JOMTA
Journal of Mathematics: Theory and Applications
Vol. 3, No. 2, 2021, P-ISSN 2685-9653 e-ISSN 2722-2705

Analisis Model Matematika PLSQ Jumlah Perokok

St.Halija[1], Fardinah[2], Ahmad Ansar[3]
Program Studi Matematika, Universitas Sulawesi Barat, Indonesia
e-mail: [1] lijahalija956@gmail.com

Abstrak. Merokok termasuk kebiasaan yang disukai oleh sebagian masyarakat, namun merokok menimbulkan beban kesehatan, ekonomi, sosial, dan lingkungan bukan saja bagi perokok tetapi juga bagi orang lain. Penelitian ini bertujuan untuk menentukan model matematika jumlah perokok, analisis titik kesetimbangan model matematika PLSQ jumlah perokok dan simulasi model matematika PLSQ jumlah perokok. Dalam penelitian ini, peneliti mengasumsikan bahwa perokok kadang – kadang terdapat laju kematian yang disebabkan oleh rokok dan mantan perokok setelah dia sembuh, maka tidak akan kembali merokok. Hasil yang diperoleh berupa model matematika PLSQ jumlah perokok yang menghasilkan 1 (satu) titik kesetimbangan bebas perokok dan 1 (satu) titik endemik perokok dari model tersebut. Metode yang digunakan yaitu analisis kestabilan model yang dilakukan dengan menggunakan Kriteria Routh-Hurwitz untuk mengidentifikasi karakteristik nilai eigen. Dari hasil analisis kestabilan diperoleh bahwa titik kesetimbangan bebas perokok E_0 dan titik kesetimbangan endemik perokok E_1 stabil jika syarat hubungan parameter – parameternya terpenuhi. Pada akhir penelitian, diberikan simulasi model dengan menggunakan aplikasi Maple.

Kata kunci: kriteria Routh-Hurwitz, model matematika, titik kesetimbangan

Abstract. Smoking is a habit that is favored by some people, but smoking causes health, economic, social and environmental burdens not only for smokers but also for others. This study aims to determine the mathematical model of the number of smokers, analysis of the equilibrium point of the PLSQ mathematical model of the number of smokers and a simulation of the mathematical model of the PLSQ of the number of smokers. In this study, the researcher assumed that the current smoker had a death rate caused by smoking and that the former smoker after he recovered, would not return to smoking. The results obtained are the PLSQ mathematical model of the number of smokers which produces 1 (one) smoke-free equilibrium point and 1 (one) smoker endemic point from the model. The stability analysis of the model was carried out using the Routh-Hurwitz Criteria to identify the characteristics of the eigenvalues. From the results of the stability analysis, it was found that the smoker-free equilibrium point E_0 and the smokers endemic equilibrium point E_1 were stable if the condition for the relationship between parameters were met. At the end of the study, a simulation model was given using the Maple application.

***Keywords**: Routh- Hurwitz criteria, mathematical model, equilibrium point*

I. PENDAHULUAN

Matematika adalah salah satu cara disipin ilmu yang memegang peranan penting dalam berbagaikajian dan pengembangan ilmu pengetahuan. Peranan matematika telah memberikan pengaruh yang sangat besar terhadap kemajuan pengetahuan dan teknologi dari tahun ke tahun. Model matematika termasuk salah satu bagian dari perkembangan tersebut, hampir semua permasalahan di dunia nyata dapat diformulasikan ke dalam model matematika. Model matematika melibatkan konsep matematika seperti persamaan, pertidaksamaan, fungsi serta turunan yang melibatkan formulasi matematika secara abstrak. Pemodelan matematika adalah proses penyederhanaan masalah dunia nyata atau fenomena nyata yang dituangkan dalam bentuk matematika.

Rokok merupakan salah satu pembunuh paling berbahaya di dunia. Dampak kerugian yang ditimbulkan rokok bukan hanya masalah kesehatan saja tetapi juga moral dan finansial. Kebiasaan merokok telah terbukti berhubungan dengan sedikitnya 25 jenis penyakit pada berbagai organ tubuh. Selain pada orang yang merokok (perokok aktif), penyakit-penyakit juga tersebut berdampak pada orang yang tidak merokok [1]. Rokok dapat memicu berbagai penyakit komorbid, seperti kardiovaskular, jantung, hipertensi, diabetes, paru-paru dan lain sebagainya. Ironisnya konsumsi rokok di indonesia persentase tertinggi dilakukan oleh kelompok pendapatan rendah seperti nelayan dan petani atau buruh.

Indonesia menjadi negara ketujuh jumlah perokok aktif terbanyak pada tahun 2020 dengan persentase 39,9%. Berbagai cara telah dilakukan oleh pemerintah untuk mengatasi permasalahan tentang jumlah perokok, salah-satunya dengan melakukan promosi kesehatan kepada masyarakat membuat lokasi khusus bagi perokok, serta orang yang memproduksi rokok juga telah menyertakan gambar pada bungkus rokok yang menggambarkan seberapa besar bahaya yang dikandung oleh rokok yang akan berakibat pada diri pengonsumsi [1].

