перед ударом, а поверхность  $S$  в пространстве состояний системы (2) в зависимости от номера шага задается по следующему правилу:

$$S = \{(q, \dot{q}) | Z_1(q) = 0, X_1(q) > 0\} \text{ на шагах } 1, 3, 5;$$

$$S = \{(q, \dot{q}) | Z_1(q) = l_z, X_1(q) > 0\} \text{ на шаге } 2;$$

$$S = \{(q, \dot{q}) | Z_1(q) = -l_z, X_1(q) > 0\} \text{ на шаге } 4.$$

На фазе перехода робот имеет семь степеней свободы, и, чтобы полностью задать его положение, к пяти угловым координатам, введенным на фазе одноопорного движения, необходимо добавить еще две. Разместим начало прямоугольной декартовой системы координат в той точке, где находился конец опорной ноги на только что завершившейся фазе одноопорного движения (см. рис. 1). В качестве двух дополнительных координат будем использовать декартовы координаты  $X_2, Z_2$  конца ноги, которая была опорной и на следующем шаге станет переносимой. В работе [12] показано, что значения  $\dot{q}^-, \dot{q}^+$  скоростей звеньев робота в моменты до и после удара связаны соотношениями

$$\tilde{D}(q^-)(\dot{q}_e^+ - \dot{q}_e^-) = E^T(q^-)F, \quad (11)$$

где  $q_e = (q_{11}, q_{31}, q_{32}, q_{41}, q_{42}, X_2, Z_2)^T$ ;  $F = (F_X, F_Z)^T$  — сила реакции, действующая в момент удара на ногу, которая была на предыдущем шаге переносимой;  $F_X$  и  $F_Z$  —

горизонтальная и вертикальная составляющие силы  $F$ ; матрица  $E(q)$  имеет вид

$$E(q) = \frac{\partial r_1}{\partial q_e}(q) = \begin{pmatrix} 0 & -L \cos q_{31} & L \cos q_{32} & -L \cos q_{41} & L \cos q_{42} & 1 & 0 \\ 0 & -L \sin q_{31} & L \sin q_{32} & -L \sin q_{41} & L \sin q_{42} & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$r_1 = (X_1, Z_1)^T$ ;  $\tilde{D}(q)$  — симметричная положительно определенная матрица седьмого порядка, у которой при  $i, j \leq 5$  элементы совпадают с элементами матрицы  $D(q)$ , а остальные элементы задаются выражениями

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{16} &= -m_T p_T \cos q_1, & \tilde{D}_{17} &= -m_T p_T \sin q_1, & \tilde{D}_{26} &= -(m_b p_b + m_g L) \cos q_{31}, \\ \tilde{D}_{27} &= -(m_b p_b + m_g L) \sin q_{31}, & \tilde{D}_{36} &= [(m_T + 2m_b + m_g)L - m_b p_b] \cos q_{32}, \\ \tilde{D}_{37} &= [(m_T + 2m_b + m_g)L - m_b p_b] \sin q_{32}, & \tilde{D}_{46} &= -m_g p_g \cos q_{41}, & \tilde{D}_{47} &= -m_g p_g \sin q_{41}, \\ \tilde{D}_{56} &= [(m_T + 2m_b + 2m_g)L - m_g p_g] \cos q_{42}, & \tilde{D}_{57} &= [(m_T + 2m_b + 2m_g)L - m_g p_g] \sin q_{42}, \\ \tilde{D}_{66} &= m_T + 2m_b + 2m_g, & \tilde{D}_{67} &= 0, & \tilde{D}_{77} &= m_T + 2m_b + 2m_g. \end{aligned}$$

Система линейных алгебраических уравнений (11) содержит семь уравнений и девять неизвестных — это компоненты вектора  $\dot{q}_e^+$ , а также составляющие  $F_X$  и  $F_Z$  силы  $F$ . Отметим, что в момент перед ударом нога, бывшая на предыдущем шаге опорной, находится в неподвижном контакте с поверхностью, поэтому  $\dot{X}_2^- = \dot{Z}_2^- = 0$ . Замкнем систему (11), добавив к ней еще два уравнения, отражающие предположение, что переносимая нога не проскальзывает и не отскакивает от поверхности в момент удара:

$$\frac{dr_1}{dt} = \frac{\partial r_1}{\partial q_e}(q^-) \dot{q}_e^+ = 0.$$

Перепишем это условие в виде  $E(q^-) \dot{q}_e^+ = 0$  и присоединим содержащиеся в этом равенстве два уравнения к системе (11). В результате получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{pmatrix} \tilde{D}(q^-) & -E^T(q^-) \\ E(q^-) & \Theta_{2 \times 2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_e^+ \\ F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{D}(q^-) \dot{q}_e^- \\ \Theta_{2 \times 1} \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Решение системы (12) — девятимерный вектор, первыми пятью компонентами которого являются угловые скорости  $\omega_i^+(x^-)$ ,  $i = 11, 31, 32, 41, 42$ , звеньев робота в момент после удара. Заметим, что в момент, когда переносимая нога сталкивается с поверхностью, происходит изменение роли ног: переносимая нога на следующем шаге становится опорной, опорная — переносимой. При этом в выведенных ранее уравнениях (1) для фазы одноопорного движения предполагалось, что положение опорной ноги определяется обобщенными координатами  $q_{32}, q_{42}$ , положение переносимой ноги — координатами  $q_{31}, q_{41}$ . Чтобы опи-

сать движение робота на следующем шаге теми же уравнениями, необходимо произвести переобозначение по формуле

$$x^+ = \Delta(x^-) \equiv \left( q_{11}^-, q_{32}^-, q_{31}^-, q_{42}^-, q_{41}^-, \omega_{11}^+(x^-), \omega_{32}^+(x^-), \omega_{31}^+(x^-), \omega_{42}^+(x^-), \omega_{41}^+(x^-) \right)^T. \quad (13)$$

Объединив равенства (2) и (13), получим гибридную систему, которая описывает движение робота на обеих фазах:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u, & x^- \notin S; \\ x^+ = \Delta(x^-), & x^- \in S, \end{cases} \quad (14)$$

где  $S = \{(q, \dot{q}) | Z_1(q) = 0, X_1(q) > 0\}$  на шагах 1, 3, 5;  $S = \{(q, \dot{q}) | Z_1(q) = l_z, X_1(q) > 0\}$  на шаге 2;  $S = \{(q, \dot{q}) | Z_1(q) = -l_z, X_1(q) > 0\}$  на шаге 4.

