



Facultad
de
Ciencias

Triangulaciones, subdivisiones, y politopo secundario.

Triangulations, subdivisions, and secondary polytope.

Trabajo Fin de Grado para acceder al
Grado en Matemáticas

Autor: Isabel Palacio Solórzano
Director: Francisco Santos Leal

Septiembre 2021

Resumen

En este trabajo se pretende estudiar las triangulaciones y subdivisiones desde su punto de vista combinatorio, es decir, trabajar con matroides orientadas de politopos y ver la relación con triangulaciones en general y con las llamadas triangulaciones regulares en particular. El concepto de triangulación regular motiva el estudio del abanico secundario, que es el *espacio de configuración* de todas las subdivisiones regulares y permite entender su estructura. Es de destacar también el *Teorema de Gelfand, Kapranov y Zelevinsky*, que demuestra la relación entre el abanico secundario de un politopo y el abanico normal de su politopo secundario.

En el último capítulo de la memoria se introducen los zonotopos y sus subdivisiones zonotopales, describiendo la construcción de un abanico secundario y un zonotopo secundario con propiedades muy parecidas a las del caso de una configuración de puntos.

Palabras clave: Triangulaciones, matroides orientadas, politopo secundario, zonotopos, teselaciones zonotopales.

Abstract

In this memory we intend to study triangulations and subdivisions from their combinatorial point of view, that is to say, to work with oriented matroids of polytopes and the relation with triangulations in general and with the so-called regular triangulations in particular. The concept of regular triangulation motivates the study of the secondary fan, which is the *configuration space* of all regular subdivisions and allows us to understand their structure. It is also worth mentioning the *Gelfand, Kapranov, and Zelevinsky Theorem*, which proves the relation between the secondary fan of a polytope and the normal fan of its secondary polytope.

The last chapter of the memory introduces zonotopes and their zonotopal subdivisions, describing the construction of a secondary fan and a secondary zonotope with very similar properties to those of a point configuration.

Key words: Triangulations, oriented matroids, secondary polytope, zonotopes, zonotopal tilings.

Índice general

Introducción	1
1. Teoría de Politopos	3
1.1. Politopos	3
1.1.1. Abanicos	9
1.2. Triangulaciones y subdivisiones	11
1.2.1. Subdivisiones regulares	14
1.2.2. Configuraciones de Vectores y sus subdivisiones	16
1.3. Matroides Orientadas	19
1.3.1. Matroide de un conjunto de vectores	19
1.3.2. Arreglos de Hiperplanos y sus Matroides Orientadas	24
1.3.3. Transformada de Gale	26
2. Politopo Secundario y Teorema de Gelfand, Kapranov y Zelevinsky	27
2.1. Abanico secundario	27
2.2. Politopo Secundario	30
2.3. Teorema de Gelfand, Kalpranov y Zelenvinsky	35
3. Zonotopos y Teselaciones Zonotopales	38
3.1. Zonotopos. Suma de Minkowski	38
3.2. Teselaciones Zonotopales	41
3.2.1. Teselación regular o coherente	41
3.2.2. Subdivisiones zonotopales y arreglos de pseudohiperplanos. Teorema de Bohne-Dress	45
Bibliografía	49

Introducción

Cuando se nos plantea un problema complicado, tendemos a descomponer el problema en fragmentos más pequeños para que su resolución sea más sencilla, ya que se manejan fragmentos de menor complejidad.

Los politopos son objetos matemáticos de enorme importancia. Muchos problemas y aplicaciones en distintas áreas como la combinatoria, la optimización o la geometría algebraica pueden ser modelados naturalmente mediante el uso de politopos. Para facilitar la resolución de los problemas relacionados con politopos, se trabaja con triangulaciones o, más generalmente, subdivisiones poliédricas, de ellos.

El objetivo de esta memoria es ir introduciendo los conceptos básicos de la teoría de politopos y estudiar las triangulaciones y subdivisiones con el fin de entender el Teorema de Gelfand, Kapranov y Zelevinsky, así como enunciar el Teorema de Bohne-Dress.

