

Vizualizacija računanja s decimalnim brojevima

MARIJANA ŠPOLJARIĆ¹, VLADO HALUSEK²

Sažetak

U nastavi je važno ostvarivanje odgojno-obrazovnih ishoda koje učitelji mogu postići na bilo koji način. Ova vrsta slobode koju danas imaju većinu učitelja potiče na kreativnost i istraživanje kako i na koji način ostvariti te ishode. U ovom radu prikazan je vizualni način ostvarivanja obrazovnog ishoda *Računa s decimalnim brojevima*.

Ključne riječi: decimalni broj, računanje s decimalnim brojevima, vizualizacija, metodika matematike

Uvod

Matematika je predmet koji od konkretnih situacija kreće prema apstraktnima. Na ovaj način učenicima se omogućava bolje ostvarivanje odgojno-obrazovnih ishoda. Vizualno zaključivanje današnji matematičari puno više prihvaćaju, štoviše, vizualni argumenti postaju prihvatljivi i kao dokaz. Kognitivne studije ukazuju na ogroman potencijal vizualnih pristupa smislenom učenju, dok učenje na daljinu pomoću ICT tehnologija nudi sve više mogućnosti za realizaciju ovog potencijala [1].

Jedan od načina kako apstraktne pojmove objasniti učenicima je učiniti to na konkretnim primjerima koji su poznati učenicima, tj. na onima s kojima su se susreli tijekom školovanja. Obrada svih računskih operacija za prirodne brojeve do 100 temelji se na vizualizaciji pomoću raznih prikaza (kvadratića, bombona, životinja, itd.), a zatim na prebrojavanje ili dijeljenje zadanog na određene članove. Upravo na ovom načinu prenošenja znanja i njegovu produbljivanju temelji se ovaj rad.

Učenici petog razreda Katoličke osnovne škole u Virovitici radili su na ovaj način. Ono što su autori u radu primijetili je da su učenici s lakoćom, samo na temelju postavljenih primjera koji su ovdje objašnjeni, shvatili i sami došli do zaključka na koji se način računa s decimalnim brojevima. Učenici su sami izrekli točno pravilo kako se koja računaska operacija izvodi.

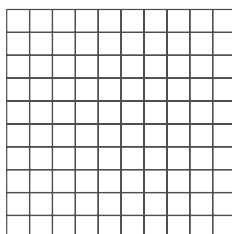
¹Visoka škola Virovitica, Katolička osnovna škola u Virovitici

²OŠ Kloštar Podravski

1. Prikaz decimalnih brojeva

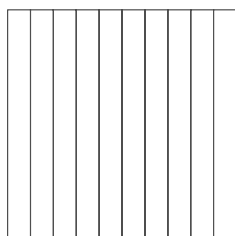
Prikaz decimalnih brojeva na temelju naučenog o pojmu *razlomak* standard je koji se može pronaći u većini udžbenika za 5. razred osnovne škole. Ovdje je kratak pregled prikaza koji su potrebni za ostvarivanje odgojno-obrazovnih ishoda.

Primjer 1. Oboji udio kvadrata koji prikazuje decimalni broj 0.6.

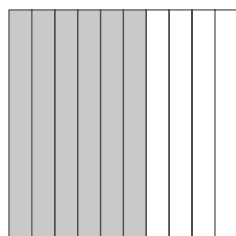


Rješenje: Zadani kvadrat možemo promatrati na tri načina:

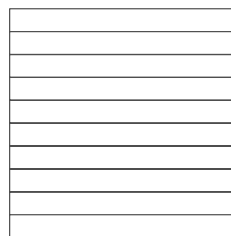
1. Promatramo stupce.



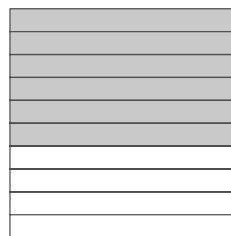
U ovom slučaju potrebno je obojiti šest stupaca.



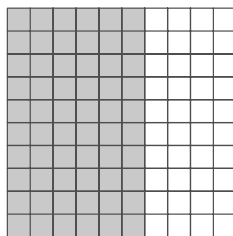
2. Promatramo retke.



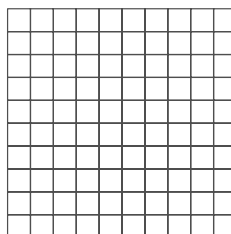
U ovom slučaju potrebno je obojiti šest redaka.



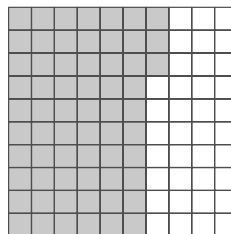
3. Promatramo li zadani kvadrat, u njemu je potrebno obojiti 60 kvadratića.



