CIÊNCIA e NATURA

UFSM

Ci. e Nat., Santa Maria v.42, e100, p. 01-06, 2020
DOI:10.5902/2179460X41839
ISSN 2179-460X

Educação

Submissão: 13/01/2020 Aprovação: 02/06/2020 Publicação: 23/12/2020

A forma matricial dos números de Leonardo

The matrix form of Leonardo's numbers

Renata Passos Machado Vieira [I], Milena Carolina dos Santos Mangueira [II], Francisco Regis Vieira Alves [III] e Paula Maria Machado Cruz Catarino[IV]

RESUMO

Neste trabalho serão investigadas as matrizes geradoras para os números inteiros positivos da sequência de Leonardo, bem como algumas propriedades inerentes à essas matrizes. Com o viés de realizar o processo de generalização da forma matricial dos números de Leonardo, é então realizada a extensão para o campo dos números inteiros não positivos, na qual, o estudo dessas matrizes é introduzido de forma inédita nesta pesquisa. A forma matricial relaciona as matrizes com os números de Leonardo e ao elevar essas matrizes a n-ésima potência, obtemos algumas novas relações dessa sequência, conhecendo assim os seus respectivos termos.
Palavras-chave: Generalização; Matriz geradora; Números de Leonardo

ABSTRACT

In this work we will investigate the generating matrices for the positive integers of the Leonardo sequence, as well as some inherentproperties of these matrices. In order to perform the process of generalizing the matrix form of Leonardo's numbers, the extensionto the field of non-positive integers is performed, in which the study of these matrices is unpublished in this research. The matrixform relates the matrices to the Leonardo numbers, and by raising these matrices to nth power, we obtain some new relations ofthis sequence, thus knowing their respective terms.
Keywords: Generalization; Generating matrix; Leonardo's numbers

[I] Instituto Federal do Ceará, Fortaleza, CE - re.passosm@gmail.com
[II] Instituto Federal do Ceará, Fortaleza, CE - milenacarolina24@gmail.com
[III] Instituto Federal do Ceará, Fortaleza, CE - fregis@gmx.fr
[IV] Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro, Vila Real, Portugal - pcatarino23@gmail.com

1 Introdução

A sequência de Leonardo, também conhecida como os números de Leonardo, é uma sequência linear e recorrente de números inteiros, sendo de segunda ordem, como relatada no trabalho de Vieira et al. (2019). Semelhante à sequência de Fibonacci, diferenciando-a apenas pela adição de uma unidade ao final da recorrência, e alteração dos seus valores iniciais para 1, e não mais $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$, conforme Dijkstra (1981).

Acredita-se ainda que esses números foram estudados por Leonardo de Pisa, conhecido por Leonardo Fibonacci, não sendo, portanto, comprovado em nenhum trabalho na literatura, devido a escassez de pesquisas referentes a essa sequência. Denotada por Le_n, temos então a recorrência definida, matematicamente abaixo.

Definição 1.1. *A recorrência dos números de Leonardo é dada por:*

$$Le_n = Le_{n-1} + Le_{n-2} + 1, n \geqslant 2,$$

com $Le_0 = 1, Le_1 = 1$.

Assim, temos os primeiros termos dessa sequência positivos como sendo:

$$1,1,3,5,9,15,25,41,67,\ldots$$

Além dessa relação, foi encontrada em Catarino e Borges (2020) uma nova recorrência, em que a partir da recorrência $Le_n = Le_{n-1} + Le_{n-2} + 1$, substituímos n por $n+1$, obtendo $Le_{n+1} = Le_n + Le_{n-1} + 1$. Feito isso, podemos subtraí-las $(Le_n - Le_{n+1} = Le_{n-1} + Le_{n-2} + 1 - Le_n - Le_{n-1} - 1)$, resultando numa nova definição.

Definição 1.2. *Uma outra recorrência para os números de Leonardo, é dada por:*

$$Le_n = 2Le_{n-1} - Le_{n-3}, n \geqslant 2.$$

Com o viés de explorar o processo de extensão desses números para os termos com índice inteiro não positivo e, realizando algumas manipulações algébricas na sua recorrência original, temos então os termos do lado esquerdo como apresentado na Tabela 1.

Le_{-1}	Le_{-2}	Le_{-3}	Le_{-4}	Le_{-5}	Le_{-6}	Le_{-7}	Le_{-8}	Le_{-9}	Le_{-10}
-1	1	-3	3	-7	9	-17	25	-43	67

Tabela 1: Termos inteiros não positivos dos números de Leonardo.