En el Capítulo 1 se establecen las bases y los conceptos básicos de la teoría de politopos (Sección 1.1), incluyendo el estudio de su combinatoria y de sus abanicos normales. Seguidamente (Sección 1.2) se introducen las subdivisiones poliédricas, desde un punto de vista muy combinatorio. De hecho, en vez de hablar de subdivisiones de un politopo hablamos de subdivisiones de un conjunto (o configuración) de puntos $A = \{p_1, \dots, p_n\}$, que de manera geométrica se podrían definir como los complejos poliédricos que cubren $\text{conv}(A)$ usando como vértices solo los puntos de A . Una propiedad interesante de las subdivisiones es que forman un poset (conjunto parcialmente ordenado) con la relación de refinamiento, y los elementos minimales del poset son las triangulaciones.

Para enfatizar la combinatoria, que será útil en el resto de la memoria, las celdas de la subdivisión no se definen como politopos sino como subconjuntos del conjunto finito A , y además se las denota no por sus puntos sino por las etiquetas de los mismos, es decir, por subconjuntos del conjunto $\{1, \dots, n\}$. En la Sección 1.3 se muestra que todo este formalismo de subdivisiones de un conjunto de puntos se puede extender a un conjunto de vectores de \mathbb{R}^d , y que el estudio de configuraciones de puntos (o sea, el caso afín) es equivalente al caso *acíclico* del caso vectorial.

El capítulo termina con una breve introducción a la teoría de matroides orientadas, que son abstracciones combinatorias de los conceptos de dependencias lineales o afines entre un conjunto finito de elementos de un espacio vectorial o afín sobre los reales. En particular, la matroide orientada de un conjunto de puntos A contiene toda la información sobre el complejo de caras de $\text{conv}(A)$ y sobre el poset de subdivisiones de A .

El segundo capítulo se centra en la construcción del politopo secundario a partir de los vectores *GKZ* de las subdivisiones de A para llegar a enunciar el *Teorema de Gelfand, Kapranov y Zelevinsky*, que nos dice que para cada configuración A con n puntos y dimensión d existe un politopo $\Sigma(A)$, el *politopo secundario de A* , cuyo poset de caras es isomorfo a un subposet del poset de subdivisiones de A , el formado por las llamadas *subdivisiones regulares*. Otra manera de entender $\Sigma(A)$ es mediante su abanico normal, el llamado *abanico secundario de A* , que resulta ser equivalente al complejo de cámaras de la configuración dual, o *transformada de Gale*, de A .

Por último, en el Capítulo 3 se introduce la noción de zonotopo, y de subdivisiones zonotopales, haciendo un paralelismo entre esta teoría y la teoría de subdivisiones de configuraciones de puntos. En particular, se describe la existencia de un abanico secundario y un politopo secundario para este caso. En este capítulo no se incluyen demostraciones sino que se hace una descripción un poco más informal, en parte por falta de espacio y en parte por las dificultades técnicas que conllevaría.

Una propiedad fundamental de los zonotopos es que son objetos duales a los *arreglos de hiperplanos lineales* y que de hecho, toda subdivisión zonotopal de un zonotopo es dual de un arreglo de *pseudohiperplanos afines*. Esta correspondencia nos da una relación mucho más estrecha con las matroides orientadas que la que hay en el caso de subdivisiones de configuraciones de puntos. De hecho, terminamos la memoria enunciando el Teorema de Bohné-Dress que describe una biyección entre las subdivisiones zonotopales de un zonotopo $Z(V)$ y los “levantamientos” (en el sentido de las matroides orientadas) de la matroide orientada $M(V)$ asociada a él.

La gran parte de los resultados que aparecen en esta memoria, junto con sus pruebas completas, se encuentran también en el libro de politopos de Ziegler [1] o en el de triangulaciones de De Loera, Rambau y Santos [6]. También se han usado frecuentemente las notas de un curso sobre triangulaciones que impartió Francisco Santos en 2016, y que están a punto de ser publicadas como capítulo de un libro [2]. Otras fuentes que se han usado se mencionan en la bibliografía.

