Capítulo 6

Ecuaciones diferenciales

6.1. Introducción

Cuando se estudian ciertos problemas en ingeniería y física, los modelos matemáticos que allí surgen, corresponden a *ecuaciones* donde se relaciona la *variación* de una magnitud con las condiciones internas, externas e iniciales del sistema. Por ejemplo, si se conoce que la velocidad v de un automóvil (figura 6.1) se encuentra dada por $(2 - 0.2t)$ m/s, donde t representa el tiempo, y la posición inicial del automóvil es 50 m con relación a un punto fijo, entonces una ecuación diferencial y una condición inicial que permiten modelar esta situación son

$$\begin{aligned} v = \frac{dx}{dt} &= 2 - 0.2t \\ x(0) &= 50, \end{aligned} \tag{6.1}$$

donde $x(t)$ es la función de posición del automóvil.

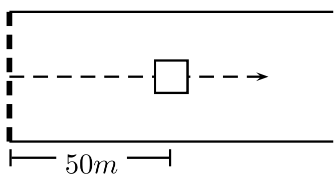

Figura 6.1: una representación de la situación del automóvil.

Una problema del tipo 6.1, se denomina *problema de valor inicial*, donde se tiene una ecuación diferencial y una condición inicial. La solución, a diferencia de las ecuaciones del capítulo 2, corresponde a una función. Por ejemplo, en la situación 6.1, la solución es la función $x(t) = 50 + 2t - 0.1t^2$, dado que $\dfrac{dx}{dt} = 2 - 0.2t$ y $x(0) = 50$.

Al tener la solución del problema, es posible dar respuesta a inquietudes particulares. Por ejemplo, en el modelo del automóvil la respuesta al interrogante ¿qué posición tiene el automóvil a los tres segundos?, corresponde a calcular $x(3) = 50 + 2(3) - 0.1(3)^2 = 55.1$.

En un curso de ecuaciones diferenciales se aprenden diferentes técnicas para determinar la solución *exacta* de la función que satisface el problema de valor inicial. En este capítulo se presentan algunos métodos para construir una *aproximación* a las *imágenes* de la función en valores particulares. Así, para el modelo anterior, se construirá una aproximación de $x(t_i)$ para algunos $t_i \in [0, 3]$.

6.2. Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden con valor en la frontera

Un problema de valor inicial se puede enunciar como una ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \qquad a \leq t \leq b$$

sujeta a la condición inicial

$$x(a) = \alpha$$

Ejemplo 39. Las siguientes corresponden a problemas de valor inicial.

- La ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = -2x + t \qquad 1 \leq t \leq 2$$

sujeta a:

$$x(1) = 5$$

- La ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = x^2 + 2xt + t^2 \qquad -5 \leq t \leq -3$$

sujeta a:

$$x(-5) = 8$$

- La ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = -t^2 + 1 \qquad 3 \leq t \leq 7$$

sujeta a:

$$x(3) = -2$$

- La ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x}{t} \qquad 1 \leq t \leq 2$$

sujeta a:

$$x(1) = 1$$

Como se mencionó al principio, dar solución a este tipo de ecuaciones significa encontrar una función $x(t)$ tal que $\frac{dx}{dt} = f(t,x)$ y $x(a) = \alpha$. Aunque existen diferentes técnicas para determinar la función $x(t)$, dichas técnicas están fuera de los alcances de este libro. En su lugar, se presentan métodos para aproximar $x(t_i)$ para $t_i \in [a,b]$.

6.2.1. Método de Euler

Se debe recordar que el problema a solucionar en este capítulo es:

> Sea
>
> $$\frac{dy}{dt} = f(t,y) \qquad a \leq t \leq b$$
>
> sujeto a:
>
> $$y(a) = \alpha$$
>
> un problema de valor inicial. Para $t_i \in [a,b]$, obtener una aproximación de $y(t_i)$, donde $y(t)$ es la solución de la ecuación diferencial.

Aunque el método de Euler es una de la técnicas numéricas más sencillas para aproximar $y(t_i)$, en la práctica no es tan común, dados algunos problemas computacionales que se analizarán más adelante. En el siguiente teorema, que corresponde a una versión particular del teorema de Taylor, se presentan los elementos necesarios para construir el método de Euler.