Beberapa peneliti telah melakukan pengembangan model matematika tentang peningkatan jumlah perokok, diantaranya yang dalam jurnalnya mengkaji tentang model matematika jumlah perokok dengan dinamika akar kuadrat dan faktor migrasi maka titik ekuilibrium endemik perokok akan stabil asimtotik dan pada jangka waktu yang lama akan selalu terjadi penyebaran perokok jika syarat terpenuhi [2]. Begitu juga dengan jurnal yang mengkaji tentang model matematika jumlah perokok yang dipengaruhi faktor migrasi dengan dinamika akar kuadrat pada kondisi *Relapse* di bagi menjadi 3 subpopulasi yaitu perokok potensial (P), perokok ringan (L) dan perokok berat (S) hal ini pada kenyataannya akan sulit bagi seorang perokok benar – benar berhenti dari kebiasaan merokok (berhenti permanen) dan akhirnya merokok kembali *Relapse.* Begitu juga dengan jurnal yang mengkaji tentang pengembangan model matematika dinamika perokok di kota Bogor bahwa setelah adanya faktor efikasi diri untuk berhenti merokok jumlah perokok dikota bogor mengalami penurunan tetapi tidak akan mencapai nol [3].

Berdasarkan latar belakang diatas penulis tertarik meneliti analisis model matematika jumlah perokok yang merupakan pengembangan dari penelitian Embay, Rohaeti dan Ani, Andriyati. Dalam penelitian ini, peneliti mengasumsikan bahwa perokok kadang – kadang terdapat laju kematian yang disebabkan oleh rokok dan mantan perokok setelah dia sembuh, maka tidak akan kembali merokok. Begitu juga penelitian yang mengkaji terapi berhenti merokok dalam studi kasus 3 perokok berat. Dalam penelitian ini, peneliti mengasumsikan bahwa perokok kadang – kadang tidak mengalami laju kematian yang disebabkan oleh rokok dan mantan perokok akan kembali merokok. Model yang akan diteliti oleh penulis yaitu pemodelan matematika PLSQ pada jumlah perokok pada model dibagi menjadi 4 subpopulasi yaitu *Potential Smoker* subpopulasi perokok potensial, *Light Smoker* subpopulasi perokok kadang-kadang, *Severe Smoker* subpopulasi perokok berat, *Quit Smoking* subpopulasi mantan perokok. Dalam penelitian ini penulis akan meneliti model matematika PLSQ jumlah perokok, menganalisis titik kesetimbangan model matematika PLSQ jumlah perokok dan simulasi model matematika PLSQ jumlah perokok.

II. LANDASAN TEORI

2.1 Pemodelan Matematika

Pemodelan matematika merupakan salah satu terapan ilmu matematika untuk menyelesaikan suatu fenomena nyata dengan menyederhanakannya ke dalam bentuk matematis, hingga diperoleh suatu solusi yang kemudian diinterpretasikan kembali dari bentuk matematis ke dunia nyata [4].

Suatu model dapat dibuat berdasarkan asumsi-asumsi yang selanjutnya akan dilakukan analisis, agar model yang dibuat representatif terhadap permasalahan yang dibahas. Banyak permasalahan yang timbul dari berbagai bidang ilmu, misalnya bidang kesehatan, biologi, kimia dan lain-lain yang dapat dibuat model matematikanya [5].

Berikut ini diberikan suatu metodologi dasar dalam proses penentuan model matematika. Tahapan tersebut adalah sebagai berikut:

1. Masalah dunia nyata
   Tahap pertama pada pemodelan matematika adalah dengan menemukan masalah yang akan dijadikan topik pada penelitian. Masalah tersebut harus diidentifikasi secara jelas, diperiksa dengan teliti menurut kepentingannya.
2. Identifikasi masalah
   Masalah yang diteliti perlu diidentifikasi, yaitu pengertian yang mendasar tentang masalah yang dihadapi, asumsi-asumsi yang jelas dan sesuai termasuk pemilihan variabel yang tepat dalam pembuatan model.
3. Membangun model
   Membangun model merupakan penterjemahan dari masalah ke persamaan matematika yang menghasilkan model matematika. Ini merupakan tahap yang paling penting dan sulit. Dalam hal ini model yang digunakan ada kalanya lebih dari satu persamaan, bahkan merupakan satu sistem atau suatu fungsi dengan variabel-variabel dalam bentuk persamaan parameter.
4. Analisis model
   Pada tahap ini model yang umumnya merupakan abstraksi masalah yang sudah disederhanakan, sehingga hasilnya mungkin berbeda dengan kenyataan yang diperoleh. Untuk itu kita perlu menganalisis sejauh mana model dapat memadai dalam merepresentasikan masalah yang dihadapi.
5. Uji model
   Model yang sudah dianalisis kemudian simulasikan dengan menggunakan aplikasi seperti Maple, Matlab, aplikasi R dan lain-lain.

2.2 Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial adalah persamaan yang melibatkan/menyertakan turunan satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu atau lebih variabel bebas.

Berdasarkan banyaknya vaiabel bebas yang dilibatkan, persamaan diferensial diklasifikasikan menjadi dua, yaitu persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial.

Persamaan diferensial biasa yaitu suatu persamaan diferensial yang melibatkan turunan dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu variabel bebas. Persamaan diferensial parsial adalah suatu persamaan diferensial yang melibatkan turunan dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap dua atau lebih variabel bebas [6].

2.3 Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan

Titik kesetimbangan adalah sebuah keadaan dari suatu sistem yang tidak berubah terhadap waktu. Jika sistem dinamika diuraikan dalam sebuah persamaan diferensial, maka titik kesetimbangan dapat diperoleh dengan mengambil turunan pertama yang sama dengan nol.

Titik $\bar{x} \in R^n$ disebut titik kesetimbangan (titik *equilibrium*) dari suatu sistem persamaan diferensial yaitu $\dot{x} = f(x)$ jika memenuhi $f(\bar{x})=0$ [7].

