Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Universidad del Perú. Decana de América

Facultad de Ciencias Matemáticas

Escuela Profesional de Matemática

Homología del espacio de configuraciones del espacio proyectivo complejo

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

AUTOR

César Augusto IPANAQUÉ ZAPATA

ASESOR

Dr. Agripino GARCÍA ARMAS

Lima, Perú

2014

Referencia bibliográfica

Ipanaqué, C. (2014). *Homología del espacio de configuraciones del espacio proyectivo complejo*. [Tesis de pregrado, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Escuela Profesional de Matemática]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

Metadatos complementarios

Datos de autor	
Nombres y apellidos	Cesar Augusto Ipanaque Zapata
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	45870854
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0003-2558-894X
Datos de asesor	
Nombres y apellidos	Agripino García Armas
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	10321859
URL de ORCID	
Datos del jurado	
Presidente del jurado	
Nombres y apellidos	Martha Olinda Gonzales Bohorquez
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	10423235
Miembro del jurado 1	
Nombres y apellidos	Tomás Núñez Lay
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	Docente Cesante
Datos de investigación	
Línea de investigación	A.3.1.2. Topología y Geometría
Grupo de investigación	No aplica
Agencia de financiamiento	Sin Financiamiento
Ubicación geográfica de lainvestigación	Universidad Nacional Mayor de San Marcos País: Perú Departamento: Lima Provincia: Lima Distrito: Cercado de Lima Latitud: 12°03′30″S Longitud: 77°05′00″O
Año o rango de años en que se realizó la investigación	Marzo 2013 - Febrero 2014
URL de disciplinas OCDE	Matemáticas Puras https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.01

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
(Universidad del Perú, DECANA DE AMÉRICA)
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS
Ciudad Universitaria - Av. Venezuela S/N cuadra 34
Teléfono IP Nº 619-7000
Correo Postal: 05-0021, E-mail: eapmat@unmsm.edu.pe
Lima - Perú

Escuela Académico-Profesional de Matemática

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA

En la UNMSM - Ciudad Universitaria - Facultad de Ciencias Matemáticas, siendo las ....17:00.. horas del día Jueves 18 de setiembre 2014, se reunieron los docentes designados como Miembros del Jurado Calificador de Tesis: Mg. Martha Olinda Gonzales Bohorquez (Presidenta), Mg. Tomás Núñez Lay (Miembro), Dr. Agripino García Armas (Miembro Asesor), para la sustentación de la tesis titulada: «HOMOLOGÍA DEL ESPACIO DE CONFIGURACIONES DEL ESPACIO PROYECTIVO COMPLEJO», presentado por el señor Bachiller CÉSAR AUGUSTO IPANAQUÉ ZAPATA, para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Luego de la exposición del tesista, el Presidente del Jurado invitó a dar respuestas a las preguntas que le formulen.

Hecha la evaluación correspondiente por los Miembros del Jurado, el tesista mereció la aprobación unánime obteniendo como calificativo promedio la nota de:

....diecinueve.................... (19).

A continuación la Presidenta del Jurado, Mg. Martha Olinda Gonzales Bohorquez, manifestó que el señor Bachiller César Augusto Ipanaqué Zapata, en vista de haber aprobado la sustentación de su tesis, será propuesto para que se le otorgue el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Siendo las ..18:00..... horas se levantó la sesión firmando para constancia la presente Acta en tres (3) copias originales.

MG. MARTHA OLINDA GONZALES BOHORQUEZ
PRESIDENTA

DR. AGRIPINO GARCÍA ARMAS
MIEMBRO ASESOR

MG. TOMÁS NÚÑEZ LAY
MIEMBRO

Dedicado

a mi familia.

Índice

Introducción

Este trabajo es una introducción a los espacios de configuraciones de espacios topológicos, para ello en el capítulo I se da algunas definiciones y resultados de topología y álgebra que serán utilizados en el presente trabajo. En el capítulo II se cubre la teoría fundamental de los espacios de configuraciones para espacios topológicos generales y muestra algunos resultados para ciertos espacios . Por ejemplo se tiene

$$Conf(\mathbb{S}^n, 2) \simeq \mathbb{S}^n \ , Conf(\mathbb{R}^n, k) \approx \mathbb{R}^n \times Conf(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, k-1).$$

En general el problema de conocer la configuración de un espacio cualquiera aún no está resuelto. En el capítulo III , se presenta a un objeto que se relaciona con los espacios de configuraciones, las cuales son conocidas como Trenzas, quienes fueron estudiadas por E. Artín en [2]. Para familiarizarnos con ellas damos una prueba geométrica que los grupos fundamentales del espacio de configuraciones ordenado y no ordenado de k puntos en $\mathbb{R}^2$ son isomorfos al grupo de trenzas puras y al grupo de trenzas de Artin respectivamente.

Determinar la Homología de los espacios de configuraciones para una variedad en general es un problema abierto. Nuestro objetivo es calcular el grupo de homologia del espacio de configuraciones del espacio proyectivo complejo, es por eso que en el capítulo IV, se dan a conocer las variedades topológias y se estudia el espacio proyectivo complejo. Finalmente mostraremos que $\pi_1(Conf(\mathbb{CP}^n, 2)) = 0$ lo cual nos dice que el espacio proyectivo complejo es simplemente conexo, y además $H_1(Conf(\mathbb{CP}^n, 2)) = 0 \quad , \forall n \geq 1.$

Capítulo 1.-Preliminares

1.1 Preliminares Topológicos

Sean X, Y espacios topológicos.

Definición 1.1:

Sean $f, g : X \longrightarrow Y$aplicaciones continuas. Se dice que f es HOMOTÓPICA a g, denotado $f \simeq g$, si y sólo si existe $H : X \times I \longrightarrow Y$ aplicación continua tal que

$$H(x,0) = f(x), \forall x \in X$$
$$H(x,1) = g(x), \forall x \in X.$$

A la aplicación H se denomina HOMOTOPÍA de f a g, denotado $H : f \simeq g$.

Donde

$$I = [0,1]$$

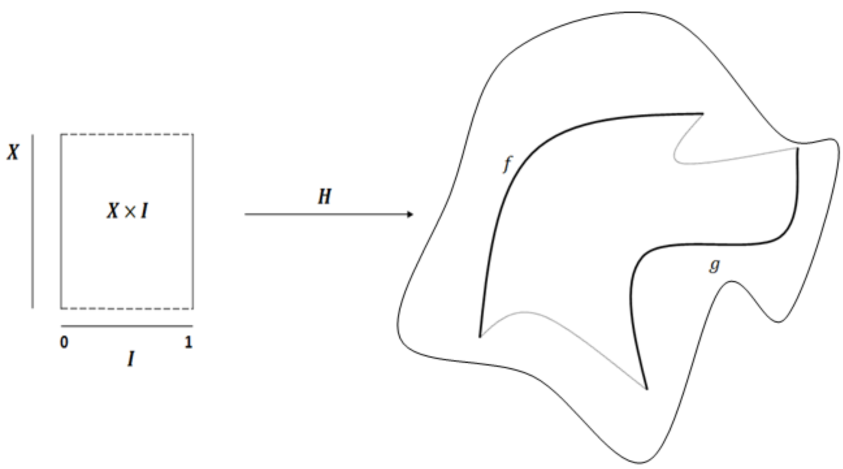


Figura 1: $H : f \simeq g$

Proposición 1.2:

$$'' \simeq '' \text{ es una relación de equivalencia en el conjunto } Map(X,Y)$$

Donde

$$Map(X,Y) =: \{f : X \longrightarrow Y \quad | \; f \text{ es una aplicación continua}\}$$

Demostración:

$'' \simeq ''$ **es reflexiva:**

Para cada aplicación continua $f : X \longrightarrow Y$ consideremos la aplicación

$$\begin{array}{rccl} H: & X \times I & \longrightarrow & Y \\ & (x,t) & \mapsto & H(x,t) = f(x) \end{array}$$

Claramente $H : f \simeq f$, de ahí $f \simeq f$.

$'' \simeq ''$ **es simétrica:**

Sean $f, g \in Map(X,Y)$ tal que $f \simeq g$, esto es, existe una homotopía $H : f \simeq g$. Considerando la aplicación

$$\begin{array}{rccl} G: & X \times I & \longrightarrow & Y \\ & (x,t) & \mapsto & G(x,t) = H(x,1-t) \end{array}$$

se tiene que $G : g \simeq f$, así $g \simeq f$.

$'' \simeq ''$ **es transitiva:**

Sean $f, g, h \in Map(X,Y)$ tal que $f \simeq g$ y $g \simeq h$, esto es, existen $H : f \simeq g$ y $G : g \simeq h$ homotopías. Considerando la aplicación

$$\begin{array}{rccl} F: & X \times I & \longrightarrow & Y \\ & (x,t) & \mapsto & F(x,t) = \begin{cases} H(x,2t) & , \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(x,2t-1) & , \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \end{array}$$

se tiene que $F : f \simeq h$, así $f \simeq h$.

■

Esta relación de equivalencia divide a $Map(X,Y)$ en clases de equivalencia denominadas CLASES DE HOMOTOPÍA (de aplicaciones).

Denotaremos

$$[X,Y] =: \frac{Map(X,Y)}{\simeq}$$

conjunto de las clases de homotopía.

Definición 1.3:

Una aplicación continua $f : X \longrightarrow Y$ es una EQUIVALENCIA HOMOTÓPICA, si existe una aplicación contínua $g : Y \longrightarrow X$ tal que $g \circ f \simeq id_X$, $f \circ g \simeq id_Y$. g es llamada INVERSA HOMOTÓPICA de f.

Se dice que dos espacios topológicos X, Y son HOMOTÓPICOS O DEL MISMO TIPO DE HOMOTOPÍA , denotado $X \simeq Y$, si existe una equivalencia homotópica $f : X \longrightarrow Y$.

Definición 1.4:

Sean $f, g : X \longrightarrow Y$ aplicaciones continuas ,$A \subseteq X$. Se dice que f es HOMOTÓPICA A g RELATIVO A, denotado $f \simeq g$ rel A, si existe una aplicación continua

$$H : X \times I \longrightarrow Y$$

tal que

$$\begin{array}{c} H(x,0) = f(x), \forall x \in X \\ H(x,1) = g(x), \forall x \in X \\ H(a,t) = f(a), \forall a \in A, \forall t \in [0,1] \end{array}$$

A la aplicación H se denomina HOMOTOPÍA RELATIVA de f a g respecto A, denotado $H : f \simeq g$ rel A.

Observación 1.5:

Si $f \simeq g$ rel A entonces $f(a) = g(a), \forall a \in A$.

Proposición 1.6:

$'' \simeq$ rel A'' es una relación de equivalencia en el conjunto $Map(X,Y)$

Demostración:

Similar a la proposición 1.2.

$\blacksquare$

Esta relación de equivalencia divide a $Map(X, Y)$ en clases de equivalencia denominadas CLASES DE HOMOTOPÍA RELATIVA.

Denotaremos

$$[X, Y]_A =: \frac{Map(X, Y)}{\simeq relA}$$

conjunto de las clases de homotopía relativa.

Observación 1.7:

$$[X, Y]_\emptyset = [X, Y]$$

Definición 1.8:

Un CAMINO en un espacio topológico X es una aplicación continua

$$\lambda : [0, 1] \longrightarrow X$$

Los puntos $\lambda(0), \lambda(1)$ son conocidos como EXTREMO INICIAL y EXTREMO FINAL del camino λ respectivamente.

Definición 1.9

Un espacio topológico X se denomina ESPACIO DE HAUSDORFF si para cada par $x, y \in X$(con $x \neq y$) existen U, V vecindades abiertas de x e y respectivamente en X tal que $U \cap V = \emptyset$

Proposición 1.10

El producto finito de espacios de Hausdorff es Hausdorff.

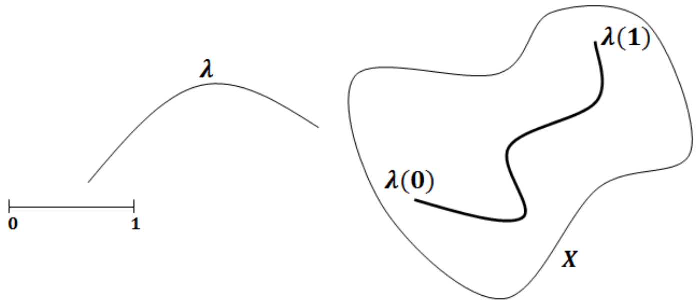


Figura 2: Camino λ

Demostración:

Sean X, Y espacios de hausdorff. Tomemos $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$ tal que $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$, de ahí $x_1 \neq x_2$ ó $y_1 \neq y_2$.

Si $x_1 \neq x_2$ entonces por ser X de Hausdorff, existen U, V abiertos no vacíos disjuntos de X tal que $x_1 \in U$ y $x_2 \in V$. Luego $U \times Y, V \times Y$ son abiertos no vacíos disjuntos de $X \times Y$ con $(x_1, y_1) \in U$ y $(x_2, y_2) \in V$. Así $X \times Y$ son Haausdorff.
Similar el otro caso.

Finalmente por inducción se sigue la proposición.

$\blacksquare$

Proposición 1.11

Si X es de Hausdorff e Y es un subespacio de X, entonces Y es de Hausdorff.

Demostración:

Sean $x, y \in Y$ con $x \neq y$, luego por ser X de Hausdorff, existen U, V abiertos no vacíos disjuntos de X tal que $x \in U$ y $y \in V$. Luego $U \cap Y, V \cap Y$ son abiertos no vacíos disjuntos de Y con $x \in U \cap Y$ y $y \in V \cap Y$. Así Y es de Hausdorff.

$\blacksquare$

Proposición 1.12

Sea $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación con Y compacto y de Hausdorff. Entonces f es continua si y sólo si el grafo de f

$$G_f =: \{(x, f(x)) \in X \times Y : x \in X\}$$

es cerrado en $X \times Y$.

Demostración:

Dada en [1].

■

Proposición 1.13

a) Cada subespacio cerrado de un espacio compacto es compacto.

b) Cada subespacio compacto de un espacio de Hausdorff es cerrado.

c) La imágen de un espacio compacto bajo una aplicación contínua es un espacio compacto.

d) Sea $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación contínua y biyectiva. Si X es compacto e Y es de Hausdorff, entonces f es un homeomorfismo.

e) El producto de un número finito de espacios compactos es compacto.

Demostración:

Dada en [1].

■

Definición 1.14

Sean X, Y espacios topológicos , $P : X \longrightarrow Y$ aplicación continua. Se dice que P es una APLICACIÓN CUBRIENTE de Y si:

a) P es sobreyectiva

b) Para cada punto $y \in Y$ existe una vecindad abierta $V = V_y$ de y en Y tal que

$$P^{-1}(V) = \coprod_{i \in I} V_i$$

Donde los V_i son abiertos disjuntos de X tal que

$$P|_{V_i} : V_i \quad \longrightarrow \quad V$$

es un homeomorfismo para cada $i \in I$ (Se dice que V ESTÁ REGULARMENTE CUBIERTA POR P).

X es llamado ESPACIO CUBRIENTE de Y, al subespacio $P^{-1}(y)$ con $y \in Y$ se denomina la fibra de y. Si $y_0 \in Y$ es el punto base entonces $F =: P^{-1}(y_0)$ es llamada la FIBRA de P.

Nota:

Un espacio topológico X junto con un punto $x_0 \in X$ es llamado un ESPACIO TOPOLÓGICO PUNTEADO CON PUNTO BASE x_0, denotado (X, x_0).

Definición 1.15

Sean $P : X \longrightarrow Y, f : Z \longrightarrow Y$ aplicaciones continuas. Un LEVANTAMIENTO de f es una aplicación continua $\widetilde{f} : Z \quad \longrightarrow \quad X$ tal que $P \circ \widetilde{f} = f$,esto es, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[d, "P"] \\
Z \arrow[ur, dotted, "\widetilde{f}"] \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, phantom, shift right=3ex, "\circlearrowright"] & Y
\end{tikzcd}$$

Proposición 1.16

Sean $P : X \longrightarrow Y$ una aplicación cubriente y $\widetilde{f}, \overline{f} : Z \longrightarrow X$ dos levantamientos de $f : Z \longrightarrow Y$. Si Z es conexo y $\widetilde{f}(z_0) = \overline{f}(z_0)$ para algún $z_0 \in Z$ entonces $\widetilde{f} = \overline{f}$.

Demostración:

Definamos el conjunto

$$A = \{z \in Z : \widetilde{f}(z) = \overline{f}(z)\} \subseteq Z$$

Claramente $A \neq \emptyset$ pues $z_0 \in A$. Además A es abierto y cerrado a la vez, luego por la conexidad de Z. Se tiene $A = Z$.

■

Lema 1.17: (El lema del número de Lebesgue)

Sea $\{U_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ un cubrimiento del espacio métrico (X, d). Si X es compacto, entonces existe $\delta > 0$ tal que para cualquier $B \subseteq X$ con $diam(B) < \delta$, existe $\alpha_0 \in \Lambda$ tal que $B \subseteq U_{\alpha_0}$.

Demostració:

Dada en [1].

■

Teorema 1.18 (Levantamiento de caminos y homotopía)

Sea $P : X \longrightarrow Y$ una aplicación cubriente.

1) Dados $\alpha : [0,1] \longrightarrow Y$ una aplicación continua y $a \in X$ tal que $\alpha(0) = P(a)$, entonces existe un único $\widetilde{\alpha} : [0,1] \longrightarrow X$ levantamiento de α tal que $\widetilde{\alpha}(0) = a$.
2) Dada $H : I \times I \longrightarrow Y$ una aplicacoón continua y $a \in X$ tal que $F(0,0) = P(a)$, entonces existe un único $\widetilde{H} : I \times I \longrightarrow X$ levantamiento de H tal que $\widetilde{H}(0,0) = a$.

Demostración:

1) <u>**Existencia:**</u>

   Como P es una aplicación cubriente, entonces para cada $y \in Y$ existe V_y vecindad abierta de y en Y que está regularmente cubierta por P. Luego:

$$\{\alpha^{-1}(V_y) : y \in \alpha(I)\}$$

es un cubrimiento abierto del compacto I. Entonces por el lema del número de Lebesgue podemos encontrar

$$0 = s_0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_{n-1} < s_n = 1$$

una partición del intervalo I tal que $\alpha([s_{i-1}, s_i]) \subseteq V_{y_{i-1}}$ para cada $i = 1, 2, \cdots, n$.

Para cada $i = 1, 2, \cdots, n$. definamos:

$$\begin{array}{rcl} \tilde{\alpha}_{i-1} : \ [s_{i-1}, s_i] & \longrightarrow & X \\ t & \longrightarrow & \tilde{\alpha}_{i-1}(t) = (P|_{V'_{j_{i-1}}})^{-1} \circ \alpha(t) \end{array}$$

Donde

$V'_{j_{i-1}}$ es un abierto de X y además $P|_{V'_{j_{i-1}}} : V'_{j_{i-1}} \longrightarrow V_{y_{i-1}}$ es un homeomorfismo.

Claramente $\tilde{\alpha}_{i-1}$ es una aplicación continua con:

$$\tilde{\alpha}_{i-1}(s_{i-1}) = a_{i-1} \text{ , tomando } \alpha(s_{i-1}) = P(a_{i-1})$$

$$\tilde{\alpha}_{i-1}(s_i) = a_i \text{ , tomando } \alpha(s_i) = P(a_i)$$

$$\text{y } P \circ \tilde{\alpha}_{i-1} = \alpha \text{ en } [s_{i-1}, s_i].$$

Finalmente tomando

$$\begin{array}{rcl} \tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}_0 \cup \cdots \cup \tilde{\alpha}_{n-1} : \ [0,1] & \longrightarrow & X \\ t & \longmapsto & \tilde{\alpha}(t) = \begin{cases} \tilde{\alpha}_0(t). & t \in [s_0, s_1] \\ \tilde{\alpha}_1(t). & t \in [s_1, s_2] \\ \vdots & \\ \tilde{\alpha}_{n-1}(t). & t \in [s_{n-1}, s_n] \end{cases} \end{array}$$

se tiene que $\tilde{\alpha}$ es un levantamiento de α tal que $\tilde{\alpha}(0) = a$.

Unicidad:

La unicidad se obtiene al aplicar la proposición 1.16 , ya que el intervalo $I = [0, 1]$ es conexo.

2) **Existencia:**

Como P es una aplicación cubriente, entonces para cada $y \in Y$ existe V_y vecindad abierta de y en Y que está regularmente cubierta por P. Luego:

$$\{H^{-1}(V_y) : y \in H(I \times I)\}$$

es un cubrimiento abierto del compacto $I \times I$. Entonces por el lema del número de Lebesgue podemos encontrar

$$0 = s_0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_{n-1} < s_n = 1$$
$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{m-1} < t_m = 1$$

dos particiones del intervalo I tal que $H(I_{i-1,j-1}) \subseteq V_{y_{i-1,j-1}}$ para cada $i = 1, 2, \cdots, n, j = 1, 2, \cdots, m$.

Donde $I_{i-1,j-1} = [s_{i-1}, s_i] \times [t_{j-1}, t_j]$, para cada $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$.

Para cada $i = 1, 2, \cdots, n, j = 1, 2, \cdots, m$. definamos:

$$\begin{array}{rccl} \tilde{H}_{i-1,j-1} : & I_{i-1,j-1} & \longrightarrow & X \\ & (s,t) & \longrightarrow & \tilde{H}_{i-1,j-1}(s,t) = (P|_{\tilde{V}_{i-1,j-1}})^{-1} \circ H(s,t) \end{array}$$

Donde

$\tilde{V}_{i-1,j-1}$ es un abierto de X y además $P|_{\tilde{V}_{i-1,j-1}} : \tilde{V}_{i-1,j-1} \longrightarrow V_{y_{i-1,j-1}}$ es un homeomorfismo.

Claramente $\tilde{H}_{i-1,j-1}$ es una aplicación continua con:

$$\tilde{H}_{i-1,j-1}(s_{i-1}, t_{j-1}) = a_{i-1,j-1} \text{ , tomando } H(s_{i-1}, t_{j-1}) = P(a_{i-1,j-1})$$
$$\tilde{H}_{i-1,j-1}(s_i, t_{j-1}) = a_{i,j-1} \text{ , tomando } H(s_i, t_{j-1}) = P(a_{i,j-1})$$
$$\tilde{H}_{i-1,j-1}(s_{i-1}, t_j) = a_{i-1,j} \text{ , tomando } H(s_{i-1}, t_j) = P(a_{i-1,j})$$
$$\tilde{H}_{i-1,j-1}(s_i, t_j) = a_{i,j} \text{ , tomando } H(s_i, t_j) = P(a_{i,j})$$
$$\text{y } P \circ \tilde{H}_{i-1,j-1} = H \text{ en } I_{i-1,j-1}.$$

Finalmente tomando

$$
\begin{array}{rcl}
\tilde{H}: \ [0,1]\times[0,1] & \longrightarrow & X \\
(s,t) & \longmapsto & \tilde{H}(s,t) = \begin{cases}
\tilde{H}_{0,0}(s,t). & (s,t)\in I_{0,0} \\
\tilde{H}_{1,0}(s,t). & (s,t)\in I_{1,0} \\
\vdots & \\
\tilde{H}_{n-1,0}(s,t). & (s,t)\in I_{n-1,0} \\
\tilde{H}_{0,1}(s,t). & (s,t)\in I_{0,1} \\
\tilde{H}_{1,1}(s,t). & (s,t)\in I_{1,1} \\
\vdots & \\
\tilde{H}_{n-1,1}(s,t). & (s,t)\in I_{n-1,1} \\
\vdots & \\
\tilde{H}_{0,m-1}(s,t). & (s,t)\in I_{0,m-1} \\
\tilde{H}_{1,m-1}(s,t). & (s,t)\in I_{1,m-1} \\
\vdots & \\
\tilde{H}_{n-1,m-1}(s,t). & (s,t)\in I_{n-1,m-1}
\end{cases}
\end{array}
$$

se tiene que $\tilde{H}$ es un levantamiento de H tal que $\tilde{H}(0,0) = a$.