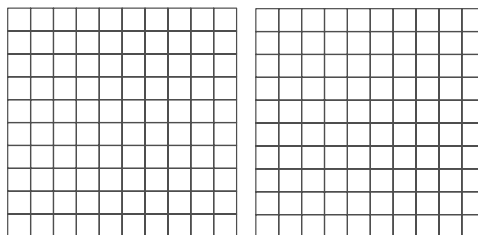
Primjer 2. Oboji udio kvadrata koji prikazuje decimalni broj 0.63.



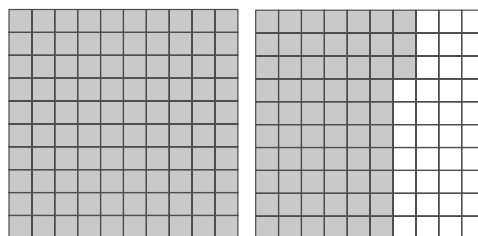
Rješenje: U kvadratu je potrebno obojiti 63 kvadratića.



Primjer 3. Oboji udio kvadrata koji prikazuje decimalni broj 1.63.

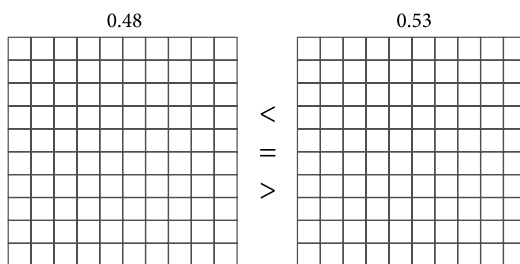


Rješenje: Potrebno je obojiti jedan cijeli kvadrat i 63 kvadratića u drugom kvadratu. Primijetite da broj čitamo kao jedno cijelo i šezdeset tri stotinke.

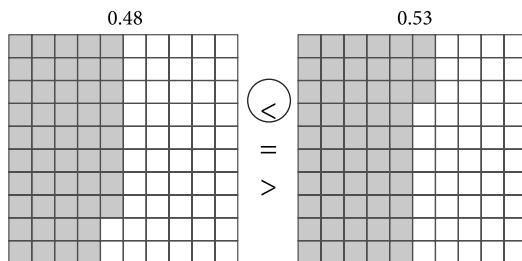


2. Uspoređivanje decimalnih brojeva

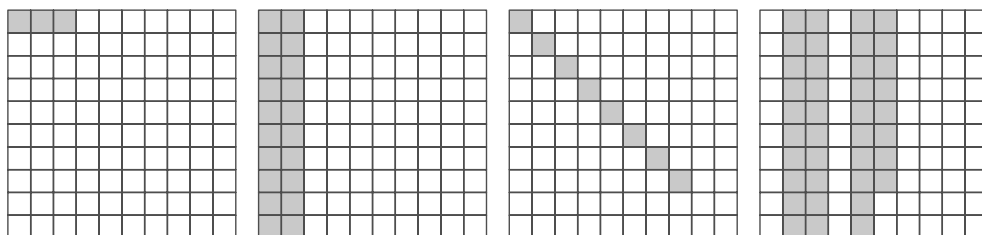
Primjer 4. Oboji udio kvadrata koji prikazuje napisani decimalni broj. Zaokruži znak jednakosti ili nejednakosti tako da ona bude točna.



Rješenje: Bojenjem dijela kvadrata, odnosno 48 kvadratića prvog broja i 53 kvadratića drugog decimalnog broja, uočavamo da je $0.48 < 0.53$.



Primjer 5. Pogledajte obojeni udio svakog kvadrata. Zapiši udio koji je obojen u decimalnom zapisu i poredaj brojeve po veličini od najmanjeg do najvećeg.



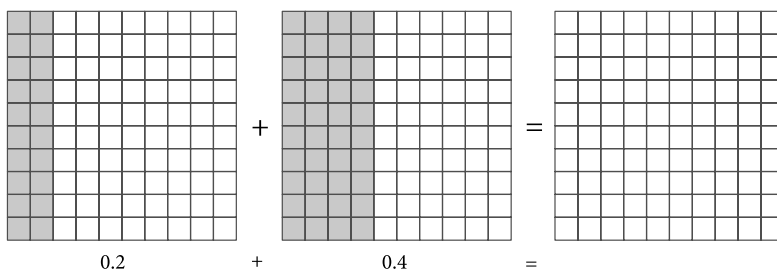
Rješenje: Decimalnim zapisom svakog dijela lika koji je obojen uočavamo da je