Kestabilan titik kesetimbangan (*equilibrium point*) dari suatu sistem persamaan diferensial baik linear maupun nonlinear diberikan dalam definisi berikut.

Diberikan sistem persamaan diferensial orde satu dan $x(t, x_0)$ adalah solusinya pada saat t dengan kondisi awal $x(0) = x_0$.

1. Vektor $\bar{x}$ memenuhi $f(\bar{x}) = 0$ dikatakan sebagai titik kesetimbangan.
2. Titik kesetimbangan $\bar{x}$ dikatakan stabil jika diberikan $\varepsilon > 0$, terdapat $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sedemikian sehingga jika $\|x_0 - \bar{x}\| < \delta$ (dengan $\|.\|$ adalah norm pada $\mathbb{R}^n$), maka $\|x(t, x_0) - \bar{x}\| < \varepsilon$ untuk $t \geq 0$.
3. Titik kesetimbangan $\bar{x}$ dikatakan stabil asimtotik jika titik-titik kesetimbangannya stabil dan terdapat $\delta_1 > 0$ sedemikian sehingga $\lim_{t\to\infty} \|x(t, x_0) - \bar{x}\| = 0$, asalkan $\|x_0 - \bar{x}\| < \delta_1$.
4. Titik kesetimbangan $\bar{x}$ dikatakan tidak stabil jika titik kesetimbangan tidak memenuhi poin 2 [8].

Berikut diberikan hubungan antara nilai eigen dan kestabilan. Misalkan diberikan sistem persamaan diferensial nonlinear $\dot{x} = f(x)$.

i. Jika semua bagian real nilai eigen matriks Jacobian $J(f(\bar{x}))$ bernilai negatif, maka titik kesetimbangan pada $\dot{x}$ dari persamaan stabil asimtotik lokal.
ii. jika terdapat paling sedikit satu nilai eigen matriks jacobian $J(f(\bar{x}))$ yang bagian realnya positif maka titik kesetimbangan pada $\dot{x}$ dari persamaan tidak stabil [8].

Berikut diberikan definisi matriks Jacobian. Diberikan $f = (f_1, \cdots, f_n)$ pada sistem $\dot{x} = f(x)$ di atas dengan $i \in 1, 2, \cdots, n$

$$Jf(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\bar{x}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\bar{x}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\bar{x}) \end{bmatrix}$$

$Jf(x)$ merupakan matriks jacobian yang berukuran *m x n*. Matriks ini sering juga ditulis sebagai $\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right] i, j.$

Penentuan kestabilan titik kesetimbangan diperoleh dengan melihat nilai-nilai eigenya, yaitu λ_i dengan $i = 1, \cdots, n$ yang diperoleh dari det(λ**I** – **A**) = 0. Nilai eigen adalah nilai karakteristik dari suatu matriks berukuran *nxn* sementara vektor eigen adalah vektor kolom bukan nol yang bila dikalikan dengan suatumatriks berukuran *nxn* akan menghasilkan vektor lain yang memiliki nilai kelipatan dari vektor eigen itu sendiri.

Untuk mencari nilai karakteristik matriks Jacobian yang berukuran $n \times n$ maka dapat dituliskan kembali persamaan $Jx = \gamma Ix$ atau ekuivalen dengan $(\gamma l - J)x = 0$, mempunyai penyelesaian tak nol jika dan hanya jika

$$\det(\gamma l - J)x = 0$$

Persamaan diatas dinamakan persamaan karakteristik dari *J* dan skalar γ yang memenuhi persamaan diatas adalah nilai eigen dari *J* [9].

Pada matriks *J* dengan ukuran $n \times n$, maka polinomial karakteristik *J* mempunyai bentuk

$$\det(\gamma I - J)x = \gamma^n + p_1\gamma^{n-1} + p_2\gamma^{n-1} + \ldots + p_n = 0$$

Sehingga persamaan karakteristik *J* menjadi $\gamma^n + c_1\gamma^{n-1} + c_2\gamma^{n-2} + \ldots + c_n = 0$

2.4 Bilangan Reproduksi Dasar (R_0)

Bilangan reproduksi dasar dari sudut pandang epidemiologi didefinisikan sebagai rata-rata banyaknya individu rentan yang terinfeksi secara langsung oleh individu lain yang sudah terinfeksi, bila individu yang terinfeksi tersebut masuk ke dalam populasi yang seluruhnya masih rentan.

Metode yang digunakan untuk menentukan bilangan reproduksi dasar R_0 yaitu metode *Next Generation Matrix* (NGM) berdasarkan. Bilangan reproduksi dasar merupaka $R_0 = \rho(fV^{-1})$ dengan ρ dalam R_0 merupakan spectral radius atau nilai eigen dominan dan x_0 merupakan titik kesetimbangan bebas perokok F_i menyatakan laju infeksi baru, V_i menyatakan transfer individu ke kompartemen V_i^{-1} menyatakan transfer individu keluar dari kompartemen dan $F = \left[\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right], V = \left[\frac{\partial V_i}{\partial x_j}\right]$ [10].