À vista disso, definiremos uma nova relação de recorrência para esses números negativos, discutidos primordialmente neste trabalho.

Definição 1.3. *A fórmula de recorrência dos números de Leonardo, para os termos do lado esquerdo, para* $n \in \mathbb{N}$*, é dada por:*

$$Le_{-n} = -Le_{-n+1} + Le_{-n+2} - 1, n > 0.$$

Realizando a mesma operação feita para obter uma outra recorrência para os termos positivos dos números de Leonardo, podemos definir uma nova recorrência de maneira semelhante.

Definição 1.4. *Uma outra recorrência para os termos do lado esquerdo de Leonardo, para* $n \in \mathbb{N}$*, é dada por:*

$$Le_{-n} = 2Le_{-n+2} - Le_{-n+3}, n > 0.$$

Por conseguinte, estudaremos mais adiante, uma forma de obter os termos dessa sequência sem necessitar conhecer os anteriores, conhecida como forma matricial. Além disso, é realizado um estudo como forma de generalizar essa sequência, obtendo assim a sua extensão para o campo dos números inteiros não positivos.

2 A forma matricial de Leonardo

Uma forma de representar essas sequências lineares é através de uma matriz, denominada de forma matricial. A matriz, carrega consigo a fórmula de recorrência da sequência e, ao ser elevada a n-ésima potência, podemos obter os termos da sequência sem necessitar conhecer os seus anteriores, de acordo com Ercolano (1979).

A forma matricial dos números de Leonardo, consiste na adição de um vetor contendo os seus respectivos valores iniciais. É necessário ainda, definir uma outra matriz, que será multiplicada ao vetor, levando em consideração a matriz estudada nos trabalhos de Seenukul (2015); Sokhuma (2013). É então levado em consideração, a fórmula de recorrência estabelecida por Catarino e Borges (2020), em que trata da sequência com um salto.

Teorema 2.1. *Uma forma matricial dos números de Leonardo, para $n \geqslant 1$ é dada por:*

$$Q_n^{(1)} = u_1 M_1^n = \begin{bmatrix} Le_{n+2} & Le_{n+1} & Le_n \end{bmatrix},$$

onde $u_1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ *e* $M_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Demonstração. Utilizando o princípio da indução finita, temos que:

Para $n = 1$:

$$Q_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Le_3 & Le_2 & Le_1 \end{bmatrix}.$$

Assim a igualdade é válida.

Supondo que seja válido para $n = k, k \in \mathbb{N}$, temos que:

$$Q_k^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} Le_{k+2} & Le_{k+1} & Le_k \end{bmatrix}.$$

Assim, será válido também para $n = k + 1$.

$$\begin{aligned} Q_{k+1}^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{k+1} &= \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} Le_{k+2} & Le_{k+1} & Le_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2Le_{k+2} - Le_k & Le_{k+2} & Le_{k+1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} Le_{k+3} & Le_{k+2} & Le_{k+1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□

Realizando a permutação de linhas e colunas da matriz base e do vetor de inicialização, podemos obter mais outras cinco matrizes dos números de Leonardo.

Teorema 2.2. *Uma forma matricial dos números de Leonado, para $n \geqslant 1$, é dada por:*

$$Q_n^{(2)} = u_2 M_2^n = \begin{bmatrix} Le_{n+2} & Le_n & Le_{n+1} \end{bmatrix},$$

com $u_2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ *e* $M_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Demonstração. De modo análogo ao Teorema 2.1, podemos validar este teorema. □

Teorema 2.3. *Uma forma matricial dos números de Leonado, para $n \geqslant 1$, é dada por:*

$$Q_n^{(3)} = u_3 M_3^n = \begin{bmatrix} Le_{n+1} & Le_n & Le_{n+2} \end{bmatrix},$$

com $u_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ *e* $M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Demonstração. De modo análogo ao Teorema 2.1, podemos validar este teorema. □

Teorema 2.4. *Uma forma matricial dos números de Leonado, para $n \geqslant 1$, é dada por:*

$$Q_n^{(4)} = u_4 M_4^n = \begin{bmatrix} Le_{n+1} & Le_{n+2} & Le_n \end{bmatrix},$$

com $u_4 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ *e* $M_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Demonstração. De modo análogo ao Teorema 2.1, podemos validar este teorema. □

