Capítulo 5

Sistemas de ecuaciones

5.1. Introducción

En dos de los problemas estudiados en sesiones anteriores se ha necesitado solucionar sistemas de ecuaciones lineales. En el caso de los trazadores cúbicos, es necesario solucionar un sistema tridiagonal con el fin de conocer los c_i y en el cual la dimensión del sistema depende del número de puntos a interpolar. También en el caso de los polinomios de mínimos cuadrados, donde la dimensión del sistema depende del grado del polinomio que se escoja para aproximar la lista de puntos o la función.

En ambos casos, los sistemas de ecuaciones pueden ser de dimensión alta, como es el caso de aplicaciones de computación gráfica, donde el número puede ser del orden de miles de puntos. Por lo tanto, el problema de solucionar sistemas de ecuaciones, desde el punto de vista computacional, es relevante y de extensa aplicación. En general, los métodos que resuelven el anterior problema se pueden clasificar en: *métodos directos* y *métodos iterativos*, estos últimos inspirados en la iteración de punto fijo.

5.2. Métodos directos

Aunque el más famoso de los métodos directos es la eliminación gaussiana, es poco práctico por la cantidad de operaciones que se requieren para reducir a forma escalonada una matriz. Otra clase de métodos muy usados corresponde a factorizaciones, y aunque existen varios tipos de ellas, en este capítulo se aborda la factorización LU, como mecanismo para escribir algoritmos muy eficientes para resolver sistemas tipo banda (como el tridiagonal) o sistemas con muchos ceros.

Sistemas de ecuaciones que involucren matrices triangulares, ya sean inferiores (L, *lower*) o superiores (U, *upper*) son particularmente fáciles de resolver, al igual que sistemas que involucren matrices diagonales. A continuación se examinan en detalle dichas situaciones, como preámbulo de la factorización LU que servirá para abordar problemas más generales.

Matrices diagonales. Considerar el sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Al resolver fila por fila se obtiene

$$x_1 = \frac{b_1}{d_{11}}, \quad x_2 = \frac{b_2}{d_{22}}, \quad \ldots \quad x_n = \frac{b_n}{d_{nn}}$$

y se puede entonces escribir la solución genérica:

$$x_i \ \leftarrow \frac{b_i}{d_{ii}} \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Nota: observar que el sistema tiene solución única si $d_{ii} \neq 0$ para todo i, lo cual es equivalente a que $\det D \neq 0$, donde D es la matriz diagonal y $\det D = \prod_{i=1}^{n} d_{ii}$.

Matriz triangular inferior L. Para una matriz triangular inferior de orden $n \times n$, definida como $l_{ij} = 0, \ si \ j > i$, considerar el sistema:

$$\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Con la primera ecuación del sistema, primera fila, es posible calcular el valor de x_1.

$$l_{11} x_1 = b_1$$

Al despejar se tiene que

$$x_1 = \frac{b_1}{l_{11}}$$

y con dicho valor de x_1 se procede a calcular el valor de x_2 con la segunda fila del sistema

$$l_{21} x_1 + l_{22} x_2 = b_2.$$

Se obtiene el siguiente valor de x_2

$$x_2 = \frac{b_2 - l_{21} x_1}{l_{22}}.$$

Ahora que se conocen los valores de x_1 y x_2, se procede a calcular x_3 con la tercera fila del sistema

$$l_{31}x_1 + l_{32}x_2 + l_{33}x_3 = b_3$$

Como resultado se tiene

$$x_3 = \frac{b_3 - l_{31}x_1 - l_{32}x_2}{l_{33}},$$

lo cual se puede escribir en forma alternativa como

$$x_3 = \frac{b_3 - \sum\limits_{r=1}^{2} l_{3r}x_r}{l_{33}}.$$

Al seguir este razonamiento, se obtiene para x_i

$$x_i = \frac{b_i - \sum\limits_{r=1}^{i-1} l_{ir}x_r}{l_{ii}},$$

donde la anterior expresión es válida para $i = 1, 2, \ldots n$. Observar que para $i = 1$ la suma va desde uno hasta cero, lo que se interpretará como cero, reduciendo el valor de x_1 a b_1/l_{11}.

Un algoritmo basado en la última ecuación se conoce como *sustitución progresiva*, ya que al conocer la primera incógnita se encuentra la segunda, y con la primera y segunda es posible encontrar la tercera y así sucesivamente. De nuevo, notar que el sistema tiene solución única si $l_{ii} \neq 0$ para toda $i = 1, 2, \ldots, n$. Recordar también que $\det L = \prod_{i=1}^{n} l_{ii}$.

Matriz triangular superior U. Recordar que una matriz es triangular superior si $u_{ij} = 0$ para $i > j$. Un sistema con una matriz triangular superior U tiene la forma:

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & u_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

En este caso, si se comienza con la primera fila, se obtiene una ecuación con n incógnitas, y por tanto es adecuado empezar por la última fila, en la cual la ecuación solamente contiene a x_n.

$$u_{nn}x_n = b_n$$

Al despejar:

$$x_n = \frac{b_n}{u_{nn}}$$

y ahora, en *forma regresiva*, como es conocido el valor de x_n, se procede a calcular el de x_{n-1}, con la penúltima fila,

$$u_{n-1n-1}x_{n-1} + u_{n-1n}x_n = b_{n-1}$$

donde se obtiene

$$x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - u_{n-1n}x_n}{u_{n-1n-1}}.$$

Al subir una fila, y con los valores de x_n y x_{n-1}, se calcula x_{n-2}, con la antepenúltima fila

$$u_{n-2n-2}x_{n-2} + u_{n-2n-1}x_{n-1} + u_{n-2n}x_n = b_{n-2}$$

para obtener

$$x_{n-2} = \frac{b_{n-2} - u_{n-2n-1}x_{n-1} - u_{n-2n}x_n}{u_{n-2n-2}}$$

que se puede escribir también como

$$x_{n-2} = \frac{b_{n-2} - \sum\limits_{r=n-1}^{n} u_{n-2r}x_r}{u_{n-2n-2}}$$

Al seguir el mismo razonamiento, se calcula x_i como:

$$x_i = \frac{b_i - \sum\limits_{r=i+1}^{n} u_{ir}x_r}{u_{ii}}$$

para $i = n, n-1, n-2, \dots, 1$. Un algoritmo basado en la anterior fórmula se llama *sustitución regresiva*. Notar que cuando $i = n$, la suma va de $n+1$ hasta n, lo cual se asume como cero, y por tanto existe la reducción a $x_n = b_n/u_{nn}$. Recordar además que $\det U = \prod_{i=1}^{n} u_{ii}$.

