



**El zoo de las partículas: De la relatividad a la teoría de campos clásica y
cuántica**

Javier Bescós Artigas

28 de Junio 2021

Facultad de Física

Departamento de Física Teórica

Director: *Siannah Peñaranda Rivas*

Índice

1. Introducción	1
2. Campo electromagnético clásico. Invariancia gauge	1
3. Campo de Dirac	3
3.1. Motivación	3
3.2. Ecuación de Dirac	4
3.3. Densidad y corriente de probabilidad	6
4. Cuantización de campos libres	7
4.1. Cuantización del electromagnetismo clásico	7
4.2. Variaciones al Lagrangiano clásico	8
5. Simetrías	9
6. QED	10
7. Modelo estándar electrodébil	11
7.1. Interacción electrodébil	12
8. Ruptura espontánea de la simetría. El bosón de Higgs	14
8.1. Modelo Simplicado	14
8.2. Ruptura de la simetría local. Mecanismo de Higgs	16
8.3. Masas de los bosones y relación entre las constantes de acoplo	18
8.4. Masa del Higgs	19
8.5. Masa de los fermiones	19
9. Cálculo de desintegraciones del Higgs	20
9.1. Diagramas y reglas de Feynmann	21
9.2. $H \rightarrow f + \bar{f}$	21
9.3. $H \rightarrow W^+ + W^-$	23
10. Conclusiones	24

1. Introducción

El trabajo de numerosos físicos en el siglo XX nos dotó de un importante resultado: toda la materia del universo está compuesta por las denominadas partículas elementales; aquellas sin subestructura conocida. Éstas son de dos tipos; partículas materiales y partículas intermedias o de interacción. El comportamiento de éstas y sus interacciones están regidos por cuatro fuerzas fundamentales en la naturaleza, véase la fuerza electromagnética, fuerte, débil y la gravitación.

A lo largo de la segunda mitad del siglo XX se desarrolló la teoría que llamamos *Modelo Estándar de la Física de Partículas*, una teoría cuántica relativista que describe tres de las cuatro fuerzas fundamentales, las interacciones electromagnéticas, débiles y fuertes y que ha sido comprobada experimentalmente con un nivel muy alto de precisión.

En este trabajo tenemos la intención de introducirnos en el Modelo Estándar, más precisamente en la teoría electrodébil, la cual agrupa la interacción electromagnética y débil; partiendo desde la teoría clásica del electromagnetismo y la mecánica cuántica bajo las restricciones impuestas por la teoría de la relatividad de Einstein; exigiendo la invariancia Lorentz de la teoría. El intento de hacer una mecánica cuántica relativista se frustra debido al problema de la existencia de estados con energía negativa debido a la imposición de que las ecuaciones de movimiento sean covariantes. Veremos como la búsqueda de una ecuación tipo Schrödinger relativista conlleva la aparición de forma natural del espín así como de nuevos conceptos como la antimateria. Estudiaremos la formulación de la teoría de la electrodinámica cuántica, y extenderemos el procedimiento propuesto a la teoría electrodébil. Por último ahondaremos en la idea de simetrías en la física para terminar explicando lo que se conoce como el *Mecanismo de Higgs* y como éste dota de masa a las partículas del Modelo Estándar.

2. Campo electromagnético clásico. Invariancia gauge

El desarrollo teórico del electromagnetismo clásico se basa en la formulación expuesta por Maxwell, que condensa en cuatro ecuaciones las propiedades de la interacción electromagnética. Las ecuaciones de Maxwell inhomogéneas y homogéneas están dadas por:

$$\nabla \cdot E = \rho \tag{1}$$

$$\nabla \times B = \frac{\vec{J}}{c} + \frac{\partial E}{c \partial t} \tag{2}$$

$$\nabla \cdot B = 0 \tag{3}$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{c \partial t} \tag{4}$$

donde E y B corresponden a los campos eléctrico y magnético respectivamente (vectores de tres componentes), ρ es la densidad de carga y \vec{J} la densidad de corriente de partículas cargadas en el sistema. El éxito, entre muchos, de esta formulación es el de encontrar soluciones de la ecuación de onda para estos campos. El estudio exhaustivo de esta formulación, arrojó el problema de la "no invariancia" bajo las transformaciones de Lorentz, que discutiremos más adelante.

Es conocido, por el teorema de Helmholtz; que los campos E y B pueden ser descritos a

partir de dos cantidades, el potencial vector \vec{A} y el campo escalar ϕ . Éstos cumplen las relaciones:

$$B = \nabla \times \vec{A} \quad (5)$$

$$E = -\nabla\phi - \frac{\partial\vec{A}}{c\partial t} \quad (6)$$

Sin embargo, estas ecuaciones no definen unívocamente al potencial \vec{A} . Se pueden definir unas transformaciones sobre el potencial vector \vec{A} y el campo escalar ϕ tales que los campos E y B permanecen invariantes.

La idea de invariancia gauge aparece por primera vez en el electromagnetismo, donde los campos físicos E y B , los cuales son derivados a partir de los potenciales como se muestra en (5) y (6), quedan inalterados bajo una *transformación de gauge* de la forma:

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi - \frac{\partial f}{\partial t}, \quad \vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \nabla f, \quad (7)$$

donde f es una función arbitraria de las coordenadas espacio-temporales, y se ha utilizado $c=1$ por simplicidad.

Aunque las ecuaciones de Maxwell homogéneas no cambian de forma con la transformación de gauge anterior, ésto no ocurre para las ecuaciones no homogéneas (1) y (2). Para subsanar este problema así como reescribir el electromagnetismo clásico en una forma explícitamente invariante Lorentz (covariante), definimos un cuatri-vector potencial $A_\mu = (\phi, -\vec{A})$ tal que (7) puede escribirse en una notación covariante como :

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu f \quad (8)$$

Las ecuaciones dadas en (5) y (6) se pueden escribir en términos de este cuatri-vector, definiendo el tensor $F_{\mu\nu}$:

$$F_{\mu\nu} = (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & -0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0, \end{pmatrix} \quad (9)$$

el cual es invariante bajo una transformación de gauge ya que está constituido por los campos físicos. Por último, escribamos las ecuaciones de Maxwell en esta nueva nomenclatura [1]. Las ecuaciones homogéneas, dadas en (3) y (4), quedan reescritas en la forma:

$$\boxed{\partial_\alpha F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\alpha} + \partial_\nu F_{\alpha\mu} = 0} \quad (10)$$

Las ecuaciones inhomogéneas (1) y (2) se escribirían como:

$$\boxed{\partial_\nu F^{\mu\nu} = j^\mu}, \quad (11)$$

donde hemos introducido otra magnitud importante, el cuatri-vector densidad *carga-corriente* j^μ , definido como:

$$j^\mu = (j^0, \vec{j}) = (\rho, \vec{J}) \quad (12)$$

Cabe remarcar que la forma del tensor $F_{\mu\nu}$ no es arbitraria, dado que satisface que es un tensor 4-dimensional y conformado únicamente a partir de 6 parámetros diferentes (las componentes de los campos), lo que justifica que sea escrito como una matriz antisimétrica; con 6 grados de libertad.

3. Campo de Dirac

3.1. Motivación

El problema de partida con el que se encontró Dirac y le llevó a la derivación de su famosa ecuación en 1928 es el siguiente:

Primero, teníamos la ecuación de Schrödinger que describe el movimiento del electrón pero es no-relativista. Esta ecuación trata de forma distinta el tiempo y el espacio, dado que es una ecuación lineal en la derivada temporal pero cuadrática en la espacial:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = \hat{H} \psi(\vec{r}, t) \quad (13)$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2 \vec{\nabla}^2}{2m} + V \right) \psi, \quad (14)$$

donde \hbar es la constante de Planck, ψ es la función de onda en la mecánica cuántica no relativista, m es la masa de la partícula y \hat{H} es el Hamiltoniano del sistema.

Un intento por suplir el problema, fue partir de la fórmula relativista de la energía,

$$E^2 = (mc^2)^2 + (\vec{p}c)^2, \quad (15)$$

que nos lleva a la ecuación de Klein-Gordon. Es importante destacar la invariancia relativista de la ecuación de Klein-Gordon que se deduce de la invariancia relativista de esta relación anterior de energía-momento, es decir, la invariancia bajo las transformaciones de Lorentz. Si introducimos el cuadrivector $p^\mu = (E/c, \vec{p})$, cuyas componentes corresponden con la energía total y el momento, tenemos que:

$$\begin{aligned} E^2 = (mc^2)^2 + (\vec{p}c)^2 &\implies p^\mu p_\mu - m^2 c^2 = 0 \\ p^\mu \rightarrow i\hbar \partial^\mu &\implies -\hbar^2 \partial^\mu \partial_\mu \psi - m^2 c^2 \psi = 0. \end{aligned}$$

Reordenándolo, y usando unidades naturales a partir de ahora salvo que se diga lo contrario (para las cuales las constantes fundamentales $c, \hbar = 1$), obtenemos la ecuación de Klein-Gordon (K.G):

$$\boxed{(\partial^\mu \partial_\mu - m^2) \psi(\vec{x}, t) = 0} \quad (16)$$

Veamos, no obstante, que este proceder para la obtención de una ecuación cuántica y relativista, acarrea problemas ineludibles. La ecuación de K.G debe corresponder, cuando $m = 0$, al campo cuántico de los fotones, partículas relativistas de masa en reposo nula. Busquemos soluciones de la ecuación de K.G si $m = 0$:

$$\partial^\mu \partial_\mu \psi = 0 \implies \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi = \nabla^2 \psi$$

cuya solución es la ecuación de onda

$$\begin{aligned} \psi_+(\vec{x}, t) &= e^{-i(Et - \vec{p}\vec{x})} \\ \psi_-(\vec{x}, t) &= e^{i(Et - \vec{p}\vec{x})}. \end{aligned}$$