<u>**Unicidad:**</u>

La unicidad se obtiene al aplicar la proposición 1.16 , ya que $I \times I$ es conexo.

■

Corolario:

Sea $P : X \longrightarrow Y$ una aplicación cubriente con $P(a_0) = b_0, P(a'_0) = b'_0$. Si $f_0, f_1 : I \longrightarrow Y$ son aplicaciones continuas con $f_0(0) = b_0, f_0(1) = b'_0$ y $f_0 \simeq f_1 \ rel\{0,1\}$ entonces existen únicos $\tilde{f}_0, \tilde{f}_1 : I \longrightarrow X$ levantamientos de f_0 y f_1 respectivamente con $\tilde{f}_0(0) = a_0, \tilde{f}_0(1) = a'_0$ y $\tilde{f}_0 \simeq \tilde{f}_1 \ rel\{0,1\}$.

Definición 1.19

Una aplicación $P : E \longrightarrow B$ se dice que tiene la PROPIEDAD DE LEVANTAMIENTO DE HOMOTOPÍA con respecto a un espacio X si dada una aplicación $f : X \longrightarrow E$ y una homotopía $H : X \times I \longrightarrow B$ tal que $H(x,0) = P \circ f(x), \forall x \in X$, existe una homotopía $\overline{H} : X \times I \longrightarrow E$ tal que $P \circ \overline{H} = H$ y $\overline{H}(x,0) = f(x), \forall x \in X$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "i_0"'] & E \arrow[d, "P"] \\
X \times I \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, dashed, "\overline{H}"] & B
\end{tikzcd}$$

Donde

$$\begin{array}{rccc} i_0: & X & \hookrightarrow & X \times I \\ & x & \longmapsto & i_0(x) = (x, 0) \end{array}$$

Definición 1.20

Una aplicación $P : E \longrightarrow B$ es una FIBRACIÓN si tiene la propiedad de levantamiento de homotopía con respecto a todos los espacios.

Definición 1.21

Sea $P : E \longrightarrow B$ una fibración. Para cada $b \in B$ la FIBRA sobre b de P está dada por el subespacio $P^{-1}(b)$. Si $b_0 \in B$ es el punto base, entonces $F = P^{-1}(b_0)$ es llamada la FIBRA DE P.

Notación:

$$F \hookrightarrow E \longrightarrow B$$

denotará a una fibración con fibra F.

AXIOMAS DE HOMOLOGÍA

Definición 1.22:

Un PAR TOPOLÓGICO (X, A) está conformado por un espacio topológico X junto con un subespacio A de X.

Observación:

El par topológico $(X, \emptyset)$ es considerado como el espacio topológico X. Así, los espacios topológicos son considerados como pares topológicos.

Definición 1.23:

Sean (X, A) y (Y, B) dos pares topológicos, $f : X \longrightarrow Y$ aplicación continua. f es denominada una APLICACIÓN DE PARES TOPOLÓGICOS , denotada $f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ si y sólo si $f(A) \subseteq B$.

Observación:

Cualquier aplicación continua $f : X \longrightarrow Y$ es considerada como una aplicación de pares topológicos $f : (X, \emptyset) \longrightarrow (Y, \emptyset)$.

Definición 1.24:

Un par topológico (X', A') es un SUBPAR TOPOLÓGICO del par topológico (X, A), denotado $(X', A') \subseteq (X, A)$, si y sólo si $X' \subseteq X$ y $A' \subseteq A$.

Observación:

Sea (X', A') un subpar topológico del par topológico (X, A). La aplicación inclusión $i : X' \hookrightarrow X$ cumple $i(A') \subseteq A$. De ahí, i es una aplicación de pares topológicos, la cual es llamada la APLICACIÓN INCLUSIÓN DE PARES TOPOLÓGICOS y es denotada por $i : (X', A') \hookrightarrow (X, A)$.

Definición 1.25:

Sean $f, g : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ dos aplicaciones de pares topológicos. Se dice que f y g

son HOMOTÓPICAS EN PARES , denotada $f \simeq g$, si y sólo si existe una aplicación $H : (X \times [0,1], A \times [0,1]) \longrightarrow (Y, B)$ de pares topológicos tal que $H : f \simeq g$.

Definición 1.26:

Una TEORÍA DE HOMOLOGÍA H asigna a cualquier par topológico (X, A) una sucesión de grupos abelianos $\{H_q(X, A)\}_{q\in\mathbb{Z}}$ y a cualquier aplicación de pares $f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ una sucesión de homomorfismos $\{H_q(f) : H_q(X, A) \longrightarrow H_q(Y, B)\}_{q\in\mathbb{Z}}$, además existe una sucesión de homomorfismos $\{\partial_q : H_q(X, A) \longrightarrow H_{q-1}(A, \emptyset)\}_{q\in\mathbb{Z}}$,que satisfacen los siguientes axiomas ($Axiomas\ de\ Eilenberg - Steenrod$):

A1) Si $id : (X, A) \longrightarrow (X, A)$ es la aplicación identidad, entonces

$$H_q(id) : H_q(X, A) \longrightarrow H_q(X, A)$$

es el homomorfismo identidad, $\forall q \in \mathbb{Z}$.

A2) Si $f : (X, A) \longrightarrow (X', A'), g : (X', A') \longrightarrow (X'', A'')$ son aplicaciones de pares, entonces

$$H_q(g \circ f) = H_q(g) \circ H_q(f), \forall q \in \mathbb{Z}.$$

A3) Si $f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ es una aplicación de pares, entonces

$$\partial_q \circ H_q(f) = H_q(f|_A) \circ \partial_q, \forall q \in \mathbb{Z}.$$

A4) **Axioma de homotopía**:

Sean $f, g : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$. Si $f \simeq g$ entonces

$$H_q(f) = H_q(g), \forall q \in \mathbb{Z}.$$

A5) **Axioma de exactitud:**

Para cada par topológico (X, A), existe una sucesión exacta larga (de grupos abelianos y homomorfismos)

$$\cdots \longrightarrow H_{q+1}(X, A) \xrightarrow{\partial_{q+1}} H_q(A, \emptyset) \xrightarrow{H_q(i)} H_q(X, \emptyset) \xrightarrow{H_q(j)} H_q(X, A) \xrightarrow{\partial_q} H_{q-1}(A, \emptyset) \longrightarrow \cdots$$

Llamada SUCESIÓN DE HOMOLOGÍA del par (X, A).

Donde:

$$i : (A, \emptyset) \hookrightarrow (X, \emptyset)$$
$$j : (X, \emptyset) \hookrightarrow (X, A)$$

son las aplicaciones de inclusión.

A6) **Axioma de Escisión:**

Sea (X, A) un par topológico. Si U es un abierto en X tal que $\overline{U} \subseteq int(A)$ y $j : (X \setminus U, A \setminus U) \hookrightarrow (X, A)$ entonces

$$H_q(j) : H_q(X \setminus U, A \setminus U) \longrightarrow H_q(X, A) \text{ es un isomorfismo, } \forall q \in \mathbb{Z}.$$

j es denominada una ESCISIÓN.

A7) **Axioma de la Dimensión:**

Si P es el espacio topológico formado por un único punto, entonces

$$H_q(P) = 0, \forall q \neq 0. \text{ } (H_0(P) \text{ es llamado el grupo de coeficientes})$$

$H_q(X, A)$ es llamado EL GRUPO DE HOMOLOGÍA $q-$dimensional de (X, A) , $H_q(f)$ es llamado EL HOMOMORFISMO INDUCIDO por f y ∂_q es conocido como el HOMOMORFISMO DE CONEXIÓN.

Observación:

Si sólo se satisfacen los axiomas $A1), A2), A3), A4), A5), A6)$ se dice que H es una TEORÍA DE HOMOLOGÍA GENERALIZADA.

Proposición 1.27:

Sean X e Y espacios topológicos. Si $X \simeq Y$ entonces

$$H_q(X) \cong H_q(Y), \forall q \in \mathbb{Z}.$$

Demostración:

Resulta de los axiomas $A4), A2)$ y $A1)$.

■

Definición 1.28:

Una aplicación continua $P : E \longrightarrow B$ se dice que es una FIBRACIÓN LOCALMENTE TRIVIAL con fibra F si para cada punto $b \in B$ existe una vecindad abierta U de b y un homeomorfismo

$$\varphi_U : U \times F \longrightarrow P^{-1}(U)$$

que hace conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
U \times F \arrow[rr, "\varphi_U"] \arrow[dr, "P_1"'] & {} \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & P^{-1}(U) \arrow[dl, "P_U"] \\
& U &
\end{tikzcd}$$

donde P_1 es la proyección en el primer factor y $P_U = P|_{P^{-1}(U)} : P^{-1}(U) \longrightarrow U$ es la aplicación restricción.

1.2 Preliminares Algebráicos

Definición 1.29 (Acción de un grupo en un espacio)

Dado un espacio topológico X y un grupo G. Decimos que G ACTÚA(por la izquierda) sobre X o X es un $G-$espacio si existe una aplicación $\Phi : G \times X \longrightarrow X$ que satisface:

i) $\Phi(e, x) = x, \forall x \in X$. Donde $e \in G$ es la identidad del grupo.

ii) $\Phi(g_1, \Phi(g_2, x)) = \Phi(g_1 g_2, x), \forall g_1, g_2 \in G, \forall x \in X$

iii) Para cada $g \in G$ la aplicación

$$\begin{array}{rccl} \Phi_g : & X & \longrightarrow & X \\ & x & \longmapsto & \Phi_g(x) = \Phi(g, x) \end{array} \quad \text{es continua.}$$

A la aplicación Φ se le llamará ACCIÓN de G en X.

Definición 1.30 (órbita y estabilizador)

Dada Φ una acción de G en X. Para cada $x \in X$, la ÓRBITA de x, se define como el conjunto

$$O(x) =: \{\Phi(g,x) \in X : g \in G\}$$

El ESTABILIZADOR (o isotropía) de x, se define como el conjunto

$$E_x =: \{g \in G : \Phi(g,x) = x\}$$

Proposición 1.31

Dada Φ una acción de G en X. E_x es un subgrupo de $G, \forall x \in X$.

Demostración:

Fijemos $x \in X$. Sean $g_1, g_2 \in E_x$. Veamos que $g_1, g_2^{-1} \in E_x$. De hecho, tenemos

$$\Phi(g_1,x) = x, \quad \Phi(g_2,x) = x.$$

Por otro lado,

$$x = \Phi(e,x) = \Phi(g_2^{-1}g_2, x) = \Phi(g_2^{-1}, \Phi(g_2,x)) = \Phi(g_2^{-1}, x)$$

Así

$$\Phi(g_2^{-1}, x) = x$$

Luego

$$\Phi(g_1g_2^{-1}, x) = \Phi(g_1, \Phi(g_2^{-1}, x)) = \Phi(g_1, x) = x$$

Entonces

$$g_1g_2^{-1} \in E_x.$$

■

Proposición 1.32

Dada Φ una acción de G en X. Sean $x, y \in X$ entonces $O(x) \cap O(y) = \emptyset \vee O(x) = O(y)$.

Demostración:

Si $O(x) \cap O(y) = \emptyset$. No hay nada que probar.

Si $O(x) \cap O(y) \neq \emptyset$ entonces $\exists a \in O(x) \cap O(y)$ luego

$$a = \Phi(g_1, x), \text{ para algún } g_1 \in G$$
$$a = \Phi(g_2, y), \text{ para algún } g_2 \in G$$

Luego

$$\Phi(g_1^{-1}g_2, y) = \Phi(g_1^{-1}, \Phi(g_2, y)) = \Phi(g_1^{-1}, \Phi(g_1, x)) = \Phi(g_1^{-1}g_1, x) = \Phi(e, x) = x$$

Así

$$\Phi(g_1^{-1}g_2, y) = x.$$

Similarmente

$$\Phi(g_2^{-1}g_1, x) = \Phi(g_2^{-1}, \Phi(g_1, y)) = \Phi(g_2^{-1}, \Phi(g_2, y)) = \Phi(g_2^{-1}g_2, y) = \Phi(e, y) = y$$

Así

$$\Phi(g_2^{-1}g_1, x) = y.$$

Veamos

$$O(x) = O(y).$$

En efecto

sea $z \in O(x)$ entonces

$$z = \Phi(g, x), \text{ para algún } g \in G$$

entonces

$$z = \Phi(g, \Phi(g_1^{-1}g_2, y)) = \Phi(gg_1^{-1}g_2, y) \in O(y).$$

De ahí

$$O(x) \subseteq O(y). \dots (1)$$

Ahora, sea $z \in O(y)$ entonces

$$z = \Phi(g, y), \text{ para algún } g \in G$$

entonces

$$z = \Phi(g, \Phi(g_2^{-1}g_1, x)) = \Phi(gg_2^{-1}g_1, x) \in O(x).$$

Luego

$$O(y) \subseteq O(x). \dots (2)$$

De (1) y (2) se tiene

$$O(x) = O(y)$$

$\blacksquare$

En X definamos la relación $'' \sim''$ de la siguienete manera:

$$\text{Para } x, y \in X : x \sim y \Longleftrightarrow x, y \in O(z), \text{ para algún } z \in X$$

Proposición 1.33

$$'' \sim'' \text{ es una relación de equivalencia sobre } X.$$

Demostración:

$'' \sim''$ es reflexiva:

De hecho, para $x \in X$se tiene

$$x = \Phi(e, x) \in O(x)$$

entonces

$$x, x \in O(x)$$

De ahí

$$x \sim x.$$

$'' \sim''$ es simétrica:

De hecho,sean $x, y \in X$ tal que $x \sim y$ entonces

$$x, y \in O(z) \text{ para algún } z \in X$$

Luego

$$y, x \in O(z) \text{ para algún } z \in X$$

Así

$$y \sim x.$$

$'' \sim''$ es transitiva:

De hecho,sean $x, y, z \in X$ tal que $x \sim y \wedge y \sim z$ entonces

$$x, y \in O(z_1) \wedge y, z \in O(z_2), \text{ para algunos } z_1, z_2 \in X.$$

Luego

$$y \in O(z_1) \cap O(z_2)$$

entonces

$$O(z_1) \cap O(z_2) \neq \phi.$$

Entonces por la proposición 1.19

$$O(z_1) = O(z_2).$$

Luego

$$x, z \in O(z_1)$$

Así

$$x \sim z.$$

■

Proposición 1.34

$$[x] = O(x), \forall x \in X.$$

Donde

$$[x] = \{y \in X : x \sim y\}$$

Demostración:

Fijemos $x \in X$. Veamos

$$[x] = O(x)$$

En efecto, sea $y \in [x]$entonces

$$x \sim y$$

luego

$$x, y \in O(z) \text{ para algún } z \in X$$

entonces

$$x \in O(z) \cap O(x)$$

Luego

$$O(z) \cap O(x) \neq \phi.$$

De ahí, por la proposición 1.19

$$O(z) = O(x)$$

entonces

$$y \in O(x).$$

Así

$$[x] \subseteq O(x) \cdots (1)$$

Ahora, sea $y \in O(x)$ como $x \in O(x)$entonces

$$x, y \in O(x)$$

luego

$$x \sim y$$

entonces

$$y \in [x].$$

Así

$$O(x) \subseteq [x] \cdots (2)$$

De (1) y (2) tenemos

$$O(x) = [x].$$

$\sharp$

Proposición 1.35

Si $\Phi : G \times X \longrightarrow X$ es una acción de G en X, entonces para cada $g \in G$ la aplicación

$$\begin{array}{cccc} \Phi_g : & X & \longrightarrow & X \\ & x & \mapsto & \Phi_g(x) = \Phi(g, x) \end{array}$$

es una biyección.

Demostración

Considerando

$$\begin{array}{cccc} \Phi_{g^{-1}} : & X & \longrightarrow & X \\ & x & \mapsto & \Phi_{g^{-1}}(x) = \Phi(g^{-1}, x) \end{array}$$

aplicación. Se tiene

$$\begin{array}{c} \Phi_g \circ \Phi_{g^{-1}} = id_X \\ \Phi_{g^{-1}} \circ \Phi_g = id_X \end{array}$$

De ahí Φ_g es una biyección.

$\blacksquare$

Corolario

Si $\Phi : G \times X \longrightarrow X$ es una acción de G en X, entonces para cada $g \in G$ la aplicación

$$\begin{array}{cccc} \Phi_g : & X & \longrightarrow & X \\ & x & \mapsto & \Phi_g(x) = \Phi(g, x) \end{array}$$

es un homeomorfismo.

Definición 1.36

Si X es un $G-$espacio, entonces

$$\frac{X}{\sim} = \{O(x) : x \in X\}$$

dotado con la topología cociente, es llamado el ESPACIO DE ÓRBITAS de X y es denotado por $\dfrac{X}{G}$.

Proposición 1.37

Sea X un $G-$espacio. Para cada $x \in X$ se tiene

$$\begin{array}{rccl} \alpha_x : & \dfrac{G}{E_x} & \longrightarrow & O(x) \\ & [g] & \mapsto & \alpha_x([g]) = \Phi(g,x) \end{array}$$

es una biyección.

Donde:

$$-\Phi \text{ es la acción de } G \text{ en } X.$$

$$-[g] = \{g_1 \in G : g_1^{-1}g \in E_x\}$$

Demostración:

Fijemos $x \in X$.

Veamos que α_x está bien definida, en efecto,

si $g_1 \in [g]$ entonces

$$g_1^{-1}g \in E_x$$

luego por definición de E_x

$$\Phi(g_1^{-1}g, x) = x.$$

luego

$$\Phi(g_1, x) = \Phi(g_1, \Phi(g_1^{-1}g, x)) = \Phi(g_1 g_1^{-1} g, x) = \Phi(eg, x) = \Phi(g, x)$$

entonces

$$\alpha_x([g_1]) = \alpha_x([g]).$$

Ahora veamos que α_x es inyectiva, en efecto,

si $\alpha_x([g_1]) = \alpha_x([g_2])$ entonces

$$\Phi(g_1, x) = \Phi(g_2, x).$$

Luego

$$\Phi(g_2^{-1}g_1, x) = \Phi(g_2^{-1}, \Phi(g_1, x)) = \Phi(g_2^{-1}, \Phi(g_2, x)) = \Phi(g_2^{-1}g_2, x) = \Phi(e, x) = x.$$

entonces

$$g_2^{-1}g_1 \in E_x$$

luego

$$g_2 \in [g_1]$$

entonces

$$[g_2] = [g_1].$$

Finalmente veamos que α_x es sobreyectiva, en efecto.

Sea $y \in O(x)$ entonces

$$y = \Phi(g, x), \text{ para algún } g \in G.$$

Luego

$$[g] \in \frac{G}{E_x} \text{ y además } \alpha_x([g]) = \Phi(g, x) = y.$$

Por lo tanto

$$\alpha_x \text{ es una biyección.}$$

$\blacksquare$

Proposición 1.38

Si X es un $G-$espacio entonces la proyección al cociente

$$\pi : X \longrightarrow \frac{X}{G} \text{ es una aplicación abierta.}$$

Definición 1.39

Sea X un $G-$espacio. Se dice que G ACTÚA LIBREMENTE SOBRE X o la acción de G sobre X es LIBRE si $E_x = \{e\}, \forall x \in X$.

Definición 1.40

Se dice que la acción Φ de G sobre X es PROPIAMENTE DISCONTINUA si para cada $x \in X$ existe una vecindad abierta V_x de x en X tal que

$$\Phi_g(V_x) \cap \Phi_h(V_x) = \emptyset, \forall g, h \in G \text{ con } g \neq h.$$

Observación:

La condición

$$\Phi_g(V_x) \cap \Phi_h(V_x) = \emptyset, \forall g, h \in G \text{ con } g \neq h.$$

es equivalente a

$$\Phi_g(V_x) \cap V_x = \emptyset, \forall g \in G \text{ con } g \neq e.$$

Proposición 1.40

Sea X un $G-$espacio. Si la ación de G sobre X es propiamente discotinua entonces la aplicación proyección al cociente

$$P : X \longrightarrow \frac{X}{G}$$

es una aplicación cubriente.

Proposición 1.41

Toda acción propiamente discontinua es libre.

Proposición 1.42

Sean X un espacio de Hausdorff y G un grupo finito. Si X es un $G-$espacio y la acción de G sobre X es libre entonces dicha acción es propiamente discontinua.

Definición 1.43

El GRUPO SIMÉTRICO sobre un conjunto $X \neq \emptyset$, denotado por S_X, se define como el conjunto

$$S_X = \{f : X \longrightarrow Y : f \text{ es biyección}\}$$

Observaciones:

1. S_X es un grupo, con la operación usual de composición de aplicaciones.
2. A cada elemento de S_X se le llama PERMUTACIÓN.
3. Los subgrupos de S_X se denominan GRUPOS DE PERMUTACIONES.
4. Si $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ conjunto finito. El grupo simétrico S_X es denotado por S_n, el cual tiene orden $n!$ y no es Abeliano para $n \geq 3$. S_n se denomina el GRUPO SIMÉTRICO DE GRADO n O GRUPO SIMÉTRICO SOBRE $n-$LETRAS y sus elementos se denominan PERMUTACIONES del conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$, denotados

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

con

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix} \text{ elemento identidad de } S_n.$$

Proposición 1.44

Sea

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow L \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta de morfismos de A-módulos.Si L es A-módulo libre entonces la sucesión es escindible, esto es, $N \cong M \oplus L$.

Corolario

Si

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow G \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta de morfismos de grupos abelianos, entonces $G \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Demostración

Note que todo grupo abeliano es un $\mathbb{Z}-$módulo y además $\mathbb{Z}$ es un $\mathbb{Z}-$módulo libre. Luego aplicando la proposición anterior se sigue el resultado.

$\blacksquare$

Capítulo 2.-Espacio de Configuraciones

2.1 Espacio de Configuraciones Ordenado

Definición 2.1:

Sea M un conjunto no vacío. Para $k \geq 1$ se define el siguiente conjunto,

$$Conf(M,k) =: \{(m_1, m_2, ..., m_k) \in M^k : m_i \neq m_j, \forall i \neq j\} \subseteq M^k$$

Donde

$$M^k = \underbrace{M \times \cdots \times M}_{k-veces} \; k\text{−ésimo producto cartesiano de } M.$$

Observaciones

1. Si $\mid M \mid < k$ entonces $Conf(M,k) = \emptyset$

   Donde

   $$\mid M \mid\text{: denota el órden o número de elementos del conjunto } M.$$

2. Si $\mid M \mid \geq k$ entonces $Conf(M,k) \neq \phi$.

3. $Conf(M,1) = M$

4. $Conf(M,2) = M \times M \setminus \Delta_M$

   Donde

   $$\Delta_M = \{(m_1, m_2) \in M^2 : m_1 = m_2\} \text{ es la diagonal de } M \times M.$$

Definición 2.2:

En la definición 2.1 si M es un espacio topológico entonces $Conf(M,k)$ es un subespacio (con la topología relativa) de M^k. El cual es denominado EL ESPACIO DE CONFIGURACIONES ORDENADO de $k-$puntos distintos de M ó simplemente el ESPACIO DE CONFIGURACIONES para M.