Ejercicios 12

1. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones utilizando las técnicas descritas anteriormente.

   a) $\begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$

   b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & -8 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$

   c) $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 0 & -9 & 13 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 121 \end{pmatrix}$

d)
$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ 6 & 9 & -4 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e)
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

5.2.1. Factorización LU

Aunque para sistemas $n \times n$ no triangulares el problema es aparentemente complicado de resolver, si la matriz de coeficientes A se puede expresar como el producto de una matriz triangular inferior L con una matriz triangular superior U, es decir $A = LU$, entonces el siguiente par de sistemas brindan solución al sistema general $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

$$L\mathbf{z} = \mathbf{b}$$

$$U\mathbf{x} = \mathbf{z}$$

Notar que para el primer sistema el algoritmo de sustitución progresiva permite calcular completamente el vector $\mathbf{z}$, mientras que en el segundo, una vez es conocido $\mathbf{z}$, con sustitución regresiva se puede calcular completamente el vector $\mathbf{x}$ y el problema quedaría entonces solucionado. Dado lo anterior, es relevante tratar de factorizar una matriz A en forma LU. A través del siguiente ejemplo se observará un procedimiento para calcular una factorización LU.

Ejemplo 27. Determinar una factorización LU de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -6 & -3 \\ -6 & 37 & 23 \\ -8 & 40 & -15 \end{pmatrix}$$

Solución: se desea encontrar una matriz triangular inferior L y una matriz triangular superior U tal que

$$\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -6 & -3 \\ -6 & 37 & 23 \\ -8 & 40 & -15 \end{pmatrix}.$$

En dicho caso $l_{11}u_{11} = 1$, y si se define que $l_{11} = 1$, entonces $u_{11} = 1$. Por otro lado $l_{11}u_{12} = -6$ y $l_{11}u_{13} = -3$, y por tanto $u_{12} = -6$ y $u_{13} = -3$ como se tiene a continuación.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -6 & -3 \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -6 & -3 \\ -6 & 37 & 23 \\ -8 & 40 & -15 \end{pmatrix}$$

Ahora, $l_{21}u_{11} = -6$ y $l_{31}u_{11} = -8$, de donde al despejar se tiene $l_{21} = -6$ y $l_{31} = -8$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -6 & l_{22} & 0 \\ -8 & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -6 & -3 \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -6 & -3 \\ -6 & 37 & 23 \\ -8 & 40 & -15 \end{pmatrix}$$

Continuando con el elemento u_{22}, se tiene $(-6)\cdot(-6) + l_{22}u_{22} = 37$, y si se define $l_{22} = 1$, se obtiene $u_{22} = 37-36 = 1$. También $(-8)\cdot(-6)+l_{32}u_{22} = 40$ y $(-6)\cdot(-3)+l_{22}u_{23} = 23$, de donde se concluye que $l_{32} = -8$ y $u_{23} = 5$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -6 & 1 & 0 \\ -8 & -8 & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -6 & -3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -6 & -3 \\ -6 & 37 & 23 \\ -8 & 40 & -15 \end{pmatrix}$$

Por último, $(-8)\cdot(-3) + (-8)\cdot 5 + l_{33}u_{33} = -15$, y si se define $l_{33} = 1$, se obtiene $u_{33} = -15 + 40 - 24 = 1$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -6 & 1 & 0 \\ -8 & -8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -6 & -3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -6 & -3 \\ -6 & 37 & 23 \\ -8 & 40 & -15 \end{pmatrix}$$

Así,

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -6 & 1 & 0 \\ -8 & -8 & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & -6 & -3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\diamondsuit$

El anterior procedimiento se puede resumir de la siguiente manera.

Primer paso. Calcular los elementos l_{rr} y u_{rr}. En este paso es necesario definir un valor particular para l_{rr} o u_{rr}. Para ello, dado que

$$a_{rr} = \sum_{k=1}^{r} l_{rk}u_{kr},$$

notar que a excepción del último término de la suma, los demás son conocidos, y al separar el último se tiene

$$a_{rr} = \sum_{k=1}^{r-1} l_{rk}u_{kr} + l_{rr}u_{rr}.$$

En este momento se tienen dos incógnitas, y una posible solución a la anterior situación, es asumir un valor arbitrario (no nulo) de una de ellas. A continuación dos formas clásicas de elegir.

1. Factorización de Doolittle: $l_{rr} = 1$ para $r = 1, 2, \ldots, n$.
2. Factorización de Crout: $u_{rr} = 1$ para $r = 1, 2, \ldots, n$.

Cualquiera de las anteriores da lugar a encontrar la otra incógnita. Por ejemplo, si elige la factorización de Doolittle, entonces

$$u_{rr} = a_{rr} - \sum_{k=1}^{r-1} l_{rk} u_{kr} \quad \text{para } r = 1, 2, \ldots, n,$$

mientras que al trabajar con la factorización de Crout,

$$l_{rr} = a_{rr} - \sum_{k=1}^{r-1} l_{rk} u_{kr} \quad \text{para } r = 1, 2, \ldots, n.$$

Segundo paso. Calcular todos los elementos de la columna r de la matriz L. El siguiente elemento a calcular es l_{r+1r}, después l_{r+2r}, hasta finalizar con l_{nr}. Para lo anterior, observar que

$$a_{ir} = \sum_{k=1}^{r} l_{ik} u_{kr},$$

si se separa el último término, el que contiene la incógnita, se tiene que

$$a_{ir} = \sum_{k=1}^{r-1} l_{ik} u_{kr} + l_{ir} u_{rr},$$

y al despejar se tiene finalmente

$$l_{ir} = \frac{a_{ir} - \sum_{k=1}^{r-1} l_{ik} u_{kr}}{u_{rr}} \quad \text{para } i = r+1, r+2, \ldots, n$$

Tercer paso. Calcular todos los elementos de la fila r de la matriz U. Así,

$$a_{rj} = \sum_{k=1}^{r} l_{rk} u_{kj}$$

donde al separar último término de la suma

$$a_{rj} = \sum_{k=1}^{r-1} l_{rk} u_{kj} + l_{rr} u_{rj}$$

se despeja u_{rj} para obtener finalmente

$$u_{rj} = \frac{a_{rj} - \sum_{k=1}^{r-1} l_{rk} u_{kj}}{l_{rr}} \quad \text{para } j = r+1, r+2, \ldots, n$$

Terminado este ciclo se conocen todos los elementos de L desde la primera columna hasta la columna r, al igual que todos los elementos de U desde la primera fila hasta la fila r. En el siguiente ciclo, se busca la fila y columna $r+1$ de las matrices U y L respectivamente.

Ahora se observará cómo utilizar la factorización LU de una matriz A para solucionar un sistema de ecuaciones.

Ejemplo 28. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

resolver $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, donde $\mathbf{b} = (-1, -6, -13)^t$.