Los ejemplos gráficos han sido creados por la autora utilizando el programa *Geogebra 5*, a excepción de aquellos en los que se cita la fuente.

Capítulo 1

Teoría de Politopos

Este primer capítulo tiene como objetivo la presentación de los principales conceptos, propiedades y resultados que serán necesarios de la teoría de politopos para entender el desarrollo de este trabajo. En dimensión 2 un politopo es lo que se conoce comúnmente como polígono, si lo llevamos a dimensión 3 sería un poliedro. Para más dimensiones simplemente se emplea el término de politopo.

La referencia básica para politopos que se va a seguir es el libro de Günter Ziegler [1] así como las notas sobre triangulaciones de Santos, Blanco y Castillo [2] y el libro de De Loera, Rambau y Santos [6].

1.1. Politopos

De ahora en adelante, se considera $A = \{p_1, \dots, p_n\}$ un conjunto finito de puntos de \mathbb{R}^d y $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ un conjunto de escalares. Para facilitar la lectura a los puntos del conjunto $A = \{p_1, \dots, p_n\}$ los consideramos etiquetados por el conjunto $\{1, \dots, n\}$, y nos referiremos a los elementos generalmente por sus etiquetas.

Definición 1.1.1. Una **combinación afín** de puntos de A es una combinación lineal $\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \dots + \lambda_n p_n$ que cumple que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$.

Ejemplo 1.1.2. Supongamos que $P_1 = (2, 2)$, $P_2 = (4, 1)$, definimos $P_3 = \frac{3}{2}A - \frac{1}{2}B$, es claro que P_3 cumple la definición anterior y es una combinación afín de P_1, P_2 . La Figura 1.1 muestra gráficamente el ejemplo. Como se puede observar, el punto P_3 está sobre la recta que definen P_1 y P_2 . En concreto, cualquier punto de la recta AB puede definirse como combinación afín de P_1 y P_2 . En particular, si $P_3 = \lambda P_1 + (1 - \lambda)P_2$ con $\lambda \in [0, 1]$, el punto P_3 se encuentra en el segmento $P_1 P_2$.

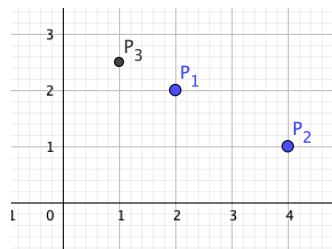


Figura 1.1: Combinación Afín

Definición 1.1.3. Una **dependencia afín** entre los puntos de A es una expresión de la forma: $\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \dots + \lambda_n p_n = 0$, donde $\lambda_i \in \mathbb{R}$ y $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$.

Se dice que los puntos de A son **afinmente independientes** si su única dependencia afín es la trivial, donde $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$. De lo contrario, se dice que los puntos de A son **afinmente dependientes**.

Ejemplo 1.1.4. Tres puntos colineales del plano son afinmente dependientes, ya que uno de los puntos se puede definir como combinación afín de los otros dos. Por el contrario, tres puntos no alineados son afinmente independientes, ya que su única dependencia afín es la trivial.

Definición 1.1.5. Una **combinación convexa** de A es cualquier punto de la forma $\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \dots + \lambda_n p_n$ donde $p_i \in A$, $\lambda_i \in \mathbb{R}^d$, $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, $\lambda_i \geq 0$, es decir, una combinación afín con coeficientes no negativos.