$$0.03 < 0.08 < 0.2 < 0.38$$

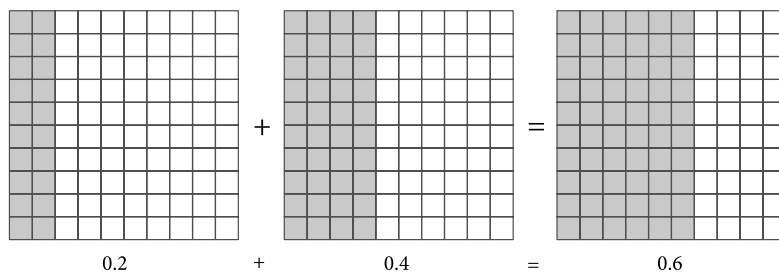
3. Zbrajanje decimalnih brojeva

Dva decimalna broja (ili više njih) pisano se zbrajaju tako da se potpišu jedan ispod drugoga, i tako da decimalna točka jednoga broja bude točno ispod decimalne točke drugoga broja. Time se svako dekadsko i decimalno mjesto dvaju brojeva nalazi točno jedno ispod drugog. Zatim se decimalni brojevi zbrajaju kao i prirodni brojevi, a decimalna točka zbroja zapisuje se točno ispod decimalnih točaka pribrojnika.

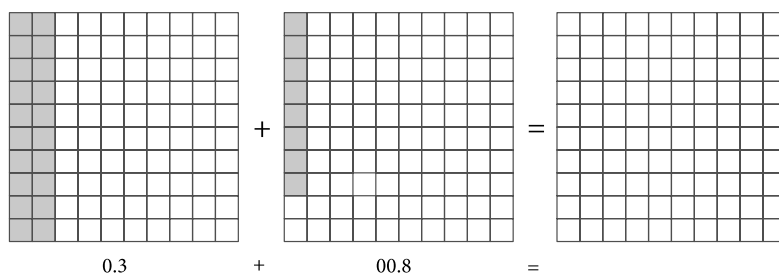
Primjer 6. Koristeći prikaz decimalnih brojeva, oboji i zapiši njihov zbroj.



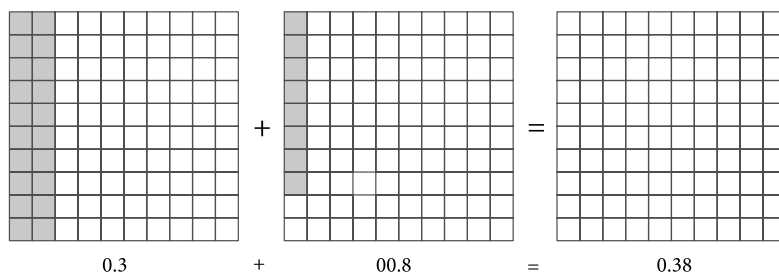
Rješenje: Rješenje ćemo naći tako da u kvadrat iza znaka jednakosti obojimo 20 kvadratića koje ima prvi pribrojnik i 40 kvadratića koje ima drugi pribrojnik. Prebrojavanjem kvadratića koje smo obojili dobit ćemo zbroj ovih dvaju pribrojnika.



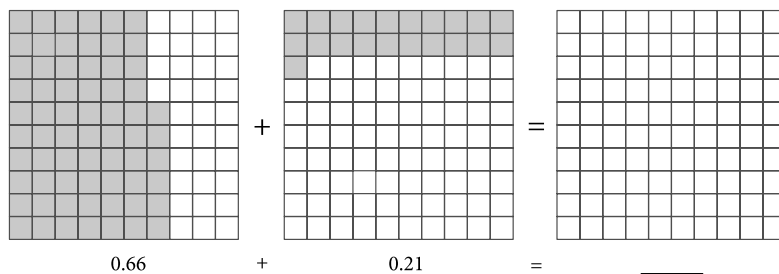
Primjer 7. Koristeći prikaz decimalnih brojeva, oboji i zapiši njihov zbroj.



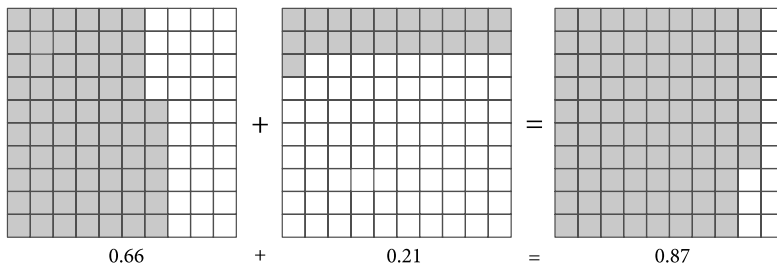
Rješenje: Rješenje ćemo naći tako da u kvadrat iza znaka jednakosti obojimo 30 kvadratića koje ima prvi pribrojnik i 8 kvadratića koje ima drugi pribrojnik. Prebrojavanjem kvadratića koje smo obojili dobit ćemo zbroj ovih dvaju pribrojnika.