Solución: se debe recordar que si desea resolver un problema de la forma $LU\mathbf{x} = \mathbf{b}$, donde L es una matriz triangular inferior y U es una matriz triangular superior, entonces es necesario resolver los problemas:

$$L\mathbf{z} = \mathbf{b}$$

$$U\mathbf{x} = \mathbf{z}$$

Luego, se debe solucionar en primer lugar el problema $L\mathbf{z} = \mathbf{b}$, es decir

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ -13 \end{pmatrix}$$

donde al utilizar sustitución progresiva se obtiene:

$$\begin{aligned} z_1 &= -1 \\ z_2 &= -6 - 3(z_1) = -6 - 3(-1) = -3 \\ z_3 &= -13 + 2z_1 - 4z_2 = -13 + 2(-1) - 4(-3) = -3 \end{aligned}$$

Luego $\mathbf{z} = (-1, -3, -3)^t$. Ahora, se debe solucionar el problema $U\mathbf{x} = \mathbf{z}$

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

en el que se emplea sustitución regresiva

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{-3}{3} = -1 \\ x_2 &= \frac{-3 - x_3}{-2} = \frac{-3 + 1}{-2} = 1 \\ x_1 &= \frac{-1 + x_2}{5} = 0 \end{aligned}$$

para obtener $\mathbf{x} = (0, 1, -1)^t$ como la solución al problema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ inicial. Para terminar, notar que aunque los cálculos utilizados en la sustitución progresiva y regresiva son de un costo computacional relativamente económico, es en el cálculo de la factorización LU donde puede haber costos elevados de tipo computacional similares a métodos tradicionales como eliminación de Gauss-Jordan. ♢

Ejercicios 13

1. Determinar la factorización LU de las siguientes matrices definiendo $u_{ii} = 1$.

a) $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 7 & -8 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -2 & 10 & -4 \\ 5 & -24 & 13 \\ 3 & -13 & 12 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 2 & 12 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

2. Repetir el ejercicio anterior tomando $l_{ii} = 1$.

3. Solucionar el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ donde $\mathbf{b} = (1, 0, 1)^t$ y A corresponde a los siguientes productos de matrices.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -7 & 9 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

4. Determinar la factorización LU de las siguientes matrices haciendo $U = L^t$. Este hecho es conocido como *descomposición de Cholesky.*

a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 4 & 12 & -16 \\ 12 & 37 & -43 \\ -16 & -43 & 98 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 25 & 15 & -5 \\ 15 & 18 & 0 \\ -5 & 0 & 11 \end{pmatrix}$

5.3. Métodos iterativos

Cuando se tiene un sistema de ecuaciones $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ y se desea determinar el valor de $\mathbf{x}$ que lo satisface, existen diferentes técnicas, como lo son Gauss-Jordan, matriz inversa, regla de Cramer, factorización LU, etc., que permiten encontrar de manera *exacta* la solución, quizá con costos computacionales elevados.

Ahora, si para determinados problemas es suficiente obtener un $\widetilde{\mathbf{x}}$ que no satisface de manera exacta el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, pero el resultado de $A\widetilde{\mathbf{x}}$ se *aproxima* a $\mathbf{b}$ y el costo de calcular $\widetilde{\mathbf{x}}$ es menor al de calcular el valor exacto $\mathbf{x}$, entonces sería preferible construir $\widetilde{\mathbf{x}}$.

Si se observa que la solución del problema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ corresponde a la solución de la ecuación[1] $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ donde $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} - \mathbf{b}$, sería natural entonces tratar de utilizar los métodos descritos en el capítulo 2 del libro, pues se estaría buscando un cero de cierta función. Dada la naturaleza vectorial del problema, es necesario primero revisar algunos conceptos propios de la teoría de vectores y matrices.

5.3.1. Normas vectoriales

En el curso de álgebra lineal se define la norma de un vector $\mathbf{u} = (x, y, z)$ como:

$$\|\mathbf{u}\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

y se denomina *norma euclidiana*. Una de las aplicaciones de la norma euclidiana es la definición de *distancia euclidiana* entre dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$:

$$d_2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_2$$

Ejemplo 29. Determinar la distancia entre los vectores $\mathbf{u} = (1, -1, 2)$ y $\mathbf{v} = (2, -3, -6)$.

Solución:

$$\begin{aligned}
d_2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_2 \\
&= \|(1, -1, 2) - (2, -3, -6)\|_2 \\
&= \|(-1, 2, 8)\|_2 \\
&= \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 8^2} \\
&= \sqrt{1 + 4 + 64} = \sqrt{69}
\end{aligned}$$

$\diamondsuit$

En la siguiente definición se busca generalizar la idea de norma euclidiana y construir nuevas distancias sobre los vectores.

Definición 4. *Una* ***norma vectorial*** *en* $\mathbb{R}^n$ *es una función* $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *tal que:*

1. $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ *para todo* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$
2. $\|\mathbf{x}\| = 0$ *si y sólo si* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$
3. $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha|\|\mathbf{x}\|$ *para todo* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ *y* $\alpha \in \mathbb{R}$
4. $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ *para todo* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ *(desigualdad triangular)*

[1] Notar que $\mathbf{0}$ se refiere al vector nulo y $\mathbf{F}$ es una función vectorial $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ para cierto n.

Se puede verificar que la norma euclidiana cumple con las anteriores propiedades. Otras normas que se pueden definir en $\mathbb{R}^n$ son l_1 y l_∞, que presentan ventajas computacionales para procedimientos iterativos.

Definición 5. *Sea* $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *un vector en* $\mathbb{R}^n$*, entonces:*

- *La norma* l_1 *del vector* $\mathbf{x}$ *es:* $\|\mathbf{x}\|_1 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i|$
- *La norma* l_∞ *del vector* $\mathbf{x}$ *es:* $\|\mathbf{x}\|_\infty = \displaystyle\max_{1\le i\le n} |x_i|$

Ejemplo 30. Sea $\mathbf{x} = (-1, 2, -5, 3)$ entonces:

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| = |-1| + |2| + |-5| + |3| = 1 + 2 + 5 + 3 = 11$$

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |x_i| = \max\{|-1|, |2|, |-5|, |3|\} = 5$$

A partir de las normas l_1 y l_∞ se construyen las distancias $d_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_1$ y $d_\infty(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_\infty$.

Dado que en este capítulo se desea desarrollar métodos *iterativos* para aproximar la solución del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, en los cuales se parte de un vector inicial (semilla) $\mathbf{x}^{(0)}$ y se construyen vectores $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \ldots, \mathbf{x}^{(k)}$ los cuales se aproximan al vector $\mathbf{x}$ solución de la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, es necesario definir cuando una sucesión $\left\{\mathbf{x}^{(k)}\right\}_{k=0}^{\infty}$ de vectores en $\mathbb{R}^n$ *convergen* a un vector $\mathbf{x}$.

Definición 6. *Sea* $\left\{\mathbf{x}^{(k)}\right\}_{k=0}^{\infty}$ *una sucesión de vectores de* $\mathbb{R}^n$ *y* $\mathbf{x}$ *un vector de* $\mathbb{R}^n$*. Entonces la sucesión converge a* $\mathbf{x}$ *respecto a la norma* $\|\cdot\|$ *si dado* $\varepsilon > 0$*, existe un entero positivo* N *tal que*

$$\left\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\right\| < \varepsilon \qquad \textit{para todo } k \ge N$$

Desde un aspecto computacional, la definición anterior no es la mejor, por lo tanto se presenta el siguiente teorema.

