UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA
Facultad de Ciencias Exactas
Departamento de Matemática

Trabajo de Tesis doctoral

Aproximaciones en productos verbales de grupos y productos corona verbales de grupos, propiedades de permanencia y aplicaciones.

Tesista: Javier Brude
Director: Román Sasyk
Codirector: Pedro Massey
Año: 2021

Una pequeña no biografía antes de empezar, a modo de agradecimientos

La universidad pública, aun gratuita, carga sobre todos los que la transitan el pesado precio del conocimiento. El momento de eureka no es necesariamente bienvenido en todos los contextos y en más de un caso, la vida cambia para siempre.

Siempre sentí cierto orgullo de ser hijo de la educación pública. Desde el jardín de infantes hasta la universidad obtuve educación gratuita aunque, en honor a la verdad, no necesariamente de calidad. En la cuarta clase de análisis tuve mi primer golpe con la realidad: la noción de límite. En la secundaria el último tema de quinto año había sido función exponencial a los apurones, sentía que todo el mundo le parecía obvio de lo que estaban hablando menos a mí. Así necesité mi primer libro de matemática. Aún no trabajaba por lo que fui con mi mamá al la librería. Cuando pasamos por caja ella agregó un señalador que decía ”hay que luchar contra viento y marea”. El gesto aún hoy me emociona y me cuesta encontrar en la educación formal algún consejo más sabio.

Luego de lo sucedido decidí buscar trabajo. En la escuela me habían convencido de lo necesario que era para la sociedad como perito mercantil con orientación contable e impositiva... Encontré trabajo como data entry y duré una semana. Doce horas de trabajo, se pagaban ocho, “si no te gusta andate”. Sentí mucha vergüenza de la situación: en mi familia se relataba con orgullo que mi abuelo trabajó doce horas durante decenios para comprarse la casa y yo toleré esa carga por solo una semana. Durante años di clases particulares, se cobraba poco, pero me permitían estudiar. El único problema es que las fechas de parciales y la desesperación de los alumnos de secundaria suelen coincidir, lo que un trabajo aparentemente relajado genera obligaciones que no siempre se llevan bien con los propios proyectos educativos.

A mis 22 años, con mi abuelo anciano y mi mamá cuidando de él, entendí a la fuerza que la ropa no se lavaba sola, que el jabón no aparecía por arte de magia y que cocinar requería tiempo y esfuerzo. El momento de eureka que comentaba al principio fue cuando entendí la relación directa entre el dinero que me daban mis viejos durante mi adolescencia y la frecuencia con que comíamos fideos.

Debido a esa experiencia, me es importante dejar asentado que mi educación no es hija del mérito sino de las oportunidades. No solo gracias a la beca CONICET, sino también a que muchas personas estuvieron a mi alrededor, sosteniéndome durante más de treinta años es que pude escribir esta tesis. Si bien es académicamente justo juzgar el desempeño académico a través de ella, estas páginas cargan los sueños, frustraciones y sacrificios de cada una de las anteriores generaciones que no tuvieron la oportunidad de ingresar a la universidad. Por eso, con tanta humildad como convicción, no quiero olvidarme jamás que el acceso al conocimiento es un derecho; no quiero olvidarme qué significa ser el estudiante que siente que no encaja, que trabaja en negro para llegar a fin de mes y que tiene que subsanar su educación media principalmente con buena voluntad. Ojalá que el ingreso a la educación superior sea un derecho y no un acto de rebeldía.

Por todo esto quiero agradecer primeramente a mis familiares, espero haberme convertido en una persona digna de sus esfuerzos y sacrificios. Aunque la frase original tiene otro sentido, no encuentro una mejor expresión que (despojada de su motivo original) “si llegué hasta aquí, es porque viajé sobre hombros de gigantes”.

Me es también importante agradecer a la mujer que me acompaña todos los días desde hace trece años. Sin ella, creo que nada tendría sentido. Es la otra cara de la misma moneda, no en el esfuerzo generacional sino en el soporte diario y en el amor que todos los seres humanos necesitamos para hacer de la vida un viaje menos tedioso.

Allá por al año 2013 conocí a Román en la materia análisis funcional, durante mi carrera de grado. En ese momento estaba muy frustrado con la matemática y pensando seriamente que lo mío era la antropología. Las palabras de aliento en el momento justo pueden cambiar el destino de las personas. Gracias Román por tu apoyo dentro y fuera de la universidad.

Quiero por último mencionar mi paso por la Universidad Nacional de La Plata. La facultad de Exactas me abrió las puertas, me permitió desarrollar mi plan de estudios y me brindó un ambiente inmejorable para trabajar y desarrollarme como persona y como profesional.

Índice general

1 Introducción

Dada una familia de grupos, la suma directa y el producto libre proporcionan formas de construir nuevos grupos a partir de ellos. Aunque ambas operaciones son bastante diferentes, comparten las siguientes propiedades comunes

1. asociatividad;
2. conmutatividad;
3. el producto contiene subgrupos que generan el producto de la familia;
4. estos subgrupos son isomorfos a los grupos originales de la familia;
5. la intersección de un subgrupo con el subgrupo normal generado por el resto es la identidad.

En [42], Kurosh preguntó si había otras operaciones de grupos que cumplieran las propiedades anteriores. Este problema se resolvió afirmativamente en [25], donde, para cada $k \in \mathbb{N}$, Golovin definió el producto k-nilpotente de grupos y demostró que satisface las cinco propiedades antes mencionadas. El producto k-nilpotente se define de la siguiente manera

Definición 1.1. *Sea $\{G_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ una familia de grupos indexados en un conjunto $\mathcal{I}$ y $\mathcal{F} := \ast_{i\in\mathcal{I}} G_i$ el producto libre de la familia. Sea ${}_1[G_i]^{\mathcal{F}}$ el subgrupo cartesiano de $\mathcal{F}$, es decir, el subgrupo normal de $\mathcal{F}$ generado por conmutadores de la forma $[g_i, g_j]$ con $g_i \in G_i$, $g_j \in G_j$ e $i \neq j$; recursivamente definimos ${}_k[G_i]^{\mathcal{F}} := [\mathcal{F}, {}_{k-1}[G_i]^{\mathcal{F}}]$. El producto k-nilpotente de la familia es el grupo cociente*

$$\mathop{\ast}_{i\in\mathcal{I}}^{k} G_i := \mathcal{F} \big/ {}_k[G_i]^{\mathcal{F}}$$

Observar que el caso $k = 1$ es la suma directa de la familia. Golovin demostró que los productos nilpotentes de grupos finitos son finitos. Los artículos [24], [45] y más recientemente [70], analizaron con más detalle algunas propiedades del producto 2-nilpotente de grupos. Además, por ejemplo, en [35], [46], [47], [50], [74] se estudiaron algunas propiedades teóricas específicas de la teoría de grupos como *capability* y el invariante de Baer de productos k-nilpotentes de un número finito de grupos cíclicos. Podría decirse que aún falta el estudio de productos k-nilpotentes de grupos arbitrarios para $k \geq 3$.

A mediados de los años cincuenta, Moran extendió el trabajo de Golovin en otra dirección al descubrir una nueva forma de definir operaciones en grupos que cumplían con los requisitos de Kurosh. Su construcción se basa en la noción de subgrupos verbales. En términos generales, dado un grupo G y un subconjunto W del grupo libre en una cantidad arbitraria de símbolos, el subgrupo verbal de G para las palabras en W es el subgrupo de G generado por la evaluación de todas las palabras de W en los elementos de G. En [54], Moran definió el producto verbal de una familia de grupos de la siguiente manera.

Definición 1.2. *Sea $\{G_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ una familia de grupos indexados en $\mathcal{I}$ y consideremos $\mathcal{F} := \ast_{i\in\mathcal{I}} G_i$, el producto libre de la familia. Sea $W \subseteq F_\infty$ un conjunto de palabras y $W(\mathcal{F})$ el subgrupo verbal correspondiente de $\mathcal{F}$. Denotemos por $[G_i]^{\mathcal{F}}$ el subgrupo cartesiano $\mathcal{F}$, es decir la clausura normal de $\mathcal{F}$ generada por los conmutadores de la forma $[g_i, g_j]$ con $g_i \in G_i$, $g_j \in G_j$ e $i \neq j$. El producto verbal de la familia está definido por*

$$\mathop{\ast}_{i\in\mathcal{I}}^{w} G_i := {}^{\mathcal{F}}\!\big/_{W(\mathcal{F}) \cap [G_i]^{\mathcal{F}}}$$

Aunque esta definición es, en principio, diferente a la dada por Golovin, en [54] y [55] Moran demostró que el producto k-nilpotente de grupos es de hecho un caso particular de producto verbal de grupos. Más precisamente, es el producto verbal obtenido de una sola palabra n_k, que es recursivamente definido por las fórmulas $n_1 := [x_2, x_1]$; $n_k := [x_{k+1}, n_{k-1}]$. Dedicamos el capítulo 4 a recopilar varios resultados, propiedades generales y ejemplos de esta construcción. Estos resultados fueron redemostrados con técnicas y escritura moderna en [8].

Es evidente que tener otras nociones de productos en grupos además del producto libre y la suma directa, proporciona formas "nuevas" de construir grupos. Por lo tanto, es de interés estudiar si varias propiedades estructurales y aplicaciones del producto libre y la suma directa se trasladan a estas operaciones más generales sobre grupos. Hasta donde sabemos, aparte de algunos artículos de finales de los años cincuenta y principios de los sesenta (véase por ejemplo, [55], [56], [73], [75]), y el hecho de que los productos en grupos se mencionaron brevemente en los libros clásicos [48], [58], la línea de investigación iniciada por Golovin parece haber sido descuidada en los últimos años.

En [70], Sasyk tomó el estudio de productos 2-nilpotentes de grupos desde el punto de vista de la dinámica de las acciones de grupos y demostró, entre otras cosas, que la amenabilidad, exactitud, propiedad de Haagerup y la propiedad (T) de Kazhdan se preservan tomando producto 2-nilpotente de grupos. Las propiedades antes mencionadas son relevantes en varias áreas de las matemáticas, por ejemplo, están en el centro de las conexiones entre la teoría de grupos y las álgebras de operadores (ver por ejemplo, [6], [7], [14], [44], [81]). Como tal, era tentador ver si el trabajo realizado en [70] podía extenderse a otros productos nilpotentes de grupos. Sin embargo, dado que cierta sucesión exacta corta que fue el ingrediente clave en varias de las demostraciones en [70] no está presente en otros productos nilpotentes, se requirió de nuevas ideas para abordar este problema.

Fue aún más problemático lidiar con la soficidad y la hiperlinealidad, otras dos propiedades importantes de grupos que surgen del estudio de la dinámica de las acciones de grupos. Estas propiedades han sido de mucho interés en los últimos años debido a sus múltiples aplicaciones para problemas de interés actual (ver, por ejemplo, [59], [62], [77]) y estaban fuera del alcance de las técnicas implementadas en [70]. Una de las motivaciones primigenias de la presente tesis fue abordar este vacío. Aquí, resolvemos estos problemas mediante el análisis de la estructura de los productos verbales de grupos. El primero de los resultados principales es el siguiente.

Teorema 1.3. *Soficidad, hiperlinealidad, soficidad débil, amenabilidad, propiedad de Haagerup, propiedad (T) de Kazhdan y exactitud son preservadas por tomar productos k-nilpotentes de dos grupos.*

Además, mostramos contraejemplos que evidencian que ser ordenable o bi-ordenable no es una propiedad que se preserve tomando productos k-nilpotentes de grupos para $k \geq 2$.

También aprovechamos para comenzar a estudiar otras familias de productos verbales de grupos, los *productos solubles* y los *productos de Burnside* presentados por Moran en [55] (para su definición, ver los Ejemplos 4.20 (iv) y 4.20 (v)). En estos casos mostramos los siguientes Teoremas.

Teorema 1.4. *Soficidad, hiperlinealidad, soficidad débil, amenabilidad, propiedad de Haagerup, propiedad (T) de Kazhdan y exactitud son preservadas por tomar productos solubles de dos grupos. Por otra parte, la propiedad (T) de Kazhdan no es preservada por productos solubles.*

Teorema 1.5. *Soficidad, hiperlinealidad, soficidad débil, amenabilidad, propiedad de Haagerup, propiedad (T) de Kazhdan y exactitud son preservadas por tomar productos k-Burnside para $k = 2, 3, 4, 6$ entre dos grupos.*

Dado que Moran demostró que los productos solubles entre dos grupos finitos pueden ser infinitos (ver la Proposición 4.26), los resultados y ejemplos que surgen de productos solubles son, en general, diferentes de los que involucran productos nilpotentes.

Los Teoremas 1.3, 1.4 y 1.5 junto con la asociatividad de los productos verbales, nos permite probar el siguiente corolario.

Corolario 1.6. *Si $\{G_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ es una familia numerable de grupos sóficos (respectivamente hiperlineales, linealmente sóficos, débilmente sóficos, amenables, con propiedad de Haagerup o exactos), entonces el grupo $\overset{w}{\underset{i\in\mathcal{I}}{\ast}} G_i$ es sófico, (respectivamente hiperlineal, linealmente sófico, débilmente sófico, amenable, con propiedad de Haagerup o exacto), donde los productos verbales considerados son el producto nilpotente, el producto soluble o el producto k-Burnside con $k = 2, 3, 4, 6$.*

Los productos verbales son adecuados para hacer una construcción similar al producto corona restringido, llamada *productos corona verbales restringidos*, donde la suma directa se reemplaza por productos verbales (ver el Capítulo 5 para una definición precisa). Esta noción fue introducida por Shmelkin en [72] para proporcionar una generalización del Teorema de embebimiento de Magnus. Desde entonces, los productos corona verbales se han utilizado principalmente como una herramienta en el ámbito de las variedades de grupos. De hecho, en la introducción a su libro clásico [58], H. Neumann escribió *"Creo que el Teorema del embebimiento de Shmelkin debería ser el punto de partida para el estudio del producto de variedades"* (para más referencias, ver por ejemplo, [10], [51], [52]). Sin embargo, parece que los productos corona verbales no se habían estudiado desde el punto de vista de la dinámica de acciones de grupos hasta [69], donde se emplearon, sin conocer sus usos anteriores, en la clasificación de las álgebras de von Neumann (ver [70] para más detalles).

Motivado por un Teorema de Cornulier, Stalder y Valette que afirma que el producto corona restringido de grupos con la propiedad Haagerup tiene la propiedad Haagerup [16], [17]; en [70] Sasyk demostró que un resultado similar es válido para producto corona 2-nilpotente restringido. En esta tesis extendemos la demostración presentada en [70] para probar el siguiente resultado más general.

Teorema 1.7. *Sean G y H grupos con la propiedad Haagerup. Sea $W \subseteq F_\infty$ un conjunto de palabras de manera que su correspondiente producto verbal conserve la propiedad de Haagerup. Entonces su producto corona verbal restringido tiene la propiedad Haagerup. En particular, los productos corona nilpotentes restringidos, los productos corona solubles restringidos y los productos corona de k-Burnside restringidos con $k = 2, 3, 4, 6$ entre grupos con la propiedad Haagerup tienen la propiedad Haagerup.*

En [36], Holt y Rees mostraron que los productos corona restringidos entre un grupo sófico y un grupo actuante con la propiedad de ser residualmente finito son sóficos. Simultáneamente, en un trabajo bastante técnico, Hayes y Sales relajaron la condición sobre el grupo que actúa y mostraron que la soficidad se conserva al tomar productos corona restringidos de grupos sóficos, [32]. Todavía se desconoce si las extensiones de la forma sófico-por-sófico son grupos sóficos y se conocen muy pocas propiedades de permanencia de la soficidad, de ahí la importancia de [32]. Por todo esto, pareció pertinente analizar si un resultado similar es válido para la extensión de grupos dada por el producto corona restringido 2-nilpotente. Como se explicó anteriormente, las técnicas presentadas en [70] no eran lo suficientemente poderosas para lidiar con la soficidad. Por lo tanto, la segunda y principal motivación del trabajo desarrollado en esta tesis fue el estudio de esta problemática. Aquí ampliamos el trabajo de [32] para mostrar el siguiente Teorema.

Teorema 1.8. *Sean G y H grupos sóficos. Sea $W \subseteq F_\infty$ un conjunto de palabras de tal modo que su correspondiente producto verbal conserve la soficidad. Entonces su producto corona verbal es sófico. En particular, los productos corona nilpotentes restringidos, los productos corona solubles restringidos y los productos corona de k-Burnside restringidos con $k = 2, 3, 4, 6$ entre grupos sóficos son sóficos.*

Al final del capítulo 5, como en [32], mostramos la siguiente variante, válida para otras nociones de aproximación métrica en grupos.

Teorema 1.9. *Sea G un grupo hiperlineal (o linealmente sófico, o débilmente sófico) y sea H un grupo sófico. Sea $W \subseteq F_\infty$ un conjunto de palabras de manera que su producto verbal correspondiente preserve hiperlinealidad (resp. soficidad lineal, resp. soficidad débil). Entonces, si H es un grupo sófico, el producto corona verbal restringido $G \overset{w}{\wr} H$ es hiperlineal (o linealmente sófico, o débilmente sófico). En particular, los productos corona nilpotentes restringidos, los productos de corona solubles restringidos y los productos corona de k-Burnside restringidos con $k = 2, 3, 4, 6$ entre un grupo hiperlineal (resp. linealmente sóficos, resp. débilmente sóficos), y un grupo sófico actuante son hiperlineales (resp. linealmente sóficos, resp. débilmente sóficos).*

Una aplicación sencilla del embebimiento de Shmelkin junto con el Teorema 1.7 y el Teorema 1.8 demuestra el siguiente corolario.

Corolario 1.10. *Sea G un subgrupo normal de un grupo libre F y sea W un conjunto de palabras que definen a los productos k-nilpotentes, k-solubles o de k-Burnside para $k = 2, 3, 4, 6$.*

- *Si F/G es amenable, entones $F/W(G)$ es amenable;*
- *Si F/G es exacto, entonces $F/W(G)$ es exacto;*
- *Si F/G es sófico, entonces $F/W(G)$ es sófico;*

- *Si F/G tiene la propiedad de Haagerup, entonces $F/W(G)$ tiene la propiedad de Haagerup.*

Hayes y Sale demostraron con anterioridad el caso F/G' (y por lo tanto los casos $F/G^{(k)}$) en [32, Corolario 1.2], y es una consecuencia de su resultado principal combinado con el embebimiento de Magnus. También observaron que podría haberse deducido de un Teorema anterior de Păunescu, [61].

Con las construcciones utilizadas en los Teoremas 1.8 y 1.9 a mano, nuestro siguiente trabajo fue preguntamos si era posible adaptarlas para demostrar un resultado análogo para el *producto corona irrestricto* (ver la Definición 2.60). Se obtuvieron los siguientes resultados

Teorema 1.11. *Sea H un grupo amenable, sea G un grupo y $G \wr H$ el producto corona irrestricto de G con H.*

1. *Si G es débilmente sófico, entonces $G \wr H$ es débilmente sófico.*
2. *Si G es sófico, entonces $G \wr H$ es sófico.*
3. *Si G es linealmente sófico, entonces $G \wr H$ es linealmente sófico.*
4. *Si G es hiperlineal, entonces $G \wr H$ es hiperlineal.*

La importancia de este Teorema es que por medio del Teorema de Kaloujnine-Krasner (ver Teorema 2.62 más abajo) y teniendo en cuenta que las cuatro propiedades de aproximación métrica estudiadas pasan a subgrupos y se conservan al tomar productos directos, el Teorema 1.11 y el siguiente resultado son equivalentes.

Corolario 1.12 (Teorema de extensión)**.** *Sea G un grupo con un subgrupo normal N tal que el cociente G/N sea amenable. Si N es débilmente sófico, sófico, linealmente sófico o hiperlineal; entonces G es débilmente sófico, sófico, linealmente sófico o hiperlineal, respectivamente.*

Arzhantseva, Berlai, Finn-Sell y Glebsky en [3] demostraron los casos sóficos e hiperlineales del Teorema 1.11, donde también dieron la aplicación del Teorema de Kaloujnine-Krasner mencionado anteriormente. Algunos de los resultados de extensión son más antiguos. De hecho, el caso sófico se debe a Elek y Szabo en [20] y el caso linealmente sófico se encuentra presente en el trabajo de Arzhantseva y Păunescu [4]. Más recientemente, en [36], Holt y Rees demostraron que ciertas aproximaciones métricas de grupos, incluso el caso débilmente sófico, se conservan al tomar extensiones con cocientes amenables.

En [3, § 4.3] los autores explicaron por qué sus técnicas no podían abordar el caso débilmente sófico del Teorema 1.11. La motivación de esta parte del trabajo fue ver si las ideas que usamos en los capítulos anteriores servirían para dar una demostración directa de este hecho, sin requerir el resultado en extensiones de [36]. Aquí logramos esto de una manera autocontenida que también nos permite tratar los cuatro casos del Teorema 1.11 de una forma unificada. Por lo tanto, también proporcionamos la primera prueba directa del caso linealmente sófico del Teorema 1.11.

Las razones que simplifican nuestra demostración son, por un lado, el uso sistemático de la noción de aproximaciones métricas abstractas, consideradas primero por Arzhantseva en 2008 (ver [2]) y por otro lado, que tratamos directamente con aproximaciones métricas de $\prod_H G$ en lugar de construirlas localmente a partir de aproximaciones métricas de G. Esto se desarrolla en la Sección 3.1. El último ingrediente de nuestra demostración, que será útil en las demostraciones de los Teoremas 1.8 y 1.9, aparece en la Sección 3.2. Allí proporcionamos monomorfismos de grupo explícitos desde ciertos grupos métricos auxiliares, hacia grupos métricos que pertenecen a las clases que definen las propiedades métricas del Teorema 1.11, de forma que la métrica se distorsione de forma controlada.

El Teorema de extensión 1.12 admite una forma más general donde N se reemplaza por un subgrupo (no necesariamente normal) H y la hipótesis de amenabilidad de G/H se reemplaza por que la acción regular a izquierda de G sobre G/H sea amenable. En la literatura, esto se refiere a veces como que H sea *co-amenable* en G, (ver, por ejemplo, [53]), y así es como lo llamaremos en esta tesis. En la Sección 3.4 discutimos por qué incluso la versión más general del Teorema de Kaloujnine-Krasner [38], podría no ser adecuada para probar esta variante para subgrupos co-amenables. No obstante, proporcionamos una demostración unificada de esta forma más general del Teorema de extensión adaptando el trabajo realizado con productos corona permutacionales de la Sección 3.1 de una manera que nos permite además usar los resultados de la Sección 3.3.

Con el fin de clarificar las construcciones y aportar a la cohesión interna de esta tesis, optamos por desarrollar los capítulos en un orden diferente del que fueron estudiadas. Demostraremos primero el Teorema 1.11 en el capítulo 3 y utilizaremos los monomorfismos de la Sección 3.2 en la demostración de los Teoremas 1.8 y 1.9 en el capítulo 5.

2 Preliminares

Comenzamos con un resumen muy breve de definiciones y hechos de la teoría de representaciones de grupos localmente compactos y propiedades generales de grupos. Recordemos que en un grupo localmente compacto G, existe una medida Borel regular G-invariante (a izquierda) $(G, \mathcal{B}, \mu)$, es decir, $\mu(gB) = \mu(B)$ para todos los $g \in G$ y $B \in \mathcal{B}$. Esta medida es única salvo multiplicación por escalares y se llama la medida de Haar (a izquierda) de G.

Las definiciones y resultados de esta sección se pueden encontrar en los libros [6], [7], [14], [68] y tiene como objetivo servir de consulta para los capítulos posteriores. Se sugiere omitir este capítulo en una primera lectura y volver a él en caso de requerir alguna referencia.

2.1. Representaciones de grupos

Sea G un grupo localmente compacto y $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y llamemos $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ al grupo de operadores unitarios de $\mathcal{H}$. Decimos que $\pi : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ es una *representación unitaria* de G en $\mathcal{H}$ (y lo denotamos $(\pi, \mathcal{H})$) si π es un morfismo de grupos y es fuertemente continuo, es decir, para cada $\xi \in \mathcal{H}$, la función

$$\begin{aligned} G &\to \mathcal{H} \\ g &\mapsto \pi(g)\xi \end{aligned}$$

es continua.

Ejemplos 2.1. Sea G un grupo localmente compacto y sea μ la medida de Haar a izquierda normalizada. Llamamos

- *Representación trivial* $1_G : G \to \mathbb{C}$, $1_G(g)z = z$ para todo $g \in G$, $z \in \mathbb{C}$.
- *Representación regular a izquierda*: Sea $\mathcal{H} := L^2(G, \mu)$ y definimos la representación

$$\begin{aligned} \lambda : G &\to \mathcal{U}(L^2(G, \mu)) \\ (\lambda(g)(f))(x) &:= f(g^{-1}x). \end{aligned}$$

Notar que en el caso de que G sea un grupo discreto, el espacio de Hilbert es $\ell^2(G)$.

Definición 2.2. *Sea $(\pi, \mathcal{H})$ una representación unitaria de un grupo localmente compacto G. Decimos que un subespacio cerrado $W \subset \mathcal{H}$ es π-invariante si $\pi(g)w \in W$ para todo $g \in G$ y $w \in W$.*
La representación $(\pi_{|_W}, W)$, con $\pi_{|_W} := \pi(g)|_W \in \mathcal{U}(W)$ se llama una subrepresentación de π.

Definición 2.3. *[6, Definition A.1.6] Sea $(\pi_i, \mathcal{H}_i)_{i\in I}$ una familia de representaciones unitarias de G. Sea $\mathcal{H} := \bigoplus_{i\in I} \mathcal{H}_i$ la suma directa de los espacios H_i. La suma directa de las representaciones π_i es la representación unitaria π de G en $\mathcal{H}$ definida por*

$$\pi(g)(\oplus\xi_i) = \oplus_i \pi_i(g)\xi_i, \text{ para todo } g \in G, \ \oplus_i\xi_i \in \mathcal{H}.$$

Definición 2.4. *[6, Definition A.1.3] Un operador de entrelazamiento entre dos representaciones unitarias $(\pi_1, \mathcal{H}_1)$ y $(\pi_2, \mathcal{H}_2)$ de G es un operador lineal y continuo $T : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ tal que $T\pi_1(g) = \pi_2(g)T$ para todo $g \in G$. La representación π_1 y π_2 se dicen equivalentes (y se denota como $\pi_1 \cong \pi_2$) si existe tal operador T isométrico y sobreyectivo.*

Definición 2.5. *[6, Definition A.1.7] Una representación unitaria $(\pi, \mathcal{H})$ de G se llama irreducible los únicos subespacios cerrados G-invariantes son los triviales, es decir, $\{0\}$ y $\mathcal{H}$.*

Núcleos de tipo positivo

Definición 2.6. *[6, Definition C.1.1] Sea X un espacio topológico. Un núcleo de tipo positivo en X es una función continua*

$$\Phi : X \times X \to \mathbb{C}$$

tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, para todo $x_1, \ldots, x_n \in X$ y para toda elección de números complejos $c_1, \ldots, c_n$, se cumple la siguiente desigualdad:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_i \overline{c_j} \Phi(x_i, x_j) \geq 0.$$

Ejemplo 2.7. [6, Example C.1.3] Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, X un espacio topológico y $f : X \to \mathcal{H}$ una función continua. Entonces Φ, definido por

$$\Phi(x, y) = \langle f(x), f(y) \rangle,$$

es un núcleo de tipo positivo en X.

Definición 2.8. *Sea G un grupo topológico. Una función de tipo positivo sobre G es una función continua $\varphi : G \to \mathbb{C}$ tal que el núcleo sobre G definido por*

$$(g_1, g_2) \mapsto \varphi(g_1 g_2^{-1})$$

es de tipo positivo.

Observación 2.9. Si $(\pi, \mathcal{H})$ es una representación unitaria de un grupo localmente compacto G y $\xi \in \mathcal{H}$, el coeficiente matricial

$$g \mapsto \langle \pi(g)\xi, \xi \rangle$$

es una función de tipo positivo.

Definición 2.10. *Las funciones de la forma $\langle \pi(\cdot)\xi, \xi \rangle$ se llaman funciones de tipo positivo asociadas a π.*

Teorema 2.11 (Construcción GNS)**.** *Sea Φ un núcleo de tipo positivo en el espacio topológico X. Entonces existe un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ y una función continua $f : X \to \mathcal{H}$ con las siguientes propiedades:*

(I) $\Phi(x, y) = \langle f(x), f(y) \rangle$ para todo $x, y \in X$;

(II) el espacio lineal generado por $\{f(x) : x \in X\}$ es denso en $\mathcal{H}$.

Además, el par $(\mathcal{H}, f)$ es único salvo isomorfismo canónico, es decir, si $(\mathcal{K}, g)$ es otro par que satisface (i) y (ii), entonces existe un único isomorfismo de espacios de Hilbert $T : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ tal que $g = T \circ f$.

Demostración. Ver [6, Theorem C.1.4]. □

Núcleos de tipo negativo

Definición 2.12. *[6, Definition C.2.1] Sea X un espacio topológico. Un núcleo condicionalmente de tipo negativo en X es una función continua $\Psi : X \times X \to \mathbb{R}$ con las siguientes propiedades:*

(I) $\Psi(x, x) = 0$ *para todo* $x \in X$*;*

(II) $\Psi(y, x) = \Psi(x, y)$ *para todo* $x, y \in X$*;*

(III) *para todo* $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_n \in X$ *y toda elección de números reales* $c_1, \dots, c_n$ *tales que* $\sum_{i=1}^{n} c_i = 0$*, vale la siguiente desigualdad:*

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_i c_j \Psi(x_i, x_j) \leq 0.$$

Ejemplo 2.13. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert real. El núcleo

$$\begin{aligned} \Psi : \mathcal{H} \times \mathcal{H} &\to \mathbb{R} \\ (\xi, \eta) &\mapsto \|\xi - \eta\|^2 \end{aligned}$$

es condicionalmente de tipo negativo.

Las siguientes propiedades son inmediatas.

Observación 2.14. (I) El conjunto de todos los núcleos condicionalmente de tipo negativo en X es un cono convexo, es decir, si Ψ_1 y Ψ_2 son núcleos condicionalmente de tipo negativo, entonces también lo es $s\Psi_1 + t\Psi_2$ para todos los números reales $s, t \geq 0$.

(II) Sea $(\Psi_t)_t$ una familia a un parámetro real de núcleos condicionalmente de tipo negativo en X que converge puntualmente en $X \times X$ a un núcleo continuo $\Psi : X \times X \to \mathbb{R}$. Entonces Ψ es un núcleo condicionalmente de tipo negativo.

Definición 2.15. *[6, Definition C.4.17] Sea G un grupo topológico. Una función continua*

$$\Psi : G \to \mathbb{R}$$

es condicionalmente de tipo negativo si el núcleo Ψ en G, definido por $\Psi(g, h) = \Psi(h^{-1}g)$ para g, h en G, es condicionalmente de tipo negativo.

Observación 2.16. Para un grupo G es equivalente decir que Ψ satisface la condición (II) en la Definición 2.12 a que $\Psi(g) = \Psi(g^{-1})$ en la Definición 2.15. Para ver esto, notemos que $\Psi(g, e) = \Psi(e, g) \implies \Psi(g) = \Psi(g^{-1})$. Por otro lado, si $\Psi(g) = \Psi(g^{-1})$, entonces $\Psi(g, h) = \Psi(h^{-1}g) = \Psi((h^{-1}g)^{-1}) = \Psi(g^{-1}h) = \Psi(h, g)$.

Representaciones débilmente contenidas

Definición 2.17. *[6, Definition F.1.1] Sean $(\pi, \mathcal{H})$, $(\rho, \mathcal{K})$ representaciones unitarias de un grupo topológico G. Decimos que π está débilmente contenida en ρ si cada función de tipo positivo asociada a π puede aproximarse uniformemente en cada subconjunto compacto de G, por sumas finitas de funciones de tipo positivo asociadas a ρ. Para ser más explícitos,* *para cada* $\xi \in \mathcal{H}$, $Q \subseteq G$ *compacto y* $\varepsilon > 0$, *existen* $\eta_1, \dots, \eta_n \in \mathcal{K}$ *tales que para todo* $x \in Q$,

$$\left| \langle \pi(x)\xi, \xi \rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle \rho(x)\eta_i, \eta_i \rangle \right| < \varepsilon.$$

Escribiremos en este caso $\pi \prec \rho$.