## 6. Построение периодического решения

Предложим алгоритм построения периодического движения робота по поверхности, изображенной на рис. 2. Периодичность движения робота по этой поверхности означает, что серия из пяти шагов по участку поверхности  $Q$  должна периодически повторяться. Прежде всего, потребуем, чтобы выполнялись условия стыковки желаемых траекторий  $q_{11}^{d5} = q_{11}^{d1}$  и  $Z_{H\text{кон}}^5 = Z_{H\text{мин}}^1$ . Эти условия гарантируют, что если желаемые траектории угла наклона туловища и таза воспроизводятся точно, то в конце пятого шага и в начале первого шага угол наклона туловища одинаков и таз находится на одной и той же высоте. Будем полагать, что система (2) на каждом шаге замкнута стабилизирующими управлениями (10). Покажем, что в этом случае положение робота в конце пятого шага может быть однозначно определено. Действительно, в силу выбора управления выход  $y^5$  к концу пятого шага равен нулю. Следовательно, выполнены равенства  $y_s^5 = 0, s = \overline{1, 4}$ . Добавим к этим равенствам условие  $Z_1^5 = 0$  окончания фазы одноопорного движения на пятом шаге. В результате получим систему уравнений

$$\begin{cases} q_{11} - q_{11}^{d5} = 0, \\ L(\sin q_{41} + \sin q_{31}) + L(\sin q_{42} + \sin q_{32}) = 0, \\ -L(\cos q_{42} + \cos q_{32}) - Z_H^{d5}(d_2) = 0, \\ -L(\cos q_{42} + \cos q_{32}) + L(\cos q_{31} + \cos q_{41}) - Z_1^{d5}(d_2) = 0, \\ -L(\cos q_{42} + \cos q_{32}) + L(\cos q_{31} + \cos q_{41}) = 0. \end{cases} \quad (15)$$

Из первого уравнения системы получаем, что  $q_{11} = q_{11}^{d5}$ . Остальные уравнения образуют замкнутую систему относительно углов  $q_{31}, q_{32}, q_{41}, q_{42}$ . Из четвертого и пятого уравнений вытекает равенство  $Z_1^{d5}(d_2) = 0$ . Из вида функции  $Z_1^{d5}(d_2)$  следует (см. рис. 8) соотношение  $d_2 = l_{st}/2$ , или, что то же самое,  $L(\sin q_{42} + \sin q_{32}) = l_{st}/2$ . Из второго

уравнения системы (15) получаем равенство  $L(\sin q_{41} + \sin q_{31}) = -l_{st}/2$ . Поскольку  $d_2 = l_{st}/2$ , то  $Z_H^{d_5}(d_2) = Z_{H\text{кон}}^5$ . Следовательно, третье уравнение системы приводит к равенству  $L(\cos q_{42} + \cos q_{32}) = -Z_{H\text{кон}}^5$ . Из последнего уравнения системы (15) вытекает, что  $L(\cos q_{31} + \cos q_{41}) = -Z_{H\text{кон}}^5$ .

Таким образом, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \sin q_{42} + \sin q_{32} = \frac{l_{st}}{2L}, \\ \sin q_{41} + \sin q_{31} = -\frac{l_{st}}{2L}, \\ \cos q_{42} + \cos q_{32} = -\frac{Z_{H\text{кон}}^5}{L}, \\ \cos q_{31} + \cos q_{41} = -\frac{Z_{H\text{кон}}^5}{L}, \\ q_{11} = q_{11}^{d_5}. \end{cases} \quad (16)$$

Непосредственные вычисления показывают, что решение этой системы, соответствующее физически реальным конфигурациям робота при движении слева направо, описывается формулами

$$\begin{cases} q_{11}^- = q_{11}^{d_5}, \\ q_{31}^- = -\arctg \frac{a}{b} + \pi + \frac{1}{2} \arccos \frac{a^2 + b^2 - 2}{2}, \\ q_{32}^- = \arctg \frac{a}{b} + \pi + \frac{1}{2} \arccos \frac{a^2 + b^2 - 2}{2}, \\ q_{41}^- = -\arctg \frac{a}{b} + \pi - \frac{1}{2} \arccos \frac{a^2 + b^2 - 2}{2}, \\ q_{42}^- = \arctg \frac{a}{b} + \pi - \frac{1}{2} \arccos \frac{a^2 + b^2 - 2}{2}. \end{cases} \quad (17)$$

где

$$a = \frac{l_{st}}{2L}, \quad b = -\frac{Z_{H\text{кон}}^5}{L}.$$

Покажем, что обобщенные скорости звеньев робота в конце пятого шага являются функциями скалярного параметра, в качестве которого можно выбрать горизонтальную составляющую скорости таза в конце пятого шага. Заметим, что в силу выбора управления производная в силу системы выхода  $y^5$  к концу пятого шага становится равной нулю, т.е. имеют место равенства  $\dot{y}_s^5 = 0$ ,  $s = \overline{1, 4}$ . В левых частях этих равенств все углы  $q_i$ ,  $i = 11, 31, 32, 41, 42$ , принимают уже известные значения (17), поэтому равенства  $\dot{y}_s^5 = 0$ ,  $s = \overline{1, 4}$ , образуют систему из четырех линейных алгебраических уравнений с пятью неизвестными  $\dot{q}_i$ ,  $i = 11, 31, 32, 41, 42$ . Дополним полученную систему уравнением  $\dot{X}_H^- = L(\dot{q}_{42} \cos q_{42}^- + \dot{q}_{32} \cos q_{32}^-)$ . В этом уравнении горизонтальную составляющую  $\dot{X}_H^-$  скорости таза в конце пятого шага мы будем считать известной. В результате получим систему из пяти линейных алгебраических уравнений с пятью неизвестными, которую можно

записать в виде

$$M(q^-)\dot{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dot{X}_H^- \end{pmatrix}, \quad (18)$$

где

$$M(q^-) = L \begin{pmatrix} \frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos q_{31}^- & \cos q_{32}^- & \cos q_{41}^- & \cos q_{42}^- \\ 0 & 0 & \sin q_{32}^- - w_1 \cos q_{32}^- & 0 & \sin q_{42}^- - w_1 \cos q_{42}^- \\ 0 & -\sin q_{31}^- & \sin q_{32}^- + w_2 \cos q_{32}^- & -\sin q_{41}^- & \sin q_{42}^- + w_2 \cos q_{42}^- \\ 0 & 0 & \cos q_{32}^- & 0 & \cos q_{42}^- \end{pmatrix},$$

а  $w_1$  и  $w_2$  задаются выражениями

$$w_1 = \frac{7Z_{H\text{кон}}^5 - 16Z_{H\text{max}}^5 + 9Z_{H\text{нач}}^5}{3l_{st}}, \quad w_2 = \frac{16Z_{1\text{max}}^5 - 9l_z}{3l_{st}}.$$

Можно показать, что матрица  $M(q^-)$  невырождена и, следовательно, решение системы (18) описывается формулой

$$\dot{q}^- = M^{-1}(q^-) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dot{X}_H^- \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Основываясь на полученных результатах, опишем алгоритм построения периодического решения гибридной системы (14), замкнутой управлениями (10). Как следует из приведенных выше рассуждений, указанная задача сводится к нахождению значения  $\dot{X}_H^-$ , соответствующего периодическому решению системы.