Ejemplo 2.1

$$Conf(\mathbb{R}^n, 2) \simeq \mathbb{S}^{n-1}, \forall n \geq 1$$

Demostración:

Definamos

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{S}^{n-1} & \longrightarrow & Conf(\mathbb{R}^n, 2) \\ & x & \mapsto & f(x) = (x, 0) \end{array}$$

y

$$\begin{array}{rccc} g: & Conf(\mathbb{R}^n, 2) & \longrightarrow & \mathbb{S}^{n-1} \\ & (x, y) & \mapsto & g(x, y) = \frac{x-y}{\|x-y\|} \end{array}$$

aplicaciones continuas. Además:

Para $x \in \mathbb{S}^{n-1}$. Tenemos:

$$g \circ f(x) = g(x, 0) = \tfrac{x-0}{\|x-0\|} = \tfrac{x}{\|x\|} = x = id_{\mathbb{S}^{n-1}}(x) \cdots (1)$$

Para $(x, y) \in Conf(\mathbb{R}^n, 2)$. Tenemos:

$$f \circ g(x, y) = f(\tfrac{x-y}{\|x-y\|}) = (\tfrac{x-y}{\|x-y\|}, 0) \neq id_{Conf(\mathbb{R}^n,2)}(x, y)$$

Veamos que

$$f \circ g \simeq id_{Conf(\mathbb{R}^n,2)}.$$

En efecto,

Definamos

$$\begin{array}{rccc} H: & Conf(\mathbb{R}^n, 2) \times I & \longrightarrow & Conf(\mathbb{R}^n, 2) \\ & (x, y, t) & \mapsto & H(x, y, t) = (t(\dfrac{x-y}{\| x-y \|} - x) + x, (1-t)y) \end{array}$$

H está bien definida, pues si

$$t(\frac{x-y}{\| x-y \|} - x) + x = (1-t)y$$

entonces

$$[t(\frac{1}{\| x-y \|} - 1) + 1](x-y) = 0$$

Como $x \neq y$ se sigue

$$t(\frac{1}{\| x-y \|}-1)+1=0$$

entonces

$$t(1-\| x-y \|)+\| x-y \|=0$$

Si $\| x-y \|=1$ entonces

$$\| x-y \|=0 \text{ **¡contradicción!**}$$

Si $\| x-y \|\neq 1$ entonces

$$t=\frac{\| x-y \|}{\| x-y \|-1}$$

Si $\| x-y \|<1$ entonces

$$t<0 \text{ **¡contradicción!**}$$

Si $\| x-y \|>1$ entonces

$$\frac{\| x-y \|}{\| x-y \|-1}=t\leq 1$$

entonces

$$\| x-y \|\leq\| x-y \|-1$$

luego

$$1\leq 0 \text{ **¡contradicción!**}$$

Por lo tanto H está bien definida.

Además es inmediato que H es continua.

De ahí:

$$H: f\circ g\simeq id_{Conf(\mathbb{R}^n,2)}$$

Esto es

$$f\circ g\simeq id_{Conf(\mathbb{R}^n,2)}\cdots(2)$$

Finalmente de (1) y (2)

$$Conf(\mathbb{R}^n, 2) \simeq \mathbb{S}^{n-1} \forall n \geq 1$$

$\blacksquare$

Corolario

1. $Conf(\mathbb{R}, 2) \simeq \mathbb{S}^0 = \{-1, 1\}$
2. $\pi_1(Conf(\mathbb{R}^n, 2)) = \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 2 \\ 0 & n \geq 3 \end{cases}$
3. $H_q(Conf(\mathbb{R}^n, 2)) = \begin{cases} \mathbb{Z} & q = 0, n-1 \\ 0 & q \text{ otro caso} \end{cases}$
4. $Conf(\mathbb{C}^n, 2) \simeq \mathbb{S}^{2n-1} \quad , \forall n \geq 1.$
5. $Conf(\mathbb{C}, 2) \simeq \mathbb{S}^1$
6. $\pi_1(Conf(\mathbb{C}^n, 2)) = \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 1 \\ 0 & n \geq 2 \end{cases}$
7. $H_q(Conf(\mathbb{C}^n, 2)) = \begin{cases} \mathbb{Z} & q = 0, 2n-1 \\ 0 & q \text{ otro caso} \end{cases}$

Ejemplo 2.2

$$Conf(\mathbb{R}^n, 2) \simeq \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

En efecto:

Definamos

$$\begin{array}{rccl} f: & Conf(\mathbb{R}^n, 2) & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \\ & x & \mapsto & f(x, y) = x - y \end{array}$$

y

$$\begin{array}{rccl} g: & \mathbb{R}^n \setminus \{0\} & \longrightarrow & Conf(\mathbb{R}^n, 2) \\ & x & \mapsto & g(x) = (x, 0) \end{array}$$

aplicaciones continuas. Además

$$f \circ g \simeq id_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$$

$$g \circ f \simeq id_{Conf(\mathbb{R}^n, 2)}$$

$\blacksquare$

Observación

Del ejemplo 2.1 y 2.2, además por la simetría y transitividad de la equivalencia homotópica se tiene:

$$\mathbb{S}^{n-1} \simeq \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

Ejemplo 2.3

$$Conf(\mathbb{S}^n, 2) \simeq \mathbb{S}^n$$

En efecto:

Definamos

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{S}^n & \longrightarrow & Conf(\mathbb{S}^n, 2) \\ & x & \mapsto & f(x) = (x, -x) \end{array}$$

y

$$\begin{array}{rccc} g: & Conf(\mathbb{S}^n, 2) & \longrightarrow & \mathbb{S}^n \\ & (x, y) & \mapsto & g(x, y) = x \end{array}$$

aplicaciones continuas. Además

$$f \circ g \simeq id_{Conf(\mathbb{S}^n,2)}$$
$$g \circ f \simeq id_{\mathbb{S}^n}$$

$\blacksquare$

Corolario:

1. $\pi_1(Conf(\mathbb{S}^n, 2)) = \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 1 \\ 0, & n \geq 2 \end{cases}$

2. $H_q(Conf(\mathbb{S}^n, 2)) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0, n \\ 0, & q \text{ otro caso} \end{cases}$

Ejemplo 2.4

$$Conf(\mathbb{S}^n, 2) \simeq Conf(\mathbb{R}^{n+1}, 2)$$

Ejemplo 2.5

$$Conf(\mathbb{R}^n, k) \approx \mathbb{R}^n \times Conf(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, k-1)$$

Demostración:

Definamos

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & Conf(\mathbb{R}^n, k) & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \times Conf(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, k-1) \\ & (m_1, m_2, ..., m_k) & \mapsto & \varphi(m_1, m_2, ..., m_k) = (m_1, m_2 - m_1, ..., m_k - m_1) \end{array}$$

y

$$\begin{array}{rccl} \psi: & \mathbb{R}^n \times Conf(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, k-1) & \longrightarrow & Conf(\mathbb{R}^n, k) \\ & (m_1, m_2, ..., m_k) & \mapsto & \psi(m_1, m_2 + m_1, ..., m_k + m_1) \end{array}$$

aplicaciones continuas. Además

$$\varphi \circ \psi = id_{\mathbb{R}^n \times Conf(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, k-1)}$$
$$\psi \circ \varphi = id_{Conf(\mathbb{R}^n, k)}$$

■

Observación

1. $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \simeq \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$

2. $\mathbb{S}^n \simeq \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{S}^n$

Proposición 2.1:

Sea M un espacio topológico. Si N es subespacio de M entonces $Conf(N, k)$ es subespacio de $Conf(M, k)$.

Proposición 2.2:

Sean X, Y espacios topológicos. Si $X \approx Y$ entonces $Conf(X, k) \approx Conf(Y, k), \forall k \geq 1$

Corolario

Sean X, Y espacios topológicos. Si $Conf(X, k) \not\simeq Conf(Y, k)$, para algún $k \geq 1$ entonces $X \not\approx Y$

Ejemplo 2.6

$$Conf(\mathbb{S}^n \setminus \{\star\}, 2) \simeq Conf(\mathbb{S}^{n-1}, 2)$$

Ejemplo 2.7

$$Conf(\mathbb{S}^n \setminus \{\star\}, k) \approx \mathbb{R}^n \times Conf(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, k-1)$$

Observación 2.1
La configuración no respeta homotopías, esto es, si $X \simeq Y$ no implica que $Conf(X,k) \simeq Conf(Y,k), \forall k \geq 1$. De hecho, sabemos que $\mathbb{R} \simeq \{\star\}$, pero

$$Conf(\mathbb{R}, 2) \neq \emptyset \text{ y } Conf(\{\star\}, 2) = \emptyset.$$

Problema 1.-

¿Si $Conf(X,k) \approx Conf(Y,k) \quad , \forall k \geq 1$ entonces $X \approx Y$?

Problema 2.-

¿Si $Conf(X,k) \simeq Conf(Y,k) \quad , \forall k \geq 1$ entonces $X \simeq Y$?

Proposición 2.3
Sea M un espacio topológico de Hausdorff, entonces $Conf(M,n)$ es de Hausdorff, $\forall n \geq 1$.

Demostración:
Sea $n \geq 1$. Por la proposición 2, tenemos M^n es de Hausdorff. Luego como $Conf(M,n)$ es un subespacio de M^n entonces por la propossición 3, $Conf(M,n)$ es he Hausdorff.

$\blacksquare$

2.2 Espacio de Configuraciones no Ordenado

Proposición 2.4

El grupo simétrico sobre $n-$letras, S_n, actúa sobre $Conf(M,n)$ permutando coordenadas. Esto es,

$$\begin{array}{rccl} \Phi : & S_n \times Conf(M,n) & \longrightarrow & Conf(M,n) \\ & (\sigma, (m_1, m_2, ..., m_k)) & \mapsto & \Phi(\sigma, (m_1, m_2, ..., m_k)) = (m_{\sigma(1)}, m_{\sigma(2)}, ..., m_{\sigma(k)}) \end{array}$$

es una acción de S_n sobre $Conf(M,n)$.

Demostración:

Claramente Φ está bien definida, pues permuta coordenadas de $Conf(M,n)$.

Además:

i) Para $e \in S_n$ elemento identidad, $(m_1, m_2, ..., m_n) \in Conf(M,n)$ se tiene

$$\Phi(e, (m_1, m_2, ..., m_n)) = (m_{e(1)}, m_{e(2)}, ..., m_{e(n)}) = (m_1, m_2, ..., m_n)$$

ii) Para $\sigma, \alpha \in S_n, (m_1, m_2, ..., m_n) \in Conf(M,n)$.

$\Phi(\sigma, \Phi(\alpha, (m_1, m_2, ..., m_n))) = (m_{\sigma \circ \alpha(1)}, m_{\sigma \circ \alpha(2)}, ..., m_{\sigma \circ \alpha(n)}) = \Phi(\sigma \circ \alpha, (m_1, m_2, ..., m_n))$

iii) Para cada $\sigma \in S_k$ la aplicación

$$\begin{array}{rccl} \Phi_\sigma : & Conf(M,n) & \longrightarrow & Conf(M,n) \\ & (m_1, m_2, ..., m_n) & \mapsto & \Phi_\sigma(m_1, m_2, ..., m_n) = \Phi(\sigma, (m_1, m_2, ..., m_n)) \\ & & & = (m_{\sigma(1)}, m_{\sigma(2)}, ..., m_{\sigma(n)}) \end{array}$$

es continua.

Demostración:

Sea U abierto en $Conf(M,n)$, tomemos $(m_1, m_2, ..., m_n) \in \Phi_\sigma^{-1}(U)$ entonces $(m_{\sigma(1)}, m_{\sigma(2)}, ..., m_{\sigma(n)}) \in U$. Como U es abierto en $Conf(M,n)$ entonces existe

$$U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n \text{ vecindad abierta de } (m_{\sigma(1)}, m_{\sigma(2)}, ..., m_{\sigma(n)}) \text{ en } Conf(M,n)$$

tal que

$$(m_{\sigma(1)}, m_{\sigma(2)}, ..., m_{\sigma(n)}) \in U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n \subseteq U$$

De ahí,

$$(m_1, m_2, ..., m_n) \in \underbrace{U_{\sigma^{-1}(1)} \times U_{\sigma^{-1}(2)} \times \cdots \times U_{\sigma^{-1}(n)}}_{abierto} \subseteq \Phi_\sigma^{-1}(U)$$

Así, $\Phi_\sigma^{-1}(U)$ es abierto en $Conf(M, n)$.

■

Por lo tanto S_n actúa sobre $Conf(M, n)$.

■

Entonces $Conf(M, n)$ es un S_n-espacio topológico. Luego existe el espacio de órbitas $\frac{Conf(M,n)}{S_n}$ al cual se le conoce como el ESPACIO DE CONFIGURACIONES NO ORDENADO con $n-$puntos de M.

Observación 2.2:

1. $Conf(M, n) = \coprod_{x \in Conf(M,n)} O(x)$

2. Por defínción

$$\frac{Conf(M,n)}{S_n} = \{O(x) : x \in Conf(M, n)\}$$

Donde

$$O(x) = \{\Phi(\sigma, x) : \sigma \in S_n\} \text{ es la órbita de } x.$$

Si $x = (m_1, m_2, ..., m_n) \in Conf(M, n)$, tenemos

$$O(x) = \{(m_{\sigma(1)}, m_{\sigma(2)}, ..., m_{\sigma(n)}) \in Conf(M, n) : \sigma \in S_n\}$$

Además:

$$E_x = \{\sigma \in S_n : \Phi(\sigma, x) = x\} = \{\sigma \in S_n : m_{\sigma(i)} = m_i, \forall i \in \{1, 2, ..., n\}\} = \{e\}$$

Luego

$$E_x = \{e\}, \forall x \in Conf(M,n).$$

Por lo tanto S_n actúa libremente sobre $Conf(M,n)$.

Entonces

$$\frac{S_n}{E_x} = \{[\sigma] : \sigma \in S_n\}.$$

Donde

$$[\sigma] = \{\delta \in S_n : \sigma \circ \delta^{-1} \in E_x = \{e\}\} = \{\delta \in S_n : \sigma \circ \delta^{-1} = e\} = \{\delta \in S_n : \sigma = \delta\}$$

$= \{\sigma\}$.

Luego

$$\frac{S_n}{E_x} = \{\{\sigma\} : \sigma \in S_n\}$$

Por la proposición 3.5

$$\{\{\sigma\} : \sigma \in S_n\} \equiv O(x), \forall x \in Conf(M,n)$$

De ahí

$$O(x) \equiv O(y), \forall x, y \in Conf(M,n).$$

Cuya biyección es

$$\begin{array}{rccl} \alpha : & O(x) & \longrightarrow & O(y) \\ & (x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(n)}) & \mapsto & \alpha(x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(n)}) = (y_{\sigma(1)}, \cdots, y_{\sigma(n)}) \end{array}$$

(α es biyección por proposición 3.5)

Con $x = (x_1, \cdots, x_n), y = (y_1, \cdots, y_n) \in Conf(M,n)$.

Además $O(x)$ es un conjunto finito con $n!$ elementos, luego es trivialmente compacto, $\forall x \in Conf(M,n)$.

¿$O(x) \approx O(y), \forall x, y \in Conf(M,n)$? $\cdots (\Delta)$

Para dar respuesta a la pregunta anterior, veamos algunos resultados.

Si M es de Hausdorff entonces por la proposición 2.3 $Conf(M,n)$ es de Hausdorff $\forall n \geq 1$.
Luego para $x \in Conf(M,n)$

$$O(x) \subseteq Conf(M,n) \text{ es un subespacio,}$$

de ahí

$$O(x) \text{ es de Hausdorff, } \forall x \in Conf(M,n)$$

También, para $x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n) \in Conf(M,n)$

$$\begin{array}{rccl} \alpha : & O(x) & \longrightarrow & O(y) \\ & (x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(n)}) & \mapsto & \alpha(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(n)}) = (y_{\sigma(1)}, ..., y_{\sigma(n)}) \end{array}$$

es aplicación biyectiva.
Luego

$$G_\alpha = \{((x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(n)}), (y_{\sigma(1)}, ..., y_{\sigma(n)})) : \sigma \in S_n\} \subseteq O(x) \times O(y)$$

Como $O(x), O(y)$ son de Hausdorff, por la proposición 2,

$$O(x) \times O(y) \text{ es de Hausdorff.}$$

Además como G_α es finito, entonces trivialmente es compacto. Luego

$$G_\alpha \text{ es cerrado}$$

Luego se tiene que

$$\alpha \text{ es continua}$$

Finalmente

$$\alpha \text{ es un homeomorfismo}$$

Por lo tanto

$$O(x) \approx O(y), \forall x, y \in Conf(M,n), \forall n \geq 1 \text{ con } M \text{ espacio de Hausdorff.}$$

■

Proposición 2.5

Sean M un espacio de Hausdorff y $k \in \mathbb{N}$. Entonces la aplicación proyección al cociente

$$\begin{array}{rccc} \pi: & conf(M,k) & \longrightarrow & \dfrac{conf(M,k)}{S_k} \\ & x & \mapsto & \pi(x) = O(x) \end{array}$$

es una aplicación cubriente.

Ahora se estudiará a un objeto que está muy relacionado con los espacios de configuraciones.

Capítulo 3.-Trenzas de Artin

Sean x, y, z las coordenadas cartesianas de $\mathbb{R}^3$.

Definición 3.1:

Una curva $C \subset \mathbb{R}^3$ es un conjunto de puntos en el espacio que puede describirse mediante un parámetro que varía en forma continua en un intervalo de la recta real.

Más precisamente, C es una CURVA si existen funciones reales continuas $x(t), y(t), z(t)$ definidas en algún intervalo $I \subset \mathbb{R}$ tales que: $(x, y, z) \in C$ si y sólo si $\exists t \in I$ tal que

$$\begin{cases} x = x(t) \\ \\ y = y(t) \\ \\ z = z(t) \end{cases}$$

Definamos la aplicación

$$\begin{array}{rccl} \sigma: & I \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & t & \mapsto & \sigma(t) = (x(t), y(t), z(t)) \end{array}$$

Entonces C es la imágen por σ del intervalo I. Esto es $\sigma(I) = C$. De ahí σ es una PARAMETRIZACIÓN para la curva C.

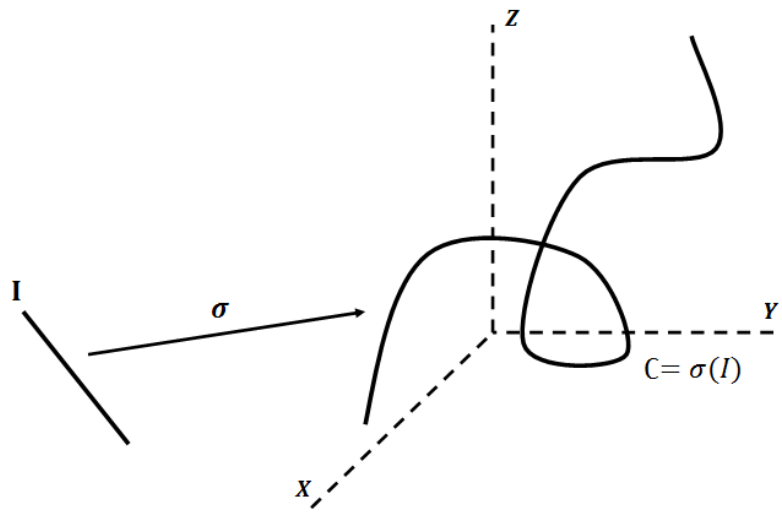


Figura 3: Curva C

Definición 3.2:

Una CUERDA TRENZADA (o simplemente una cuerda) es una curva C que tiene exactamente un punto de intersección con cada plano $z = a$, así z será usado como parámetro , es decir, si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es una parametrización de la curva C, se tiene

$$f(\mathbb{R}) \cap (z = a) = \{f(a)\}, \forall a \in \mathbb{R}.$$

De ahí se puede observar fácilmente que si

$$f(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

entonces

$$z(t) = t, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Luego, denotando por X al vector bidimensional (x, y) y teniendo en cuenta la observación anterior, describiremos la CUERDA por una función vectorial continua $X = X(z)$, además asumiremos la existencia de dos constantes a, b tal que $X(z)$ asume un valor constante X^- para todo $z \leq a$ y un valor constante X^+ para todo $z \geq b$.
Esto es, una CUERDA es una curva que está descrita por

$$\begin{array}{rccl} X: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & z & \mapsto & X(z) = (x(z), y(z)) \end{array}$$

aplicación continua tal que $\exists a, b \in \mathbb{R}$ con

$$X(z) = X^+, \forall z \geq b$$
$$X(z) = X^-, \forall z \leq a$$

Diremos que $X(z)$ es la cuerda trenzada y X^+, X^- son llamados los EXTREMOS DE LA CUERDA $X(z)$.
Una CUERDA TRIVIAL es cuando $a = b$. Esto es

$$\begin{array}{rccl} X: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & z & \mapsto & X(z) = (x(z), y(z)) \end{array}$$

es una aplicación tal que $X(z) = X^+ = X^-, \forall z \in \mathbb{R}$.

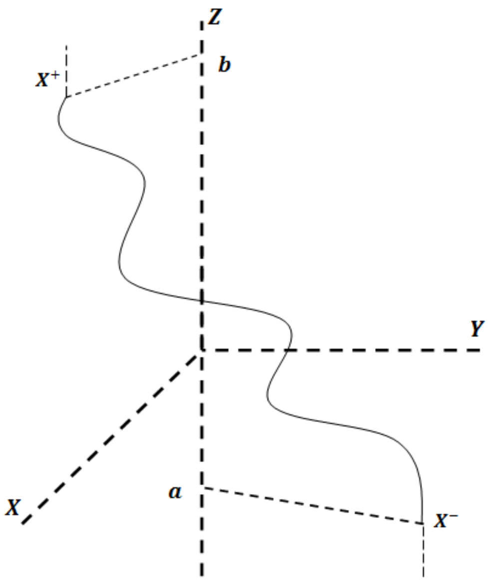


Figura 4: Cuerda

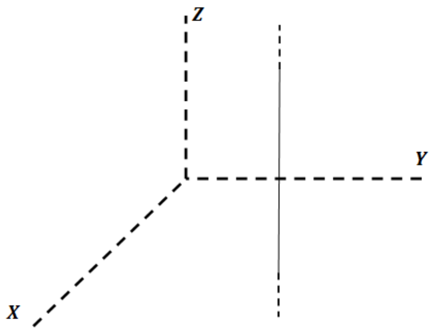


Figura 5: Cuerda trivial

Definición 3.3:

Una $n-$TRENZA o una TRENZA CON $n-$CUERDAS es un conjunto de $n-$cuerdas

$$X_i(z)(i = 1, 2, \cdots, n)$$

sin intersecciones (esto es, $X_i(z) \neq X_j(z), \forall 1 \leq i \neq j \leq n, \forall z \in \mathbb{R}$). Donde la enumeración de las cuerdas es considerada no esencial.