Si $\pi \prec \rho$ y $\rho \prec \pi$, decimos que π y ρ son débilmente equivalentes y lo denotaremos $\pi \sim \rho$.

Observación 2.18. Citamos algunas propiedades útiles de la contención débil. Esta lista de propiedades se basa en [6, Appendix F].

1. La relación $\pi \prec \rho$ sólo depende de la clase de equivalencia de las representaciones π y ρ.

2. Si π es una subrepresentación de ρ, entonces $\pi \prec \rho$. En este caso toda función de tipo positivo asociada a π es una función de tipo positivo asociada a ρ.

3. Para representaciones unitarias π, ρ y σ de G, las contenciones débiles $\pi \prec \rho$ y $\rho \prec \sigma$ implican $\pi \prec \sigma$.

4. Para representaciones unitarias π y ρ y números cardinales $m, n > 0$, tenemos $\pi \prec \rho$ si y sólo si $m\pi \prec n\rho$. Por lo tanto, la relación de contención débil no tiene en cuenta las multiplicidades.

5. Si π es de dimensión finita y ρ es irreducible, entonces $\rho \prec \pi$ implica que ρ está contenida en π. Por esta razón, la noción de contención débil no es relevante para las representaciones de dimensión finita.

6. [6, Corollary F.1.5] Sea $(\pi, \mathcal{H})$ una representación unitaria de G. Entonces $1_G \prec \pi$ si y solo si, para cada subconjunto compacto Q de G y cada $\varepsilon > 0$, existe un vector unitario ξ en H tal que
$$\sup_{x \in Q} \|\pi(x)\xi - \xi\| < \varepsilon.$$
Tal vector ξ se llama (Q, ε)-invariante.

2.2. Grupos amenables

En 1922, Banach y Tarski [5] demostraron un Teorema notable que hoy en día se transcribe como “dada una bola en el espacio de dimensión 3, existe una manera de descomponerla en un número finito de piezas disjuntas que pueden reorganizarse para formar dos bolas del mismo tamaño que el original ”. Este contraintuitivo resultado es esencialmente un enunciado de teoría de la medida. Dice que no hay una medida finitamente aditiva en $\mathbb{R}^3$ que pueda definirse en cada subconjunto de $\mathbb{R}^3$, que sea invariante por isometrías y que le dé a la bola unitaria una medida no nula. En consecuencia, no se puede extender la medida de Lebesgue a todos los subconjuntos de $\mathbb{R}^3$, es decir, hay conjuntos no medibles con la medida de Lebesgue. Por otro lado, no existe un análogo de la paradoja de Banach-Tarski para dimensiones más pequeñas. Existen tales medidas en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$. La razón profunda detrás de esta dicotomía fue mostrada por von Neumann en 1929: el grupo de isometrías de $\mathbb{R}^n$ (visto como un grupo discreto) es amenable para $n \leq 2$ y no es amenable para $n \geq 3$.

Antes de dar una definición precisa, recordemos que, dado un grupo Γ, se define $\ell^\infty(\Gamma)$ como el espacio de funciones acotadas de Γ en $\mathbb{C}$. $\ell^\infty(\Gamma)$ es un álgebra de Banach dotado con la norma supremo. Notar además que existe una acción canónica $\Gamma \curvearrowright \ell^\infty(\Gamma)$ dada por $(g \cdot f)(x) = f(g^{-1}x)$ para $g, x \in \Gamma$ y $f \in \ell^\infty(\Gamma)$. Llamaremos a esta acción, *acción por traslación a izquierda*. Recordar además que un estado en $\ell^\infty(\Gamma)$ es un elemento $\phi \in \ell^\infty(\Gamma)^*$ positivo (es decir, que mapea elementos de espectro contenido en los reales positivos en números positivos) y con $\phi(1) = 1$.

Definición 2.19. *[7, Definition 2.6.1] Un grupo Γ es amenable si existe un estado μ en $\ell^\infty(\Gamma)$ que sea invariante por la acción por traslación a izquierda, es decir, para todo $s \in \Gamma$ y $f \in \ell^\infty(\Gamma)$, se verifica que $\mu(s \cdot f) = \mu(f)$.*

Tal estado μ se llama media invariante.

Ejemplos 2.20. Todos los grupos abelianos (y más en general, todos los grupos nilpotentes y todos los grupos solubles) son amenables. También los grupos compactos son amenables. Como ejemplo típico de grupo no amenable, podemos mencionar el grupo libre en dos generadores F_2.

Definición 2.21. *[7, Definition 2.6.4] Decimos que G satisface la condición de Følner si para cualquier subconjunto finito $E \subseteq G$ y $\varepsilon > 0$, existe un subconjunto finito $F \subset G$ tal que*

$$\max_{s \in E} \frac{|sF \triangle F|}{|F|} < \varepsilon,$$

donde $sF := \{st : t \in F\}$ y $sF \triangle F := (sF \setminus F) \cup (F \setminus sF)$. Una sucesión de conjuntos finitos $F_n \subseteq G$ tales que

$$\frac{|sF_n \triangle F_n|}{|F_n|} \to 0$$

para cada $s \in G$ se la llama sucesión de Følner.

Hay muchas equivalencias de amenabilidad, enumeramos a continuación solo las que usaremos a lo largo de esta tesis:

Teorema 2.22. *Sea G un grupo discreto. Son equivalentes:*

(i) G es amenable;

(ii) G satisface la condición de Følner;

(iii) la representación trivial 1_G está débilmente contenida en la representación regular λ.

Demostración. Ver [7, Theorem 2.6.8] □

Las siguientes propiedades serán usadas a lo largo de esta tesis.

Proposición 2.23. *Sea G un grupo topológico.*

(i) Sea N un subgrupo cerrado y normal de G. Si N y G/N son amenables, entonces G es amenable.

(II) *Sea N un subgrupo cerrado y normal de G. Si G es amenable, entonces G/N es amenable.*

(III) *Sea $(G_i)_{i\in I}$ una familia dirigida de subgrupos cerrados de G tal que $\bigcup_{i\in I} G_i$ es denso en G. Si G_i es amenable para cada $i \in I$, entonces G es amenable.*

Demostración. Ver [6, Proposition G.2.2] o [63, Proposition 13.1 - 13.4] □

Acciones amenables y grupos co-amenables

En la literatura existen varias definiciones no equivalentes de acción amenable. La primera, dada por Greenleaf en [28, §1] y la que utilizaremos en esta tesis, se define de manera natural como una extensión de la noción de amenabilidad en grupos en términos de medias invariantes (ver la Definición 2.25 más abajo). Por otro lado, la definición de acción amenable según Zimmer se basa en la existencia de puntos fijos (ver [81, Definition 4.3.1]). Con la definición de Zimmer, se puede probar la siguiente Proposición:

Proposición 2.24. *[81, Proposition 4.3.2] Sea H un subgrupo cerrado de G, entonces la acción por traslación a izquierda de G en G/H es amenable (con la definición de Zimmer) si y solo si H es un grupo amenable.*

Por otra parte, la definición de co-amenabilidad (según Greenleaf, es decir, que la acción por traslación a izquierda de G en G/H sea amenable según la definición 2.25) no implica la amenabilidad de H.

Aclaramos que la noción de acción amenable según Zimmer está íntimamente ligada con la noción de grupo exacto que será explicada en la seccion 2.7. (ver Teorema 2.72). Como nuestro tratamiento de exactitud no hace uso de acciones amenables según Zimmer, en esta tesis omitimos su definicion precisa.

Para las siguientes definiciones, optamos por basarnos en el enfoque más moderno de [22].

Definición 2.25. *Sea H un grupo actuando en un conjunto X. Diremos que la acción es amenable (según Greenleaf) si existe una media $\mu : 2^X \to [0,1]$ que además es H-equivariante.*

Con esta definición, vale la siguiente caracterización

Proposición 2.26. *Sea H un grupo actuando en un conjunto X. Son equivalentes*

1. *La acción es amenable.*
2. *Para todo subconjunto finito F de H y $\varepsilon > 0$ existe un conjunto finito $B \subseteq X$ tal que*
$$|fB \triangle B| \leq \varepsilon |B| \ \ \forall f \in F.$$
Al conjunto B lo llamaremos conjunto de Følner para el par (F, ε).

Demostración. Ver [67, Theorem 2.3]. □

Con todo lo dicho anteriormente, damos una definición de co-amenabilidad para referencias posteriores.

Definición 2.27. *Sea H un subgrupo de un grupo G. Diremos que H es co-amenable en G si la acción por traslación a izquierda de G en G/H es amenable según la definición 2.25.*

2.3. Propiedad (T) de Kazhdan

A mediados de la década de 1960, D. Kazhdan definió su propiedad (T) para grupos localmente compactos y la usó como una herramienta para demostrar que una gran clase de *lattices* son finitamente generados. Además, un *lattice* Γ en un grupo localmente compacto G tiene propiedad (T) si y solo si G tiene propiedad (T). La primera aplicación de la propiedad (T) de Kazhdan por fuera de la teoría de grupos fue la construcción explícita por parte de Margulis de familias destacadas de grafos finitos. En particular, para todo grado $k \geq 3$, existen construcciones de familias de grafos finitos k-regulares que son expansores (ver [6] para más información). Si bien la existencia de tales grafos se establece fácilmente de manera probabilística, las construcciones explícitas requieren otros métodos. En el lado de la teoría de la medida, el problema de Ruziewicz pregunta si la medida de Lebesgue es la única medida finitamente aditiva en la esfera unitaria S^{n-1} del espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$ que está definida en todos los conjuntos medibles Lebesgue y que es invariante por rotaciones. Después de la respuesta negativa de Banach para $n = 2$ (1923), el problema estuvo abierto durante mucho tiempo para $n \geq 3$. En [66], Rosenblatt mostró que si la respuesta a la pregunta de Ruziewicz es negativa para S^{n-1}, entonces existen redes no triviales de subconjuntos medibles de la esfera con "propiedades asintóticamente invariantes". Después, Sullivan y Margulis utilizaron el hecho de que el grupo ortogonal especial $SO(n)$ tiene propiedad (T) para demostrar que las esferas de dimensión al menos 4 no pueden tener redes asintóticamente invariantes de subconjuntos medibles, de modo que la medida de Lebesgue es la única medida $SO(n)$-invariante y finitamente aditiva en la esfera (ver [76] y [49]). Drinfeld demostró que la conjetura es cierta para los casos S^2 y S^3 en [19].

Definición 2.28. *Sea G un grupo localmente compacto. Decimos que G tiene la propiedad (T) de Kazhdan (o simplemente propiedad (T)) si toda representación unitaria $(\pi, \mathcal{H})$ con $1_G \prec \pi$, se tiene que 1_G es una subrepresentación de $(\pi, \mathcal{H})$.*

Proposición 2.29. *Sea $(\pi, \mathcal{H})$ una representación unitaria de un grupo topológico localmente compacto G. Son equivalentes*

(I) G tiene la propiedad (T) de Kazhdan.

(II) Existe un subconjunto compacto $Q \subseteq G$ y $\varepsilon > 0$ tal que cada representación unitaria $(\pi, \mathcal{H})$ que tiene vectores (Q, ε)-invariantes tiene también vectores invariantes no nulos.

En este caso, llamamos a (Q, ε) un par de Kazhdan y a ε una constante de Kazhdan.

Demostración. Ver [6, Proposition 1.2.1]. □

Las siguientes propiedades serán usadas a lo largo de la tesis.

Proposición 2.30. *Sea N un subgrupo normal cerrado de un grupo topológico G.*

(I) Si N y G/N tienen propiedad (T), entonces G tiene propiedad (T);

(II) si G tiene propiedad (T), entonces G/N tiene propiedad (T);

(III) *si N es tal que existe una medida de Borel G-invariante en G/N finita y G tiene propiedad (T), entonces N tiene propiedad (T).*

Demostración. Para el ítem (i), ver [6, Proposition 1.7.6] o [31, Proposition 9]. Para el ítem (ii) ver [6, Theorem 1.3.4]. Para el ítem (iii) ver [6, Theorem 1.7.1]. □

Corolario 2.31 (del ítem (III))**.** *Si G es un grupo topológico que tiene propiedad (T) y N es un subgrupo cerrado de índice finito en G, entonces N tiene propiedad (T).*

Proposición 2.32. *Sea G un grupo topológico, las siguientes propiedades son equivalentes:*

(I) *G es amenable y tiene propiedad (T);*

(II) *G es compacto.*

Demostración. Ver [6, Theorem 1.1.6]. □

Proposición 2.33. *Sea G un grupo localmente compacto con propiedad (T). Entonces G es compactamente generado. En particular, un grupo discreto con propiedad (T) es finitamente generado.*

Demostración. Ver [6, Theorem 1.3.1]. □

2.4. Propiedad de aproximación de Haagerup

Haagerup definió la ahora llamada *Propiedad de Haagerup* en [30] para demostrar que la C^*-álgebra reducida del grupo libre en dos elementos, que no es nuclear, tiene la propiedad de aproximación métrica (ver [43, Definition 1.e.11] para la definición de propiedad de aproximación métrica y la Definición 2.68 para la definición de nuclear). Luego de la definición original, la propiedad de Haagerup tuvo gran impacto en varias áreas de la matemática y muchas equivalencias se han formulado (para una introducción de los usos y equivalencias de la propiedad de Haagerup, ver [14]). Como ejemplo de su relevancia, podemos mencionar que Higson y Kasparov demostraron en [33] que los grupos con la propiedad de Haagerup satisfacen la conjetura de Baum-Connes.

La propiedad de aproximación de Haagerup puede verse como una negación fuerte de propiedad (T). De hecho, la propiedad (T) a menudo se considera como una forma de rigidez en la teoría de representaciones y a modo de contraste, se puede decir que los grupos con la propiedad de Haagerup son extremadamente no rígidos. Para aclarar esta idea, supongamos que G es un grupo discreto con la propiedad de Haagerup y sea ψ una función propia y condicionalmente negativa en G. Podemos suponer que $\psi(g) = 0$ si y solo si $g = 1$ perturbando ψ, si fuera necesario, por una función acotada (ver [14, Lemma 6.2.1 (1)]). Por el Teorema de Schoenberg (ver, [6, §C.3]), cuando $t > 0$ la función $e^{-t\psi}$ es una función de tipo positiva en G (Definición 2.8) . Sea π_t la representación unitaria asociada a $e^{-t\psi}$ por la construcción GNS (Teorema 2.11). Entonces $(\pi_t)_{0\leq t\leq\infty}$ es una familia a un parámetro de representaciones unitarias no isomorfas que interpola entre la representación trivial y la representación regular.

Definición 2.34. *Sea G un grupo no compacto, segundo contable y localmente compacto. Diremos que G tiene la propiedad de Haagerup (o simplemente que es Haagerup, o que tiene Haagerup) si existe una función propia y continua $\psi : G \to \mathbb{R}$ que es condicionalmente negativa.*

Definición 2.35. *Sea $(\pi, \mathcal{H})$ una representación unitaria de un grupo topológico localmente compacto G. Diremos que $(\pi, \mathcal{H})$ es una C_0-representación (y diremos que es una representación $C_0(\pi, \mathcal{H})$) si todos los coeficientes matriciales $\varphi_{\xi,\eta} : g \mapsto \langle \pi(g)\xi, \eta \rangle$ pertenecen a $C_0(G)$.*

Proposición 2.36. *Para un grupo no compacto segundo contable localmente compacto G, Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(I) G tiene la propiedad de Haagerup;

(II) Existe una representación unitaria $C_0(\pi, \mathcal{H})$ de G que contiene débilmente a la representación trivial 1_G.

Demostración. Ver [14, Theorem 2.1.1]. □

Observación 2.37. Por la caracterización de amenabilidad dada en el Teorema 2.22 ítem (III) y el ítem (II) de la Proposición 2.36, se sigue que todo grupo amenable posee la propiedad de Haagerup pues la representación regular a izquierda es $C_0(\lambda, L^2(G))$.

Las siguientes propiedades serán utilizadas a lo largo de la tesis.

Proposición 2.38. *Sea G un grupo localmente compacto que es límite de una sucesión creciente de subgrupos abiertos $(G_n)_{n\geq 1}$. Si todos los G_n tienen la propiedad de Haagerup, entonces G tiene la propiedad de Haagerup.*

Demostración. Ver [14, Proposition 6.1.1]. □

Corolario 2.39. *Un grupo localmente compacto G tiene la propiedad de Haagerup si y solo si todo sus subgrupos finitamente generados tienen la propiedad de Haagerup.*

Proposición 2.40. *Sea H un subgrupo normal cerrado de un grupo σ-compacto y localmente compacto G. Entonces, si H tiene la propiedad de Haagerup y G/H es amenable, entonces G tiene la propiedad de Haagerup.*

Demostración. Ver [14, Proposition 6.1.5]. □

2.4.1. Una caracterización de la propiedad de Haagerup para el producto semidirecto de grupos

Las siguientes definiciones fueron tomadas de [17, Section 3].
Sean G, X conjuntos. Denotemos $\mathcal{A} = 2^{(X)}$ el conjunto de subconjuntos finitos de X.

Definición 2.41. *Un $\mathcal{A}$-calibre en G es una función $\phi : G \times G \to \mathcal{A}$ tal que:*

$$\phi(g, g') = \phi(g', g) \; \forall g, g' \in G;$$

$$\phi(g, g'') \subset \phi(g, g') \cup \phi(g', g'') \; \forall g, g', g'' \in G$$

Ejemplo 2.42. Si $G = X$ es un conjunto y $\mathcal{A} = 2^{(X)}$, entonces $\phi(w, w') = \{w, w'\}$ siempre es un $\mathcal{A}$-calibre en X.

Definición 2.43. *Dado un $\mathcal{A}$-calibre ϕ definido en un grupo G, diremos que es G-invariante si $\phi(gg', gg'') = \phi(g', g'')$ para todo $g, g', g'' \in G$.*

Cuando G es un grupo, ϕ es invariante a izquierda si y solo si puede ser escrito como $\phi(w, w') = \phi(e, w^{-1}w') =: \psi(w^{-1}w')$. Esto enmarca la siguiente definición.

Definición 2.44. *Sea G un grupo. Un $\mathcal{A}$-calibre G-invariante sobre G es una función $\psi : G \to \mathcal{A}$ tal que*

$$\psi(g) = \psi(g^{-1})\ \forall g \in G;$$

$$\psi(gg') \subseteq \psi(g) \cup \psi(g')\ \forall g, g' \in G.$$

La siguiente caracterización de la propiedad de Haagerup en un producto semidirecto es la herramienta principal de la demostración del Teorema 1.7.

Teorema 2.45 (Cornulier, Stadler, Valette, 2012)**.** *Sean G, H grupos, con H actuando en G por automorfismos y sea $\mathcal{A} = 2^{(H)}$. Consideremos además ψ un $\mathcal{A}$-calibre en G, G-invariante y H-equivariante a izquierda en el sentido de la Definición 2.44. Supongamos que existe una función definida condicionalmente negativa u en G, H-equivariante, tal que para cada subconjunto finito $F \subseteq H$, la restricción de u a cada subconjunto de la forma $G_F := \{g \in G : \psi(g) \subseteq F\}$ es propia. Luego $G \rtimes H$ es Haagerup si y solo si H es Haagerup.*

Demostración. Ver [17, Theorem 5.1]. □

Observación 2.46. [17, Remark 5.2] Las hipótesis de u en el Teorema 2.45, implican que G es Haagerup. Para probar esto, por el Corolario 2.39 es suficiente probar que cada subgrupo finitamente generado de G tiene Haagerup. Observar que para un subconjunto finito F de H, el conjunto G_F es un subgrupo de G. Si $g_1, \ldots, g_n$ es una colección finita de elementos en G, tomemos $F = \bigcup_{i=1}^{n} \psi(g_i)$, de modo que el subgrupo $\langle g_1, \ldots, g_n \rangle$ generado por g_i está contenido en G_F. Las hipótesis sobre u implican entonces que $\langle g_1, \ldots, g_n \rangle$ es Haagerup.

2.5. Aproximaciones métricas en grupos

Antes de dar una definición formal de $\mathcal{C}$-aproximación, presentamos dos clases relevantes de grupos que serán estudiados.

Un grupo es *hiperlineal* si se embebe en $\mathcal{U}(R^{\omega})$, el grupo unitario de la ultrapotencia del factor de tipo II_1 hiperfinito R donde w denota un ultrafiltro libre sobre $\mathbb{N}$ (ver [11, Appendix B] para la definición de ultrafiltro y demás temas relacionados). Este término fue acuñado por Rădulescu alrededor del año 2000, pero su artículo apareció impreso varios años después, [64]. Rădulescu demostró que un grupo es hiperlineal si y solo si su álgebra de von Neumann de grupo se embebe en R^{ω}, [64, Poposition 2.6] (ver también [59, Proposición 7.1]). Esto es exactamente lo mismo que decir que los grupos hiperlineales son aquellos cuya álgebra de von Neumann de grupo satisface el problema del embebimiento de Connes.

Conjetura 2.47 (Conjetura del embebimiento de Connes)**.** *Cada factor separable de tipo* II_1 *se embebe con un monomorfismo tracial en una ultaprotencia* R^ω*, donde* R *denota el (único) factor dimensional aproximadamente finito de tipo* II_1*.*[1]

El otro concepto de interés en sí mismo es la clase de grupos sóficos. La soficidad (llamado *inicialmente amenable* en el artículo original [29]) fue introducido por Gromov para lidiar con la Conjetura de la suryectividad de Gottschalk [27]:

Conjetura 2.48 (Conjetura de suryectividad de Gottschalk)**.** *Para cada grupo numerable* G *y cada conjunto finito* A*, el shift* A^G *no contiene un subespacio* G*-invariante cerrado y propio isomorfo a* A^G *(como* G*-espacio compacto).*

De hecho, la conjetura incluso parece no estar clara para el caso $A = \{0, 1\}$. En [29], Gromov demostró que los grupos sóficos satisfacen la conjetura antes mencionada (ver también [79, §3] para otra demostración). Para más información de la conjetura, consultar, por ejemplo [11], [13].

Otras conjeturas fueron probadas bajo la hipótesis de soficidad. Por ejemplo, la conjetura de estabilidad directa de Kaplansky es válida para grupos sóficos (ver [21] para la demostración original y [13, Corollary 8.15.8]) para una demostración basada en dinámica simbólica):

Conjetura 2.49 (Conjetura de estabilidad directa de Kaplansky)**.** *Para todo grupo* G *y todo cuerpo* K*, el álgebra de grupo* $K(G)$ *es directamente finita. Es decir* $ab = Id_n$ *en* $M_n/(K(G))$ *implica* $ba = Id_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*.*

Definición 2.50. *Sea* G *un grupo. Una métrica en* G *se dice bi-invariante si verifica que*

$$d(gx, gy) = d(x, y) = d(xg, yg)$$

para todo $g, x, y \in G$*.*

Convención 2.51. *A lo largo de esta tesis, llamaremos grupo métrico a un grupo dotado de una métrica bi-invariante.*

Definición 2.52. *[78, Definition 1.6] Sea* $\mathcal{C}$ *una familia de grupos métricos. Un grupo* G *es métricamente aproximable por* $\mathcal{C}$ *(también lo llamaremos* $\mathcal{C}$*-aproximable) si para todo* $g \in G \setminus \{1\}$*, existe* $\delta_g > 0$ *tal que para todos los subconjuntos finitos* $F \subseteq G$*, y* $\varepsilon > 0$*, existe un grupo* $(K, d) \in \mathcal{C}$ *y una función* $\varphi : G \to K$ *tal que*

(I) $\varphi(1) = 1$*,*

(II) $d(\varphi(g)\varphi(h), \varphi(gh))) < \varepsilon$*, para todo* $g, h \in F$*,*

(III) $d(\varphi(g), 1) \geq \delta_g$*, para todo* $g \in F \setminus \{1\}$*.*

Si una función φ *verifica el segundo punto, se llama* (F, ε, d)*-multiplicativa y si verifica el tercer punto, se llama* (F, δ, d)*-inyectiva.*

[1] Se encuentra en revisión la preimpresión [37] donde los autores dicen exhibir un álgebra de von Neumann que refuta esta conjetura. Considerando que se trata de un problema fundamental en la teoría, mientras el artículo se encuentre en estado de revisión, optamos por ser cautos y seguir mencionando al problema del embebimiento de Connes como conjetura.

Es posible conceptualizar en un lenguaje común las $\mathcal{C}$-aproximaciones de grupos numerables con la siguiente Proposición debida a A. Thom.

Proposición 2.53. *Sea G un grupo numerable y sea $\mathcal{C}$ una clase de grupos métricos. El grupo numerable G es $\mathcal{C}$-aproximable si y solo si existe un ultrafiltro no principal ω en $\mathbb{N}$, una sucesión K_n de grupos en $\mathcal{C}$, y un homomorfismo inyectivo*

$$\iota : G \hookrightarrow \frac{\prod_{n\in\mathbb{N}} K_n}{\{(g_n)_{n\in\mathbb{N}} : d_{K_n}(g_n, 1) \overset{\omega}{\to} 0\}}.$$

Demostración. Ver [78, Proposition 1.8]. □

Ejemplos de aproximaciones

Ejemplos 2.54. Enumeramos las cuatro propiedades de aproximación métrica estudiadas en esta tesis.

1. Un grupo se dice *débilmente sófico*, [23], si es $\mathcal{C}$-aproximable cuando $\mathcal{C}$ es la clase de grupos finitos con métricas bi-invariantes.

2. Un grupo se dice *sófico*, [20], [79], si es $\mathcal{C}$-aproximable cuando $\mathcal{C}$ es la clase de grupos simétricos finitos dotados de la distancia de Hamming normalizada

$$d_{\text{Hamm}}(\sigma, \tau) := \frac{1}{|A|}|\{a \in A : \sigma(a) \neq \tau(a)\}|, \text{ para } \sigma, \tau \in Sym(A).$$

3. Un grupo se dice *linealmente sófico*, [4], si es $\mathcal{C}$-aproximable cuando $\mathcal{C}$ es la clase de matrices inversibles en un cuerpo $\mathbb{K}$ dotado con la distancia de rango dada por

$$d_{\text{rk}}(A, B) := \frac{1}{n}\,\text{rank}(A - B), \text{ para } A, B \in GL_n(\mathbb{K}).$$

4. Un grupo se dice *hiperlineal*, [59], [64], si es $\mathcal{C}$-aproximable cuando $\mathcal{C}$ es la clase de matrices unitarias en un espacio de Hilbert de dimensión finita dotado con la distancia de Hilbert-Schmidt, d_{HS}, que es la inducida por la norma de Hilbert-Schmidt

$$\|A\|_2 := \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^{n} |\langle Av_i, v_j\rangle|^2}, \text{ con } A \in B(\mathcal{H}), \text{ donde } \{v_1, \ldots, v_n\} \text{ es una b.o.n. de } \mathcal{H}.$$

Observar también que en vista de 2.53, podríamos definir, por ejemplo, que un grupo numerable G es sófico si se embebe en una ultrapotencia de grupo simétrico finito con la distancia de Hamming normalizada (para una descripción detallada de estas equivalencias, ver [13, Ch 7]).

En estos ejemplos, la (F, δ, d)-inyectividad se puede reemplazar por una condición más manejable.

En lugar de requerir una función de peso δ que dependa de G, esta se puede reemplazar por la siguiente definición:

Definición 2.55. *Sea G un grupo, $\mathcal{C}$ una clase de grupos métricos, $(K, d) \in \mathcal{C}$ y $\rho : (0, 1) \to (a, b)$ con $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ una función asociada a la clase $\mathcal{C}$. Decimos que una función $\phi : G \to K$ es (F, ε, d)-libre si para cada $g \in F \setminus \{1\}$ tenemos que $d(\phi(g), 1) \geq \rho(\varepsilon)$.*

De esta manera, podemos reemplazar las nociones anteriores por una función de peso ρ en cada caso de la siguiente manera:

1. *débilmente sófico*: ϕ es (F, ε, d)-libre para una función constante $\rho(\varepsilon) := \alpha \in \mathbb{R}_{>0}$. Reescalando la métrica d, puede asumirse que $\alpha = 1$ y $\operatorname{diam}(K) = 1$ donde $\operatorname{diam}(K) = \sup\{d(x,y) : x, y \in K\}$;

2. *sófico*: ϕ es $(F, \varepsilon, d_{\text{Hamm}})$-libre para la función $\rho(\varepsilon) := 1 - \varepsilon$;

3. *linealmente sófico*: ϕ es $(F, \varepsilon, d_{\text{rk}})$-libre para la función $\rho(\varepsilon) := 1/4 - \varepsilon$;

4. *hiperlineal*: ϕ es $(F, \varepsilon, d_{\text{HS}})$-tracial, es decir $|tr(\phi(g))| \leq \varepsilon$ para todo $g \in F \setminus \{1\}$, donde, para $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ y $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base ortonormal de $\mathcal{H}$, $tr(A) := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\langle Av_i, v_i\rangle$.

Una de las ventajas de tener estas definiciones alternativas es que cada una de ellas posee una condición uniforme y a diferencia de una función de peso, no dependen de la $\mathcal{C}$-aproximación de cada grupo en particular. Por ejemplo, es fácil mostrar que las cuatro aproximaciones métricas dadas en los Ejemplos 2.54 se conservan al tomar productos directos finitos. Luego, el hecho de que sean (F, ε, d)-libres implica que también se conservan tomando productos directos.

Propiedades generales de las aproximaciones métricas

La siguiente Proposición resume las propiedades principales de los grupos $\mathcal{C}$-aproximables cuando $\mathcal{C}$ es una de las clases del Ejemplo 2.54.

Proposición 2.56. *Las clases de $\mathcal{C}$-aproximación como en los Ejemplos 2.54 son preservadas por*

(I) *tomar subgrupos;*

(II) *tomar productos directos (para la definición de producto directo, ver 2.57);*

(III) *tomar extensiones de la forma $\mathcal{C}$-aproximable-por-amenable, es decir, si tenemos*

$$1 \to G \to E \to H \to 1$$

con G un grupo $\mathcal{C}$-aproximable y H un grupo amenable, entonces E es $\mathcal{C}$-aproximable;

(IV) *tomar límites directos e inversos.*

Además, la clase de grupos amenables está contenida en cada una de las clases mencionadas anteriormente.

Demostración. La demostración de los cuatro puntos puede encontrarse en [20, Theorem 1] para grupos sóficos y una adaptación adecuada para grupos hiperlineales (ver también [3, Theorem B]), en [36, §5] para el caso débilmente sófico y en [4, Theorem 9.3] para el caso linealmente sófico.

Observar que el ítem (I) es evidente. Para el segundo punto es necesario demostrar primero que los casos considerados en los Ejemplos 2.54 se preservan por tomar productos finitos de grupos. Este hecho es fácil de probar pero tedioso dado que hay que probar cada caso por separado y optamos por omitirlo. Asumiendo que el producto directo de una cantidad finita de grupos $\mathcal{C}$-aproximables es $\mathcal{C}$-aproximable con $\mathcal{C}$ alguna de las clases dadas en los Ejemplos 2.54, veamos que producto directo de una cantidad arbitraria de grupos $\mathcal{C}$-aproximables es $\mathcal{C}$-aproximable con $\mathcal{C}$ como en los Ejemplos 2.54. Sean G_i grupos $\mathcal{C}$-aproximables, $F \subset \prod_{i\in I} G_i$ y $\varepsilon > 0$. Como F es finito, existe un subconjunto finito I_0 de I que distingue a los elementos de F, es decir, tal que para todo $f_1, f_2 \in F$, se tiene que $f_1 \neq f_2$ si y solo si $f_1(i) \neq f_2(i)$ para algún $i \in I_0$. Sea $q : \prod_{i\in I} G_i \to \bigoplus_{i\in I_0} G_i$ la proyección canónica. Como asumimos que $\bigoplus_{i\in I_0} G_i$ es $\mathcal{C}$-aproximable, existe $(K, d) \in \mathcal{C}$ y $\varphi : \bigoplus_{i\in I_0} G_i \to K$ una función $(\pi(F), \varepsilon, d)$-multiplicativa y $(\pi(F), \varepsilon, d)$-libre para las funciones $\rho(\varepsilon)$ definidas en 2.55. Como π es un morfismo de grupos, es inmediato que $\varphi \circ \pi$ es una función (F, ε, d)-multiplicativa y (F, ε, d)-libre.