Introduciendo ésto en la ecuación (16) obtenemos que:

$$E^2 - |\vec{p}|^2 = m^2 \implies E = \pm \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2} \quad (17)$$

Por tanto aparecen soluciones de energía negativa, cuya interpretación física no es clara en términos de los conceptos que tenemos hasta el momento, y además no pueden ser descartadas como en casos clásicos porque si no el Hamiltoniano no sería unitario. Además, si calculamos la 4-corriente de probabilidad, obtenemos una densidad de probabilidad negativa. Para demostrarlo multiplicamos por $i\psi^*$ la ecuación de K.G (16) y por $i\psi$ la ecuación conjugada y restándolas, se obtiene que:

$$i[\psi^* \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi - \psi \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi^*] = i \frac{\partial}{\partial t} [\psi^* \frac{\partial}{\partial t} \psi - \psi \frac{\partial}{\partial t} \psi^*] = i \nabla [\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*],$$

y por tanto podemos escribir:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \vec{J}, \quad (18)$$

donde la densidad de probabilidad ρ está dada por:

$$\rho = \psi^* \frac{\partial}{\partial t} \psi - \psi \frac{\partial}{\partial t} \psi^*, \quad (19)$$

y la densidad de corriente por:

$$\vec{J} = \psi \nabla \psi^* - \psi^* \nabla \psi. \quad (20)$$

Ahora bien, tenemos que:

$$\begin{aligned} \psi^* \frac{\partial}{\partial t} \psi &\propto -E e^{+i(Et-px)} e^{-i(Et-px)} \propto -E \\ -\psi \frac{\partial}{\partial t} \psi^* &\propto -E \\ \Rightarrow \boxed{\rho \propto -E} \end{aligned}$$

Por tanto la ecuación de Klein-Gordon conlleva densidad de probabilidad negativa. La densidad de probabilidad ρ , definida en (19), depende tanto de la función ψ como de su derivada temporal y no es una cantidad definida positiva, no puede interpretarse de manera probabilística. Estas nuevas soluciones de energía negativa son necesarias matemáticamente para construir la solución general como una ecuación de ondas donde se superponen estados con frecuencias o energías de ambos signos. Sin embargo, no tienen sentido físico hasta el momento; conllevan a la definición posterior de antipartícula, debido a la naturaleza relativista de la teoría cuántica. Sin embargo, tenemos que encontrar una nueva forma de solucionar el problema de la interpretación no probabilística para la función densidad de probabilidad y la corriente asociada.

3.2. Ecuación de Dirac

Dirac tuvo una fuerte intuición y propuso una ecuación que subsanara los problemas de la ecuación de Schrödinger así como los de la ecuación de Klein-Gordon mostrados anteriormente. Buscaba una ecuación de ondas relativista del tipo de Schrödinger, con derivada de primer orden en el tiempo y que permitiera definir una densidad de probabilidad definida positiva. Para ello postuló una ecuación, lineal en las derivadas; tanto temporales como espaciales, e impuso sobre ésta que cumpliera la ecuación de energía relativista. Para que se cumplieran todas las exigencias citadas obtuvo que los coeficientes de proporcionalidad no eran escalares sino *matrices* que satisfagan determinadas relaciones. Esto tendrá importantes consecuencias

como la emergencia del espín de forma natural en la teoría. A continuación procedemos a derivar la ecuación de Dirac.

Partimos de un Hamiltoniano lineal en el momento,

$$\hat{H}\psi = (\alpha\vec{p} + \beta m)\psi \quad (21)$$

Elevando al cuadrado, y exigiendo que el nuevo Hamiltoniano cumpla la conservación de la energía relativista dada en (15), obtenemos que:

$$\begin{aligned} (\alpha p + \beta m)^2 &= (\alpha p)^2 + (\beta m)^2 + (\alpha\beta + \beta\alpha) pm \\ &= p^2 + m^2 \\ \Leftrightarrow \alpha^2 &= \beta^2 = 1, \quad \alpha\beta + \beta\alpha = 0 \end{aligned}$$

Por tanto, α y β tienen que ser tales que cumplan estas condiciones, lo cual es imposible a no ser que consideremos la posibilidad de que α y β no sean números sino matrices. Esta fue la propuesta que hizo Dirac.

Vamos a partir de una expresión covariante de las condiciones expuestas con objeto de obtener directamente su famosa ecuación de una manera explícitamente invariante Lorentz. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que los coeficientes indeterminados sólo acompañan a las componentes del 4-momento p^μ . Por lo dicho anteriormente estos coeficientes son matrices:

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)\psi = 0 \quad (22)$$

donde las γ^μ están aún por determinar. Reescribimos la ecuación de K.G en su forma covariante, que toma la forma:

$$(p^\beta p_\beta - m^2)\psi = 0 \quad (23)$$

Si ahora actuamos en la ecuación (22) con el operador $(\alpha^\nu p_\nu + m)$, donde las matrices α^ν son desconocidas; y utilizamos la ecuación de K.G (23), tenemos que:

$$\begin{aligned} (\alpha^\nu p_\nu + m)(\gamma^\mu p_\mu - m)\psi &= 0 = (p^\beta p_\beta - m^2)\psi, \forall \psi \\ \Rightarrow (\alpha^\nu p_\nu + m)(\gamma^\mu p_\mu - m) &= p^\beta p_\beta - m^2 \end{aligned}$$

Ahora bien, desarrollando el lado izquierdo e igualando término a término podemos determinar las propiedades que han de cumplir α^ν y γ^μ :

- Términos cruzados: $-m\alpha^\mu p_\mu + m\gamma^\nu p_\nu = 0 \Rightarrow \alpha^\mu = \gamma^\mu$
- A partir de lo anterior queda: $\gamma^\mu \gamma^\nu p_\mu p_\nu - m^2 = p^\beta p_\beta - m^2$

Del último punto se extrae una propiedad fundamental de las matrices γ , dado que los términos cruzados han de anularse, y los diagonales dar la identidad:

$$\begin{aligned} \text{si } \mu \neq \nu &\Rightarrow \gamma^\mu \gamma^\nu p_\mu p_\nu = 0 \quad \forall p_\mu, p_\nu \\ \text{si } \mu = \nu &\Rightarrow \gamma^\mu \gamma^\nu p_\mu p_\nu = p_\mu^2 \quad \forall p_\mu \end{aligned}$$

Deshaciendo la notación, ambas condiciones pueden resumirse en la siguiente:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (24)$$

La elección de que dichas matrices sean 4x4 no es arbitraria. La primera dimensión en la que es posible encontrar unas γ que satisfagan todas las propiedades que se les piden es 4. Existen varias representaciones posibles, pero por razones históricas se usa la representación de Dirac:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad (25)$$

$$\gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix} \quad (26)$$

donde los elementos dentro de las cajas son matrices 2x2, y las σ_k son las conocidas matrices de Pauli.

Volviendo al principio de la derivación y partiendo de $\gamma^\mu p_\mu - m = 0$, definimos $p_\mu = i(\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla}) = i\partial_\mu$, y se obtiene la forma típica de la ecuación de Dirac:

$$\boxed{(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0} \quad (27)$$

Cabe destacar que para que dimensionalmente tenga sentido, el término 'm' está implícitamente multiplicado por la matriz I_{4x4} .

Una vez obtenida la ecuación, podría quedarse en una suerte de juego matemático si no es capaz de solucionar el problema de la densidad de probabilidad negativa que obteníamos de (16). Analizamos este problema en la sección siguiente.

3.3. Densidad y corriente de probabilidad

Partimos de la ecuación (27) y su conjugada:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0 \xrightarrow{\times -\psi^\dagger \text{ por izq.}} 0 = -i\psi^\dagger \gamma^\mu \partial_\mu \psi + m\psi\psi^\dagger \quad (28)$$

$$(-i\gamma_\mu \partial^\mu - m)\psi^\dagger = 0 \xrightarrow{\times -\psi \text{ por drch.}} 0 = i\partial^\mu \psi^\dagger \gamma_\mu \psi + m\psi\psi^\dagger \quad (29)$$

Ahora bien, si restamos (29) a (28) obtenemos:

$$\partial^\mu \psi^\dagger \gamma_\mu \psi + \psi^\dagger \gamma^\mu \partial_\mu \psi = 0$$

Separamos las componentes espaciales de la temporal, y reordenamos, dado que γ conmuta con los campos y las derivadas:

$$\gamma_0(\partial^0 \psi^\dagger)\psi + \gamma^0 \psi^\dagger(\partial_t \psi) = -[\gamma_i(\partial^i \psi^\dagger)\psi + \gamma^i \psi^\dagger(\partial_i \psi)]$$

Y como $\gamma_i \partial^i \psi^\dagger = -\gamma^i \partial^i \psi^\dagger = \gamma^i \partial_i \psi^\dagger$, obtenemos

$$-[\gamma^0 \gamma^i \partial_i (\psi^\dagger \psi)] = \partial_0 (\psi^\dagger \psi)$$

donde se ha utilizado que la inversa de γ^0 es ella misma.