Bilangan reproduksi dasar dilambangkan dengan R_0 mempunyai 3 kondisi yang akan timbul, yaitu

1. Jika $R_0 < 1$ maka kebiasaan merokok akan menghilang.
2. Jika $R_0 = 1$ maka kebiasaan merokok akan menetap.
3. Jika $R_0 > 1$ maka kebiasaan merokok akan bersifat endemik [11]

Untuk menentukan kestabilan suatu titik kesetimbangan digunakan kriteria kestabilan Routh-Hurwitz. Kriteria kestabilan Routh-Hurwitz adalah suatu metode yang digunakan untuk menunjukkan kestabilan sistem dengan memperhatikan koefisien dari persamaan karakteristik tanpa menghitung akar-akar secara langsung. Jika persamaan polinom adalah persamaan karakteristik, maka metode ini dapat digunakan untuk menentukan kestabilan dari suatu sistem.

2.5 Rokok

Rokok merupakan salah satu zat adikatif yang bila digunakan mengakibatkan bahaya kesehatan bagi diri sendiri maupun remaja, oleh karena itu diperlukan berbagai kegiatan pengamanan rokok bagi kesehatan. Rokok adalah hasil olahan tembakau terbungkus termasuk cerutu atau bentuk lainnya yang mengandung nikotin dan tar [12].

Berikut ini beberapa pola perilaku merokok dari seorang perokok:

a. Perokok potensial, orang yang tidak merokok namun berpotensi untuk menjadi perokok [13].
b. Perokok kadang-kadang adalah orang yang mengomsumsi1-10 batang perhari [14].

c. Perokok berat mengomsumsi rokok lebih dari 11-24 batang perhari [14].
d. Mantan perokok adalah seseorang yang pernah merokok dan sudah berhenti merokok [14].

III. METODE

3.1 Jenis Penelitian

Jenis penelitian yang digunakan adalah penelitian teori dan terapan, yaitu penelitian yang dapat menghasilkan suatu informasi untuk memecahkan masalah sesuai dengan konsep-konsep sebelumnya yang telah disusun mengenai analisis model matematika yang berbentuk sistem persamaan diferensial. Pada penelitian ini, penulis akan membangun model matematika dari topik yang diangkat berdasarkan asumsi–asumsi yang telah ditentukan sehingga diperoleh suatu solusi matematis kemudian diinterpretasikan ke dunia nyata.

3.2 Prosedur Penelitian

Prosedur penelitian yang diterapkan dalam penelitian ini guna mencapai tujuan penelitian, adalah sebagai berikut:

1. Menentukan Kajian Pustaka
   Berupa hasil-hasil penelitian yang dipaparkan pada jurnal-jurnal terdahulu dan literatur-literatur yang berkaitan dengan permasalahan yang diteliti.
2. Menentukan asumsi dan mendefinisikan parameter yang digunakan pada analisis model matematika PLSQ jumlah perokok.
3. Membentuk model dengan menggunakan sistem persamaan diferensial.
4. Menentukan titik kesetimbangan *(equilibrium)* model dengan menyelesaikan sistem.
5. Menentukan R_0.
6. Menganalisis sifat kestabilan titik kesetimbangan *(equilibrium)* dengan kriteria Routh-Hurwitz.
7. Mensimulasikan model dengan menggunakan program maple.
8. Menarik kesimpulan dan interpretasi.

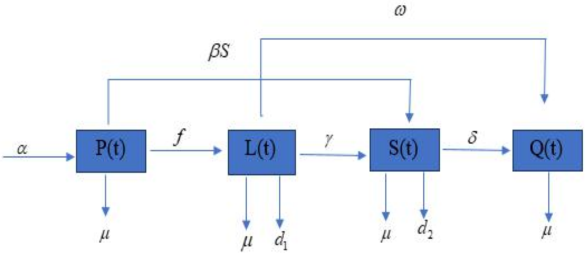
IV. HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Model Matematika

Analisis model matematika PLSQ jumlah perokok ini membutuhkan beberapa asumsi yang sesuai dan berhubungan dengan model yang akan diperoleh Adapun asumsi –asumsi yang digunakan pada model matematika ini adalah sebagai berikut:

a. Terdapat 4 subpopulasi yaitu $P(t)$ adalah perokok potensial dalam waktu t, $L(t)$adalah perokok kadang-kadang dalam waktu t, $S(t)$ adalah perokok berat dalam waktu t, $Q(t)$ adalah mantan perokok dalam waktu t.
b. Adanya pertumbuhan pada populasi perokok potensial dengan laju pertumbuhan sebesar α.
c. Kematian secara alami terjadi pada semua subpopulasi dengan laju kematian sebesar μ.
d. Perokok potensial akan menjadi seorang perokok kadang – kadang karena berinteraksi dengan perokok berat β.
e. Terjadi perpindahan individu dari subpopulasi perokok kadang – kadang ke subpopulasi perokok berat dengan laju bertambahnya sebesar γ
f. Terjadi kematian di subpopulasi perokok kadang – kadang karena rokok dengan laju kematian sebesar d_1
g. Terjadi kematian di subpopulasi perokok berat karena rokok dengan laju kematian sebesar d_2
h. Terjadi perpindahan dari perokok kadang – kadang ke mantan perokok dengan laju kesembuhan sebesar ω
i. Terjadi perpindahan dari perokok berat ke mantan perokok dengan laju kesembuhan sebesar δ
j. Populasi di asumsikan tertutup.

Berdasarkan asumsi tersebut diperoleh diagram kompartemen model sebagai berikut.



Gambar 1. Diagram alur model matematika PLSQ jumlah perokok

Keterangan simbol variabel

$P(t)$ = perokok potensial dalam waktu t.
$L(t)$ = perokok kadang – kadang dalam waktu t.
$S(t)$ = perokok berat dalam waktu t.
$Q(t)$ = mantan perokok dalam waktu t.