Teorema 10. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función tal que $f'(x)$ existe, es continua y $f''(x)$ existe en (a,b). Entonces, para $x, x_0 \in [a,b]$ existe ξ entre x y x_0 tal que*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_0)^2.$$

La idea del método de Euler consiste entonces en construir una serie de puntos (t_0, y_0), $(t_1, y_1), \ldots (t_n, y_n)$ tales que $t_0 = a$, $t_n = b$ y y_n sea una aproximación a $y(b)$. La primera inquietud a resolver es ¿cúales son los t_i que se deben escoger? Para dar respuesta, recordar que al tener un problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \qquad a \leq t \leq b$$

sujeto a:

$$y(a) = \alpha,$$

si se conoce que $t_i \in [a, b]$ y $y(a) = \alpha$, entonces una selección natural de los t_i, podrían ser valores t_i en el intervalo $[a, b]$ tales que $t_i < t_{i+1}$, $t_0 = a$, $t_n = b$ y además la distancia entre t_i y t_{i+1} es constante[1].

Ejemplo 40. En el intervalo $[1, 3]$ seleccionar de manera uniforme seis valores tales que $t_0 = 1$ y $t_5 = 3$.

Solución: dado que se conoce que el primer valor es $t_0 = 1$ y el último valor es $t_5 = 3$, entonces para construir los siguientes puntos se utiliza la fórmula

$$t_i = t_0 + hi \qquad \text{con } i = 1, 2 \ldots, N$$

donde $h = \dfrac{b-a}{N}$, N es número de subintervalos a construir y a, b son los extremos del intervalo. En este caso $a = 1$, $b = 3$, $N = 5$ y por tanto $h = \dfrac{3-1}{5} = 0.4$,

$$t_i = 1 + 0.4i,$$

con lo cual se obtienen los puntos $t_0 = 1$, $t_1 = 1.4$, $t_2 = 1.8$, $t_3 = 2.2$, $t_4 = 2.6$ y $t_5 = 3$. $\diamondsuit$

Luego de seleccionar t_i de manera uniforme, la siguiente pregunta sería ¿qué valor corresponde a y_i para cada t_i? Para lo anterior, suponer que $y(t)$ es la solución del problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \qquad a \leq t \leq b$$

sujeto a:

$$y(a) = \alpha$$

y adicionalmente se cumplen las hipótesis del teorema 10. Entonces para t_i y t_{i+1} se tiene

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + y'(t_i)(t_{i+1} - t_i) + \frac{y''(\xi)}{2}(t_{i+1} - t_i)^2$$

y dado que $y'(t) = \dfrac{dy}{dt} = f(t, y)$, entonces

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + f(t_i, y(t_i))(t_{i+1} - t_i) + \frac{y''(\xi)}{2}(t_{i+1} - t_i)^2$$

[1]Este tipo de selección se denomina *uniforme*.

Ahora, $t_{i+1} - t_i = h$ pues los t_i fueron seleccionados de manera uniforme, en cuyo caso

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + f(t_i, y(t_i))h + \frac{y''(\xi)}{2}h^2,$$

y por tanto

$$y(t_{i+1}) \approx y(t_i) + f(t_i, y(t_i))h.$$

Si se toma $y(t_i) = y_i$, entonces

$$y_{i+1} \approx y_i + hf(t_i, y_i),$$

que corresponde a una relación recursiva entre los y_i buscados. Como y_0 es la imagen de $t_0 = a$ y $y(a) = \alpha$, entonces $y_0 = \alpha$. Así, el método de Euler corresponde al esquema:

$$\begin{aligned} y_0 &= \alpha \\ y_{i+1} &= y_i + f(t_i, y_i)h \end{aligned} \tag{6.2}$$

Ejemplo 41. Utilizar el método de Euler con $N = 10$ para aproximar la solución al problema de valor inicial

$$\begin{aligned} y' = (2-y)t \qquad 1 \leq t \leq 3 \\ \text{sujeto a:} \\ y(1) = -5 \end{aligned}$$

Solución: para utilizar el método de Euler, se ejecutan los siguientes pasos.

Paso 1. Seleccionar t_i de manera uniforme. En este caso el intervalo es $[1, 3]$ y $N = 10$, luego $h = \dfrac{b-a}{N} = \dfrac{3-1}{10} = 0.2$ y por tanto se tienen los resultados del cuadro 6.1.

t_i	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2	2.2	2.4	2.6	2.8	3

Cuadro 6.1: método de Euler.

Paso 2. Calcular los y_i. Para esto se utiliza el esquema recursivo definido en la ecuación 6.2 que corresponde, en este caso, a

$$\begin{aligned} y_0 &= -5 \\ y_{i+1} &= y_i + 0.2\left[(2 - y_i)t_i\right], \end{aligned}$$

donde los resultados numéricos se encuentran en el cuadro 6.2.

$\diamondsuit$

t_i	y_i
1.0	-5.000000000000
1.2	-3.600000000000
1.4	-2.256000000000
1.6	-1.064320000000
1.8	-0.083737600000
2.0	0.666407936000
2.2	1.199844761600
2.4	1.551913066496
2.6	1.766994794578
2.8	1.888157501397
3.0	1.950789300615

Cuadro 6.2: método de Euler.