En el Teorema 1.11 de esta tesis se dará una demostración del ítem (iii) de esta Proposición que permite lidiar con los cuatro casos considerados de manera unificada.

El ítem (iv) no se utilizará en la tesis, por lo que omitimos su demostración. □

Es importante mencionar que no se conoce en ninguna de estas clases si los grupos son preservados por extensiones. El problema de extensión para el caso sófico se puede rastrear hasta Weiss [79, §2] y aún es desconocido.

2.6. Productos corona y productos corona permutacionales en grupos

2.6.1. Productos corona permutacionales

El producto corona es una construcción fundamental en teoría de grupos y su generalización, el producto corona permutacional es una de las herramientas que nos permitirá demostrar los Teoremas 1.8, 1.9 y 1.11 de la introducción. Recordemos primero las definiciones de suma directa y producto directo

Definición 2.57. *Sea $\{G_i\}_{i\in I}$ una familia de grupos.*

1. *Se define el producto directo $\prod_{i\in I} G_i$ como el conjunto de funciones*

$$\left\{ f : I \to \bigcup_{i\in I} G_i : f(i) \in G_i;\ \forall i \in I \right\}$$

con el producto coordenada a coordenada, es decir, si f, g son funciones en el conjunto anterior, $(fg)(i) := f(i)g(i)$ para todo $i \in I$.

2. *Se define la suma directa (también llamado producto directo restringido) $\bigoplus_{i\in I} G_i$ como el subgrupo de $\prod_{i\in I} G_i$ de funciones cuyo soporte es finito, es decir,*

$$\bigoplus_{i\in I} G_i := \left\{ f \in \prod_{i\in I} G_i : f(i) = 1 \text{ salvo para finitos } i \right\}.$$

Como es usual, notaremos a los elementos de ambos grupos como $(g_i)_{i\in I}$.

Definición 2.58. *Sean G y H grupos, X un conjunto y $\rho : H \to Sym(X)$ una acción de H en X. H actúa en $\bigoplus_X G$ permutando los índices, es decir, si $(g_x)_{x\in X} \in \bigoplus_X G$ y $h \in H$, entonces $h \cdot (g_x)_{x\in X} := (g_{\rho(h)^{-1}x})_{x\in X}$.*

Se define el producto corona permutacional como

$$G \wr_X H := \left(\bigoplus_X G\right) \rtimes_\rho H.$$

Observación 2.59. Como caso particular tenemos el producto corona estándar

$$G \wr H := \left(\bigoplus_H G\right) \rtimes H$$

donde la acción está dada por la multiplicación de H a izquierda.

Producto corona irrestricto

Cambiando la suma directa por el producto directo, se define el producto corona irrestricto

Definición 2.60. *Sean G y H grupos. H actúa en $\prod_H G$ permutando las coordenadas. Se define el producto corona irrestricto como*

$$G \wr\wr H := \left(\prod_H G\right) \rtimes H$$

La relevancia de esta construcción puede evidenciarse en el siguiente Teorema. Recordemos primero el concepto de equivalencia de extensiones (ver [68, Ch 7] para más información)

Definición 2.61. *Sean G, E, E', H grupos tales que G es un subgrupo normal de E, G es un subgrupo normal de E' y $E/G \cong E'/G \cong H$. Dos extensiones se dicen equivalente si existe un homomorfismo $\gamma : E \to E'$ que hace conmutar el siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
& & E \arrow[dd, dotted, "\gamma"] \arrow[dr, "\pi"] & & \\
1 \arrow[r] & G \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "i'"'] & & H \arrow[r] & 1 \\
& & E' \arrow[ur, "\pi'"'] & &
\end{tikzcd}$$

donde i, i' son monomorfismos y π, π' son epimorfismos, $\mathrm{im}(i) = \ker(\pi)$ e $\mathrm{im}(i') = \ker(\pi')$.

Teorema 2.62 (Kaloujnine–Krasner [39])**.** *Sean G y H grupos y sea $\mathrm{proj}_H : G \wr\wr H \to H$ la proyección canónica sobre el cociente H. Sea $[E]_{conj}$ la clase de equivalencia dada por la conjugación y $[E]_{\cong}$ la clase de equivalencia definida arriba. Existe una biyección de conjuntos entre*

$$\{[E]_{\cong} | 1 \to G \to E \to H \to 1\},$$

y

$$\{[E]_{conj} | E \leq G \wr\wr H, \mathrm{proj}_H(E) = H, E \cap \ker(\mathrm{proj}_H) \cong G\},$$

que induce un isomorfismo de grupos entre la extensión E y el subgrupo E de $G \wr\wr H$.

Demostración. Ver [68, Theorem 7.3.7]. □

2.7. C^*-álgebras de grupo, nuclearidad y exactitud

La definición de C^* álgebra exacta fue acuñada por Kirchberg y su primera mención es en el reporte escrito para la conferencia sobre "Álgebras de Operadores, Ideales y sus Aplicaciones en Física Teórica"[40]. Es bastante probable que la noción de grupo exacto, que involucra la noción de C^*-álgebra exacta, haya sido considerada con anterioridad a su aparición en los años '90 en [41].

Esta noción da un vínculo notable entre las álgebras de operadores y la teoría geométrica de grupos: la C^*-álgebra reducida de un grupo G es exacta si y solo si G tiene la *propiedad A de Yu*, es decir, si y sólo si G visto como espacio métrico posee un embebimiento de tipo *coarse* en un espacio de Hilbert (ver [34] o [7, Theorem 5.5.7]).
G. Yu demostró en [80] que todo espacio métrico que posee un embebimiento de tipo *coarse* en un espacio de Hilbert satisface la Conjetura de Baum-Connes *coarse*. En particular, si el espacio considerado es un grupo finitamente generado con la métrica de la palabra, el hecho de que se embeba de manera *coarse* en un espacio de Hilbert implica la Conjetura de Novikov.

Comenzamos con la definición de C^*-álgebra reducida de grupo. Sea Γ un grupo y $(\lambda, \ell^2(\Gamma))$ la representación regular izquierda (ver Ejemplo 2.1). Denotemos el anillo de grupo de Γ por $\mathbb{C}[\Gamma]$. El anillo de grupo $\mathbb{C}[\Gamma]$ posee una involución dada por

$$\left(\sum_{s\in\Gamma} a_s s\right)^* = \sum_{s\in\Gamma} \overline{a_s} s^{-1}.$$

Definición 2.63. *La C^*-álgebra reducida de Γ, que denotaremos $C^*_\lambda(\Gamma)$, es la clausura de $\mathbb{C}[\Gamma]$ con respecto a la norma*

$$\|x\|_r = \|\lambda(x)\|_{B(\ell^2(\Gamma))} = \sup_{\|\xi\|_2=1} (\|\lambda(x)\xi\|_2).$$

donde $B(\ell^2(\Gamma))$ es el espacio de operadores acotados de $\ell^2(\Gamma)$ en $\ell^2(\Gamma)$ y $\| - \|_2$ es la inducida por el producto interno en el espacio de Hilbert $\ell^2(\Gamma)$ (el espacio de sucesiones en Γ cuadrado sumables a valores complejos).

Definición 2.64. *Un sistema operadores E es un subespacio autoadjunto y cerrado de una C^*-álgebra unital A tal que $1_A \in E$.*

Definición 2.65. *[7, Definition 1.5.1] Una transformación lineal φ de un sistema de operadores E a una (no necesariamente unital) C^*-álgebra B se dice completamente positiva si cada función $\varphi_n : M_n(E) \to M_n(B)$, definida coordenada a coordenada, es decir*

$$\varphi_n([a_{i,j}]) = [\varphi(a_{i,j})],$$

es una aplicación positiva. Es decir, si cada φ_n mapea matrices positivas en matrices positivas.

Observación 2.66. No todos los autores requieren en la definición de sistema de operadores que estos sean cerrados (contrastar con, por ejemplo, [60, Ch. 2]).

Definición 2.67. *Una transformación lineal φ de un sistema operadores E a una (no necesariamente unital) C^*-álgebra B se dice contractiva si $\|\varphi\| \leq 1$.*

Definición 2.68. *Una transformación lineal $\theta : A \to B$ entre C^*-álgebras se llama nuclear si para cada $n \in \mathbb{N}$ existen aplicaciones lineales contractivas y completamente positivas $\varphi_n : A \to M_{k(n)}(\mathbb{C})$ y $\psi_n : M_{k(n)}(\mathbb{C}) \to B$, tales que $\psi_n \circ \varphi_n \to \theta$ en la topología de convergencia puntual:*

$$\|\psi_n \circ \varphi_n(a) - \theta(a)\| \to 0,$$

para todo $a \in A$, donde $k(n) \in \mathbb{N}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definición 2.69. *Una C^*-álgebra A es nuclear si la identidad $\mathrm{id}_A : A \to A$ es nuclear.*

Definición 2.70. *Una C^*-álgebra A es exacta si existe una representación fiel $\pi : A \to B(H)$ tal que π es nuclear.*

Definición 2.71. *Un grupo es exacto si su C^*-álgebra reducida es exacta.*

Además, resulta pertinente mencionar la siguiente caracterización desde el punto de vista de la dinámica en grupos.

Teorema 2.72. *Sea G un grupo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

- *G es exacto;*
- *La acción por translación a izquierda de G en la compactificación de Stone-Čech βG es amenable (o sea, para todo conjunto finito $E \subset G$ y $\varepsilon > 0$, existe un conjunto finito $F \subset G$ y una función $m : G \to Prob(F) \subset Prob(G)$ tal que*

$$\sup\{\|s.m_t - m_{st}\| : s \in E, t \in F\} \leq \varepsilon);$$

- *G es boundary amenable, es decir, G actua a través de una acción amenable por homeomorfismos en un espacio topológico compacto y metrizable [2].*

Demostración. Ver [7, Theorem 5.1.7]. □

Con estas definiciones, ampliaremos las equivalencias del Teorema 2.22. Su demostración se encuentra en [7, Theorem 2.6.8].

Teorema 2.73. *Son equivalentes*

- *G es un grupo amenable;*
- *$C^*_\lambda(G)$ es nuclear.*

Observación 2.74. Por el Teorema anterior, los grupos amenables son exactos.

La siguiente Proposición se usará a lo largo de la tesis

Proposición 2.75. *Una extensión de grupos exactos es exacta.*

Demostración. Ver [7, Proposition 5.1.11] □

Proposición 2.76. *Unión creciente de C^*-álgebras exactas es exacta.*

[2] A su vez, esto es equivalente a que la acción inducida en $C(X)$ sea amenable en el sentido de Zimmer, ver [7, Lemma 4.3.7.] para una demostración de este hecho y la sección de referencia 4.9 del mismo libro para una descripción histórica.

Esta Proposición es el Ejercicio 2.7.2 de [7]. Por completitud de esta tesis daremos una demostración. Para ello, necesitamos los siguientes Lemas.

Lema 2.77. *Una representación $\pi : A \to B(\mathcal{H})$ es nuclear si y solo si para todo conjunto finito $F \subset A$ y $\varepsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ y funciones completamente positivas y contractivas $\varphi : A \to M_n(\mathbb{C})$ y $\psi : M_n(\mathbb{C}) \to B(\mathcal{H})$ tales que*

$$\|\psi(\varphi(f)) - \pi(f)\| < \varepsilon \ \forall f \in F.$$

Demostración. Haremos la demostración para el caso separable. Supongamos que para todo $F \subset A$ y para todo $\varepsilon > 0$ existen funciones como en el enunciado del Lema. Sea $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos finitos con $F_k \subset F_{k+1}$ tal que $\overline{\bigcup_{k\in\mathbb{N}} F_k} = A$. Por hipótesis para cada F_k y $\varepsilon > 0$ existen funciones completamente positivas y contractivas $\varphi_k : A \to M_{n(k)}(\mathbb{C})$ y $\psi_k : M_{n(k)}(\mathbb{C}) \to B(\mathcal{H})$ tales que

$$\|\psi_k(\varphi_k(f)) - \pi(f)\| < \varepsilon/3$$

para todo $f \in F_k$. Afirmamos que estas funciones hacen de π una transformación nuclear. En efecto, dado $a \in A$, existe un subconjunto F_j y $f \in F_j$ tal que $\|f - a\| < \varepsilon/3$ y para todo $k > j$ se tiene que

$$\|\psi_k(\varphi_k(a)) - \pi(a)\| \leq \|\psi_k(\varphi_k(a - f))\| + \|\pi(a - f)\| + \|\psi_k(\varphi_k(f)) - \pi(f)\| < \varepsilon,$$

donde en la última desigualdad se utilizó el hecho que las funciones involucradas son contractivas.

Para la implicación inversa, supongamos que π es nuclear y por lo tanto existen φ_k y ψ_k como en la Definición 2.68. Sea $\varepsilon > 0$ y $F = \{f_1, \ldots, f_r\} \subset A$. Para cada $f_i \in F$ existe k_i tal que

$$\|\psi_k(\varphi_k(f_i)) - \pi(f_i)\| < \varepsilon$$

para todo $k > k_i$. Entonces φ_K y ψ_K con $K := \max\{k_1, \ldots, k_r\}$ verifican lo pedido. □

Lema 2.78. *Una C^*-álgebra es exacta si y solo si para todo conjunto finito $F \subset A$ y $\varepsilon > 0$, existe una C^*-subálgebra exacta $B \subset A$ tal que para todo $f \in F$ existe $b \in B$ con $\|f - b\| < \varepsilon$.*

Demostración. Si A es exacta la implicación es inmediata tomando $B = A$. Para la implicación inversa, sea $F \subset A$ un subconjunto finito y $\varepsilon > 0$. Elijamos entonces una C^*-subálgebra B tal que para todo $f \in F$ existe $b \in B$ con

$$\|f - b\| < \varepsilon. \tag{2.7.1}$$

Como B es exacta, existe una representación fiel $\pi : B \to B(\mathcal{H})$ que es nuclear. Por la caracterización dada en el Lema 2.77, existen $\varphi : B \to M_k(\mathbb{C})$ y $\psi : M_k(\mathbb{C}) \to B(\mathcal{H})$ tales que $\|\psi(\varphi(f)) - \pi(f)\| < \varepsilon/3$ para todo $f \in F$. Por el Teorema de extensión de Arveson (ver [7, Theorem 1.6.1]), existe $\Phi : A \to M_k(\mathbb{C})$ una transformación contractiva y completamente positiva que extiende a φ. Para $f \in F$, elijamos $b \in B$ que verifique 2.7.1 y calculemos

$$\|\psi(\Phi(f)) - \pi(f)\| \leq \|\psi(\Phi(f - b))\| + \|\psi(\Phi(f)) - \pi(b)\| + \|\pi(b - f)\| < \varepsilon,$$

donde en la última desigualdad se utilizó que las funciones involucradas son contractivas. □

Demostración de la Proposición 2.76. Sea A una C^*-álgebra, $A := \overline{\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k}$ con A_k C^*-álgebras exactas y $A_k \subset A_{k+1}$. Entonces para cada conjunto finito $F \subset A$ y cada $\varepsilon > 0$ existe una subálgebra A_k que verifica las hipótesis del Lema 2.78, lo que completa la demostración. $\square$

3 Aproximaciones métricas cuando el grupo actuante es amenable

El propósito de este capítulo es demostrar el Teorema 1.11 de la introducción. Recordemos su enunciado. La definición de producto corona irrestricto se encuentra en la sección 2.6.

Teorema 1.11. *Sea H un grupo amenable, sea G un grupo y $G \wr\wr H$ el producto corona irrestricto de G con H.*

1. *Si G es débilmente sófico, entonces $G \wr\wr H$ es débilmente sófico.*
2. *Si G es sófico, entonces $G \wr\wr H$ es sófico.*
3. *Si G es linealmente sófico, entonces $G \wr\wr H$ es linealmente sófico.*
4. *Si G es hiperlineal, entonces $G \wr\wr H$ es hiperlineal.*

Los resultados de este capítulo se encuentran también en [9].

3.1. Aproximaciones de productos corona irrestrictos usando el producto corona permutacional

Dado un grupo métrico K con una métrica bi-invariante d para la cual $\operatorname{diam}(K) \leq 1$ y un conjunto finito B, consideremos el *producto corona permutacional* $K \wr_B Sym(B)$ definido en 2.58. A lo largo de este capítulo, en algunas ocasiones denotaremos con un punto " $\cdot$ " la acción de permutación de $Sym(B)$ en $\bigoplus_B K$. Además, se tiene la siguiente métrica bi-invariante y de diámetro igual a 1 (ver [32, Proposition 2.9] o [36, §5]).

Definición 3.1. *Dado un grupo A con una métrica bi-invariante d para la cual* $\operatorname{diam}(A) \leq 1$ *y un conjunto finito B, dotamos a $A \wr_B Sym(B)$ de la siguiente métrica bi-invariante*

$$\tilde{d}(((x_b)_{b\in B}, \tau), ((y_b)_{b\in B}, \rho)) := d_{Hamm}(\tau, \rho) + \frac{1}{|B|} \sum_{\substack{b\in B \\ \rho(b)=\tau(b)}} d(x_{\rho(b)}, y_{\rho(b)}) \qquad (3.1.1)$$

es bi-invariante en $A \wr_B Sym(B)$ y $\operatorname{diam}(A \wr_B Sym(B)) = 1$.

La siguiente Proposición técnica es uno de los ingredientes principales para demostrar el Teorema 1.11.

Proposición 3.2. *Sea $\mathcal{C}$ una clase de grupos métricos. Sea H un grupo amenable y sea G un grupo con la propiedad de que para cada $\varepsilon' > 0$ y para cada conjunto finito $F_{\prod_H G} \subseteq \prod_H G$, existe un grupo $(K, d) \in \mathcal{C}$ de diámetro acotado superiormente por 1 y una función*

$\varphi : \prod_H G \to K$ con $\varphi(1) = 1$ que es $(F_{\prod_H G}, \varepsilon', d)$-multiplicativa y $(F_{\prod_H G}, \varepsilon', d)$-libre para cierta función $\rho(\varepsilon')$, independiente de K.

Entonces, dado $\varepsilon > 0$ y un conjunto finito $F \subseteq G \wr H$, existe un conjunto finito $B \subseteq H$, un grupo $(K, d) \in \mathcal{C}$ y una función $\Phi : G \wr H \to K \wr_B Sym(B)$ que es $(F, \varepsilon, \tilde{d})$-multiplicativa y $(F, \varepsilon, \tilde{d})$-libre para la función $\tilde{\rho}(\varepsilon) := \min(1 - \varepsilon/3, \rho(\varepsilon/3))$.

Observación 3.3.
1. Debido a que la definición de ser (F, ε, d)-libre no explicita la función ρ que utiliza, para que la Proposición sea válida es necesario pedir que ρ sea elegida para cada clase $\mathcal{C}$.

2. La hipótesis sobre G en la Proposición 3.2 se satisface si G es $\mathcal{C}$-aproximable, para $\mathcal{C}$ cualquiera de las familias dadas en 2.54, (ver §3.3.4 para una discusión sobre el caso hiperlineal).

3. La hipótesis más natural sobre G habría sido que $\prod_H G$ es $\mathcal{C}$-aproximable. Sin embargo, con esta condición, dada la función de peso δ para $\prod_H G$, la demostración solo produciría algo como una función de peso para $G \wr H$ que depende de B y ε y esto no es suficiente para concluir la $(F, \delta, \tilde{d})$-inyectividad para $G \wr H$.

4. La obstrucción que se acaba de mencionar da una idea parcial de por qué nuestra demostración no puede adaptarse para mostrar, por ejemplo, que la clase de grupos MF, (o sea, grupos que son $\mathcal{C}$-aproximables cuando $\mathcal{C}$ es la clase de matrices unitarias dotadas de la norma de operadores, ver [12, Definition 2.7] y [77, §4]) es estable tomando extensiones con cocientes amenables.

Demostración de la Proposición 3.2. Llamemos $\mathrm{proj}_{\prod_H G}$ y proj_H a las funciones proyecciónes de $G \wr H$ a $\prod_H G$ y H, respectivamente. Sea $F \subseteq G \wr H$ un subconjunto finito y sea $\varepsilon > 0$. Definamos $F_0 := F \cup \{1\} \cup F^{-1}$ y sea $F_H := proj_H(F_0)$. Dado que H es amenable, existe un subconjunto finito $B \subseteq H$ tal que

$$\frac{|hB \triangle B|}{|B|} \leq \varepsilon/6\,, \quad \text{para todo } h \in F_H^2 := F_H.F_H \tag{3.1.2}$$

(ver 2.21). Sea $\sigma : H \to Sym(B)$ definido como

$$\sigma(h)b := \begin{cases} hb & \text{si } hb \in B \\ \gamma_h(hb) & \text{si no, donde } \gamma_h : hB \setminus B \to B \setminus hB \text{ es una biyección fija.} \end{cases} \tag{3.1.3}$$

Es fácil ver que σ es $(F_H, \varepsilon/3, d_{\mathrm{Hamm}})$-multiplicativa y $(F_H, \varepsilon/3, d_{\mathrm{Hamm}})$-libre para la función $\rho'(\varepsilon/3) = 1 - \varepsilon/3$.

Sea θ la acción por traslación de H en $\prod_H G$. En lo que sigue será útil tener en cuenta que, dado que θ es una acción, $\theta_h \theta_{h'} = \theta_{hh'}$ para todos los $h, h' \in H$.

Por la hipótesis del grupo $\prod_H G$, dado el conjunto finito

$$F_{\prod_H G} := \bigcup_{\substack{x \in \mathrm{proj}_{\prod_H G}(F_0) \\ b \in B}} \theta_{b^{-1}}(x), \tag{3.1.4}$$

existe un grupo $(K, d) \in \mathcal{C}$ de $diam(K) \leq 1$ y una función $\varphi : \prod_H G \to K$ con $\varphi(1) = 1$, tal que es $(F_{\prod_H G}, \varepsilon/3, d)$-multiplicativa y $(F_{\prod_H G}, \varepsilon/3, d)$-libre para una función ρ

independiente de K. Definamos

$$\begin{aligned} \Phi : G \wr\wr H &\to K \wr_B Sym(B) \\ (x,h) &\mapsto ((\varphi\theta_{b^{-1}}(x))_{b\in B}, \sigma(h)) . \end{aligned}$$

Afirmación: Φ es $(F_0, \varepsilon, \tilde{d})$-multiplicativa y $(F_0, \varepsilon, \tilde{d})$-libre para la función $\tilde{\rho}(\varepsilon) = \min(1 - \varepsilon/3, \rho(\varepsilon/3))$.

Primero probaremos que Φ es $(F_0, \varepsilon, \tilde{d})$-multiplicativa. Con ese fin, tomemos $(x, h), (x', h') \in F_0$. Por un lado

$$\Phi\left((x,h)(x',h')\right) = \Phi\left(x\theta_h(x'), hh'\right) = \Big(\left(\varphi\left(\theta_{b^{-1}}(x)\theta_{b^{-1}h}(x')\right)\right)_{b\in B}, \sigma(hh')\Big)$$

y por otro lado

$$\begin{aligned} \Phi(x,h)\Phi(x',h') &= \Big(\left(\varphi\left(\theta_{b^{-1}}(x)\right)\right)_{b\in B}, \sigma(h)\Big)\Big(\left(\varphi\left(\theta_{b^{-1}}(x')\right)\right)_{b\in B}, \sigma(h')\Big) \\ &= \left(\left(\varphi\left(\theta_{b^{-1}}(x)\right)\varphi\left(\theta_{(\sigma(h)^{-1}b)^{-1}}(x')\right)\right)_{b\in B}, \sigma(h)\sigma(h')\right). \end{aligned}$$

Luego

$$\tilde{d}(\Phi((x,h)(x',h')), \Phi(x,h)\Phi(x',h')) = d_{\text{Hamm}}(\sigma(hh'), \sigma(h)\sigma(h')) + \sum_{\substack{b\in B \\ \sigma(hh')b= \\ =\sigma(h)\sigma(h')b}} \frac{d\left(\varphi\left(\theta_{(\sigma(hh')b)^{-1}}(x)\theta_{(\sigma(h)\sigma(h')b)^{-1}h}(x')\right), \varphi\left(\theta_{(\sigma(hh')b)^{-1}}(x)\right)\varphi\left(\theta_{(\sigma(h')b)^{-1}}(x')\right)\right)}{|B|}. \tag{3.1.5}$$

Como σ es $(F_H, \varepsilon/3, d_{\text{Hamm}})$-multiplicativa, se sigue que $d_{\text{Hamm}}(\sigma(hh'), \sigma(h)\sigma(h')) < \varepsilon/3$. Solo queda por acotar la sumatoria en (3.1.5). Con ese fin, dividiremos el conjunto B en dos subconjuntos disjuntos, uno en el que podemos controlar la suma porque todos sus sumandos son pequeños, y otro en el que podemos controlar la suma porque el subconjunto en sí es pequeño y $diam(K) \leq 1$.

Por un lado, si $h\sigma(h')b \in B$ entonces por la definición de σ dada en (3.1.3), tenemos que $\sigma(h)\sigma(h')b = h\sigma(h')b$, y entonces $(\sigma(h)\sigma(h')b)^{-1}h = (\sigma(h')b)^{-1}$. Dado que, por (3.1.4), $\theta_{(\sigma(hh')b)^{-1}}(x), \theta_{(\sigma(h')b)^{-1}}(x') \in F_{\prod_H G}$, concluimos que para todo $b \in \sigma(h')^{-1}(B \cap h^{-1}B)$

$$d\left(\varphi(\theta_{(\sigma(hh')b)^{-1}}(x)\theta_{(\sigma(h)\sigma(h')b)^{-1}h}(x')), \varphi\left(\theta_{(\sigma(hh')b)^{-1}}(x)\right)\varphi(\theta_{(\sigma(h')b)^{-1}}(x'))\right) < \varepsilon/3. \tag{3.1.6}$$

Por otro lado, si $b \in \sigma(h')^{-1}(B \setminus h^{-1}B)$, este subconjunto es pequeño porque por (3.1.2) tenemos que

$$|\sigma(h')^{-1}(B \setminus h^{-1}B)| = |B \setminus h^{-1}B| < \frac{\varepsilon}{6}|B|. \tag{3.1.7}$$

Particionando el conjunto B en los subconjuntos disjuntos $\sigma(h')^{-1}(B \cap h^{-1}B)$ y $\sigma(h')^{-1}(B \setminus h^{-1}B)$ y reemplazando (3.1.6) y (3.1.7) en (3.1.5) tenemos que $\tilde{d}(\Phi((x,h)(x',h')), \Phi(x,h)\Phi(x',h')) < 5/6\,\varepsilon$.

Demostremos ahora que Φ es $(F_0, \varepsilon, \tilde{d})$-libre para la función $\tilde{\rho}$. Si $h \in F_H \setminus \{1\}$ entonces

$$\tilde{d}(\Phi(x,h), 1) \geq d_{\text{Hamm}}(\sigma(h), 1) \geq 1 - \varepsilon/3 \geq \tilde{\rho}(\varepsilon).$$

Nos queda mostrar que Φ es $(F_0, \varepsilon, \tilde{d})$-libre para la función $\tilde{\rho}$ en el caso en que $(x,1) \in F_0 \setminus \{1\}$. Dado que $x \neq 1$, $\theta_{b^{-1}}(x) \in F_{\prod_H G} \setminus \{1\}$. Por eso $\tilde{d}(\Phi(x,1),1) = \frac{1}{|B|}\sum_{b\in B} d(\varphi\theta_{b^{-1}}(x),1) \geq \rho(\varepsilon/3) \geq \tilde{\rho}(\varepsilon)$. □

Observación 3.4. En la demostración, nunca usamos que θ es el *shift* de H en $\prod_H G$. De hecho, la misma afirmación y prueba son verdaderas si reemplazamos $\prod_H G$ por un grupo, llamémosle E, y reemplazamos $G \wr H$ por un producto semidirecto $E \rtimes_\theta H$. Como se discutió en la introducción, el Teorema de Kaloujnine-Krasner implica que ambos enunciados son equivalentes. En la Sección 3.4, explicamos por qué incluso una versión más fuerte del Teorema de Kaloujnine-Krasner no parece poder adaptarse para probar una versión más fuerte del Corolario 1.12 donde la hipótesis de que N es un subgrupo normal de G y G/N es un grupo amenable es reemplazada por la hipótesis de que H es un subgrupo co-amenable en G (ver la Definición 2.27 y la discusión previa acerca de cómo definimos co-amenabilidad en esta tesis). En esa sección, probaremos una versión más técnica de la Proposición 3.2 donde no es posible definir productos corona irrestrictos o productos semidirectos.

3.2. Homomorfismos que controlan la métrica

En esta sección técnica, describiremos una serie de homomorfismos que utilizaremos para deducir los casos sófico, linealmente sófico e hiperlineal del Teorema 1.11 a partir de la construcción realizada en la Proposición 3.2. De manera similar, los utilizaremos en las demostraciones de los Teoremas 1.8 y 1.9 en el capítulo 5.

Homomorfismos controlados en el caso sófico

Una variante del siguiente Lema puede encontrarse en [32].

Lema 3.5. *Sean A, B conjuntos finitos. La función*

$$\psi : (Sym(A) \wr_B Sym(B), \tilde{d}) \to (Sym(A \times B), d_{\text{Hamm}})$$
$$\psi(\alpha,\beta)(a,b) := (\alpha_{\beta(b)}(a), \beta(b))$$

es un homomorfismo isométrico de grupos.