Keterangan simbol parameter

β = laju kontak antara individu subpopulasi rentan perokok.
μ = laju kematian alami.
d_1 = laju kematian yang disebabkan oleh rokok di perokok kadang- kadang.
d_2 = laju kematian yang disebabkan oleh rokok di perokok berat.
γ = laju bertambahnya perokok kadang – kadang.
δ = laju kesembuhan dari perokok berat.
α = laju pertumbuhan.
f = laju individu perokok potensial akan memasuki periode perokok kadang – kadang.
ω = laju kesembuhan perokok kadang – kadang.

Berdasarkan asumsi dan diagram kompartemen tersebut maka diperoleh model matematika PLSQ jumlah perokok sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
\frac{dP}{dt} &= \alpha - f\beta PS - \mu P \\
\frac{dL}{dt} &= f\beta PS - (\gamma + d_1 + \mu + \omega)L \\
\frac{dS}{dt} &= \gamma L - (\delta + d_2 + \mu)S \\
\frac{dQ}{dt} &= \delta S + \omega L - \mu Q
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

4.2 Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan

Titik kesetimbangan sistem (1) ditentukan berdasarkan [9] yang menghasilkan dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas perokok $E_0=(P_1,L_1,S_1,Q_1)=\left(\frac{\alpha}{\mu},0,0,0\right)$ dan titik kesetimbangan endemik perokok $E_1=(P_1,L_1,S_1,Q_1)=$

$$\left(\frac{(\gamma+d_1+\mu+\omega)(\delta+d_2+\mu)}{f\beta\gamma},\ \frac{\alpha f\beta\gamma-(\mu(\gamma+d_1+\mu+\omega)(\delta+d_2+\mu))}{\gamma\beta(\gamma+d_1+\mu+\omega)},\right.$$
$$\frac{\alpha f\beta\gamma-(\mu(\gamma+d_1+\mu+\omega)(\delta+d_2+\mu))}{f\beta(\gamma+d_1+\mu+\omega)(\delta+d_2+\mu)},$$
$$\left.\frac{(\delta\gamma+\omega)(\alpha f\beta\gamma-(\mu(\gamma+d_1+\mu+\omega)(\delta+d_2+\mu)))}{\mu\gamma f\beta(\gamma+d_1+\mu+\omega)(\delta+d_2+\mu)}\right)$$

Bilangan reproduksi dasar merupakan nilai harapan banyaknya populasi rentan menjadi terinfeksi selama masa infeksi. Bilangan reproduksi dasar dapat ditentukan dengan menggunakan persamaan yang hanya mengandung infeksi.

Teorema 1. *Bilangan reproduksi dasar model PLSQ adalah*

$$R_0=\frac{\gamma f\beta\alpha}{\mu(\gamma+d_1+\mu+\omega)(\delta+d_2+\mu)}$$

Bukti:

Bilangan reproduksi dasar yang dinotasikan dengan (R_0) dapat dicari dengan menggunakan pendekatan *next generation matriks*, yang diperoleh dari kelas *L* dan *S* pada sistem persamaan (1). Berdasarkan sistem persamaan (1), diambil sistem persamaan kelas *L* dan *S* dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned} dL&=f\beta PS-(\gamma+d_1+\mu+\omega)L \\ dS&=\gamma L-(\delta+d_2+\mu)S \end{aligned} \qquad (4.3)$$

$$\begin{pmatrix} dL\\ dS\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}-(\gamma+d_1+\mu+\omega) & f\beta P\\ -\gamma & -(\delta+d_2+\mu)\end{bmatrix}\begin{pmatrix} L\\ S\end{pmatrix}$$
$$=\left[\begin{pmatrix}0 & f\beta P\\ 0 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\gamma+d_1+\mu+\omega & 0\\ -\gamma & \delta+d_2+\mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix} L\\ S\end{pmatrix}\right]$$

Misalkan

$$F=\begin{pmatrix}0 & f\beta P\\ 0 & 0\end{pmatrix} \qquad (4.4)$$

$$V=\begin{pmatrix}\gamma+d_1+\mu+\omega & 0\\ -\gamma & \delta+d_2+\mu\end{pmatrix} \qquad (4.5)$$

Kemudian persamaan F dan V diturunkan terhadap *L* dan *S* sehingga diperoleh:

$$F^1=\begin{bmatrix}0 & f\beta P\\ 0 & 0\end{bmatrix} \quad V^1=\begin{bmatrix}\gamma+d_1+\mu+\omega & 0\\ -\gamma & \delta+d_2+\mu\end{bmatrix}$$

$$F^1V^1=F^1\frac{1}{\det V^1}adj\,V^1$$

$$=\begin{bmatrix}0 & f\beta P\\ 0 & 0\end{bmatrix}\frac{1}{(\gamma+d_1+\mu+\omega)(\delta+d_2+\mu)}\begin{bmatrix}\delta+d_2+\mu & 0\\ -\gamma & \gamma+d_1+\mu+\omega\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{\gamma f\beta P}{(\gamma+d_1+\mu+\omega)(\delta+d_2+\mu)} & \frac{f\beta P}{\delta+d_2+\mu}\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

sehingga nilai eigen dari $F'V'^{-1}$

$$\det\left(\begin{bmatrix}\frac{\gamma f\beta P}{(\gamma+d_1+\mu+\omega)(\delta+d_2+\mu)} & \frac{f\beta P}{\delta+d_2+\mu}\\ 0 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}\right)=0$$