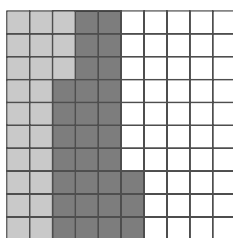
Primjer 8. Koristeći prikaz decimalnih brojeva, oboji i zapiši njihov zbroj.



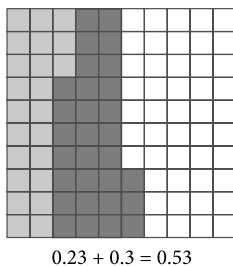
Rješenje: Rješenje ćemo naći tako da u kvadrat iza znaka jednakosti obojimo 66 kvadratića koje ima prvi pribrojnik i 21 kvadratić koje ima drugi pribrojnik. Prebrojavanjem kvadratića koje smo obojili dobit ćemo zbroj ovih dvaju pribrojnika.



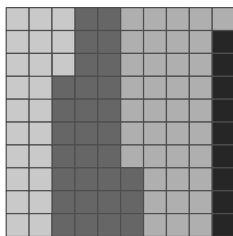
Primjer 9. Zapiši pribrojnike i zbroj koji je prikazan na slici.



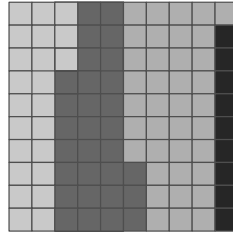
Rješenje: Prebrojavanjem kvadratića obojanih svijetlo sivo pronalazimo prvi pribrojnik 0.23 jer su svijetlo sivom bojom obojena 23 kvadratića. Drugi pribrojnik pronalazimo prebrojavanjem kvadratića obojanih tamno sivom bojom. Njih je 30, što znači da je drugi pribrojnik 0.3. Zbroj pronalazimo prebrojavanjem svih kvadratića. Ukupno je obojeno 53 kvadratića, što znači da je zbroj 0.53.



Primjer 10. Zapiši pribrojnike i zbroj koji je prikazan na slici.



Rješenje: Prebrojavanjem kvadratića obojanih najsvjetlijom bojom pronalazimo prvi pribrojnik 0.23 jer su prvom bojom obojena 23 kvadratića. Drugi pribrojnik pronalazimo prebrojavanjem kvadratića obojanih drugom bojom. Njih je 27, što znači da je drugi pribrojnik 0.27. Treći pribrojnik pronalazimo prebrojavanjem kvadratića obojanih trećom bojom, a njih je 41. To znači da je treći pribrojnik 0.41. Još je četvrtom bojom obojeno 9 kvadratića. To znači da je četvrti pribrojnik broj 0.9. Zbroj pronalazimo prebrojavanjem svih kvadratića. Ukupno je obojeno 100 kvadratića, što znači da je zbroj 1.00 (jedno cijelo).

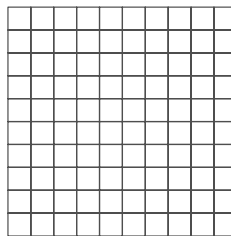


$$0.23 + 0.27 + 0.41 + 0.9 = 1$$

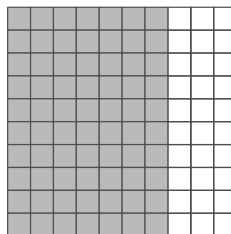
4. Oduzimanje decimalnih brojeva

Dva decimalna broja (ili više njih) pisano se oduzimaju tako da se potpišu jedan ispod drugoga, i to tako da decimalna točka jednoga broja bude točno ispod decimalne točke drugoga broja. Time se svako dekadsko i decimalno mjesto dvaju brojeva nalazi točno jedno ispod drugog. Zatim se decimalni brojevi oduzimaju kao i prirodni brojevi, a decimalna točka razlike zapisuje se točno ispod decimalnih točaka brojeva koji se oduzimaju.

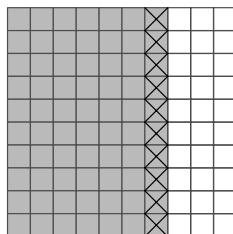
Primjer 11. Koristeći prikaz decimalnih brojeva, označi i odredi razliku brojeva 0.7 i 0.1.