Teorema 2.5. *Uma forma matricial dos números de Leonado, para* $n \geqslant 1$*, é dada por:*

$$Q_n^{(5)} = u_5 M_5^n = \begin{bmatrix} Le_n & Le_{n+2} & Le_{n+1} \end{bmatrix},$$

com $u_5 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ *e* $M_5 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Demonstração. De modo análogo ao Teorema 2.1, podemos validar este teorema. □

Teorema 2.6. *Uma forma matricial dos números de Leonado, para* $n \geqslant 1$*, é dada por:*

$$Q_n^{(6)} = u_6 M_6^n = \begin{bmatrix} Le_n & Le_{n+1} & Le_{n+2} \end{bmatrix},$$

com $u_6 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ *e* $M_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Demonstração. De modo análogo ao Teorema 2.1, podemos validar este teorema. □

3 A generalização da forma matricial de Leonardo

Com o viés de generalizar a forma matricial dos números de Leonardo, realizamos uma extensão para o campo dos números inteiros não positivos, obtendo o seguinte teorema para a matriz abaixo, com base em Alves e Catarino (2019). Para isso, foi necessário calcular a inversa da matriz base M, denominando-a de μ. Além disso, foi definida a notação σ, representando Q_{-1}, como forma de facilitar a compreensão desse estudo.

Teorema 3.1. *Uma forma matricial generalizada dos números de Leonardo para o campo dos inteiros não positivos, para* $n > 0$*, é dada por:*

$$\sigma_n^{(1)} = u_1 \mu_1^n = \begin{bmatrix} Le_{-n+2} & Le_{-n+1} & Le_{-n} \end{bmatrix},$$

com $u_1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ *e* $\mu_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Demonstração. Utilizando o mesmo princípio realizado anteriormente, indução finita, temos que:

Para $n = 1$, tem-se que:

$$\sigma_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Le_1 & Le_0 & Le_{-1} \end{bmatrix}.$$

Validando a igualdade.

Assumindo que seja válido para $n = k, k \in \mathbb{N}$, temos que:

$$\sigma_k^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} Le_{-k+2} & Le_{-k+1} & Le_{-k} \end{bmatrix}.$$

Agora, iremos verificar que seja válido para $n = k + 1$, temos que:

$$\begin{aligned} \sigma_{k+1}^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{k+1} &= \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} Le_{-k+2} & Le_{-k+1} & Le_{-k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} Le_{-k+1} & Le_{-k} & 2Le_{-k+1} - Le_{-k+2} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} Le_{-k+1} & Le_{-k} & Le_{-k-1} \end{bmatrix}.$$

□

Indubitavelmente, pode-se obter mais outras cinco matrizes inversas dos números de Leonardo, apenas realizando o cálculo da inversa da matriz base, de acordo com os respectivos teoremas vistos na seção anterior.

Teorema 3.2. *Uma forma matricial generalizada dos números de Leonardo para o campo dos inteiros não positivos, para $n > 0$, é dada por:*

$$\sigma_n^{(2)} = u_2\mu_2^n = \begin{bmatrix} Le_{-n+2} & Le_{-n} & Le_{-n+1} \end{bmatrix},$$

com $u_2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ *e* $\mu_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

Demonstração. De modo análogo à demonstração do Teorema 3.1, pode-se validar este teorema. □

Teorema 3.3. *Uma forma matricial generalizada dos números de Leonardo para o campo dos inteiros não positivos, para $n > 0$, é dada por:*

$$\sigma_n^{(3)} = u_3\mu_3^n = \begin{bmatrix} Le_{-n+1} & Le_{-n} & Le_{-n+2} \end{bmatrix},$$

com $u_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ *e* $\mu_3 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Demonstração. De modo análogo à demonstração do Teorema 3.1, pode-se validar este teorema. □

Teorema 3.4. *Uma forma matricial generalizada dos números de Leonardo para o campo dos inteiros não positivos, para $n > 0$, é dada por:*

$$\sigma_n^{(4)} = u_4\mu_4^n = \begin{bmatrix} Le_{-n+1} & Le_{-n+2} & Le_{-n} \end{bmatrix},$$

com $u_4 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ *e* $\mu_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Demonstração. De modo análogo à demonstração do Teorema 3.1, pode-se validar este teorema. □

Teorema 3.5. *Uma forma matricial generalizada dos números de Leonardo para o campo dos inteiros não positivos, para $n > 0$, é dada por:*

$$\sigma_n^{(5)} = u_5\mu_5^n = \begin{bmatrix} Le_{-n} & Le_{-n+2} & Le_{-n+1} \end{bmatrix},$$

com $u_5 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ *e* $\mu_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Demonstração. De modo análogo à demonstração do Teorema 3.1, pode-se validar este teorema. □