1. Задаем значение  $\dot{X}_H^-$ .

2. Находим по формуле (17) вектор  $q^-$ , по формуле (19) — вектор  $\dot{q}^-$ . Формируем из векторов  $q^-$  и  $\dot{q}^-$  состояние робота в конце пятого шага — вектор

$$x^- = \begin{pmatrix} q^- \\ \dot{q}^- \end{pmatrix}.$$

3. Применяя модель удара, вычисляем состояние робота в начале первого шага — вектор  $x^{1+} = \Delta(x^-)$ . Обозначим  $t_{10} = 0$ , положим  $i = 1$ .

#### 4. Находим решение $x(t)$ задачи Коши

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^4 g_i(x)u^i(x), \quad x(t_{i0}) = x^{i+},$$

где управления  $u^i(x)$  задаются соотношениями (10);

5. Определяем момент времени  $t_{i*}$ , для которого выполнено условие  $x^-(t_{i*}) \in S$ , где поверхность  $S$  задается по правилу:

$$S = \{(q, \dot{q}) | Z_1(q) = 0, X_1(q) > 0\} \text{ на шагах } 1, 3, 5;$$

$$S = \{(q, \dot{q}) | Z_1(q) = l_z, X_1(q) > 0\} \text{ на шаге } 2;$$

$$S = \{(q, \dot{q}) | Z_1(q) = -l_z, X_1(q) > 0\} \text{ на шаге } 4.$$

Если момент времени  $t_{i*}$  не существует, то возвращаемся к п. 1 (меняем значение  $\dot{X}_H^-$ );

6. Если  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ , то, применяя модель удара, вычисляем  $x^{i+1,+} = \Delta(x^-(t_{i*}))$ , полагаем  $t_{i+1,0} = t_{i*}$ , увеличиваем  $i$  на единицу и возвращаемся к п. 4. В противном случае находим

$$\dot{X}_H(t_{5*}) = L(\sin x_5^-(t_{5*}) + \sin x_3^-(t_{5*}))$$

и сравниваем значения  $\dot{X}_H^-$  и  $\dot{X}_H(t_{5*})$ . Если они совпадают (по крайней мере, с некоторой высокой точностью), то задача решена — значение  $\dot{X}_H^-$ , соответствующее периодическому решению, найдено. Иначе возвращаемся к п. 1 (меняем значение  $\dot{X}_H^-$ ).

### 7. Численное моделирование

Для численного моделирования были выбраны следующие значения параметров:  $m_t = 16$  кг,  $m_b = 3$  кг,  $m_g = 2$  кг,  $L = 1$  м,  $p_t = p_b = p_g = 0.5$  м,  $J_t = 6.5$  кг · м<sup>2</sup>,  $J_b = 2.5$  кг · м<sup>2</sup>,  $J_g = 0.8$  кг · м<sup>2</sup>,  $l_z = 0.4$  м,  $l_x = 2.6$  м. Отсюда следует, что  $l_{hor} = \frac{3}{2}l_x = 3.9$  м,  $l_{st} = \frac{1}{2}l_x = 1.3$  м.

Характеристики желаемых траекторий таза и конца переносимой ноги были выбраны следующими:

а) на шаге 1  $Z_{H \min}^1 = 1.75$  м,  $Z_{H \max}^1 = 1.9$  м,  $Z_{1 \max}^1 = 0.4$  м;

б) на шаге 2  $Z_{H \text{нач}}^2 = 1.75$  м,  $Z_{H \max}^2 = 1.9$  м,  $Z_{H \text{кон}}^2 = 1.8$  м,  $Z_{1 \max}^2 = 0.78$  м;

в) на шаге 3  $Z_{H \text{нач}}^3 = 1.4$  м,  $Z_{H \text{пром}}^3 = 1.75$  м,  $Z_{H \text{кон}}^3 = 1.6$  м,  $Z_{1 \text{пром}}^3 = 0.15$  м;

г) на шаге 4  $Z_{H \text{нач}}^4 = 1.6$  м,  $Z_{H \text{пром}}^4 = 1.7$  м,  $Z_{H \text{кон}}^4 = 1.4$  м,  $Z_{1 \text{пром}}^4 = 0.15$  м;

д) на шаге 5  $Z_{H \text{нач}}^5 = 1.8$  м,  $Z_{H \max}^5 = 1.9$  м,  $Z_{H \text{кон}}^5 = 1.75$  м,  $Z_{1 \max}^5 = 0.7$  м.

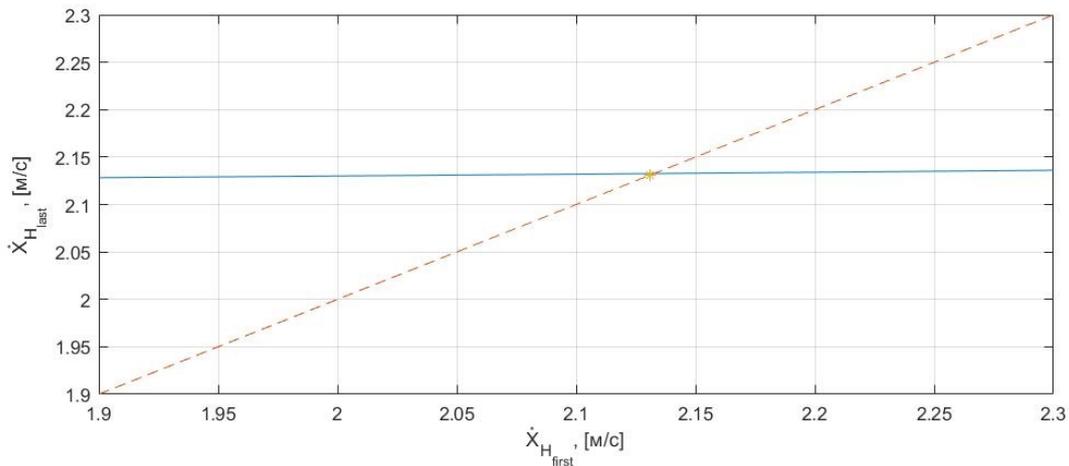
Желаемые значения  $q_{11}^{di}$  угла отклонения туловища от вертикали были выбраны одинаковыми для всех шагов и равными  $q_{11}^{di} = -\frac{\pi}{10}$  рад.