Demostración. Para $(\alpha,\beta), (\alpha',\beta') \in Sym(A) \wr_B Sym(B)$ y $(a,b) \in A \times B$, las siguientes identidades muestran que ψ es un homomorfismo:

$$\psi(\alpha,\beta)\psi(\alpha',\beta')(a,b) = \psi(\alpha,\beta)(\alpha'_{\beta'(b)}(a), \beta'(b)) = (\alpha_{\beta(\beta'(b))}(\alpha'_{\beta'(b)}(a)), \beta\beta'(b));$$
$$\psi(\alpha(\beta\cdot\alpha'), \beta\beta')(a,b) = ((\alpha(\beta\cdot\alpha'))_{\beta\beta'(b)}(a), \beta\beta'(b)) = (\alpha_{\beta\beta'(b)}\alpha'_{\beta'(b)}(a), \beta\beta'(b)).$$

ψ es una isometría porque

$$
\begin{aligned}
d_{\mathrm{Hamm}}(\psi(\alpha,\beta),\psi(\alpha',\beta')) &= \frac{1}{|A||B|}|\{(a,b)\in A\times B : (\alpha_{\beta(b)}(a),\beta(b))\neq(\alpha'_{\beta'(b)}(a),\beta'(b))\}| \\
&= \frac{1}{|B|}\sum_{\{b\in B:\beta(b)\neq\beta'(b)\}}\frac{1}{|A|}|\{a\in A : (\alpha_{\beta(b)}(a),\beta(b))\neq(\alpha'_{\beta'(b)}(a),\beta'(b))\}| \\
&\quad + \frac{1}{|B|}\sum_{\{b\in B:\beta(b)=\beta'(b)\}}\frac{1}{|A|}|\{a\in A : \alpha_{\beta(b)}(a)\neq\alpha'_{\beta(b)}(a)\}| \\
&= d_{\mathrm{Hamm}}(\beta,\beta') + \frac{1}{|B|}\sum_{\{b\in B:\beta(b)=\beta'(b)\}} d_{\mathrm{Hamm}}(\alpha_{\beta(b)},\alpha'_{\beta(b)}) = \tilde{d}((\alpha,\beta),(\alpha',\beta')). \qquad \square
\end{aligned}
$$

Homomorfismos controlados en el caso linealmente sófico

Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo. Tomemos un conjunto finito B. Consideremos $M_{|B|n}(\mathbb{K})$ e identifiquémoslo con $M_{|B|}(M_n(\mathbb{K}))$ "agregando paréntesis" para entender cada matriz de $M_{|B|n}(\mathbb{K})$ como una matriz de bloques en $B\times B$ cuyas entradas son matrices de $n\times n$. Con esta identificación, dado $A\in M_{|B|n}(\mathbb{K})$ y $b',b\in B$, $A_{(b',b)}\in M_n(\mathbb{K})$ denota la entrada del bloque de A en las coordenadas (b',b). Definamos

$$
\begin{aligned}
\psi : M_n(\mathbb{K}) \wr_B Sym(B) &\to M_{|B|n}(\mathbb{K}) \qquad (3.2.1)\\
\psi(U,\tau)_{(b',b)} &= \begin{cases} 0 & \text{si } b'\neq\tau(b) \\ U_{\tau(b)} & \text{si } b'=\tau(b). \end{cases}
\end{aligned}
$$

Lema 3.6. *ψ es un homomorfismo de grupos entre $GL_n(\mathbb{K})\wr_B Sym(B)$ y $GL_{|B|n}(\mathbb{K})$ y satisface que*

$$
\frac{1}{2}\tilde{d}\left((U,\tau),(U',\tau')\right) \leq d_{\mathrm{rk}}\left(\psi(U,\tau),\psi(U',\tau')\right) \leq \tilde{d}\left((U,\tau),(U',\tau')\right). \qquad (3.2.2)
$$

Demostración. Podemos pensar a la imagen de ψ como una matriz diagonal por bloques de $M_{|B|n}(\mathbb{K})$ cuyos bloques son matrices inversibles, compuesta con una matriz de permutación, por lo tanto la imagen de ϕ pertenece a $GL_{|B|n}(\mathbb{K})$ por ser composición de matrices inversibles. Un cálculo de rutina de matrices muestra que es un homomorfismo de grupos. Para acotar $d_{\mathrm{rk}}\left(\psi(U,\tau),\psi(U',\tau')\right)$, observemos primero que $\psi(U,\tau)-\psi(U',\tau')\in M_{|B|}(M_n(\mathbb{K}))$ tiene a lo sumo dos entradas no nulas en cada columna y en cada fila. Más aún, las únicas columnas con una entrada no nula están en las columnas $b\in B$ para la cual $\tau(b)=\tau'(b)$ y las únicas filas con una entrada no nula son las filas $\tilde{b}\in B$ tales que $\tau^{-1}(\tilde{b})=\tau'^{-1}(\tilde{b})$. Con esto en mente, sea A_1 la sub-matriz de $\psi(U,\tau)-\psi(U',\tau')$ obtenida después de eliminar las filas y columnas con exactamente dos entradas distintas de cero y sea A_2 la submatriz de $\psi(U,\tau)-\psi(U',\tau')$ obtenida después eliminar las filas y columnas con exactamente una entrada distinta de cero. Luego

$$
d_{\mathrm{rk}}\left(\psi(U,\tau),\psi(U',\tau')\right) = \frac{1}{|B|n}\mathrm{rank}(\psi(U,\tau)-\psi(U',\tau')) = \frac{1}{|B|n}\mathrm{rank}(A_1)+\frac{1}{|B|n}\mathrm{rank}(A_2), \qquad (3.2.3)
$$

y

$$\frac{1}{|B|n}\mathrm{rank}(A_1) = \frac{1}{|B|}\sum_{\substack{b\in B\\ \tau(b)=\tau'(b)}}\frac{1}{n}\mathrm{rank}\left(U_{\tau(b)} - U'_{\tau(b)}\right) = \frac{1}{|B|}\sum_{\substack{b\in B\\ \tau(b)=\tau'(b)}} d_{\mathrm{rk}}\left(U_{\tau(b)}, U'_{\tau(b)}\right). \tag{3.2.4}$$

Si entendemos A_2 como un bloque en $M_{|\{b\in B:\tau(b)\neq\tau'(b)\}|}(M_n(\mathbb{K}))$, luego todas sus entradas no nulas están en $GL_n(\mathbb{K})$; cada columna b tiene exactamente dos entradas no nulas, las cuales corresponden a las filas $\tau(b)$ y $\tau'(b)$ y cada fila $\tilde{b}$ tiene exactamente dos entradas no nulas, las cuales corresponden a las columnas $\tau^{-1}(\tilde{b})$y $\tau'^{-1}(\tilde{b})$. Luego

$$\frac{1}{2}n\big|\{b\in B:\tau(b)\neq\tau'(b)\}\big| \leq \mathrm{rank}(A_2) \leq n\big|\{b\in B:\tau(b)\neq\tau'(b)\}\big|, \tag{3.2.5}$$

donde la primera desigualdad se sigue del simple hecho de que si una matriz $A\in M_r(\mathbb{K})$ tiene exactamente dos entradas distintas de cero en cada columna y en cada fila, entonces $\mathrm{rank}(A)\geq r/2$. Reemplazando (3.2.4) y (3.2.5) en (3.2.3) se deduce el resultado buscado. □

Homomorfismos controlados en el caso hiperlineal

Sea $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Identifiquemos $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ con $M_n(\mathbb{K})$ mediante la representación matricial en una base ortonormal $\{v_1,\dots,v_n\}$. Está claro que la función ψ definida en (3.2.1) puede verse como $\psi:\mathcal{B}(\mathcal{H})\wr_B Sym(B)\to\mathcal{B}(\bigoplus_B\mathcal{H})$ y que $\|\psi(U,\tau)\|_2^2 = \frac{1}{|B|}\sum_{b\in B}\|U_b\|_2^2$. Recordemos que el diámetro del grupo unitario en la métrica de Hilbert-Schmidt es 2. Entonces la métrica apropiada en $\mathcal{U}(\mathcal{H})\wr_B Sym(B)$ es la que se obtiene escalando el segundo sumando en (3.1.1) por 1/2. Mantendremos la notación $\tilde{d}$ para esta métrica.

Lema 3.7. *ψ es un homomorfismo de grupos entre $\mathcal{U}(\mathcal{H})\wr_B Sym(B)$ y $\mathcal{U}(\bigoplus_B\mathcal{H})$ y satisface que*

$$\tilde{d}\left((U,\tau),(U',\tau')\right) \leq d_{HS}\left(\psi(U,\tau),\psi(U',\tau')\right) \leq 2\sqrt{\tilde{d}\left((U,\tau),(U',\tau')\right)}. \tag{3.2.6}$$

Demostración. Es obvio que ψ mapea $\mathcal{U}(\mathcal{H})\wr_B Sym(B)$ a $\mathcal{U}(\bigoplus_B\mathcal{H})$. Además, por un lado

$$\begin{aligned}\|\psi(U,\tau)-\psi(U',\tau')\|_2^2 &= \frac{1}{|B|}\sum_{\substack{b\in B\\ \tau(b)\neq\tau'(b)}}\left(\left\|U_{\tau(b)}\right\|_2^2 + \left\|U'_{\tau'(b)}\right\|_2^2\right) + \\ &\quad \frac{1}{|B|}\sum_{\substack{b\in B\\ \tau(b)=\tau'(b)}}\left\|U_{\tau(b)} - U'_{\tau(b)}\right\|_2^2 \\ &= 2d_{\mathrm{Hamm}}(\tau,\tau') + \frac{1}{|B|}\sum_{\substack{b\in B\\ \tau(b)=\tau'(b)}} d_{\mathrm{HS}}\left(U_{\tau(b)},U'_{\tau(b)}\right)^2 \\ &\leq 4\tilde{d}(\psi(U,\tau),\psi(U',\tau')),\end{aligned}$$

y por el otro lado, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$2d_{\text{Hamm}}(\tau,\tau') + \frac{1}{|B|} \sum_{\substack{b\in B \\ \tau(b)=\tau'(b)}} d_{\text{HS}}\left(U_{\tau(b)}, U'_{\tau(b)}\right)^2 \geq$$

$$2d_{\text{Hamm}}(\tau,\tau') + \left(\frac{1}{|B|} \sum_{\substack{b\in B \\ \tau(b)=\tau'(b)}} d_{\text{HS}}\left(U_{\tau(b)}, U'_{\tau(b)}\right)\right)^2 \geq$$

$$2d_{\text{Hamm}}(\tau,\tau')^2 + 2\left(\frac{1}{2|B|} \sum_{\substack{b\in B \\ \tau(b)=\tau'(b)}} d_{\text{HS}}\left(U_{\tau(b)}, U'_{\tau(b)}\right)\right)^2 \geq$$

$$\tilde{d}(\psi(U,\tau),\psi(U',\tau'))^2$$

□

3.3. Demostración del Teorema 1.11

Con el fin de demostrar el Teorema 1.11, aplicaremos la Proposición 3.2 a las clases $\mathcal{C}$ de los Ejemplos 2.54 junto con los homomorfismos de grupo construidos en la sección anterior para llevar la estructura métrica de $(K \wr_B Sym(B), \tilde{d})$ con $(K,d) \in \mathcal{C}$ a un grupo de la clase $\mathcal{C}$ de manera controlada.

3.3.1. El caso débilmente sófico

Recordemos que queremos demostrar lo siguiente:

Sea H un grupo amenable, sea G un grupo y $G \wr\wr H$ el producto corona irrestricto de G con H.

1. Si G es débilmente sófico, entonces $G \wr\wr H$ es débilmente sófico.

Demostración del Teorema 1.11(1). Si G es débilmente sófico, entonces $\prod_H G$ es débilmente sófico por el ítem (II) de la Proposición 2.56 y satisface la hipótesis de la Proposición 3.2 cuando ρ es igual a la función constante 1. Por lo tanto, dado $\varepsilon > 0$ y un conjunto finito $F \subseteq G \wr\wr H$ existe un conjunto finito $B \subseteq H$, un grupo finito K con una métrica bi-invariante d con $diam(K) = 1$ y una función $\Phi : G \wr\wr H \to K \wr_B Sym(B)$ que es $(F,\varepsilon,\tilde{d})$-multiplicativa y $(F,\varepsilon,\tilde{d})$-libre para $\tilde{\rho}(\varepsilon) = 1 - \varepsilon/3 \geq 2/3$. Dado que $K \wr_B Sym(B)$ es un grupo finito esto concluye la demostración. □

Observación 3.8. La demostración es constructiva en el sentido de que, a partir de una aproximación débilmente sófica dada de G, se puede construir explícitamente una aproximación débilmente sófica de $\prod_H G$ y la demostración proporciona una aproximación débilmente sófica de $G \wr\wr H$. Este también es el caso en las instancias restantes del Teorema 1.11.

3.3.2. El caso sófico

Recordemos que queremos demostrar lo siguiente:
Sea H un grupo amenable, sea G un grupo y $G \wr\wr H$ el producto corona irrestricto de G con H.

2 Si G es sófico, entonces $G \wr H$ es sófico.

Demostración del Teorema 1.11(2). Si G es sófico, entonces $\prod_H G$ es sófico por el ítem (II) de la Proposición 2.56 y satisface las hipótesis de la Proposición 3.2 con $\rho(\varepsilon') = 1 - \varepsilon'$. Así, dado $\varepsilon > 0$ y un conjunto finito $F \subseteq G \wr H$, existe un conjunto finito $B \subseteq H$, un grupo de permutaciones finito $Sym(A)$ dotado con la distancia de Hamming normalizada y una función $\Phi : G \wr H \to Sym(A) \wr_B Sym(B)$ que es $(F, \varepsilon, \tilde{d})$-multiplicativa y $(F, \varepsilon, \tilde{d})$-libre, para $\tilde{\rho}(\varepsilon) = 1 - \varepsilon/3 \geq 1 - \varepsilon$.

El Lema 3.5 implica que $\psi \circ \Phi : G \wr H \to Sym(A \times B)$ es una aproximación $(F, \varepsilon, d_{\mathrm{Hamm}})$-sófica de $G \wr H$. □

3.3.3. El caso linealmente sófico

Recordemos que queremos demostrar lo siguiente:

Sea H un grupo amenable, sea G un grupo y $G \wr H$ el producto corona irrestricto de G con H.

3 Si G es linealmente sófico, entonces $G \wr H$ es linealmente sófico.

Demostración del Teorema 1.11(3). Si G es linealmente sófico, entonces $\prod_H G$ es linealmente sófico y satisface las hipótesis de la Proposición 3.2 cuando $\rho(\varepsilon') = 1/4 - \varepsilon'$. El resto de la demostración sigue como en el caso sófico. □

3.3.4. El caso hiperlineal

Recordemos que queremos demostrar lo siguiente:

Sea H un grupo amenable, sea G un grupo y $G \wr H$ el producto corona irrestricto de G con H.

4 Si G es hiperlineal, entonces $G \wr H$ es hiperlineal.

Observación 3.9. Retomando la discusión en el comienzo de la sección 2.5, recordemos la definición original dada por Rădulescu en 2000: un grupo G es *hyperlinear* si se embebe en $\mathcal{U}(R^\omega)$. Rădulescu mostró en [64] (ver también [59, Proposición 7.1] para una demostración más simple) que esto es lo mismo que decir que el álgebra de von Neumann de grupo $L(G)$ satisface el problema de embebimiento de Connes, es decir, que $L(G)$ se embebe en R^ω. Esto a su vez implica que el embebimiento de G en $\mathcal{U}(R^\omega)$ puede tomarse como un embebimiento ortogonal (de hecho, la demostración del Teorema de Rădulescu se reduce a mostrar exactamente eso). Dado que los unitarios en R se pueden aproximar con matrices unitarias de $n \times n$ para n suficientemente grande, se deduce que G es hiperlineal si y solo si G se embebe ortogonalmente en un ultraproducto de matrices unitarias dotado de la norma de Hilbert-Schmidt. Cuando G es numerable, la traducción del lenguaje de ultraproductos a una versión finitaria da como resultado la definición de grupo hiperlineal que dimos en el Ejemplo 2.54 (4), con la noción de (F, ε, d_{HS})-tracial definida en (4). Por medio de la desigualdad de Cauchy-Schwartz, está claro que si ε es (F, ε, d_{HS})-tracial es equivalente a

$$\sqrt{2} - \varepsilon < \|\phi(g) - 1\|_2 < \sqrt{2} + \varepsilon \ \text{ para todo } g \in F \setminus \{1\}. \tag{3.3.1}$$

Estas dos desigualdades combinadas simplemente reflejan que $\phi(g)$ puede tomarse como "casi ortogonal" a 1 en la norma de Hilbert-Schmidt. Después de eliminar la segunda desigualdad en (3.3.1), se obtiene que ϕ es (F, ε, d_{HS})-libre para la función $\rho(\varepsilon) := \sqrt{2} - \varepsilon$ y esto es lo que escriben algunos artículos como parte de la definición de grupo hiperlineal. Ambas definiciones son equivalentes debido al Teorema de Rădulescu, sin embargo, una aproximación hiperlineal (F, ε, d_{HS})-tracial lleva más información que una que es solo es (F, ε, d_{HS})-libre para la función $\rho(\varepsilon) = \sqrt{2} - \varepsilon$.

Una consecuencia de la Observación anterior es que se podría utilizar la caracterización de grupos hiperlineales en términos de ser (F, ε, d_{HS})-libre para deducir el Teorema 1.11 (4) de la Proposición 3.2 y el Lema 3.7 siguiendo la misma estrategia empleada en los casos sófico y linealmente sófico. Omitiremos este enfoque puesto que tiene la desventaja que si uno comienza con una aproximación hiperlineal de G que es (F, ε, d_{HS})-tracial, la demostración solo garantizaría una aproximación hiperlineal de $G \wr H$ que es (F, ε, d_{HS})-libre para la función $\rho(\varepsilon) = \sqrt{2} - \varepsilon$. De todas formas, ajustes menores a la demostración de la Proposición 3.2 son suficientes para proporcionar una aproximación de $G \wr H$ que sea (F, ε, d_{HS})-tracial.

Demostración del Teorema 1.11(4). Consideremos F_0, F_H, B, σ y $F_{\prod_H G}$ como en la demostración de la Proposición 3.2, pero en este caso tomamos $\varepsilon^2/24$ en (3.1.2) de modo que σ se convierta en una aproximación $(F_H, \varepsilon^2/12)$-sófica de H. Dado que $\prod_H G$ es hiperlineal por el ítem (ii) de la Proposición 2.56, existe un espacio de Hilbert de dimensión finita $\mathcal{H}$ y una función $\varphi : \prod_H G \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ con $\varphi(1) = 1$ que es $(F_{\prod_H G}, \varepsilon^2/12, d_{\mathrm{HS}})$-multiplicativa y $(F_{\prod_H G}, \varepsilon^2/12, d_{\mathrm{HS}})$-tracial.

Teniendo en cuenta que la métrica en $\mathcal{U}(\mathcal{H}) \wr_B Sym(B)$ es obtenida al multiplicar el segundo sumando en la ecuación (3.1.1) por $1/2$, la misma demostración de la Proposición 3.2 muestra que la función $\Phi : G \wr H \to \mathcal{U}(\mathcal{H}) \wr_B Sym(B)$ es $(F_0, \varepsilon^2/4, \tilde{d})$-multiplicativa. Entonces, la segunda desigualdad en (3.2.6) implica que $\psi \circ \Phi : G \wr H \to \mathcal{U}(\bigoplus_B \mathcal{H})$ es $(F_0, \varepsilon, d_{\mathrm{HS}})$-multiplicativa. Queda por mostrar que $\psi \circ \Phi$ es $(F_0, \varepsilon, d_{\mathrm{HS}})$-tracial. Observemos que la traza de una matriz de bloques es igual a la suma de las trazas de sus entradas diagonales de bloque, se tiene que $tr(\psi((U_b)_{b\in B}, \tau)) = \frac{1}{|B|} \sum_{b \in B : \tau(b) = b} tr(U_b)$. Por eso

$$|tr(\psi \circ \Phi(x,h))| = \frac{1}{|B|} \left| \sum_{b \in B : \sigma(h)b = b} tr(\varphi\theta_{b^{-1}}(x)) \right| \leq \frac{1}{|B|} |\{b \in B : \sigma(h)b = b\}| = 1 - d_{\mathrm{Hamm}}(\sigma(h), 1).$$

De ello se deduce que $|tr(\psi \circ \Phi(x,h))| < \varepsilon^2/12 < \varepsilon$, siempre que $h \in F_H \setminus \{1\}$. Por otro lado, si $(x, 1) \in F_0 \setminus \{1\}$ entonces $\theta_b^{-1}(x) \in F_{\prod_H G} \setminus \{1\}$. Por lo tanto $|tr(\psi \circ \Phi(x,1))| = \frac{1}{|B|} |\sum_{b \in B} tr(\varphi\theta_{b^{-1}}(x))| < \varepsilon^2/12 < \varepsilon$. □

3.4. El caso de subgrupos co-amenables

La demostración de Elek y Szabó en [20] que muestra que las extensiones de la forma sófico-por-amenable son sóficas se puede adaptar fácilmente para mostrar que si un grupo G tiene un subgrupo sófico y co-amenable H, entonces G es sófico (para una definición de co-amenable, ver la Definición 2.25). Además, hay un Teorema aparentemente menos conocido de Kaloujnine y Krasner [38], que establece que si $H < G$, entonces G

se embebe en $H \wr (G/\mathrm{core}(H))$, donde $\mathrm{core}(H) = \bigcap_{g \in G} gHg^{-1}$ (ver también [65, Theorem 2.3.1]). Enfatizamos que H no necesita ser normal en ninguna de estas afirmaciones. Desafortunadamente, no queda claro cómo usar este Teorema de Kaloujnine y Krasner para mostrar el Teorema de Elek y Szabó para grupos co-amenables. Por ejemplo, es falso que si H es co-amenable en G, entonces $\mathrm{core}(H)$ es co-amenable en G, (que es lo mismo que decir que el grupo $G/\mathrm{core}(H)$ es amenable) por lo que parece difícil tener algún control en $H \wr (G/\mathrm{core}(H))$. Como ejemplo, Monod y Popa mostraron en [53] que para cualquier grupo numerable Q, el grupo $H := \oplus_{n \geq 0} Q$ es co-amenable en $G := Q \wr \mathbb{Z}$, el producto corona restringido de Q por $\mathbb{Z}$. Dado que $core(H) = \{1\}$, tomando cualquier Q no amenable, se deduce que $G/core(H)$ no es amenable. Además, en este ejemplo, el Teorema de Kaloujnine y Krasner es el trivial enunciado $G < H \wr G$, y en general se desconoce si $H \wr G$ es sófico cuando Q (y por lo tanto H y G) son sóficos.

A pesar de esta obstrucción, todavía podemos usar el trabajo que hemos realizado en las secciones anteriores para mostrar de manera unificada que si H es co-amenable en G, y H pertenece a uno de las cuatro clases $\mathcal{C}$ en los Ejemplos 2.54, entonces G está en la misma clase $\mathcal{C}$ que H. Logramos esto reemplazando cada vez que usamos la Proposición 3.2 en la Sección 3.3 con la siguiente Proposición (ver la Observación 3.3 para una explicación de varios hechos técnicos del enunciado).

Proposición 3.10. *Sea G un grupo y sea H un subgrupo con la propiedad de que para cada $\varepsilon' > 0$ y para cada subconjunto finito F_H, existe un grupo $(K, d) \in \mathcal{C}$ de diámetro acotado superiormente por 1 y una función $\varphi : H \to K$ con $\varphi(1) = 1$ que es (F_H, ε', d)-multiplicativa y (F_H, ε', d)-libre para cierta función ρ independiente de K. Además, supongamos que H es co-amenable en G, es decir, supongamos que la acción regular izquierda de G en las coclases a izquierda G/H es amenable.*

Entonces dado $\varepsilon > 0$ y un conjunto finito $F \subseteq G$, existe un conjunto finito $B \subseteq G$, un grupo $(K, d) \in \mathcal{C}$ y una función $\Phi : G \to K \wr_B Sym(B)$ que es $(F, \varepsilon, \tilde{d})$-multiplicativa y $(F, \varepsilon, \tilde{d})$-libre, para la función $\tilde{\rho}(\varepsilon) := (1 - \varepsilon/3)\rho(\varepsilon/3)$.

Demostración. Sea $F \subseteq G$ un subconjunto finito y sea $\varepsilon > 0$. Dado que la acción de G sobre G/H definida por $g.xH := gxH$ es amenable, por la Proposición 2.26, existe un conjunto de Følner para (F, ε), es decir, existe un conjunto finito $\overline{B} \subseteq G/H$ tal que

$$\frac{|f.\overline{B} \triangle \overline{B}|}{|\overline{B}|} \leq \varepsilon/4, \text{ para todo } f \in F \cup F^{-1} \cup (F^{-1})^2. \tag{3.4.1}$$

Sea $\sigma : G \to Sym(\overline{B})$ definida como

$$\sigma(g)\bar{b} := \begin{cases} g.\bar{b} & \text{si } g.\bar{b} \in \overline{B} \\ \gamma_g(g.\bar{b}) & \text{si no, donde } \gamma_g : g\overline{B} \setminus \overline{B} \to \overline{B} \setminus g\overline{B} \text{ es una biyección fija.} \end{cases}$$

Afirmación 3.11. *σ es $(F, \varepsilon/4, d_{\mathrm{Hamm}})$-multiplicativa.*

Demostración de la Afirmación. Sean $f_1, f_2 \in F$. Definamos
$S := \{\bar{b} \in \overline{B} : f_2.\bar{b} \in \overline{B}\} \cap \{\bar{b} \in \overline{B} : f_1 f_2.\bar{b} \in \overline{B}\}$. Notar que si $\bar{b} \in S$, entonces $\sigma(f_1 f_2)\bar{b} = \sigma(f_1)\sigma(f_2)\bar{b}$. Más aún,

$$\begin{aligned} |\overline{B}| &\geq |\{\bar{b} \in \overline{B} : f_2.\bar{b} \in \overline{B}\} \cup \{\bar{b} \in \overline{B} : f_1 f_2.\bar{b} \in \overline{B}\}| \\ &\geq |\{\bar{b} \in \overline{B} : f_2.\bar{b} \in \overline{B}\}| + |\{\bar{b} \in \overline{B} : f_1 f_2.\bar{b} \in \overline{B}\}| - |\{\bar{b} \in \overline{B} : f_2.\bar{b} \in \overline{B}\} \cap \{\bar{b} \in \overline{B} : f_1 f_2.\bar{b} \in \overline{B}\}| \\ &\geq 2(1 - \varepsilon/8)|\bar{B}| - |S|, \end{aligned}$$

y por lo tanto $\frac{|\overline{B}\setminus S|}{|\overline{B}|} \leq \varepsilon/4$, (en la tercera desigualdad usamos que, por construcción, (3.4.1) es válida cuando $f = f_2^{-1}f_1^{-1}$ y que (3.4.1) implica que para todo $f \in F^{-1} \cup (F^{-1})^2$, $|f\overline{B} \cap \overline{B}| \geq (1-\varepsilon/8)|\overline{B}|$). Luego

$$d_{\mathrm{Hamm}}(\sigma(f_1)\sigma(f_2), \sigma(f_1f_2)) = \frac{1}{|\overline{B}|}\left|\left\{\bar{b} \in \overline{B} : \sigma(f_1f_2)\bar{b} \neq \sigma(f_1)\sigma(f_2)\bar{b}\right\}\right|$$
$$= \frac{1}{|\overline{B}|}\left|\left\{\bar{b} \in S : \sigma(f_1f_2)\bar{b} \neq \sigma(f_1)\sigma(f_2)\bar{b}\right\}\right| + \frac{1}{|\overline{B}|}\left|\left\{\bar{b} \in \overline{B}\setminus S : \sigma(f_1f_2)\bar{b} \neq \sigma(f_1)\sigma(f_2)\bar{b}\right\}\right|$$
$$\leq 0 + \frac{|\overline{B}\setminus S|}{|\overline{B}|} \leq \varepsilon/4. \qquad \square$$

Sea $\pi : G \to G/H$ la proyección al cociente y sea $\tau : G/H \to G$ una sección de la misma. Llamemos $B := \tau(\overline{B})$. Sea $F_H := (B^{-1}FB) \cap H$. Por hipótesis, existe un grupo $(K,d) \in \mathcal{C}$ de diámetro acotado superiormente por 1 y una función $\varphi : H \to K$ con $\varphi(1) = 1$ que es $(F_H, \varepsilon/3, d)$-multiplicativa y $(F_H, \varepsilon/3, d)$-libre para cierta función ρ, independiente de K. Definamos

$$\begin{aligned} &G \to K \wr_B Sym(B) \\ &\Phi(g) := \left(\left(\varphi\left(b^{-1}g\tau\pi(g^{-1}b)\right)\right)_{b\in B}, \tau\sigma(g)\pi\right). \end{aligned} \tag{3.4.2}$$

Φ está bien definido ya que $b^{-1}g\tau\pi(g^{-1}b) \in H$ y está claro que $\Phi(1) = 1$. (La idea de usar $\varphi\left(b^{-1}g\tau\pi(g^{-1}b)\right)$ ya está presente en [20]).

Afirmación: Φ es $(F, \varepsilon, \tilde{d})$-multiplicativa y $(F, \varepsilon, \tilde{d})$-libre para la función $\tilde{\rho}(\varepsilon) = (1 - \varepsilon/3)\rho(\varepsilon/3)$.

Probemos primero que Φ es $(F, \varepsilon, \tilde{d})$-multiplicativa. Con el objetivo de acortar la cantidad de ecuaciones, llamemos $\psi_b(g) := \varphi\left(b^{-1}g\tau\pi(g^{-1}b)\right)$. Sea $f_1, f_2 \in F$. Entonces

$$\Phi(f_1f_2) = \left((\psi_b(f_1f_2))_{b\in B}, \tau\sigma(f_1f_2)\pi\right) = \left(\left(\varphi\left(b^{-1}f_1f_2\tau\pi((f_1f_2)^{-1}b)\right)\right)_{b\in B}, \tau\sigma(f_1f_2)\pi\right)$$

y

$$\begin{aligned} \Phi(f_1)\Phi(f_2) &= \left((\psi_b(f_1))_{b\in B}, \tau\sigma(f_1)\pi\right)\left((\psi_b(f_2))_{b\in B}, \tau\sigma(f_2)\pi\right) \\ &= \left(\left(\psi_b(f_1)\psi_{\tau\sigma(f_1^{-1})\pi(b)}(f_2)\right)_{b\in B}, \tau\sigma(f_1)\sigma(f_2)\pi\right) \end{aligned}$$

Sea $B_{f_1,f_2} := \{b \in B : f_1^{-1}.\pi(b) \in \overline{B}\} \cap \{b \in B : (f_1f_2)^{-1}.\pi(b) \in \overline{B}\}$. Observar que si $b \in B_{f_1,f_2}$, entonces por la definición de σ se sigue que $\sigma(f_1^{-1})\pi(b) = f_1^{-1}.\pi(b)$ y, por la definición de la acción regular a izquierda, se sigue que $f_1^{-1}.\pi(b) = \pi(f_1^{-1}b)$ y $(f_1f_2)^{-1}.\pi(b) = \pi((f_1f_2)^{-1}b) \in \overline{B}$. Con esto en mente, se sigue que para todo $b \in B_{f_1}$

$$\begin{aligned} \psi_{\tau\sigma(f_1^{-1})\pi(b)}(f_2) &= \varphi\left((\tau\sigma(f_1^{-1})\pi(b))^{-1}f_2\tau\pi(f_2^{-1}\tau\sigma(f_1^{-1})\pi(b))\right) \\ &= \varphi\left((\tau\pi(f_1^{-1}b))^{-1}f_2\tau\pi(f_2^{-1}\tau\pi(f_1^{-1}b))\right) \\ &= \varphi\left((\tau\pi(f_1^{-1}b))^{-1}f_2\tau\pi((f_1f_2)^{-1}b)\right). \end{aligned}$$

Como para todo $b \in B_{f_1,f_2}$, $b^{-1}f_1\tau\pi(f_1^{-1}b)$ y $(\tau\pi(f_1^{-1}b))^{-1}f_2\tau\pi((f_1f_2)^{-1}b)$ pertenecen a F_H y como φ es $(F_H, \varepsilon/3, d)$-multiplicativa, entonces

$$d\left(\psi_b(f_1)\psi_{\tau\sigma(f_1^{-1})\pi(b)}(f_2), \psi_b(f_1f_2)\right) < \varepsilon/3, \text{ para todo } b \in B_{f_1,f_2}.$$

Así, particionando B con los subconjuntos $(\tau\sigma(f_1f_2)\pi)^{-1}B_{f_1,f_2}$ y $B\setminus(\tau\sigma(f_1f_2)\pi)^{-1}B_{f_1,f_2}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
&\tilde{d}(\Phi(f_1)\Phi(f_2),\Phi(f_1f_2)) = d_{\mathrm{Hamm}}(\tau\sigma(f_1)\sigma(f_2)\pi,\tau\sigma(f_1f_2)\pi)+\\
&\quad\frac{1}{|B|}\sum_{\substack{b\in B\\ \tau\sigma(f_1f_2)\pi(b)=\tau\sigma(f_1)\sigma(f_2)\pi(b)}} d\left(\psi_{\tau\sigma(f_1f_2)\pi(b)}(f_1)\psi_{\tau\sigma(f_1^{-1})\sigma(f_1f_2)\pi(b)}(f_2),\psi_{\tau\sigma(f_1f_2)\pi(b)}(f_1f_2)\right)\\
&\quad\le d_{\mathrm{Hamm}}(\tau\sigma(f_1)\sigma(f_2)\pi,\tau\sigma(f_1f_2)\pi)+\frac{1}{|B|}\sum_{b\in B_{f_1,f_2}} d\left(\psi_b(f_1)\psi_{\tau\sigma(f_1^{-1})\pi(b)}(f_2),\psi_b(f_1f_2)\right)\\
&\qquad+\frac{|B\setminus(\tau\sigma(f_1f_2)\pi)^{-1}B_{f_1,f_2}|}{|B|}.
\end{aligned}$$

Como τ es una biyección entre $\overline{B}$ y B con inversa π, se sigue que

$$d_{\mathrm{Hamm}}(\tau\sigma(f_1)\sigma(f_2)\pi,\tau\sigma(f_1f_2)\pi)=d_{\mathrm{Hamm}}(\sigma(f_1)\sigma(f_2),\sigma(f_1f_2))\le\varepsilon/4.$$

Si llamamos $S:=\{\bar{b}\in\overline{B}:f_1^{-1}.\bar{b}\in\overline{B}\}\cap\{\bar{b}\in\bar{B}:(f_1f_2)^{-1}.\bar{b}\in\overline{B}\}$, entonces $|B_{f_1,f_2}|=|S|$ y la primera parte de la demostración de la Afirmación 3.11 muestra que

$$\frac{|B\setminus(\tau\sigma(f_1f_2)\pi)^{-1}B_{f_1,f_2}|}{|B|}=\frac{|B\setminus B_{f_1,f_2}|}{|B|}=\frac{|\overline{B}\setminus S|}{|\overline{B}|}\le\varepsilon/4.$$

Así,

$$\tilde{d}(\Phi(f_1)\Phi(f_2),\Phi(f_1f_2))<\varepsilon/4+\varepsilon/3+\varepsilon/4<\varepsilon.$$

Para demostrar que Φ es $(F,\varepsilon,\tilde{d})$-libre para la función $\tilde{\rho}(\varepsilon)=(1-\varepsilon/3)\rho(\varepsilon/3)$, tomemos $f\in F\setminus\{1\}$ y definamos $B_f:=\{b\in B:\sigma(f)\pi(b)=f.\pi(b)=\pi(fb)\}$. Se sigue que $|B_f|=|\{\bar{b}\in\overline{B}:f.\bar{b}\in\overline{B}\}|=|f^{-1}.\overline{B}\cap\overline{B}|\ge(1-\varepsilon/8)|B|$. Observar que si $b\in B_f$ y $\tau\sigma(f)\pi(b)=b$ entonces $\tau\pi(f^{-1}b)=b$. Además, observar que para todo $b\in B$ tal que $b^{-1}fb\in H$, vale que $d(\varphi(b^{-1}fb),1)>\rho(\varepsilon/3)$. Más aún, como $diam(K)\le1$ tenemos que $\rho(\varepsilon)\le1$ para todo ε. Con todo esto en mente, procedemos a acotar $\tilde{d}(\Phi(f),1)$.

$$\begin{aligned}
\tilde{d}(\Phi(f),1)&=d_{\mathrm{Hamm}}(\tau\sigma(f)\pi,1)+\frac{1}{|B|}\sum_{\substack{b\in B\\ \tau\sigma(f)\pi(b)=b}} d(\varphi(b^{-1}f\tau\pi(f^{-1}b)),1)\\
&\ge\frac{1}{|B|}|\{b\in B_f:\tau\sigma(f)\pi(b)\neq b\}|+\frac{1}{|B|}\sum_{\substack{b\in B_f\\ \tau\sigma(f)\pi(b)=b}} d(\varphi(b^{-1}fb),1)\\
&\ge\frac{1}{|B|}|\{b\in B_f:\tau\sigma(f)\pi(b)\neq b\}|+\frac{\rho(\varepsilon/3)}{|B|}|\{b\in B_f:\tau\sigma(f)\pi(b)=b\}|\\
&=\frac{1}{|B|}|\{b\in B_f:\tau\sigma(f)\pi(b)\neq b\}|+\frac{\rho(\varepsilon/3)}{|B|}(|B_f|-|\{b\in B_f:\tau\sigma(f)\pi(b)\neq b\}|)\\
&=\frac{\rho(\varepsilon/3)}{|B|}|B_f|+\frac{1-\rho(\varepsilon/3)}{|B|}|\{b\in B_f:\tau\sigma(f)\pi(b)\neq b\}|\\
&\ge\frac{|B_f|}{|B|}\rho(\varepsilon/3)\ge(1-\varepsilon/8)\rho(\varepsilon/3)>(1-\varepsilon/3)\rho(\varepsilon/3).
\end{aligned}$$

□

4 Productos verbales

4.1. Definiciones y ejemplos.

En esta sección recopilamos varias propiedades de subgrupos verbales y productos verbales de dos grupos. Algunos de los resultados presentados se pueden encontrar dispersos, al menos implícitamente, en [25], [26], [54], [55], [58], y sus referencias. Dado que algunos de ellos son algo difíciles de rastrear y otros pueden estar oscurecidos por la falta de terminología moderna, presentamos en esta tesis demostraciones modernas y detalladas, que también se encuentran en [8, Section 2].