Si A tiene un único punto, el conjunto de combinaciones convexas se reduce a ese único punto. Si A tiene dos puntos, x, y , un punto z es combinación convexa si y solo si $z \in [x, y]$, esto es, si z pertenece al segmento xy . En el caso en el que A esté compuesto por 3 puntos afinmente independientes, el conjunto de combinaciones convexas es el triángulo, incluyendo los bordes, definido por los tres puntos, como se puede ver en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.1.6. Supongamos que $P_1 = (1, 1)$, $P_2 = (2, 4)$, $P_3 = (4, 2)$, definimos $P_4 = 0.5P_1 + 0.3P_2 + 0.2P_3$, es claro que P_4 es una combinación convexa de los puntos P_1, P_2, P_3 . La Figura 1.2 muestra gráficamente esta dependencia del punto P_4 sobre el resto.

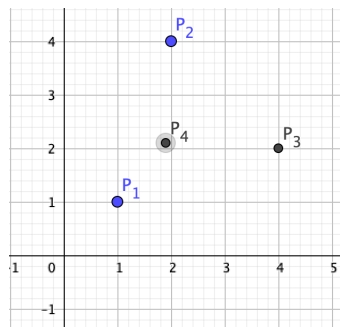
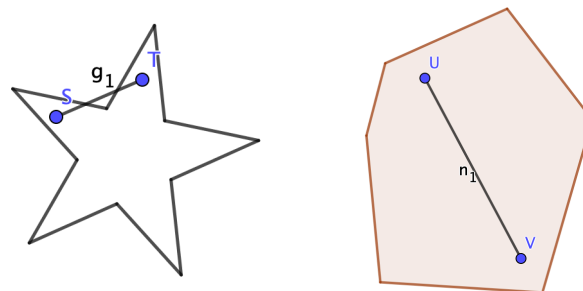


Figura 1.2: Combinación Convexa

Recuérdese que un **conjunto convexo** es aquel subconjunto tal que el segmento que une dos cualesquiera de sus puntos está totalmente contenido en dicho subconjunto. Dados dos puntos $p, q \in \mathbb{R}^d$, la **recta** que definen es $\{(1-t)p + tq, t \in \mathbb{R}\}$ y el **segmento** $\{(1-t)p + tq, t \in [0, 1]\}$.

Un ejemplo gráfico se muestra en la Figura 1.3 donde se puede ver como en la imagen de la izquierda, (a), el segmento g_1 no está totalmente contenido en el conjunto mientras que en el dibujo de la derecha, (b), todo segmento está totalmente contenido, en particular, n_1 .

Este concepto es bastante intuitivo: la idea es que un conjunto no es convexo si se pueden unir dos puntos del conjunto de forma que la línea que los une no esté totalmente contenida en el conjunto.



(a) Conjunto no convexo

(b) Conjunto convexo

Figura 1.3: Ejemplos convexidad en politopos

Es evidente que la intersección de conjuntos convexas es nuevamente un conjunto convexo. De igual manera, el espacio \mathbb{R}^d también es un conjunto convexo.

En el siguiente lema se enuncia una equivalencia entre las combinaciones convexas y los conjuntos convexos. La demostración se incluye después de la Figura 1.4.

Lema 1.1.7. *El conjunto de puntos que son combinación convexa de un conjunto A coincide con la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen a A .*

Definición 1.1.8. Al conjunto del lema anterior se le denomina **envolvente convexa** de A , es el conjunto convexo más pequeño que contiene a A y se denota como $\text{conv}(A)$.

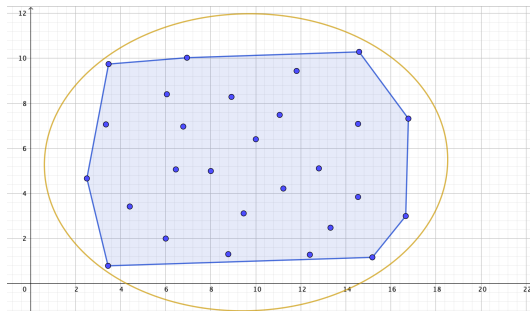


Figura 1.4: Envolverte Convexa de un conjunto de puntos

Una representación gráfica se puede ver en la Figura 1.4, donde la curva amarilla es un conjunto convexo que contiene a todos los puntos, pero el más pequeño es el representado en azul, el cual corresponde con su envolvente convexa. Una idea intuitiva es pensar en la envolvente como la posición que tomaría una goma tensa que colocásemos de forma que contenga a todos los puntos del conjunto.