Si definimos $\vec{j} = \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^i \psi \equiv \psi^\dagger \gamma^0 \vec{\gamma} \psi$ y $\rho = \psi^\dagger \psi$, la ecuación anterior toma la forma:

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0} \quad (30)$$

Vemos por tanto, que la ecuación de Dirac acaba con el problema de la *densidad de probabilidad negativa*, ya que $\psi^\dagger \psi > 0$ siempre.

Otro resultado importante obtenido de la ecuación de Dirac es que de sus soluciones aparece de forma natural el espín, y la *helicidad*, cantidad escalar que corresponde con la proyección del espín a lo largo de la dirección de movimiento. Por ello se dice que describe el comportamiento de partículas relativistas de espín $1/2$. Por tanto, podemos concluir que el origen de esta propiedad está ligado a la invariancia Lorentz de la electrodinámica.

El último de los resultados interesantes de la ecuación de Dirac es el planteamiento teórico de la de antimateria. Dirac postuló en 1931, con anterioridad a su descubrimiento; la existencia de una nueva partícula con la misma masa que el electrón y carga opuesta. Dada la existencia de soluciones de energía negativa en su ecuación, Dirac propuso que todos estos estados están ocupados y no son observables, pero que cuando uno de estos se aniquila, el hueco se comporta como una partícula de carga $+e$. Esta interpretación asume la existencia de lo que se denomina *mar de Dirac*, el cual es una colección de estados de energía negativa que no pueden ser detectados.

4. Cuantización de campos libres

En un sistema clásico de coordenadas y momentos, para cuantizar proponemos que coordenadas y momentos sean operadores e imponemos determinadas reglas de conmutación entre ellos. En teoría de campos para cuantizar los campos, proponemos que dichos campos sean operadores e imponemos unas relaciones de conmutación equivalentes en lo que se denomina cuantización canónica. Veamos este procedimiento para el caso de campos libres [1]. Consideremos la electrodinámica clásica, teoría de interacción entre fotones y partículas cargadas.

4.1. Cuantización del electromagnetismo clásico

El campo electromagnético $A_\mu(x)$ tiene cuatro componentes y sin embargo solo existen dos grados de libertad que corresponden con los dos modos de polarización transversal del fotón linealmente independientes. Por tanto, tenemos un exceso de componentes que conlleva al problema de cuantizar el campo electromagnético.

Las ecuaciones (10) y (11) pueden ser derivadas a partir de una densidad lagrangiana explícitamente covariante:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - j^\mu A_\mu, \quad (31)$$

donde $F^{\mu\nu}$ es el tensor del campo electromagnético definido en (9) y el segundo término corresponde con el término de interacción.

Las relaciones de conmutación canónica que imponemos que se satisfagan son:

$$[\phi^\mu(\vec{x}, t), \Pi^\mu(\vec{x}', t)] = i\hbar\delta(x - x') \quad (32)$$

$$[\phi^\mu(\vec{x}, t), \phi^\mu(\vec{x}', t)] = [\Pi^\mu(\vec{x}, t), \Pi^\mu(\vec{x}', t)] = 0 \quad (33)$$

En el caso que estamos considerando, la electrodinámica clásica, $\phi^\mu \equiv A^\mu$ y el momento generalizado es de la forma,

$$\Pi^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\mu)} \propto \frac{\partial F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}}{\partial \dot{A}_\mu}. \quad (34)$$

Por tanto, dada la forma del tensor (9), tenemos que:

$$\Pi^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_0)} = 0 \quad , \quad \Pi^i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_i)} = -F^{0i} = E^i .$$

Necesitamos ahora que se cumplan las relaciones de conmutación para los campos, más precisamente (32):

$$[A^\mu(x, t), \Pi^\mu(x', t)] = i\hbar \delta(x - x') .$$

Por tanto, a la hora de calcular dicha relación obtenemos para $\mu = 0$:

$$[A^0(x, t), \Pi^0(x', t)] = [\phi^0(x, t), 0] = 0 \neq i\hbar .$$

Lo cual es incompatible con las relaciones de conmutación que deseamos imponer y por tanto un Lagrangiano como el dado por (31) no puede ser cuantizado.

Otra forma de mostrar que la teoría clásica del campo electromagnético no se puede cuantizar directamente es demostrando la no existencia del propagador del fotón. Ésto puede entenderse como el problema que acarrearán las ecuaciones de Maxwell dado que, tenemos 6 parámetros a determinar o grados de libertad del sistema (las componentes de los campos \vec{E} y \vec{B}) y sólo 4 ligaduras, dadas por las ecuaciones (1) y (2); una ligadura de la primera y tres de la segunda, respectivamente. Es decir, tenemos un exceso de componentes dado que sólo existen dos grados de libertad independientes en el campo electromagnético. Este problema es equivalente a la inversión de una matriz con determinante *nulo* porque tiene dos filas linealmente dependientes de las demás.

En términos del campo A_μ podemos decir que todas las componentes del cuatri-vector no son independientes; solamente dos de ellas lo son, lo cual indica que la descripción en términos del cuatri-vector es redundante. El potencial clásico A_μ correspondería, desde un punto de vista físico, con el campo del fotón y sus dos componentes independientes con los dos estados físicos de polarización del fotón.

Este desacuerdo entre el número de componentes de un campo y los estados físicos de una partícula nos conduce a la definición de simetría gauge de la teoría de Maxwell y el problema de la denominada invariancia gauge. Por tanto, si queremos una teoría cuántica del electromagnetismo, debemos reescribir el Lagrangiano clásico de modo que se solucionen estos inconvenientes.

4.2. Variaciones al Lagrangiano clásico

Fermi propuso un cambio en (40) que solucionaba el problema con el momento Π^μ , pero sin dar una solución al problema de la existencia del propagador comentado anteriormente. El nuevo lagrangiano de Fermi toma la forma:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu A^\mu)(\partial^\nu A_\nu) - j^\mu A_\nu . \quad (35)$$

Por tanto, tenemos que $\Pi^\mu = -\dot{A}^\mu \neq 0$.

Para resolver el problema de la existencia del propagador del fotón, se hace necesario introducir un nuevo término en el Lagrangiano, el denominado término de *gauge fixing*:

$$\mathcal{L}_{GF} = -\frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2 , \quad (36)$$

donde la elección de un valor particular para ξ implica la elección de un gauge específico, por ejemplo $\xi = 0$ corresponde con lo que se conoce como gauge de Landau y $\xi = 1$ con el gauge de Feynman-t'Hooft.

Introducir el término de *gauge fixing* tiene su base en la redundancia del campo A^μ , el cual tiene 4 grados de libertad; pero tenemos únicamente 2 polarizaciones posibles del fotón. Una posible solución a este problema pasa por imponer condiciones sobre el campo A^μ tal que restrinjamos el número de componentes independientes. Este es el denominado procedimiento de *gauge fixing*.

El Lagrangiano final \mathcal{L}' será la suma de los dos términos dados en (35) y (36). A partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange se llega a:

$$\partial_\beta \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \beta A_\nu} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial (A_\nu)} \implies \square A^\nu - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) = j^\nu \quad (37)$$

donde $\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$ es el operador D'Alembertiano.

Para el cálculo del propagador reescribimos (37) como:

$$[g^{\lambda\nu} \square - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \partial^\nu \partial^\lambda] A_\mu = j^\lambda$$

Haciendo la transformada de Fourier para pasar al espacio de momentos, la función de Green; que no es más que el propagador del fotón estará dada por:

$$D_{\mu\nu}(k) = \frac{-1}{k^2 - i\epsilon} [g_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}] \quad (38)$$

donde k es el momento y el término $-i\epsilon$ se introduce para sortear el polo que aparece para $k = 0$ a la hora de trabajar con el propagador. A esto último se le conoce como *prescripción de Feynmann*.

Por tanto a partir de estas alteraciones sobre \mathcal{L} se han conseguido resolver los inconvenientes que impedían la cuantización del campo electromagnético. La forma final del Lagrangiano para QED (QED – “Quantum Electrodynamics”) es:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} (\partial_\mu A_\nu) (\partial^\nu A^\mu) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) (\partial_\mu A^\mu)^2 + \bar{\psi} (i\not{\partial} - m) \psi - e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu \quad (39)$$

donde $\not{\partial} = \gamma^\mu \partial_\mu$, el tercer término correspondería con el término de masa y se ha escrito el término de interacción en función de los campos ψ , $\bar{\psi}$:

$$\mathcal{L}_{int} = -j^\mu A_\mu = -e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu.$$

La QED es una teoría asociada a transformaciones de un grupo de simetría, el grupo $U(1)$. Las simetrías juegan un papel fundamental en toda la física y en especial en la física de partículas e interacciones. Antes de abordar la obtención del Lagrangiano para el Modelo Estándar de la física de partículas, vamos a explicar algunos conceptos sobre simetrías, imprescindibles a la hora de comprender la física detrás de la teoría electrodébil.