Ejemplo 42. Aplicar el método de Euler con $N = 5$ para aproximar la solución del problema de valor inicial

$$y' = 2 - 0.2t \qquad 0 \leq t \leq 3$$

sujeta a:

$$y(0) = 50$$

Solución: al ejecutar los pasos descritos anteriormente se obtiene:

Paso 1. Seleccionar t_i de manera uniforme, en este caso cinco puntos. Luego $h = 0.6$ y por tanto $t_0 = 0$, $t_1 = 0.6$, $t_2 = 1.2$, $t_3 = 1.8$, $t_4 = 2.4$ y $t_5 = 3$.

Paso 2. Calcular los y_i utilizando el esquema recursivo 6.2, se tiene

$$\begin{aligned} y_0 &= 50 \\ y_{i+1} &= y_i + 0.6[(2 - t_i)] \end{aligned}$$

con los resultados del cuadro 6.3. Ahora, si se utilizan diez puntos, se tienen los resultados del cuadro 6.4. Una aproximación a $y(3)$ es 55.28 en el primer caso y 55.19 en el segundo caso, lo que corresponde a un valor más cercano al real $y(3) = 55.1$.

$\diamondsuit$

6.2.2. Orden del método de Euler

El método de Euler se obtuvo de la expansión en serie de potencia de la función alrededor de $x = 0$. En el caso más general, si la función se conoce completamente en cierto valor $x = x_0$, la expansión en serie de Taylor es

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \frac{f''(x_0)}{2!}(\Delta x)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(\Delta x)^3 + \cdots ,$$

t_i	y_i
0.0	50.000
0.6	51.200
1.2	52.328
1.8	53.384
2.4	54.368
3.0	55.280

Cuadro 6.3: método de Euler.

t_i	y_i
0.0	50.000
0.3	50.600
0.6	51.182
0.9	51.746
1.2	52.292
1.5	52.820
1.8	53.330
2.1	53.822
2.4	54.296
2.7	54.752
3.0	55.190

Cuadro 6.4: método de Euler.

donde se supone que Δx es un paso muy pequeño, o de manera práctica $|\Delta x| \ll 1$. Como se pudo observar en la sección 2.5, si Δx es pequeño, su cuadrado lo es más aún, y por lo tanto el método comete un error más pequeño. En el método de Euler, la serie se corta en el segundo término, y por tanto el error lo domina el tercer término

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \frac{f''(\xi)}{2!}(\Delta x)^2,$$

donde el término $\frac{f''(\xi)}{2!}(\Delta x)^2$ es el error que se comete en cada paso. Así, el método de Euler comete un error de orden $(\Delta x)^2$ en cada paso. El error total cuando se han dado N pasos es

$$E_{\text{total}} = (\text{Error de cada paso}) \times N,$$

donde N es la longitud del intervalo $[a, b]$ dividida entre el valor del paso Δx. En dicho caso

$$E_{\text{total}} = \frac{f''(\xi)}{2!}(\Delta x)^2 \frac{|b-a|}{\Delta x},$$

de donde al cancelar y reunir todas las constantes, se obtiene

$$E_{\text{total}} = K\Delta x,$$

donde K es una constante, o en forma equivalente $E_{\text{total}} = O(\Delta x)$ al usar la notación de la sección 1.6. En lo sucesivo se construirán métodos que mejoren la precisión sin sacrificar el tamaño del paso.

6.2.3. Método de Verlet

La expresión de este método se obtiene a partir de dos expansiones de Taylor, una hacia adelante y otra hacia atrás, a saber:

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \frac{f''(x_0)}{2!}(\Delta x)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(\Delta x)^3 + \frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(\Delta x)^4 \cdots,$$

$$f(x_0 - \Delta x) = f(x_0) - f'(x_0)\Delta x + \frac{f''(x_0)}{2!}(\Delta x)^2 - \frac{f'''(x_0)}{3!}(\Delta x)^3 + \frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(\Delta x)^4 \cdots,$$

Al sumar dichas series se tiene que

$$f(x_0 + \Delta x) + f(x_0 - \Delta x) = 2f(x_0) + f''(x_0)(\Delta x)^2 + 2\frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(\Delta x)^4 \cdots$$

de donde al despejar $f(x_0 + \Delta x)$, se tiene que

$$f(x_0 + \Delta x) = 2f(x_0) - f(x_0 - \Delta x) + f''(x_0)(\Delta x)^2 + 2\frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(\Delta x)^4 \cdots .$$