Teorema 7. *La sucesión* $\left\{\mathbf{x}^{(k)}\right\}_{k=0}^{\infty}$ *converge a* $\mathbf{x}$ *respecto a la norma* l_∞ *si y solo si* $\displaystyle\lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = x_i$ *para cada* $i = 1, 2, \ldots, n$*.*

Es de anotar, que el teorema 7 indica una manera de comprobar si una sucesión $\left\{\mathbf{x}^{(k)}\right\}_{k=0}^{\infty}$ converge a un vector $\mathbf{x}$ con relación a la norma l_∞ y no con relación a cualquier norma.

Ejemplo 31. Demostrar que la sucesión $\mathbf{x}^{(k)} = \left(e^{-k}, 5 + \dfrac{1}{k}, \dfrac{-3\sin(k)}{k}\right)$ converge a el vector $(0, 5, 0)$ con relación a la norma l_∞.

Solución: utilizando el teorema 7 es suficiente demostrar que

- $\lim\limits_{k\to\infty} e^{-k} = 0$
- $\lim\limits_{k\to\infty} 5 + \dfrac{1}{k} = 5$
- $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{-3\sin(k)}{k} = 0$

En este caso,

- $\lim\limits_{k\to\infty} e^{-k} = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{e^k} = 0,$
- $\lim\limits_{k\to\infty} 5 + \dfrac{1}{k} = \lim\limits_{k\to\infty} 5 + \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{k} = 5 + 0 = 5$ y
- $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{-3\sin(k)}{k} = -3 \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{\sin(k)}{k} = -3(0) = 0,$

con lo cual se demuestra que la sucesión $\left\{\mathbf{x}^{(k)}\right\}_{k=1}^{\infty}$ converge a el vector $(0, 5, 0)$ con relación a la norma l_∞. ♢

5.3.2. Normas matriciales

En la construcción y estudio de los métodos iterativos para aproximar una solución del sistema de ecuaciones $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es necesario definir la distancia entre matrices, donde una de las maneras más efectivas es definir una norma sobre espacios de matrices.

Definición 7. *Una* norma matricial *es una función* $\|\cdot\| : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *del conjunto de matrices de tamaño* $n \times n$ *en los números reales tal que*

1. $\|A\| \geq 0$ *para toda* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
2. $\|A\| = 0$ *si y solo si* $A = 0$
3. $\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|$ *para toda* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *y* $\alpha \in \mathbb{R}$
4. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ *para toda* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
5. $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ *para toda* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

la distancia con relación a la norma matricial $\|\cdot\|$ entre las matrices $A_{n\times n}$ y $B_{n\times n}$ se define como $\|A - B\|$.

Es posible demostrar que toda norma vectorial sobre $\mathbb{R}^n$ induce una norma matricial sobre $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En la siguiente definición se presenta las normas matriciales inducidas por las normas vectoriales l_1 y l_∞.

Definición 8. *Si $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ es una matriz, entonces:*

- $\|A\|_\infty = \max\limits_{1\le i\le n}\left\{\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right\}$
- $\|A\|_1 = \max\limits_{1\le j\le n}\left\{\sum\limits_{i=1}^{n}|a_{ij}|\right\}$

Ejemplo 32. Si

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 1\\ 3 & 7 & 8\\ 3 & 8 & 1\end{pmatrix}$$

calcular $\|A\|_\infty$.

Solución: dado que $\|A\|_\infty = \max\limits_{1\le i\le 3}\left\{\sum\limits_{j=1}^{3}|a_{ij}|\right\}$, entonces

$$\|A\|_\infty = \max\left\{\sum_{j=1}^{n}|a_{1j}|, \sum_{j=1}^{3}|a_{2j}|, \sum_{j=1}^{3}|a_{3j}|\right\}$$

De otro lado, $\sum\limits_{j=1}^{3}|a_{1j}| = |-5| + |3| + |1| = 9$, $\sum\limits_{j=1}^{3}|a_{2j}| = |3| + |7| + |8| = 18$ y $\sum\limits_{j=1}^{3}|a_{3j}| = |3| + |8| + |1| = 12$, y por tanto $\|A\|_\infty = \max\{9, 18, 12\} = 18$. ♢

Ejemplo 33. Si

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 1\\ 3 & 7 & 8\\ 3 & -3 & 6\end{pmatrix}$$

calcular $\|A\|_1$.

Solución: dado que $\|A\|_1 = \max\limits_{1\le j\le 3}\left\{\sum\limits_{i=1}^{3}|a_{ij}|\right\}$, entonces

$$\|A\|_1 = \max\left\{\sum_{i=1}^{3}|a_{i1}|, \sum_{i=1}^{3}|a_{i2}|, \sum_{i=1}^{3}|a_{i3}|\right\}$$

pero $\sum\limits_{i=1}^{3}|a_{i1}| = |-5| + |3| + |3| = 11$, $\sum\limits_{i=1}^{3}|a_{i2}| = |3| + |7| + |-3| = 13$ y $\sum\limits_{i=1}^{3}|a_{i3}| = |1| + |8| + |6| = 15$, de donde $\|A\|_1 = \max\{11, 13, 15\} = 15$. ♢

Ejercicios 14

1. Determinar la norma euclidiana, la norma l_∞ y la norma l_1 para los vectores **u**, **v**, **w** y **z** que se encuentran a continuación.

a) $\mathbf{u} = (-1, 2, -1)$

b) $\mathbf{v} = (-5, 3, 1)$

c) $\mathbf{w} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{128}\right)$

d) $\mathbf{z} = \left(e^{-1}, e^{2}, e^{-3}, \ldots, e^{-7}\right)$

2. Demostrar que las sucesiones $\left\{\mathbf{x}^{(k)}\right\}_{k=1}^{\infty}$ convergen a el vector $(-1, 0, e, 1)$ con relación a la norma l_∞.

a) $\mathbf{x}^{(k)} = \left(-1, \frac{1}{k}, e, \frac{k}{k+1}\right)$

b) $\mathbf{x}^{(k)} = \left(-1 + e^{-k}, \frac{-1}{k^2}, e, 1 + \frac{k}{x^k + 1}\right)$

c) $\mathbf{x}^{(k)} = \left(-1 + \frac{k}{k^4 - 1}, 0, e, 1\right)$

d) $\mathbf{x}^{(k)} = \left(-1, \frac{\cos(k)}{k}, \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k, 1\right)$

3. Determinar la norma matricial $\|\cdot\|_\infty$ y la norma matricial $\|\cdot\|_1$ para las siguientes matrices.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 7 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -5 & 3 & 8 \\ -3 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 15 & 13 & 8 \\ 3 & 27 & -4 \\ -2 & 10 & 11 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 3 \\ -1 & 8 & 5 & -6 \\ 4 & 5 & 3 & -8 \\ -11 & 15 & 13 & 1 \end{pmatrix}$

4. Dada una matriz cuadrada A de $n \times n$, la norma de Frobenius se define como:

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2}$$

calcular la norma de Frobenius para la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

5.3.3. Solución de sistemas de ecuaciones

Como se menciona con anterioridad, los métodos iterativos en la solución de sistemas de ecuaciones $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ construyen una sucesión $\left\{\mathbf{x}^{(k)}\right\}_{k=0}^{\infty}$ convergente a la solución del sistema. Es de anotar que los métodos que se presentan en esta sección son de un esquema recursivo, es decir $\mathbf{x}^{(k+1)} = T\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c}$, donde T es una matriz fija y $\mathbf{c}$ un vector. En lo que sigue se presentan dos métodos iterativos clásicos, el método de Jacobi y el método de Gauss-Seidel.