Convención 4.1. *En esta tesis adoptaremos la convención* $[a, b] := aba^{-1}b^{-1}$.

Sea F_∞ el grupo libre en una cantidad numerable de letras $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Llamaremos a sus elementos *palabras*. Si $w \in F_\infty$, la longitud de w se indicará con $\ell(w)$. Una palabra en n-letras es un elemento de F_∞ que requiere como máximo n letras distintas para ser escrita en forma reducida (es decir, sin que sea posible hacer simplificaciones). Una palabra en n letras se notará como $w(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$ o como $w(\mathbf{x})$ con $\mathbf{x} = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}) \in F_\infty^n$.

Dado un grupo G, una palabra en n letras $w(\mathbf{x})$ y un elemento $\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_n)$ en G^n, la evaluación de w en $\mathbf{g}$ es el elemento $w(\mathbf{g}) := w(g_1, \ldots, g_n) \in G$. La evaluación de w por los elementos de G es el conjunto $w(G) = \{w(\mathbf{g}) : \mathbf{g} \in G^n\}$.

Comenzaremos con la definición de subgrupo verbal, considerada en primer lugar por B. H. Neumann en [57, § 5].

Definición 4.2. *Sea G un grupo. Sea $W \subseteq F_\infty$ un conjunto de palabras. El subgrupo verbal $W(G)$ se define como el subgrupo de G generado por la evaluación de todos los elementos de W por los elementos de G.*

Observemos que S_{fin}, el grupo de permutaciones finitas de $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, actúa sobre F_∞ y si $\sigma \in S_{\text{fin}}$, entonces $\sigma.w(G) = w(G)$ para todos $w \in F_\infty$. Esto implica que para el estudio de subgrupos verbales, se puede suponer que una palabra en n letras tiene la forma $w(\mathbf{x}) = w(x_1, \ldots, x_n)$.

Lema 4.3. *Sea $\varphi : G \to H$ un homomorfismo de grupos. Sea $w \in F_\infty$ una palabra en n letras y sea $\boldsymbol{g} \in G^n$. Luego $\varphi(w(\boldsymbol{g})) = w(\varphi(\boldsymbol{g}))$. Por lo tanto, si $W \subseteq F_\infty$ es un conjunto de palabras, entonces $\varphi(W(G)) \subseteq W(H)$. Además, si φ es sobreyectiva, entonces $\varphi(W(G)) = W(H)$.*

Demostración. Esto se debe simplemente a que φ es un homomorfismo de grupos. $\square$

Recordemos que si H es un subgrupo de un grupo G, se dice que H es *completamente invariante* en G si para cada endomorfismo $\varphi : G \to G$, $\varphi(H) \subseteq H$. Enunciaremos ahora un corolario fácil del Lema 4.3 que se utilizará a menudo en el resto de esta sección.

Corolario 4.4. *Sea G un grupo. Sea $W \subseteq F_\infty$ un conjunto de palabras. El subgrupo verbal $W(G)$ es completamente invariante en G. En particular, $W(G)$ es normal en G.*

Definición 4.5. *[58, pg. 6] Un conjunto de palabras $W \subseteq F_\infty$ se llama cerrado si es un subgrupo completamente invariante de F_∞. La clausura verbal de W es el subgrupo cerrado más pequeño de F_∞ que contiene W. Se lo denotará $\mathcal{C}(W)$.*

Para la demostración del siguiente Lema, consultar por ejemplo, [58, pág 12].

Lema 4.6. *Sea G un grupo. Sea $W \subseteq F_\infty$ un conjunto de palabras. Entonces $\mathcal{C}(W)(G) = W(G)$. En particular, cada elemento de $W(G)$ puede considerarse como la evaluación de una sola palabra $w \in \mathcal{C}(W)$ de longitud n en un elemento $\boldsymbol{g}$ de G^n, para algún $n \in \mathbb{N}$.*

Sean A y B grupos, sea $A * B$ el producto libre entre ellos y consideremos los homomorfismos naturales $\pi_A : A * B \to A$ y $\pi_B : A * B \to B$. Por abuso de notación, los homomorfismos $(\pi_A)^n : (A * B)^n \to A^n$ y $(\pi_B)^n : (A * B)^n \to A^n$ también se indicarán con π_A y π_B.

Definición 4.7. *Sean A y B grupos. $[A, B]$ es el subgrupo de $A*B$ generado por elementos de la forma $[a, b]$ con $a \in A$ y $b \in B$.*

Lema 4.8. *Sean A y B grupos. Sea $W = \{w\} \subseteq F_\infty$, con w una palabra en n letras y sea $w(\boldsymbol{g}) \in W(A * B)$ su evaluación en $\boldsymbol{g} \in (A * B)^n$. Entonces, existe $u \in W(A * B) \cap [A, B]$ tal que*

$$w(\boldsymbol{g}) = w(\pi_A(\boldsymbol{g}))\, w(\pi_B(\boldsymbol{g}))\, u$$

y esta descomposición es única. Más precisamente, si $w(\boldsymbol{g}) = abc$, con $a \in A$, $b \in B$ y $c \in [A, B]$; se tiene que $a = w(\pi_A(\boldsymbol{g}))$, $b = w(\pi_B(\boldsymbol{g}))$ y $c = u$.

Demostración. Procedemos por inducción en la longitud de w. Si $\ell(w) = 1$, entonces se puede suponer que w tiene la forma $w(x_1) = x_1$ o $w(x_1) = x_1^{-1}$. En el primer caso, el enunciado del Lema es equivalente a mostrar que cualquier elemento $a_1 b_2 a_3 b_4 \dots b_{k-1} a_k \in A * B$ con $a_i \in A$, $b_i \in B$, $b_i \neq 1$ y $a_i \neq 1$ (excepto quizás para el primer y el último elemento), se puede escribir como $a_1 a_3 \dots a_k b_2 b_4 \dots b_{k-1} u$ con $u \in [A, B]$. Esto se cumple usando repetidamente la identidad $ba = ab[b^{-1}, a^{-1}]$. El caso de la palabra $w(x_1) = x_1^{-1}$ se sigue del caso $w(x_1) = x_1$ mediante un simple cálculo.

Supongamos que el Lema es válido para todas las palabras de longitud menor que k y consideremos $w(x_1, \dots, x_n) = x_{i_1}^{s_1} \dots x_{i_r}^{s_r}$ con $\ell(w) = k \geq 2$ y $s_r \neq 0$. Escribamos $w = w_1 w_2$ con $w_1 = x_{i_1}^{s_1} \dots x_{i_r}^{s_r - \mathrm{sign}(s_r)}$ y $w_2 = x_{i_r}^{\mathrm{sign}(s_r)}$ tienen longitudes $k-1$ y 1 respectivamente. Por hipótesis inductiva, existen $u', u'' \in W(A * B) \cap [A, B]$ tales que

$$\begin{aligned}
w(\mathbf{g}) &= w_1(\mathbf{g}) w_2(\mathbf{g}) \\
&= w_1(\pi_A(\mathbf{g})) w_1(\pi_B(\mathbf{g})) u' w_2(\pi_A(\mathbf{g})) w_2(\pi_B(\mathbf{g})) u'' \\
&= w_1(\pi_A(\mathbf{g})) w_2(\pi_A(\mathbf{g})) w_1(\pi_B(\mathbf{g})) u' \left[(w_1(\pi_B(\mathbf{g})) u')^{-1}, w_2(\pi_A(\mathbf{g}))^{-1} \right] w_2(\pi_B(\mathbf{g})) u'' \\
&= w_1(\pi_A(\mathbf{g})) w_2(\pi_A(\mathbf{g})) w_1(\pi_B(\mathbf{g})) w_2(\pi_B(\mathbf{g})) u \\
&= w(\pi_A(\mathbf{g}))\, w(\pi_B(\mathbf{g}))\, u,
\end{aligned}$$

donde u es igual a

$$u' \left[(w_1(\pi_B(\mathbf{g})) u')^{-1}, w_2(\pi_A(\mathbf{g}))^{-1} \right] \left[\left(u' \left[(w_1(\pi_B(\mathbf{g})) u')^{-1}, w_2(\pi_A(\mathbf{g}))^{-1} \right] \right)^{-1}, w_2(\pi_B(\mathbf{g}))^{-1} \right] u''.$$

Teniendo en cuenta que $[A, B]$ es normal en $A * B$, se sigue que $u \in [A, B]$. Más aún, como $u = w\left(\pi_B(\mathbf{g})\right)^{-1} w\left(\pi_A(\mathbf{g})\right)^{-1} w(\mathbf{g})$, tenemos que $u \in W(A * B) \cap [A, B]$. La unicidad de la descomposición se sigue tomando proyecciones. $\square$

Corolario 4.9. *Sean A y B grupos. Sea $W \subseteq F_\infty$ un conjunto de palabras. Si $W(A)$ y $W(B)$ son ambos iguales al grupo trivial $\{1\}$, entonces $W(A * B) \subseteq [A, B]$.*

La siguiente Definición explicita la construcción de producto verbal de sólo dos grupos como caso particular de la Definición 1.2.

Definición 4.10. *Sean A y B grupos. Sea $W \subseteq F_\infty$ un conjunto de palabras. El producto verbal entre A y B es el grupo*

$$A \overset{w}{*} B := {}^{A * B}\big/_{W(A * B) \cap [A, B]}$$

Además, la proyección de $[A, B]$ sobre $A \overset{w}{*} B$ se notará $[A, B]^w$.

Moran introdujo los productos verbales en [54]. Por definición, $A \overset{w}{*} B$ es igual a $B \overset{w}{*} A$. Si $q : A * B \to A \overset{w}{*} B$ es el homomorfismo cociente, entonces $q|_A : A \to A \overset{w}{*} B$ y $q|_B : B \to A \overset{w}{*} B$ son inyectivos. Para simplificar, también denotaremos por A y B las imágenes de A y B dentro de $A \overset{w}{*} B$ mediante el homomorfismo cociente q. Con esta identificación, queda claro que el conjunto $A \cup B \subseteq A \overset{w}{*} B$ genera $A \overset{w}{*} B$.

Teorema 4.11. *[25, Ch. 2, Theorem 1.2] Sean A y B grupos. Sea $W \subseteq F_\infty$ un conjunto de palabras. Entonces cada elemento $y \in A \overset{w}{*} B$ tiene una escritura única de la forma*

$$y = abu$$

con $a \in A$, $b \in B$ y $u \in [A, B]^w$. Más aún si $y' \in A \overset{w}{*} B$, $y' = a'b'u'$, con $a' \in A$, $b' \in B$ y $u' \in [A, B]^w$, entonces $yy' = aa'bb'\tilde{u}$, con $\tilde{u} \in [A, B]^w$.

Demostración. Sea $q : A * B \to A \overset{w}{*} B$ el homomorfismo cociente. Existe $g \in A * B$ tal que $y = q(g)$. El Lema 4.8 aplicado a la palabra $w = x_1$ dice que g se puede escribir como $g = abu$ con $a \in A$, $b \in B$ y $u \in [A, B]$. Entonces $y = q(g) = q(a)q(b)q(u) = abq(u)$, con $q(u) \in [A, B]^w$. La unicidad de la descomposición se sigue tomando proyecciones.

El mismo procedimiento muestra que $y' = q(g') = q(a'b'u')$. El Lema 4.8 implica que $yy' = q(gg') = q(\pi_A(gg')\pi_B(gg')\tilde{u}) = q(aa'bb'\tilde{u}) = aa'bb'q(\tilde{u})$ con $q(\tilde{u}) \in [A, B]^w$. $\square$

Por el Teorema 4.11, es fácil deducir que $A \cap \overline{B}^{A \overset{w}{*} B} = \{1\}$ y $B \cap \overline{A}^{A \overset{w}{*} B} = \{1\}$, donde el símbolo $\overline{}^{A \overset{w}{*} B}$ denota la clausura normal dentro de $A \overset{w}{*} B$.

Proposición 4.12. *Sean A y B grupos. Sea $W \subseteq F_\infty$ un conjunto de palabras. Luego*

$$W(A \overset{w}{*} B) \cap [A, B]^w = \{1\}.$$

Demostración. Sea $q : A * B \to A \overset{w}{*} B$ el homomorfismo cociente. Por el Lema 4.3, $W(A \overset{w}{*} B) = W(q(A * B)) = q(W(A * B))$. Por lo tanto si $y \in W(A \overset{w}{*} B) \cap [A, B]^w$, entonces $y = q(g)$ con $g \in W(A * B)$ e $y = q(\tilde{g})$ con $\tilde{g} \in [A, B]$. De esto se deduce que $g\tilde{g}^{-1} \in \ker(q) = W(A * B) \cap [A, B]$ y así, $g \in [A, B]$ y $\tilde{g} \in W(A * B)$. Concluimos que $y = 1$ en $W(A \overset{w}{*} B)$. $\square$

Lema 4.13. *Sean A y B grupos. Sea $W \subseteq F_\infty$ un conjunto de palabras. Sea $a \in W(A) \subseteq A \overset{w}{*} B$. Entonces $[a, B] = 1$ en $A \overset{w}{*} B$ y $[a, [A, B]^w] = 1$ en $A \overset{w}{*} B$.*

Demostración. Por el Lema 4.6, basta con probar el Lema para a de la forma $a = w(\mathbf{a})$ donde $w \in \mathcal{C}(W)$ es una palabra en n letras y $\mathbf{a} \in A^n$ con $n \in \mathbb{N}$. Para mostrar la primera parte del Lema, sea $b \in B \subseteq A \overset{w}{*} B$. Luego $[a, b] = w(\mathbf{a})bw(\mathbf{a})^{-1}b^{-1} \in [A, B]^w$. El corolario 4.4 implica que $bw(\mathbf{a})^{-1}b^{-1} \in W(A \overset{w}{*} B)$, y luego $[a, b] \in W(A \overset{w}{*} B)$. Así $[a, b] \in W(A \overset{w}{*} B) \cap [A, B]^w = \{1\}$ por la Proposición 4.12.

Para mostrar la segunda parte del Lema, sea $c \in [A, B]^w$. El corolario 4.4, implica que $ca^{-1}c^{-1} \in W(A \overset{w}{*} B)$, luego $[a, c] \in W(A \overset{w}{*} B)$, y como $aca^{-1} \in [A, B]^w$, luego $[a, c] \in [A, B]^w$. Por lo tanto $[a, c] \in W(A \overset{w}{*} B) \cap [A, B]^w = \{1\}$, por la Proposición 4.12. $\square$

El siguiente resultado se puede encontrar en [54, Corollary 4.2.2]. Proporcionamos una breve demostración de ello.

Proposición 4.14. *Sean A y B grupos. Sea $W \subseteq F_\infty$ un conjunto de palabras. La función*

$$\Psi : W(A) \times W(B) \to W(A \overset{w}{*} B)$$

definida por $\Psi(a, b) := ab$ es un isomorfismo de grupos.

Demostración. Por el Lema 4.13, $\Psi(a, b)\Psi(a', b') = aba'b' = aa'[a'^{-1}, b]bb' = aa'bb' = \Psi((a, b)(a', b'))$. Así, Ψ es un homomorfismo de grupos. El Teorema 4.11 implica que Ψ es inyectiva. Para demostrar que es sobreyectiva, tomemos $y \in W(A \overset{w}{*} B)$. Entonces $y = q(g)$ con $g \in W(A * B)$. Por el Lema 4.6, g tiene la forma $g = w(\mathbf{g})$ donde $w \in \mathcal{C}(W)$ es una palabra en n letras y $\mathbf{g} \in (A * B)^n$, para algún $n \in \mathbb{N}$. Por el Lema 4.8, $w(\mathbf{g}) = w(\pi_A(\mathbf{g}))w(\pi_B(\mathbf{g}))u$ con $u \in W(A * B) \cap [A, B]$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} y = q(w(\mathbf{g})) = q(w(\pi_A(\mathbf{g}))w(\pi_B(\mathbf{g}))u) = q(w(\pi_A(\mathbf{g})))q(w(\pi_B(\mathbf{g}))) = \\ \Psi\left(w(\pi_A(\mathbf{g})), w(\pi_B(\mathbf{g}))\right). \end{aligned}$$ $\square$

Lema 4.15. *Sean A y B grupos. Sea $W \subseteq F_\infty$ un conjunto de palabras. Sea M un subgrupo normal de A y sea N un subgrupo normal de B. Denotemos por $\overline{MN}^{A*B}$ la clausura normal del grupo generado por M y N dentro de $A*B$. Sea $\phi : A*B \to A/M * B/N$ el homomorfismo cociente. Luego*

1. $\ker(\phi) = \overline{MN}^{A*B}$,
2. $\phi(W(A * B) \cap [A, B]) = W(\phi(A * B)) \cap [\phi(A), \phi(B)]$.

Demostración. El punto (1) es bien conocido. En aras de la completitud de la tesis, incluimos una demostración aquí. Debido a que $M, N \subseteq \ker(\phi)$, se sigue $\overline{MN}^{A*B} \subseteq \ker(\phi)$. Entonces, es suficiente probar la inclusión inversa. Procedemos por inducción sobre el número de letras de una palabra reducida $g \in \ker(\phi) \subseteq A * B$. Si g tiene como máximo una letra, el resultado es inmediatamente verdadero. Supongamos que cada palabra reducida en $\ker(\phi)$ con un máximo de $n - 1$ letras pertenece a $\overline{MN}^{A*B}$. Sea $g = g_1 g_2 \dots g_n$ una palabra reducida con $n \geq 2$ factores en $A * B$ y supongamos que $g \in \ker(\phi)$. Si $\phi(g_i) \neq 1$ para cada $1 \leq i \leq n$, entonces $\phi(g)$ es una palabra reducida con $n \geq 2$ factores en ${}^{A}\!/\!_{M} * {}^{B}\!/\!_{N}$, contradiciendo que $\phi(g) = 1$. Entonces existe k tal que $\phi(g_k) = 1$. Definamos $\tilde{g} := g_1 \dots g_{k-1}$ y $\hat{g} := \tilde{g} g_{k+1} \dots g_n$. Tenemos que $\phi(\hat{g}) = 1$. Por hipótesis inductiva, $\hat{g} \in \overline{MN}^{A*B}$. Observar que dado que g_k está en M o en N, entonces $\tilde{g} g_k \tilde{g}^{-1} \in \overline{MN}^{A*B}$. Escribiendo $g = (\tilde{g} g_k \tilde{g}^{-1})\hat{g}$, se deduce que g pertenece a $\overline{MN}^{A*B}$.

Demostraremos ahora (2). Para una de las inclusiones basta con observar que

$$\phi(W(A * B) \cap [A, B]) \subseteq \phi(W(A * B)) \cap \phi([A, B]) = W(\phi(A * B)) \cap [\phi(A), \phi(B)],$$

donde la última igualdad es válida debido al Corolario 4.4 y el hecho de que como ϕ es sobreyectiva, entonces $[\phi(A), \phi(B)] = \phi([A, B])$.

Para probar la inclusión inversa, sea $y \in W(\phi(A * B)) \cap [\phi(A), \phi(B)]$. Por un lado, $y \in W(\phi(A*B)) = \phi(W(A*B))$. Entonces, por el Lema 4.6, y tiene la forma $y = \phi(w(\mathbf{g}))$ donde $w \in \mathcal{C}(W)$ es una palabra en n letras y $\mathbf{g} \in (A * B)^n$, con $n \in \mathbb{N}$. Debido al Lema 4.8, $y = \phi(w(\mathbf{g})) = \phi(w(\pi_A(\mathbf{g})))\phi(w(\pi_B(\mathbf{g})))\phi(u)$ con $\phi(u) \in \phi(W(A * B) \cap [A, B]) \subseteq [\phi(A), \phi(B)] = [A/M, B/N]$. Por otro lado $y \in [A/M, B/N]$. Entonces, la afirmación de unicidad del Lema 4.8 aplicada a la palabra $w = x_1$ y al grupo ${}^{A}\!/\!_{M} * {}^{B}\!/\!_{N}$, implica que $\phi(w(\pi_A(\mathbf{g}))) = \phi(w(\pi_B(\mathbf{g}))) = 1$. Por lo tanto, $y = \phi(u) \in \phi(W(A * B) \cap [A, B])$. $\square$

Teorema 4.16. *Sean A y B grupos. Sea $W \subseteq F_\infty$ un conjunto de palabras. Sea M un subgrupo normal de A y sea N un subgrupo normal de B. Luego*

$$A \overset{w}{*} B \Big/ \overline{MN}^{A \overset{w}{*} B} \cong A/M \overset{w}{*} B/N$$

donde $\overline{MN}^{A \overset{w}{*} B}$ es la clausura normal del subgrupo generado por M y N dentro de $A \overset{w}{*} B$.

Demostración. Consideramos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
A * B \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "q"'] & A/M * B/N \arrow[d, "\tilde{q}"] \\
A \overset{w}{*} B \arrow[r, dashed, "\Phi"] & A/M \overset{w}{*} B/N
\end{tikzcd}$$

Φ es un homomorfismo bien definido porque

$$\begin{aligned}
\phi(\ker(q)) &= \phi(W(A * B) \cap [A, B]) \\
&= W(\phi(A * B)) \cap [\phi(A), \phi(B)] \\
&= W\left(A/M * B/N\right) \cap \left[A/M, B/N\right] \\
&= \ker(\tilde{q}). \qquad (4.1.1)
\end{aligned}$$

donde la segunda igualdad se debe al Lema 4.15 (2). Además, dado que ϕ y $\tilde{q}$ son sobreyectivos, Φ es sobreyectiva.

$$\begin{aligned}
\ker(\Phi) = q(\phi^{-1}(\ker(\tilde{q}))) &= q(\phi^{-1}(\phi(\ker(q)))) = q(\ker(q)\ker(\phi)) \\
&= q(\ker(\phi)) = q(\overline{MN}^{A*B}) = \overline{MN}^{A \overset{w}{*} B},
\end{aligned}$$

donde la segunda igualdad se debe a la ecuación (4.1.1), la penúltima igualdad se debe al Lema 4.15 (1) y la última igualdad se debe a que q es sobreyectiva. $\square$

Corolario 4.17. *Sean A y B grupos. Sea $W \subseteq F_\infty$ un conjunto de palabras. Entonces $A \overset{w}{*} B \big/ W(A \overset{w}{*} B)$ es isomorfo a $A/W(A) \overset{w}{*} B/W(B)$ y por lo tanto se tiene la sucesión exacta corta*

$$1 \to W(A) \times W(B) \to A \overset{w}{*} B \to A/W(A) \overset{w}{*} B/W(B) \to 1 \tag{4.1.2}$$

Además, el subgrupo $[A,B]^w$ de $A \overset{w}{*} B$ es isomorfo al subgrupo $\left[A/W(A), B/W(B)\right]^w$ de $A/W(A) \overset{w}{*} B/W(B)$.

Demostración. Por la Proposición 4.14, $W(A) \times W(B)$ es isomorfo a $W(A)W(B)$, donde consideramos $W(A)W(B)$ como un subgrupo de $A \overset{w}{*} B$ a través del isomorfismo Ψ, y esto es igual a $W(A \overset{w}{*} B)$. Dado que $W(A \overset{w}{*} B)$ es un subgrupo verbal de $A \overset{w}{*} B$, es normal en $A \overset{w}{*} B$. Por lo tanto, si en el Teorema 4.16 tomamos $M = W(A)$ y $N = W(B)$, obtenemos que $\ker(\Phi) = W(A \overset{w}{*} B)$ y luego $A \overset{w}{*} B \big/ W(A \overset{w}{*} B) \cong A/W(A) \overset{w}{*} B/W(B)$.

Además, el diagrama conmutativo en la demostración del Teorema 4.16, muestra que $\Phi\left([A,B]^w\right) = \left[A/W(A), B/W(B)\right]^w$. Por la Proposición 4.12 $W(A \overset{w}{*} B) \cap [A,B]^w = \{1\}$, lo que implica que $\Phi|_{[A,B]^w}$ es inyectivo. □

El siguiente resultado generaliza [70, Corolario 2.18], donde se hizo en el caso del segundo producto nilpotente, pero por métodos diferentes.

Corolario 4.18. *Sean A y B grupos. Sea $W \subseteq F_\infty$ un conjunto de palabras. Si $W(A) = A$, entonces $A \overset{w}{*} B$ es isomorfo a $A \times B$.*

Demostración. Por el Corolario 4.17, $[A,B]^w = \{1\}$. El resultado se sigue del Teorema 4.11. □

Terminamos esta sección con algunos ejemplos de subgrupos verbales y productos verbales (ver, también, [54, § 5]).

Ejemplos 4.19 (de subgrupos verbales). Dado un grupo G, el subgrupo verbal dado por

(I) la palabra vacía es el elemento trivial de G;

(II) la palabra $n_1 := [x_2, x_1]$ es el subgrupo conmutador de G;

(III) las palabras $n_k := [x_{k+1}, n_{k-1}]$ con $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ producen de forma recursiva la serie central inferior de G;

(IV) las palabras

$$s_1(x_1, x_2) := [x_1, x_2]$$
$$s_k(x_1, \ldots, x_{2^k}) := [s_{k-1}(x_1, \ldots, x_{2^{k-1}}), s_{k-1}(x_{2^{k-1}+1}, \ldots, x_{2^k})]$$

producen de forma recursiva la serie derivada de G;

(V) la palabra x_1^k produce los subgrupos de k-Burnside, es decir, los grupos generados por las k-ésimas potencias de elementos de G.

Ejemplos 4.20 (de productos verbales). Las palabras en los ejemplos 4.19 construyen los siguientes productos verbales.

(I) Si $W = \emptyset$, $A \overset{w}{*} B = A * B$;

(II) si $W = \{n_1\}$, con n_1 definido en 4.19(II), entonces $A \overset{w}{*} B = A \oplus B$;

(III) si $W = \{n_k\}$, con n_k definido en 4.19(III), entonces $A \overset{w}{*} B$ coincide con el producto k-nilpotente de grupos $A \overset{k}{*} B$, estudiado primero por Golovin [26];

(IV) si $W = \{s_k\}$, con s_k como en 4.19(IV), entonces $A \overset{w}{*} B$ se llama producto k-soluble;

(V) si $W = \{x_1^k\}$, el producto se llama producto de k-Burnside.

Recordemos que dada una variedad $\mathfrak{V}$ de grupos con leyes $W \subseteq F_\infty$, *el grupo libre de rango n en la variedad $\mathfrak{V}$* es el grupo $F_n/W(F_n)$ (ver, por ejemplo, [58, Capítulo 1.4]). Observar que si $W(A) = W(B) = 1$ entonces por el Corolario 4.9 tenemos que $A \overset{w}{*} B = A * B/W(A * B)$.

Ejemplos 4.21. Presentamos varios productos verbales como grupos libres en variedades de grupos.

(I) Si $W = \{n_k\}$, con n_k definido como en 4.19(III), entonces $\mathbb{Z} \overset{w}{*} \mathbb{Z}$ es el grupo nilpotente libre de clase k y rango 2;

(II) Si $W = \{s_k\}$, con s_k como en 4.19(IV), entonces $\mathbb{Z} \overset{w}{*} \mathbb{Z}$ es el grupo soluble libre de clase k y rango 2;

(III) si $W = \{x_1^k\}$ y $\pi : F_2 \to \mathbb{Z}/kZ * \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ el homomorfismo construido a partir de las proyecciones canónicas de cada coordenada, entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \overset{w}{*} \mathbb{Z}/k\mathbb{Z} = \\ & (\mathbb{Z}/k\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}) \big/ W(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}) = \\ & \pi(F_2) \big/ W(\pi(F_2)) = F_2/\ker(\pi) \big/ W(F_2)/\ker(\pi) \cong F_2/W(F_2)\end{aligned}$$

es el grupo libre de k-Burnside de rango 2, o sea $B(2, k)$, donde en el último isomorfismo es debido al tercer Teorema del isomorfismo y en la última igualdad se utilizó que $W(\pi(F_2)) = \pi(W(F_2))$ por el Lema 4.3.

4.2. Propiedades de permanencia del producto verbal de dos grupos

Con las herramientas desarrolladas en la sección anterior, probaremos los Teoremas 1.3, 1.4 y 1.5 de la introducción. Antes de hacer esto, primero recordemos que en [25, Theorem 6.11] Golovin demostró que el producto k-nilpotente de grupos nilpotentes es nilpotente, mientras que en [55, Theorem 9.2, Theorem 10.2] Moran mostró los resultados análogos para los productos solubles y Burnside. Estos resultados son corolarios directos de la Proposición 4.14. Resumimos los enunciados anteriores de forma más precisa en la siguiente Proposición.