Al truncar la última expresión en el tercer término

$$f(x_0 + \Delta x) = 2f(x_0) - f(x_0 - \Delta x) + f''(x_0)(\Delta x)^2,$$

se tiene la siguiente fórmula recursiva, conocida como método de Verlet:

$$y_{i+1} = 2y_i - y_{i-1} + y_i'' h^2. \tag{6.3}$$

Esta fórmula es de amplia aplicación en física, en la cual la primera derivada de la posición respecto al tiempo corresponde a la velocidad y la segunda a la aceleración. Observar que la fórmula recursiva no depende de la primera derivada (velocidad), pero sí de la segunda derivada, la aceleración. La anterior situación abarca una gran cantidad de problemas físicos en los que la evolución temporal de la posición no depende del valor de la velocidad. Aunque a simple vista el método de Verlet demuestra sus ventajas, tiene un pequeño problema: es necesario el dato y_{-1} no disponible para calcular la primera entrada de la tabla. Dado lo anterior, es necesario implementar un arranque. A partir de la expansión de Taylor hacia atrás

$$y_{-1} = y_0 - y_0' h + \frac{1}{2} y_0'' h^2$$

se completa la construcción del método para solucionar el problema $y'' = F(y)$ con condiciones iniciales $y_0 = \alpha$ y $y_0' = \beta$ y paso h:

$$\begin{aligned} y_0 &= \alpha \\ y_{-1} &= y_0 - \beta h + \frac{1}{2} F(y_0) h^2 \quad \text{(arranque)} \\ y_{i+1} &= 2y_i - y_{i-1} + F(y_i) h^2 \end{aligned} \tag{6.4}$$

Ejemplo 43. Aplicar el método de Verlet para aproximar la caída libre de un cuerpo que es soltado desde una altura de 100 m. Comparar los resultados con la solución analítica y con la aproximación de Euler.

Solución: la caída libre se enuncia como el problema de valor inicial:

$$\begin{aligned} y'' &= -9.8 \qquad 0 \le t \le 4.5 \\ y(0) &= 100 \\ y'(0) &= 0 \end{aligned}$$

Al aplicar el método Verlet se obtiene el esquema iterativo

$$\begin{aligned} y_0 &= 100 \\ y_{-1} &= 100 - 4.9h^2 \quad \text{(arranque)} \\ y_{i+1} &= 2y_i - y_{i-1} - 4.9h^2 \end{aligned}$$

donde la tabla 6.5 resume los resultados numéricos, y también expone las diferencias entre los métodos de Verlet, Euler y la solución analítica al problema.

t_i	y_i Verlet	y_i Euler	y_i exacto
0.00	100.000	100.000	100.000
0.45	99.008	98.016	99.008
0.90	96.031	94.047	96.031
1.35	91.070	88.093	91.070
1.80	84.124	80.155	84.124
2.25	75.194	70.233	75.194
2.70	64.279	58.326	64.279
3.15	51.380	44.434	51.380
3.60	36.496	28.558	36.496
4.05	19.628	10.698	19.628
4.50	0.775	−9.147	0.775

Cuadro 6.5: comparación entre algunos métodos.

$\diamondsuit$

6.2.4. Error del método de Verlet

Para analizar el error, se debe observar que antes de cortar la serie, el error lo domina el término $(\Delta x)^4$, pues

$$f(x_0 + \Delta x) \approx 2f(x_0) - f(x_0 - \Delta x) + f''(x_0)(\Delta x)^2 + 2\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(\Delta x)^4.$$

En cada paso, el método de Verlet comete entonces un error de orden $(\Delta x)^4$. El error total cuando se han dado N pasos, es:

$$E_{\text{total}} = 2\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(\Delta x)^4 \frac{|b-a|}{\Delta x},$$

cancelando y reuniendo todas las constantes, se tiene

$$E_{\text{total}} = K(\Delta x)^3,$$

donde K es una constante, o en forma equivalente $E_{\text{total}} = O\left((\Delta x)^3\right)$. Se concluye entonces que método de Verlet es de tercer orden.

Ejercicios 17

1. Encontrar la solución general de la ecuación diferencial lineal de primer orden $y' + \frac{2}{t}y = \frac{\cos t}{t}$.

2. Encontrar la solución general de la ecuación diferencial lineal de primer orden $ty' + (t+1)y = t$.

3. Encontrar la solución general de la ecuación diferencial lineal de primer orden: $t^3y' + 4t^2y = e^{-t}$.

4. Utilizar el método de Euler para aproximar la solución de los siguientes problemas de valor inicial.

   a) $y' = -y$, $0 \le t \le 1$, $y(0) = 5$ y $N = 10$.

   b) $y' = -2y + t$, $1 \le t \le 3$, $y(1) = 2$ y $N = 20$.

   c) $y' = \frac{y}{t}$, $-3 \le t \le -1$, $y(-3) = 2$ y $N = 100$.

   d) $y' = \cos(2t) + \sin(3t)$, $0 \le t \le 1$, $y(0) = 2$ y $h = 0.0001$.