При вычисления стабилизирующих управлений  $u^i$  значения параметров  $\varepsilon$  и  $\kappa$  не менялись от шага к шагу и были выбраны равными

$$\varepsilon = \left( \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{2}{21}, \frac{2}{21} \right), \quad \kappa = \frac{7}{8}.$$

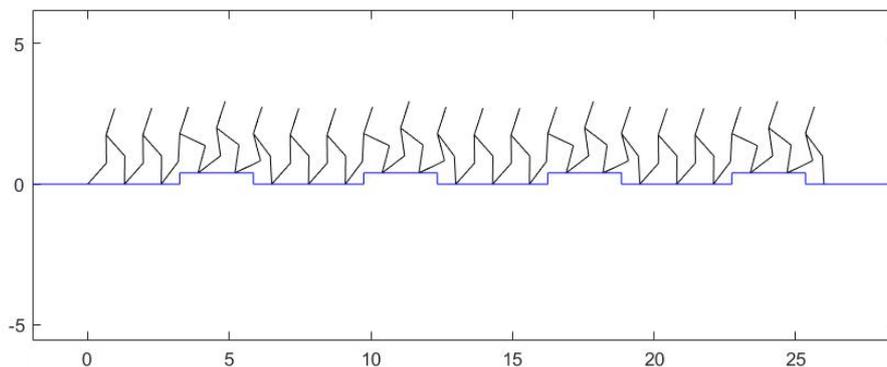
Значения этих параметров выбирались экспериментально так, чтобы выходы к концу каждого шага стабилизировались.

Для нахождения значения  $\dot{X}_H^-$ , соответствующего периодическому движению, был задан массив значений  $\dot{X}_{H_{first}}$  от 1.9 м/с до 2.3 м/с с шагом 0.01, после чего для каждого значения  $\dot{X}_{H_{first}}$  была найдена скорость  $\dot{X}_{H_{last}}$  к концу следующих пяти шагов. Тот элемент массива, для которого значения  $\dot{X}_{H_{first}}$  и  $\dot{X}_{H_{last}}$  совпали, является искомой неподвижной точкой. В ходе расчетов было установлено, что для выбранных численных значений параметров искомое значение  $\dot{X}_H^-$  равно 2.133 м/с. График, иллюстрирующий нахождение этого значения, представлен на рис. 9: экспериментальная кривая пересекается с биссектрисой первого координатного угла, точка пересечения и является искомой скоростью  $\dot{X}_H^-$ .



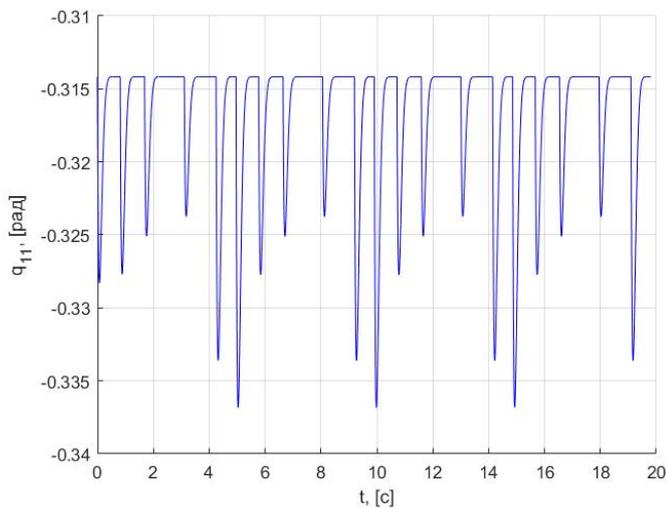
**Рис. 9.** Зависимость скорости  $\dot{X}_{H_{last}}$  от начального значения  $\dot{X}_{H_{first}}$

Интегрирование системы производилось в пакете Matlab с помощью встроенной функции ode45. В результате моделирования, проведенного для найденного значения  $\dot{X}_H^- = 2.133$  м/с, было построено численное решение для двадцати шагов, что соответствует прохождению роботом четырех ступеней. Последовательность наиболее характерных состояний робота на протяжении двадцати шагов представлена на рис. 10.

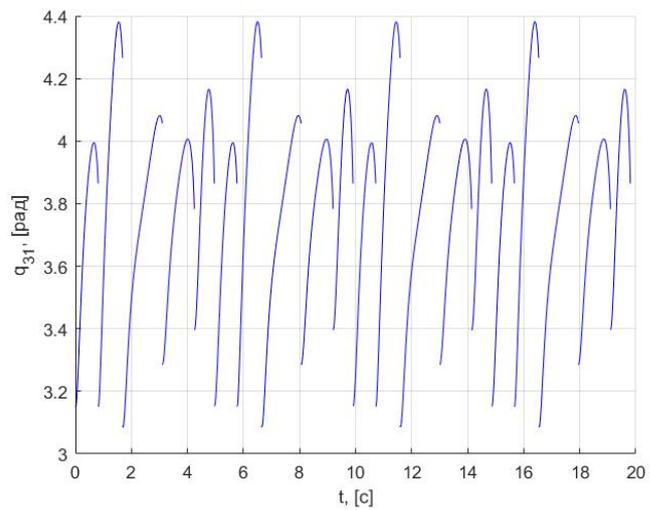


**Рис. 10.** Последовательность состояний робота при движении по поверхности с препятствием

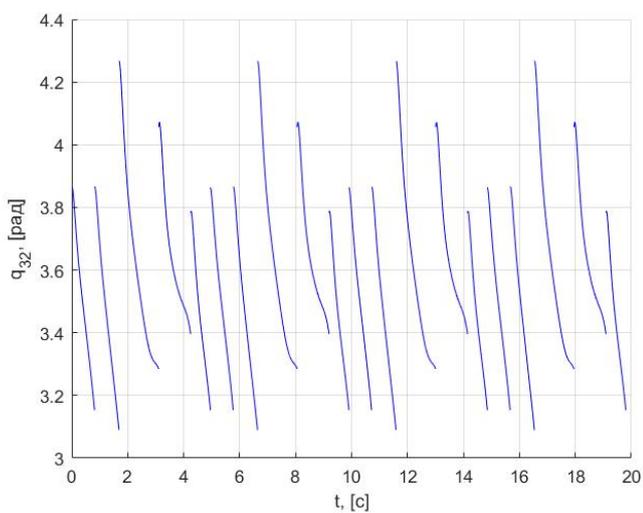
На рис. 11 представлены графики изменения обобщенных координат звеньев робота на протяжении 20 шагов, на рис. 12 — графики обобщенных скоростей, на рис. 13 — графики управляющих воздействий.