5. Simetrías

Una simetría es una invariancia ante cierta transformación. El teorema de Noether hace corresponder a cada simetría una ley de conservación y por tanto, una carga conservada. Una

simetría en física es una característica del sistema que permanece inalterada bajo una transformación. Para nuestro caso de interés podemos diferenciar entre 2 tipos: simetrías globales y locales:

- Una simetría global es aquella que mantiene una propiedad invariante bajo una transformación que afecta simultáneamente a todos los puntos del espacio (que en nuestro caso corresponde al conjunto de 4 coordenadas espacio-temporales).
- Una simetría local es aquella que sí depende de las coordenadas.

Por ahora hemos trabajado únicamente con simetrías globales, que tienen asociadas magnitudes conservadas como la carga. El hecho de convertir una transformación de global, o independiente de las coordenadas; a local, introduce interacciones como pueden ser las electromagnética y fuerte.

Las simetrías que nos interesan pueden ser representadas mediante grupos de Lie, caracterizados por generadores. Los elementos de dicho grupo corresponden a transformaciones *unitarias* de la forma:

$$U(\vec{\alpha}) = e^{i \sum_{a=1}^n \alpha_a T^a}$$

donde T^a son los generadores, α_a los parámetros de la transformación y n corresponde con el número de éstos.

En este formalismo, "promover" una transformación global a *local* se se puede plantear como:

$$\alpha_a \rightarrow \alpha_a(x^\mu) \equiv \alpha_a(x) \implies U(\vec{\alpha}) = e^{i \sum_{a=1}^n \alpha_a(x) T^a}$$

En lo siguiente veamos cómo se construye una teoría invariante de gauge local para el caso de la electrodinámica cuántica, siendo este el caso que más simple de teoría cuántica incluido en el Modelo Estándar de la física de partículas.

6. QED

La QED es una teoría asociada a transformaciones de un grupo de simetría, el grupo $U(1)$ que describe las interacciones de partículas cargadas; electrones y positrones, siendo el mediador de la interacción el fotón. Para formular esta teoría tomaremos como base el Lagrangiano de la electrodinámica, que hemos discutido anteriormente. Primero analizaremos cómo proceder para QED y luego emplearemos los mismos pasos para la teoría asociada a la simetría $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$.

En primer lugar, partimos del lagrangiano para un campo libre sin masa de Dirac,

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu)\psi, \quad (40)$$

para el cual es trivial ver que es invariante bajo una transformación global $U(1)$:

$$\bar{\psi} \rightarrow e^{-i\theta Q} \bar{\psi}; \quad \partial_\mu \psi \rightarrow \partial_\mu (e^{i\theta Q} \psi) = e^{i\theta Q} \partial_\mu \psi \quad (41)$$

donde Q es el generador infinitesimal de grupo y θ un parámetro continuo.

Si introdujéramos las transformaciones globales (41) en (40) veríamos que es invariante, como esperábamos.

Ahora bien, si hacemos estas transformaciones *locales* y las introducimos, se pierde la invariancia, ya que se obtiene:

$$\mathcal{L}' = \bar{\psi}\gamma^\mu[\partial_\mu + iQ(\partial_\mu\theta(x))]\psi$$

Para solucionarlo, debemos sustituir la derivada usual en (40) por la derivada covariante,

$$D_\mu\psi = (\partial_\mu - ieQA_\mu)\psi, \quad (42)$$

la cual transforma bajo $U(1)$ tal que:

$$D_\mu\psi \rightarrow e^{i\theta(x)Q}D_\mu\psi.$$

Además se tiene que introducir la forma en la que se transforman los campos bosónicos, que en este caso sería el campo gauge del fotón A_μ . Para que se cumpla la invariancia gauge tenemos:

$$A_\mu \rightarrow A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu\theta(x) \quad (43)$$

Obtenemos el lagrangiano de QED libre:

$$\mathcal{L}_{QED} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

donde, el último término introducido es el que corresponde a la propagación del campo del fotón A^μ , el cual se construye a través del tensor de esfuerzo $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

Para completar el Lagrangiano anterior solo nos faltaría el término de interacción entre el campo del fotón y el campo fermiónico, así como el término de gauge fixing tal y como se observa en (39).

7. Modelo estándar electrodébil

El Modelo estándar es una teoría cuántica relativista que describe las interacciones electromagnéticas, débiles y fuertes de las partículas elementales, cuya base matemática está sustentada por el grupo de simetría $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ ¹. Las partículas materiales del Modelo Estándar son los fermiones, partículas de espín $s=1/2$. Éstas se subdividen en leptones y quarks. Los fermiones son agrupados en tres “familias” o generaciones. Las propiedades principales de estas partículas son bien conocidas. Las partículas mediadoras en el Modelo Estándar son los bosones. De las 4 fuerzas fundamentales en la naturaleza, 3 están descritas a partir de esta teoría. En especial, uno de los éxitos de este modelo es la unificación de la interacción electromagnética; mediada por los fotones γ , y la interacción débil; mediada por los bosones W^\pm y Z , en la denominada interacción electrodébil [2].

Las tres familias de leptones y quarks, con propiedades casi idénticas, salvo sus masas, se agrupan de la siguiente manera:

$$\blacksquare \text{ 1}^\circ: \begin{pmatrix} \mu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L, e_R^-, \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L, u_R, d_R.$$

¹El subíndice C indica que las transformaciones sólo actúan sobre determinadas partículas con carga de color, el subíndice L (Left) hace referencia al hecho de que solo los fermiones izquierdos pertenecen a la representación fundamental del grupo $SU(2)_L$ y el subíndice Y denota la hipercarga.

- 2º: $\begin{pmatrix} \mu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix}_L$, μ_R^- , $\begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_L$, c_R , s_R .
- 3º: $\begin{pmatrix} \mu_\tau \\ \tau^- \end{pmatrix}_L$, τ_R^- , $\begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L$, t_R , b_R .

El subíndice 'R' ó 'L' hace referencia al autoestado derecho o izquierdo del operador quiralidad. Los campos izquierdos se comportan como *dobletes de isospin* mientras que los izquierdos como *singletes*. Las familias como se muestran son autoestados de isospín y de la hipercarga (T_3 e Y respectivamente), las cuales están ligadas a partir de la relación de Gell-Mann-Nishijima:

$$Q = T_3 + \frac{Y}{2}. \quad (44)$$

Los bosones son las partículas mediadoras de las interacciones en el ME. Los mediadores de la interacción débil, los bosones Z y W^\pm ; fueron descubiertos en el gran colisionador de hadrones del CERN en 1983 y, junto con el descubrimiento del bosón de Higgs en 2012, constituyen uno de los mayores logros de esta institución. A diferencia del electromagnetismo, la interacción débil es de corto alcance, lo que implica que los bosones mediadores de ésta tengan que ser masivos, como puede verse sintéticamente en el modelo de Yukawa de 1935. El contenido de partículas del Modelo Estándar y sus propiedades se muestran en la figura 1.

Las tres generaciones de la
Materia (Fermiones)

	I	II	III	
masa →	3 MeV	1.24 GeV	172.5 GeV	0
carga →	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	0
spin →	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
nombre →	u up	c charm	t top	γ photon
	d down	s strange	b bottom	g gluon
Quarks				
	<2 eV	<0.19 MeV	<18.2 MeV	90.2 GeV
	0	0	0	0
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
	ν_e electron neutrino	ν_μ muon neutrino	ν_τ tau neutrino	Z fuerza débil
Leptones				
	0.511 MeV	106 MeV	1.78 GeV	80.4 GeV
	-1	-1	-1	±1
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
	e electron	μ muon	τ tau	W[±] fuerza débil
				Bosons (Fuerzas)

Figura 1: Contenido de partículas del Modelo Estándar.

Los gluones son las partículas mediadoras de la interacción fuerte, la cual no está incluida en este trabajo.

A continuacion pasamos al estudio de la interaccion electrodébil procediendo de forma similar a como se ha hecho en QED en la sección 6.

7.1. Interacción electrodébil

Partimos del Lagrangiano sin término de masa, que será de la forma:

$$\mathcal{L} = \sum_{j=1}^3 i\bar{\psi}_j(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi_j(x). \quad (45)$$

Bajo las simetrías que cumple nuestra función de onda, ésta transforma tal que:

$$\psi \rightarrow e^{ig \sum_{j=1}^3 T^j \theta_j} e^{ig' Y \alpha} \psi \quad \partial_\mu \psi \rightarrow e^{ig \sum_{j=1}^3 T^j \theta_j} e^{ig' Y \alpha} \partial_\mu \psi.$$

donde θ_j y α son parámetros continuos globales.

Como se puede esperar tras haber trabajado en QED, al promover la transformación de global a local se pierde la invariancia gauge de la teoría, del lagrangiano. Ésto se soluciona, como en el caso anterior, al introducir la derivada covariante de tal manera que ahora sí se respeten las simetrías que esperamos. La derivada covariante en este caso queda:

$$D_\mu = \partial_\mu + ig \sum_{j=1}^3 T^j W_\mu^j + ig' \frac{Y}{2} B_\mu \quad (46)$$

donde, al igual que en QED con A_μ , se han introducido una serie de campos vinculados a la simetrías $SU(2)_L$ y $U(1)_Y$, concretamente se introducen cuatro campos, W_μ y B_μ respectivamente, uno por cada generador del grupo. Cabe destacar que por comodidad para el álgebra que se va a realizar, se ha escrito explícitamente el término $\frac{Y}{2}$ que recuerda a la relación (44). Los términos g' y g son las denominadas constantes de acoplamiento, asociadas a los grupos $SU(2)_L$ y $U(1)_Y$. Estas constantes indican el acoplo de la hipercarga Y con el bosón B y el acoplo entre los 3 bosones escalares W^j con el isospín débil, respectivamente. Esta relación que a continuación explicitaremos, es la que hace que se hable de teoría electro-débil y no de estas interacciones de forma separada.