5. Dado el problema de valor inicial

$$y' = \frac{2}{t}y + e^{-t} \qquad 2 \le t \le 4$$

   sujeto a:

$$y(2) = 0$$

   a) Utilizar el método de Euler con $N = 10$ para aproximar su solución.

   b) Con los resultados del numeral *a)*, construir el interpolador de Newton y aproximar $y(2.5)$, $y(3.7)$ y $y(3.9)$.

6. Dado el problema de valor inicial

$$y' = -2ty \qquad 0 \le t \le 1$$

   sujeto a:

$$y(0) = 1,$$

si se conoce el valor correcto $y(1) = e^{-1}$, determinar el número de puntos necesarios en el método de Euler para obtener una aproximación con un error inferior a $\varepsilon = 10^{-4}$.

7. Si se conoce que la velocidad de un auto es $(5 - 0.4t)$ m/s y su posición inicial es $x(0) = 30$ m, utilizar el método de Euler para aproximar la posición del auto después de cinco segundos.

8. En el circuito que se muestra en la figura 6.2, el voltaje v_C a través del condensador se encuentra dado por $C\dfrac{dv_C}{dt} + \dfrac{v_C}{R} = 0$. Si $C = 10^{-6}$ F, $R = 10^6$ Ω y se tiene la condición inicial $v_C(0) = 5$, usar el método de Euler con $N = 10$ para aproximar $v_C(1)$.

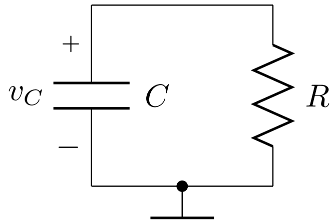

Figura 6.2: circuito RC.

9. Encontrar la solución general de la ecuación diferencial $y'' + 2y' - 3y = 0$.

10. Encontrar la solución general de la ecuación diferencial $y'' + 2y' + y = 0$.

11. Encontrar la solución general de la ecuación diferencial $4y'' + 12y' + 9y = 0$.

12. Utilizar el método de Verlet para aproximar la solución de los siguientes problemas de valor inicial.

    a) $y'' = y$, $0 \le t \le 1$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$ y $N = 10$.
    b) $y'' = -y$, $0 \le t \le 1$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ y $N = 10$.
    c) $y'' = 4y$, $0 \le t \le 2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 14$ y $N = 20$.
    d) $y'' = -9y$, $0 \le t \le 2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 6$ y $N = 20$.

6.2.5. Métodos de Runge-Kutta orden dos

En la búsqueda de métodos más precisos en la solución de problemas de valor inicial, los métodos de Runge-Kutta ofrecen una mejor alternativa. Estos métodos evitan el cálculo de derivadas, lo cual permite su fácil implementación.

Para entender el origen de los métodos de Runge-Kutta observar la serie de Taylor:

$$y(t) = y(t_i) + y'(t_i)(t - t_i) + \frac{y''(t_i)}{2!}(t - t_i)^2 + \frac{y'''(t_i)}{3!}(t - t_i)^3 + \cdots$$

Ahora, al evaluar en $t_i + h$, se obtiene:

$$y(t_i+h) = y(t_i) + y'(t_i)(t_i+h-t_i) + \frac{1}{2!}y''(t_i)(t_i+h-t_i)^2 + \frac{y'''(t_i)}{3!}(t_i+h-t_i)^3 + \cdots$$

y al simplificar se concluye que

$$y(t_i+h) = y(t_i) + h\ y'(t_i) + \frac{h^2}{2!}y''(t_i) + \frac{h^3}{3!}y'''(t_i) + \cdots . \tag{6.5}$$

Se podría pensar que entre más términos de la serie se tomen, la aproximación de $y(t_i+h)$ es más exacta, y aunque lo anterior es cierto, no es aplicable por la dificultad de calcular las derivadas. En los métodos de Runge-Kutta, la idea es determinar expresiones que *aproximen* los primeros términos de la serie de Taylor y que su cálculo no conlleve el manejo de derivadas. Para comprender esta idea, observar la siguiente deducción de un método de Runge-Kutta de orden dos.