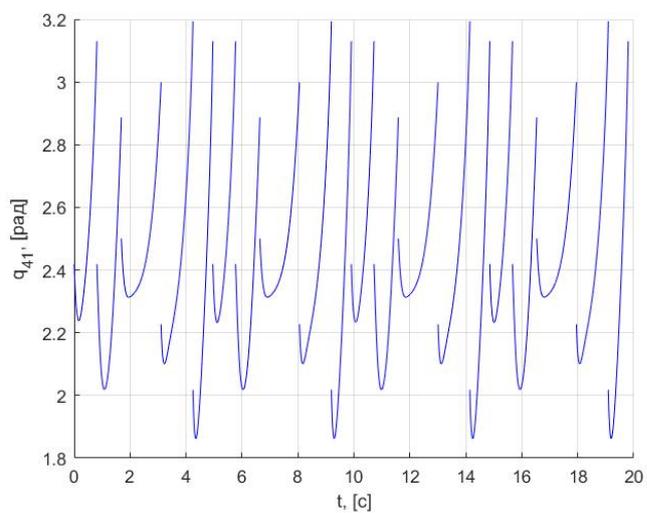
а)  $q_1$



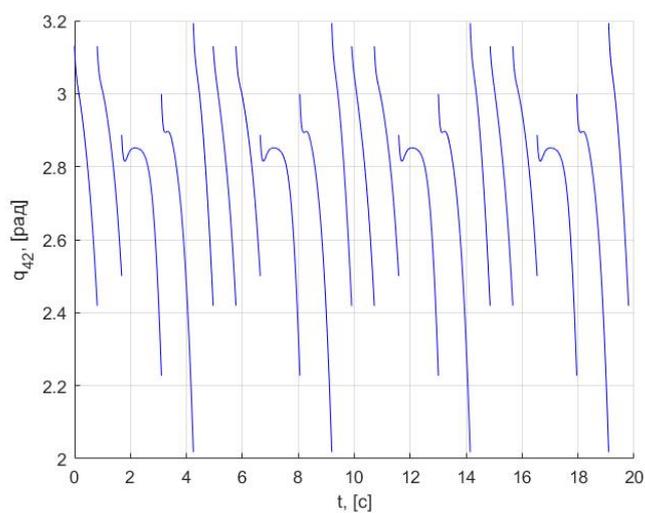
б)  $q_{31}$



в)  $q_{32}$

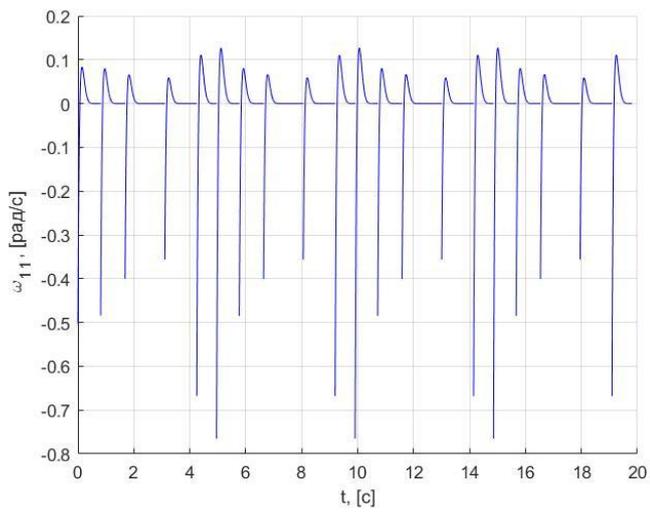


г)  $q_{41}$

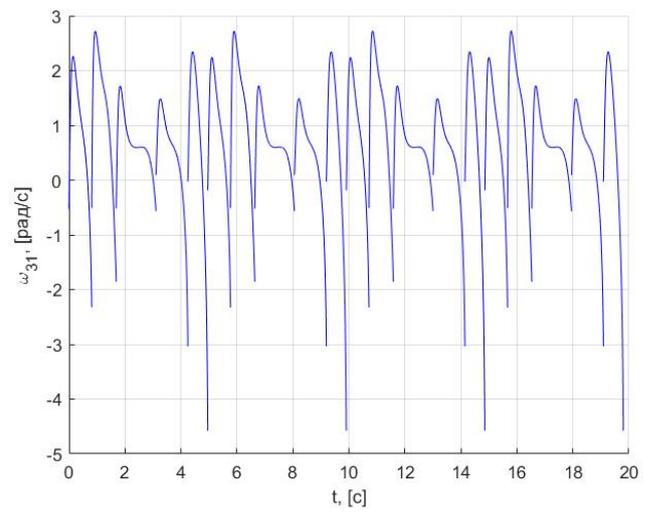


д)  $q_{42}$

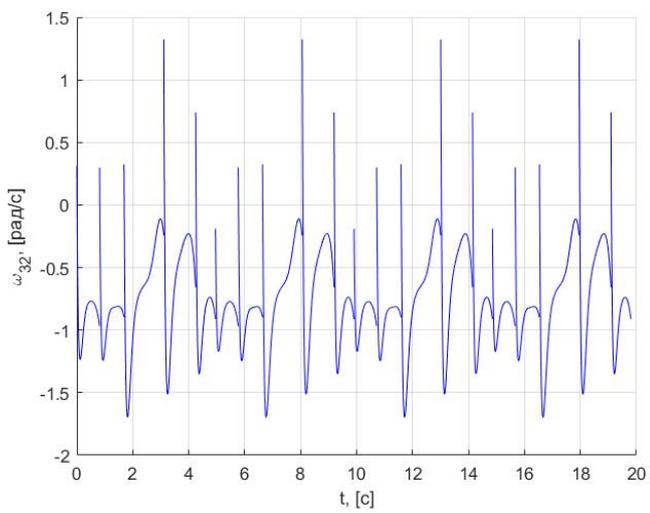
**Рис. 11.** Графики изменения обобщенных координат в пределах 20 шагов