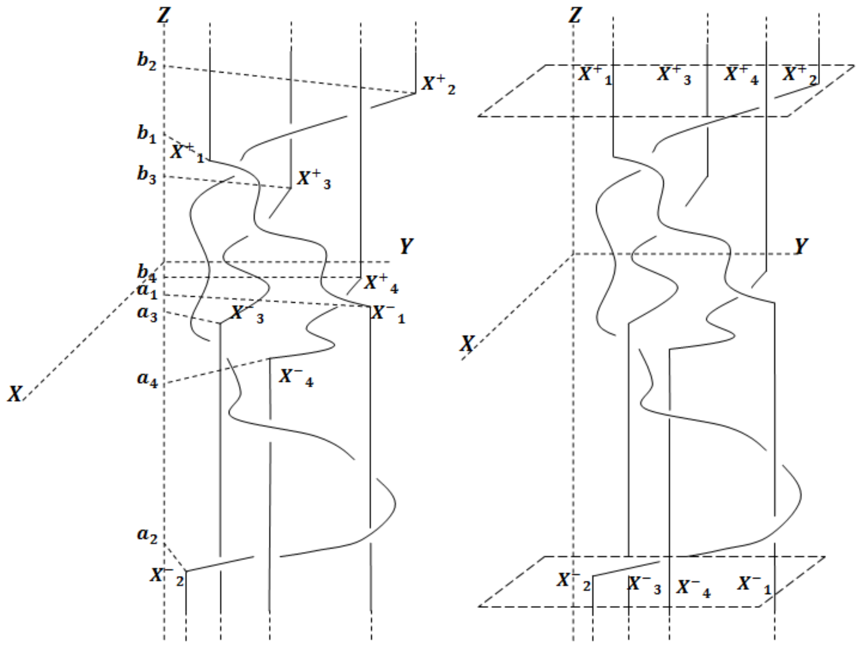


Figura 6: Una 4-trenza

Definición 3.4:

Dos $n-$trenzas $X_i(z)$ y $Y_i(z)$ son llamadas FUERTEMENTE ISOTÓPICAS O $s-$ISOTÓPICAS si existen $n-$funciones vectoriales continuas $X_i(z,t)$ con las siguientes propiedades:

i) Ellas estan definidas para todo $z \in \mathbb{R}$ y para todo t en un cierto intervalo $[c,d]$.

ii) Dan una $n-$trenza para cada $t \in [c,d]$.

iii) $X_i(z,c) = X_i(z), X_i(z,d) = Y_i(z)$.

Se observa que las $n-$funciones vectoriales son constantes en z y t si z es suficientemente grande y también constantes si$-z$ es suficientemente grande, de ahí los extremos de las $n-$trenzas permanecen fijos.

Denotemos

$$\beta_n =: \{X_i(z) : X_i(z) \text{ es una } n\text{−trenza}\}.$$

Teorema 3.5:

$''s-$isotopía$''$ es una relación de equivalencia sobre β_n.

Demostración:

<u>$s-$**isotopía es reflexiva:**</u>

Sea $X_i(z)$ una $n-$trenza.

Para cada $i = 1, 2, \cdots, n$. Definamos

$$X_i(z,t) = X_i(z), \forall z \in \mathbb{R}, \forall t \in [0,1].$$

Claramente las funciones vectoriales $X_i(z,t)$ son continuas. Además $X_i(z,t)$ es una $n-$trenza (es igual a $X_i(z)$) para cada $t \in [0,1]$. También es inmediato que:

$$X_i(z,0) = X_i(z) \text{ y } X_i(z,1) = X_i(z).$$

Entonces $X_i(z)$ y $X_i(z)$ son $s-$isotópicas.

<u>$s-$**isotopía es simétrica:**</u>

Sean $X_i(z), Y_i(z) \in \beta_n$ $s-$isotópicas. Entonces existen $n-$funciones vectoriales continuas $X_i(z,t)$ con las siguientes propiedades:

i) Ellas estan definidas para todo $z \in \mathbb{R}$ y para todo t en un cierto intervalo $[c,d]$.

ii) Dan una $n-$trenza para cada $t \in [c,d]$.

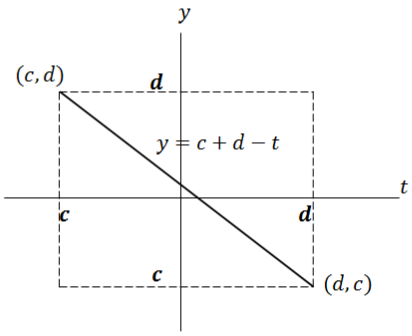
iii) $X_i(z,c) = X_i(z), X_i(z,d) = Y_i(z)$.

Para cada $i = 1, 2, \cdots, n$. Definamos

$$X_i'(z,t) = X_i(z, c+d-t), \forall z \in \mathbb{R}, \forall t \in [c,d].$$

Se cumple:

- $X_i'(z,t)$ son funciones vectoriales continuas.
- Para cada $t \in [c,d], X_i'(z,t) \in \beta_n$ ya que $X_i'(z,t) = X_i(z, c+d-t) \in \beta_n$ y
- $X_i'(z,c) = X_i(z,d) = Y_i(z) \quad , \quad X_i'(z,d) = X_i(z,c) = X_i(z)$.



Así

$$Y_i(z) \quad y \quad X_i(z) \text{ son } s\text{−isotópicas.}$$

<u>$s-$**isotopía es transitiva:**</u>

Sean $X_i(z), Y_i(z), Z_i(z) \in \beta_n$ tal que $X_i(z)$ y $Y_i(z)$ son $s-$isotópicas, $Y_i(z)$ y $Z_i(z)$ son $s-$isotópicas.

Entonces existen $n-$funciones vectoriales continuas $X_i(z,t)$ definidas $\forall z \in \mathbb{R}$ y $\forall t$ de un cierto intervalo $[c,d]$, $X_i(z,t) \in \beta_n$ para cada $t \in [c,d]$, $X_i(z,c) = X_i(z) \wedge X_i(z,d) = Y_i(z)$.

También existen $n-$funciones vectoriales continuas $Y_i(z,t)$ definidas $\forall z \in \mathbb{R}$ y $\forall t$ de un cierto intervalo $[e,f]$, $X_i(z,t) \in \beta_n$ para cada $t \in [e,f]$, $Y_i(z,e) = Y_i(z) \wedge Y_i(z,f) = Z_i(z)$.

Como cualquier intervalo $[a,b] \approx [0,1]$. Consideremos $[c,d] = [e,f] = [0,1]$.

Luego definamos la función vectorial

$$X_i'(z,t) = \begin{cases} X_i(z,2t), 0 \leq t \leq \dfrac{1}{2} \\ \\ Y_i(z,2t-1), \dfrac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \quad \forall z \in \mathbb{R}, \forall t \in [0,1]$$

Se cumple que $X_i'(z,t)$ es continua en los cerrados $\mathbb{R} \times [0,\frac{1}{2}] \wedge \mathbb{R} \times [\frac{1}{2},1]$ además $X_i(z,2\frac{1}{2}) = X_i(z,1) = Y_i(z) = Y_i(z,0) = Y_i(z,2\frac{1}{2}-1)$ entonces por el lema del pegamiento $X_i'(z,t)$ es continua en $\mathbb{R} \times [0,1]$.

También es claro que $X_i'(z,t) \in \beta_n$ para cada $t \in [0,1]$ y

$$X'_i(z,0) = X_i(z,0) = X_i(z), X'_i(z,1) = Y_i(z,1) = Z_i(z).$$

Luego

$$X_i(z) \text{ y } Z_i(z) \text{ son } s-\text{isotópicas.}$$

$\blacksquare$

Al conjunto de todas las clases de $n-$trenzas bajo la relación de s-isotopía, se denota B_n. Esto es

$$B_n =: \{[X_i(z)] : X_i(z) \text{ es una } n-\text{trenza }\}$$

Donde

$$[X_i(z)] = \{Y_i(z) \in \beta_n : X_i(z) \text{ y } Y_i(z) \text{ son s-isotópicas }\}$$

Teorema 3.6:

Sea $g : \mathbb{R} \times [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ aplicación continua tal que

$$\lim_{z\to+\infty} g_s(z) = +\infty, \lim_{z\to-\infty} g_s(z) = -\infty \text{ para cada } s \in [c,d].$$

Donde

$$g_s(z) = g(z,s), \forall z \in \mathbb{R}, \forall s \in [c,d].$$

Si $X_i(z) \in \beta_n$ entonces $X_i(g(z,s)) \in \beta_n$ para cada $s \in [c,d]$ y son todas $s-$isotópicas (son $s-$isotópicas a $X_i(z)$).

Demostración:

Veamos que $X_i(g(z,s)) \in \beta_n$ para cada $s \in [c,d]$. Para ello tomemos $s \in [c,d]$(fijo y arbitrario). Probaremos $X_i(g(z,s)) \in \beta_n$, esto es, para cada $i = 1,2,\cdots,n.X_i(g(z,s))$ es una cuerda y $X_i(g(z,s)) \neq X_j(g(z,s))$ con $i \neq j, \forall z \in \mathbb{R}$. En efecto, sea $i \in \{1,2,\cdots,n\}$. Como X_i y g_s son continuas, entonces $X_i \circ g_s$ es continua. Donde

$$\begin{array}{rccl} X_i \circ g_s : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & z & \mapsto & X_i \circ g_s(z) = X_i(g_s(z)) = X_i(g(z,s)) \end{array}$$

Por otro lado existen $a, b \in \mathbb{R}$ tal que

$$X_i(z) = X_i^+, \forall z \geq b$$
$$X_i(z) = X_i^-, \forall z \leq a$$

Sin pérdida de generalidad podemos asumir $b > 0 \wedge a < 0$.

Como por hipótesis $\lim\limits_{z \to +\infty} g_s(z) = +\infty$, $\lim\limits_{z \to -\infty} g_s(z) = -\infty$. Tenemos:

$$\exists b_s > 0 \text{ tal que } \forall z > b_s \Longrightarrow g_s(z) > b$$
$$\exists a_s < 0 \text{ tal que } \forall z < a_s \Longrightarrow g_s(z) < a$$

Para $z \in [b_s, +\infty)$:

$$X_i \circ g_s(z) = X_i(g_s(z)) = X_i^+$$

Para $z \in (-\infty, z]$:

$$X_i \circ g_s(z) = X_i(g_s(z)) = X_i^-$$

Así $X_i(g(z,s))$ es una cuerda para cada $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$.

Además es claro que $X_i(g(z,s)) \neq X_j(g(z,s))$ con $i \neq j$. Ya que $X_i(z) \in \beta_n$.

Ahora veamos que las $n-$trenzas $X_i(g(z,s))$ para diferentes valores de $s \in [c,d]$ son todas $s-$isotópicas.

En efecto:

Sean $s_1, s_2 \in [c,d]$, probaremos que $X_i \circ g_{s_1}(z)$ y $X_i \circ g_{s_2}(z)$ son $s-$isotópicas. De hecho, tenemos:

$$g_{s_1}, g_{s_2} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ son aplicaciones continuas.}$$

Tomemos:

$$\begin{array}{rccl} H: & \mathbb{R} \times [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (z,t) & \mapsto & H(z,t) = (1-t)g_{s_1}(z) + t g_{s_2}(z) \end{array}$$

aplicación continua. Se cumple:

$$H(z,0)=g_{s_1}(z),\forall z\in\mathbb{R}$$
$$H(z,1)=g_{s_2}(z),\forall z\in\mathbb{R}$$

También consideremos para cada $i=1,\cdots,n$.

$$\begin{array}{rccl} G^i: & \mathbb{R}\times[0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (z,t) & \mapsto & G^i(z,t)=X_i(z) \end{array}$$

aplicación continua. Así tenemos para cada $i=1,\cdots,n$.

$$W_t^i=:G_t^i\circ H_t:\mathbb{R}\xrightarrow{H_t}\mathbb{R}\xrightarrow{G_t^i}\mathbb{R}^2 \text{ con } t\in[0,1]$$

Luego para cada $i=1,\cdots,n$. Tomemos:

$$\begin{array}{rccl} W^i: & \mathbb{R}\times[0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (z,t) & \mapsto & W^i(z,t)=G_t^i\circ H_t(z) \end{array}$$

$=G_t^i(H_t(z))=G_t^i(H(z,t))=G_t^i((1-t)g_{s_1}(z)+tg_{s_2}(z))=X_i((1-t)g_{s_1}(z)+tg_{s_2}(z))$ aplicación continua.

Se cumple:

$$W^i(z,0)=X_i(g_{s_1}(z))$$
$$W^i(z,1)=X_i(g_{s_2}(z))$$

Veamos que $W_t^i(z)\in\beta_n$ para cada $t\in[0,1]$. En efecto, sea $t\in]0,1[$(fijo y arbitrario). Probaremos $W_t^i(z)\in\beta_n$, esto es, para cada $i=1,2,\cdots,n.W_t^i(z)$ es una cuerda y $W_t^i(z)\neq W_t^j(z)$ con $i\neq j$. Es claro que $W_t^i(z)=X_i((1-t)g_{s_1}(z)+tg_{s_2}(z))\neq X_j((1-t)g_{s_1}(z)+tg_{s_2}(z))=W_t^j(z)$ con $i\neq j$. Luego resta probar que $W_t^i(z)$ es una cuerda para cada $i=1,\cdots,n$. En efecto, sea $i=1,\cdots,n$ (fijo y arbitrario). Se cumple $W_t^i(z)$ es continua. Además por hipótesis $\lim\limits_{z\to+\infty}g_{s_1}(z)=+\infty$, $\lim\limits_{z\to-\infty}g_{s_1}(z)=-\infty$, $\lim\limits_{z\to+\infty}g_{s_2}(z)=+\infty$, $\lim\limits_{z\to-\infty}g_{s_2}(z)=-\infty$.

Nuevamente utilizando que:

$$\exists b>0 \text{ tal que } X_i(z)=X_i^+,\forall z\geq b$$
$$\exists a<0 \text{ tal que } X_i(z)=X_i^-,\forall z\leq a$$

Tenemos:

$$\exists b_{s_1}>0 \text{ tal que } \forall z>b_{s_1}\Longrightarrow g_{s_1}(z)>b$$
$$\exists a_{s_1}<0 \text{ tal que } \forall z<a_{s_1}\Longrightarrow g_{s_1}(z)<a$$
$$\exists b_{s_2}>0 \text{ tal que } \forall z>b_{s_2}\Longrightarrow g_{s_2}(z)>b$$
$$\exists a_{s_2}<0 \text{ tal que } \forall z<a_{s_2}\Longrightarrow g_{s_2}(z)<a$$

Tomemos

$$b^{\star} > max\{b_{s_1}, b_{s_2}\}$$

Para $z \in [b^{\star}, +\infty)$ se tiene

$$g_{s_1}(z) > b \wedge g_{s_2}(z) > b$$

entonces

$$(1-t)g_{s_1}(z) > (1-t)b \wedge tg_{s_2}(z) > tb$$

luego

$$W_t^i(z) = X_i((1-t)g_{s_1}(z) + tg_{s_2}(z)) = X_i^{+}.$$

Tomemos

$$a^{\star} < max\{a_{s_1}, a_{s_2}\}$$

Para $z \in (-\infty, a^{\star}]$ se tiene

$$g_{s_1}(z) < a \wedge g_{s_2}(z) < a$$

luego

$$(1-t)g_{s_1}(z) < (1-t)a \wedge tg_{s_2}(z) < ta$$

entonces

$$W_t^i(z) = X_i((1-t)g_{s_1}(z) + tg_{s_2}(z)) = X_i^{-}.$$

De ahí

$$W_t^i(z) \in \beta_n \text{ con } t \in]0,1[$$

y como

$$W_0^i(z), W_1^i(z) \in \beta_n.$$

Se tiene:

$$W_t^i(z) \in \beta_n \text{ para cada } t \in [0,1].$$

Por lo tanto

$$X_i(g_{s_1}(z)), X_i(g_{s_2}(z)) \text{ son } s-\text{isotópicas.}$$

$$\blacksquare$$

Observación:

Sea $s \in [c,d]$. Veamos que $X_i(z) \wedge X_i(g_s(z))$ son $s-$isotópicas.

En efecto:

Definamos:

$$\begin{array}{rccl} W^i: & \mathbb{R}\times[0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (z,t) & \mapsto & W^i(z,t) = X_i((1-t)z + tg_s(z)) \end{array}$$

aplicación continua para cada $i = 1, \cdots, n$. Se cumple:

$$W^i(z,0) = X_i(z), W^i(z,1) = X_i(g_s z).$$

Veamos

$$W_t^i \in \beta_n \text{ para cada } t \in]0,1[.$$

En efecto,

sea $t \in]0,1[$(fijo y arbitrario), probaremos que $W_t^i(z) \in \beta_n$, esto es, para cada $i = 1, 2, \cdots, n.W_t^i(z)$ es una cuerda y $W_t^i(z) \neq W_t^j(z)$ con $i \neq j$. De hecho, se cumple

$$W_t^i(z) = X_i((1-t)z) + tg_s(z)) \neq X_j((1-t)z + tg_s(z)) = W_t^j(z) \text{ con } i \neq j.$$

Por otro lado para cada $i = 1, 2, \cdots, n$.

$$W_t^i(z) \text{ es continua.}$$

Además

$$\lim_{z\to+\infty} g_s(z) = +\infty, \lim_{z\to-\infty} g_s(z) = -\infty, \lim_{z\to+\infty} z = +\infty, \lim_{z\to-\infty} z = -\infty.$$

y nuevamente por el hecho que:

$$\exists b > 0 \text{ tal que } X_i(z) = X_i^+, \forall z \geq b$$

$$\exists a < 0 \text{ tal que } X_i(z) = X_i^-, \forall z \leq a$$

Se tiene:

$$\exists b_s > 0 \text{ tal que } \forall z > b_s \Longrightarrow g_s(z) > b$$
$$\exists a_s < 0 \text{ tal que } \forall z < a_s \Longrightarrow g_s(z) < a$$

$$\exists b_{id} > 0 \text{ tal que } \forall z > b_{id} \Longrightarrow z > b$$
$$\exists a_{id} < 0 \text{ tal que } \forall z < a_{id} \Longrightarrow z < a$$

Luego, tomemos

$$b^\star > max\{b_s, b_{id}\} \wedge a^\star < min\{a_s, a_{id}\}$$

Para $z \in [b^\star, +\infty)$: se tiene

$$g_s(z) > b \wedge z > b$$

entonces

$$tg_s(z) > tb \wedge (1-t)z > (1-t)b$$

luego

$$W_t^i(z) = X_i((1-t)z + tg_s(z)) = X_i^+.$$

Para $z \in (-\infty, a^\star]$ se tiene

$$g_s(z) < a \wedge z < a$$

entonces

$$tg_{s_1}(z) < ta \wedge (1-t)z < (1-t)a$$

luego

$$W_t^i(z) = X_i((1-t)z + tg_s(z)) = X_i^-.$$

Así

$$W_t^i(z) \in \beta_n$$

Por lo tanto

$$X_i(z), X_i(g_s(z)) \text{ son } s-\text{isotópicas.}$$

■

Corolario 1:

Sea $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ aplicación continua tal que $\lim\limits_{z \to +\infty} h(z) = +\infty$, $\lim\limits_{z \to -\infty} h(z) = -\infty$. Entonces las $n-$trenzas $X_i(z)$ y $X_i(h(z))$ son $s-$isotópicas.

Denostración:

Definamos

$$\begin{array}{llll} g: & \mathbb{R} \times [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (z,t) & \mapsto & g(z,t) = (1-t)z + th(z) \end{array}$$

aplicación continua. Se cumple: para $t \in [0,1]$, $\lim\limits_{z \to +\infty} g_s(z) = +\infty$, $\lim\limits_{z \to -\infty} g_s(z) = -\infty$.

Entonces por el teorema anterior (para la $n-$trenza $X_i(z)$) tenemos: $X_i(g_t(z)) \in \beta_n$ para cada $t \in [0,1]$ y son todas $s-$isotópicas.

Luego para $t = 0 \wedge t = 1$ tenemos:

$X_i(g_0(z)) \wedge X_i(g_1(z))$ son $s-$isotópicas.

Por otro lado

$$X_i(g_0(z)) = X_i(g(z,0)) = X_i(z)$$
$$X_i(g_1(z)) = X_i(g(z,1)) = X_i(h(z))$$

Así $X_i(z)$ y $X_i(h(z))$ son $s-$isotópicas.

■

Corolario 2:

La $n-$trenza $X_i(z)$ es $s-$isotópica a cualquier $z-$traslación $X_i(z+a), a \in \mathbb{R}$.

Demostración:

Consideremos la aplicación traslación

$$\begin{array}{llll} T_a: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (z,t) & \mapsto & T_a(z) = z + a \end{array}$$

aplicación continua, se cumple:

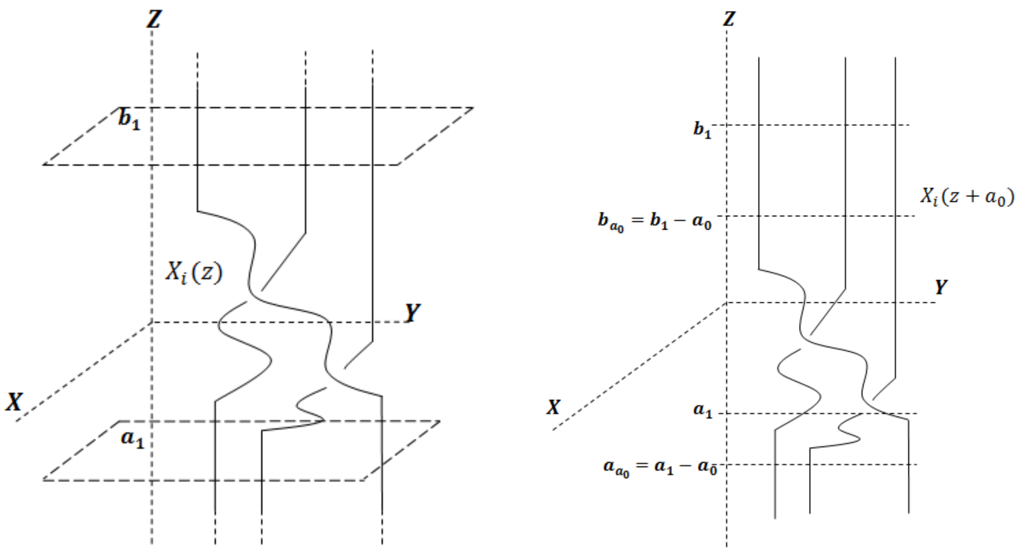


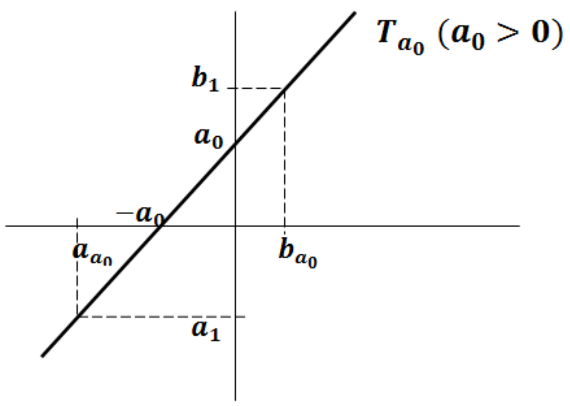
Figura 7: $z-$traslación de la 3-trenza $X_i(z)$

$$\lim_{z\to+\infty} T_a(z) = \lim_{z\to+\infty} z + a = +\infty \text{ y}$$
$$\lim_{z\to-\infty} T_a(z) = \lim_{z\to-\infty} z + a = -\infty.$$

Entonces por el corolario 1:

$$X_i(z) \text{ y } X_i(T_a(z)) = X_i(z + a) \text{ son } s-\text{isotópicas.}$$

■



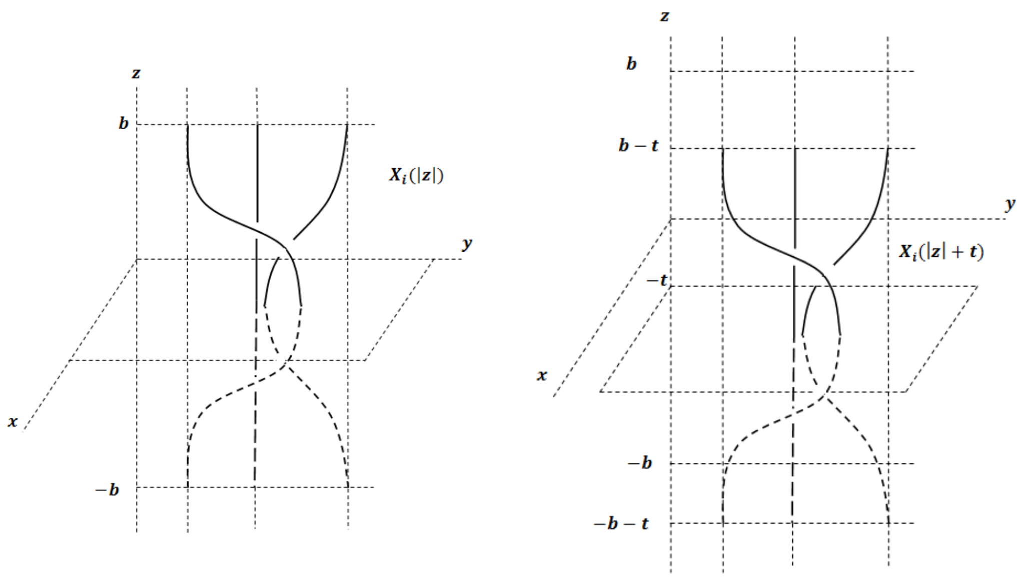
Corolario 3:

Las $n-$trenzas $X_i(\mid z \mid +t)$ son $s-$isotópicas entre ellas para diferentes valores de $t \in \mathbb{R}$.