5.3.4. Método de Jacobi

El método de Jacobi se basa en el método del punto fijo, y para entenderlo se analiza el siguiente ejemplo.

Ejemplo 34. Encontrar la solución del siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} 5x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 5 \\ x_1 + 4x_2 + x_4 &= 2 \\ 3x_1 - x_2 + 6x_3 &= -3 \\ x_2 - x_3 + 3x_4 &= 4 \end{aligned}$$

Solución: si de la primera ecuación se despeja x_1, de la segunda ecuación se despeja x_2, y así sucesivamente, se obtiene:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{5 + x_2 - x_3 - x_4}{5} \\ x_2 &= \frac{2 - x_1 - x_4}{4} \\ x_3 &= \frac{-3 - 3x_1 + x_2}{6} \\ x_4 &= \frac{4 - x_2 + x_3}{3} \end{aligned} \tag{5.1}$$

Tomando ahora $\mathbf{x}^{(0)} = (-1, 5, 3, 2)$ y sustituyendo en el lado derecho del sistema 5.1 se obtiene

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= \frac{5 + 5 - 3 - 2}{5} = 1 \\ x_2^{(1)} &= \frac{2 + 1 - 2}{4} = \frac{1}{4} \\ x_3^{(1)} &= \frac{-3 - 3(-1) + 5}{6} = \frac{5}{6} \\ x_4^{(1)} &= \frac{4 - 5 + 3}{3} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

luego $\mathbf{x}^{(1)} = \left(1, \frac{1}{4}, \frac{5}{6}, \frac{2}{3}\right)$, y repitiendo el proceso ahora con $\mathbf{x}^{(1)}$ se desprende que:

$$
\begin{aligned}
x_1^{(2)} &= \frac{5 + \frac{1}{4} - \frac{5}{6} - \frac{2}{3}}{5} = \frac{3}{4} \\
x_2^{(2)} &= \frac{2 - 1 - \frac{2}{3}}{4} = \frac{1}{12} \\
x_3^{(2)} &= \frac{-3 - 3 + \frac{1}{4}}{6} = -\frac{23}{24} \\
x_4^{(2)} &= \frac{4 - \frac{1}{4} + \frac{5}{6}}{3} = \frac{55}{36}
\end{aligned}
$$

de donde $\mathbf{x}^{(2)} = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{12}, \frac{23}{24}, \frac{55}{36}\right)$. En el cuadro 5.1 se encuentran las primeras diez iteraciones del método.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x_1^{(k)}$	-1	1	0,75	0,9027	0,9611	0,9842	0,9930	0,9971	0,9987	0,9995	0,9997
$x_2^{(k)}$	5	0,25	0,0833	$-0{,}0694$	0,0277	$-0{,}0076$	0,0031	$-0{,}0009$	0,0004	$-0{,}0001$	0,0000
$x_3^{(k)}$	3	0,8333	$-0{,}9583$	$-0{,}8611$	$-0{,}9629$	$-0{,}9759$	$-0{,}9934$	$-0{,}9959$	$-0{,}9987$	$-0{,}9993$	$-0{,}9997$
$x_4^{(k)}$	2	0,6666	1,5277	0,9861	1,0694	1,0030	1,0105	1,0011	1,0016	1,0002	1,0002

Cuadro 5.1: iteraciones del método de Jacobi.

Se puede observar que $\|\mathbf{x}^{(9)} - \mathbf{x}^{(10)}\|_\infty = \text{máx}\{|0,9995 - 0,9997|, |-0,0001 + 0,0000|, |-0,9993 + 0,9997|, |1,0002 - 1,0002|\} = 0,0004$ y en cada iteración esta distancia disminuye. Si se resuelve el sistema con el método Gauss-Jordan, se obtiene que la solución es $\mathbf{x} = (1, 0, -1, 1)$ y por lo tanto se tiene que la sucesión generada por el método de Jacobi es convergente a la solución del sistema. ♢

El método de Jacobi para solucionar un sistema de ecuaciones $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ se puede resumir, de manera muy simple, en los siguientes pasos:

1. Despejar de cada una de las ecuaciones una de las variables (no despejar la misma variable en dos ecuaciones distintas).
2. Seleccionar un vector $\mathbf{x}^{(0)}$ inicial (semilla).
3. Sustituir el vector seleccionado en las ecuaciones del primer paso y llamar a este resultado $\mathbf{x}^{(1)}$.
4. Repetir el tercer paso con $\mathbf{x}^{(1)}$.

Aunque en la descripción anterior no se hace referencia a la forma de detener el proceso, para lo anterior se debe establecer un valor $\varepsilon > 0$ (tolerancia) y considerar como criterio de parada $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\|_\infty < \varepsilon$, de donde el proceso termina cuando la distancia entre los vectores $\mathbf{x}^{(k)}$ y $\mathbf{x}^{(k-1)}$ es menor a ε.

Ejemplo 35. Utilizar el método de Jacobi obtener una aproximación de la solución del sistema

$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 - x_3 &= -3 \\ -2x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= -9 \\ -6x_1 + 3x_2 + 7x_3 &= 10 \end{aligned}$$

con una tolerancia de $\varepsilon = 10^{-4}$.

Solución: a continuación se tiene los pasos necesarios.

Paso 1. Despejar una de las variables de cada ecuación.

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-3 - 2x_2 + x_3}{4} \\ x_2 &= \frac{-9 + 2x_1 - 2x_3}{5} \\ x_3 &= \frac{10 + 6x_1 - 3x_2}{7} \end{aligned}$$

Paso 2. Seleccionar $\mathbf{x}^{(0)}$. En este caso $\mathbf{x}^{(0)} = (1, -2, 3)$.

Paso 3. Sustituir $\mathbf{x}^{(0)}$ en las ecuaciones del primer paso.

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= \frac{-3 - 2x_2^{(0)} + x_3^{(0)}}{4} = \frac{-3 - 2(-2) + 3}{4} = 1 \\ x_2^{(1)} &= \frac{-9 + 2x_1^{(0)} - 2x_3^{(0)}}{5} = \frac{-9 + 2(1) - 2(3)}{5} = -\frac{13}{5} \\ x_3^{(1)} &= \frac{10 + 6x_1^{(0)} - 3x_2^{(0)}}{7} = \frac{10 + 6(1) - 3(-2)}{7} = \frac{22}{7} \end{aligned}$$

luego $\mathbf{x}^{(1)} = \left(1, \frac{13}{5}, \frac{22}{7}\right)$ y $\|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}^{(1)}\|_\infty = 0.6$. Dado que la distancia no es menor a 10^{-4}, continuar el proceso.