Rješenje: U nacrtani kvadrat označimo vrijednost umanjnika. Treba obojiti 70 kvadratića jer je umanjnik decimalni broj 0.7.



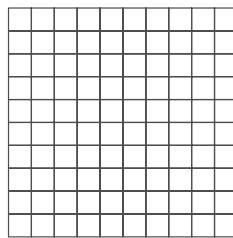
Na isti kvadratić prekrizimo vrijednost umanjitelja. Potrebno je prekriziti 10 kvadratića jer je umanjitelj decimalni broj 0.1.



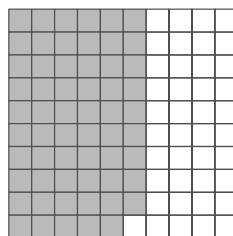
Razliku ćemo dobiti prebrojavanjem kvadratića koji su obojeni, a nisu prekriveni.

$$0.7 - 0.1 = 0.6$$

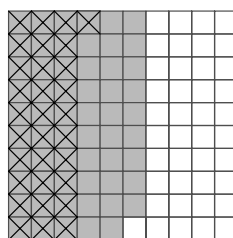
Primjer 12. Koristeći prikaz decimalnih brojeva, označi i odredi razliku brojeva 0.59 i 0.31.



Rješenje: U nacrtani kvadrat označimo vrijednost umanjnika. Treba obojiti 59 kvadratića jer je umanjnik decimalni broj 0.59.



Na isti kvadratić prekrizimo vrijednost umanjitelja. Potrebno je prekriziti 31 kvadratića jer je umanjitelj decimalni broj 0.31.



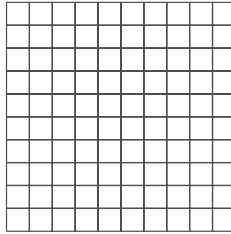
Prebrojavanjem neprekrivenih kvadratića dobit ćemo razliku.

$$0.59 - 0.31 = 0.28$$

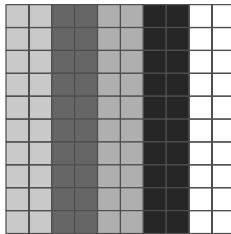
5. Množenje decimalnih brojeva prirodnim brojem

Decimalni broj množimo prirodnim brojem kao da je on prirodan broj, samo što u konačnom umnošku odbrojimo zdesna nalijevo onoliko decimalnih mjesta koliko ih taj decimalni broj ima i tu stavimo točku.

Primjer 13. Koristeći prikaz decimalnih brojeva, označi i zapiši umnožak brojeva 4 i 0.2. Koristi onoliko različitih bojica koliko je prirodni broj.



Rješenje: U nacrtanom kvadratu oboji 20 kvadratića (jer je zadan decimalni broj 0.2) onoliko puta koliko je prirodni broj.



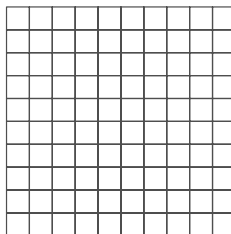
U ovom primjeru broj 0.2 obojili smo četiri puta. Prebrojavanjem svih obojenih kvadratića dobit ćemo umnožak.

$$4 \cdot 0.2 = 0.8$$

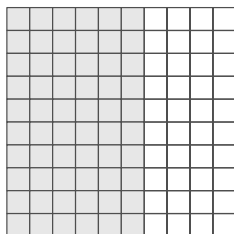
6. Množenje decimalnih brojeva

Decimalni broj množimo decimalnim brojem isto kao da su to prirodni brojevi, samo što konačnom umnošku odvojimo zdesna nalijevo onoliko decimalnih mjesta koliko ima zajedno u oba faktora.

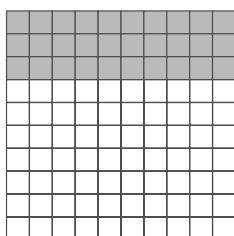
Primjer 14. Koristeći prikaz decimalnih brojeva, označi i zapiši umnožak brojeva 0.6 i 0.3. Koristi dvije bojice.



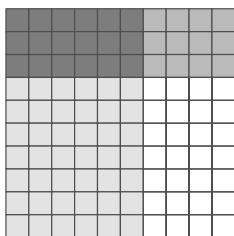
Rješenje: Na zadanom kvadratu prvom bojom potrebno je obojiti šest stupaca, tj. dio kvadrata koji predstavlja prvi zadani faktor, odnosno 60 kvadratića jer je prvi faktor broj 0.6.