Demostración:

Por hipótesis $X_i(\mid z \mid) \in \beta_n$. Luego por el corolario 2. $X_i(\mid z \mid)$ es $s-$isotópica a cualquier $z-$traslación $X_i(\mid z \mid +t), t \in \mathbb{R}$.

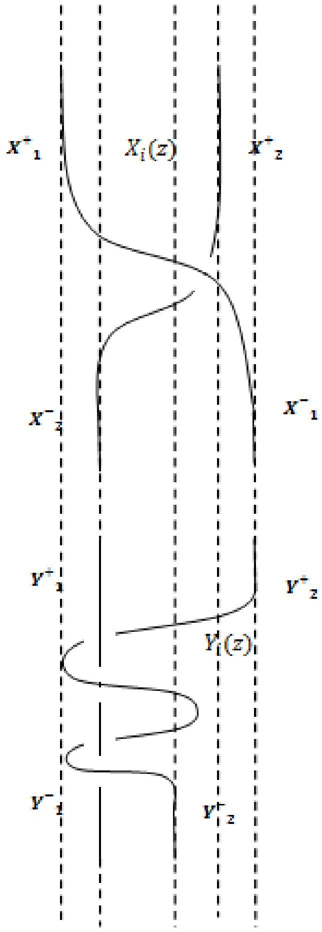
■



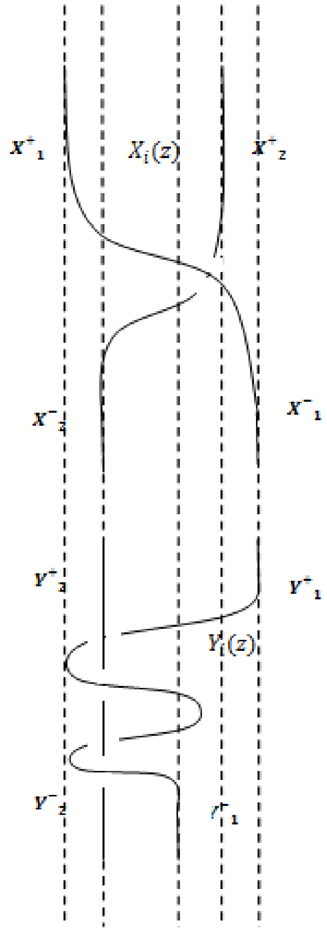
Definición 3.7:

Dos $n-$trenzas $X_i(z)$ y $Y_i(z)$ se dice que SE PUEDEN COMPONER si despues de un cambio apropiado en la enumeración de las cuerdas tenemos $Y_i^+ = X_i^-$.

Esto es, el extremo superior de $Y_i(z)$ debe coincidir con el extremo inferior de $X_i(z)$.



Después de un cambio apropiado en la enumeración



Las $n-$trenzas $X_i(z)$ y $Y_i(z)$ se pueden componer, pero $Y_i(z)$ y $X_i(z)$ no se pueden componer.

Sean $X_i(z)$ y $Y_i(z)$ dos $n-$trenzas que se pueden componer. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tal que:

$$X_i(z+a) = X_i^-, \forall z \leq 0.$$
$$Y_i(z+b) = Y_i^+, \forall z \geq 0.$$

Tomemos

$$X_iYi(z) = \begin{cases} X_i(z+a), z \geq 0 \\ \\ Y_i(z+b), z \leq 0 \end{cases}$$

Llamada la $n-$TRENZA COMPUESTA de $X_i(z)$ y $Y_i(z)$.

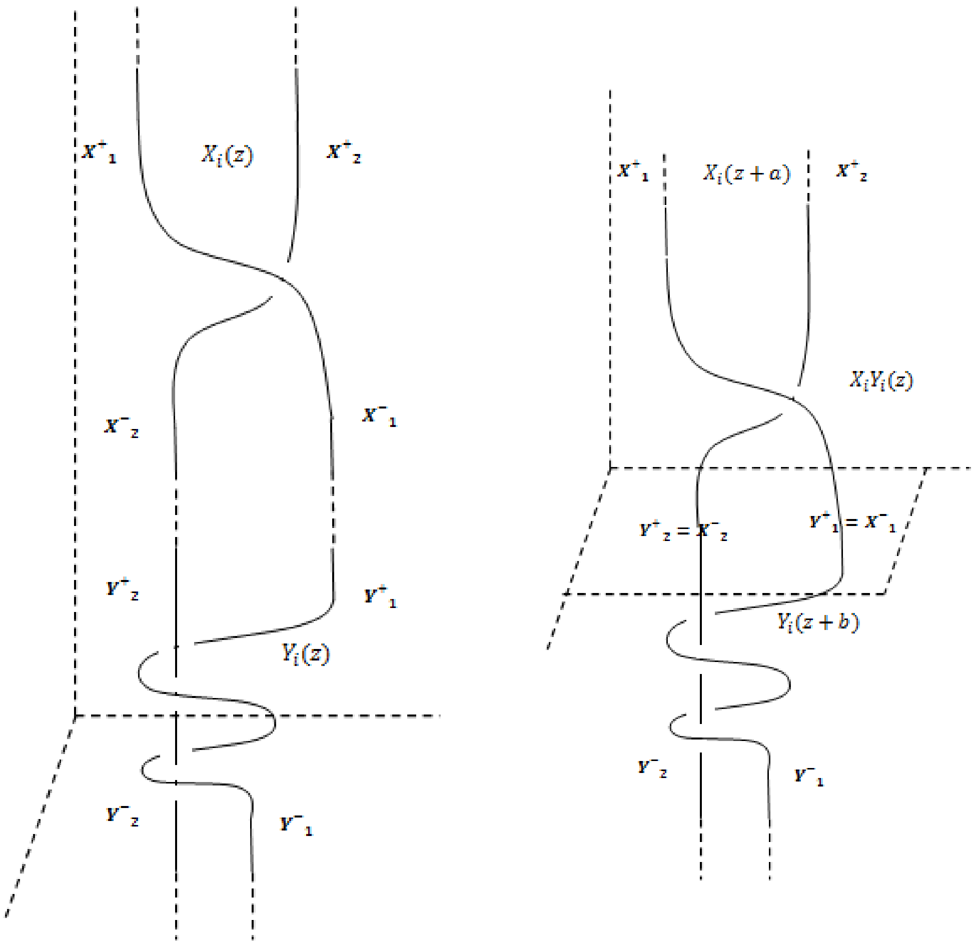


Figura 8: $n-$trenza compuesta de $X_i(z)$ y $Y_i(z)$

Observación:

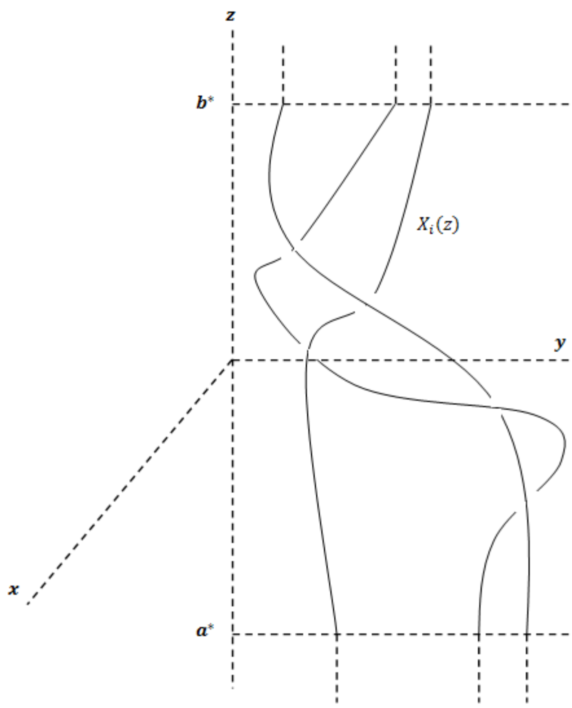
1) $X_iY_i(z) \in \beta_n$.

2) Por el corolario 2. del teorema 4.6. $X_i(z) \wedge X_i(z+a), Y_i(z) \wedge Y_i(z+b)$ son $s-$isotópicas.

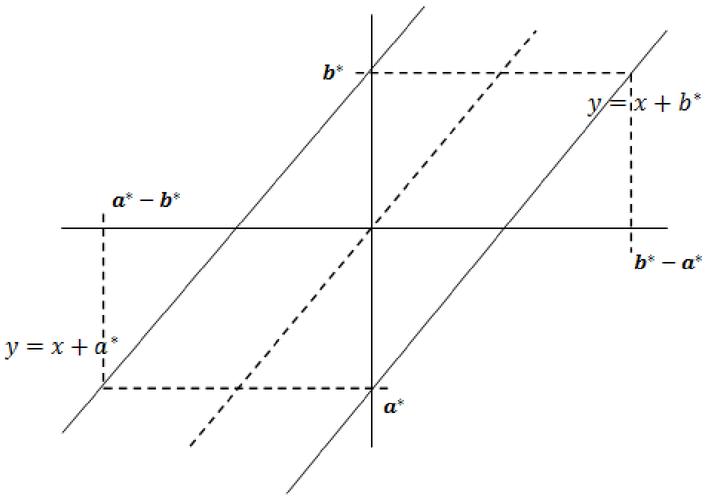
3) Cualquier $z-$traslación de $X_iY_i(z)$ también será llamada $n-$trenza compuesta de $X_i(z)$ y $Y_i(z)$.

4) Sabemos que para la $n-$trenza $X_i(z)$, existen $b^\star > 0$ y $a^\star < 0$ tal que

$X_i(z) = X_i^+, \forall z \geq b^\star.$
$X_i(z) = X_i^-, \forall z \leq a^\star.$



Tenemos:



Luego

$$X_i(z + a^\star) \in \beta_n.$$

Además se cumple:

Para $z \in < -\infty, 0]$ se tiene

$$z \leq 0$$

entonces

$$z + a^\star \leq a^\star$$

de ahí

$$X_i(z + a^\star) = X_i^-.$$

Similarmente para $z \in [b^\star - a^\star, +\infty >$ se tiene

$$z \geq b^\star - a^\star$$

entonces

$$z + a^\star \geq b^\star$$

De ahí

$$X_i(z + b^\star) = X_i^+.$$

Así la traslación en el eje z. $\quad T_{a^\star}$ levanta a la $n-$trenza $X_i(z)$ resultando $X_i(z + a^\star)$.

También $X_i(z + b^\star) \in \beta_n$. Se cumple:
Para $z \in < -\infty, a^\star - b^\star]$ tenemos $z \leq a^\star - b^\star$
entonces

$$z + b^\star \leq a^\star$$

de ahí

$$X_i(z + b^\star) = X_i^-.$$

Para $z \in [0, +\infty >$ tenemos $z \geq 0$
entonces

$$z + b^\star \geq b^\star$$

luego

$$X_i(z+b^\star) = X_i^+.$$

Así la traslación en el eje z. $\quad T_{b^\star}$ baja a la $n-$trenza $X_i(z)$ resultando $X_i(z+b^\star)$.

Proposicióm 3.8:

Sean $X_i(z), X_i'(z), Y_i(z), Y_i'(z) \in \beta_n$ tal que $X_i(z) \wedge X_i'(z), Y_i(z) \wedge Y_i'(z)$ son $s-$isotópicas. Si $X_i(z)$ y $Y_i(z)$, $X_i'(z)$ y $Y_i'(z)$ se pueden componer entonces $X_iY_i(z)$ y $X_i'Y_i'(z)$ son $s-$isotópicas.

Demostración:

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tal que

$$X_i(z+a) = X_i^-, \forall z \geq 0.$$
$$Y_i(z+b) = Y_i^+, \forall z \leq 0.$$

Sean $a', b' \in \mathbb{R}$ tal que

$$X_i'(z+a') = X_i'^-, \forall z \leq 0.$$
$$Y_i'(z+b') = Y_i'^+, \forall z \geq 0.$$

Luego

$$X_iY_i(z) = \begin{cases} X_i(z+a), z \geq 0 \\ \\ Y_i(z+b), z \leq 0 \end{cases}$$

$$X_i'Y_i'(z) = \begin{cases} X_i'(z+a'), z \geq 0 \\ \\ Y_i'(z+b'), z \leq 0 \end{cases}$$

Es claro que $X_i(z+a)$ y $X_i'(z+a')$, $Y_i(z+b)$ y $Y_i'(z+b')$ son $s-$isotópicas (ya que $X_i(z)$ y $X_i(z+a), X_i'(z)$ y $X_i'(z+a'), X_i(z)$ y $X_i'(z)$ son $s-$isotópicas. Similarmente para $Y_i(z)$).

Entonces existen apliacaciones continuas

$$H^i : \mathbb{R} \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$G^i : \mathbb{R} \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

tal que:

$$H_t^i(z) \in \beta_n \text{ para cada } t \in [0,1] \text{ y } H_0^i(z) = X_i(z+a), H_1^i(z) = X_i'(z+a')$$
$$\mathrm{G}_t^i(z) \in \beta_n \text{ para cada } t \in [0,1] \text{ y } G_0^i(z) = Y_i(z+b), G_1^i(z) = Y_i'(z+b').$$

Definamos

$$\begin{array}{rccl} F^i: & \mathbb{R}\times[0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (z,t) & \mapsto & F^i(z,t) = \begin{cases} H^i(z,t) & , \quad z \geq 0 \\ G^i(z,t) & , \quad z \leq 0 \end{cases} \end{array}$$

Se cumple F^i es continua en el cerrado $[0,+\infty\rangle \times [0,1]$ de $\mathbb{R}\times[0,1]$ y en el cerrado $\langle -\infty, 0] \times [0,1]$ de $\mathbb{R}\times[0,1]$, ademas, $H^i(0,t) = G^i(0,t), \forall t \in [0,1]$, luego por el lema del pegamiento, F^i es continua. Claramente $F^i(z,t) \in \beta_n$, para cada $t \in [0,1]$. También

$$F^i(z,0) = \begin{cases} H^i(z,0) & , \quad z \geq 0 \\ G^i(z,0) & , \quad z \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} X_i(z+a) & , \quad z \geq 0 \\ Y_i(z+b) & , \quad z \leq 0 \end{cases} = X_iY_i(z)$$

$$F^i(z,1) = \begin{cases} H^i(z,1) & , \quad z \geq 0 \\ G^i(z,1) & , \quad z \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} X_i'(z+a) & , \quad z \geq 0 \\ Y_i'(z+b) & , \quad z \leq 0 \end{cases} = X_i'Y_i'(z)$$

Por lo tanto

$$X_iY_i(z) \text{ y } X_i'Y_i'(z) \text{ son s-isotopicas.}$$

■

Definicion 3.9:

Dos clases de $n-$trenzas $[Y_i(z)], [X_i(z)]$ son llamadas COMPONIBLES si $X_i(z)$ y $Y_i(z)$ se pueden componer.

Definimos

$$\begin{array}{rccl} \bullet: & B_n \times B_n & \longrightarrow & B_n \\ & ([Y_i(z)],[X_i(z)]) & \mapsto & \bullet([Y_i(z)],[X_i(z)]) = [X_iY_i(z)] \end{array}$$

Denotaremos

$$\bullet([Y_i(z)],[X_i(z)]) =: [Y_i(z)] \bullet [X_i(z)]$$

Observación:

1. Por la proposicion anterior, " $\bullet$ ", esta bien definida.

2. La operacion " $\bullet$ " no esta definida en todo B_n, sólo para clases componibles.

Proposicion 3.10:

$$(B_n, \bullet) \text{ es un grupo}$$

Demostración:

Ya sabemos que " $\bullet$ " es cerrada en B_n y esta bien definida. Ahora, veamos:

<u>" $\bullet$ " es asociativa:</u>

Sean $[X_i(z)], [Y_i(z)], [Z_i(z)] \in B_n$. Probaremos

$$[Z_i(z)] \bullet ([Y_i(z)] \bullet [X_i(z)]) = ([Z_i(z)] \bullet [Y_i(z)]) \bullet [X_i(z)]$$

es decir

$$[Z_i(z)] \bullet [X_iY_i(z)] = [Y_iZ_i(z)] \bullet [X_i(z)]$$

esto es

$$[(X_iY_i)Z_i(z)] = [X_i(Y_iZ_i)(z)]$$

En efecto:

Tenemos

$$X_iY_i(z) = \begin{cases} X_i(z + a_x^\star), \forall z \geq 0 \\ Y_i(z + b_y^\star), \forall z \leq 0 \end{cases} \quad , \quad \begin{array}{l} X_iY_i(z) = X_i^+, \forall z \in [b_x^\star - a_x^\star, +\infty\rangle \\ X_iY_i(z) = Y_i^-, \forall z \in \langle -\infty, a_y^\star - b_y^\star] \end{array}$$

$$Y_iZ_i(z) = \begin{cases} Y_i(z + a_y^\star), \forall z \geq 0 \\ Z_i(z + b_z^\star), \forall z \leq 0 \end{cases} \quad , \quad \begin{array}{l} Y_iZ_i(z) = Y_i^+, \forall z \in [b_y^\star - a_y^\star, +\infty\rangle \\ Y_iZ_i(z) = Z_i^-, \forall z \in \langle -\infty, a_z^\star - b_z^\star] \end{array}$$

Denotemos

$$\begin{array}{l} a_{xy}^\star = a_y^\star - b_y^\star \quad \wedge \quad b_{xy}^\star = b_x^\star - a_x^\star \\ a_{yz}^\star = a_z^\star - b_z^\star \quad \wedge \quad b_{yz}^\star = b_y^\star - a_y^\star \end{array}$$

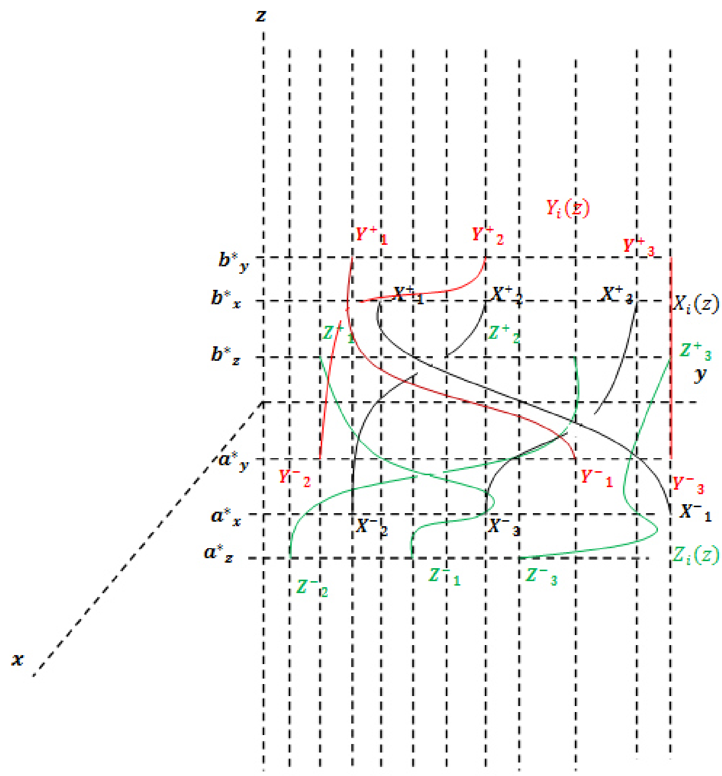
Se tiene

$$(X_iY_i)Z_i(z) = \begin{cases} X_iY_i(z + a_{xy}^\star), \forall z \geq 0 \\ Z_i(z + b_z^\star), \forall z \leq 0 \end{cases}$$

$$(X_iY_i)Z_i(z) = X_i^+, \forall z \in [b^\star_{xy} - a^\star_{xy}, +\infty\rangle$$
$$(X_iY_i)Z_i(z) = Z_i^-, \forall z \in \langle -\infty, a^\star_z - b^\star_z]$$

$$X_i(Y_iZ_i)(z) = \begin{cases} X_i(z + a^\star_x), \forall z \geq 0 \\ Y_iZ_i(z + b^\star_{yz}), \forall z \leq 0 \end{cases}$$

$$X_i(Y_iZ_i)(z) = X_i^+, \forall z \in [b^\star_x - a^\star_x, +\infty\rangle$$
$$X_i(Y_iZ_i)(z) = Z_i^-, \forall z \in \langle -\infty, a^\star_{yz} - b^\star_{yz}]$$