Sea $g(x,y)$ una función de dos variables. Si existen todas sus derivadas parciales de orden menor o igual a dos y son continuas en un dominio $D = \{(x,y) \mid a \le x \le b, c \le y \le d\}$, entonces para $(x_0,y_0) \in D$ y $(x,y) \in D$ existen ξ entre x_0 y x, y μ entre y_0 y y tales que

$$g(x,y) = g(x_0,y_0) + \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}(x-x_0) + \left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}(y-y_0) + R_2(x,y)$$

donde

$$R_2(x,y) = \frac{1}{2!}\sum_{j=0}^{2}\binom{2}{j}\left.\frac{\partial^2 g}{\partial x^{2-j}\partial y^j}\right|_{(\xi,\mu)}(x-x_0)^{2-j}(y-y_0)^j$$

A la función $P_1(x,y) = g(x_0,y_0) + \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}(x-x_0) + \left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}(y-y_0)$ se le denomina *polinomio de Taylor de orden uno* de la función $g(x,y)$ alrededor del punto (x_0,y_0).

Ejemplo 44. Dada $g(x,y) = \cos(x) + \sin(y)$, $(x_0,y_0) = \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right)$, entonces su polinomio de Taylor de orden uno es:

$$\begin{aligned} P_1(x,y) &= g\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right) + \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right)}\left(x-\frac{\pi}{3}\right) + \left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_{\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right)}\left(y-\frac{\pi}{6}\right) \\ &= 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(y-\frac{\pi}{6}\right) \end{aligned}$$

Ahora, volviendo a la discusión anterior, si de la serie 6.5 se toman los tres primeros términos, entonces

$$y(t_i+h) \approx y(t_i) + h\ y'(t_i) + \frac{h^2}{2}y''(t_i).$$

Ahora, dado que $y' = f(t,y)$ en el problema de valor inicial descrito en este capítulo, al reemplazar se tiene que

$$y(t_i+h) \approx y(t_i) + hf(t_i,y_i) + \frac{h^2}{2}f'(t_i,y_i),$$

y al usar que (regla de la cadena) $f'(t,y) = \dfrac{\partial f}{\partial t}\dfrac{dt}{dt} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{dy}{dt}$, se tiene que

$$y(t_i + h) \approx y(t_i) + hf(t_i, y_i) + \frac{h^2}{2}\left(\left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{(t_i,y_i)} + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(t_i,y_i)}\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t_i}\right),$$

lo cual es equivalente a

$$\begin{aligned} y(t_i + h) &\approx y(t_i) + h\left(f(t_i, y_i) + \frac{h}{2}\left(\left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{(t_i,y_i)} + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(t_i,y_i)}\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t_i}\right)\right) \\ &= y(t_i) + h\left(f(t_i, y_i) + \frac{h}{2}\left(\left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{(t_i,y_i)} + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(t_i,y_i)} f(t_i,y_i)\right)\right). \end{aligned} \tag{6.6}$$

Si ahora se aproxima $f(t_i, y_i) + \dfrac{h}{2}\left.\dfrac{\partial f}{\partial t}\right|_{(t_i,y_i)} + \dfrac{h}{2}\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(t_i,y_i)} f(t_i,y_i)$ con la serie de Taylor de orden uno de la función $a_1 f(t_i + \alpha_1, y_i + \beta_1)$ se tiene

$$P_1(t_i, y_i) = a_1 f(t_i, y_i) + a_1\alpha_1 \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{(t_i,y_i)} + a_1\beta_1 \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(t_i,y_i)}$$

de donde se concluye que si $a_1 = 1$, $\alpha_1 = \dfrac{h}{2}$ y $\beta_1 = \dfrac{h}{2} f(t_i, y_i)$, entonces

$$f(t_i, y_i) + \frac{h}{2}\left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{(t_i,y_i)} + \frac{h}{2}\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(t_i,y_i)} f(t_i,y_i) \approx f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{h}{2}f(t_i,y_i)\right)$$

Finalmente, al reemplazar en la ecuación 6.6 se tiene

$$y(t_i + h) \approx y(t_i) + hf\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}f(t_i,y_i)\right),$$

lo cual origina el siguiente método para aproximar la solución de un problema de valor inicial.

Método del punto medio:

$$\begin{aligned} y_0 &= \alpha \\ y_{i+1} &= y_i + hf\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}f(t_i,y_i)\right) \end{aligned} \tag{6.7}$$

Ejemplo 45. Utilizando el método del punto medio, aproximar la solución del problema de valor inicial. Usar $N = 5$.

$$\begin{aligned} y' &= -2ty \qquad 0 \le t \le 1 \\ \text{sujeto a:} & \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$

Solución: para utilizar el método, se aplican los siguientes pasos:

Paso 1. Seleccionar t_i de manera uniforme, para este ejemplo se seleccionan cinco puntos, luego $h = \frac{b-a}{N} = \frac{1-0}{5} = 0.2$ y por tanto $t_0 = 0$, $t_1 = 0.2$, $t_2 = 0.4$, $t_3 = 0.6$, $t_4 = 0.8$ y $t_5 = 1$.