La dimensión de una configuración de puntos está definida por la dimensión de su envolvente convexa.

Usando la Definición 1.1.8 se puede deducir lo siguiente:

- $A \subseteq \text{conv}(A)$ y la igualdad solo se da en el caso de que A sea un conjunto convexo.
- Si $A \subset B \implies \text{conv}(A) \subset \text{conv}(B)$

A continuación, se va a demostrar el Lema 1.1.7.

Demostración del Lema 1.1.7. Se demostrará por doble contenido.

Sea \mathcal{S} el conjunto de puntos que son combinación convexa de A y \mathcal{T} la intersección de todos los conjuntos convexos en \mathbb{R}^d que contienen a A .

En una dirección ($\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$): \mathcal{S} es un conjunto convexo, porque los puntos de \mathcal{S} son combinaciones convexas de puntos de A y una combinación convexa de combinaciones convexas de puntos de A también es una combinación convexa de puntos de A ; esto puede sonar un poco engorroso, vamos a desarrollarlo:

Supongamos que tenemos una serie de puntos q_1, \dots, q_n , donde cada q_i va a estar expresado como combinación convexa, es decir, se puede escribir q_i como $q_i = \lambda_{1,i}p_1 + \dots + \lambda_{m,i}p_m$, donde p_i son puntos de A . Si ahora hacemos una combinación convexa de nuestros puntos q_i : $\sum_{j \in J} \mu_j q_j$, con $\sum_{j \in J} \mu_j = 1$, como cada q_i es combinación convexa de los puntos de A , obtenemos una combinación convexa de los puntos de A sacando factor común:

$$\sum_{j \in J} \mu_j q_j = \sum_{j \in J} \mu_j \sum_{i=1}^m \lambda_{j,i} p_i = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j \in J} \mu_j \lambda_{j,i} \right) p_i.$$

Los coeficientes $\sum_{j \in J} \mu_j \lambda_{j,i}$ de esa combinación son mayores o iguales que cero y su suma es uno porque:

$$\sum_{i=1}^m \left(\sum_{j \in J} \mu_j \lambda_{j,i} \right) = \sum_{j \in J} \mu_j \sum_{i=1}^m \lambda_{j,i} = \sum_{j \in J} \mu_j = 1.$$

Continuando con la demostración: como \mathcal{S} es convexo y contiene a A contiene a la intersección de todos los convexos que contienen a A ; es decir, $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$.

En el otro sentido, ($\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$), sea B un conjunto convexo en \mathbb{R}^d tal que $A \subset B$. Como B es un convexo que contiene a A , B contendrá por tanto a todas las combinaciones convexas de A y lo que implica que contiene a \mathcal{S} . Como \mathcal{T} es la intersección de ciertos conjuntos B y cada B contiene a \mathcal{S} , \mathcal{T} contiene a \mathcal{S} . Queda probado que ambos conjuntos son iguales. \square

Siguiendo con la teoría de polítopos, es buen momento para definir el concepto central de la memoria:

Definición 1.1.9. Un **politopo convexo** o simplemente **politopo** es la envolvente convexa de un conjunto finito de puntos en \mathbb{R}^d .

Ejemplo 1.1.10. Los politopos de dimensión 0 son puntos, los de dimensión 1 son segmentos, los de dimensión 2 polígonos, los de 3 dimensiones son poliedros.