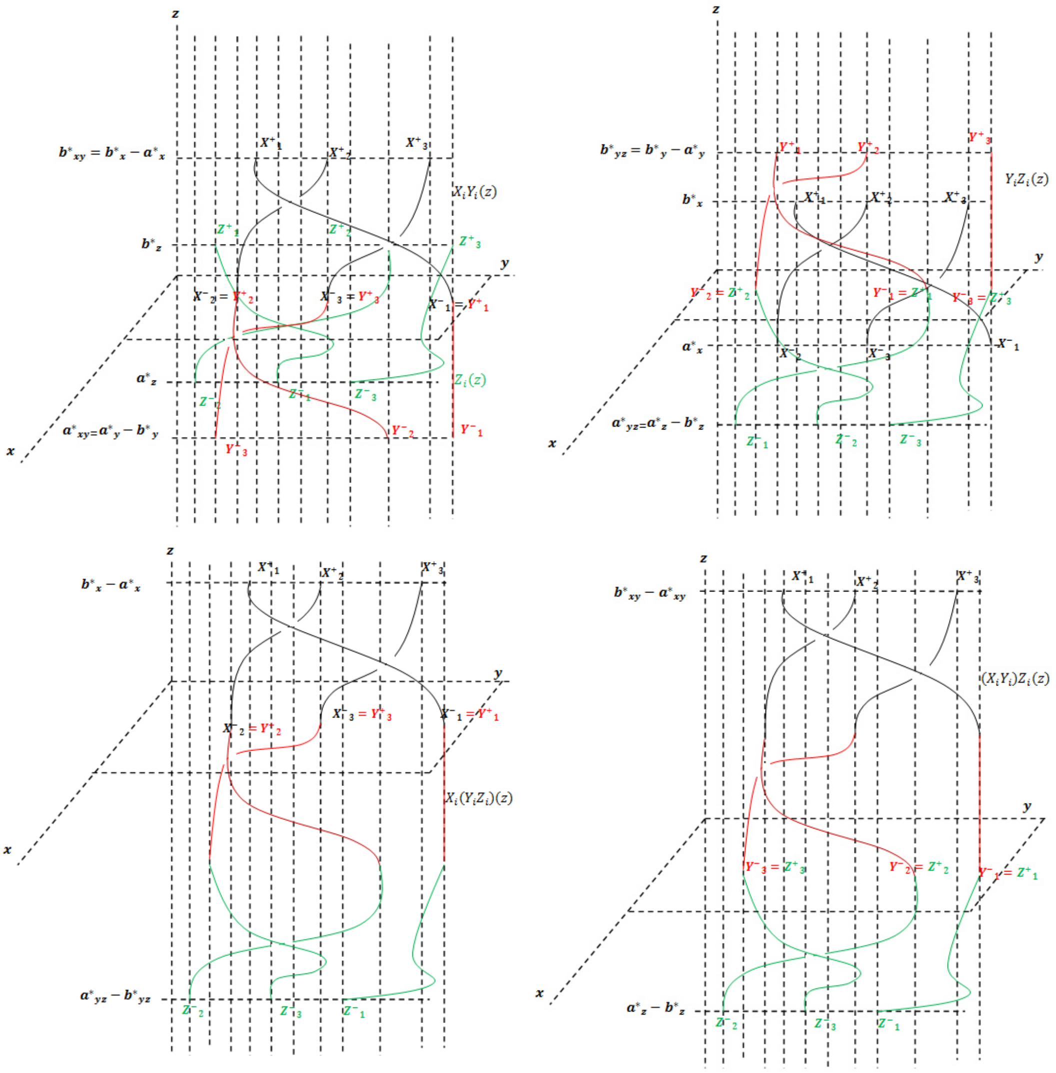


Figura 9: $(X_iY_i)Z_i(z)$ y $X_i(Y_iZ_i)(z)$

De

$$b_x^\star - a_x^\star + b_{yz}^\star = b_x^\star - a_x^\star + b_y^\star - a_y^\star$$
$$\text{b}\ {}_{xy}^\star - a_{xy}^\star = b_x^\star - a_x^\star - a_y^\star + b_y^\star$$

se tiene

$$b_x^\star - a_x^\star + b_{yz}^\star = b_{xy}^\star - a_{xy}^\star$$

Luego

$$(X_iY_i)Z_i(z) = X_i(Y_iZ_i)(z)$$

Así

$$X_i(Y_iZ_i)(z) \text{ y } (X_iY_i)Z_i(z) \text{ son s-isotópicas.}$$

Por lo tanto

$$[(X_iY_i)Z_i(z)] = [X_i(Y_iZ_i)(z)]$$

<u>Existencia del elemento neutro:</u>

Sea $X_i(z) \in \beta_n$. Tomemos

$$N_i(z) = X_i^-, \forall z \in \mathbb{R};$$
$$N_i'(z) = X_i^+, \forall z \in \mathbb{R}.$$

Se cumple

$$N_i(z), N_i'(z) \in \beta_n$$

Ademas

$$X_i(z) \text{ y } N_i(z)\ ,\ N_i'(z) \text{ y } X_i(z) \text{ se pueden componer.}$$

Luego

$$X_iN_i(z) = \begin{cases} X_i(z+a^\star), \forall z \geq 0 \\ N_i(z), \forall z \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} X_i(z+a^\star), \forall z \geq 0 \\ X_i^-, \forall z \leq 0 \end{cases} = X_i(z+a^\star).$$

$$N_i'X_i(z) = \begin{cases} N_i'(z), \forall z \geq 0 \\ X_i(z+b^\star), \forall z \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} X_i^+, \forall z \geq 0 \\ X_i(z+b^\star), \forall z \leq 0 \end{cases} = X_i(z+b^\star).$$

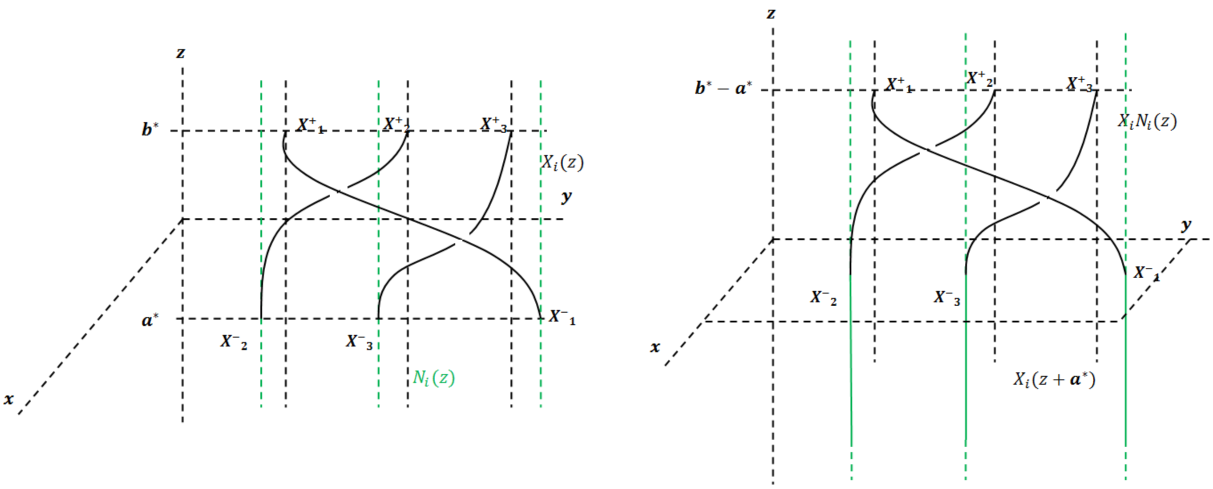


Figura 10: $X_i N_i(z)$

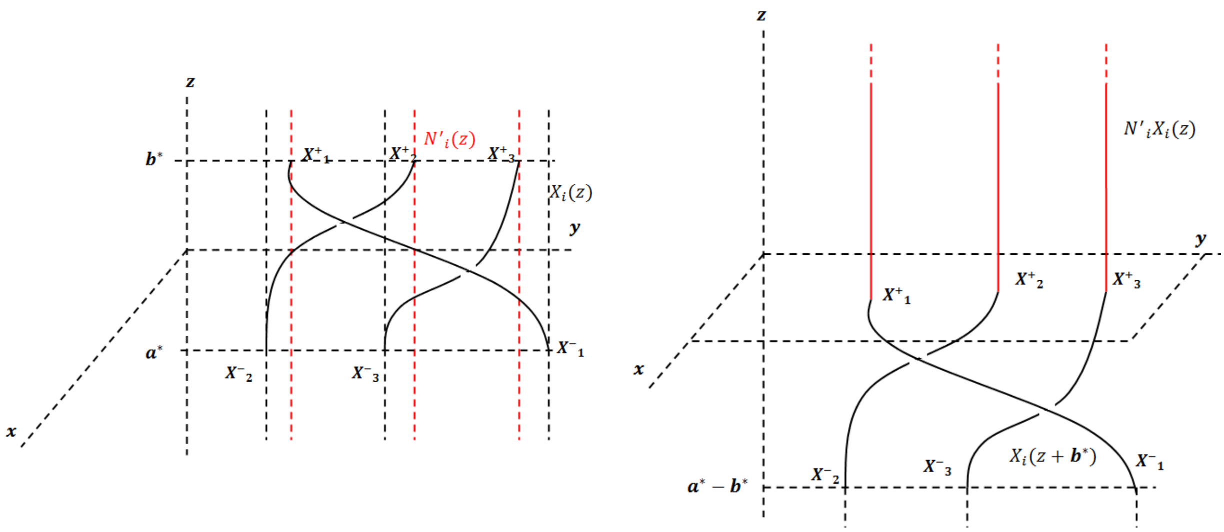


Figura 11: $N_i' X_i(z)$

Entonces

$$[N_i(z)] \bullet [X_i(z)] = [X_i N_i(z)] = [X_i(z + a^\star)] = [X_i(z)]$$

y

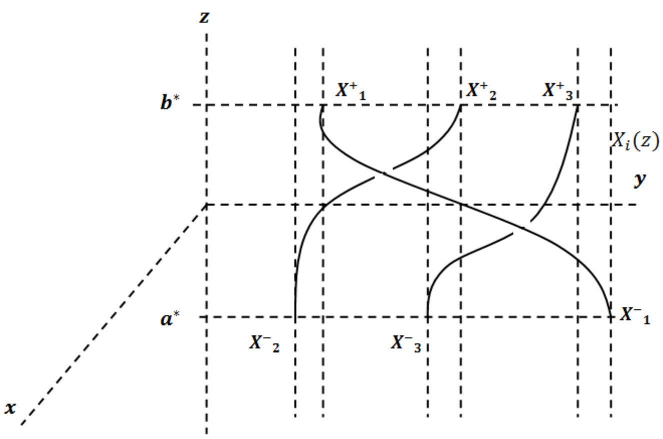
$$[X_i(z)] \bullet [N_i'(z)] = [N_i' X_i(z)] = [X_i(z + b^\star)] = [X_i(z)]$$

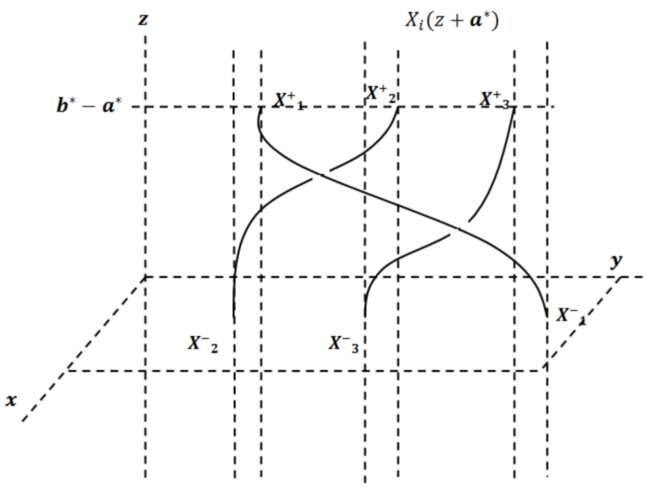
Observacion:

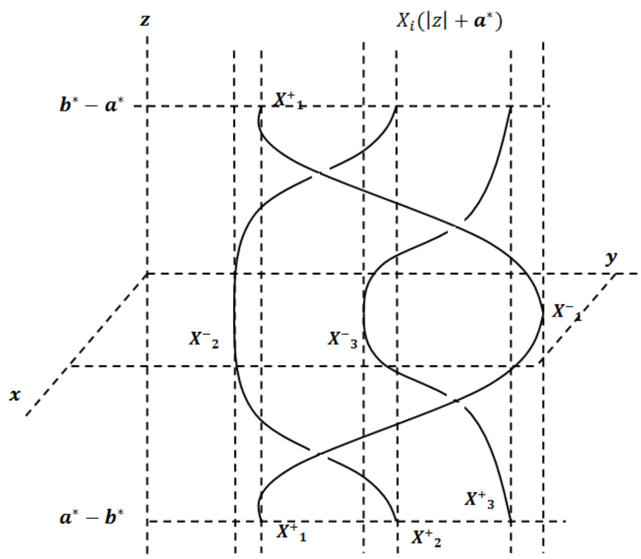
No necesariamente $[N_i(z)] = [N_i'(z)]$.

<u>Existencia del elemento inverso:</u>

Sea $X_i(z) \in \beta_n$.
Luego $X_i(z + a^\star) \in \beta_n$.







Entonces $X_i(|z| + a^\star) \in \beta_n$.

Tomemos

$$X_i^{-1}(z) = \begin{cases} X_i^-(z), \forall z \geq 0 \\ X_i(|z| + a^\star), \forall z \leq 0 \end{cases} \quad \in \beta_n$$

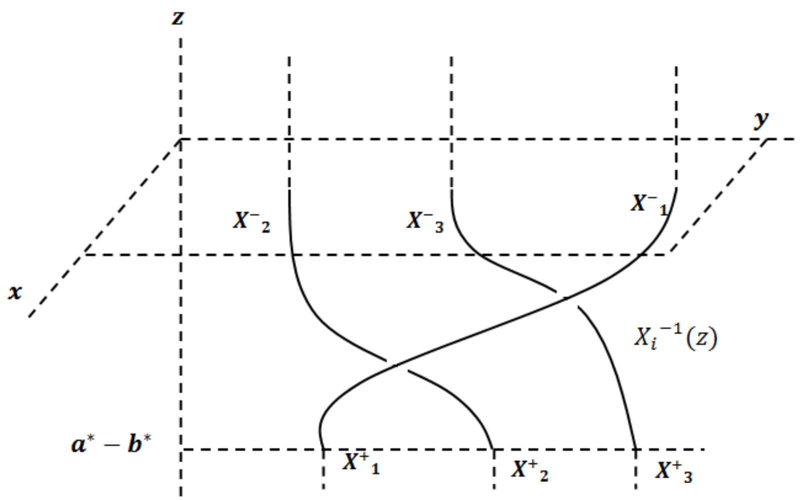
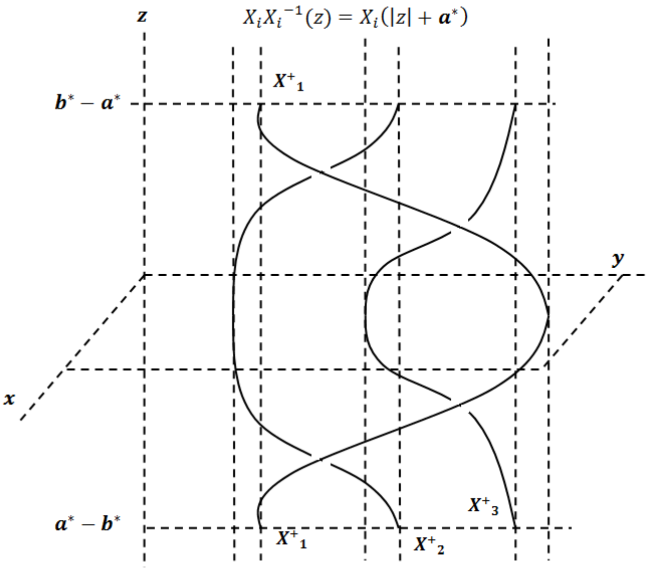


Figura 12: $X_i^{-1}(z)$

Claramente $X_i(z)$ y $X_i^{-1}(z)$ se pueden componer.

Luego

$$X_i X_i^{-1}(z) = \begin{cases} X_i(z + a^\star), \forall z \geq 0 \\ X_i^{-1}(z), \forall z \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} X_i(|z| + a^\star), \forall z \geq 0 \\ X_i(|z| + a^\star), \forall z \leq 0 \end{cases} = X_i(|z| + a^\star)$$



Afirmación 1:

$$X_i(|z| + a^\star) \text{ y } N_i'(z) \text{ son s-isotópicas}$$

Demostración:

Para cada $i = 1, 2, \cdots, n$

Definamos

$$\begin{array}{rccl} H^i: & \mathbb{R} \times [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (z,t) & \mapsto & H^i(z,t) = X_i((1-t)b^\star + t(|z| + a^\star)) \end{array} \quad \text{aplicación.}$$

Claramente H^i es continua. Además:

$$\begin{array}{l} H^i(z,0) = X_i(b^\star) = X_i^+ = N_i'(z) \\ H^i(z,1) = X_i(|z| + a^\star) \end{array}$$

Resta probar $H^i(z,t) \in \beta_n$, para cada $t \in [0,1]$. En efecto:

Para $t = 0, 1$ se cumple. Veamos para $t \in]0,1[$.

ClaramenteH_t^i es continua, para cada $i = 1, 2, \cdots, n$. Además:

Para $z \in [b^\star - a^\star, +\infty\rangle$. Se tiene

$$H_t^i(z) = X_i^+$$

Para $z \in \langle +\infty, a^\star - b^\star]$. Se tiene

$$H_t^i(z) = X_i^+$$

También

$$H_t^i(z) \neq H_t^j(z), \forall i \neq j, \forall z \in \mathbb{R}$$

Por lo tanto

$$H^i(z,t) \in \beta_n$$

$$\blacksquare$$

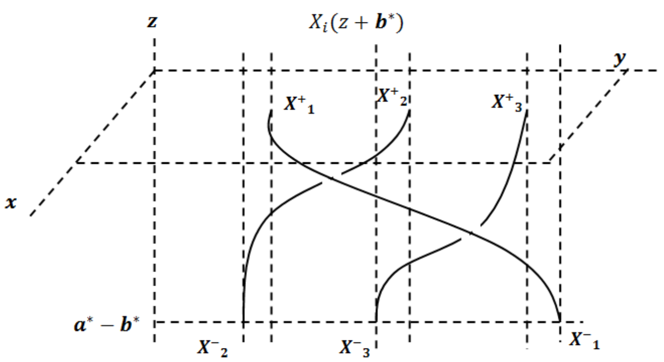
Luego por la Afirmación 1, Se tiene

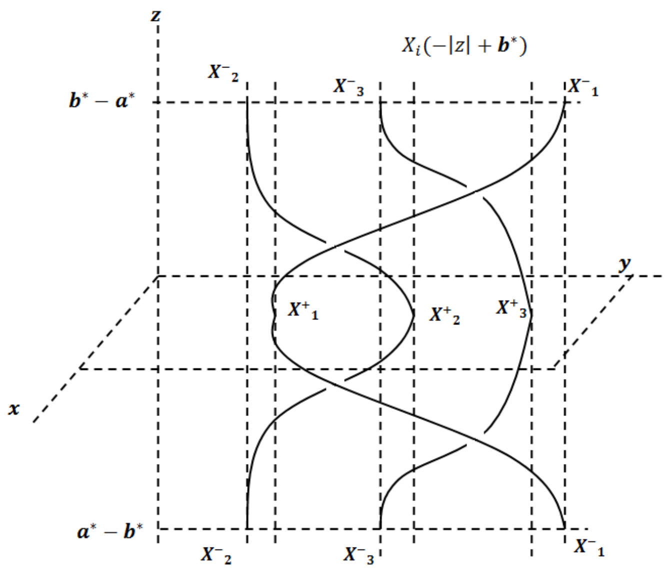
$$[X_i^{-1}(z)] \bullet [X_i(z)] = [X_i X_i^{-1}(z)] = [X_i(|z| + a^\star)] = [N_i'(z)]$$

Similarmente, se tiene:$X_i(z + b^\star) \in \beta_n$

Entonces

$$X_i(-|z| + b^\star \in \beta_n$$





Tomemos

$$X_i'^{-1}(z) = \begin{cases} X_i(-|z| + b^\star), \forall z \geq 0 \\ X_i^-(z), \forall z \leq 0 \end{cases} \in \beta_n$$

Claramente $X_i'^{-1}(z)$ y $X_i(z)$ se pueden componer.

Luego

$$X_i'^{-1} X_i(z) = \begin{cases} X_i'^{-1}(z), \forall z \geq 0 \\ X_i(z + b^\star), \forall z \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} X_i(-|z| + b^\star), \forall z \geq 0 \\ X_i(-|z| + b^\star), \forall z \leq 0 \end{cases} = X_i(-|z| + b^\star)$$

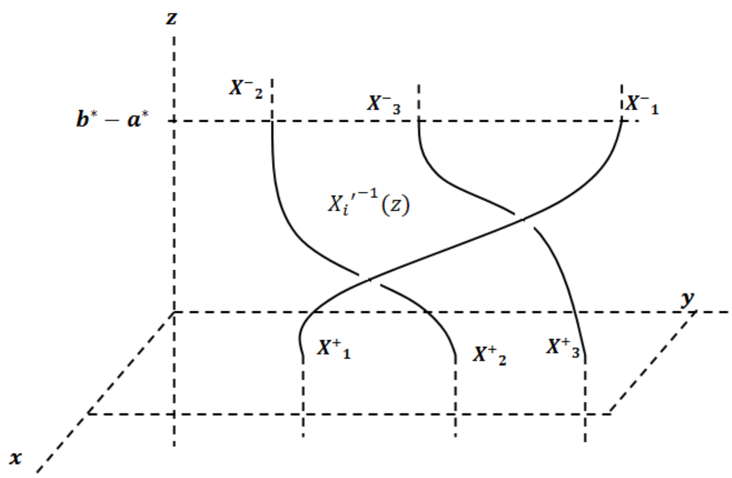
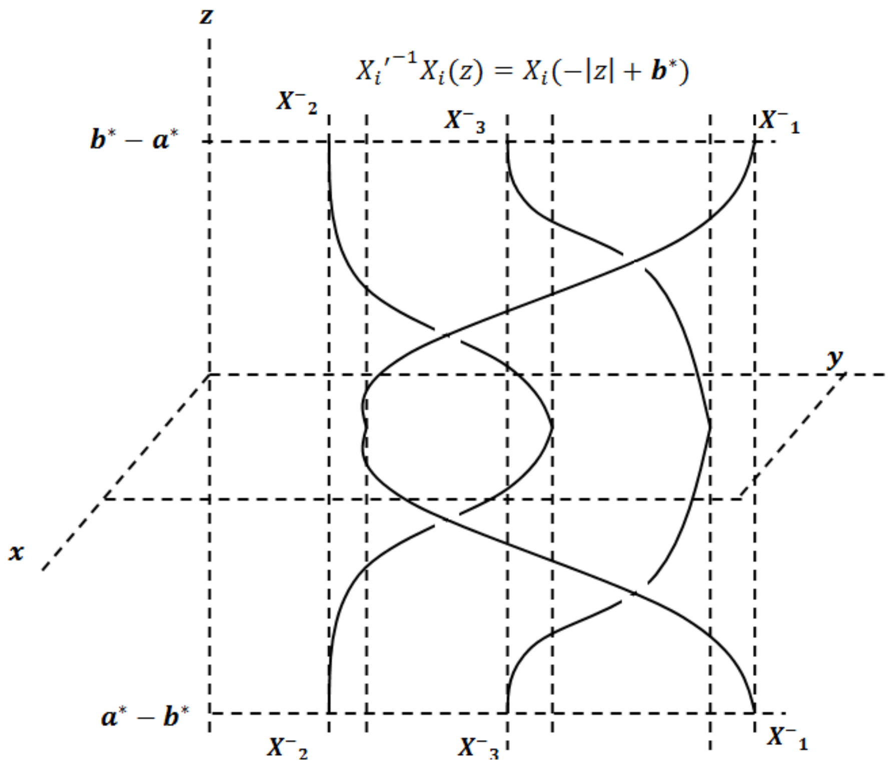


Figura 13: $X_i'^{-1}(z)$



Afirmación 2:

$$X_i(-|z|+b^\star) \text{ y } N_i(z) \text{ son s-isotópicas.}$$

Demostración:

Para cada $i = 1, 2, \cdots, n$

Definamos

$$\begin{array}{rccl} H^i: & \mathbb{R}\times[0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (z,t) & \mapsto & H^i(z,t) = X_i((1-t)a^\star + t(-|z|+b^\star)) \end{array} \quad \text{aplicación.}$$

Claramente H^i es continua. Además:

$$\begin{aligned} H^i(z,0) &= X_i(a^\star) = X_i^- = N_i(z) \\ H^i(z,1) &= X_i(-|z|+b^\star) \end{aligned}$$

Resta probar que $H^i(z,t) \in \beta_n$, para cada $t \in [0,1]$. En efecto:

Para $t = 0, 1$ se cumple. Veamos para $t \in]0,1[$.

