



## UvA-DARE (Digital Academic Repository)

[Review of: K. Atkinson, W. Han (2001) Theoretical numerical analysis: a functional analysis framework]

Brandts, J.

**Publication date**

2004

**Document Version**

Final published version

**Published in**

Nieuw Archief voor Wiskunde

[Link to publication](#)

**Citation for published version (APA):**

Brandts, J. (2004). [Review of: K. Atkinson, W. Han (2001) Theoretical numerical analysis: a functional analysis framework]. *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 5/5(1), 79-80.  
<http://www.nieuwarchief.nl/serie5/toonnummer.php?deel=05&nummer=1&taal=0>

**General rights**

It is not permitted to download or to forward/distribute the text or part of it without the consent of the author(s) and/or copyright holder(s), other than for strictly personal, individual use, unless the work is under an open content license (like Creative Commons).

**Disclaimer/Complaints regulations**

If you believe that digital publication of certain material infringes any of your rights or (privacy) interests, please let the Library know, stating your reasons. In case of a legitimate complaint, the Library will make the material inaccessible and/or remove it from the website. Please Ask the Library: <https://uba.uva.nl/en/contact>, or a letter to: Library of the University of Amsterdam, Secretariat, Singel 425, 1012 WP Amsterdam, The Netherlands. You will be contacted as soon as possible.

plexe halfkelvoudige Lie algebra's. Daarna worden oplossingen van het zelfduale nietabelse Chern-Simonsveld minimaal gekoppeld aan een (niet)relativistisch scalarveld besproken. Hoofdstuk 7 gaat onder andere over een existentiële theorema voor multivortexoplossingen in de Glashow-Weinberg-Salamtheorie van de elektrozwakke wisselwerking en een generalisatie hiervan. Dyonen, dat zijn deeltjes met zowel elektrische als magnetische lading, vormen het onderwerp van hoofdstuk 8. Dit hoofdstuk start met de magnetische monopool van Dirac en het vervolgt met Schwinger's theorie van dyonen, Julia-Zee dyonen, Weinberg-Salam elektrozwakke dyonen, enzovoort. Hoofdstuk 9 houdt zich bezig met rotatiesymmetrische oplossingen van een scalarveld in twee dimensies. Hoofdstuk 10 begint met een tijdonafhankelijke metriek van een  $N$ -tal rechte evenwijdige kosmische snaren in te voeren. In de rest van dit hoofdstuk worden kosmische snaren als topologische defecten van Higgsmodellen beschouwd met wederom een sterke nadruk op existentiële theorema's. In hoofdstuk 11 wordt een model beschouwd waarin een scalarveld is gekoppeld aan een abels veld en het gravitatieveld. Ook hierin weer menig existentiële theorema voor oplossingen met zowel vortices als antivortices. Hoofdstuk 12 gaat over de niet-lineaire modificatie van de Maxwelltheorie van Born en Infeld, die ingevoerd werd om de korte-afstands divergenties van de Maxwelltheorie te elimineren. Na een lange winterslaap is de Born-Infeldtheorie ontwaakt in de setting van snaartheorie ( $D$ -branes). Ook hier weer slechts aandacht voor existentiële- en eenduidigheidstheorema's van oplossingen.

Men vindt in dit boek een grote verscheidenheid aan veldentheoretische modellen. Aan de fysische achtergrond van een en ander wordt nauwelijks aandacht besteed. Daarentegen komen de toepassingen van de hulpmiddelen uit de niet-lineaire analyse bij het bewijzen van existentiële theorema's van oplossingen van partiële differentiaalvergelijkingen uitvoerig ter sprake. Een bruikbaar boek voor onderzoekers op dit beperkte deelgebied van de mathematische fysica.

G.G.A. Bauerle

K. Atkinson, W. Han

### **Theoretical Numerical Analysis A Functional Analysis Framework**

(*Texts in Applied Mathematics, Volume 39*)

Berlijn: Springer-Verlag, 2001.

450 p., prijs €80,20

ISBN 0-387-95142-3

This is a wonderful book on Numerical Analysis. The authors themselves chose to add the prefix 'theoretical', but my opinion is that Numerical Analysis is in fact the theoretical studies of numerical or computational methods. Indeed, the book succeeds very well in identifying the central concepts in Numerical Analysis and also in presenting them to the reader in a mathematically correct but also lively fashion.

The authors' point of view, although not explicitly stated, seems to be that Numerical Analysis is the mathematical studies of the approximation of non-linear operator equations by means of (linear) fixed point iteration, functional analytic studies of the linear operator equation, discretization of the linear operator equation and solution of the discrete linear problem.