Los campos bosónicos ligados a las simetrías, introducidos en (46), no son los estados físicos. Procedamos a escribir la derivada covariante en función de estos últimos; los estados bosónicos físicos que se encuentran en la naturaleza W_μ^\pm , Z_μ y A_μ .

Partiendo de la representación fundamental de $SU(2)$, denotaremos por $T_a = \frac{\sigma_a}{2}$ a los generadores del grupo de simetría; siendo σ_a las matrices de Pauli. Explícitamente obtenemos:

$$\begin{aligned} D_\mu &= \partial_\mu + \frac{ig}{2} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} W_\mu^1 + \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} W_\mu^2 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} W_\mu^3 \right\} + \frac{ig'}{2} \begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} B_\mu \\ &= \partial_\mu + \frac{ig}{2} \begin{pmatrix} W_\mu^3 & (W_\mu^1 - iW_\mu^2) \\ (W_\mu^1 + iW_\mu^2) & -W_\mu^3 \end{pmatrix} + \frac{ig'}{2} \begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} B_\mu \\ &= \partial_\mu + \frac{ig}{2} \begin{pmatrix} W_\mu^3 + \frac{g'}{g} Y B_\mu & (W_\mu^1 - iW_\mu^2) \\ (W_\mu^1 + iW_\mu^2) & -W_\mu^3 + \frac{g'}{g} Y B_\mu \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Uno de los pilares de la teoría electrodébil es el postular el acoplamiento entre los campos bosónicos ligados a $SU(2)_L$ y $U(1)_Y$, y que los campos ligados a los fotones y a los bosones Z , son una mezcla de B y W^3 .

Definiendo $\frac{g'}{g} = \tan(\theta_W)$, con θ_W el *ángulo de Weinberg*, el cual cuantifica dicha mezcla, los campos físicos se relacionan con los introducidos con anterioridad tal que:

$$\begin{pmatrix} A_\mu \\ Z_\mu^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_W & \sin \theta_W \\ -\sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_\mu \\ W_\mu^3 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} B_\mu \\ W_\mu^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_W & -\sin \theta_W \\ \sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_\mu \\ Z_\mu^0 \end{pmatrix}. \quad (47)$$

Definimos $W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 \mp W_\mu^2)$, los cuales corresponden a los campos de los bosones físicos que faltaban por aparecer explícitamente, y obtenemos que:

$$D_\mu = \partial_\mu + \frac{ig}{2\sqrt{2}}(W_\mu^+ T^+ + W_\mu^- T^-) + ig A_\mu \sin \theta_W Q + \frac{ig Z_\mu}{\cos \theta_W} (T^3 - \sin \theta_W Q).$$

donde $T^\pm = \frac{(\sigma_1 \pm \sigma_2)}{2}$ y hemos utilizado la relación (44).

Por último, tenemos que introducir los términos cinéticos, correspondiendo a la propagación de los nuevos campos vectoriales. Para que éstos sean invariantes gauge, los construimos a partir de los tensores de esfuerzo, los cuales tienen la forma:

$$B_{\mu\nu} \equiv \frac{i}{g'} [(\partial_\mu - ig' B_\mu), (\partial_\nu - ig' B_\nu)] = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \quad (48)$$

$$\vec{W}_{\mu\nu} \equiv \frac{i}{g} [(\partial_\mu - ig\vec{W}_\mu), (\partial_\nu - ig\vec{W}_\nu)] = \partial_\mu \vec{W}_\nu - \partial_\nu \vec{W}_\mu - ig[\vec{W}_\mu, \vec{W}_\nu] \quad (49)$$

Observamos que, mientras el tensor de esfuerzo para U(1) tiene la misma forma que en QED, dada la naturaleza no abeliana del grupo SU(2) aparece un término extra en el 2º caso. Este término genera interacción entre los bosones de gauge del grupo $SU(2)_L$, lo que no ocurre en QED. Esto quiere decir que los W^\pm se pueden acoplar a sí mismos.

Este proceder nos ha llevado al Lagrangiano para los bosones gauge vectoriales, invariante gauge $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$:

$$\mathcal{L}_{EW} = -\frac{1}{4}\vec{W}_{\mu\nu}\vec{W}^{\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} + \bar{\psi}i\gamma^\mu D_\mu\psi \quad (50)$$

El problema que acarrea este y todos los Lagrangianos del tipo Yang-Mills es que no permite introducir un término másico para los bosones. Los términos de masa para los bosones vectoriales están prohibidos por la propia simetría gauge. Mientras que los fotones sabemos que no tienen masa, no es así para los bosones Z y W^\pm . También rompen la invariancia gauge los términos de masa de los fermiones, ya que los campos levógiros y los dextrógiros se transforman de manera diferente. Tendríamos, pues, una teoría con bosones vectoriales y con fermiones, todos ellos sin masa, lo cual es un problema. La solución de este problema viene dada por el mecanismo de Higgs de ruptura espontánea de la simetría (SSB, por sus siglas en inglés), con el que se dota de masa a las partículas del Modelo Estándar de forma natural.

8. Ruptura espontánea de la simetría. El bosón de Higgs

En esta sección explicaremos el mecanismo de Higgs de ruptura espontánea de la simetría. Para ello incluimos un Lagrangiano escalar al Modelo Estándar, con la consecuente aparición de una partícula adicional, el bosón de Higgs. Primero, trabajaremos con un "toy model" que nos permitirá explicar como se rompe la simetría de un sistema y da lugar a las masas a través de un modelo simplificado.

8.1. Modelo Simplificado

En un sistema con simetría *global* U(1) introduciremos un nuevo campo que deje al Lagrangiano total invariante bajo la simetría pero que provoque que el *vacuum* – vacío o estado de mínima energía no lo sea. A esto es a lo que se conoce como ruptura espontánea de la simetría.

Consideremos un campo escalar complejo,

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2)$$

cuyo potencial viene dado por:

$$V(\phi) = -\mu^2(\phi^*\phi) - \lambda(\phi^*\phi)^2. \quad (51)$$

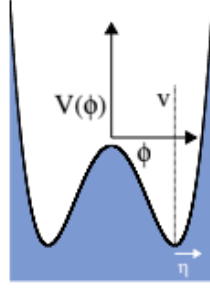


Figura 2: V frente a ϕ si $\mu^2 < 0$.

El Lagrangiano escalar es de la forma:

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)^* (\partial^\mu \phi) - V(\phi) = (\partial_\mu \phi)^* (\partial^\mu \phi) - \mu^2 (\phi^* \phi) - \lambda (\phi^* \phi)^2. \quad (52)$$

El potencial que hemos introducido tiene que ser tal que podamos asegurar la existencia de mínimo absoluto en la energía. Por tanto, necesitamos que $\lambda > 0$. Dicho ésto no hay ninguna condición sobre la constante μ^2 en principio, pero es directo observar que si ésta es positiva ($\mu^2 > 0$), el único mínimo del potencial corresponde al origen de coordenadas en el plano complejo, resultando inalterado. Por tanto, restringimos nuestro análisis al caso $\mu^2 < 0$.

En el caso $\mu^2 < 0$ aparecen infinitos mínimos del potencial dados por

$$\frac{\partial V}{\partial \phi} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\phi_1^2 + \phi_2^2} = \sqrt{\frac{-\mu}{\lambda}} \equiv v, \quad (53)$$

como se muestra en la figura 2.

Para el estudio de nuestra teoría, vamos a considerar un cambio de variable tal que nos encontremos en el fondo del potencial: $\phi_1 = v + \eta$ y $\phi_2 = \xi$. Esto nos lleva a una redefinición del campo ϕ tal que:

$$\phi = \phi_0 + \delta\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + \eta + i\xi)$$

es decir, consideramos un campo con perturbaciones pequeñas alrededor del vacío v .

El Lagrangiano tendría ahora la forma:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \xi)^2 + 0 \cdot \xi^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \eta)^2 - V(\phi), \quad (54)$$

donde $V(\phi)$ es el potencial:

$$V(\phi) = -\frac{1}{4}\lambda v^4 + \lambda v^2 \eta^2 + \lambda v \eta^2 + \frac{1}{4}\lambda \eta^4 + \frac{1}{4}\lambda \xi^4 + \lambda v \eta \xi^2 + \frac{1}{2}\lambda \eta^2 \xi^2, \quad (55)$$

donde se han despreciado los términos constantes así como los de $O(\xi^3)$ o más.

\mathcal{L} puede ser separado en el término $\mathcal{L}_{kin} \propto (\partial_\mu \phi)$ y los términos del potencial. De este último podemos extraer los términos de masa para los dos grados de libertad introducidos (campo complejo). Ésto nos va a llevar al teorema de Goldstone:

Al tratarse de bosones, los términos proporcionales a ξ^2 o a η^2 estarán relacionados con la masa de los campos correspondientes. Por tanto vemos que la ruptura de una simetría *global* provoca la aparición de una partícula escalar con masa η y otra sin masa ξ . A estas partículas sin masa se les denomina *bosones de Goldstone*. El número de bosones de Goldstone diferentes que aparecen nos lo da el teorema de Goldstone, que establece que cada generador de grupo

de la simetría que se rompe da lugar a una partícula sin masa. El bosón ξ con $m_\xi = 0$ es consecuencia directa de este teorema.