Na zadanom kvadratu drugom bojom potrebno je obojiti tri retka, tj. dio kvadrata koji predstavlja drugi zadani faktor, odnosno 30 kvadratića jer je drugi faktor 0.3.



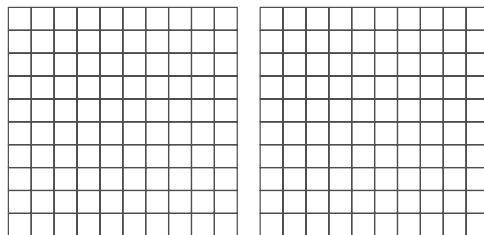
Rezultat množenja dvaju zadanih decimalnih brojeva presjek je dvaju obojenih područja, tj. ono što je sada obojeno najtamnijom bojom. Prebrojavanjem kvadratića toga dijela dobit ćeš umnožak.



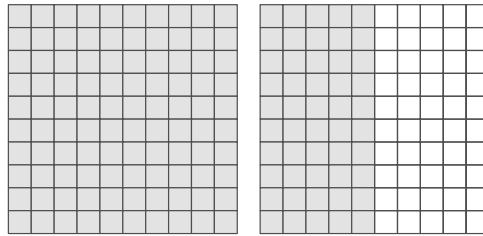
$$0.6 \cdot 0.3 = 0.18$$

Primijetite, presjek je površina pravokutnika kojemu su stranice 0.6 i 0.3.

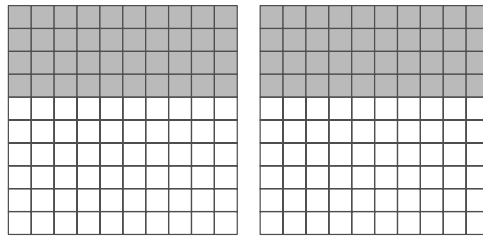
Primjer 15. Koristeći prikaz decimalnih brojeva, označi i zapiši umnožak brojeva 1.5 i 0.4. Koristi dvije bojice.



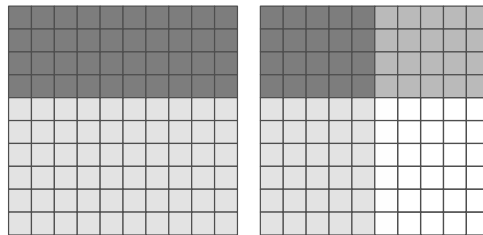
Rješenje: Na zadanom kvadratu prvom bojom potrebno je obojiti 15 stupaca, tj. dio kvadrata koji predstavlja prvi zadani faktor.



Primijetite da je obojen jedan cijeli kvadrat i pet stupaca drugog kvadrata. Zbog toga je sada potrebno obojiti drugom bojom četiri retka u prvom i drugom kvadratu.



Rezultat množenja dvaju zadanih decimalnih brojeva presjek je dvaju obojenih područja, tj. ono što je sada obojeno najtamnijom bojom. Prebrojavanjem kvadratića toga dijela dobit ćeš umnožak.

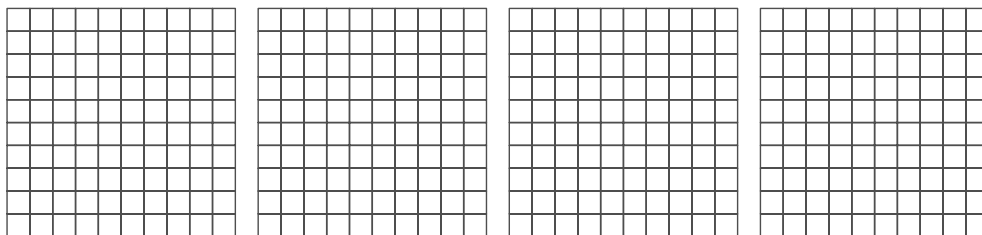
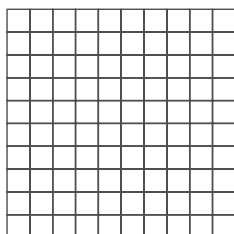


$$1.5 \cdot 0.4 = 0.6$$

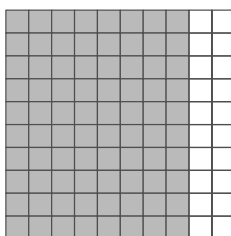
7. Dijeljenje decimalnih brojeva prirodnim brojem

Decimalni se broj dijeli prirodnim brojem kao da su oba prirodni brojevi, pri čemu se decimalna točka količnika (kvocijenta) zapisuje kada se završi s dijeljenjem cijelog dijela decimalnog broja. U trenutku kad se preskače decimalna točka, odmah se prepisuje u količnik.