The book does not treat the latter point as a separate chapter,

although it does derive some linear algebra methods as special cases from iterations on spaces of infinite dimension. For instance, the Newton method and the Conjugate Gradient method are, respectively, treated as iterations on infinite dimensional Banach and Hilbert spaces. As an example of the consequence, super-linear convergence of the Conjugate Gradient method applied to a linear system  $Ax = b$  or to  $(I - K)u = f$  with  $K$  a compact integral operator, share the same proof.

The heart of the book is formed by Chapter 3 on Approximation Theory, together with the preceding chapters on Linear Spaces and Linear Operators on Normed Spaces, and Chapter 6 on Sobolev Spaces. These four chapters do not involve numerical methods, but discuss in which functional analytic framework a problem can be posed most naturally, and moreover to which extend arbitrary elements from certain function spaces can be approximated in a given discrete (i.e., finite dimensional) (sub)space. These questions are essential in a solid treatment of numerical schemes. In examples and exercises, both (partial) differential operators and integral operators figure, as well as abstract operators. The four chapters just mentioned treat a number of basic concepts, like linear functionals, Riesz representation theorem, Fredholm alternative, resolvent operators, best approximation in Banach and Hilbert spaces, (interpolatory) projections, orthogonal polynomials, Sobolev trace and embedding theorems. Contrary to some textbooks, theoretical results are often given a direct application. For instance, the Banach-Steinhaus Theorem (principle of uniform boundedness) is applied directly by proving the convergence of a sequence of certain numerical integration (quadrature) rules, by interpreting them as a sequence of linear functionals on  $C([0, 1])$ , and proving those to be uniformly bounded, which results in a necessary condition on the quadrature weights.

Chapter 4 is on Nonlinear equations and Their Solution by Iteration, and it provides a link between well-developed but mostly linear theory and the inherent non-linearity of many relevant problems. As already hinted at, iterations mostly take place on Banach spaces, and occasionally for the special cases of a Hilbert space and the finite dimensional space. The Banach fixed point theorem together with Fréchet and Gateaux derivatives form the central tools in this chapter.

Chapter 5 is on the Finite Difference Method, and in particular on its use in the discretization of parabolic partial differential equations. For a parabolic model problem, the Lax equivalence theorem is proved ('consistency + stability = convergence'). This relatively small chapter treats some of the essentials of the method, but if I would be forced to write down one negative point of criticism for this book, it would be that somehow this chapter seems a bit out of place, in comparison to the rest of the topics.

The rest of the book consists in fact of two main themes, which are the analysis and numerical approximation of elliptic boundary value problems and variational inequalities and of integral equations of the second kind. Although the first item is omnipresent in textbooks on numerical analysis, the latter (which is in Chapter 11) is not. Nicely embedded in the theory of the earlier chapters, collocation and Galerkin methods are treated as interpolatory and orthogonal projections respectively. Both piecewise polynomial and trigonometric polynomial subspaces are considered, and ('Sloan') iterated projection is considered in each case. Naturally, the Nyström method is analyzed. Chapter 12 concen-

trates on the formulation of some well-known boundary value problems into boundary integral equations, to which the methods may be applied.

Chapters 7–9 give a treatment of elliptic boundary value problems, their weak, dual, and mixed formulations, and their discretization with the finite element method. Topics included are the fairly standard: Lax-Milgram lemma and Nečas' generalization of it, incorporating various boundary conditions in weak formulations, spaces of piecewise polynomials and their properties. Less standard but in my opinion very important is the separate treatment of the Galerkin and Petrov-Galerkin method in Chapter 8, together with Céa's Lemma in the abstract setting (although the authors miss the golden opportunity to derive the Conjugate Gradient method and its error bounds via Céa's Lemma and the Krylov-Galerkin subspace). Unusual but illustrative is the treatment of non-linear elliptic problem using material from Chapter 4.

Finally, the book contains a list of references containing both contemporary books and classics, and a useful keyword/symbol index.

My advice would be to buy this book. It is very well written, touches the right topics, goes in depth without exaggeration, and provides numerous examples of the use of abstract mathematics in an applied setting. A must for the PhD student in Numerical Analysis. Kendall Atkinson confirms his reputation, and Weimin Han is giving his a solid ground with this book. *J. Brandts*

### Mathematical Olympiads 1998–1999 and 1999–2000, Problems and Solutions from Around the World

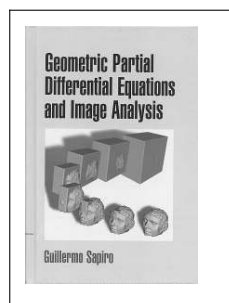
*The Mathematical Association of America, 2003*