Si nos fijamos en los términos de interacción en (55) vemos que el potencial ya no es simétrico respecto a la transformación global de uno los campos de los bosones escalares ($V(-\eta) \neq V(\eta)$), por tanto hemos roto esta simetría global. Este proceso es lo que se denomina ruptura de la simetría global, puesto que el Lagrangiano inicial sigue siendo simétrico en ϕ , pero el potencial ha dejado de serlo.

8.2. Ruptura de la simetría local. Mecanismo de Higgs

Estamos en posición de abordar el Lagrangiano electrodébil y explicar como se produce la ruptura de simetría en una teoría invariante gauge local. Recordemos que, como en el caso de QED, necesitamos introducir el cambio a derivada covariante, $\partial^\mu \rightarrow D^\mu$. Al hacer ésto se llega a un Lagrangiano con un término de masa para el campo asociado a la simetría rota y otro para el campo $\eta \equiv h$ ("Higgs") del Lagrangiano escalar introducido. La elección del gauge apropiado permite hacer desaparecer los términos relacionados con ξ , es decir, desaparecen los bosones de Goldstone. El Lagrangiano electrodébil tiene además varias sutilezas debido a que la ruptura de simetría debe afectar a la hipercarga y el isospin, pero no a la carga, lo que nos va a permitir explicar la (ya introducida) matriz de mezcla y el ángulo de Weinberg.

El Lagrangiano escalar es de la forma:

$$\mathcal{L}_{scalar} = (D^\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) - \mu^2 (\phi^\dagger \phi) - \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 \quad (56)$$

donde, recordando (46) con $\vec{\tau} = \vec{\sigma}$,

$$D_\mu = \partial_\mu + ig \frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{W}_\mu + ig' \frac{Y}{2} B_\mu.$$

Continuando como en la sección anterior, de los infinitos vacíos que aparecen al introducir el potencial escalar, elegimos

$$\phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + h \end{pmatrix}$$

Ahora bien, tenemos que comprobar que este vacío rompe las simetrías $SU(2)_L$ y $U(1)_Y$. Para ello, sabemos que si no lo hiciera se cumpliría:

$$\phi_0 = e^{i\alpha Z} \phi_0 = \phi_0 + i\alpha Z \phi_0 + \dots = 0 \quad \forall \alpha$$

Por tanto, si no se cumple para el primer término ya sabemos que se ha roto la simetría. Consideremos los generadores asociados a los grupos de simetría $SU(2)_L$ y $U(1)_Y$.

- $SU(2)_L$:

$$\tau_1 \phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v + h \end{pmatrix} \neq 0$$

$$\tau_2 \phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v + h \end{pmatrix} \neq 0$$

$$\tau_3 \phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v + h \end{pmatrix} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + h \end{pmatrix} \neq 0$$

- $U(1)_Y$:

$$Y\phi_0 = \frac{Y_0}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v+h \end{pmatrix} \neq 0$$

Por tanto, hemos visto que todas las simetrías están rotas y los 4 bosones de gauge, W_i ($i = 1, 2, 3$) y B , adquieren masa a través de este mecanismo. Recordemos que estos bosones se mezclan para dar lugar a los estados físicos, W^\pm , Z y el fotón.

Para que este último se mantenga sin masa se tiene que cumplir que:

$$\begin{aligned} Q\phi_0 &= (I_3 + \frac{Y}{2})\phi_0 = \frac{\tau_3}{2}\phi_0 + \frac{Y_0}{2}\phi_0 \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(- \begin{pmatrix} 0 \\ v+h \end{pmatrix} + Y_0 \begin{pmatrix} 0 \\ v+h \end{pmatrix} \right) = 0 \\ &\implies \boxed{Y_0 = +1} \end{aligned}$$

Por tanto ya sabemos todas las características que debe cumplir nuestro vacío. Dado que los términos $\propto h^n$ corresponden a interacciones, para obtener las masas de los bosones Z y W sólo tenemos que fijarnos en los términos cuadráticos en v :

$$\begin{aligned} D_\mu\phi &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(ig\frac{\vec{\tau}}{2}\vec{W}_\mu + ig'\frac{Y}{2}B_\mu \right) \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \\ &= \frac{iv}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} g(W_1 - iW_2) \\ -gW_3 + g'B_\mu \end{pmatrix} \\ (D^\mu\phi)^\dagger &= \frac{-iv}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} g(W_1 + iW_2) \\ -gW_3 + g'B_\mu \end{pmatrix}^T \end{aligned}$$

La combinación de los campos que aparece en la 1ª fila de cada uno de los vectores anteriores corresponde a W^\pm respectivamente como ya vimos en la sección (7.1), dado que están relacionados con los operadores escalera de isospín. Calculando el término que aparece en el Lagrangiano, obtenemos:

$$(D^\mu\phi)^\dagger(D_\mu\phi) = \frac{v^2}{8} [g^2(W^+)^2 + (W^-)^2 + (-gW_3 + g'B_\mu)^2]. \quad (57)$$

Fijándonos en los términos que contienen W_3 y B_μ en el Lagrangiano, podemos escribir la mezcla entre estos, en notación matricial, como:

$$(W_3, B_\mu)\mathcal{M} \begin{pmatrix} W_3 \\ B_\mu \end{pmatrix} = (W_3, B_\mu) \begin{pmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & (g')^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_3 \\ B_\mu \end{pmatrix}$$

y calculando los autovalores y autovectores de la matriz \mathcal{M} obtenemos que:

$$\text{Det}(\mathcal{M}) = 0 \implies \lambda_1 = 0, \lambda_2 = g^2 + g'^2$$

Veamos que el término asociado al autovalor $\lambda_1 = 0$ lo reconoceremos como el campo asociado a los *fotones* y el asociado a λ_2 será el campo asociado al bosón Z .

Para hallar los autovectores, resolvemos los sistemas de ecuaciones:

$$(\mathcal{M} - \lambda_i I) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda_i \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Por tanto, para $\lambda_1 = 0$ queda:

$$\begin{pmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & g'^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \begin{cases} g^2 x_1 - gg' x_2 = 0 \\ -gg' x_1 + g'^2 x_2 = 0 \end{cases}$$

de donde tenemos la relación $x_1 = \frac{g'}{g} x_2$, obteniendo así las componentes del campo del fotón A_μ como mezcla de los campos B_μ y W_3 :

$$A_\mu = \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}} (g' W_3 + g B_\mu), \quad (58)$$

donde el factor $\frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}}$ corresponde a la normalización.

Procediendo de forma similar para calcular el autovector correspondiente a $\lambda_2 = g^2 + g'^2$ (el cual corresponderá al campo Z_μ); obtenemos:

$$Z_\mu = \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}} (g W_3 - g' B_\mu). \quad (59)$$

De esta forma podemos escribir la expresión (57) en términos de los campos bosónicos físicos, como veremos a continuación.

8.3. Masas de los bosones y relación entre las constantes de acoplo

Primero, analicemos las implicaciones de las expresiones encontradas anteriormente y las relaciones entre los parámetros g, g' y la carga del electrón e . Desde QED sabemos que el fotón se acopla a la carga. Según (58), tenemos que W_3 y B_μ se mezclan para conformar A_μ , cuyo acoplo es la carga del electrón e . Ahora bien, como W_3 tiene un acoplo \mathbf{g} y B_μ uno \mathbf{g}' , ello implica que el acoplo de W_3 multiplicado por su contribución en A_μ ha de ser igual al acoplo de B_μ pesado por su contribución. Matemáticamente:

$$\begin{aligned} e &= g \cdot \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} = g \cdot \sin(\theta_W) \\ e &= g' \cdot \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}} = g' \cdot \cos(\theta_W) \\ \implies &\boxed{e = g \sin(\theta_W) = g' \cos(\theta_W)} \end{aligned}$$

Escribiendo el término cinético (57) ahora en función de los campos físicos obtenemos:

$$(D^\mu \phi)^\dagger (D_\mu \phi) = \frac{v^2}{8} [g^2 (W^+)^2 + (W^-)^2 + (g^2 + g'^2) \cdot (Z_\mu)^2 + 0 \cdot (A_\mu)^2]. \quad (60)$$

Es claro concluir, teniendo en cuenta que el término que acompaña al término cuadrático en el campo corresponde a $\frac{m^2}{2}$, el valor de las masas para los distintos campos bosónicos físicos, que resultan:

$$\begin{aligned} m_\gamma &= 0, \\ m_{W^\pm} &= \frac{1}{2} v g, \\ m_Z &= \frac{1}{2} v \sqrt{g^2 + g'^2}. \end{aligned} \quad (61)$$

De estos resultados es directo observar que $\frac{m_W}{m_Z} = \frac{\frac{1}{2} v g}{\frac{1}{2} v \sqrt{g^2 + g'^2}} = \cos(\theta_W)$. A partir de la medida de la razón entre estas masas podemos obtener el valor del ángulo de Weinberg y por tanto la matriz de mezcla introducida para obtener el Lagrangiano electrodébil.