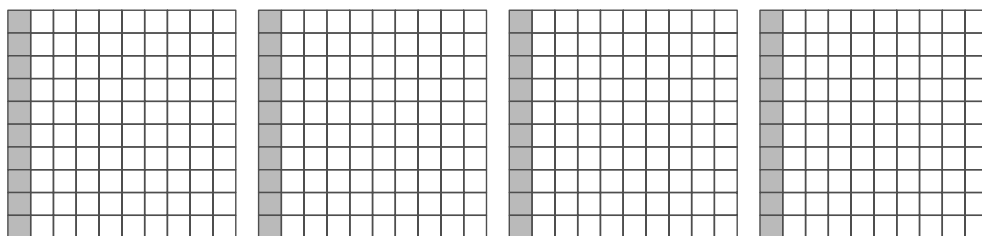
Primjer 16. Koristeći prikaz decimalnih brojeva, označi i zapiši količnik brojeva 0.8 i 4.



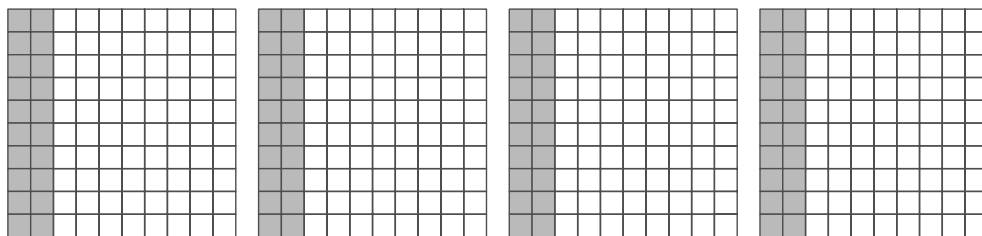
Rješenje: Obojite kvadrat onoliko koliki je djeljenik.



U četiri kvadrata, jer je djeljitelj broj 4, u prvoj iteraciji obojite po jedan stupac.



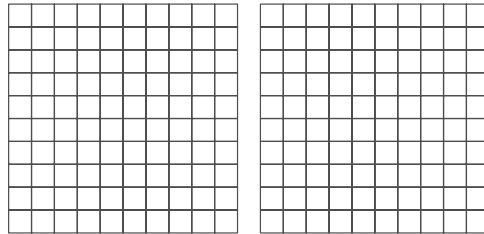
Zatim u drugoj iteraciji obojite ostale stupce (u svakom kvadratu po jedan) sve dok ne iscrpите sve obojene stupce početnog kvadrata.



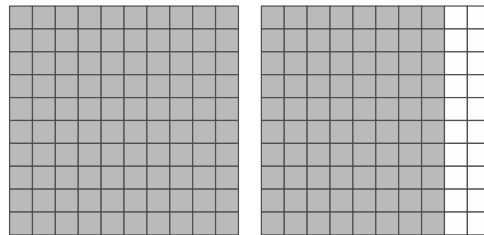
U svakom kvadratu obojen je jednak broj stupaca. Dio prvog kvadrata je količnik, odnosno rezultat navedenog dijeljenja.

$$0.8 : 2 = 0.4$$

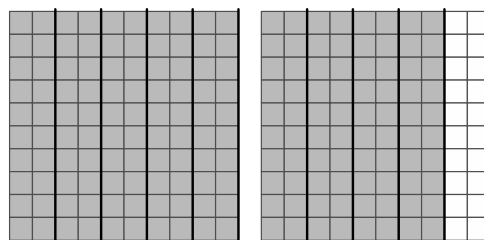
Primjer 17. Koristeći prikaz decimalnih brojeva, označi i zapiši količnik brojeva 1.8 i 9.



Rješenje: U zadane kvadrate obilježi udio koji čini djeljenik. Potrebno je obojiti 180 kvadratića.



Obojeni dio dijelimo na 9 jednakih dijelova jer je djelitelj 9. Kada broj 180 podijelimo s 9, dobit ćemo 20, što znači da svaki tako dobiveni dio iznosi 0.2 jer ima 20 kvadratića.