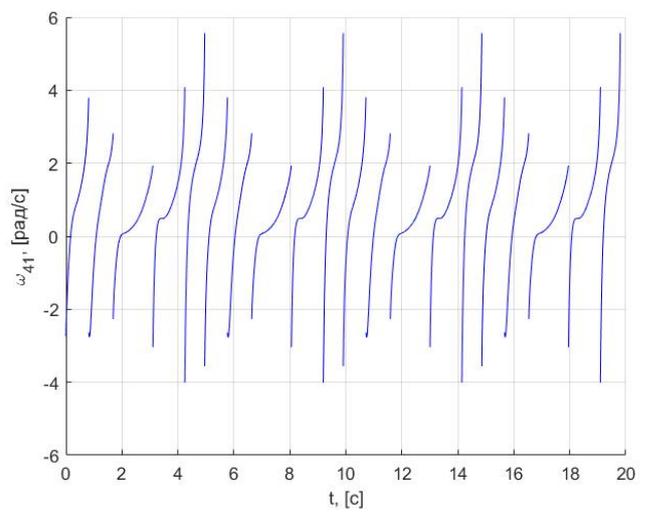
а)  $\omega_{11}$



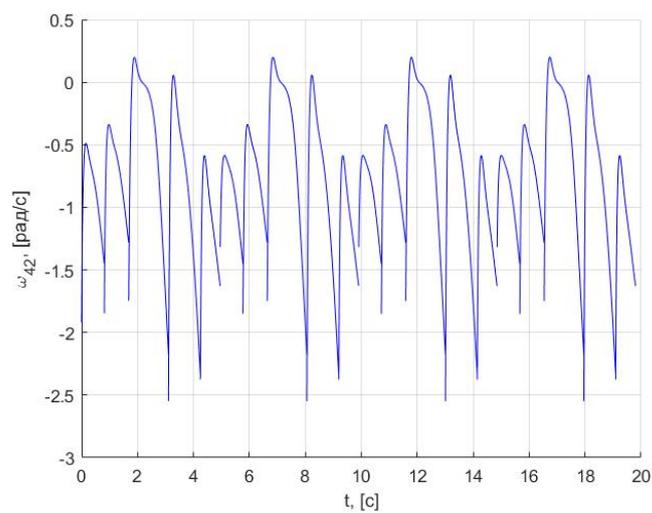
б)  $\omega_{31}$



в)  $\omega_{32}$

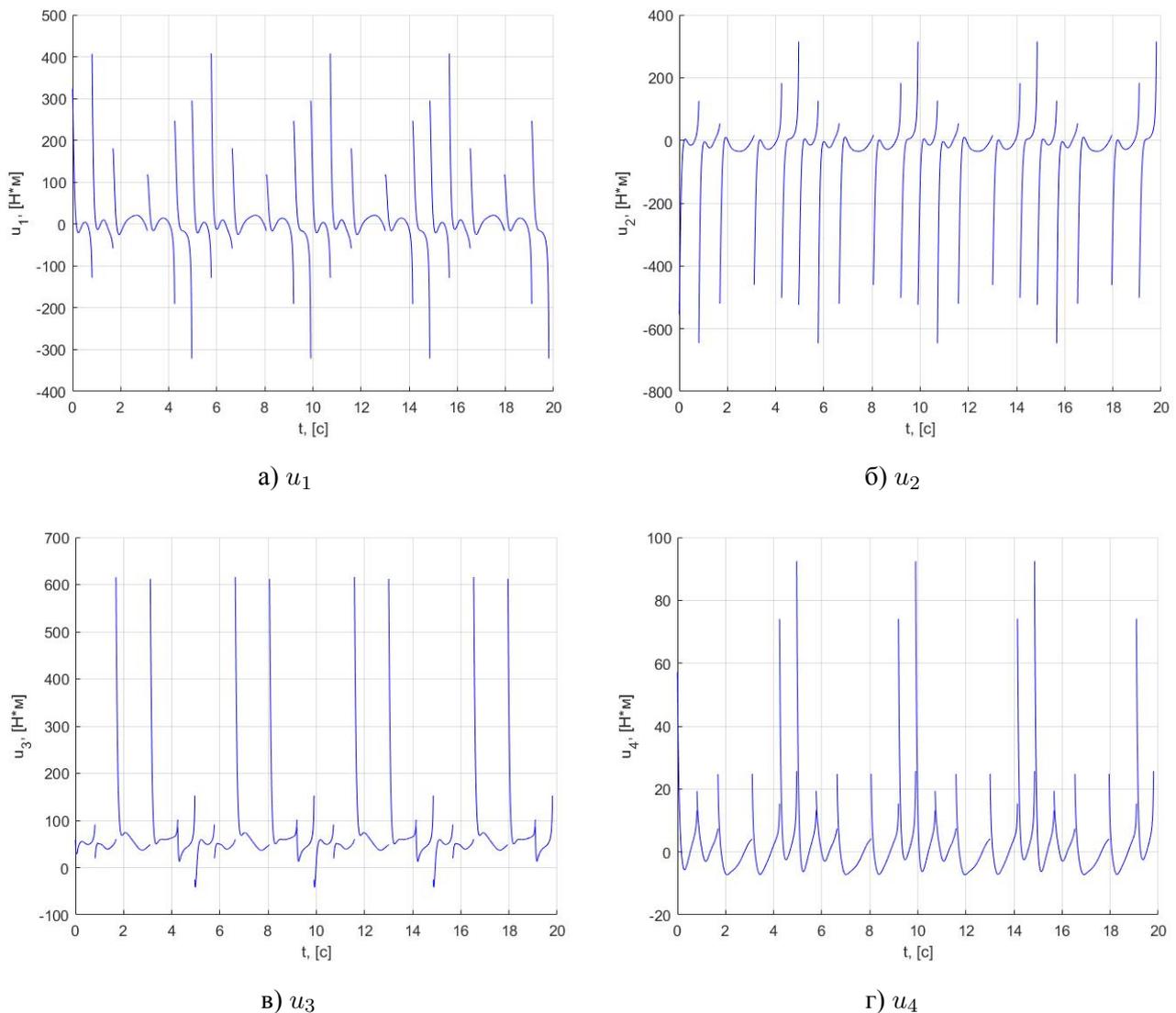


г)  $\omega_{41}$



д)  $\omega_{42}$

**Рис. 12.** Графики изменения обобщенных скоростей в пределах 20 шагов



**Рис. 13.** Графики изменения управлений в пределах 20 шагов

### Заключение

Рассмотрена проблема управления плоским перемещением пятизвенного двуногого шагающего робота по поверхности, представляющей собой периодическое чередование горизонтальных участков и препятствий в виде ступеней. Движение двуногого шагающего робота по указанной поверхности описывается гибридной системой с управлением. Эта система включает в себя систему обыкновенных дифференциальных уравнений на фазе одноопорного движения и алгебраическое соотношение на фазе перехода. Для фазы одноопорного движения предложены выходы, равенство которых нулю отвечает движению робота с заданными характеристиками. Построены управления, стабилизирующие предложенные выходы за конечное время. Разработан алгоритм, позволяющий построить периодическое решение гибридной системы, описывающей поведение робота и замкнутой построенным управлением. Полученные результаты могут быть использованы для решения задач управ-

вдения движением шагающих роботов по поверхности с препятствиями более сложной формы.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты №20-07-00279 и 19-07-00817).