ClaramenteH^i_t es continua, para cada $i = 1, 2, \cdots, n$. Además:

Para $z \in [b^\star - a^\star, +\infty\rangle$. Se tiene

$$H^i_t(z) = X_i^-$$

Para $z \in \langle +\infty, a^\star - b^\star]$. Se tiene

$$H^i_t(z) = X_i^-$$

También

$$H^i_t(z) \neq H^j_t(z), \forall i \neq j, \forall z \in \mathbb{R}$$

Por lo tanto

$$H^i(z,t) \in \beta_n$$

$\blacksquare$

Luego por la Afirmació 2, Se tiene

$$[X_i(z)] \bullet [X_i'^{-1}(z)] = [X_i'^{-1} X_i(z)] = [X_i(-|z|+b^\star)] = [N_i(z)]$$

Observación 3.11

1. $X_i'^{-1}(z + b^\star - a^\star) = X_i^{-1}(z)$ entonces $[X_i^{-1}(z)] = [X_i'^{-1}(z + b^\star - a^\star)] = [X_i'^{-1}(z)]$

2. Si trabajamos con $n-$trenzas $X_i(z)$ tal que

$$X_i(z) = X_i^+, \forall z \in [b^\star, +\infty\rangle$$
$$\mathrm{X}_i(z) = X_i^- = X_{\sigma(i)}^+, \forall z \in \langle -\infty, a^\star]$$

Con

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix} \in S_n$$

Se tiene:

$$[N_i(z)] = [N_i'(z)] \text{ (ya que } N_i(z) = N_i'(z))$$

Por las ultimas obervaciones, nos llevan a redefinir el concepto de $n-$trenza y el de $s-$isotopia.

Definicion 3.12:

Sean $p_1, \cdots, p_n \in \mathbb{R}^2$. Una $n-$TRENZA o una TRENZA CON $n-$CUERDAS es un conjunto de $n-$cuerdas $X_i(z)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ sin intersecciones (De ahi $X_i(z) \neq X_j(z)$ para $i \neq j$) tal que existe

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix} \in S_n$$

llamada PERMUTACION de la $n-$trenza $X_i(z)$,

con

$$X_i(z) = p_i, \forall z \in [b, +\infty\rangle$$
$$\mathrm{X}_i(z) = p_{\sigma(i)}, \forall z \in \langle -\infty, a]$$

Definicion 3.13:

Dos $n-$trenzas $X_i(z)$ y $Y_i(z)$ son llamadas FUERTEMENTE ISOTÓPICAS O S-ISOTÓPICAS si podemos transformar continuamente $X_i(z)$ en $Y_i(z)$ mediante $n-$trenzas sin variar los extremos.

Esto es, existen $n-$funciones vectoriales continuas $X^i : \mathbb{R} \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que:

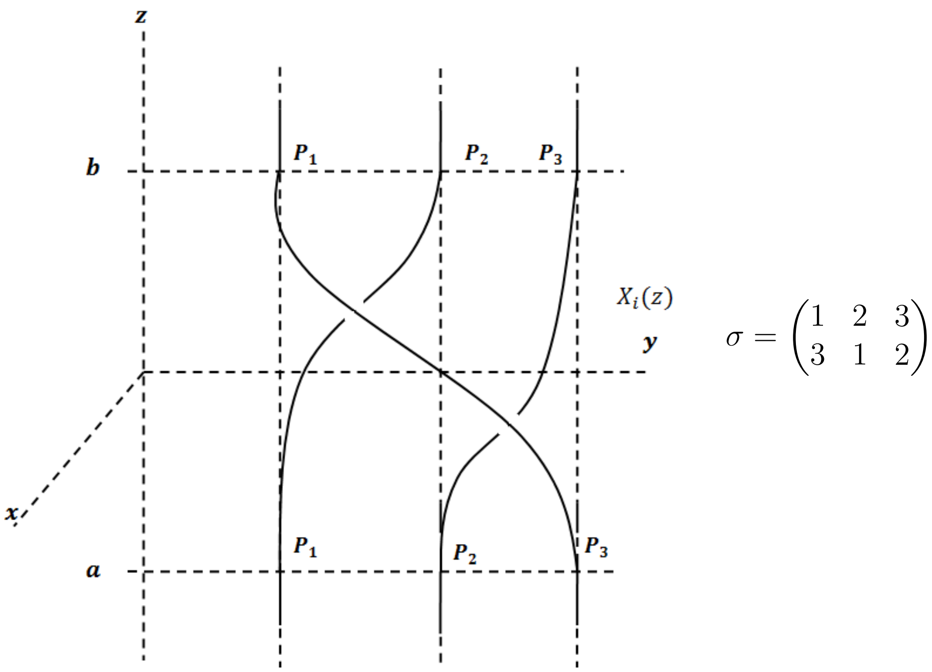
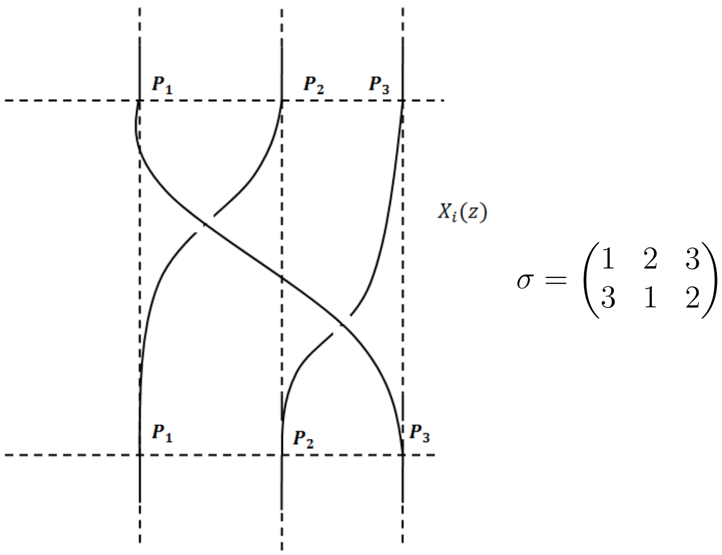
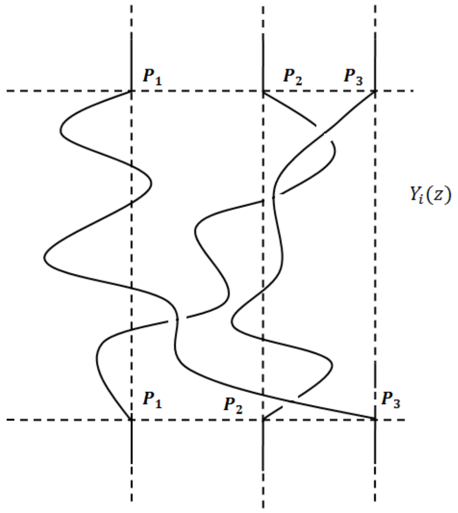


Figura 14: una 3-trenza

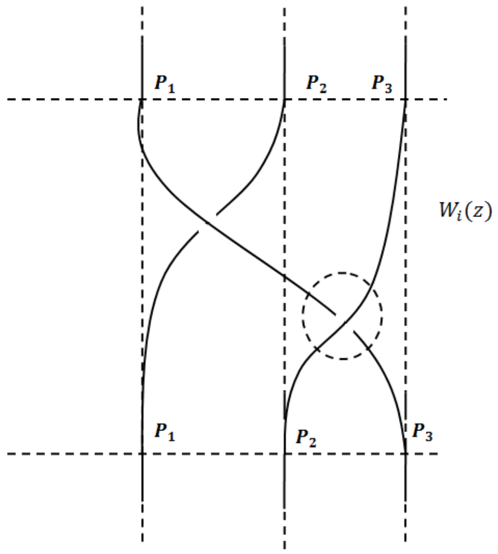
$$X^i(z,t) \in \beta_n \text{ para cada } t \in [0,1], \text{ y}$$

$$X^i(z,0) = X_i(z),$$
$$X^i(z,1) = Y_i(z).$$





$Y_i(z)$ es $s-$isotópica a $X_i(z)$



$W_i(z)$ no es $s-$isotópica a $X_i(z)$

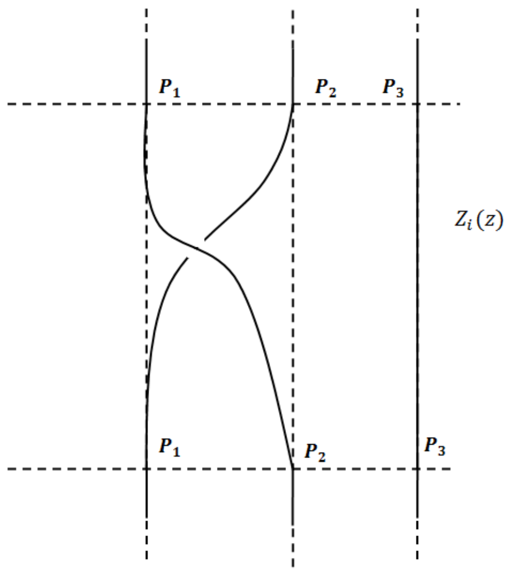


Figura 15: $Z_i(z)$ no es $s-$isotópica a $X_i(z)$

Observación:

1. Cualquier par de $n-$trenzas se pueden componer.

2. Dos $n-$trenzas s-isotopicas, tienen la misma permutacion.

Luego, ya podemos afirmar lo siguiente:

Teorema 3.14:

$$(B_n, \bullet) \text{ es un grupo}$$

Conocido como EL GRUPO DE $n-$TRENZAS DE ARTIN quien los introdujo en 1925. A cuyos elementos se les denominan TRENZAS. Es decir, un trenza es una clase de una $n-$trenza.

Observaciones:

Para $n = 1$:

$$B_n = 0$$

Definicion 3.15:

Definamos

$$\begin{array}{cccc} \mu : & B_n & \longrightarrow & S_n \\ & [X_i(z)] & \mapsto & \mu([X_i(z)]) = \sigma_x \end{array}$$

denominada LA PERMUTACIÓN TRENZA

Donde

$$\sigma_x \text{ es la permutación de la } n-\text{trenza } X_i(z)$$

Observación:

Dado algún $\sigma \in S_n$, existen diferentes trenzas que son aplicadas mediante μ en σ.

Teorema 3.16:

La permutación trenza

$$\begin{array}{cccc} \mu : & B_n & \longrightarrow & S_n \\ & [X_i(z)] & \mapsto & \mu([X_i(z)]) = \sigma_x \end{array}$$

es un epimorfismo de grupos.

Demostración:

μ está bien definida:

Sea $X_i'(z) \in [X_i(z)]$ entonces $X_i'(z)$ y $X_i(z)$ son s-isotópicas luego tienen la misma permutación σ. De ahí

$$\mu[X_i'(z)] = \sigma = \mu[X_i(z)]$$

μ es un homomorfismo:

Sean $[X_i(z)], [Y_i(z)] \in B_n$. Tenemos:

$$\mu([Y_i(z)] \bullet [X_i(z)]) = \mu([X_iY_i(z)]) = \sigma_{xy} = \sigma_y \circ \sigma_x = \mu([Y_i(z)]) \bullet \mu([X_i(z)])$$

μ es sobre:

Sea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix} \in S_n$. Tomemos $X_i(z) \in \beta_n$ tal que X_i conecta P_i con $P_{\sigma(i)}$, luego

$$\mu([X_i(z)]) = \sigma$$

Por lo tanto μ es un epimorfismo de grupos.

$\blacksquare$

Por teoría de grupos, se tiene $Ker(\mu)$ es un subgrupo normal de B_n y por el primer teorema de isomorfismo de grupos

$$\frac{B_n}{Ker(\mu)} \cong S_n = Im(\mu) \cdots (\star)$$

Definición 3.17:
Se define el GRUPO DE TRENZAS PURAS, denotado P_n, como el núcleo de la aplicación permutación trenza.

Esto es,

$$P_n = Ker(\mu)$$

Observación:

1. De $(\star)$, se tiene que el grupo de trenzas puras P_n es un subgrupo normal del grupo de trenzas de Artin B_n y además $\dfrac{B_n}{P_n} \cong S_n$

2. Por la observación del teorema 4.14, tenemos

$$P_1 = 0 \text{ y } P_n \neq 0, \forall n \geq 2$$

Teorema 3.18: (R.FOX, L. NEUWIRTH)
Para $n \geq 1$ se cumple:

1) $\pi_1(Conf(\mathbb{R}^2, n)) \cong P_n$

2) $\pi_1(\dfrac{Conf(\mathbb{R}^2, n)}{S_n}) \cong B_n$

Demostración:

Sea $b_0 = (P_1, P_2, \cdots, P_n)$ punto base de $Conf(\mathbb{R}^2, n)$. Entonces la órbita de b_0 ,

$$O(b_0) = \{\Phi(\sigma, b_0) \in Conf(\mathbb{R}^2, n) : \sigma \in S_n\}$$

es el punto base de $\dfrac{Conf(\mathbb{R}^2, n)}{S_n}$.

1) Definamos

$$\begin{array}{rccl} H: & \pi_1(Conf(\mathbb{R}^2, n)) & \longrightarrow & P_n \\ & [\lambda] & \mapsto & H([\lambda]) = [X_i(z)] \end{array}$$

Donde:

$$[\lambda] = \{\alpha : [0, 1] \longrightarrow Conf(\mathbb{R}^2, n) : \alpha \simeq \lambda \text{ rel } \{0, 1\}\}$$

Denotemos las funciones coordenadas de λ

$$\begin{array}{rccl} \lambda: & [0, 1] & \longrightarrow & Conf(\mathbb{R}^2, n) \\ & t & \mapsto & \lambda(t) = (\lambda_1(t), \cdots, \lambda_n(t)) \end{array}$$

Además

$$\lambda(0) = \lambda(1) = b_0 = (P_1, P_2, \cdots, P_n)$$

Luego

$$\begin{array}{rccl} \lambda_1 : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto & \lambda_1(t) \end{array}$$
$$\text{con } \lambda_1(0) = \lambda_1(1) = P_1$$

$$\begin{array}{rccl} \lambda_2 : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto & \lambda_2(t) \end{array}$$
$$\text{con } \lambda_2(0) = \lambda_2(1) = P_2$$

$$\vdots$$

$$\begin{array}{rccl} \lambda_n : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto & \lambda_n(t) \end{array}$$
$$\text{con } \lambda_n(0) = \lambda_n(1) = P_n$$

Claramente

$$\lambda_i(t) \neq \lambda_j(t), \forall 1 \leq i \neq j \leq n, \forall t \in [0,1].$$

Para cada $i = 1, 2, \cdots, n$. Definamos

$$\begin{array}{rccl} X_i : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & z & \mapsto & X_i(z) = \begin{cases} P_i, & z \in [1, +\infty\rangle \\ \lambda_i(z), & z \in [0,1] \\ P_i, & z \in \langle -\infty, 0] \end{cases} \end{array}$$

Claramente X_i es continua, además

$$X_i(z) = P_i, \forall z \in [1, +\infty\rangle$$
$$\mathrm{X}_i(z) = P_i, \forall z \in \langle -\infty, 0]$$

entonces $X_i(z)$ es una cuerda, además es claro que $X_i(z) \neq X_j(z)$ con $i \neq j$, de ahí $X_i(z) \in \beta_n$ y como $\sigma_x = e$ se sigue $[X_i(z)] \in P_n$.

Veamos que H está bien definida:

Sea $\lambda' \in [\lambda]$ probaremos que $[X_i'(z)] = [X_i(z)]$. De hecho, desde que $\lambda' \in [\lambda]$ entonces $\lambda' \cong \lambda$ rel $\{0,1\}$ luego existe

$$G : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow Conf(\mathbb{R}^2, n)$$

aplicación continua tal que

$$\begin{array}{c} G(s,0) = \lambda'(s) \\ G(s,1) = \lambda(s) \\ G(0,t) = \lambda'(0) = \lambda(0) = b_0 \\ G(1,t) = \lambda'(1) = \lambda(1) = b_0 \end{array}$$

Por otro lado

$$\begin{array}{rccl} X_i : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & z & \mapsto & X_i(z) = \begin{cases} P_i, & z \in [1, +\infty\rangle \\ \lambda_i(z), & z \in [0,1] \\ P_i, & z \in \langle -\infty, 0] \end{cases} \in \beta_n \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} X_i' : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & z & \mapsto & X_i'(z) = \begin{cases} P_i, & z \in [1, +\infty\rangle \\ \lambda_i'(z), & z \in [0,1] \\ P_i, & z \in \langle -\infty, 0] \end{cases} \in \beta_n \end{array}$$

donde

$$\lambda(t) = (\lambda_1(t), \cdots, \lambda_n(t)), \forall t \in [0,1]$$

$$\lambda'(t) = (\lambda_1'(t), \cdots, \lambda_n'(t)), \forall t \in [0,1]$$

Para cada $i = 1, \cdots, n$. Definamos

$$\begin{array}{rccl} X^i : & \mathbb{R} \times [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (z,t) & \mapsto & X^i(z,t) = \begin{cases} P_i, & z \in [1, +\infty\rangle \\ \pi_i(G(z,t)), & z \in [0,1] \\ P_i, & z \in \langle -\infty, 0] \end{cases} \end{array}$$

Donde

$$\begin{array}{rccl} \pi_i : & \mathbb{R}^2 \times \cdots \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x_1, \cdots, x_n) & \mapsto & \pi_i(x_1, \cdots, x_n) = x_i \end{array}$$

es la aplicación proyección en la $i-$ésima coordenada.

Se cumple

$$X^i(z,t) \in \beta_n \text{ para cada } t \in [0,1]$$

y además

$$\begin{aligned} X^i(z,0) &= X'_i(z), \\ X^i(z,1) &= X_i(z). \end{aligned}$$

De ahí,

$$[X'_i(z)] = [X_i(z)].$$

<u>H **es un homomorfismo de grupos:**</u>

Sean $[\lambda], [\lambda'] \in \pi_1(Conf(\mathbb{R}^2, n))$.

Luego

$$[\lambda][\lambda'] = [\lambda \star \lambda']$$

Donde

$$\begin{array}{rccl} \lambda \star \lambda' : & [0,1] & \longrightarrow & Conf(\mathbb{R}^2, n) \\ & t & \mapsto & \lambda \star \lambda'(t) = \begin{cases} \lambda'(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \lambda(2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \end{array}$$

Entonces

$$Z_i(z) = \begin{cases} P_i, & z \in [1, +\infty\rangle \\ \lambda_i \star \lambda'_i(z), & z \in [0,1] \\ P_i, & z \in \langle -\infty, 0] \end{cases} \in \beta_n$$

Donde

$$\lambda \star \lambda'(t) = (\lambda_1 \star \lambda'_1(t), \cdots, \lambda_n \star \lambda'_n(t)), \forall t \in [0,1]$$

También:

$$X_i(z) = \begin{cases} P_i, & z \in [1, +\infty\rangle \\ \lambda_i(z), & z \in [0,1] \\ P_i, & z \in \langle -\infty, 0] \end{cases}$$

$$Y_i(z) = \begin{cases} P_i, & z \in [1, +\infty\rangle \\ \lambda_i'(z), & z \in [0,1] \\ P_i, & z \in \langle -\infty, 0] \end{cases}$$

$$X_iY_i(z) = \begin{cases} X_i, & z \geq 0 \\ Y_i(z+1), & z \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} P_i, & z \in [1, +\infty\rangle \\ \lambda_i(z), & z \in [0,1] \\ \lambda_i'(z), & z \in [-1,0] \\ P_i, & z \in \langle -\infty, -1] \end{cases}$$

Por otro lado:

$$Z_i(\tfrac{z+1}{2}) = \begin{cases} X_i, & z \geq 0 \\ Y_i(z+1), & z \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} P_i, & z \in [1, +\infty\rangle \\ \lambda_i(z), & z \in [0,1] \\ \lambda_i'(z), & z \in [-1,0] \\ P_i, & z \in \langle -\infty, -1] \end{cases} = X_iY_i(z), \forall z \in \mathbb{R}$$

De ahí

$$H([\lambda][\lambda']) = H([\lambda])H([\lambda'])$$

<u>H **es inyectiva:**</u>

Sea $[\lambda] \in Ker(H)$ entonces $[\lambda] \in \pi_1(Conf(\mathbb{R}^2, n))$ y $H([\lambda]) = [N_i(z)]$

Luego

$$[X_i(z)] = [N_i(z)]$$

Donde

$$X_i(z) = \begin{cases} P_i, & z \in [1, +\infty\rangle \\ \lambda_i \star \lambda_i(z), & z \in [0,1] \\ P_i, & z \in \langle -\infty, 0] \end{cases}$$

con

$$\lambda(t) = (\lambda_1(t), \cdots, \lambda_n(t)), \forall t \in [0,1]$$

Entonces $X_i(z)$ y $N_i(z)$ son $s-$isotópicas. Luego existen $n-$funciones vectoriales continuas $X^i : \mathbb{R}\times[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $X^i(z,t) \in \beta_n$, para cada $t \in [0,1]$ y $X^i(z,0) = X_i(z), X^i(z,1) = N_i(z)$.

Definamos

$$\begin{array}{rccl} G: & [0,1]\times[0,1] & \longrightarrow & Conf(\mathbb{R}^2, n) \\ & (s,t) & \mapsto & G(s,t) = (X^1(z,t), \cdots, X^n(z,t)) \end{array}$$

entonces $G : \lambda \simeq \lambda_{b_0}$ rel $\{0,1\}$, de ahí $[\lambda] = [\lambda_{b_0}]$.

Donde

$$\begin{array}{rccl} \lambda_{b_0}: & [0,1] & \longrightarrow & Conf(\mathbb{R}^2, n) \\ & s & \mapsto & \lambda_{b_0}(s) = b_0 \end{array} \text{ lazo basado en } b_0.$$

<u>H **es sobre:**</u>

Sea $[X_i(z)] \in P_n$ entonces existen $a < 0$ y $b > 0$ tal que:

$$X_i(z) = P_i, \forall z \in [b, +\infty\rangle$$
$$\mathrm{X}_i(z) = P_i, \forall z \in \langle -\infty, a]$$

Definamos el lazo

$$\begin{array}{rccl} \lambda: & [0,1] & \longrightarrow & Conf(\mathbb{R}^2, n) \\ & t & \mapsto & \lambda(t) = (X_1 \circ \varphi(t), \cdots, X_n \circ \varphi(t)) \end{array}$$

Donde

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & z & \mapsto & \varphi(z) = (b-a)z + a \end{array}$$

Luego $H([\lambda]) = [X_i(z)]$

Por lo tanto H es un isomorfismo de grupos.

$\blacksquare$

2) Definamos

$$\begin{array}{rlcl} H: & \pi_1(\dfrac{Conf(\mathbb{R}^2,n)}{S_n}) & \longrightarrow & B_n \\ & [\alpha] & \mapsto & H([\alpha]) = [X_i(z)] \end{array}$$

Donde $\alpha : [0,1] \longrightarrow \dfrac{Conf(\mathbb{R}^2,n)}{S_n}$ es un lazo basado en Ob_0.

Como la aplicación proyección al cociente $P : Conf(\mathbb{R}^2,n) \longrightarrow \dfrac{Conf(\mathbb{R}^2,n)}{S_n}$ es una aplicación cubriente, entonces existe un único levantamiento de α

$$\tilde{\alpha} : [0,1] \longrightarrow Conf(\mathbb{R}^2,n)$$

Luego definamos

$$X_i = \begin{cases} P_i, & z \in [1,+\infty\rangle \\ \tilde{\alpha}_i(z), & z \in [0,1] \\ P_i, & z \in \langle -\infty, 0] \end{cases}$$

de manera similar que la parte 1, se tiene que H es un isomorfismo.