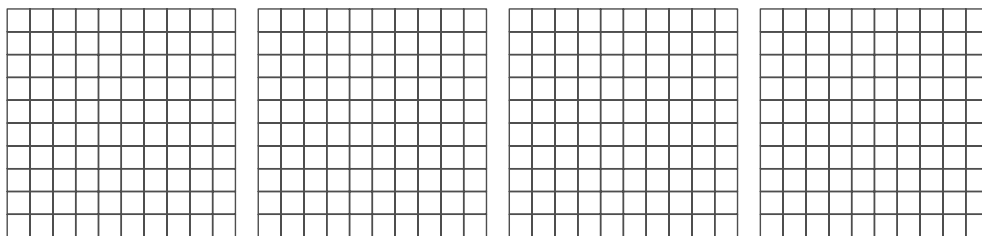


$$1.8 : 9 = 0.2$$

8. Dijeljenje decimalnih brojeva

Kod dijeljenja decimalnih brojeva i dalje koristimo prikaz dijeljenja decimalnog broja prirodnim brojem te pravilom o množenju djeljenika i djelitelja istom dekadskom jedinicom, odnosno pomnoži li se i djeljenik i djelitelj istom dekadskom jedinicom, količnik će ostati isti.

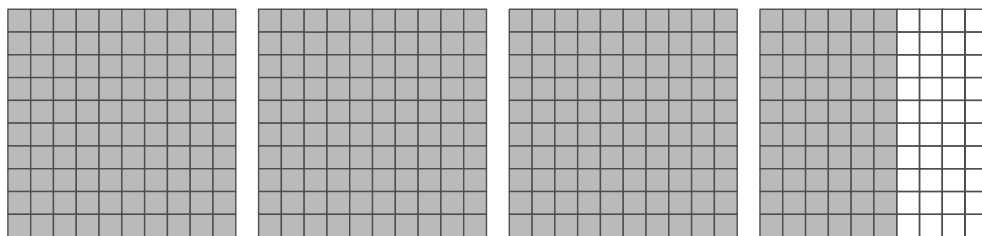
Primjer 18. Koristeći prikaz decimalnih brojeva 0.36 i 0.4, izračunaj njihov količnik.



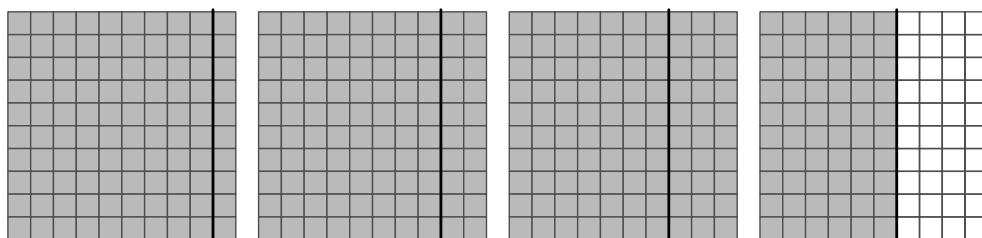
Rješenje: Pri dijeljenju decimalnih brojeva 0.36 i 0.4 množimo oba broja s 10 i tražimo količnik brojeva 3.6 i 4, odnosno

$$3.6 : 4 =$$

U zadane kvadrate treba obojiti udio koji čini djeljenik. Potrebno je obojiti 360 kvadratića.



Obojeni dio dijelimo na 4 jednaka dijela jer je djeliteľ 4. Kada broj 360 podijelimo s 4, dobit ćemo 90, što znači da svaki tako dobiveni dio iznosi 0.9 jer ima 90 kvadratića.



$$3.6 : 4 = 0.9$$

Zaključak

Ostvarivanje odgojno-obrazovnih ishoda u nastavi matematike izazov je na koji je najlakše odgovoriti primjenom konkretnih primjera i do tada usvojenog znanja učenika. Svaki način poboljšanja nastave matematike je dobrodošao, iako je za njegovo pripremanje potrebno puno vremena.

U ovom radu dan je prikaz načina uvođenja računskih operacija s decimalnim brojevima. Boljim učenicima ovo će izgledati isuviše lako. Prosječnim i slabijim učenicima ovaj način rada na jednostavniji će način objasniti kako su računске operacije s decimalnim brojevima uistinu jednostavne, i na taj ih način motivirati na dodatni rad i vježbu.

Literatura:

1. Dreyfus, T. *On the status of visual reasoning in mathematics and mathematics education*, In Proceedings of the Fifteenth Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Assisi, Italy, 33-48. 1991.
2. Paić, G. et all. *Matematički izazovi 5, Udžbenik sa zadacima za vježbanje iz matematike za peti razred osnovne škole Drugi dio*, Alfa, 2019.
3. Šikić, Z. et all. *Matematika 5, udžbenik i zbirka zadataka za peti razred osnovne škole 2. svezak*, Profil Klett, 2019
4. <https://www.commoncoresheets.com/Decimals.php>
5. <https://www.pinterest.com/pin/585468020278921887/>
6. <https://www.pinterest.com/pin/337558934571087872/>