Paso 2. Calcular los y_i utilizando el esquema recursivo definido en 6.7, que para propósitos de cálculo se puede expresar como:

$$\begin{aligned} y_0 &= \alpha \\ k_1 &= hf(t_i, y_i) \\ y_{i+1} &= y_i + hf\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}k_1\right) \end{aligned}$$

y que corresponde para este caso a

$$\begin{aligned} y_0 &= 1 \\ k_1 &= h\left(-2t_i y_i\right) \\ y_{i+1} &= y_i + h\left(-2\left(t_i + \frac{h}{2}\right)\left(y_i + \frac{1}{2}k_1\right)\right) \end{aligned}$$

En el cuadro 6.6 se presentan los resultados del método y al comparar con la solución real (cuadro 6.7) del problema de valor inicial, se evidencia la precisión del método.

$\diamondsuit$

t_i	y_i
0.0	1.0000
0.2	0.9600
0.4	0.8494
0.6	0.6931
0.8	0.5223
1.0	0.3643

Cuadro 6.6: aproximación del problema $y' = -2ty$.

Este método, en comparación con el método de Euler, presenta una mejor aproximación de la solución de un problema de valor inicial. Es posible obtener otros métodos de Runge-Kutta orden dos con las ideas desarrolladas en la deducción del método del punto medio, entre los cuales se tienen los siguientes.

Método modificado de Euler:

$$\begin{aligned} y_0 &= \alpha \\ k_1 &= hf(t_i, y_i) \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{2}\left(k_1 + hf\left(t_{i+1}, y_i + k_1\right)\right) \end{aligned}$$

t_i	y_i
0.0	1.0000
0.2	0.9607
0.4	0.8521
0.6	0.6976
0.8	0.5272
1.0	0.3678

Cuadro 6.7: solución real del problema $y' = -2ty$.

Método de Heun (también conocido como método de Ralston):

$$
\begin{aligned}
y_0 &= \alpha \\
k_1 &= hf(t_i, y_i) \\
y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{4}\left(k_1 + 3hf\left(t_i + \frac{2}{3}h, y_i + \frac{2}{3}k_1\right)\right)
\end{aligned}
$$

Ejemplo 46. Utilizar el método modificado de Euler y el de Heun con $N = 5$, para aproximar soluciones del problema de valor inicial

$$y' = -3t^2(y+1) \qquad 1 \leq t \leq 2$$

sujeto a:

$$y(1) = -2$$

cuya solución real es $y(t) = -e^{-t^3+1} - 1$.

Solución: dado que $N = 5$ entonces $h = 0.2$. En el cuadro 6.8 se resumen los resultados.

t_i	$y(t_i)$	método modificado de Euler	error	método de Heun	error
1.0	−2.0000	−2.0000	0.0000	−2.0000	0.0000
1.2	−1.4828	−1.0088	0.4740	−1.5032	0.0203
1.4	−1.1748	−0.9953	0.1794	−1.2238	0.0490
1.6	−1.0452	−1.0058	0.0393	−1.1068	0.0616
1.8	−1.0079	−0.9869	0.0210	−1.0692	0.0613
2.0	−1.0009	−1.0457	0.0448	−1.0701	0.0692

Cuadro 6.8: solución del problema $y' = -3t^2(y+1)$.

$\diamondsuit$

Se debe anotar que, en el ejemplo anterior, conocer la solución exacta solamente permite medir el error entre los métodos. En la práctica se asume que la solución exacta es desconocida y no se desea *conocer* sino *aproximar*.

Ejercicios 18

1. Utilizar el método del punto medio para aproximar la solución de los siguientes problemas de valor inicial.

   a) $y' = -2t + yt$, $1 \leq t \leq 2$, $y(1) = -3$ y $N = 5$.

   b) $y' = -2e^{-ty}$, $0 \leq t \leq 3$, $y(0) = 1$ y $N = 10$.

   c) $y' = -2\cos(2t) + \sin(y)$, $-2 \leq t \leq -1$, $y(-1) = 0$ y $N = 10$.

   d) $y' = 1 + y/t$, $-2.5 \leq t \leq -0.5$, $y(-2.5) = 1$ y $N = 10$.

   e) $y' = 5t^2 - 3t + e^{-t}$, $2 \leq t \leq 4$, $y(2) = 2$ y $N = 15$.

2. Repetir el primer ejercicio aplicando el método modificado de Euler.

3. Repetir el primer ejercicio aplicando el método de Heun.

4. Sea

$$y' = y^2 t^{3/2} \qquad 4 \leq t \leq 5$$

sujeto a:

$$y(4) = 5$$

   un problema de valor inicial.

   a) Aproximar la solución utilizando $h = 0.001$ y el método de Heun.

   b) Si conoce que la solución exacta es $y(t) = \dfrac{5}{65 - 2t^{5/2}}$, comparar los resultados reales con los aproximados en el numeral anterior.