$$\begin{bmatrix}\frac{\gamma f\beta P}{(\gamma+d_1+\mu+\omega)(\delta+d_2+\mu)}-\lambda & \frac{f\beta P}{\delta+d_2+\mu}\\ 0 & -\lambda\end{bmatrix}=0$$

$$\left(\frac{\gamma f\beta P}{(\gamma+d_1+\mu+\omega)(\delta+d_2+\mu)}-\lambda\right)(-\lambda)=0$$

$$\frac{\gamma f\beta P\lambda}{(\gamma+d_1+\mu+\omega)(\delta+d_2+\mu)}+\lambda^2=0$$

$$\lambda\left(\frac{\gamma f\beta P}{(\gamma+d_1+\mu+\omega)(\delta+d_2+\mu)}+\lambda\right)=0$$

$$\lambda=0$$

$$\frac{\gamma f\beta P}{(\gamma+d_1+\mu+\omega)(\delta+d_2+\mu)}+\lambda=0$$

$$\lambda=\frac{\gamma f\beta P}{(\gamma+d_1+\mu+\omega)(\delta+d_2+\mu)}$$

$$=\frac{\gamma f\beta\left(\frac{\alpha}{\mu}\right)}{(\gamma+d_1+\mu+\omega)(\delta+d_2+\mu)}$$

$$=\frac{\gamma f\beta\alpha}{\mu(\gamma+d_1+\mu+\omega)(\delta+d_2+\mu)}$$

Jadi, bilangan reproduksi dasar model PLSQ adalah

$$R_0=\frac{\gamma f\beta\alpha}{\mu(\gamma+d_1+\mu+\omega)(\delta+d_2+\mu)}.$$

Teorema 2. *Titik kesetimbangan bebas perokok (E_0) akan stabil jika*

$$A>0,\frac{AB-C}{A}>0 \text{dan } C>0$$

Bukti:

Matriks jacobian dari persamaan (1) diperoleh sebagai berikut:

$$J=\begin{bmatrix}-(f\beta S+\mu) & 0 & \beta P & 0\\ f\beta S & -(\gamma+d_1+\mu+\omega) & -f\beta P & 0\\ 0 & \gamma & -(\delta+d_2+\mu) & 0\\ 0 & \omega & \delta & -\mu\end{bmatrix}$$

Substitusi E_0 ke matriks J diperoleh

$$J(E_0)=\begin{bmatrix}-\mu & 0 & \frac{\beta\alpha}{\mu} & 0\\ 0 & -(\gamma+d_1+\mu+\omega) & \frac{-f\beta\alpha}{\mu} & 0\\ 0 & \gamma & -(\delta+d_2+\mu) & 0\\ 0 & \omega & \delta & -\mu\end{bmatrix}$$

Dari matriks $J(E_0)$ diperoleh persamaan karakteristik

$$(\lambda+\mu)\Big[(\lambda+\mu)(\lambda^2+\lambda\delta+\lambda d_2+\lambda\mu)(\lambda\gamma+\lambda d_1+\lambda\mu+\lambda\omega)+(\lambda+\gamma+d_1+\mu+\omega)$$
$$(\lambda+\delta+d_2+\mu)+\frac{\gamma f\beta\alpha}{\mu}\Big]=0$$

Diperoleh tabel Routh-Hurwitz sebagai berikut:

Tabel 1. Tabel Routh-Hurwitz kestabilan titik E_0

λ^3	1	B	0
λ^2	A	C	0
λ^1	$\frac{AB-C}{A}$	0	0
λ^0	C	0	0

Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz syarat perlu untuk stabil adalah semua suku pada kolom pertama pada tabel Routh-Hurwitz bertanda positif. Untuk mendapatkan kolom pertama tabel Routh-Hurwitz semua bertanda positif syaratnya adalah $A>0, \frac{AB-C}{A}>0, C>0$

dengan:.

$$A=(\delta+d_2+\mu+\gamma+d_1+\mu+\omega+\mu)$$

$$B=(\mu\gamma+\mu d_1+\mu^2+\mu\omega+\mu\delta+\mu d_2+\mu^2)+(\gamma+d_1+\mu+\omega+\mu+\delta+d_2+\mu)$$

$$C=\mu(\gamma+d_1+\mu+\omega+\mu+\delta+d_2+\mu)+\frac{\gamma f\beta\alpha}{\mu}$$

Teorema 3. *Titik kesetimbangan endemik (E_1) akan stabil jika* $M>0, \frac{MN-K}{M}>0$ dan $K>0$

Bukti:

Matriks Jacobian untuk titik kesetimbangan endemik yaitu

$$J(E_1)=\begin{bmatrix} -(f\beta S^*+\mu) & 0 & \beta P^* & 0 \\ \beta S^* & -(\gamma+d_1+\mu+\omega) & -f\beta P^* & 0 \\ 0 & \gamma & -(\delta+d_2+\mu) & 0 \\ 0 & \omega & \delta & \mu \end{bmatrix}$$

Dari matriks J(E_1) diperoleh persamaan karakteristik

$$\lambda+\mu\left[(\lambda+f\beta S^*+\mu)(\lambda+\gamma+d_1+\mu+\omega)(\lambda+\delta+d_2+\mu)+\gamma f\beta P^*-\gamma f\beta^2P^*S^*\right]=0$$

diperoleh tabel Routh-Hurwitz sebagai berikut:

Tabel 2. Tabel Routh-Hurwitz kestabilan titik E_1

λ^3	1	N	0
λ^2	M	K	0
λ^1	$\frac{MN-K}{M}$	0	0
λ^0	K	0	0

Untuk mendapatkan kolom pertama tabel Routh-Hurwitz semua bertanda positif syaratnya adalah $M>0$, $\frac{MN-K}{M}>0, K>0$ dengan