Proposición 4.22. *Sean A y B grupos. Sea $W \subseteq F_\infty$ un conjunto de palabras.*

1. *Si A y B son grupos nilpotentes de clase m y n respectivamente y $W = \{n_k\}$ como en el Ejemplo 4.20(III), entonces $A \overset{w}{*} B$ es un grupo nilpotente de clase a lo sumo* $\max\{k, m, n\}$.

2. *Si A y B son grupos solubles de longitud derivada m y n respectivamente y $W = \{s_k\}$ es como en el Ejemplo 4.20(IV), entonces $A \overset{w}{*} B$ es un grupo soluble de longitud derivada a lo sumo* $\max\{k, m, n\}$.

3. *Si A y B tienen exponentes m y n respectivamente y $W = \{x_1^k\}$ es como en el Ejemplo 4.20(V), entonces $A \overset{w}{*} B$ tiene exponente mcm(m, n, k).*

Como se mencionó en la introducción, en [70] Sasyk mostró que los productos 2-nilpotentes de grupos conservan varias propiedades teóricas de grupos que son de interés en la teoría de representaciones, la dinámica de acciones de grupo y álgebras de operadores. En [70, Proposition 3.1] fue considerada la sucesión exacta corta

$$1 \to A/[A,A] \otimes B/[B,B] \to A \overset{2}{*} B \to A \oplus B \to 1 \tag{4.2.1}$$

Esta sucesión incluso permitió calcular el orden de $A \overset{2}{*} B$. Sin embargo, esta sucesión exacta se obtuvo en base a algunas características únicas del producto 2-nilpotente que no están presentes en otros productos verbales.

En aras de la claridad y para referencia futura, indicamos la siguiente variante más precisa de los Teoremas. 1.3 y 1.4.

Proposición 4.23. *Sean A y B grupos. Sea $W \subseteq F_\infty$ un conjunto de palabras como en los ejemplos 4.20(III) y 4.20(IV) que definen los productos nilpotentes y solubles. Entonces $A \overset{w}{*} B$ tiene una de las siguientes propiedades:*

(1) sófico;

(2) hiperlineal;

(3) débilmente sófico;

(4) linealmente sófico;

(5) amenable;

(6) propiedad de aproximación de Haagerup;

(7) exacto (o boundary amenable, o que satisface la propiedad A de Yu);

si y solo si A y B tienen la misma propiedad.

Demostración. Dado que A y B son subgrupos de $A \overset{w}{*} B$ y las propiedades de (1) a (7) son heredadas por subgrupos, se deduce que si $A \overset{w}{*} B$ satisface una de estas siete propiedades, entonces tanto A como B también deben satisfacerla. Nos queda mostrar las implicaciones inversas.

Con ese fin, consideramos la sucesión exacta corta

$$1 \to W(A) \times W(B) \to A \overset{w}{*} B \to A/W(A) \overset{w}{*} B/W(B) \to 1.$$

Observar que ${}^{A}\!\diagup_{W(A)}$ y ${}^{B}\!\diagup_{W(B)}$ son nilpotentes cuando $W = \{n_k\}$ y son solubles cuando $W = \{s_k\}$. Por lo tanto, por la Proposición 4.22, ${}^{A}\!\diagup_{W(A)} \overset{w}{*} {}^{B}\!\diagup_{W(B)}$ es nilpotente cuando $W = \{n_k\}$ y soluble cuándo $W = \{s_k\}$. De ello se deduce que en ambos casos, ${}^{A}\!\diagup_{W(A)} \overset{w}{*} {}^{B}\!\diagup_{W(B)}$ es un grupo amenable.

Para probar que los productos verbales de grupos $\mathcal{C}$-aproximables son $\mathcal{C}$-aproximables cuando $\mathcal{C}$ es cualquiera de las clases de (1) a (4), recordemos que por la Proposición 2.56, las clases antes mencionadas se preservan tomando subgrupos y productos directos. Por lo tanto, $W(A) \times W(B)$ es $\mathcal{C}$-aproximable. Entonces, $A \overset{w}{*} B$ es una extensión de tipo $\mathcal{C}$-por-amenable y por el ítem (III) de la Proposición 2.56, es $\mathcal{C}$-aproximable (ver también el Teorema 1.11 y el Corolario 1.12 de esta tesis).

Para probar (5), recordar que $W(A) \times W(B)$ es amenable ya que es un producto de subgrupos de grupos amenables. Por lo tanto, por la Proposición 2.23 $A \overset{w}{*} B$ es amenable porque es una extensión de grupos amenables.

Para probar (6), recordemos que la propiedad de Haagerup se preserva tomando subgrupos y productos directos finitos, por lo tanto el grupo $W(A) \times W(B)$ tiene la propiedad de Haagerup. Entonces $A \overset{w}{*} B$ es una extensión de Haagerup-por-amenable y, por lo tanto, es Haagerup por la Proposición 2.40.

Para probar (7), recordar que los grupos amenables son exactos (ver la Observación 2.74), y que las extensiones de grupos exactos son exactas por la Proposición 2.75. □

Observación 4.24. En [70], Sasyk demostró que el producto 2-nilpotente de grupos satisface los ítems (5), (6) y (7) de la Proposición 4.23. Sin embargo, dado que no se sabe si las extensiones de la forma abeliano-por-sófico son sóficas, la sucesión exacta corta (4.2.1) no puede usarse para mostrar que el producto 2-nilpotente de grupos satisface (1). Abordar este tema fue una de las primeras motivaciones que dieron lugar a la investigación presentada en esta tesis.

Proposición 4.25. *Sean A y B grupos. Sea $W = \{n_k\}$ donde n_k es como en el Ejemplo 4.20(III). Entonces $A \overset{w}{*} B$ tiene propiedad (T) de Kazhdan si y solo si A y B la tienen.*

Demostración. Por la discusión subsiguiente al Teorema 4.11, (o por el Teorema 4.16), tenemos que ${}^{(A \overset{w}{*} B)}\!\diagup_{\overline{B}^{A \overset{w}{*} B}} \cong A$ y ${}^{(A \overset{w}{*} B)}\!\diagup_{\overline{A}^{A \overset{w}{*} B}} \cong B$. Dado que la propiedad (T) es heredada por cocientes por la Proposición 2.30, se sigue que si $A \overset{w}{*} B$ tiene propiedad (T), entonces A y B tienen propiedad (T).

Para la implicación inversa, supongamos que A y B tienen propiedad (T). Entonces los cocientes ${}^{A}\!\diagup_{W(A)}$ y ${}^{B}\!\diagup_{W(B)}$ tienen propiedad (T). Además, son k-nilpotentes, por lo que son amenables. También asumimos que los grupos son discretos, por lo que deben ser finitos por la Proposición 2.32. Como el producto k-nilpotente de dos grupos finitos es un grupo finito (ver [25, Theorem, § 6]), entonces ${}^{A}\!\diagup_{W(A)} \overset{w}{*} {}^{B}\!\diagup_{W(B)}$ es finito. Por otro lado, dado que $W(A)$ es un subgrupo normal de A y ${}^{A}\!\diagup_{W(A)}$ es finito, $W(A)$ tiene índice finito en A, y por lo tanto tiene propiedad (T) por el Corolario 2.31. Lo mismo ocurre con $W(B)$. De ello se deduce que $W(A) \times W(B)$ tiene propiedad (T). Entonces, ambos extremos de (4.1.2) tienen propiedad (T) y por el item (III) de la Proposición 2.30, $A \overset{w}{*} B$ tiene propiedad (T). □

A continuación veremos que, a diferencia de los productos nilpotentes, los productos solubles no conservan la propiedad (T). La razón detrás de esto es que, en general, los productos solubles de grupos finitos no son necesariamente finitos. Este último hecho ya ha sido advertido por Moran en [55, Theorem 9.4 y Corollary 9.4.1]. Proporcionamos una descripción un poco más precisa en la siguiente Proposición.

Proposición 4.26. *Sean A y B grupos abelianos. Sea $W = \{s_k\}$, con s_k como en el Ejemplo 4.20 (IV) y $k \geq 2$. Entonces $[A,B]^w \subseteq A \overset{w}{*} B$ es el grupo soluble libre de longitud derivada $k-1$ en el conjunto $\{[a,b] : a \in A \setminus \{1\}, b \in B \setminus \{1\}\}$.*

Demostración. Si A y B son grupos, entonces $[A,B]$ es un subgrupo libre de $A * B$ en los generadores $\{[a,b] : a \in A \setminus \{1\}, b \in B \setminus \{1\}\}$. Además, es normal en $A * B$, y si A y B son abelianos, entonces $[A*B, A*B] = [A,B]$. (Para una prueba de este hecho elemental, ver, por ejemplo, [71, Section 1.3, Proposition 4]).

Entonces, si A y B son abelianos, se deduce por inducción que para cada $k \geq 2$, $s_k(A * B) = s_{k-1}([A,B]) \subseteq [A,B]$. Por lo tanto, por Definición 4.10, $A \overset{w}{*} B = {(A*B)}/{s_{k-1}([A,B])}$. Por lo tanto $[A,B]^w$, la proyección de $[A,B]$ sobre $A \overset{w}{*} B$, es isomorfa a $[A,B]/s_{k-1}([A,B])$. Dado que $[A,B]$ es un grupo libre, este es, por antonomasia, el grupo soluble libre de longitud derivada $k-1$ en el conjunto $\{[a,b] : a \in A \setminus \{1\}, b \in B \setminus \{1\}\}$. $\square$

Corolario 4.27. *Sea $W = \{s_k\}$, con s_k como en el Ejemplo 4.20 (IV) y $k \geq 2$. Entonces ${\mathbb{Z}}/{n\mathbb{Z}} \overset{w}{*} {\mathbb{Z}}/{n\mathbb{Z}}$, es un grupo soluble infinito para todo n mayor o igual que 2. En particular, la propiedad (T) de Kazhdan no se conserva tomando productos solubles de grupos.*

Dado que la suma directa y el producto libre de dos grupos ordenables es un grupo ordenable (ver, por ejemplo, [15], [18]), es natural preguntarse si lo mismo sigue siendo cierto para otros productos verbales. Los siguientes ejemplos muestran que este no es el caso.

Ejemplo 4.28. Sea $G = \pi_1(\text{botella de Klein}) \cong \langle a, b : aba^{-1}b = 1 \rangle$. Es fácil demostrar que se trata de un grupo ordenable a izquierda, pero no bi-ordenable, (ver, por ejemplo, [15, Example 1.9] o [18, §1.3.4]). Su abelianización es $\mathrm{H}_1(\text{botella de Klein}) \cong \mathbb{Z} \times \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$. Por lo tanto, el grupo $G \overset{2}{*} G$ no se puede ordenar a la izquierda, ya que, según la sucesión exacta (4.2.1), contiene un subgrupo isomorfo a $\left(\mathbb{Z} \times \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}\right) \otimes_{\mathbb{Z}} \left(\mathbb{Z} \times \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}\right)$, por lo que tiene torsión.

Los grupos nilpotentes libres de torsión son bi-ordenables (ver, por ejemplo, [18, § 1.2.1]). Uno podría preguntarse si los productos nilpotentes de grupos nilpotentes libres de torsión son bi-ordenables. A la luz de la Proposición 4.22 (1), esto equivale a preguntar si los productos nilpotentes de grupos nilpotentes libres de torsión son grupos libres de torsión. La respuesta es no. El siguiente ejemplo está tomado de [18, § 1.2.2].

Ejemplo 4.29. Sea $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2a & c \\ 0 & 1 & 2b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$. Este es un grupo nilpotente de clase 2 libre de torsión.

Su subgrupo conmutador es $[G,G] = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : c \in \mathbb{Z} \right\}$ y su abelianización es isomorfa a $\mathbb{Z}^2 \times \frac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}}$, por lo tanto tiene torsión. Así, por la sucesión exacta corta (4.2.1), el grupo 2-nilpotente $G \overset{2}{*} G$ contiene un subgrupo isomorfo a $\left(\mathbb{Z}^2 \times \frac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}}\right) \otimes_{\mathbb{Z}} \left(\mathbb{Z}^2 \times \frac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}}\right)$, y en conclusión tiene torsión. Se puede probar que para cualquier $k \geq 2$, el grupo $G \overset{k}{*} G$ tiene torsión.

Queda una pregunta: ¿Es cierto que los productos solubles de grupos solubles sin torsión son bi-ordenables? Quizás, a la luz de la Proposición 4.26, los productos solubles de grupos abelianos sin torsión son bi-ordenables.

Observación 4.30 (*e idea de la Demostración 1.5*). Se podría intentar realizar un estudio similar al realizado en esta seccion para los productos Burnside. La situación en este contexto es mucho más delicada. Adyan demostró en [1] que los grupos libres de Burnside $B(m,n)$ no son amenables siempre que $m \geq 2$ y $n \geq 665$ con n impar. Por lo tanto, usando el ejemplo 4.21(III) cuando $W = \{x^{665}\}$, tenemos que $\mathbb{Z}/665\mathbb{Z} \overset{w}{*} \mathbb{Z}/665\mathbb{Z} \cong B(2665)$, por lo que los productos de Burnside no preservan en general la amenabilidad. Sin embargo, Burnside, Sanov y Hall demostraron que $B(m,n)$ es finito cuando $n = 2, 3, 4, 6$. Entonces, para los productos k-Burnside con $k = 2, 3, 4, 6$ se podrían obtener resultados como el indicado anteriormente mediante las mismas técnicas empleadas en esta tesis. De hecho, si A y B son finitamente generados, entonces la Proposición 4.22(3) implica que cuando $W = \{x_1^k\}$, el grupo ${}^{A}\!/_{W(A)} \overset{w}{*} {}^{B}\!/_{W(B)}$ es finitamente generado y de exponente k, por lo tanto es finito cuando $k = 2, 3, 4, 6$. Entonces, exactamente las mismas pruebas de la Proposición 4.23 y la Proposición 4.25 sirven para mostrar el Teorema 1.5 de la introducción.

4.3. Productos verbales de una cantidad arbitraria de grupos

El propósito de esta sección es probar el Corolario 1.6 de la introducción y, lo que es más importante, establecer las premisas necesarias para demostrar los resultados del capítulo siguiente. Recordamos su enunciado.

Corolario 1.6. *Si $\{G_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ es una familia numerable de grupos sóficos (respectivamente hiperlineales, linealmente sóficos, débilmente sóficos, amenables, con propiedad de Haagerup o exactos), entonces el grupo $\overset{w}{\underset{i\in\mathcal{I}}{\ast}} G_i$ es sófico, (respectivamente hiperlineal, linealmente sófico, débilmente sófico, amenable, con propiedad de Haagerup o exacto), donde los productos verbales considerados son el producto nilpotente, el producto soluble o el producto k-Burnside con $k = 2, 3, 4, 6$.*

Definición 4.31. *Sea $\{G_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ una familia de subgrupos de un grupo $\mathcal{G}$. El símbolo $[G_i]^{\mathcal{G}}$ denota al subgrupo normal de $\mathcal{G}$ generado por los elementos de la forma $[g_i, g_j]$ con $g_i \in G_i, g_j \in G_j$ e $i \neq j$.*

Recordemos que en el caso de que $\mathcal{G}$ sea igual al producto libre de los grupos, $[G_i]^{\mathcal{G}}$ se denomina subgrupo cartesiano de $\mathcal{G}$, [58, pág 34 ítem 18.17] . Cuando todos los G_i sean iguales a un grupo fijo G, simplemente escribiremos $[G]^{\mathcal{G}}$.

Recordemos ahora la definición de producto verbal de una familia de grupos de la introducción

Definición 1.2. *Sea $\{G_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ una familia de grupos indexados en $\mathcal{I}$ y consideremos $\mathcal{F} := \ast_{i\in\mathcal{I}} G_i$, el producto libre de la familia. Sea $W \subseteq F_\infty$ un conjunto de palabras y $W(\mathcal{F})$ el subgrupo verbal correspondiente de $\mathcal{F}$. Denotemos por $[G_i]^{\mathcal{F}}$ el subgrupo cartesiano $\mathcal{F}$, es decir la clausura normal de $\mathcal{F}$ generada por los conmutadores de la forma $[g_i, g_j]$ con $g_i \in G_i$, $g_j \in G_j$ e $i \neq j$. El producto verbal de la familia está definido por*

$$\overset{w}{\underset{i\in\mathcal{I}}{\ast}} G_i := {}^{\mathcal{F}}\!/_{W(\mathcal{F}) \cap [G_i]^{\mathcal{F}}}$$

Al igual que en la sección 4.1, la letra q denotará el homomorfismo cociente. La demostración de la siguiente generalización del Teorema 4.11 se le deja al lector, (para una demostración, ver por ejemplo, [25, Ch. II]),

Teorema 4.32. *Sea $\{G_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ una familia de grupos indexados en un conjunto totalmente ordenado $\mathcal{I}$. Sea $W \subseteq F_\infty$ un conjunto de palabras. Cada elemento $y \in \overset{w}{\underset{i\in\mathcal{I}}{\ast}} G_i$ admite una representación $y = a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_l}\,u$, donde $a_{i_k} \in G_{i_k}$, $i_1 < i_2 < \ldots < i_l \in \mathcal{I}$, y u pertenece a $[G_i]^w$, la proyección de $[G_i]^{\mathcal{F}}$ sobre $\overset{w}{\underset{i\in\mathcal{I}}{\ast}} G_i$.*

Un ingrediente clave en las demostraciones de la siguiente sección es la noción de soporte de un elemento en el producto verbal de una familia arbitraria de grupos. Si bien está intuitivamente claro qué debería ser el soporte, demostrar que está bien definido requiere los siguientes dos Lemas técnicos.

Lema 4.33. *Sea $\{G_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ una familia de grupos indexados en un conjunto totalmente ordenado $\mathcal{I}$. Sea $\mathcal{I}_0$ un subconjunto de $\mathcal{I}$ y sea $W \subseteq F_\infty$ un conjunto de palabras. Entonces el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd}
\underset{\mathcal{I}_0}{\ast} G_i \arrow[r, "\tilde{i}_{\mathcal{I}_0}"] \arrow[d, "q"'] & \underset{\mathcal{I}}{\ast} G_i \arrow[d, "\tilde{q}"] \\
\overset{w}{\underset{\mathcal{I}_0}{\ast}} G_i \arrow[r, dashed, "i_{\mathcal{I}_0}"] & \overset{w}{\underset{\mathcal{I}}{\ast}} G_i
\end{tikzcd}$$

donde $\tilde{i}_{\mathcal{I}_0}$ es el homomorfismo definido por la propiedad universal del producto libre a través de las inclusiones canónicas de cada grupo G_i en el producto libre $\underset{\mathcal{I}}{\ast} G_i$. Más aún, $i_{\mathcal{I}_0}$ es inyectiva.

Demostración. Observemos que $i_{\mathcal{I}_0}$ está bien definida puesto que

$$\tilde{i}_{\mathcal{I}_0}(\ker q) = \tilde{i}_{\mathcal{I}_0}\left(W\left(\underset{\mathcal{I}_0}{\ast} G_i\right) \cap \left[G_i\right]^{\underset{\mathcal{I}_0}{\ast} G_i}\right) \subseteq W\left(\underset{\mathcal{I}}{\ast} G_i\right) \cap \left[G_i\right]^{\underset{\mathcal{I}}{\ast} G_i} = \ker(\tilde{q}). \quad (4.3.1)$$

Notar además que $\tilde{i}_{\mathcal{I}_0}(\ker q) \subseteq \ker(\tilde{q}\circ\tilde{i}_{\mathcal{I}_0})$. Suponiendo que estos conjuntos son iguales, el mismo argumento dado al final de la demostración de la Proposición 4.16, junto con el hecho de que $\tilde{i}_{\mathcal{I}_0}$ es inyectivo, demostraría que $i_{\mathcal{I}_0}$ es inyectivo. Probemos entonces la inclusión inversa. Para ello, sea $g \in \ker(\tilde{q}\circ\tilde{i}_{\mathcal{I}_0})$. Luego,

$$\tilde{i}_{\mathcal{I}_0}(g) \in W\left(\underset{\mathcal{I}}{\ast} G_i\right) \bigcap \left[G_i\right]^{\underset{\mathcal{I}}{\ast} G_i} \bigcap \tilde{i}_{\mathcal{I}_0}\left(\ast\, \mathcal{I}_0 G_i\right)$$

Por un lado, por el Lema 4.6, existe $w \in \mathcal{C}(W)$ una palabra de longitud n y $\mathbf{g} \in \left(\underset{\mathcal{I}}{\ast} G_i\right)^n$ de modo que $\tilde{i}_{\mathcal{I}_0}(g) = w(\mathbf{g})$. Usando el Lema 4.8 aplicado a $A := \underset{\mathcal{I}_0}{\ast} G_i$ y $B := \underset{\mathcal{I}\setminus\mathcal{I}_0}{\ast} G_i$ se deduce que $w(\mathbf{g}) = \tilde{i}_{\mathcal{I}_0}(w(\pi_A(\mathbf{g})))\tilde{i}_{\mathcal{I}\setminus\mathcal{I}_0}(w(\pi_B(\mathbf{g})))u$, con $u \in W\left(\underset{\mathcal{I}}{\ast} G_i\right) \cap [A, B]$. Como

$w(\mathbf{g}) \in \tilde{i}_{\mathcal{I}_0}(A)$, entonces, por la unicidad de la escritura en el Lema 4.8, debe ser que $w(\mathbf{g}) = \tilde{i}_{\mathcal{I}_0}(w(\pi_A(\mathbf{g})))$ y por lo tanto $\tilde{i}_{\mathcal{I}\setminus\mathcal{I}_0}(w(\pi_B(\mathbf{g}))) = 1$ y $u = 1$. Entonces, dado que $\tilde{i}_{\mathcal{I}_0}$ es inyectivo, se sigue que $g \in W(A)$.

Por otro lado, por el Teorema 4.32, $\tilde{i}_{\mathcal{I}_0}(g)$ tiene una escritura con elementos de $\tilde{i}_{\mathcal{I}_0}\left(\mathop{\ast}\limits_{\mathcal{I}_0} G_i\right)$, es decir $\tilde{i}_{\mathcal{I}_0}(g) = a_{i_1}\dots a_{i_l}u$ con $a_{i_k} \in G_{i_k}$, $i_1 < i_2 < \dots < i_l \in \mathcal{I}_0$ y $u \in \tilde{i}_{\mathcal{I}_0}\left(\left[G_i\right]^{\mathop{\ast}\limits_{\mathcal{I}_0} G_i}\right)$. Además, como $\tilde{i}_{\mathcal{I}_0}(g) \in \left[G_i\right]^{\mathop{\ast}\limits_{\mathcal{I}} G_i}$, por la unicidad de la escritura en el Teorema 4.32, sabemos que $a_{i_k} = 1$ para todo $1 \le k \le l$, y $\tilde{i}_{\mathcal{I}_0}(g) \in \tilde{i}_{\mathcal{I}_0}\left(\left[G_i\right]^{\mathop{\ast}\limits_{\mathcal{I}_0} G_i}\right)$. Entonces, dado que $\tilde{i}_{\mathcal{I}_0}$ es inyectivo, probamos finalmente que $g \in \left[G_i\right]^{\mathop{\ast}\limits_{\mathcal{I}_0} G_i}$. □

Observación 4.34. Dado $y \in \mathop{\overset{w}{\ast}}\limits_{i\in\mathcal{I}} G_i$, existe $g \in \mathop{\ast}\limits_{i\in\mathcal{I}} G_i$ tal que $\tilde{q}(g) = y$. Entonces, por definición del producto libre de grupos, existe un subconjunto finito $\mathcal{I}_0$ de $\mathcal{I}$, tal que $g \in \tilde{i}_{\mathcal{I}_0}\left(\mathop{\ast}\limits_{i\in\mathcal{I}_0} G_i\right)$ Por lo tanto, por el Lema anterior, podemos pensar a y como un elemento de $\mathop{\overset{w}{\ast}}\limits_{i\in\mathcal{I}_0} G_i$.

Lema 4.35. *Sea $\{G_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ una familia de grupos indexados en un conjunto totalmente ordenado $\mathcal{I}$. Sean $\mathcal{I}_1$ y $\mathcal{I}_2$ subconjuntos de $\mathcal{I}$ y sea $W \subseteq F_\infty$ un conjunto de palabras.*

Consideremos $\mathop{\overset{w}{\ast}}\limits_{\mathcal{I}_1} G_i$ y $\mathop{\overset{w}{\ast}}\limits_{\mathcal{I}_2} G_i$ vistos como subgrupos de $\mathop{\overset{w}{\ast}}\limits_{\mathcal{I}} G_i$, como se menciona en la Observación 4.34. Luego $\left(\mathop{\overset{w}{\ast}}\limits_{\mathcal{I}_1} G_i\right) \bigcap \left(\mathop{\overset{w}{\ast}}\limits_{\mathcal{I}_2} G_i\right) = \mathop{\overset{w}{\ast}}\limits_{\mathcal{I}_1\cap\mathcal{I}_2} G_i$, donde entendemos el producto verbal sobre el conjunto vacío como el elemento 1.

Demostración. Está claro que $\mathop{\overset{w}{\ast}}\limits_{\mathcal{I}_1\cap\mathcal{I}_2} G_i \subseteq \left(\mathop{\overset{w}{\ast}}\limits_{\mathcal{I}_1} G_i\right) \cap \left(\mathop{\overset{w}{\ast}}\limits_{\mathcal{I}_2} G_i\right)$. Para la inclusión inversa, tomemos $y \in \left(\mathop{\overset{w}{\ast}}\limits_{\mathcal{I}_1} G_i\right) \cap \left(\mathop{\overset{w}{\ast}}\limits_{\mathcal{I}_2} G_i\right)$. Como $y \in \mathop{\overset{w}{\ast}}\limits_{\mathcal{I}_1} G_i$, por el Teorema 4.32, y tiene una escritura única por elementos de $\mathcal{I}_1$ y como $y \in \mathop{\overset{w}{\ast}}\limits_{\mathcal{I}_2} G_i$, tiene una escritura única por elementos de $\mathcal{I}_2$. Estas dos expresiones deben ser iguales ya que y puede verse como un elemento de $\mathop{\overset{w}{\ast}}\limits_{\mathcal{I}_1\cup\mathcal{I}_2} G_i$. Entonces $y \in \mathop{\overset{w}{\ast}}\limits_{\mathcal{I}_1\cap\mathcal{I}_2} G_i$. □

La Observación 4.34 dice que para cualquier $y \in \mathop{\ast}\limits_{i\in\mathcal{I}} G_i$, existe un subconjunto finito $\mathcal{I}_1$ tal que $y \in \mathop{\overset{w}{\ast}}\limits_{i\in\mathcal{I}_1} G_i$. Consideremos el conjunto de índices $\mathcal{I}_0 := \bigcap\left\{\tilde{\mathcal{I}} \subseteq \mathcal{I}_1 : y \in \mathop{\overset{w}{\ast}}\limits_{i\in\tilde{\mathcal{I}}} G_i\right\}$. Dado que $\mathcal{I}_1$ es finito, el Lema 4.35 deja en claro que $y \in \mathop{\overset{w}{\ast}}\limits_{i\in\mathcal{I}_0} G_i$. Si existe $\mathcal{I}_2 \subseteq \mathcal{I}$ tal que $y \in \mathop{\overset{w}{\ast}}\limits_{i\in\mathcal{I}_2} G_i$, entonces por el Lema 4.35, $y \in \mathop{\overset{w}{\ast}}\limits_{i\in\mathcal{I}_0\cap\mathcal{I}_2} G_i$. Por la minimalidad $\mathcal{I}_0$ como un subconjunto del conjunto finito $\mathcal{I}_1$, se sigue que $\mathcal{I}_0 \cap \mathcal{I}_2 = \mathcal{I}_0$. Esto permite definir el soporte de un elemento en el producto verbal de grupos.

Definición 4.36. *Dado* $y \in \mathop{\overset{w}{\ast}}_{i\in\mathcal{I}} G_i$*, su soporte es el menor subconjunto* $\mathcal{I}_0$ *de* $\mathcal{I}$ *tal que* $y \in \mathop{\overset{w}{\ast}}_{i\in\mathcal{I}_0} G_i$.

Observación 4.37. Algunas propiedades obvias del soporte son:

(1) $supp(y)$ es un conjunto finito;

(2) $supp(y) = supp(y^{-1})$;

(3) $supp(yy') \subseteq supp(y) \cup supp(y')$;

(4) $supp(y)$ es vacío si y solo si $y = 1$;

Una propiedad fundamental de los productos verbales es que es una operación asociativa de grupos. Para una demostración de este hecho, consultar [25, Teorema 5.1] para el caso de productos nilpotentes y [54, Sección § 5] para productos verbales arbitrarios. La asociatividad del producto verbal nos permite probar el Corolario 1.6 en la introducción.

Demostración del Corolario 1.6. Si $\mathcal{I}$ es finito, el resultado se deduce de la asociatividad junto con la Proposición 4.23. Si $\mathcal{I} = \mathbb{N}$, entonces

$$\mathop{\overset{w}{\ast}}_{i\in\mathbb{N}} G_i = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathop{\overset{w}{\ast}}_{i\in\{1,2,\ldots,n\}} G_i$$

y la amenabilidad, soficidad, hiperlinealidad, soficidad débil, soficidad lineal, la propiedad de Haagerup y la exactitud se conservan bajo uniones crecientes numerables de grupos (ver Proposiciones 2.23, 2.38, 2.76 y 2.56). □

Observación 4.38. La propiedad (T) no es estable al tomar productos verbales de un número infinito de grupos con más de un elemento. Esto se debe a que dichos productos no se generan de manera finita (considerar la Proposición 2.33).

5 Productos corona verbales

El objetivo de este capítulo es el de demostrar las propiedades de permanencia de productos verbales mencionados en la introducción. Para tal fin, comenzamos recordando la definición del producto corona verbal restringido. Como ya se explicó en la introducción, esta noción fue introducida por primera vez por Shmelkin en [72].

Sean G y H grupos numerables. Sea $W \subseteq F_\infty$ un conjunto de palabras. Sea $\mathcal{F} := \ast_H G$ el producto libre de $|H|$-copias de G. Consideremos la acción $H \overset{\alpha}{\curvearrowright} \mathcal{F}$, dada al permutar las copias de G, es decir, si $(g)_{h_1}$ denota el elemento g en la copia h_1 de G en $\mathcal{F}$, luego $\alpha_h((g)_{h_1}) = (g)_{hh_1}$.

Debido al Lema 4.3 y al hecho de que para todo $h \in H$, α_h es un automorfismo, tenemos que el conjunto $W(\mathcal{F}) \cap [G_i]^{\mathcal{F}}$ es invariante bajo la acción de H. Por lo tanto, la acción cociente (que seguiremos llamando α) $H \overset{\alpha}{\curvearrowright} \overset{w}{\underset{H}{\ast}} G$ está bien definida.

Definición 5.1. *Sean G y H grupos numerables. Sea $W \subseteq F_\infty$ un conjunto de palabras. El producto semidirecto $G \overset{w}{\wr} H := \Big(\overset{w}{\underset{H}{\ast}} G \Big) \rtimes_\alpha H$ se llama el producto corona verbal restringido entre G y H.*

Observación 5.2. Dado que las extensiones de tipo amenable-por-amenable son amenables (ver la Proposición 2.23) y que, por el Corolario 1.6, la amenabilidad se preserva por tomar producto verbal de una cantidad arbitraria de grupos amenables para los productos corona nilpotente, soluble y k-Burnside para $k = 2, 3, 4, 6$, se deduce que en el caso de que G y H sean ambos amenables, $G \overset{w}{\wr} H$ es amenable para los productos corona antes mencionados.

Análogamente, como extensiones de tipo exactos-por-exactos son exactas (ver la Proposición 2.75) y que, por el Corolario 1.6, la exactitud se preserva por tomar producto verbal de una cantidad arbitraria de grupos exactos para los productos corona nilpotente, soluble y k-Burnside para $k = 2, 3, 4, 6$, se deduce que en el caso de que G y H sean ambos exactos, $G \overset{w}{\wr} H$ es exacto para los productos corona antes mencionados.