5. Sea

$$y' = -y + t + 1 \qquad 0 \leq t \leq 1$$

sujeto a:

$$y(0) = 1$$

   un problema de valor inicial. Para cualquier elección de h, mostrar que los métodos de Euler y Heun dan las mismas aproximaciones a la solución del problema.

6. Utilizar algún método de esta sección para aproximar

$$\int_0^1 \sin\left(\sqrt{x}\right) dx$$

   Sugerencia: Definir $y(t) = \displaystyle\int_0^t \sin\left(\sqrt{x}\right) dx$ y utilizar el teorema fundamental del cálculo para construir un problema de valor inicial.

6.2.6. Método de Runge-Kutta orden cuatro (RK4)

El método de Runge-Kutta de orden cuatro (RK4) es uno de los métodos más utilizados en la práctica. Su deducción sigue las ideas de los métodos de Runge-Kutta orden dos y como los anteriores métodos, es un método recursivo y su cálculo no implica utilizar información adicional como ocurre en los métodos de Taylor. Su esquema se encuentra a continuación.

Método de Runge-Kutta de orden cuatro:

$$\begin{aligned}
y_0 &= \alpha \\
k_1 &= hf(t_i, y_i) \\
k_2 &= hf\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}k_1\right) \\
k_3 &= hf\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}k_2\right) \\
k_4 &= hf(t_i + h, y_i + k_3) \\
y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)
\end{aligned}$$

Ejemplo 47. Utilizar el método de Runge-Kutta de orden cuatro para aproximar la solución del siguiente problema de valor inicial.

$$y' = y - t^2 + 1 \qquad 0 \leq t \leq 2$$

sujeto a:

$$y(0) = 0.5$$

con $N = 10$.

Solución: como $N = 10$ se tiene que $h = 0.2$. En el cuadro 6.9 se incluyen los resultados numéricos del método y se comparan con la solución exacta dada por $y(t) = (t+1)^2 - 0.5e^t$.

$\diamondsuit$

Aunque los resultados del cuadro 6.9 dan muestra de la precisión del método de Runge-Kutta orden cuatro (RK4), un elemento a considerar es la cantidad de evaluaciones de la función $f(t, y)$ que utiliza el método en comparación con los métodos de Euler, modificado de Euler, punto medio y Heun.

Otra característica del método RK4, radica en que sí en un método de Runge-Kutta orden dos se utiliza un tamaño de paso h, entonces en el método RK4 es suficiente utilizar un tamaño de paso igual a $2h$ para alcanzar una mejor precisión. Lo anterior, de manera muy informal, brinda un equilibrio entre la cantidad de evaluaciones de la función $f(t, y)$ entre los diferentes métodos.

Ejercicios 19

1. Utilizar el método de Runge-Kutta de orden cuatro para aproximar la solución de las siguientes problemas de valor inicial.

t_i	y_i RK4	y_i exacto
0.00	0.5000000000	0.5000000000
0.20	0.8292933333	0.8292986209
0.40	1.2140762107	1.2140876512
0.60	1.6489220170	1.6489405998
0.80	2.1272026849	2.1272295358
1.00	2.6408226927	2.6408590858
1.20	3.1798941702	3.1799415386
1.40	3.7323400729	3.7324000166
1.60	4.2834094983	4.2834837878
1.80	4.8150856946	4.8151762678
2.00	5.3053630007	5.3054719505

Cuadro 6.9: soluciones al problema $y' = y - t^2 + 1$.

a) $y' = -2t + yt$, $1 \leq t \leq 2$, $y(1) = -3$ y $N = 5$.

b) $y' = -2e^{-ty}$, $0 \leq t \leq 3$, $y(0) = 1$ y $N = 10$.

c) $y' = -2\cos(2t) + \sin(y)$, $-2 \leq t \leq -1$, $y(-1) = 0$ y $N = 10$.

d) $y' = 1 + y/t$, $-2.5 \leq t \leq -0.5$, $y(-2.5) = 1$ y $N = 10$.

e) $y' = 5t^2 - 3t + e^{-t}$, $2 \leq t \leq 4$, $y(2) = 2$ y $N = 15$.

2. Repetir el anterior ejercicio usando método de Heun. Comparar con el método de Runge-Kutta de orden cuatro.

3. Sea

$$y' = y^2 t^{3/2} \qquad 4 \leq t \leq 5$$

sujeto a:

$$y(4) = 5$$

un problema de valor inicial.

a) Aproximar la solución utilizando $h = 0.05$ y el método de Heun.

b) Aproximar la solución utilizando $h = 0.1$ y el método RK4. Comparar con los resultados del numeral anterior.

Apéndices