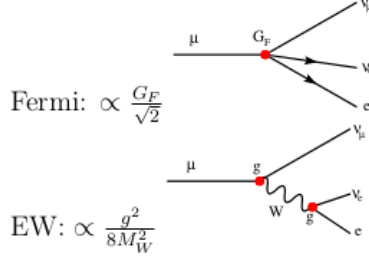


Figura 3: Diagrama del decaimiento del muón [3]

8.4. Masa del Higgs

La masa del bosón de Higgs, partícula asociada al mecanismo de ruptura espontánea de la simetría al introducir el término escalar, se obtiene a partir del término cuadrático en el campo escalar del potencial en (56), es decir, a partir del término $\propto h^2$. Utilizando además la relación entre los parámetros μ , λ y v dada en (53), se obtiene:

$$m_H = \sqrt{2\lambda v^2}$$

Vemos que la masa de la partícula de Higgs depende de dos parámetros indeterminados a priori. Sin embargo, el valor de v se puede determinar a partir de la desintegración del muón. En el momento de desarrollar la teoría únicamente un parámetro era libre, λ . Por tanto el Modelo Estándar no predice la masa del Higgs.

Según la *teoría de la desintegración beta de Fermi* de 1931, el muón se desintegraba directamente en un electrón y dos neutrinos, como se muestra en la figura 3. Desde esta teoría se conocía el valor de la constante de Fermi, $G_f = 1,116 \cdot 10^{-5} GeV^{-2}$.

En el Modelo Estándar el proceso de desintegración del muón está mediado por el intercambio de un bosón W y tenemos una relación entre las constantes y la masa del bosón de gauge, tal que se cumple:

$$\frac{g^2}{8m_W^2} = \frac{1}{2v^2} = \frac{G_f}{\sqrt{2}} \implies v = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}G_f}} = 246 GeV$$

La medida experimental de la masa del bosón de Higgs es sin lugar a dudas crucial en la comprobación experimental de estas relaciones predichas por el modelo, y en el entendimiento del mecanismo de Higgs.

8.5. Masa de los fermiones

Como ya se ha comentado en secciones anteriores, un término de la forma $m\bar{\psi}\psi$ no es invariante gauge. Por tanto, no es un término permitido en el Lagrangiano y los fermiones permanecerían sin masa. Comencemos estudiando este término en detalle.

Usando la descomposición de ψ en estados de quiralidad así como que $\bar{\psi}_A\psi_A = 0$ con $A = L, R$, tenemos que:

$$m\bar{\psi}\psi = m(\bar{\psi}_L + \bar{\psi}_R)(\psi_L + \psi_R) = m[\bar{\psi}_L\psi_R + \bar{\psi}_R\psi_L]$$

Dado que los términos “left-handed” forman *dobletes* de isospín mientras que los “right-handed” se comportan como *singletes*, la combinación de éstos que aparece arriba no es invariante bajo $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ debido a que los singletes y dobletes transforman diferente.

Siendo χ_L un doblete y χ_R un singlete, si se hace una rotación en $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$,

$$\begin{aligned}\chi_L &\rightarrow \chi'_L = e^{i\vec{T}\vec{W}} e^{i\alpha Y} \chi_L \\ \chi_R &\rightarrow \chi'_R = e^{i\alpha Y} \chi_R,\end{aligned}$$

se puede demostrar que un término proporcional a $\bar{\psi}_L \phi \psi_R$, con ϕ el campo de Higgs **sí** es invariante gauge. Introduciendo un término de acoplo entre el Higgs con el campo fermiónico:

$$\mathcal{L} = -\lambda_f [\bar{\psi}_L \phi \psi_R + \bar{\psi}_R \bar{\phi} \psi_L] \quad (62)$$

no sólo obtenemos los términos de interacción entre estos campos, sino que se dota a los fermiones de masa. Veámoslo partiendo de (62) para el caso de los electrones, siendo trivial generalizarlo al resto de fermiones del Modelo Estándar:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_e &= -\lambda_e \frac{1}{\sqrt{2}} [(\bar{\nu}_e, \bar{e})_L \begin{pmatrix} 0 \\ v+h \end{pmatrix} e_R + \bar{e}_R (0, v+h) \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L] \\ &= -\frac{\lambda_e(v+h)}{\sqrt{2}} [\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L] = -\frac{\lambda_e(v+h)}{\sqrt{2}} \bar{e}e \\ &= -\frac{\lambda_e v}{\sqrt{2}} \bar{e}e - \frac{\lambda_e h}{\sqrt{2}} \bar{e}e\end{aligned} \quad (63)$$

donde se ha introducido explícitamente $\phi = \begin{pmatrix} 0 \\ v+h \end{pmatrix}$ como en secciones anteriores.

Desde este resultado, comparando con el término de masa para el Lagrangiano de un campo fermiónico, y generalizando a todos los fermiones, podemos sacar las siguientes conclusiones:

- $m_f = \frac{\lambda_f v}{\sqrt{2}} \implies \lambda_f = \frac{\sqrt{2}m_f}{v}$, donde λ_f es denominado el *acoplamiento de Yukawa*.
- La teoría no predice la masa de los fermiones, tiene 1 grado de libertad puesto que λ_f es un parámetro libre (conocido **v**, como ya hemos tratado en la sección 8.4).
- El acoplamiento del Higgs con los fermiones, el término $\propto h\bar{e}e$ en \mathcal{L}_e ; es proporcional a λ_f y por tanto a la masa del fermión. Ésto explica que ste acoplamiento sea muy pequeño comparado con el acoplamiento del Higgs con los bosones W (proporcional a gm_W).

9. Cálculo de desintegraciones del Higgs

Hemos visto el papel fundamental del *Mecanismo de Higgs* dentro del Modelo Estándar. Para culminar el trabajo, vamos a estudiar la probabilidad de desintegración del Higgs por diferentes canales, una base importante en la búsqueda y descubrimiento posterior de esta partícula. Nos centraremos solamente en los canales de desintegración a nivel árbol o primer orden en teoría de perturbaciones

9.1. Diagramas y reglas de Feynmann

Introducimos primero varios conceptos que facilitan la tarea. Cada una de las interacciones presentes en el Modelo Estándar puede ser descrita usando los denominados *vértices de Feynman* y *diagramas de Feynman*.

Los *diagramas de Feynman* son representaciones gráficas de términos perturbativos de la matriz de dispersión o Scattering, y nos permiten realizar cálculos complejos en teoría cuántica de campos. Las reglas de Feynman permiten obtener a partir de dichos diagramas, la denominada “amplitud invariante de dispersión \mathcal{M}_{fi} ” con la cual se puede calcular la tasa de decaimiento o probabilidad de desintegración. Como puede verse ampliamente explicado en el tercer capítulo de [4], la tasa de decaimiento a 2 cuerpos se puede calcular como:

$$\frac{d\Gamma_{fi}}{d\Omega} = S \frac{p_f}{32\pi^2 m_a^2} |\mathcal{M}_{fi}|^2, \quad (64)$$

siendo m_a la masa de la partícula inicial, p_f el momento de los productos de la desintegración y S el factor de simetría relacionado con el n^o de partículas idénticas, que puede tomar el valor de 1 ó 1/2 si ambos productos son iguales.

Los *vértices de Feynman* nos describen cada una de las tres interacciones básicas presentes en el Modelo Estándar. Tenemos un vértice que nos caracteriza la interacción electromagnética, otro la débil y un tercero la interacción fuerte. Las posibles interacciones puntuales vienen descritas por el Lagrangiano de la teoría, ya sean los propagadores para bosones, fermiones y antifermiones (que se pueden calcular de forma similar a lo mostrado en la sección 4.1); como los *factores de vértice*. Estos factores se leen desde el Lagrangiano que involucra a los campos interactuando y se obtienen multiplicando dicho término del Lagrangiano por \mathbf{i} y $\mathbf{1/n!}$, siendo n partículas indistinguibles.

Por ejemplo, para el vértice de interacción de un higgs y dos fermiones tenemos que fijarnos en el término $\propto hff$, que se obtendría a partir del Lagrangiano general equivalente al presentado en (63) para los electrones, y el factor de vértice sería:

$$i \frac{m_f}{v}. \quad (65)$$

De manera similar procedemos para el resto de interacciones.

Antes de avanzar es interesante remarcar que para partículas reales, siendo éstas las iniciales o finales de un proceso de scattering, ha de cumplirse la conservación del momento mientras que para partículas 'offshell' o virtuales, ésto no tiene por qué ocurrir. En las siguientes secciones procedemos a calcular la probabilidad de desintegración del Higgs a 2 fermiones y a 2 bosones de gauge.