Paso 4. Repetir el tercer paso, ahora con $\mathbf{x}^{(1)}$.

$$\begin{aligned} x_1^{(2)} &= \frac{-3 - 2x_2^{(1)} + x_3^{(1)}}{4} = \frac{-3 - 2\frac{13}{5} + \frac{22}{7}}{4} = 1.3357 \\ x_2^{(2)} &= \frac{-9 + 2x_1^{(1)} - 2x_3^{(1)}}{5} = \frac{-9 + 2(1) - 2\frac{22}{7}}{5} = -2.6571 \\ x_3^{(2)} &= \frac{10 + 6x_1^{(1)} - 3x_2^{(1)}}{7} = \frac{10 + 6(1) - 3\frac{13}{5}}{7} = 3.4 \end{aligned}$$

luego $\mathbf{x}^{(2)} = (1.3357, -2.6571, 3.4)$ y $\|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(2)}\|_\infty = 0.3357$. Dado que la distancia no es menor a 10^{-4}, continuar el proceso. En el cuadro 5.2 se encuentran las primeras diecinueve iteraciones del método.

k	0	1	2	3	4	$\cdots$	16	17	18	19
$x_1^{(k)}$	1	1	1.3357	1.4285	1.4909	$\cdots$	1.6247	1.6248	1.6248	1.6249
$x_2^{(k)}$	-2	-2.6	-2.657	-2.6257	-2.7134	$\cdots$	-2.7498	-2.7499	-2.7499	-2.7499
$x_3^{(k)}$	3	3.1428	3.4	3.7122	3.7783	$\cdots$	3.9995	3.9997	3.9998	3.9998
$d_\infty\left(x^{(k-1)}, x^{(k)}\right)$		0.6	0.3357	0.3122	0.0877	$\cdots$	0.0002	0.0001	0.0001	6.8**E**-5

Cuadro 5.2: iteraciones del método de Jacobi.

Dado que $d_\infty\left(\mathbf{x}^{(18)}, \mathbf{x}^{(19)}\right) = 6.8 \times 10^{-5} < 10^{-4}$, entonces el proceso se detiene y la aproximación de la solución es $\mathbf{x}^{(19)} = (1.6249, -2.7499, 3.9998)$. Se puede verificar que la solución exacta es $x = (1.625, -2.75, 4)$. ♢

5.3.5. Método de Gauss-Seidel

Al examinar con detalle el método de Jacobi, se observa que al momento de calcular $x_i^{(k)}$, con $i > 1$, se utilizan todas las componentes del vector $\mathbf{x}^{(k-1)}$ y para ese instante, se han calculado las componentes $x_j^{(k)}$, $j = 1, 2 \ldots, i-1$, las cuales suponen una mejor aproximación de las componentes x_j del vector solución del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Por lo tanto, una idea para acelerar el proceso, es calcular $x_i^{(k)}$ utilizando $x_j^{(k)}$, con $j = 1, 2 \ldots, i-1$, y $x_r^{(k-1)}$ con $r = i+1, i+2, \ldots, n$. El método descrito anteriormente se denomina *método de Gauss-Seidel* y se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 36. Utilizar el método de Gauss-Seidel resolver el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned}
5x_1 - x_2 + 3x_3 &= 1 \\
-x_1 - 7x_2 + x_4 &= -9 \\
2x_2 + 8x_3 - 2x_4 &= -4 \\
4x_1 + x_3 - 6x_4 &= 9
\end{aligned}$$

Solución: para aplicar el método de Gauss-Seidel son necesarios los siguientes pasos.

Paso 1. Despejar una variable de cada ecuación.

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1 + x_2 - 3x_3}{5} \\
x_2 &= \frac{-9 + x_1 - x_4}{-7} \\
x_3 &= \frac{-4 - 2x_2 + 2x_4}{8} \\
x_4 &= \frac{9 - 4x_1 - x_3}{-6}
\end{aligned}$$

Paso 2. Seleccionar $\mathbf{x}^{(0)}$. En este caso $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 0, 0)$.

Paso 3. Calcular $\mathbf{x}^{(1)}$.

$$\begin{aligned}
x_1^{(1)} &= \frac{1 + x_2^{(0)} - 3x_3^{(0)}}{5} = \frac{1 + 0 - 3(0)}{5} = \frac{1}{5} \\
x_2^{(1)} &= \frac{-9 + x_1^{(1)} - x_4^{(0)}}{-7} = \frac{-9 + \frac{1}{5} - 0}{-7} = \frac{44}{35} \\
x_3^{(1)} &= \frac{-4 - 2x_2^{(1)} + 2x_4^{(0)}}{8} = \frac{-4 - 2\frac{44}{35} + 2(0)}{8} = -\frac{57}{70} \\
x_4^{(1)} &= \frac{9 - 4x_1^{(1)} - x_3^{(1)}}{-6} = \frac{-9 - 4\frac{1}{5} - -\frac{57}{70}}{-6} = -\frac{631}{420}
\end{aligned}$$

Ahora, se debe observar lo siguiente:

- Para calcular $x_2^{(1)}$ se ha utilizado la componente $x_1^{(1)} = \frac{1}{5}$, calculada anteriormente y *no* la componente $x_1^{(0)} = 0$.
- Para calcular $x_3^{(1)}$ se ha utilizado la componente $x_2^{(1)} = \frac{44}{55}$, calculada anteriormente y *no* la componente $x_2^{(0)} = 0$.
- Para calcular $x_3^{(1)}$ se han utilizado las componentes $x_1^{(1)} = \frac{1}{5}$ y $x_3^{(1)} = -\frac{55}{70}$, calculadas anteriormente y *no* las componentes $x_1^{(0)} = 0$ y $x_3^{(0)} = 0$.

De donde, para calcular $\mathbf{x}^{(1)}$, siempre se ha utilizado la información más reciente.

Paso 4. Calcular $\mathbf{x}^{(2)}$.

Dado que $\mathbf{x}^{(1)} = \left(\frac{1}{5}, \frac{44}{35}, -\frac{57}{70}, -\frac{631}{420}\right) = (0.2, 1.2571, -0.8142, -1.5023)$, entonces:

$$
\begin{aligned}
x_1^{(2)} &= \frac{1 + x_2^{(1)} - 3x_3^{(2)}}{5} = \frac{1 + 0.2 - 3(1.2571)}{5} = 0.94\\
x_2^{(2)} &= \frac{-9 + x_1^{(2)} - x_4^{(1)}}{-7} = \frac{-9 + 0.94 - (-1.5023)}{-7} = 0.9368\\
x_3^{(2)} &= \frac{-4 - 2x_2^{(2)} + 2x_4^{(1)}}{8} = \frac{-4 - 2(0.9368) + 2(-1.5023)}{8} = -1.1097\\
x_4^{(2)} &= \frac{9 - 4x_1^{(2)} - x_3^{(2)}}{-6} = \frac{-9 - 4(0.94) - (-1.1097)}{-6} = -1.0582
\end{aligned}
$$

por lo tanto $\mathbf{x}^{(2)} = (0.94, 0.9368, -1.1097, -1.0582)$

En el cuadro 5.3 se encuentran las primeras seis iteraciones del método. Se puede verificar que la solución exacta corresponde a $\mathbf{x} = (1, 1, -1, -1)$ ♢

k	0	1	2	3	4	5	6
$x_1^{(k)}$	0	0.2	0.94	1.0532	1.0031	0.9964	0.9998
$x_2^{(k)}$	0	1.2571	0.9368	0.9840	1.0043	1.0009	0.9997
$x_3^{(k)}$	0	−0.8142	−1.1097	−1.0105	−0.9926	−0.9994	−1.0004
$x_4^{(k)}$	0	−1.5023	−1.058	−0.9662	−0.9966	−1.0022	−1.0001

Cuadro 5.3: iteraciones del método de Gasuss-Seidel.