Los resultados que aparecen en este capítulo también pueden encontrarse en [8, Section 5].

5.1. Productos corona verbales de grupos con la propiedad de Haagerup

Demostraremos ahora el Teorema 1.7 de la introducción

Teorema 1.7. *Sean G y H grupos con la propiedad Haagerup. Sea $W \subseteq F_\infty$ un conjunto de palabras de manera que su correspondiente producto verbal conserve la propiedad de Haagerup. Entonces su producto corona verbal restringido tiene la propiedad Haagerup. En particular, los productos corona nilpotentes restringidos, los productos corona solubles* *restringidos y los productos corona de k-Burnside restringidos con $k = 2, 3, 4, 6$ entre grupos con la propiedad Haagerup tienen la propiedad Haagerup.*

La siguiente Proposición fue demostrada para el caso 2-nilpotente en [70, Proposition 5.7]. El caso general es idéntico. Haremos la demostración en virtud de la completitud de la tesis.

Proposición 5.3. *Sean G y H grupos numerables tal que G tiene la propiedad de Haagerup. Sea $W \subseteq F_\infty$ un conjunto de palabras de manera que su correspondiente producto verbal conserve la propiedad de Haagerup. Entonces existe una función $u : \mathop{\ast}\limits_{h\in H}^{w} G \to \mathbb{R}$ condicionalmente definida negativa, H-invariante y tal que para cada subconjunto finito $F \subset H$ la restricción de u a*

$$\left\{ x \in \mathop{\ast}\limits_{h\in H}^{w} G : supp(x) \subset F \right\}$$

es propia.

Demostración. Sabemos por hipótesis que $G \overset{w}{\ast} G$ tiene la propiedad de Haagerup. Por definición, esto significa que existe una función $\varphi : G \overset{w}{\ast} G \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ que es condicionalmente definida negativa y propia. Para $h, k \in H$, $h \neq k$, definimos

$$\mathop{\ast}\limits_{H}^{w} G \xrightarrow{\pi_{(h,k)}} G_h \overset{w}{\ast} G_k \xrightarrow{\cong} G \overset{w}{\ast} G \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}.$$

Denotemos $\nu_{(h,k)} := \varphi \circ \pi_{(h,k)}$. Sea $\Psi : H \to \mathbb{N}$ una enumeración de H.

Afirmación: La función

$$u = \sum_{\substack{h,k\in H\\ h\neq k}} \frac{1}{2^{\Psi(h^{-1}k)}} \nu_{(h,k)}$$

satisface las condiciones requeridas.

(i) u es H-invariante: Dado que $\pi_{(h,k)}(\tilde{h}.x) = \pi_{(\tilde{h}^{-1}h,\tilde{h}^{-1}k)}(x)$ se sigue que

$$u(\tilde{h}.x) = \sum_{\substack{h,k\in H\\ h\neq k}} \frac{1}{2^{\Psi(h^{-1}k)}} \nu_{(h,k)}(\tilde{h}.x) = \sum_{\substack{h,k\in H\\ h\neq k}} \frac{1}{2^{\Psi((\tilde{h}^{-1}h)^{-1}(\tilde{h}^{-1}k))}} \nu_{(\tilde{h}^{-1}h,\tilde{h}^{-1}k)}(x) = u(x)$$

(ii) Para cada x fijo, $u(x)$ es finito: Primero observar que para todo $h, k \notin supp(x)$, $\nu_{(h,k)}(x) = \varphi(e) = 0$. Luego

$$u(x) = \sum_{\substack{h,k\in supp(x)\\ h\neq k}} \frac{1}{2^{\Psi(h^{-1}k)}} \nu_{(h,k)}(x) + \sum_{\substack{h\in supp(x)\\ k\notin supp(x)}} \frac{1}{2^{\Psi(h^{-1}k)}} \nu_{(h,k)}(x) \tag{5.1.1}$$

$$+ \sum_{\substack{h\notin supp(x)\\ k\in supp(x)}} \frac{1}{2^{\Psi(h^{-1}k)}} \nu_{(h,k)}(x).$$

Como $supp(x)$ es finito, el primer sumando en (5.1.1) es finito. Sea $h \in supp(x)$ fijo. Entonces, para todo $k, k' \notin supp(x)$, $\pi_{(h,k)}(x) \in G_h$ y $\pi_{(h,k')}(x) \in G_h$. Por lo tanto, $\pi_{(h,k)}(x) = \pi_{(h,k')}(x)$, y luego $\nu_{(h,k)}(x) = \nu_{(h,k')}(x)$. De ello se deduce que la suma

$$\sum_{k \notin supp(x)} \frac{1}{2^{\Phi(h^{-1}k)}} \nu_{(h,k)}(x)$$

es convergente para todo $h \in supp(x)$. Por lo tanto el segundo sumando en (5.1.1) es finito. El mismo método muestra que el tercer sumando en (5.1.1) es finito.

(iii) Las restricciones son propias: Fijemos un subconjunto finito $F \subseteq H$. Sea

$$N = \max_{h,k \in F} \Psi(h^{-1}k).$$

Sea $a, b \in F$, $a \neq b$. Entonces, para todo $x \in \underset{H}{\overset{w}{\ast}} G$ tenemos las desigualdades

$$\nu_{(a,b)}(x) \leq \sum_{\substack{h,k \in F \\ h \neq k}} \nu_{(h,k)}(x) \leq 2^N u(x).$$

Esto significa que el conjunto

$$\left\{ x \in \underset{H}{\overset{w}{\ast}} G : supp(x) \subseteq F, u(x) \leq M \right\}$$

está contenido en

$$\left\{ x \in \underset{H}{\overset{w}{\ast}} G : supp(x) \subseteq F, \nu_{(a,b)} \leq 2^N M \ \text{ para } \ \text{ todo } a, b \in F \right\}.$$

Este conjunto es finito ya que φ es propio y para todo $x \neq x'$ cuyos soportes están contenidos en F, existen $a, b \in F$ tal que $\pi_{(a,b)}(x) \neq \pi_{(a,b)}(x')$.

(iv) u es una función definida condicionalmente negativa (c.n.d.f.): Esto es obvio ya que el conjunto de c.n.d.f. es un cono convexo, y un límite puntual de c.n.d.f. es c.n.d.f. por la Observación 2.14 □

Observación 5.4. De la definición 4.36 se deduce que

$$supp(\alpha_h(y)) = h supp(y), \text{ para todo } h \in H \text{ y para todos } y \in \underset{H}{\overset{w}{\ast}} G.$$

Por lo tanto, *supp* es un $\mathcal{A}$-calibre G-invariante y H-equivariante.

Demostración del Teorema 1.7. La función *supp* es un $\mathcal{A}$-Calibre H-invariante, G-equivariante por la Observación 5.4. La Proposición 5.3 muestra que el enunciado del Teorema 2.45 es válido para $\psi = supp$. □

5.2. Productos corona verbales entre un grupo $\mathcal{C}$-aproximable y un grupo sófico actuante.

Lo que resta del capítulo demostraremos los Teoremas 1.8 y 1.9. Comencemos recordando sus enunciados.

Teorema 1.8. *Sean G y H grupos sóficos. Sea $W \subseteq F_\infty$ un conjunto de palabras de tal modo que su correspondiente producto verbal conserve la soficidad. Entonces su producto corona verbal es sófico. En particular, los productos corona nilpotentes restringidos, los productos corona solubles restringidos y los productos corona de k-Burnside restringidos con $k = 2, 3, 4, 6$ entre grupos sóficos son sóficos.*

Teorema 1.9. *Sea G un grupo hiperlineal (o linealmente sófico, o débilmente sófico) y sea H un grupo sófico. Sea $W \subseteq F_\infty$ un conjunto de palabras de manera que su producto verbal correspondiente preserve hiperlinealidad (resp. soficidad lineal, resp. soficidad débil). Entonces, si H es un grupo sófico, el producto corona verbal restringido $G \overset{w}{\wr} H$ es hiperlineal (o linealmente sófico, o débilmente sófico). En particular, los productos corona nilpotentes restringidos, los productos de corona solubles restringidos y los productos corona de k-Burnside restringidos con $k = 2, 3, 4, 6$ entre un grupo hiperlineal (resp. linealmente sóficos, resp. débilmente sóficos), y un grupo sófico actuante son hiperlineales (resp. linealmente sóficos, resp. débilmente sóficos).*

Como en el capítulo 3, deduciremos los casos sófico, linealmente sófico e hiperlineal del caso débilmente sófico. A modo de introducción, la siguiente Observación evidencia las dificultades que surgen al intentar adaptar las demostraciones del caso del producto corona usual a los productos corona verbales. Consideremos el caso sófico como ejemplo.

Comencemos con aproximaciones sóficas de G y H respectivamente e intentemos seguir la estrategia de Hayes y Sale para proporcionar una aproximación sófica explícita de $G \wr H$. En su demostración se contruyen aproximaciones sóficas explícitas de sumas directas finitas de la forma $\bigoplus_B G$ construidas a partir de aproximaciones sóficas $\phi : G \to Sym(A)$. Esto se hace fácilmente definiendo

$$\Theta : \bigoplus_B G \to \bigoplus_B Sym(A) \overset{diag}{\hookrightarrow} Sym(A^{|B|}).$$
$$(g_b)_{b \in B} \mapsto (\phi(g_b))_{b \in B}$$

Si intentamos replicar esto en el caso de los productos verbales, la naturaleza no conmutativa de los mismos trae dificultades técnicas adicionales. El problema es que no hay una forma obvia de como definir aproximaciones sóficas en elementos de $[G]^{\overset{w}{\ast}_B G}$. De hecho, un primer intento sería comenzar con una aproximación sófica de G en $Sym(A)$ y construir una aproximación sófica *coordenada a coordenada* Θ de $\overset{w}{\underset{B}{\ast}} G$ en $\bigoplus_B Sym(A)$. La obstrucción es que $\Theta([g_i, g_j]) = 1$ para todo $g_i \in G_i$, $g_j \in G_j$ con $i \neq j$, mientras que $[g_i, g_j]$ es en general distinto del elemento neutro para productos k-nilpotentes cuando $k \geq 2$.

En un segundo intento, podríamos considerar aproximar por el grupo $Sym(A) \overset{w}{\ast} Sym(A)$ en lugar de $Sym(A) \oplus Sym(A)$. El siguiente ejemplo muestra que esto tampoco funciona. Sea p un primo impar, consideremos el homomorfismo

$$\theta : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to Sym(A), \text{ donde } A = \{1, \ldots, p\}$$
$$1 \mapsto (1 \ldots p), \text{ el ciclo de longitud } p$$

y sea $\Theta_0 : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to Sym(A) * Sym(A)$ el homomorfismo definido por el producto libre y $\Theta : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \overset{2}{*} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to Sym(A) \overset{2}{*} Sym(A)$ el homomorfismo cociente. Por [70, Proposition 2.13], sabemos que

$$[\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]^{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \overset{2}{*} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \qquad \text{y} \qquad [Sym(A), Sym(A)]^{Sym(A) \overset{2}{*} Sym(A)} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

Se sigue entonces que si tomamos $F := [\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]^{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \overset{2}{*} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}$ entonces $F \subseteq \ker(\Theta)$ y en conclusión, Θ no puede ser (F, ε)-libre para ningún $\varepsilon > 0$.

Los ejemplos anteriores sugieren que es difícil proporcionar una aproximación sófica explícita del producto verbal $\overset{w}{\underset{B}{\ast}} G$ a partir de una aproximación sófica de G. Sin embargo, por medio del Corolario 1.6, sabemos que para cada $F \subseteq \overset{w}{\underset{B}{\ast}} G$ conjunto finito y $\varepsilon > 0$, existe una (F, ε)-aproximación sófica de $\overset{w}{\underset{B}{\ast}} G$. Conocer la existencia de una aproximación sófica del producto verbal sin pasar por su construcción simplifica algunos pasos técnicos de la demostración del Teorema 1.8. De hecho, en el caso del producto verbal para la palabra $\{n_1\}$ del Ejemplo 4.20 (ii), simplifica un poco la demostración en [32]. Por supuesto, como punto negativo, la demostración aquí presentada da, en principio, menos información que [32]. Otra diferencia con respecto a [32] es que en esta demostración utilizamos la noción de aproximación dada en la Definición 2.55 y, al igual que en el Teorema 1.11, los homomorfismos controlados de la Sección 3.2 nos permiten deducir de la construcción del caso débilmente sófico el resto de las aproximaciones estudiadas. Creemos que este enfoque simplifica aún más la demostración.

5.3. Aproximaciones de productos corona verbales usando el producto corona permutacional

La siguiente Proposición técnica es el ingrediente principal para demostrar los Teoremas 1.8 y 1.9.

Proposición 5.5. *Sea H un grupo sófico y sea G un grupo con la propiedad de que para cada $\varepsilon' > 0$ y para cada conjunto finito $E_G \subset \overset{w}{\underset{H}{\ast}} G$, existe un grupo $(K, d) \in \mathcal{C}$ de diámetro acotado superiormente por 1 y una función $\varphi : \overset{w}{\underset{H}{\ast}} G \to K$ con $\varphi(1) = 1$ que es (E_G, ε', d)-multiplicativa y (E_G, ε', d)-libre para cierta función de peso $\rho(\varepsilon')$ independiente de K.*

Entonces, dado $\varepsilon > 0$ y un conjunto finito $F \subseteq G \overset{w}{\wr} H$, existe un grupo $(K, d) \in \mathcal{C}$ y una función $\Gamma : G \overset{w}{\wr} H \to K \wr_B Sym(B)$ que es $(F, \varepsilon, \tilde{d})$-multiplicativa y $(F, \varepsilon, \tilde{d})$-libre para la función $\tilde{\rho}(\varepsilon) = (1 - \varepsilon/3)\rho(\varepsilon/3)$.

En la Observación 3.3 ítem 1 se explica por qué es importante que la hipótesis incluya que la aproximación φ sea (E_G, ε', d)-libre para una función de peso ρ dada de manera independiente de K. Antes de comenzar con la demostración de la Proposición 5.5, recordamos el siguiente Lema de [32], adaptado a la situación actual.

Lema 5.6. *[32, Lemma 2.8] Sean G y H grupos discretos y numerables, y sean*

$$proj_H : G \overset{w}{\wr} H \to H$$
$$proj_G : G \overset{w}{\wr} H \to \mathop{\ast}\limits_{H}^{w} G$$

las proyecciones canónicas (notar que $proj_G$ no es un morfismo en general). Para un subconjunto finito $F_0 \subseteq G \overset{w}{\wr} H$ con $1 \in F_0$ definamos los subconjuntos

$$E_1 := \{\alpha_h(x) : h \in proj_H(F_0), x \in proj_G(F_0)\} \tag{5.3.1}$$
$$\tilde{E}_1 := \{y\alpha_h(x) : h \in proj_H(F_0), x, y \in proj_G(F_0)\} \tag{5.3.2}$$
$$E_2 := proj_H(F_0) \tag{5.3.3}$$

Sea $\varepsilon > 0$ y sea (K, d) un grupo con métrica bi-invariante d.

Supongamos que $\Gamma : G \overset{w}{\wr} H \to K$ es una función con $\Gamma(1) = 1$ que verifica las siguientes propiedades:

(I) la restricción de Γ a $\mathop{\ast}\limits_{H}^{w} G$ es $(E_1, \varepsilon/6, d)$-multiplicativa;

(II) la restricción de Γ a H es $(E_2, \varepsilon/6, d)$-multiplicativa;

(III) $\max_{x \in \tilde{E}_1, h \in E_2.E_2} d(\Gamma(x,1)\Gamma(1,h), \Gamma(x,h)) < \varepsilon/6$;

(IV) $\max_{x \in proj_G(F_0), h \in E_2} d(\Gamma(1,h)\Gamma(x,1), \Gamma(\alpha_h(x),1)\Gamma(1,h)) < \varepsilon/6$.

Entonces Γ es (F_0, ε, d)-multiplicativa, es decir, para todo $z, z' \in F_0$, $d(\Gamma(z)\Gamma(z'), \Gamma(zz')) < \varepsilon$.

Demostración. Para $(x, h), (x', h') \in F_0$, la desigualdad triangular, la invariancia de d y las propiedades (I), (II), (III) dan lugar a las siguientes estimaciones

$$d(\Gamma(x,h)\Gamma(x',h'); \Gamma(x,1)\Gamma(1,h)\Gamma(x',1)\Gamma(1,h')) < \varepsilon/3;$$
$$d(\Gamma(x\alpha_h(x'), hh'); \Gamma(x,1)\Gamma(\alpha_h(x'),1)\Gamma(1,h)\Gamma(1,h')) < \varepsilon/2.$$

Luego,

$$\begin{aligned} & d(\Gamma(x,h)\Gamma(x',h'); \Gamma(x\alpha_h(x'), hh')) \\ &\quad \leq d(\Gamma(x,1)\Gamma(1,h)\Gamma(x',1)\Gamma(1,h'); \Gamma(x\alpha_h(x'), hh')) + \varepsilon/3 \\ &\quad \leq d(\Gamma(x,1)\Gamma(1,h)\Gamma(x',1)\Gamma(1,h'); \Gamma(x,1)\Gamma(\alpha_h(x'),1)\Gamma(1,h)\Gamma(1,h')) + \frac{5}{6}\varepsilon \\ &\quad = d(\Gamma(1,h)\Gamma(x',1); \Gamma(\alpha_h(x'),1)\Gamma(1,h)) + \frac{5}{6}\varepsilon < \varepsilon \quad \text{(acá usamos (IV))}. \end{aligned}$$

□

Observación 5.7. El ítem (III) aquí es ligeramente diferente de [32, Lemma 2.8, tercer ítem]. No sabemos cómo probar el Lema utilizando únicamente la hipótesis de [32] sobre el ítem (III). Esto no afecta a la demostración del Teorema 1.8 ya que, como en [32], cuando apliquemos el Lema 5.6 probaremos que para la aproximación concreta construida vale $\Gamma(x,1)\Gamma(1,h) = \Gamma(x,h)$ para todo $x \in \mathop{\ast}\limits_{H}^{w} G$ y todo $h \in H$.

Demostración de la Proposición 5.5. Sea $F \subseteq G \overset{w}{\wr} H$ un subconjunto finito y $\varepsilon > 0$. Definamos $F_0 := F \cup \{1\} \cup \{F\}^{-1}$ y consideremos los conjuntos E_1 y E_2 como en el Lema 5.6. Además, sean los conjuntos

$$E := E_2 \cup E_2 \cdot supp(E_1) \tag{5.3.4}$$
$$E_H := E \cdot E^{-1} \tag{5.3.5}$$

donde, como es usual, $supp(E_1) = \bigcup_{x \in E_1} supp(x)$.

Como H es sófico, para todo $\varepsilon' > 0$, existe un conjunto finito B y una (E_H, ε')-aproximación sófica

$$\sigma : H \to Sym(B) \text{ con } \sigma(1) = 1.$$

Definamos los conjuntos

$$B_1 := \{b \in B : \sigma(h_1)^{-1}b \neq \sigma(h_2)^{-1}b \text{ para todo } h_1 \neq h_2 \in E\}; \tag{5.3.6}$$
$$B_2 := \{b \in B : \sigma(h_2h_1)^{-1}b = \sigma(h_1)^{-1}\sigma(h_2)^{-1}b, \text{ para todo } h_1, h_2 \in E\}; \tag{5.3.7}$$
$$B_E := B_1 \cap B_2; \tag{5.3.8}$$

El siguiente Lema se encuentra en [32].

Lema 5.8. *[32, Lemma 3.4] Sea $\kappa > 0$. Si $\varepsilon' < \frac{\kappa}{4|E|^2}$, luego*

$$\frac{|B \setminus B_E|}{|B|} \leq \kappa.$$

Observación 5.9. En lo que sigue ε' será elegido dependiendo de κ según el Lema 5.8, es decir, elegiremos $\varepsilon' < \frac{\kappa}{4|E|^2}$.

Para todo $h \in H$ y todo $b \in B$, llamemos $\theta_b^{(h)} : G \to \mathop{\ast}\limits_B G$ al embebimiento de G en la copia $\sigma(h)^{-1}b$ de G dentro del producto libre $\mathop{\ast}\limits_B G$ y definamos

$$\tilde{\theta}_b : \mathop{\ast}\limits_E G \to \mathop{\ast}\limits_B G$$
$$(g_{h_1})_{h_1}(g_{h_2})_{h_2} \ldots (g_{h_n})_{h_n} \mapsto \theta_b^{(h_1)}(g_{h_1}) \ldots \theta_b^{(h_n)}(g_{h_n}), \tag{5.3.9}$$

donde $(g_{h_i})_{h_i}$ denota el elemento g_{h_i} en la copia h_i de G dentro de $\mathop{\ast}\limits_E G$ y $h_i \neq h_{i+1}$. Por la propiedad universal del producto libre $\tilde{\theta}_b$ es un homomorfismo de grupos.

A partir de él, construiremos un homomorfismo entre los grupos $\overset{w}{\mathop{\ast}\limits_E} G$ y $\overset{w}{\mathop{\ast}\limits_B} G$. Con ese fin, sea $w(x_1, \ldots, x_n) \in W \subseteq F_\infty$ una palabra en n letras y sea $(y_1, \ldots, y_n) \in \left(\mathop{\ast}\limits_E G\right)^n$. Por el Lema 4.3, tenemos que $\tilde{\theta}_b(w(y_1, \ldots, y_n)) = w(\tilde{\theta}_b(y_1), \ldots, \tilde{\theta}_b(y_n)) \in W\left(\mathop{\ast}\limits_B G\right)$. Además, si $g_{h_i} \in G_{h_i}$ y $g_{h_j} \in G_{h_j}$, entonces $\tilde{\theta}_b([g_{h_i}, g_{h_j}]) = [\tilde{\theta}_b(g_{h_i}), \tilde{\theta}_b(g_{h_j})] \in [G_{\sigma^{-1}(h_i)b}, G_{\sigma^{-1}(h_j)b}]$. Finalmente, en el caso de que $b \in B_1$ y $h_i \neq h_j$, tenemos que $[G_{\sigma^{-1}(h_i)b}, G_{\sigma^{-1}(h_j)b}]$ pertenece a $\left[G\right]^{\ast_B G}$ (aquí usamos la notación de la Definición 4.31). Por lo tanto, todo esto combinado dice que si $b \in B_1$ y $u \in W\left(\ast_E G\right) \cap \left[G\right]^{\ast_E G}$, entonces $\tilde{\theta}_b(u) \in W\left(\ast_B G\right) \cap \left[G\right]^{\ast_B G}$. Esto muestra que para cada $b \in B_1$, tenemos un homomorfismo cociente bien definido

$$\theta_b : \mathop{\ast}_{E}^{w} G \to \mathop{\ast}_{B}^{w} G. \tag{5.3.10}$$

Afirmamos que para $b \in B_1$, θ_b es inyectivo. En efecto, sea $T_b := \{\sigma(h)^{-1}b : h \in E\} \subseteq B$. Como $b \in B_1$, los conjuntos E y T_b tienen el mismo cardinal (finito). Entonces θ_b puede considerarse como la composición de los siguientes homomorfismos inyectivos

$$\mathop{\ast}_{E}^{w} G \;\cong\; \mathop{\ast}_{T_b}^{w} G \hookrightarrow \mathop{\ast}_{B}^{w} G.$$

Por la Observación 4.34, podemos entender a $\mathop{\ast}_{E}^{w} G$ como un subgrupo de $\mathop{\ast}_{H}^{w} G$. Extendamos θ_b a una función (que seguiremos llamando θ_b y en general no será un homomorfismo)

$$\theta_b : \mathop{\ast}_{H}^{w} G \to \mathop{\ast}_{B}^{w} G$$

declarando

$$\theta_b(x) := \begin{cases} \theta_b(x) & \text{si } x \in \mathop{\ast}_{E}^{w} G \\ 1 & \text{si no} \end{cases} \tag{5.3.11}$$

y definamos

$$\begin{aligned} \theta_B : \mathop{\ast}_{H}^{w} G &\to \bigoplus_B \mathop{\ast}_{B}^{w} G \\ x &\mapsto \left(b \mapsto \begin{cases} \theta_b(x) & \text{si } b \in B_E = B_1 \cap B_2 \\ 1 & \text{si no} \end{cases} \right) \end{aligned}$$

Observación 5.10. La condición $b \in B_E$ en vez de $b \in B_1$ solo será necesaria en (5.3.14).

$Sym(B)$ actúa por permutaciones en los sumandos de $\bigoplus_B \left(\mathop{\ast}_{B}^{w} G\right)$. El producto corona permutacional $\left(\bigoplus_B \mathop{\ast}_{B}^{w} G\right) \rtimes Sym(B)$ es denotado por $\left(\mathop{\ast}_{B}^{w} G\right) \wr_B Sym(B)$ (ver la Definición 2.58). Finalmente, definamos

$$\begin{aligned} \Theta : G \overset{w}{\wr} H &\to \left(\mathop{\ast}_{B}^{w} G\right) \wr_B Sym(B) \\ (x, h) &\mapsto (\theta_B(x), \sigma(h)) \end{aligned}$$

Por hipótesis, dado el conjunto

$$E_G := \bigcup_{b \in B_E} \theta_b(E_1) \tag{5.3.12}$$

y $\varepsilon' > 0$, existe un grupo métrico $(K, d) \in \mathcal{C}$ y $\varphi : \overset{w}{\underset{B}{\ast}} G \to K$ una función que es (E_G, ε', d)-multiplicativa y (E_G, ε', d)-libre para cierta función de peso $\rho(\varepsilon')$ y $\varphi(1) = 1$. Definamos

$$\varphi_\star : \overset{w}{\underset{B}{\ast}} G \wr_B Sym(B) \to K \wr_B Sym(B)$$
$$((x_b)_{b\in B}, \tau) \mapsto ((\varphi(x_b))_{b\in B}, \tau).$$

Por último, definamos la función $\Gamma : G \overset{w}{\wr} H \to K \wr_B Sym(B)$ dada por $\Gamma(x, h) := \varphi_\star(\Theta(x, h))$. Para ser más explícitos

$$\Gamma : G \overset{w}{\wr} H \to K \wr_B Sym(B)$$
$$\Gamma(x, h) := ((y_b)_{b\in B}, \sigma(h)) \text{ donde } y_b = \begin{cases} \varphi(\theta_b(x)) & \text{si } b \in B_E \\ 1 & \text{si } b \notin B_E. \end{cases} \tag{5.3.13}$$

Afirmación: Γ es $(F_0, \varepsilon, \tilde{d})$-multiplicativa y $(F_0, \varepsilon, \tilde{d})$-libre para la función $\tilde{\rho}(\varepsilon) = (1 - \varepsilon/3)\rho(\varepsilon/3)$.

Para probar que Γ es $(F_0, \varepsilon, \tilde{d})$-multiplicativa, basta con demostrar que las premisas del Lema 5.6 son verdaderas.

Para verificar 5.6 (I), tomemos $(x, 1), (x', 1)$ con $x, x' \in E_1$. Observar que $supp(x), supp(x'), supp(xx') \subseteq supp(E_1) \subseteq E$. En particular $x, x', xx' \in \overset{w}{\underset{E}{\ast}} G$.

$$\begin{aligned} \tilde{d}(\Gamma(x,1)\Gamma(x',1), \Gamma(xx',1)) &= \frac{1}{|B|} \sum_{b\in B_E} d(\varphi(\theta_b(x))\varphi(\theta_b(x')), \varphi(\theta_b(xx'))) \\ &= \frac{1}{|B|} \sum_{b\in B_E} d(\varphi(\theta_b(x))\varphi(\theta_b(x')), \varphi(\theta_b(x)\theta_b(x'))) \end{aligned}$$

donde la última igualdad es válida porque por (5.3.10), θ_b es un homomorfismo de grupos en $\overset{w}{\underset{E}{\ast}} G$. Como φ es (E_G, ε', d)-multiplicativa y como, por (5.3.12), $\theta_b(x), \theta_b(x') \in E_G$, se sigue que

$$d(\Gamma(x,1)\Gamma(x',1), \Gamma(xx',1)) < \varepsilon' \frac{|B_E|}{|B|} < \varepsilon' < \kappa < \varepsilon/6,$$

una vez que elegimos $\kappa < \varepsilon/6$ en el Lema 5.8 y usamos la Observación 5.9.

Para verificar 5.6 (II), recordar que para todo $h \in H$, (5.3.13) implica que

$$\tilde{d}(\Gamma(1,h)\Gamma(1,h'), \Gamma(1,hh')) = d_{\text{Hamm}}(\sigma(h)\sigma(h'), \sigma(hh')).$$

Dado que σ es $(E_H, \varepsilon', d_{\text{Hamm}})$-multiplicativa y dado que por (5.3.5) tenemos que $E_2 \subseteq E \subseteq E_H$, se sigue que para $h, h' \in E_2$,

$$d_{\text{Hamm}}(\Gamma(1,h)\Gamma(1,h'), \Gamma(1,hh')) < \varepsilon' < \kappa < \varepsilon/6,$$

una vez que elegimos $\kappa < \varepsilon/6$ en el Lema 5.8 y usamos la Observación 5.9.

Para verificar 5.6 (III), un cálculo sencillo muestra que para cualquier $(x,h) \in G \overset{w}{\wr} H$ se verifica que $\Gamma(x,h) = \Gamma(x,1)\Gamma(1,h)$.

Para verificar 5.6 (IV), sea $x \in proj_G(F_0), h \in E_2$. Un cálculo sencillo muestra que

$$\Gamma(\alpha_h(x),1)\Gamma(1,h) = ((z_b)_{b\in B}, \sigma(h)) \text{ donde } z_b = \begin{cases} \varphi(\theta_b(\alpha_h(x))) & \text{si } b \in B_E \\ 1 & \text{si } b \notin B_E \end{cases}$$

y

$$\Gamma(1,h)\Gamma(x,1) = ((w_b)_{b\in B}, \sigma(h)) \text{ donde } w_b = \begin{cases} \varphi(\theta_{\sigma(h)^{-1}b}(x)) & \text{si } \sigma(h)^{-1}b \in B_E \\ 1 & \text{si } \sigma(h)^{-1}b \notin B_E \end{cases}$$

Como $supp(x) \subseteq supp(E_1)$, x es de la forma

$$x = (g_{h_1})_{h_1}(g_{h_2})_{h_2}\dots(g_{h_n})_{h_n}, \text{ con } h_i \in supp(E_1),$$

donde $(g_{h_i})_{h_i}$ denota al elemento g_{h_i} en la copia h_i de G dentro de

$$\overset{w}{\underset{supp(E_1)}{\ast}} G \hookrightarrow \overset{w}{\underset{E}{\ast}} G \hookrightarrow \overset{w}{\underset{H}{\ast}} G.$$

Por un lado,

$$\alpha_h(x) = \alpha_h\left((g_{h_1})_{h_1}(g_{h_2})_{h_2}\dots(g_{h_n})_{h_n}\right) = (g_{h_1})_{hh_1}(g_{h_2})_{hh_2}\dots(g_{h_n})_{hh_n}.$$

Observar que como $h \in E_2$, por (5.3.4), tenemos que $hh_i \in E$ y por lo tanto $\alpha_h(x) \in \overset{w}{\underset{E}{\ast}} G \hookrightarrow \overset{w}{\underset{H}{\ast}} G$. Así, si $b \in B_E$, entonces por (5.3.9), (5.3.10) y (5.3.11), se sigue que

$$\begin{aligned} \theta_b(\alpha_h(x)) &= \theta_b((g_{h_1})_{hh_1}(g_{h_2})_{hh_2}\dots(g_{h_n})_{hh_n}) \\ &= \theta_b^{(hh_1)}(g_{h_1})\theta_b^{(hh_2)}(g_{h_2})\dots\theta_b^{(hh_n)}(g_{h_n}) \\ &= (g_{h_1})_{\sigma(hh_1)^{-1}b}(g_{h_2})_{\sigma(hh_2)^{-1}b}\dots(g_{h_n})_{\sigma(hh_n)^{-1}b} \end{aligned}$$

Por otro lado, si $\sigma(h)^{-1}b \in B_E$ entonces por (5.3.11),

$$\begin{aligned} \theta_{\sigma(h)^{-1}b}(x) &= (g_{h_1})_{\sigma(h_1)^{-1}\sigma(h)^{-1}b}(g_{h_2})_{\sigma(h_2)^{-1}\sigma(h)^{-1}b}\dots(g_{h_n})_{\sigma(h_n)^{-1}b} \\ &= (g_{h_1})_{\sigma(hh_1)^{-1}b}(g_{h_2})_{\sigma(hh_2)^{-1}b}\dots(g_{h_n})_{\sigma(hh_n)^{-1}b} \end{aligned} \tag{5.3.14}$$

donde la última igualdad es válida porque $h_i, h \in E$ y $\sigma(h)^{-1}b \in B_E \subseteq B_2$. En conclusión, si $b \in B_E \cap \sigma(h)B_E$ entonces

$$z_b = \theta_b(\alpha_h(x)) = \theta_{\sigma(h)^{-1}b}(x) = w_b. \tag{5.3.15}$$

Con todo esto a mano, procedemos a estimar la distancia $\tilde{d}$ en 5.6(IV).

$$\begin{aligned} \tilde{d}(\Gamma(1,h)\Gamma(x,1), \Gamma(\alpha_h(x),1)\Gamma(1,h)) &= \frac{1}{|B|}\sum_{b\in(B_E\cap\sigma(h)^{-1}B_E)^c} d(z_{\sigma(h)b}, w_{\sigma(h)b}) \leq \\ &\leq \frac{|(B_E\cap\sigma(h)^{-1}B_E)^c|}{|B|} \\ &\leq \frac{1}{|B|}(|B\setminus B_E| + |B\setminus\sigma(h)^{-1}B_E|) \\ &\leq 2\kappa, \qquad \textit{(Acá usamos el Lema 5.8)} \end{aligned}$$

y a su vez esto es más chico que $\varepsilon/6$ una vez que elegimos $\kappa < \varepsilon/12$ en el Lema 5.8 y usamos la Observación 5.9. Esto finaliza la demostración de que Γ es $(F_0, \varepsilon, d_{\text{Hamm}})$-multiplicativa.