$\blacksquare$

Corolario:

1. $\pi_1(Conf(\mathbb{R}^2,1)) = \{0\}$

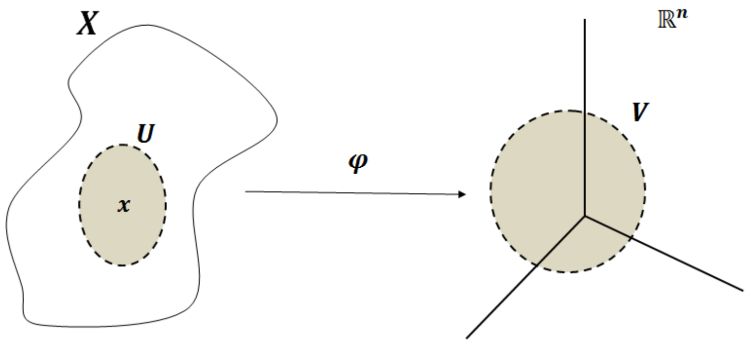
2. $P_2 \cong \mathbb{Z}$

Capítulo 4.-Homología del Espacio de Configuraciones para Variedades

4.1 Variedades Topológicas

Definición 4.1:

Un espacio topológico X es una VARIEDAD TOPOLÓGICA de dimensión n ($n \in \mathbb{N}$) si para cada punto $x \in X$ existe una vecindad abierta $U = U_x$ de x en X homeomorfa a un subconjunto abierto V de $\mathbb{R}^n$, esto es, existe $\varphi : U \longrightarrow V$ homeomorfismo.



Proposición 4.2:

Sea M un espacio topológico. Los siguientes enunciados son equivalentes:

a) M es una variedad topológica de dimensión n.

b) Cada punto de M tiene una vecindad homeomorfa a una bola abierta de $\mathbb{R}^n$.

c) Cada punto de M tiene una vecindad homeomorfa a $\mathbb{R}^n$.

Demostración:

Claramente del análisis en $\mathbb{R}^n$ $b)$ es equivalente a $c)$, así que probaremos $a)$ es equivalente a $b)$, de hecho:

$\underline{a \Longrightarrow b)}$

Sea $p \in M$ entonces existe U vecindad abierta de p en M tal que existe $\varphi : U \longrightarrow V$ homeomorfismo para algún V abierto de $\mathbb{R}^n$.

Como $\varphi(p) \in V$ entonces existe $r > 0$ tal que $B_r(\varphi(p)) \subseteq V$.
Luego

$$\varphi|_{\varphi^{-1}(B_r(\varphi(p)))} : \varphi^{-1}(B_r(\varphi(p))) \longrightarrow B_r(\varphi(p))$$

es un homeomorfismo.
Claramente $p \in \varphi^{-1}(B_r(\varphi(p)))$ y $\varphi^{-1}(B_r(\varphi(p)))$ es un abierto en M.
Así, existe $\varphi^{-1}(B_r(\varphi(p)))$ vecindad de $p \in M$ que es homeomorfa a una bola abierta de $\mathbb{R}^n$.

$\underline{b \Longrightarrow a)}$

Inmediato de la definición de variedad topológica.

■

Definición 4.3:

Un espacio topológico X es un ESPACIO HOMOGÉNEO si para todo par de puntos $x, y \in X$ existe un homeomorfismo $h : X \longrightarrow X$ tal que $h(x) = y$.

Proposición 4.4:

Sea $h : B_1(0) \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ el homeomorfismo definido por $h(x) = \frac{x}{1-\|x\|}$, con inversa $h^{-1} : \mathbb{R}^m \longrightarrow B_1(0) \subseteq \mathbb{R}^m$ dada por $h^{-1}(x) = \frac{x}{1+\|x\|}$.

Dado $a \in \mathbb{R}^m$ (fijo y arbitrario), consideremos la traslación

$$\begin{array}{rccc} T_a : & \mathbb{R}^m & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & x & \longmapsto & T_a(x) = x + a \end{array}$$

Considere el homeomorfismo

$$\varphi = h^{-1} \circ T_a \circ h : B_1(0) \longrightarrow B_1(0).$$

Se cumple $\lim_{x \to b} \varphi(x) = b, \forall b \in \partial B_1(0) = \mathbb{S}^{m-1}$

Demostración:

Sea $b \in \partial B_1(0) = \mathbb{S}^{m-1}$ se tiene:

$$\lim_{x\to b} \varphi(x) = \lim_{x\longrightarrow b} \frac{x + (1 - \|x\|)a}{(1 - \|x\|) + \|x + (1 - \|x\|)a\|} = b.$$

■

Corolario:

Dados $c, d \in B_1(0) \subseteq \mathbb{R}^m$, existe un homeomorfismo $\overline{\varphi} : D^m \longrightarrow D^m$ tal que $\overline{\varphi}(c) = d$ y $\overline{\varphi}(x) = x, \forall x \in \mathbb{S}^{m-1}$.

Demostración:

Definamos

$$\begin{array}{rccl} \overline{\varphi}: & D^m & \longrightarrow & D^m \\ & x & \longmapsto & \overline{\varphi}(x) = \lim_{y \to x} \varphi(y) \end{array}$$

Donde $\varphi(y) = h^{-1} \circ T_a \circ h(y)$ con $a = \frac{d}{1-\|d\|} - h(c) \in \mathbb{R}^m$.

Por proposición anterior $\overline{\varphi}$ es un homeomorfismo con $\overline{\varphi}(c) = d$ y $\overline{\varphi}(x) = x, \forall x \in \mathbb{S}^{m-1}$.

■

Proposición 4.5:

Toda variedad topológica M conexa y Hausdorff de dimensión n ($n \geq 1$) es un espacio homogéneo.

Demostración:

El conjunto $Homeo(M) = \{f : M \longrightarrow M | f$ es homeomorfismo $\}$ junto con la composición usual de aplicaciones, es un grupo.

Definamos

$$\begin{array}{rccl} \Phi: & Homeo(M) \times M & \longrightarrow & M \\ & (f, x) & \longmapsto & \Phi(f, x) = f(x) \end{array}$$

Se cumple:

i) $\Phi(id_M, x) = id_M(x) = x, \forall x \in M$ con $id_M \in Homeo(M)$ elemento neutro.

ii) $\Phi(f,\Phi(g,x)) = \Phi(f\circ g,x), \forall f,g \in Homeo(M), \forall x \in M.$

Denotando $Ox = \{\Phi(f,x) : f \in Homeo(M)\}$ para cada $x \in M$, se tiene que $\{Ox : x \in M\}$ es una partición de M y además cada Ox es abierto y cerrado de M.

Luego de la conexidad de M se sigue $Ox = M, \forall x \in M$. De ahí, para cualquier par $x, y \in M$ se tiene $y \in Ox$ entonces existe $h \in Homeo(M)$ tal que $y = \Phi(h,x) = h(x)$.

■

Proposición 4.6:

Si M es una variedad topológica de dimensión n y de Hausdorff entonces $Conf(M,k)$ es una variedad topológica de dimensión nk y de Hausdorff.

Demostración:

Por ser M de Hausdorff se tiene que $Conf(M,k)$ es un abierto de M^k, la cual se sabe que es una variedad de dimensión nk, luego por ende es inmediato nuestro resultado.

■

4.2 Homología del Espacio de Configuraciones del Espacio Proyectivo Complejo

Sea $\mathbb{C}^n$ el espacio complejo de dimensión $n (n \geq 1)$

Proposición 4.7:

Para $n \geq 0, \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ es un $\mathbb{C}^\star-$conjunto.

Donde

$$\mathbb{C}^\star = \mathbb{C} \setminus \{0\} \text{ (grupo multiplicativo).}$$

$\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ considerado como subespacio de $\mathbb{C}^{n+1}$.

Demostración:

Definamos

$$\begin{array}{rccl}\Phi: & \mathbb{C}^{\star}\times\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\}\\ & (\lambda,z) & \mapsto & \Phi(\lambda,z)=\lambda z\end{array}$$

Claramente Φ es una aplicación. Además para $z\in\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\}$,tenemos

$$\Phi(1,z)=1z=z.$$

Así

$$\Phi(1,z)=z,\forall z\in\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\}.$$

También para $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{C}^{\star}$ y $z\in\mathbb{C}^{n+1}$,se tiene:

$$\Phi(\lambda_1,\Phi(\lambda_2,z))=\Phi(\lambda_1,\lambda_2 z)=\lambda_1(\lambda_2 z)=(\lambda_1\lambda_2)z=\Phi(\lambda_1\lambda_2,z),$$

Resta probar que

$$\begin{array}{rccl}\Phi_\lambda: & \mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\}\\ & z & \mapsto & \Phi_\lambda(z)=\lambda z\end{array}$$

es una aplicación continua, $\forall\lambda\in\mathbb{C}^{\star}$.

En efecto:

Sea $\lambda\in\mathbb{C}^{\star}$(fijo y arbitrario).

Sea $z_0\in\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\}$ (fijo y arbitrario). Veamos que Φ_λ es continua en z_0. De hecho, sea $\epsilon>0$.

Tomemos $0<\delta<\frac{\epsilon}{|\lambda|}$ (Recuerde que $\lambda\neq 0$)

Para $z\in\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\}$ y $\| z-z_0 \|<\delta$ se tiene:

$$\| \Phi_\lambda(z)-\Phi_\lambda(z_0) \|=\| \lambda z-\lambda z_0 \|=\| \lambda(z-z_0) \|=|\lambda|\| z-z_0 \|<|\lambda|\frac{\epsilon}{|\lambda|}=\epsilon.$$

Así

$$\Phi_\lambda \text{ es continua en } z_0,\forall z_0\in\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\}.$$

De ahí

$$\Phi_\lambda \text{ es continua } \forall\lambda\in\mathbb{C}^{\star}$$

Por lo tanto

$$\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\} \text{ es un } \mathbb{C}^{\star}\text{−espacio.}$$

■

Luego sabemos que existe el espacio de órbitas

$$\frac{\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\}}{\mathbb{C}^{\star}} = \{Oz \subseteq \mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\} : z \in \mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\}\}$$

el cuál es un espacio topológico (con la topología cociente) conocido como EL ESPACIO PROYECTIVO COMPLEJO DE DIMENSIÓN n y es denotado por $\mathbb{CP}^n$.

Esto es

$$\mathbb{CP}^n =: \frac{\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\}}{\mathbb{C}^{\star}} \qquad (n \geq 0)$$

Con

$$O(z) = \{\Phi(\lambda, z) \in \mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\} : \lambda \in \mathbb{C}^{\star}\} = \{\lambda z \in \mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\} : \lambda \in \mathbb{C}^{\star}\}$$

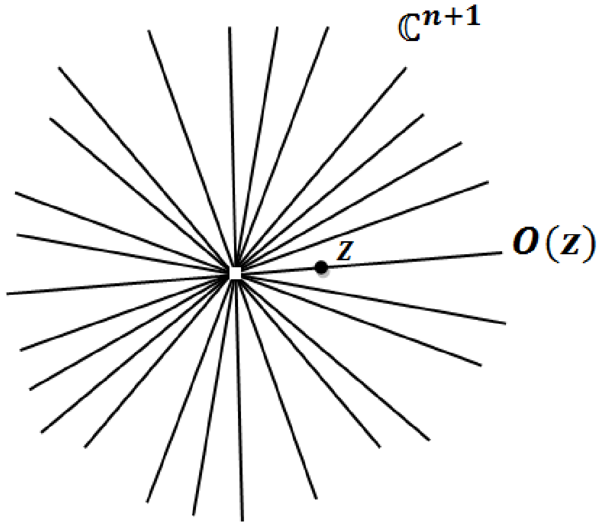


Figura 16: $\mathbb{CP}^n$

Observaciones:

Claramente la aplicación proyección al cociente

$$\begin{array}{rccc} \pi: & \mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{CP}^n \\ & z & \mapsto & \pi(z)=O(z) \end{array}$$

es una aplicación continua y sobreyectiva. Además es abierta.

Denotemos

$$\mathbb{S}^n_{\mathbb{C}} =: \{z \in \mathbb{C}^{n+1} : \|Z\| = 1\} \approx \mathbb{S}^{2n+1}$$

Consideremos

$$i : \mathbb{S}^n_{\mathbb{C}} \hookrightarrow \mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\} \text{ la aplicación inclusión}$$

Luego

$$\pi \circ i : \mathbb{S}^n_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{CP}^n$$

es una aplicación continua.

Proposición 4.8:

$$\pi \circ i \text{ es sobreyectiva}$$

Demostración:

Sea $O(z) \in \mathbb{CP}^n$.

Tomemos $w = \frac{z}{\|z\|} \in \mathbb{S}^n_{\mathbb{C}}$. Se tiene

$$\pi \circ i(w) = \pi(\tfrac{z}{\|z\|}) = O(\tfrac{z}{\|z\|}) = O(z) \qquad \text{(pues } \tfrac{1}{\|z\|}z = \Phi(\tfrac{1}{\|z\|}, z) \in O(z))$$

■

Corolario:

$$\mathbb{CP}^n \text{ es compacto, conexo y conexo por caminos.}$$

Observación:

1. $\mathbb{CP}^0 = \dfrac{\mathbb{C} \setminus \{0\}}{\mathbb{C}^\star} = \{\mathbb{C}^\star\}$

2. Sean $z, w \in \mathbb{S}^n_{\mathbb{C}}$. Definamos

$$z \sim w \Longleftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{C}^\star \text{ tal que } z = \lambda w.$$

Claramente se puede verificar que $'' \sim ''$ es una relación de equivalencia en $\mathbb{S}^n_{\mathbb{C}}$.

Luego

$$\frac{\mathbb{S}^n_{\mathbb{C}}}{\sim} = \{[z] \subseteq \mathbb{S}^n_{\mathbb{C}} : z \in \mathbb{S}^n_{\mathbb{C}}\}$$

Donde

$$[z] = \{w \in \mathbb{S}^n_{\mathbb{C}} : w \sim z\} = \{\lambda z \in \mathbb{S}^n_{\mathbb{C}} : \lambda \in \mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{C}^\star\}$$

Afirmación 1:

$$[z] = O(z), \forall z \in \mathbb{S}^n_{\mathbb{C}}$$

Demostración:

Para $z \in \mathbb{S}^n_{\mathbb{C}}$ (fijo y arbitrario).

Sea $w \in [z]$ entonces $\exists \lambda \in \mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{C}^\star$ tal que $w = \lambda z$, de ahí $w \in O(z)$.

Sea $w \in O(z)$ entonces $\exists \lambda \in \mathbb{C}^\star$ tal que $w = \lambda z$ como $w, z \in \mathbb{S}^n_{\mathbb{C}}$, se sigue $|\lambda| = 1$, de ahí $\lambda \in \mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{C}^\star$ y $w = \lambda z$, así $w \in [z]$.

$\blacksquare$

Afirmación 2:

$$O(z) = O(\frac{z}{\|z\|}), \forall z \in \mathbb{C}^{n+1} \backslash \{0\}$$

Demostración:

Sea $z \in \mathbb{C}^{n+1} \backslash \{0\}$ (fijo y arbitrario)

Tenemos $\frac{z}{\|z\|} = \frac{1}{\|z\|} z = \Phi(\frac{1}{\|z\|}, z) \in O(z)$. De ahí $O(z) = O(\frac{z}{\|z\|})$

$\blacksquare$

Afirmación 3:

$$\frac{S^n_{\mathbb{C}}}{\sim} = \mathbb{CP}^n$$

Demostración:

Por afirmación 1, $\frac{S^n_{\mathbb{C}}}{\sim} \subseteq \mathbb{CP}^n$

Ahora sea $O(z) \in \mathbb{CP}^n$ luego por afirmación 2, se tiene:

$$O(z) = O(\frac{z}{\|z\|}) = [\frac{z}{\|z\|}] \in S^n_{\mathbb{C}} \text{ entonces } O(z) \in S^n_{\mathbb{C}}$$

Así $\mathbb{CP}^n \subseteq \frac{S^n_{\mathbb{C}}}{\sim}$.

De ahí, $\mathbb{CP}^n = \frac{S^n_{\mathbb{C}}}{\sim}$

■

Lema 4.9: Para $n \in \mathbb{N}$

$$H_q(\mathbb{S}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & , \quad q = 0 \text{ o } q = n \\ 0 & , \quad q \quad \text{otro caso} \end{cases}$$

Proposición 4.10:

$$\mathbb{CP}^1 \approx \mathbb{S}^2$$

Proposición 4.11

$$Conf(\mathbb{CP}^1, 2) \approx \mathbb{S}^2$$

Demostración:

Resulta del ejemplo y la proposición

■

Proposición 4.12:

$$H_q(Conf(\mathbb{CP}^1, 2)) = \begin{cases} \mathbb{Z} & , \quad q = 0 \text{ o } q = 2 \\ 0 & , \quad q \quad \text{otro caso} \end{cases}$$

Lema 4.13:

$$H_q(\mathbb{CP}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & , \quad q \quad \text{par con } 0 \leq q \leq 2n \\ 0 & , \quad q \quad \text{otro caso} \end{cases}$$

Lema 4.14:

$$H_q(\mathbb{CP}^n \setminus \{\star\}) = H_q(\mathbb{CP}^{n-1})$$

Proposición 1.15

La aplicación proyección en la primera coordenada

$$
\begin{array}{rccc}
P: & Conf(\mathbb{CP}^n,2) & \longrightarrow & Conf(\mathbb{CP}^n,1) \\
& \text{(x,y)} & \longmapsto & P(x,y)=x
\end{array}
$$

es una fibración con fibra $F = Conf(\mathbb{CP}^n \setminus \{\star\},1)$

Teorema 4.16:
Cualquier fibración

$$F \hookrightarrow E \longrightarrow B$$

no induce una sucesión exacta de la forma

$$\cdots \longrightarrow H_{q+1}\left(B\right) \longrightarrow H_q\left(F\right) \longrightarrow H_q\left(E\right) \longrightarrow H_q\left(B\right) \longrightarrow \cdots$$

Demostración:

Por reducción al absurdo!!

Esto es, supongamos que cualquier fibración induce una sucesión exacta en homología$\cdots$ (H.A)

De ahí la siguiente fibración

$$Conf(\mathbb{CP}^n \setminus \{\star\},1) \hookrightarrow Conf(\mathbb{CP}^n,2) \longrightarrow Conf(\mathbb{CP}^n,1)$$

induce la sucesión exacta

$$\cdots \longrightarrow H_{q+1}\left(\mathbb{CP}^n\right) \longrightarrow H_q\left(\mathbb{CP}^n \setminus \{\star\}\right) \longrightarrow H_q\left(Conf(\mathbb{CP}^n,2)\right) \longrightarrow H_q\left(\mathbb{CP}^n\right) \longrightarrow \cdots$$

Luego , tenemos:

$$\cdots \longrightarrow H_{q+1}\left(\mathbb{CP}^n\right) \longrightarrow H_q\left(\mathbb{CP}^{n-1}\right) \longrightarrow H_q\left(Conf(\mathbb{CP}^n,2)\right) \longrightarrow H_q\left(\mathbb{CP}^n\right) \longrightarrow \cdots$$

Para $q = 0, 2, \cdots, 2(n-1)$ se tiene:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow H_q\left(Conf(\mathbb{CP}^n,2)\right) \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

de ahí, resulta:

$$H_q\left(Conf(\mathbb{CP}^n,2)\right) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

Para $q = 2n$ se tiene:

$$0 \longrightarrow H_{2n}\left(Conf(\mathbb{CP}^n, 2)\right) \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

de ahí,

$$H_{2n}\left(Conf(\mathbb{CP}^n, 2)\right) = \mathbb{Z}$$

Para q **otro caso** se tiene:

$$0 \longrightarrow H_q\left(Conf(\mathbb{CP}^n, 2)\right) \longrightarrow 0$$

de ahí,

$$H_q\left(Conf(\mathbb{CP}^n, 2)\right) = 0$$

Por lo tanto

$$H_q(Conf(\mathbb{CP}^n, 2)) = \begin{cases} \mathbb{Z} \quad , \quad q = 2n \\ \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \quad , \quad 0 \leq q \leq 2(n-1) \quad con \quad q \quad par \\ \ 0 \quad , \quad otro \quad caso \end{cases}$$

En particular para $q = 0, n = 1$ tenemos:

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = H_0(Conf(\mathbb{CP}^1, 2)) = \mathbb{Z} \textbf{ (Contradicción!!)}$$

$\blacksquare$

Proposición 4.17:

$$H_1(Conf(\mathbb{CP}^n, 2)) = 0 \quad , \forall n \geq 1$$

Demostración:

Tenemos

$$Conf(\mathbb{CP}^n, k) = \coprod_{i=1}^{n} Conf_i(\mathbb{CP}^n, k)$$

Donde

$$Conf_i(\mathbb{CP}^n, k) = \{(x_1, \cdots, x_k) \in Conf(\mathbb{CP}^n, k) : dim\langle x_1, \cdots, x_k \rangle = i\}$$

para cada $i = 1, \cdots, n$.

Observación:

i) $Conf_1(\mathbb{CP}^1, k) = Conf(\mathbb{CP}^1, k)$

ii) $Conf_1(\mathbb{CP}^n, 2) = Conf(\mathbb{CP}^n, 2)$

Utilizando la fibración localmente trivial(Ver [2])

$$\begin{array}{rccl} \gamma: & Conf_i(\mathbb{CP}^n, k) & \longrightarrow & Gr^i(\mathbb{CP}^n \\ & (x_1, \cdots, x_k) & \longmapsto & \gamma(x_1, \cdots, x_k) = \langle x_1, \cdots, x_k \rangle \end{array}$$

con fibra $Conf_i(\mathbb{CP}^i, k)$. Se obtiene la siguiente sucesión exacta en grupos de homotopía

$$\cdots \longrightarrow \pi_1\left(Conf_i(\mathbb{CP}^i, k)\right) \longrightarrow \pi_1\left(Conf_i(\mathbb{CP}^n, k)\right) \longrightarrow \pi_1\left(Gr^i(\mathbb{CP}^n\right) \longrightarrow 0$$

En particular para $i = 1$ y $k = 2$ se tiene

$$\cdots \longrightarrow \pi_1\left(Conf(\mathbb{CP}^1, 2)\right) \longrightarrow \pi_1\left(Conf(\mathbb{CP}^n, 2)\right) \longrightarrow \pi_1\left(Gr^1(\mathbb{CP}^n\right) \longrightarrow 0$$

luego

$$\cdots \longrightarrow \pi_1\left(\mathbb{S}^2)\right) \longrightarrow \pi_1\left(Conf(\mathbb{CP}^n, 2)\right) \longrightarrow \pi_1\left(Gr^2(\mathbb{C}^{n+1}\right) \longrightarrow 0$$

de ahí

$$0 \longrightarrow \pi_1\left(Conf(\mathbb{CP}^n, 2)\right) \longrightarrow 0$$

entonces $\pi_1\left(Conf(\mathbb{CP}^n, 2)\right) = 0$

Finalmente utilizando el teorema de Hurewicz se sigue nuestro resultado.

$\blacksquare$

Bibliografía

[1] Munkres, J.R. (1975). *Topology, a First Course.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs.

[2] Artin, E. (1947). *Theory of braids.* Annals of Mathematics, 101–126.

[3] Berceanu, B., and Parveen, S. (2012). *Braid groups in complex projective spaces.* Advances in Geometry, 12(2), 269–286.

[4] Vick, J. W. (2012). *Homology theory: an introduction to algebraic topology.* (Vol. 145). Springer Science & Business Media.

[5] Massey, W. S. (2012). *Singular homology theory.* (Vol. 70). Springer Science & Business Media.

[6] Cohen, F. R. (2010). *Introduction to configuration spaces and their applications.* In Braids (pp. 183-261). Hackensack, NJ: World Scientific Publisher.