Se debe resaltar que la diferencia entre el método de Jacobi y Gasuss-Seidel radica en la información que utilizan para calcular $\mathbf{x}^{(k)}$. El método de Jacobi emplea únicamente la información contenida en el vector $\mathbf{x}^{(k-1)}$, mientras que el método de Gauss-Seidel utiliza la información más reciente al usar las componentes de $\mathbf{x}^{(k)}$ que ya calculadas. Al igual que el método de Jacobi, el método de Gauss-Seidel se establece como criterio de parada $\|\mathbf{x}^{(k-1)} - \mathbf{x}^{(k)}\|_\infty < \varepsilon$, para $\varepsilon > 0$ fijo durante la ejecución del método.

Ejemplo 37. Utilizar el método de Gauss-Seidel obtener una aproximación de la solución del siguiente sistema.

$$
\begin{aligned}
4x_1 + 2x_2 - x_3 &= -3\\
-2x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= -9\\
-6x_1 + 3x_2 + 7x_3 &= 10
\end{aligned}
$$

con una tolerancia de $\varepsilon = 10^{-4}$.

Solución: para aplicar el método de Gauss-Seidel son necesarios los siguientes pasos.

Paso 1. Despejar una de las variables de cada ecuación.

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-3-2x_2+x_3}{4} \\ x_2 &= \frac{-9+2x_1-2x_3}{5} \\ x_3 &= \frac{10+6x_1-3x_2}{7} \end{aligned}$$

Paso 2. Seleccionar $\mathbf{x}^{(0)}$. En este caso $\mathbf{x}^{(0)} = (1, -2, 3)$.

Paso 3. Sustituir $x^{(0)}$ en las ecuaciones del primer paso.

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= \frac{-3-2x_2^{(0)}+x_3^{(0)}}{4} = \frac{-3-2(-2)+3}{4} = 1 \\ x_2^{(1)} &= \frac{-9+2x_1^{(1)}-2x_3^{(0)}}{5} = \frac{-9+2(1)-2(3)}{5} = -2.6 \\ x_3^{(1)} &= \frac{10+6x_1^{(1)}-3x_2^{(1)}}{7} = \frac{10+6(1)-3(-2.6)}{7} = 3.4 \end{aligned}$$

luego $\mathbf{x}^{(1)} = (1, -2.6, 3.4)$ y $\|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}^{(1)}\|_\infty = 0.6$. Dado que la distancia no es menor a 10^{-4}, entonces sigue el proceso.

Paso 4. Repetir el tercer paso, ahora con $\mathbf{x}^{(1)}$.

$$\begin{aligned} x_1^{(2)} &= \frac{-3-2x_2^{(1)}+x_3^{(1)}}{4} = \frac{-3-2(1)+3.4}{4} = 1.4 \\ x_2^{(2)} &= \frac{-9+2x_1^{(2)}-2x_3^{(1)}}{5} = \frac{-9+2(1.4)-2(3.4)}{5} = -2.6 \\ x_3^{(2)} &= \frac{10+6x_1^{(2)}-3x_2^{(2)}}{7} = \frac{10+6(1.4)-3(-2.6)}{7} = 3.7428 \end{aligned}$$

luego $\mathbf{x}^{(2)} = (1.4, -2.6, 3.7428)$ y $\|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(2)}\|_\infty = 0.4$. Por lo tanto, la distancia entre $\mathbf{x}^{(1)}$ y $\mathbf{x}^{(2)}$ no es menor a 10^{-4}, entonces sigue el proceso. En el cuadro 5.4 se encuentran las primeras catorce iteraciones del método.

k	0	1	2	3	4	$\cdots$	11	12	13	14
$x_1^{(k)}$	1	1	1.4	1.4857	1.5665	$\cdots$	1.6245	1.6247	1.6248	1.6249
$x_2^{(k)}$	-2	-2.6	-2.6	-2.7028	-2.7175	$\cdots$	-2.7498	-2.7499	-2.7499	-2.7499
$x_3^{(k)}$	3	3.4	3.7428	3.8604	3.9359	$\cdots$	3.9995	3.9997	3.9998	3.9999
$d_\infty\left(x^{(k-1)}, x^{(k)}\right)$		0.6	0.4	0.1175	0.0808	$\cdots$	0.0004	0.0002	0.0001	5.63**E**−05

Cuadro 5.4: iteraciones del método de Gauss-Seidel.

Como $d_\infty\left(\mathbf{x}^{(13)}, \mathbf{x}^{(14)}\right) = 5.63 \times 10^{-5} < 10^{-4}$, entonces el proceso se detiene y la aproximación de la solución es $\mathbf{x}^{(14)} = (1.6249, -2.7499, 3.9999)$. $\diamondsuit$

Nota: si el anterior ejemplo se desarrolla con el método de Jacobi, son necesarias diecinueve iteraciones. Se observa entonces como el método de Gauss-Seidel presenta una convergencia más rápida.

Ejercicios 15

1. Obtener $\mathbf{x}^{(3)}$ en el método de Jacobi en la solución de los siguientes sistemas lineales. Usar $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 0)$.

   a) $$\begin{aligned} 6x_1 + 3x_2 - x_3 &= 8 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 &= 7 \\ x_1 - 3x_2 - 5x_3 &= -7 \end{aligned}$$

   b) $$\begin{aligned} -4x_1 + x_2 + 2x_3 &= -3 \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= -1 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 &= -3 \end{aligned}$$

   c) $$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_3 &= 6 \\ x_1 + 3x_2 &= 3 \\ x_1 + 5x_2 + 7x_3 &= 19 \end{aligned}$$

   d) $$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 3 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 &= 2 \\ -2x_1 - x_2 + 7x_3 + 2x_4 &= -9 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 6x_4 &= 3 \end{aligned}$$

2. Repetir el ejercicio anterior utilizando el método de Gauss-Seidel.
3. Si se define una tolerancia de $\varepsilon = 10^{-5}$, resolver los ejercicios del primer numeral utilizando el método de Jacobi.
4. Repetir el ejercicio anterior utilizando el método de Gauss-Seidel.

5.3.6. Convergencia métodos de Jacobi y Gauss-Seidel

En esta parte se analizan condiciones para asegurar la convergencia de los métodos iterativos de la forma $\mathbf{x}^{(k)} = T\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{c}$. Antes de presentar estas condiciones, es necesario revisar algunos conceptos.