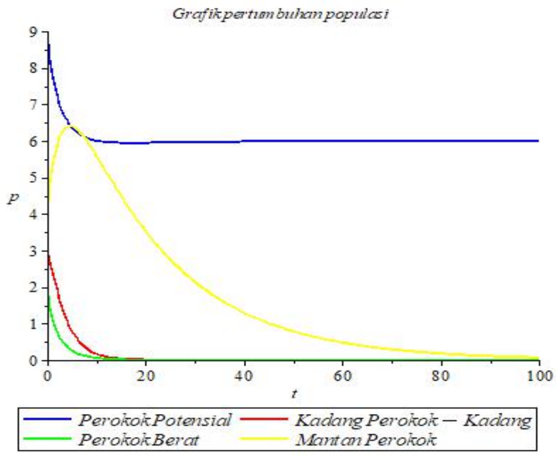
$$M=(\gamma+d_1+\mu+\omega+\delta+d_2+\mu+\beta S^*+\mu)$$
$$=(\gamma+d_1+3\mu+\omega+\delta+d_2+\beta S^*)$$
$$N=(f\beta S^*(\gamma+d_1+\mu+\omega+\delta+d_2+\mu))+(2\mu\gamma+2\mu d_1+3\mu^2+2\mu\omega+2\mu\delta+2\mu d_2+$$
$$(\delta+d_2)(\gamma+d_1+\omega))$$
$$K=(f\beta S^*+\mu)(\mu\gamma+\mu d_1+\mu^2+\mu\omega+\mu\delta+\mu d_2)+(f\beta S^*+\mu)(\delta+d_2)(\gamma+d_1+\omega)+$$
$$\gamma f\beta P^*-\gamma f\beta^2P^*S^*$$

4.3 Simulasi

Untuk penelitian dengan kondisi $R_0<1$ akan di analisis dengan nilai variabel dan nilai awal dan parameter pada Tabel 3 sebagai berikut:

Tabel 3 Nilai parameter dan nilai awal untuk titik kesetimbangan bebas perokok

Parameter	Nilai	Sumber
α	0,3	[15]
β	0,08	Asumsi
μ	0,05	Asumsi
f	0,55	Asumsi
γ	0,2	[3]
d_1	0,06	Asumsi
ω	0,09	Asumsi
d_2	0,06	Asumsi
δ	0,80	Asumsi
P	9	Asumsi
L	3	Asumsi
S	2	Asumsi
Q	4	Asumsi



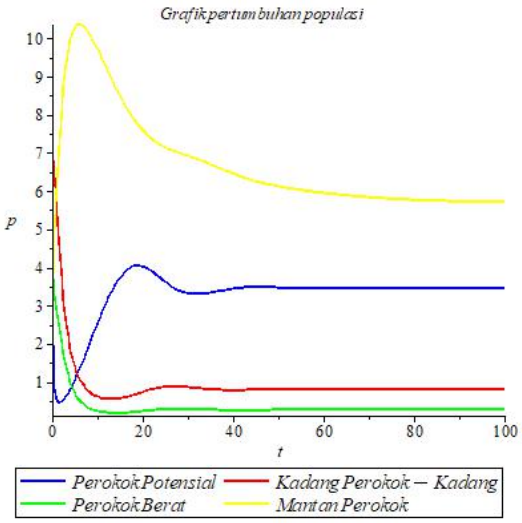
Gambar 2. Simulasi titik kesetimbangan bebas perokok $R_0<1$

Berdasarkan Gambar 2 jumlah subpopulasi perokok potensial mengalami penurunan karena adanya laju kematian secara alami dan seiring berjalannya waktu subpopulasinya mendekati 6. Subpopulasi perokok kadang – kadang mengalami penurunan karena adanya individu yang mengalami kematian secara alami ataupun kematian yang disebabkan oleh rokok dan seiring berjalannya waktu subpopulasinya menuju 0. Untuk subpopulasi perokok berat mengalami penurunan karena adanya kematian yang disebabkan oleh rokok dan kematian secara alami dan seiring berjalannya waktu subpopulasinya menuju 0. Subpopulasi mantan perokok atau individu yang telah berhenti merokok mengalami kenaikan karena adanya laju kesembuhan perokok berat dan laju kesembuhan perokok kadang - kadang dan seiring berjalannya waktu mengalami penurunan dikarenakan adanya laju kematian secara alami dan seiring berjalannya waktu subpopulasi menuju 0. Hal ini sesuai dengan hasil analisis titik kesetimbangan yang telah diperoleh bahwa titik kesetimbangan bebas perokok akan stabil asimtotik pada titik $\left(\frac{\alpha}{\mu},0,0,0\right)$ yaitu titik (6,0,0,0). Oleh karena itu berdasarkan gambar 2 kebiasaan merokok akan menghilang dan akan berkurang seiring berjalannya waktu.