282 p. 290 p., prijs \$ 28,50 per deel

ISBN 0-88385-642-5, 0-88385-805-3

Deze boeken bevatten opgaven van wiskunde-olympiades van over de hele wereld uit het jaar in de titel. De samenstellers zijn als trainers betrokken bij het Amerikaanse wiskunde-olympiade programma. De boeken zijn dan ook vooral bedoeld ter voorbereiding op het deelnemen aan een olympiade. Ieder jaar verschijnt er een nieuw deeltje in de serie. Elk boekje valt uiteen in twee stukken, namelijk de oplossingen van de opgaven die in het vorige deel verschenen en de opgaven uit het nieuwe jaar. De opgaven worden verder verdeeld in twee categorieën: afkomstig van nationale olympiades en afkomstig van regionale olympiades. (Regionaal betekent hier meestal: een paar landen.) Er is gekozen voor ongeveer twintig nationale olympiades. Over het algemeen gaat het hier om de moeilijkste olympiades, de Nederlandse wiskunde olympiade ontbreekt dan ook. Onder de regionale olympiades in de boeken zijn de meest bekende: *Asian Pacific Mathematical Olympiad* en *Balkan Mathematical Olympiad*. Je zou kunnen zeggen dat vrijwel alle problemen van belangrijke wiskunde olympiades hier zijn opgenomen met een belangrijke uitzondering: de internationale olympiade ontbreekt. De boeken zijn zeer aan te raden aan de mensen die trainen voor deelname aan de internationale olympiade. Verder zijn ze natuurlijk aan te bevelen aan iedereen die van problemen van het olympiade type houdt. Er moet wel opgemerkt worden dat de boeken echt alleen maar problemen en oplossingen bevatten, en geen aandacht besteden aan bijvoorbeeld

strategieën. Wel wordt er achterin het boekje een (zeer beknopte) samenvatting gegeven van stellingen die nodig zijn bij het oplossen van veel olympiade problemen. Het is moeilijk de opgaven te typeren, door hun veelzijdigheid. Voor wie er een idee van wil krijgen is er op het web van alles te vinden. Op de website van de Amerikaanse wiskunde olympiade ([www.unl.edu/amc](http://www.unl.edu/amc)) kan men bijvoorbeeld de delen 96/97 en 97/98 uit de serie als ps-files vinden. *J. Tuitman*



G. Sapiro

### Geometric Partial Differential Equations and Image Analysis

*Cambridge: Cambridge University Press,*

2001,

440 p., prijs £45,-

ISBN 0-521-79075-1

Dit boek geeft een inleiding in het gebruik van partiële differentiaalvergelijkingen in beeldbewerking en computer vision. Deze aanpak wordt gekenmerkt door een sterk wiskundige benadering van oude en nieuwe problemen in het vakgebied. Eén van de centrale begrippen is de notie van 'scale space', dat wil zeggen, een multischaalrepresentatie van beelden. Een dergelijke representatie kan worden gegenereerd door herhaaldelijk filteren van het beeld. Dit is equivalent met een evolutie van het oorspronkelijke beeld die wordt beschreven door een partiële differentiaalvergelijking. In het eenvoudigste geval van Gaussisch filteren is de bijbehorende vergelijking de warmtevergelijking, die een isotrope diffusie beschrijft. Ook andere, niet-lineaire, filters vallen in het kader, waarbij de partiële differentiaalvergelijkingen niet-lineair zijn. Men spreekt hierbij van 'geometrische' diffusie.

Naast vergelijkingen die een directe verandering van de grijswaarden van beelden bewerkstelligen, zijn er de zogenaamde evolutievergelijkingen die de deformatie van krommen en oppervlakken beschrijven, waarbij de snelheid van de deformatie in het algemeen een functie van de lokale kromming is. De basisgedachte is om de zich ontwikkelende krommen of oppervlakken voor te stellen als de niveauperzamelingen ('level sets') van een hoger-dimensionaal hyperoppervlak. Deze techniek lost een aantal topologische problemen op die met eerdere methoden moeilijk aan te pakken waren, en levert tevens een nauwkeurige numerieke implementatie. Men kan verschillende typen evolutievergelijkingen afleiden, afhankelijk van de gewenste invariantie-eigenschappen (Euclidisch, affien, enzovoort).

Het boek bevat een uitgebreide wiskundige inleiding in de benodigde differentiaalmeetkunde, met name de theorie van differentiaalvarianten. Een aantal toepassingen wordt besproken, zoals beeldsegmentatie, vormanalyse, beeldverbetering, en tracking.

Enkele punten van kritiek zijn te noemen. De nadruk op de wiskunde is dermate groot dat de bespreking van de toepassing van de theorie er wat bekaaid afkomt. Veel figuren die ter illustratie zijn opgenomen worden nauwelijks besproken, zodat conclusies over het succes van de betreffende methode geheel aan de lezer worden overgelaten. Erg storend is dat op veel plaatsen in de tekst naar kleuren in figuren wordt verwezen, hoewel deze in