Teorema 3.6. *Uma forma matricial generalizada dos números de Leonardo para o campo dos inteiros não positivos, para $n > 0$, é dada por:*

$$\sigma_n^{(6)} = u_6\mu_6^n = \begin{bmatrix} Le_{-n} & Le_{-n+1} & Le_{-n+2} \end{bmatrix},$$

com $u_6 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ *e* $\mu_6 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Demonstração. De modo análogo à demonstração do Teorema 3.1, pode-se validar este teorema. □

4 Propriedades matriciais

Fundamentado no trabalho de Seenukul (2015); Sokhuma (2013), podemos estabelecer propriedades referentes às matrizes encontradas nas seções anteriores.
Referente a representação matricial de Leonardo para os índices inteiros positivos, tem-se:

Propriedade 4.1. *Para qualquer inteiro $n > 0$, temos:*

$$Q_n = 2Q_{n-1} + Q_{n-3}$$

Demonstração. De acordo com o Teorema 2.1, e com a Definição 1.2, temos:

$$\begin{aligned}
Q_n^{(1)} &= 2Q_{n-1}^{(1)} + Q_{n-3}^{(1)} \\
\begin{bmatrix} Le_{n+2} & Le_{n+1} & Le_n \end{bmatrix} &= 2\begin{bmatrix} Le_{n+1} & Le_n & Le_{n-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Le_{n-1} & Le_{n-2} & Le_{n-3} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2Le_{n+1} - Le_{n-1} & 2Le_n - Le_{n-2} & 2Le_{n-1} - Le_{n-3} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} Le_{n+2} & Le_{n+1} & Le_n \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

□

Para as matrizes com os termos de índices inteiro não positivo, onde $\sigma = Q_{-1}$, tem-se:

Propriedade 4.2. *Para qualquer inteiro $n > 0$, temos:*

$$\sigma_n = 2\sigma_{n-2} - \sigma_{n-3}$$

Demonstração. De acordo com o Teorema 3.1 e com a Definição 1.4, temos:

$$\begin{aligned}
Q_{-n} &= 2Q_{-n+2} - Q_{-n+3} \\
\sigma_n &= 2\sigma_{n-2} - \sigma_{n-3} \\
\begin{bmatrix} Le_{-n+2} & Le_{-n+1} & Le_{-n} \end{bmatrix} &= 2\begin{bmatrix} Le_{-n+4} & Le_{-n+3} & Le_{-n+2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Le_{-n+5} & Le_{-n+4} & Le_{-n+3} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2Le_{-n+4} - Le_{-n+5} & 2Le_{-n+3} - Le_{-n+4} & 2Le_{-n+2} - Le_{-n+3} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} Le_{-n+2} & Le_{-n+1} & Le_{-n} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

□

Agradecimentos

A parte de desenvolvimento da pesquisa no Brasil pelo apoio financeiro do Conselho Nacional de Desenvolvimento Cientifico e Tecnológico – CNPq e pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES.

A parte de desenvolvimento da pesquisa em Portugal pelo financiamento por Fundos Nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e a Tecnologia. I. P, no âmbito do projeto UID/CED/00194/2020.

Referências

Alves, F. R. V., Catarino, P. M. M. C. (2019). Sequência matricial generalizada de fibonacci e sequência matricial k-pell: propriedades matriciais. *CQD - Revista Eletrônica Paulista de Matemática*, *15*, 39–54.

Catarino, P. M. M. C., Borges, A. (2020). On leonardo numbers. *Acta Mathematica Universitatis Comenianae*, *1*(89), 75–86.

Dijkstra, E. W. (1981). *Smoothsort, an alternative for sorting in situ*. Plataanstraat - The Netherlands.

Ercolano, J. (1979). Matrix generators of pell sequences. *The Fibonacci Quartely, Halifax*, *17*(1), 71–77.

Seenukul, P. e. a. (2015). Matrices which have similar properties to padovan q -matrix and its generalized relations. *Sakon Nakhon Rajabhat University Journal of Science and Technology*, *7*(2), 90–94.

Sokhuma, K. (2013). Matrices formula for padovan and perrin sequences. *Applied Mathematical Sciences*, *7*(142), 7093–7096.

Vieira, R. P. M., Alves, F. R. V., Catarino, P. M. M. C. (2019). Relações bidimensionais e identidades da sequência de leonardo. *Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática*, *4*(2), 156–173.