Untuk penelitian dengan kondisi $R_0 < 1$ akan di analisis dengan nilai variabel dan nilai awal dan parameter pada Tabel 4 sebagai berikut:

Tabel.4 Nilai parameter dan nilai awal untuk titik kesetimbangan bebas perokok

Parameter	Nilai	Sumber
α	0,9	Asumsi
β	0,8	[15]
μ	0,05	Asumsi
f	0,55	Asumsi
γ	0,3	[2]
d_1	0,06	Asumsi
ω	0,09	Asumsi
d_2	0,06	Asumsi
δ	0,80	Asumsi
P	3	Asumsi
L	7	Asumsi
S	4	Asumsi
Q	3	Asumsi



Gambar 3. Simulasi titik kesetimbangan endemik perokok $R_0 > 1$

Berdasarkan Gambar 3 jumlah subpopulasi perokok potensial diberikan nilai awal 3 mengalami proses penurunan karena adanya individu yang mengalami kematian secara alami kemudian pada waktu tertentu mengalami peningkatan karena adanya laju pertumbuhan dan seiring berjalannya waktu subpopulasinya menuju 3,4. Perokok kadang – kadang diberikan nilai awal 7 mengalami proses penurunan karena adanya individu yang mengalami kematian secara alami ataupun kematian yang disebabkan oleh rokok dan seiring berjalannya waktu subpopulasinya menuju 0,8. Perokok berat diberikan nilai awal 4 mengalami proses penurunan karena adanya individu yang mengalami kematian secara alami ataupun kematian yang disebabkan oleh rokok dan seiring berjalannya waktu menuju 0,2. Mantan perokok dengan nilai awal 3 mengalami proses peningkatan karena adanya laju kesembuhan dari perokok berat dan laju kesembuhan dari perokok kadang – kadang dan seiring berjalannya waktu subpopulasinya menuju 5,6. Hal ini sesuai dengan hasil analisis titik kesetimbangan yang telah diperoleh sebelumnya. Oleh karena itu berdasarkan gambar 4.2 kebiasaan merokok akan bersifat endemik (dalam hal ini individu yang terindikasi kecanduan merokok) dan akan berkurang seiring berjalannya waktu.

IV. KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan yang telah dilakukan, dapat diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Model matematika PLSQ jumlah perokok diperoleh seperti pada persamaan (1)
2. Model matematika PLSQ jumlah perokok menghasilkan dua titik kesetimbangan yaitu E_0 titik kesetimbangan bebas perokok dan E_1 titik kesetimbangan endemik. Titik kesetimbangan bebas perokok stabil jika adalah $A>0, \frac{AB-C}{A}>0, C>0$ dan titik kesetimbangan endemik perokok stabil jika $M>0, \frac{MN-K}{M}>0, K>0$
3. Berdasarkan simulasi model yang dilakukan dengan aplikasi Maple diperoleh bahwa kebiasaan merokok akan menghilang jika $R_0 < 1$ dan akan mewabah jika $R_0 > 1$.

REFERENSI

[1] Aditama, *Masalah Merokok dan Penanggulangannya*, Jakarta: Ikatan Dokter Indonesia, 2015.

[2] Soleh, M. Sazmita, D, “Model matematika jumlah perokok dengan dinamika akar kuadrat dan faktor migrasi,” Seminar Nasional Teknologi Informasi, Komunikasi dan Industri (SNTIK) 9, Pekanbaru, 18–19 Mei, 2017.

[3] Ani, A & Embay, R, “Pengembangan Model Matematika Dinamika Perokok Di Kota Bogor,” *Kubik,* Vol. No. 1 Edisi Mei, 2019.

[4] Widowati, S, *Buku Ajar Pemodelan Matematika,* Semarang: Universitas Diponegoro, 2007.

[5] Soleh, M. Sazmita, D, “Model matematika jumlah perokok dengan dinamika akar kuadrat dan faktor migrasi,” *Seminar Nasional Teknologi Informasi, Komunikasi dan Industri (SNTIK) 9*, pekanbaru, 18–19 Mei, 2017.

[6] Ross, L, *Diferensial Equations,* Ed.3, New York: Springer, 1984.

[7] Perko, L, *Diferential Equation and Dynamikal system*. New York: Spinger, 1991.

[8] Olsder, G. J dkk, *Mathematical Systems Theory*, Netherland: VVSD, 2004.

[9] Juliah, I, "Analisis kestabilan Titik Kesetimbangan Model Matematika Proses Transmisi Virus Dengue di dalam Tubuh Manusia dengan Terapi Obat Herbal,"Universitas Negeri Semarang, Semarang, 2015.

[10] Driesche, P.V.D & Watmough, J, "Reproduction Number and Sub Threshold Endemic Equilibria for Compartmental Models of Diseases Transmission," *Mathematical Bioscience*, 180:29-48, 2002.

[11] Side. S, dkk, "Analisis Dan Simulasi Model SITR pada Penyebaran Penyakit Tuberkolosis di Kota Makassar," *Jurnal Sainsmat*. No. 2, Vol. 5, 191-204, 2016.

[12] Mindo, T, R, Kegiatan Promosi Kesehatan Bahaya Merokok Di SMK SWK Swasta Mandiri Percut Sei Tuan. J*urnal Abdimas Mutiara*. Vol. 1, No, 1, Maret, 2020.

[13] Aswan, "Perbatasan Dinamika Merokok dengan Menggunakan Pendekatan Model Matematika," Universitas Islam Negeri, Makassar, 2018.

[14] Akbar, A, H, "*Hubungan Antara Kebiasaan Merokok Dengan Daya Tahan Kardiorespirasi Pada Mahasiswa Perokok Di Program Studi Ilmi Keperawatan Universitas Muhammadiyah Malang,"* Universitas Muhammadiyah Malang, Malang, 2018.

[15] Alkhudhari, Z, dkk, "Global Dynamics of a Mathematical Model on Smoking," *ISRN Applied Mathematics. 1-7,* 2014.