Definición 9. *Sea A una matriz $n \times n$. $\rho(A)$, denominado el radio espectral, corresponde a:*

$$\rho(A) = \max\{|\lambda| \mid \lambda \text{ es valor propio de } A\}$$

Definición 10. *Sea A una matriz $n \times n$. A es de diagonal estrictamente dominante si*

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$$

para $i = 1, 2, \ldots, n$.

Ejemplo 38. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 3 \\ -3 & 7 & 1 \\ 4 & 5 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 5 & 7 & -3 \\ 9 & -1 & 10 \end{pmatrix},$$

determinar si son de diagonal estrictamente dominante.

Solución: A es de diagonal estrictamente dominante dado que $|-6| > |2| + |3|$, $|7| > |-3| + |1|$ y $|10| > |4| + |5|$. De otro lado, B no es de diagonal estrictamente dominante, ya que en la segunda fila el valor absoluto del elemento diagonal $|7|$ no es mayor a la suma de los valores absolutos de los elementos restantes de la fila, a saber, $|5| + |-3| = 8$. $\diamondsuit$

Con los anteriores elementos es posible presentar los siguientes resultados.

Teorema 8. *Dado cualquier* $\mathbf{x}^{(0)}$ *vector de* $\mathbb{R}^n$*, la sucesión* $\left\{\mathbf{x}^{(k)}\right\}_{k=0}^{\infty}$ *generada por el esquema recursivo*

$$\mathbf{x}^{(k)} = T\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{c}$$

converge a la única solución del problema $\mathbf{x} = T\mathbf{x} + \mathbf{c}$ *si y solo si* $\rho(A) < 1$.

El teorema 8 brinda condiciones necesarias y suficientes para garantizar la convergencia de un método iterativo de la forma $\mathbf{x}^{(k)} = T\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{c}$ con T una matriz fija y $\mathbf{c}$ un vector. Antes de dar condiciones *suficientes* para garantizar la convergencia de los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel, es necesario presentar estos métodos como esquemas recursivos de la forma $\mathbf{x}^{(k)} = T\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{c}$.

Si $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es un sistema de ecuaciones lineales con la siguiente matriz de coeficientes A

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

y si se divide A de la siguiente manera

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a_{21} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a_{31} & -a_{32} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & -a_{nn-1} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ 0 & 0 & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & -a_{n-1n} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

entonces $A = D - L - U$ donde D es matriz diagonal, U es una matriz triangular superior y L es una matriz triangular inferior. En este caso, el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ se transforma en el sistema $(D - L - U)\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lo que implica que

$$D\mathbf{x} = (L + U)\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

Ahora, si D^{-1} existe[2] entonces multiplicando ambos lados de la anterior ecuación se obtiene

$$\mathbf{x} = D^{-1}(L + U)\mathbf{x} + D^{-1}\mathbf{b},$$

que a su vez, se transforma en el esquema iterativo

$$\mathbf{x}^{(k)} = D^{-1}(L + U)\mathbf{x}^{(k-1)} + D^{-1}\mathbf{b}.$$

[2] D^{-1} para una matriz diagonal D existe si y sólo si $a_{ii} \neq 0$ para $i = 1, 2, \ldots, n$.

Si se define $D^{-1}(L+U) = J$ y $\mathbf{c} = D^{-1}\mathbf{b}$, entonces el anterior esquema corresponde a la forma matricial del método de Jacobi:

$$\mathbf{x}^{(k)} = J\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{c} \tag{5.2}$$

Ahora, si la ecuación

$$(D-L-U)\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

se despeja de la siguiente manera

$$(D-L)\mathbf{x} = U\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

y existe $(D-L)^{-1}$, entonces

$$\mathbf{x} = (D-L)^{-1}U\mathbf{x} + (D-L)^{-1}\mathbf{b},$$

lo cual origina el método matricial de Gauss-Seidel

$$\mathbf{x}^{(k)} = G\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{s} \tag{5.3}$$

donde $G = (D-L)^{-1}U$ y $\mathbf{s} = (D-L)^{-1}\mathbf{b}$. Es de anotar que $D-L$ es una matriz triangular inferior, y por tanto su inversa existe si los elementos de la diagonal no son nulos, en este caso si $a_{ii} \neq 0$ para $i = 1, 2, \ldots, n$.

Luego de presentar los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel como esquemas de la forma $\mathbf{x}^{(k)} = T\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{c}$, a continuación se tiene una condición suficiente para garantizar su convergencia.

Teorema 9. *Si A es una matriz de diagonal estrictamente dominante, entonces para cualquier semilla $\mathbf{x}^{(0)}$, los método de Jacobi y Gauss-Seidel son convergentes a la única solución del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.*

Ejercicios 16

1. Dado el sistema de ecuaciones $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, donde $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ y $b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, calcular la matriz J y el vector $\mathbf{c}$ usados en el método de Jacobi.

2. Dado el sistema de ecuaciones $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, donde $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$ y $b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, calcular la matriz G y el vector $\mathbf{s}$ usados en el método de Gauss-Seidel.

3. Determinar si las siguientes matrices son de diagonal estrictamente dominante.

   a) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 5 & 7 & -3 \\ 9 & -1 & 10 \end{pmatrix}$

   b) $\begin{pmatrix} 6 & 3 & -2 \\ 8 & 15 & -4 \\ -3 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & -1 \\ 0 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & -9 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

4. Descomponer la matriz A en la forma $D - L - U$, donde D es una matriz diagonal, U una matriz triangular superior y L es una matriz triangular inferior.

a) $\begin{pmatrix} 5 & 7 & -3 \\ -4 & 8 & 11 \\ 9 & 3 & 16 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 5 & 3 \\ 13 & 0 & 15 & -2 \\ 57 & 0 & 28 & 0 \end{pmatrix}$

5. Determinar para los siguientes sistemas, si el método de Jacobi (o Gauss-Seidel) es convergente desde cualquier vector inicial $\mathbf{x}^{(0)}$.

a) $\begin{array}{l} -15x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 3 \\ 8x_1 - 4x_2 + x_3 = 6 \\ 9x_1 - x_2 + 3x_3 = 5 \end{array}$ b) $\begin{array}{l} 4x_1 + x_2 + x_3 = -5 \\ 3x_1 + 6x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ -3x_1 + 2x_2 - 9x_3 = 1 \\ x_2 + 4x - 3 - 7x_4 = 6 \end{array}$

6. Resolver el sistema lineal dado por medio del método de Jacobi con $\varepsilon = 10^{-4}$.

$$\begin{aligned} 5x + 3y - z &= 2 \\ -x + 2y - 4z &= -2 \\ 2x - 4y - z &= -1 \end{aligned}$$

7. Resolver el sistema lineal dado por medio del método de Gauss-Seidel con $\varepsilon = 10^{-4}$.

$$\begin{aligned} 2x + 5y + z &= -2 \\ 3x - y + z &= 2 \\ -x - y + 3z &= 0 \end{aligned}$$

8. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ \beta & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, encontrar los valores de α y β de forma tal que la matriz sea de diagonal estrictamente dominante.


LAMPE