Queda por demostrar que Γ es $(F_0, \varepsilon, \tilde{d})$-libre para la función $\tilde{\rho}(\varepsilon) = (1-\varepsilon)\rho(\varepsilon)$. Si $(x, h) \in F_0$ y $h \neq 1$ luego $\tilde{d}(\Gamma(x, h), 1) \geq d_{\text{Hamm}}(\sigma(h), 1) \geq 1 - \varepsilon$. Si $b \in B_E$ y $(x, 1) \in F_0$ con $x \neq 1$, entonces $\theta_b(x) \neq 1$ porque θ_b es un homomorfismo inyectivo. Con esto en mente, calculamos

$$\begin{aligned}\tilde{d}(\Gamma(x,1),1) &= \frac{1}{|B|}\sum_{b\in B_E} d(\varphi(\theta_b(x),1)) = \\ &= \frac{|B_E|}{|B|}\rho(\varepsilon') \geq (1-\kappa)\rho(\varepsilon') \end{aligned} \tag{5.3.16}$$

y a su vez esto es mayor o igual a $(1-\varepsilon/3)\rho(\varepsilon/3)$ pues elegimos $\varepsilon' < \kappa < \varepsilon/3$ usando la Observación 5.9, lo que concluye la demostración. $\square$

5.4. Demostración de los Teoremas 1.8 y 1.9

5.4.1. El caso débilmente sófico

Demostración del Teorema 1.9 en el caso débilmente sófico. Como $\overset{w}{\underset{H}{\ast}} G$ es débilmente sófico por hipótesis y satisface las hipótesis de la Proposición 5.5 cuando ρ es igual a la función constantemente 1, dado $\varepsilon > 0$ y un conjunto finito $F \subseteq G \overset{w}{\wr} H$ (sin pérdida de generalidad podemos suponer $\varepsilon < 1$), existe un grupo finito K con una métrica bi-invariante d con $\operatorname{diam}(K) = 1$ y una función $\Gamma : G \overset{w}{\wr} H \to K \wr_B Sym(B)$ que es $(F, \varepsilon, \tilde{d})$-multiplicativa y $(F, \varepsilon, \tilde{d})$-libre para $\tilde{\rho}(\varepsilon) = 1 - \varepsilon/3 > 2/3$. Dado que $K \wr_B Sym(B)$ es un grupo finito esto concluye la demostración. $\square$

5.4.2. El caso sófico

Demostración del Teorema 1.8 en el caso sófico. Como $\overset{w}{\underset{H}{\ast}} G$ es sófico por hipótesis y por lo tanto se satisfacen las hipótesis de la Proposición 5.5 cuando ρ es igual a la función $\rho(\varepsilon') = 1 - \varepsilon'$, dado $\varepsilon > 0$ y un conjunto finito $F \subseteq G \overset{w}{\wr} H$, existe un grupo de permutaciones finito $Sym(A)$ dotado con la distancia de Hamming normalizada y una función $\Gamma : G \overset{w}{\wr} H \to Sym(A) \wr_B Sym(B)$ que es $(F, \varepsilon, \tilde{d})$-multiplicativa y $(F, \varepsilon, \tilde{d})$-libre para $\tilde{\rho}(\varepsilon) = (1 - \varepsilon/3)(1 - \varepsilon/3) > 1 - \varepsilon$.

Consideremos ψ como en el Lema 3.5. Por el Lema 3.5, $\psi \circ \Gamma : G \overset{w}{\wr} H \to Sym(A \times B)$ es una aproximación $(F, \varepsilon, d_{\text{Hamm}})$-sófica de $G \overset{w}{\wr} H$. $\square$

5.4.3. El caso linealmente sófico

Demostración del Teorema 1.9 en el caso linealmente sófico. Como $\overset{w}{\underset{H}{\ast}} G$ es linealmente sófico por hipótesis y por lo tanto se satisfacen las hipótesis de la Proposición 5.5 cuando ρ es igual a la función $\rho(\varepsilon') = 1/4 - \varepsilon'$. Así, dado $\varepsilon > 0$ y un conjunto finito $F \subseteq G \overset{w}{\wr} H$, existe un grupo de matrices inversibles $GL_n(\mathbb{K})$ dotado con la distancia d_{rk} y una función $\Gamma : G \overset{w}{\wr} H \to GL_n(\mathbb{K}) \wr_B Sym(B)$ que es $(F, \hat{\varepsilon}, \tilde{d})$-multiplicativa y $(F, \hat{\varepsilon}, \tilde{d})$-libre para $\tilde{\rho}(\hat{\varepsilon}) = (1 - \hat{\varepsilon}/3)(1/4 - \hat{\varepsilon}/3) > 1/4 - \hat{\varepsilon}$ donde $\hat{\varepsilon} = \frac{4}{5}\varepsilon$.

Consideremos la función $\psi \circ \Gamma$ con ψ definida como en (3.2.1). Por el Lema 3.6, $\psi \circ \Gamma$ es $(F_0, \varepsilon, d_{\mathrm{rk}})$-multiplicativa. Veamos que $\psi \circ \Gamma$ es $(F, \varepsilon, d_{\mathrm{rk}})$-libre para la función $\rho(\varepsilon) = 1/4 - \varepsilon$. Sea $(x, h) \in F$. Por un lado, si $h \neq 1$, entonces por la primera desigualdad en (3.2.2) se tiene que

$$d_{\mathrm{rk}}(\psi \circ \Gamma(x, h), Id_{n|B|}) \geq \frac{1}{2}\tilde{d}(\Gamma(x, h), Id_{n|B|}) \geq \frac{1}{2}d_{\mathrm{Hamm}}(\sigma(h), 1) > 1/2 - \hat{\varepsilon}/2 > 1/4 - \varepsilon.$$

Por otro lado, si $h = 1$, se sigue de (3.2.3) y (3.2.4) que

$$\begin{aligned} d_{\mathrm{rk}}(\psi \circ \Gamma(x, 1), Id_{n|B|}) &= \frac{1}{n|B|} \sum_{b \in B_E} \operatorname{rank}(\varphi(\theta_b(x)) - 1) \\ &\geq \frac{|B_E|}{|B|} \left(\frac{1}{4} - \hat{\varepsilon} \right) \\ &\geq (1 - \kappa)(\frac{1}{4} - \hat{\varepsilon}) \\ &\geq (1 - \hat{\varepsilon})(\frac{1}{4} - \hat{\varepsilon}) \\ &= (1 - \frac{4}{5}\varepsilon)(\frac{1}{4} - \frac{4}{5}\varepsilon) > \frac{1}{4} - \varepsilon \end{aligned}$$

donde elegimos $\kappa < \hat{\varepsilon}$ de acuerdo al Lema 5.8. $\square$

5.4.4. El caso hiperlineal

Demostración del Teorema 1.9 en el caso hiperlineal. Como $\overset{w}{\underset{H}{\ast}} G$ es hiperlineal por hipótesis, para cada $\varepsilon' > 0$ y cada subconjunto finito E_G de $\overset{w}{\underset{H}{\ast}} G$, existe un espacio de Hilbert de dimensión finita $\mathcal{H}$ y una función $\varphi : \overset{w}{\underset{H}{\ast}} G \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ con $\varphi(1) = 1$ que es $(E_G, \varepsilon', d_{\mathrm{HS}})$-multiplicativa y $(E_G, \varepsilon', d_{\mathrm{HS}})$-tracial. Teniendo en cuenta que la métrica $\mathcal{U}(\mathcal{H}) \wr_B Sym(B)$ es obtenida multiplicando el segundo sumando en la ecuación (3.1.1) por $1/2$, dado $\varepsilon > 0$ y $F \subseteq G \overset{w}{\wr} H$, por la Proposición 5.5 existe un espacio de Hilbert de dimensión finita $\mathcal{H}$ y una función $\Gamma : G \overset{w}{\wr} H \to \mathcal{U}(\mathcal{H}) \wr_B Sym(B)$ que es $(F_0, \varepsilon^2/4, \tilde{d})$-multiplicativa. Entonces, la segunda desigualdad en (3.2.6) implica que $\psi \circ \Gamma : G \overset{w}{\wr} H \to \mathcal{U}(\bigoplus_B \mathcal{H})$ es $(F_0, \varepsilon, d_{\mathrm{HS}})$-multiplicativa.

Probemos ahora que $\psi \circ \Gamma$ es (F_0, ε)-tracial. Sea $(x, h) \in F_0 \setminus \{1\}$. Supongamos primero que $h \neq 1$ y notemos que si $b \in B_E$ entonces para todo $1 \leq i \leq n$, $\psi \circ \Gamma(x, h)s_i^b$ pertenece al subespacio generado por $\{s_i^{\sigma(h)b} : 1 \leq i \leq n\}$ el cual es ortogonal a s_i^b. Así, en este caso

$\langle \psi \circ \Gamma(x,h)s_i^b, s_i^b\rangle = 0$. Luego

$$\begin{aligned}
|tr(\psi \circ \Gamma(x,h))| = |\langle \psi \circ \Gamma(x,h), 1\rangle| &\leq \frac{1}{n|B|}\sum_{b\in B}\sum_{i=1}^{n}|\langle \psi \circ \Gamma(x,h)s_i^b, s_i^b\rangle| \\
&= \frac{1}{n|B|}\left(\sum_{b\in B_E}\sum_{i=1}^{n}|\langle \psi \circ \Gamma(x,h)s_i^b, s_i^b\rangle| + \sum_{b\in B\setminus B_E}\sum_{i=1}^{n}|\langle \psi \circ \Gamma(x,h)s_i^b, s_i^b\rangle|\right) \\
&= \frac{1}{n|B|}\sum_{b\in B\setminus B_E}\sum_{i=1}^{n}|\langle \psi \circ \Gamma(x,h)s_i^b, s_i^b\rangle| \leq \frac{|B\setminus B_E|}{|B|} \leq \kappa < \varepsilon
\end{aligned}$$

donde la última desigualdad es porque elegimos $\kappa < \varepsilon^2/288$ en el Lema 5.8. Supongamos ahora que $h = 1$. Entonces

$$\begin{aligned}
|tr(\psi \circ \Gamma(x,1))| = |\langle \psi \circ \Gamma(x,1), 1)\rangle| &\leq \frac{1}{|B|}\sum_{b\in B}\left|\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\langle \psi \circ \Gamma(x,1)s_i^b, s_i^b\rangle\right| \\
&= \frac{1}{|B|}\sum_{b\in B_E}\left|\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\langle \psi \circ \Gamma(x,1)s_i^b, s_i^b\rangle\right| + \frac{1}{|B|}\sum_{b\notin B_E}\left|\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\langle \psi \circ \Gamma(x,1)s_i^b, s_i^b\rangle\right| \\
&\leq \frac{1}{|B|}\sum_{b\in B_E}\left|\langle tr(\varphi(\theta_b(x)s_i^b)), s_i^b\rangle\right| + \frac{|B\setminus B_E|}{|B|} \leq \frac{|B_E|}{|B|}\varepsilon' + \kappa < \varepsilon
\end{aligned}$$

donde la última desigualdad es porque elegimos $\varepsilon' < \kappa < \varepsilon^2/288$ en el Lema 5.8. □

5.5. Aplicaciones

Terminamos este capítulo con aplicaciones de los Teoremas 1.7 y 1.8 que nos permiten construir a partir de un grupo sófico (resp. con la propiedad de Haagerup) nuevas familias infinitas de grupos sóficos (resp. con la propiedad de Haagerup). Este resultado relaciona áreas aparentemente lejanas como lo son las variedades de grupos con el análisis en grupos y la teoría geométrica de grupos. Recordamos primero el enunciado del Corolario.

Corolario 1.10. *Sea G un subgrupo normal de un grupo libre F y sea W un conjunto de palabras que definen a los productos k-nilpotentes, k-solubles o de k-Burnside para $k = 2, 3, 4, 6$.*

- *Si F/G es amenable, entones $F/W(G)$ es amenable;*
- *Si F/G es exacto, entonces $F/W(G)$ es exacto;*
- *Si F/G es sófico, entonces $F/W(G)$ es sófico;*
- *Si F/G tiene la propiedad de Haagerup, entonces $F/W(G)$ tiene la propiedad de Haagerup.*

Demostración del corolario 1.10. Consideremos el embebimiento de Shmelkin [10], [72]

$$F/_{W(G)} \hookrightarrow \left(F/_{W(F)}\right) \wr^{w} F/_{G}. \tag{5.5.1}$$

Observar que el embebimiento de Magnus es el caso cuando $W = \{n_1\} = \{[x_2, x_1]\}$. Si $W = \{n_k\}$, ${}^{F}\!\diagup_{W(F)}$ es un grupo nilpotente libre de orden k; si $W = \{s_k\}$, ${}^{F}\!\diagup_{W(F)}$ es un grupo soluble libre de longitud derivada k, y si $W = \{x_1^k\}$ con $k = 2, 3, 4, 6$, ${}^{F}\!\diagup_{W(F)}$ es un grupo de k-Burnside libre finitamente generado de exponente $k = 2, 3, 4, 6$, por lo tanto, todos ellos son amenables. Recordar que los grupos amenables son en particular exactos, sóficos y poseen la propiedad de Haagerup.

Si el grupo ${}^{F}\!\diagup_{G}$ es amenable, entonces por la Observación 5.2 el producto verbal restringido de (5.5.1) es amenable; si el grupo ${}^{F}\!\diagup_{G}$ es exacto, entonces por la Observación 5.2 el producto verbal restringido de (5.5.1) es exacto; si el grupo ${}^{F}\!\diagup_{G}$ es sófico, entonces por el Teorema 1.8 el producto verbal restringido (5.5.1) es sófico; si el grupo ${}^{F}\!\diagup_{G}$ posee la propiedad de Haagerup, entonces por el Teorema 1.7 el producto verbal restringido de (5.5.1) posee la propiedad de Haagerup.

La demostración finaliza observando que las propiedades estudiadas se heredan por tomar subgrupos. $\square$

Bibliografía

[1] S. I. Adyan, «Random walks on free periodic groups,» *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, vol. 46, n.º 6, págs. 1139-1149, 1343, 1982, ISSN: 0373-2436.

[2] G. Arzhantseva, «Asymptotic approximations of finitely generated groups,» en *Extended abstracts Fall 2012—automorphisms of free groups*, Trends Math. Res. Perspect. CRM Barc. Vol. 1, Springer, Cham, 2014, págs. 7-15.

[3] G. Arzhantseva, F. Berlai, M. Finn-Sell y L. Glebsky, «Unrestricted wreath products and sofic groups,» *Internat. J. Algebra Comput.*, vol. 29, n.º 2, págs. 343-355, 2019, ISSN: 0218-1967.

[4] G. Arzhantseva y L. Păunescu, «Linear sofic groups and algebras,» *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 369, n.º 4, págs. 2285-2310, 2017, ISSN: 0002-9947.

[5] S. Banach y A. Tarski, «Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales,» *Fund. Math.*, vol. 3, págs. 133-181, 1922, ISSN: 0016-2736.

[6] B. Bekka, P. de la Harpe y A. Valette, *Kazhdan's property (T)*, New Mathematical Monographs. Cambridge University Press, Cambridge, 2008, vol. 11, págs. xiv+472, ISBN: 978-0-521-88720-5.

[7] N. P. Brown y N. Ozawa, *C^*-algebras and finite-dimensional approximations*, Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 2008, vol. 88, págs. xvi+509, ISBN: 978-0-8218-4381-9.

[8] J. Brude y R. Sasyk, *Permanence properties of verbal products and verbal wreath products of groups*, 2019. arXiv: 1909.07800 [math.GR].

[9] J. Brude y R. Sasyk, «Metric approximations of unrestricted wreath products when the acting group is amenable,» *Communications in Algebra*, págs. 1-13, 2021. eprint: https://doi.org/10.1080/00927872.2021.1976790.

[10] R. G. Burns, «Verbal wreath products and certain product varieties of groups,» *J. Austral. Math. Soc.*, vol. 7, págs. 356-374, 1967, ISSN: 0263-6115.

[11] V. Capraro y M. Lupini, *Introduction to sofic and hyperlinear groups and Connes' embedding conjecture*, Lecture Notes in Mathematics. Springer, Cham, 2015, vol. 2136, págs. viii+151, With an appendix by Vladimir Pestov, ISBN: 978-3-319-19332-8; 978-3-319-19333-5.

[12] J. Carrión, M. Dadarlat y C. Eckhardt, «On groups with quasidiagonal C^*-algebras,» *J. Funct. Anal.*, vol. 265, n.º 1, págs. 135-152, 2013, ISSN: 0022-1236.

[13] T. Ceccherini-Silberstein y M. Coornaert, *Cellular automata and groups*, Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2010, págs. xx+439, ISBN: 978-3-642-14033-4.

[14] P.-A. Cherix, M. Cowling, P. Jolissaint, P. Julg y A. Valette, *Groups with the Haagerup property*, Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser/Springer, Basel, 2001, págs. viii+126, Gromov's a-T-menability, Paperback reprint of the 2001 edition [MR1852148], ISBN: 978-3-0348-9486-9.

[15] A. Clay y D. Rolfsen, *Ordered groups and topology*, Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 2016, vol. 176, págs. x+154, ISBN: 978-1-4704-3106-8.

[16] Y. de Cornulier, Y. Stalder y A. Valette, «Proper actions of lamplighter groups associated with free groups,» *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, vol. 346, n.º 3-4, págs. 173-176, 2008, ISSN: 1631-073X.

[17] ——, «Proper actions of wreath products and generalizations,» *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 364, n.º 6, págs. 3159-3184, 2012, ISSN: 0002-9947.

[18] B. Deroin, A. Navas y C. Rivas, «Groups, Orders, and Dynamics,» *arXiv e-prints*, 2014. arXiv: 1408.5805 [math.GR].

[19] V. Drinfeld, «Finitely-additive measures on S^2 and S^3, invariant with respect to rotations,» *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, vol. 18, n.º 3, pág. 77, 1984, ISSN: 0374-1990.

[20] G. Elek y E. Szabó, «On sofic groups,» *J. Group Theory*, vol. 9, n.º 2, págs. 161-171, 2006, ISSN: 1433-5883.

[21] G. Elek y E. Szabó, «Sofic groups and direct finiteness,» *J. Algebra*, vol. 280, n.º 2, págs. 426-434, 2004, ISSN: 0021-8693.

[22] Y. Glasner y N. Monod, «Amenable actions, free products and a fixed point property,» *Bull. Lond. Math. Soc.*, vol. 39, n.º 1, págs. 138-150, 2007, ISSN: 0024-6093.

[23] L. Glebsky y L. M. Rivera, «Sofic groups and profinite topology on free groups,» *J. Algebra*, vol. 320, n.º 9, págs. 3512-3518, 2008, ISSN: 0021-8693.

[24] O. N. Golovin, «Metabelian products of groups,» *Amer. Math. Soc. Transl. (2)*, vol. 2, págs. 117-131, 1956, ISSN: 0065-9290.

[25] ——, «Nilpotent products of groups,» *Amer. Math. Soc. Transl. (2)*, vol. 2, págs. 89-115, 1956, ISSN: 0065-9290.

[26] ——, «On associative operations on a set of groups,» *Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.)*, vol. 58, págs. 1257-1260, 1947.

[27] W. Gottschalk, «Some general dynamical notions,» en *Recent advances in topological dynamics (Proc. Conf. Topological Dynamics, Yale Univ., New Haven, Conn., 1972; in honor of Gustav Arnold Hedlund)*, 1973, 120-125. Lecture Notes in Math., Vol. 318.

[28] F. P. Greenleaf, «Amenable actions of locally compact groups,» *J. Functional Analysis*, vol. 4, págs. 295-315, 1969.

[29] M. Gromov, «Endomorphisms of symbolic algebraic varieties,» *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, vol. 1, n.º 2, págs. 109-197, 1999, ISSN: 1435-9855.

[30] U. Haagerup, «An example of a nonnuclear C^*-algebra, which has the metric approximation property,» *Invent. Math.*, vol. 50, n.º 3, págs. 279-293, 1978/79, ISSN: 0020-9910.

[31] P. de la Harpe y A. Valette, «La propriété (T) de Kazhdan pour les groupes localement compacts (avec un appendice de Marc Burger),» *Astérisque*, n.º 175, pág. 158, 1989, With an appendix by M. Burger, ISSN: 0303-1179.

[32] B. Hayes y A. W. Sale, «Metric approximations of wreath products,» *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, vol. 68, n.º 1, págs. 423-455, 2018, ISSN: 0373-0956.

[33] N. Higson y G. Kasparov, «E-theory and KK-theory for groups which act properly and isometrically on Hilbert space,» *Invent. Math.*, vol. 144, n.º 1, págs. 23-74, 2001, ISSN: 0020-9910.

[34] N. Higson y J. Roe, «Amenable group actions and the Novikov conjecture,» *J. Reine Angew. Math.*, vol. 519, págs. 143-153, 2000, ISSN: 0075-4102.

[35] A. Hokmabadi y B. Mashayekhy, «On nilpotent multipliers of some verbal products of groups,» *J. Algebra*, vol. 320, n.º 8, págs. 3269-3277, 2008, ISSN: 0021-8693.

[36] D. F. Holt y S. Rees, «Some closure results for $\mathcal{C}$-approximable groups,» *Pacific J. Math.*, vol. 287, n.º 2, págs. 393-409, 2017, ISSN: 0030-8730.

[37] Z. Ji, A. Natarajan, T. Vidick, J. Wright y H. Yuen, *MIP*=RE*, 2020. arXiv: 2001.04383 [quant-ph].

[38] L. Kaloujnine y M. Krasner, «Produit complet des groupes de permutations et problème d'extension de groupes. III,» *Acta Sci. Math. (Szeged)*, vol. 14, págs. 69-82, 1951, ISSN: 0001-6969.

[39] ——, «Produit complet des groupes de permutations et problème de groupes. II,» *Acta Sci. Math. (Szeged)*, vol. 14, págs. 39-66, 1951, ISSN: 0001-6969.

[40] E. Kirchberg, «Positive C^*-nuclear algebras,» en *Proceedings of the International Conference on Operator Algebras, Ideals, and their Applications in Theoretical Physics*, H. Baumgärtel, G. Lassner, A. Pietsch y A. Uhlmann, eds., Celebrado en Leipzig, 12–20 de septiembre, 1977, Teubner-Texte zur Mathematik, BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1978, págs. 255-257.

[41] E. Kirchberg y S. Wassermann, «Exact groups and continuous bundles of C^*-algebras,» *Math. Ann.*, vol. 315, n.º 2, págs. 169-203, 1999, ISSN: 0025-5831.

[42] A. G. Kurosh, *Teoriya grupp.* Gosudarstv. Izdat. Tehn.-Teor. Lit., Moscow, 1944, pág. 467, 1st ed.

[43] J. Lindenstrauss y L. Tzafriri, *Classical Banach spaces. I*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 92. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1977, págs. xiii+188, Sequence spaces, ISBN: 3-540-08072-4.

[44] A. Lubotzky, *Discrete groups, expanding graphs and invariant measures*, Progress in Mathematics. Birkhäuser Verlag, Basel, 1994, vol. 125, págs. xii+195, With an appendix by J. D. Rogawski, ISBN: 3-7643-5075-X.

[45] T. MacHenry, «The tensor product and the 2nd nilpotent product of groups,» *Math. Z.*, vol. 73, págs. 134-145, 1960, ISSN: 0025-5874.

[46] A. Magidin, «Capability of nilpotent products of cyclic groups,» *J. Group Theory*, vol. 8, n.º 4, págs. 431-452, 2005, ISSN: 1433-5883.

[47] ——, «Capability of nilpotent products of cyclic groups. II,» *J. Group Theory*, vol. 10, n.º 4, págs. 441-451, 2007, ISSN: 1433-5883.

[48] W. Magnus, A. Karrass y D. Solitar, *Combinatorial group theory*, second. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2004, págs. xii+444, Presentations of groups in terms of generators and relations, ISBN: 0-486-43830-9.

[49] G. A. Margulis, «Some remarks on invariant means,» *Monatsh. Math.*, vol. 90, n.º 3, págs. 233-235, 1980, ISSN: 0026-9255.

[50] B. Mashayekhy, «Some notes on the Baer-invariant of a nilpotent product of groups,» *J. Algebra*, vol. 235, n.º 1, págs. 15-26, 2001, ISSN: 0021-8693.

[51] J. McCool, «On the Magnus-Smelkin embedding,» *Proc. Edinburgh Math. Soc. (2)*, vol. 30, n.º 1, págs. 133-142, 1987, Groups–St. Andrews 1985, ISSN: 0013-0915.

[52] V. G. Mikaelyan, «The Shmelkin criterion and varieties generated by the wreath products of finite groups,» *Algebra Logika*, vol. 56, n.º 2, págs. 164-175, 2017, ISSN: 0373-9252.

[53] N. Monod y S. Popa, «On co-amenability for groups and von Neumann algebras,» *C. R. Math. Acad. Sci. Soc. R. Can.*, vol. 25, n.º 3, págs. 82-87, 2003, ISSN: 0706-1994.

[54] S. Moran, «Associative operations on groups. I,» *Proc. London Math. Soc. (3)*, vol. 6, págs. 581-596, 1956, ISSN: 0024-6115.

[55] ——, «Associative operations on groups. II,» *Proc. London Math. Soc. (3)*, vol. 8, págs. 548-568, 1958, ISSN: 0024-6115.

[56] ——, «Associative operations on groups. III,» *Proc. London Math. Soc. (3)*, vol. 9, págs. 287-317, 1959, ISSN: 0024-6115.

[57] B. H. Neumann, «Identical relations in groups. I,» *Math. Ann.*, vol. 114, n.º 1, págs. 506-525, 1937, ISSN: 0025-5831.

[58] H. Neumann, *Varieties of groups.* Springer-Verlag New York, Inc., New York, 1967, págs. x+192.

[59] N. Ozawa, «About the QWEP conjecture,» *Internat. J. Math.*, vol. 15, n.º 5, págs. 501-530, 2004, ISSN: 0129-167X.

[60] V. Paulsen, *Completely bounded maps and operator algebras*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 2002, vol. 78, págs. xii+300, ISBN: 0-521-81669-6.

[61] L. Păunescu, «On sofic actions and equivalence relations,» *J. Funct. Anal.*, vol. 261, n.º 9, págs. 2461-2485, 2011, ISSN: 0022-1236.

[62] V. G. Pestov, «Hyperlinear and sofic groups: a brief guide,» *Bull. Symbolic Logic*, vol. 14, n.º 4, págs. 449-480, 2008, ISSN: 1079-8986.

[63] J.-P. Pier, *Amenable locally compact groups*, Pure and Applied Mathematics (New York). John Wiley & Sons, Inc., New York, 1984, págs. x+418, A Wiley-Interscience Publication, ISBN: 0-471-89390-0.

[64] F. Rădulescu, «The von Neumann algebra of the non-residually finite Baumslag group $<a, b|ab^3a^{-1} = b^2>$ embeds into R^ω,» en *Hot topics in operator theory*, Theta Ser. Adv. Math. Vol. 9, Theta, Bucharest, 2008, págs. 173-185.

[65] L. Ribes y B. Steinberg, «A wreath product approach to classical subgroup theorems,» *Enseign. Math. (2)*, vol. 56, n.º 1-2, págs. 49-72, 2010, ISSN: 0013-8584.

[66] J. Rosenblatt, «Uniqueness of invariant means for measure-preserving transformations,» *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 265, n.º 2, págs. 623-636, 1981, ISSN: 0002-9947.

[67] J. M. Rosenblatt, «A generalization of Følner's condition,» *Math. Scand.*, vol. 33, págs. 153-170, 1973, ISSN: 0025-5521.

[68] J. J. Rotman, *An introduction to the theory of groups*, Fourth, Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1995, vol. 148, págs. xvi+513, ISBN: 0-387-94285-8.

[69] R. Sasyk y A. Törnquist, «The classification problem for von Neumann factors,» *J. Funct. Anal.*, vol. 256, n.º 8, págs. 2710-2724, 2009, ISSN: 0022-1236.

[70] R. Sasyk, «Permanence properties of the second nilpotent product of groups,» *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, vol. 26, n.º 5, págs. 725-742, 2019, ISSN: 1370-1444.

[71] J. P. Serre, *Arbres, amalgames,* SL_2. Paris: Société Mathématique de France, 1977, 189 pp. (1 plate), Rédigé avec la collaboration de H. Bass, Astérisque, No. 46.

[72] A. L. Šmelkin, «Wreath products and varieties of groups,» *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, vol. 29, págs. 149-170, 1965, ISSN: 0373-2436.

[73] R. R. Struik, «On associative products of groups,» *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 81, págs. 425-452, 1956, ISSN: 0002-9947.

[74] ——, «On nilpotent products of cyclic groups,» *Canadian J. Math.*, vol. 12, págs. 447-462, 1960, ISSN: 0008-414X.

[75] ——, «On verbal products of groups,» *J. London Math. Soc.*, vol. 34, págs. 397-400, 1959, ISSN: 0024-6107.

[76] D. Sullivan, «For $n > 3$ there is only one finitely additive rotationally invariant measure on the n-sphere defined on all Lebesgue measurable subsets,» *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, vol. 4, n.º 1, págs. 121-123, 1981, ISSN: 0273-0979.

[77] A. Thom, «Finitary approximations of groups and applications,» en *Proc. Int. Cong. of Math.*, vol. 2, 2018, págs. 1775-1796.

[78] A. Thom, «About the metric approximation of Higman's group,» *J. Group Theory*, vol. 15, n.º 2, págs. 301-310, 2012, ISSN: 1433-5883.

[79] B. Weiss, «Sofic groups and dynamical systems,» en 3, vol. 62, Ergodic theory and harmonic analysis (Mumbai, 1999), 2000, págs. 350-359.

[80] G. Yu, «The coarse Baum-Connes conjecture for spaces which admit a uniform embedding into Hilbert space,» *Invent. Math.*, vol. 139, n.º 1, págs. 201-240, 2000, ISSN: 0020-9910.

[81] R. Zimmer, *Ergodic theory and semisimple groups*, Monographs in Mathematics. Birkhäuser Verlag, Basel, 1984, vol. 81, págs. x+209, ISBN: 3-7643-3184-4.