9.2. $H \rightarrow f + \bar{f}$

El diagrama de Feynmann para la desintegración de un Higgs a dos fermiones se muestra en la figura 4. Partiendo de este diagrama, y leyéndolo de abajo a arriba, se obtiene:

$$-i\mathcal{M} = \bar{u}(p) \frac{im_f}{v} v(-q) \quad (66)$$

donde $\bar{u}(p)$ es el espinor asociado al fermión saliente, $v(-q)$ el asociado al antifermión saliente y p y q son los momentos de cada una de las partículas. Por tanto, el cuadrado del elemento de

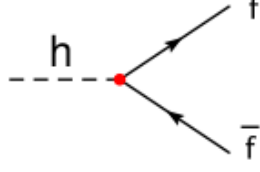


Figura 4: Desintegración del Higgs en 2 fermiones

matriz queda:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}^2 &= \mathcal{M}\mathcal{M}^\dagger = \left(\frac{m_f}{v}\right)^2 \sum_{s1} u(p)\bar{u}(p) \sum_{s2} \bar{v}(-q)v(-q) \\
&= \left(\frac{m_f}{v}\right)^2 \text{Tr}(\not{p} + m_f)\text{Tr}(-\not{q} - m_f) \\
&= \left(\frac{m_f}{v}\right)^2 [-\text{Tr}(\not{p} \cdot \not{q}) - m_f^2 \text{Tr}(I)]
\end{aligned}$$

siendo $\not{p} = \gamma^\mu a_\mu$ y donde se han utilizado las propiedades

$$\begin{aligned}
\sum_s u_s(p)\bar{u}_s(p) &= \not{p} + m \\
\sum_s v_s(p)\bar{v}_s(p) &= \not{p} - m.
\end{aligned}$$

Los sumatorios hacen referencia a los posibles estados de espín. A su vez se ha usado la propiedad de que la traza de un n^o impar de matrices γ^μ es nula. Por último, sabiendo que $\text{Tr}(\gamma^\nu\gamma_\nu) = 4$, se obtiene:

$$\mathcal{M}^2 = \left(\frac{m_f}{v}\right)^2 (-4p \cdot q - 4m_f^2) \quad (67)$$

y debido a la conservación del momento en el vértice se cumple $m_h^2 = (p - q)^2$, lo que nos lleva al resultado final:

$$\boxed{\mathcal{M}^2 = \left(\frac{m_f}{v}\right)^2 [2m_h^2 - 8m_f^2] = 2\left(\frac{m_f}{v}\right)^2 m_h^2 \left(1 - 4\frac{m_f^2}{m_h^2}\right)}. \quad (68)$$

La amplitud de desintegración de un Higgs en dos fermiones la podemos calcular integrando a todo el ángulo sólido en la expresión (64),

$$\Gamma(h \rightarrow \bar{f}f) = \frac{N_c}{8\pi v^2} m_f^2 m_h \left(1 - 4\frac{m_f^2}{m_h^2}\right)^3. \quad (69)$$

donde se ha introucido el resultado para la desintegraciones a 2 cuerpos $p_f = \frac{1}{2}m_h\sqrt{1 - \frac{4m_f^2}{m_h^2}}$.

Por tanto, hemos encontrado que la probabilidad de desintegración de una partícula de Higgs en dos fermiones será mayor cuanto mayor sea la masa del fermión, así como proporcional a la masa del Higgs.

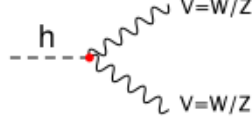


Figura 5: Decaimiento del Higgs en 2 bosones

9.3. $H \rightarrow W^+ + W^-$

En esta sección realizamos explícitamente el cálculo para la desintegración de un Higgs a los bosones WW. Para el decaimiento a 2 bosones Z el procedimiento sería el mismo salvo sustituyendo el factor de vértice por el que corresponde y $S = 1 \rightarrow S = 1/2$. El diagrama de Feynmann correspondiente a estas desintegraciones se muestra en la figura 5. Leyendo el diagrama de arriba a abajo se llega a:

$$-i\mathcal{M} = \epsilon_\lambda^\mu(p) \frac{2im_W^2}{v} g^{\mu\nu} \epsilon_\delta^\nu(q) \quad (70)$$

donde $\epsilon_\beta^\alpha(p)$ corresponden a los vectores de polarización de los bosones. Así pues, el cuadrado del elemento de matriz quedará:

$$\mathcal{M}^2 = \left(\frac{2m_W^2}{v}\right)^2 \sum_{\lambda,\delta} \epsilon_\lambda^\mu(p) \epsilon_\lambda^{\beta*}(p) \epsilon_\mu^\delta(q) \epsilon_\beta^{\delta*}(q) \quad (71)$$

$$= \left(\frac{2m_W^2}{v}\right)^2 \left(-g^{\mu\beta} + \frac{p^\mu p^\beta}{m_W^2}\right) \left(-g_{\mu\beta} + \frac{p_\mu p_\beta}{m_W^2}\right) \quad (72)$$

donde en el último paso se ha usado la propiedad del producto de vectores de polarización

$$\sum_\alpha \epsilon_\alpha^\mu \epsilon_\alpha^{\nu*} = -g^{\mu\nu} + \frac{p^\mu p^\nu}{m^2}$$

realizando el producto en (72) y simplificando se llega a:

$$\mathcal{M}^2 = \left(\frac{2m_W^2}{v}\right)^2 \left[2 + \frac{(p \cdot q)^2}{m_W^4}\right]. \quad (73)$$

Haciendo uso de la conservación del momento en el vértice, que en este caso toma la forma $m_h^2 = (p + q)^2$, se llega al resultado final:

$$\boxed{\mathcal{M}^2 = \left(\frac{2m_W^2}{v}\right)^2 \left[3 + \frac{m_h^4}{4m_W^4} - \frac{m_h^2}{m_W^2}\right]} \quad (74)$$

Con este resultado, y sustituyendo en (64) e integrando al ángulo sólido, obtenemos la amplitud de desintegración del Higgs en dos bosones de gauge, en general:

$$\Gamma(h \rightarrow VV) = \frac{g^2 S_V}{64\pi M_W^2} m_h^3 \left(1 - \frac{4M_V^2}{m_h^2} + \frac{3}{4} \left(\frac{4M_V^2}{m_h^2}\right)^2\right) \sqrt{1 - \frac{4M_V^2}{m_h^2}} \quad (75)$$

done S_V será 1 para el Z y 1/2 para el W.

Las expresiones de estas amplitudes de desintegración, (69) y (75), dependen del valor de la masa del Higgs. La medida experimental de las mismas nos proporcionaría información sobre

la partícula de Higgs, que sabemos tiene una vida media extremadamente corta lo que implica que no se pueda realizar su detección directa. Obviamente, necesitaríamos tener la información de todos los posibles canales de desintegración del Higgs para un análisis completo. De hecho, los cálculos, a partir de las amplitudes de desintegración tal y como han sido mostrados en esta sección y en la anterior, no son suficientes para recuperar los resultados típicos de la bibliografía al respecto, debido a que estamos considerando únicamente algunos de los posibles canales de desintegración y además realizando los cálculos únicamente a primer orden en el desarrollo perturbativo de la matriz de Scattering, y por tanto insuficiente. Para obtener resultados completos en este tipo de análisis para las tasas de decaimiento del Higgs a diferentes partículas, es necesario considerar diagramas a órdenes superiores en teorías de perturbaciones, lo cual se sale del objetivo de este trabajo.

10. Conclusiones

En este trabajo he realizado un breve recorrido teórico sobre el desarrollo del Modelo Estándar de la física de partículas, centrándome en la parte final en la teoría electrodébil; con una introducción al concepto de ruptura espontánea de la simetría y su efecto en la explicación de las masas de las partículas físicas del Modelo Estándar. El Modelo estándar es una teoría cuántica de campos, una teoría en la que confluyen la mecánica cuántica y la relatividad especial.

Para lograr los objetivos de estudiar este modelo, se ha partido del electromagnetismo. Primero, pasando a una formulación covariante de las ecuaciones de Maxwell, y explicando la llamada simetría gauge, la cual está asociada a una redundancia por parte del potencial electromagnético a la hora de describir el campo del fotón. Posteriormente, se ha abordado el problema de la cuantización, que se basa en la imposición de las relaciones de conmutación canónicas sobre los campos. A la hora de cuantizar el electromagnetismo clásico, se han visto los problemas asociados y su resolución, concluyendo con el cálculo del propagador del fotón y la obtención del Lagrangiano de QED. Además se ha estudiado la ecuación de Dirac y cómo ésta soluciona algunos problemas de la ecuación de Klein Gordon, como el de la densidad de probabilidad negativa; y cómo describe las partículas de spin 1/2 de forma natural. Luego se ha tratado el concepto de simetría en física y cómo al promover una simetría de global a local, introduciendo la derivada covariante; se genera una teoría de interacciones con la aparición de nuevos campos bosónicos. En este punto introducimos el lagrangiano de la teoría electrodébil y, a partir del mecanismo de Higgs hemos explicado cómo se dota de masa a las partículas del modelo. Para ello se ha tratado la idea de "Ruptura Espontánea de la Simetría", primeramente a partir de un modelo simple para una simetría $U(1)$ y, por último para nuestro caso de interés $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$. Hemos concluido el trabajo con algunos cálculos de la amplitud de desintegración del Higgs por diferentes procesos a través de los diagramas y las reglas de Feynmann.

Para culminar, debemos decir que, a pesar del éxito del Modelo Estándar, existen aún incógnitas que no es capaz de resolver como son la existencia de materia oscura, la masa nula de los neutrinos, la asimetría en la cantidad de materia-antimateria en el universo, y muchos más.

Referencias

- [1] Siannah Peñaranda. *Notas para un curso introductorio al Modelo Estándar*.
- [2] Antonio Pich Zardoya. *The Standard Model of Electroweak Interactions*, IFIC, University of Valencia – CSIC, 2012.
- [3] Ivo van Vulpen. *The Standard Model Higgs Boson*, 2013.
- [4] Mark Thomson. "Modern Particle Physics", Cambridge University Press, 2013.