### Список литературы

1. Вукобратович М. Шагающие роботы и антропоморфные механизмы: пер. с англ. М.: Мир, 1976. 541 с. [Vukobratovic M. Legged locomotion robots and anthropomorphic mechanisms. Beograd: Mihailo Pupin Inst. Publ., 1975. 308 p.].
2. Формальский А.М. Перемещение антропоморфных механизмов. М.: Наука, 1982. 368 с.
3. Белецкий В.В. Двухногая ходьба. Модельные задачи динамики и управления. М.: Наука, 1984. 288 с.
4. Охочимский Д.Е., Голубев Ю.Ф. Механика и управление движением автоматического шагающего аппарата. М.: Наука, 1984. 312 с.
5. Spong M.W. Passivity based control of the compass gait biped // IFAC Proc. Volumes. 1999. Vol. 32, no. 2. Pp. 506–510. DOI: [10.1016/S1474-6670\(17\)56086-3](https://doi.org/10.1016/S1474-6670(17)56086-3)
6. Rouchon P., Sira-Ramirez H. Control of the walking toy: a flatness approach // 2003 American control conf. (Denver, CO, USA, June 4-6, 2003): Proc. N.Y.: IEEE, 2003. Vol. 3. Pp. 2018–2023. DOI: [10.1109/ACC.2003.1243371](https://doi.org/10.1109/ACC.2003.1243371)
7. Spong M.W., Lozano R., Mahony R. An almost linear biped // 39<sup>th</sup> IEEE conf. on decision and control (Sydney, NSW, Australia, December 12-15, 2000): Proc. N.Y.: IEEE, 2001. Vol. 5. Pp. 4803–4808. DOI: [10.1109/CDC.2001.914688](https://doi.org/10.1109/CDC.2001.914688)
8. Cambrini L., Chevalleray C., Moog C.H., Stojic R. Stable trajectory tracking for biped robots // 39<sup>th</sup> IEEE conf. on decision and control (Sydney, NSW, Australia, December 12-15, 2000): Proc. N.Y.: IEEE, 2001. Vol. 5. Pp. 4815–4820. DOI: [10.1109/CDC.2001.914690](https://doi.org/10.1109/CDC.2001.914690)
9. Hurmuzlu Y., Genot F., Brogliato B. Modeling, stability and control of biped robots – a general framework // Automatica. 2004. Vol. 40, no. 10. Pp. 1647–1664. DOI: [10.1016/j.automatica.2004.01.031](https://doi.org/10.1016/j.automatica.2004.01.031)
10. Grizzle J.W., Abba G., Plestan F. Asymptotically stable walking for biped robots: analysis via systems with impulse effects // IEEE Transactions on Automatic Control. 2001. Vol. 46, no. 1. Pp. 51–64. DOI: [10.1109/9.898695](https://doi.org/10.1109/9.898695)
11. Bhat S.P., Bernstein D.S. Continuous finite-time stabilization of the translational and rotational double integrators // IEEE Transactions on Automatic Control. 1998. Vol. 43, no. 5. Pp. 678–682. DOI: [10.1109/9.668834](https://doi.org/10.1109/9.668834)
12. Крищенко А.П., Ткачев С.Б., Фетисов Д.А. Управление плоским перемещением двухногого пятизвенного робота // Нелинейная динамика и управление: Сб. ст. / Под ред. С.В. Емельянова, С.К. Коровина. М.: Физматлит, 2003. Вып. 3. С. 201–216.

13. Plestan F., Grizzle J.W., Westervelt E.R., Abba G. Stable walking of a 7-DOF biped robot // IEEE Transactions on Robotics and Automation. 2003. Vol. 19, no. 4. Pp. 653–668. DOI: [10.1109/TRA.2003.814514](https://doi.org/10.1109/TRA.2003.814514)
14. Westervelt E.R., Grizzle J.W., Koditschek D.E. Hybrid zero dynamics of planar biped walkers // IEEE Transactions on Automatic Control. 2003. Vol. 48, no. 1. Pp. 42–56. DOI: [10.1109/TAC.2002.806653](https://doi.org/10.1109/TAC.2002.806653)
15. Крищенко А.П., Ткачев С.Б., Фетисов Д.А. Управление плоским перемещением двуногого пятизвенного робота по лестнице // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Естественные науки. 2006. № 1. С. 38–64. Режим доступа: <http://vestniken.ru/articles/349/349.pdf> (дата обращения 23.08.2021).
16. Лапшин В.В. Механика и управление движением шагающих машин. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2012. 199 с.
17. Grizzle J.W., Chevallereau C., Sinnet R.W., Ames A.D. Models, feedback control, and open problems of 3D bipedal robotic walking // Automatica. 2014. Vol. 50, no. 8. Pp. 1955–1988. DOI: [10.1016/j.automatica.2014.04.021](https://doi.org/10.1016/j.automatica.2014.04.021)
18. Isidori A. Nonlinear control systems. 3<sup>rd</sup> edition. B.; N.Y.: Springer, 1995, 550 p.



## Planar motion of a five-link biped robot over a stepped surface

Vankina I. N.<sup>1</sup>, Fetisov D. A.<sup>1,\*</sup>

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

\*[dfetisov@yandex.ru](mailto:dfetisov@yandex.ru)

---

**Keywords:** five-link biped robot, hybrid system, periodic solution

---

Received: 03.09.2021.

---

Modeling the anthropomorphic robot movement is of great interest to researchers all over the world. At the same time, the movement control of a walking mechanism is always a high dimension challenge. The difficulty with the anthropomorphic robot control is also caused by the fact that such a mechanism has always a hybrid dynamics and represents a sequential change of two phases: the single support phase and the double support phase (phase of changing robot's leg). At the single support phase and at another phase the behavior of the biped robot is described by a system of ordinary differential equations and by a system of linear algebraic equations, respectively.

The task of biped robot movement control has been studied in detail for the case when the robot moves over the horizontal surface. Obstacles make the task significantly complicated. The paper considers the movement control of the biped robot over the surface that is a periodic alternation of horizontal sections and obstacles. The obstacles represent steps of the same height known. It is assumed that the lengths of horizontal sections and steps are known as well. The objective is to create a control that provides robot's periodic movement over the specified surface according to inherent characteristics of a walking human.

For the single support phase, the outputs are proposed, the equality of which to zero corresponds to the robot's movement with a given set of characteristics. The paper presents the feedback controls that stabilize the proposed outputs for a finite amount of time. By choosing the feedback parameters, it is possible to adjust the stabilization time so that the outputs become equal to zero when reached the end of each step.

It is shown that for the chosen control law, the problem of constructing the control of robot's periodic movement is reduced to the solution of a nonlinear equation. In the paper, we discuss the approaches to solving this equation and present the results of numerical simulation.

The results obtained can be used to solve the problem of providing control of the biped robot movement over the surfaces with obstacles of a more complicated shape.

## References

1. Vukobratovic M. *Legged locomotion robots and anthropomorphic mechanisms*. Beograd: Mihailo Pupin Inst. Publ., 1975. 308 p. (Russ. ed.: Vukobratovic M. *Shagayushchie roboty i antropomorfnye mehanizmy*. Moscow: Mir Publ., 1976. 541 p.).
2. Formal'skij A.M. *Peremeshchenie antropomorfnyh mehanizmov* [Movement of anthropomorphic mechanisms]. Moscow: Nauka Publ., 1982. 368 p. (in Russian).
3. Beletskij V.V. *Dvunogaia hod'ba. Model'nye zadachi dinamiki i upravleniia* [Bipedal walking. Model problems of dynamics and control]. Moscow: Nauka Publ., 1984. 288 p. (in Russian).
4. Okhotsimskij D.E., Golubev Yu.F. *Mekhanika i upravlenie dvizheniem avtomaticheskogo shagayushchego apparata* [Mechanics and motion control of an automatic walking apparatus]. Moscow: Nauka Publ., 1984. 312 p. (in Russian).
5. Spong M.W. Passivity based control of the compass gait biped. *IFAC Proc. Volumes*, 1999, vol. 32, no. 2, pp. 506–510. DOI: [10.1016/S1474-6670\(17\)56086-3](https://doi.org/10.1016/S1474-6670(17)56086-3)
6. Rouchon P., Sira-Ramirez H. Control of the walking toy: a flatness approach. *2003 American control conf.* (Denver, CO, USA, June 4-6, 2003): Proc. N.Y.: IEEE, 2003. Vol. 3. Pp. 2018–2023. DOI: [10.1109/ACC.2003.1243371](https://doi.org/10.1109/ACC.2003.1243371)
7. Spong M.W., Lozano R., Mahony R. An almost linear biped. *39<sup>th</sup> IEEE conf. on decision and control* (Sydney, NSW, Australia, December 12-15, 2000): Proc. N.Y.: IEEE, 2001. Vol. 5. Pp. 4803–4808. DOI: [10.1109/CDC.2001.914688](https://doi.org/10.1109/CDC.2001.914688)
8. Cambrini L., Chevallerat C., Moog C.H., Stojic R. Stable trajectory tracking for biped robots. *39<sup>th</sup> IEEE conf. on decision and control* (Sydney, NSW, Australia, December 12-15, 2000): Proc. N.Y.: IEEE, 2001. Vol. 5. Pp. 4815–4820. DOI: [10.1109/CDC.2001.914690](https://doi.org/10.1109/CDC.2001.914690)
9. Hurmuzlu Y., Genot F., Brogliato B. Modeling, stability and control of biped robots – a general framework. *Automatica*, 2004, vol. 40, no. 10, pp. 1647–1664. DOI: [10.1016/j.automata.2004.01.031](https://doi.org/10.1016/j.automata.2004.01.031)
10. Grizzle J.W., Abba G., Plestan F. Asymptotically stable walking for biped robots: analysis via systems with impulse effects. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001, vol. 46, no. 1, pp.51–64. DOI: [10.1109/9.898695](https://doi.org/10.1109/9.898695)
11. Bhat S.P., Bernstein D.S. Continious finite-time stabilization of the translational and rotational double integrators. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1998, vol. 43, no. 5, pp. 678–682. DOI: [10.1109/9.668834](https://doi.org/10.1109/9.668834)
12. Krishchenko A.P., Tkachev S.B., Fetisov D.A. Upravlenie ploskim peremeshcheniem dvunogogo piatizvennogo robota [Planar motion control of a biped five-link robot]. *Nelinejnaiia dinamika i upravlenie: Sbornik statej* [Nonlinear dynamics and control: Digest of articles]. Moscow: Fizmatlit Publ., 2003. No. 3. Pp. 201–216 (in Russian).

13. Plestan F., Grizzle J.W., Westervelt E.R., Abba G. Stable walking of a 7-DOF biped robot. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 2003, vol. 19, no. 4, pp. 653–668. DOI: [10.1109/TRA.2003.814514](https://doi.org/10.1109/TRA.2003.814514)
14. Westervelt E.R., Grizzle J.W., Koditschek D.E. Hybrid zero dynamics of planar biped walkers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, vol. 48, no. 1, pp. 42–56. DOI: [10.1109/TAC.2002.806653](https://doi.org/10.1109/TAC.2002.806653)
15. Krishchenko A.P., Tkachev S.B., Fetisov D.A. Planar motion control of a biped five-link robot along the stairs. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Estestvennye nauki* [Herald of the BMSTU. Natural Sciences], 2006, no. 1, pp. 38–64. Available at: <http://vestniken.ru/articles/349/349.pdf>, accessed 23.08.2021 (in Russian).
16. Lapshin V.V. *Mekhanika i upravlenie dvizheniem shagayushchikh mashin* [Mechanics and motion control of walking machines]. Moscow: BMSTU Publ., 2012. 199 p. (in Russian).
17. Grizzle J.W., Chevallereau C., Sinnet R.W., Ames A.D. Models, feedback control, and open problems of 3D bipedal robotic walking. *Automatica*, 2014, vol. 50, no. 8, pp. 1955–1988. DOI: [10.1016/j.automatica.2014.04.021](https://doi.org/10.1016/j.automatica.2014.04.021)
18. Isidori A. *Nonlinear control systems*. 3<sup>rd</sup> edition. B.; N.Y.: Springer, 1995, 550 p.