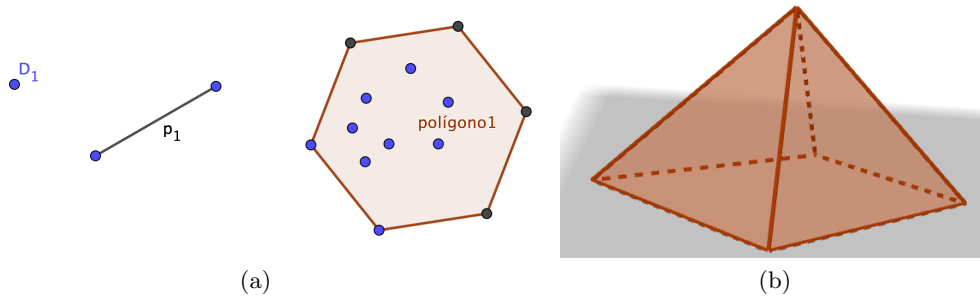


Figura 1.5: Politopos de 0, 1, 2 y 3 dimensiones

Ya hemos definido lo que es un politopo vamos a definir sus elementos. De ahora en adelante se considera $P \subseteq \mathbb{R}^d$ un politopo convexo.

Definición 1.1.11. Se define una **cara de P** como un conjunto de la forma:

$$F = P \cap \{x \in \mathbb{R}^d : cx = c_0\}$$

donde $cx \leq c_0$ es una desigualdad que satisfacen todos los $x \in P$.

Las caras de un politopo son las intersecciones con los hiperplanos donde el politopo se encuentra totalmente contenido en uno de los semiespacios determinado por cada hiperplano. Como se muestra en la Figura 1.6, los hiperplanos c_1 y d_1 , rectas en este caso, definen las caras t_2 , E_2 , que corresponden con una arista y un vértice respectivamente.

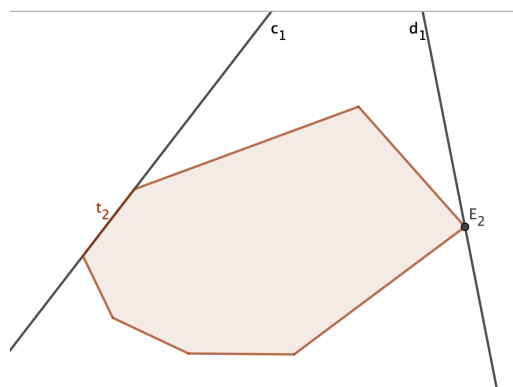


Figura 1.6: Hiperplanos en un politopo

De igual forma, sea $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, definimos **cara de P** inducida por f al conjunto:

$$P^f := \{x \in P : f(x) \geq f(y) \quad \forall y \in P\}$$

Por ejemplo, el conjunto vacío se considera una cara de $\dim = -1$ definido por la desigualdad $0x \leq 1$, las caras de $\dim = 0$ son **vértices**, las caras de $\dim = 1$ son **aristas** y una **faceta** es una cara de dimensión igual a $\dim P - 1$, es decir, es una cara maximal propia. Toda cara de un politopo es a su vez un politopo y las caras de una cara de P son también caras de P . Asimismo, el propio politopo P también se considera cara, definida por la inecuación $0x \leq 0$.

Ejemplo 1.1.12. Sea P el polígono que se muestra en la Figura 1.7, vamos a identificar sus caras: P posee el conjunto vacío como cara de $\dim = -1$, las caras de $\dim = 0$ son los vértices, en este caso P_1, P_2, P_3, P_4 y las caras de $\dim = 1$ y por tanto, facetas, son las aristas, que en este ejemplo son a, b, c, d . Asimismo, el propio polígono P también es una cara, en este caso, de dimensión 2.

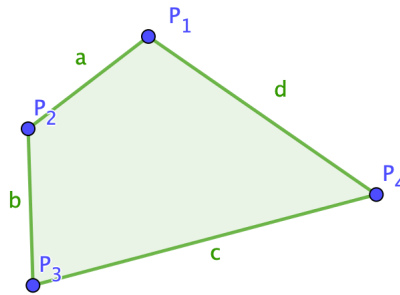


Figura 1.7: Caras de un polígono P

A continuación, se enunciará el teorema conocido como *Teorema de Minkowski-Weyl*. La demostración completa puede encontrarse en el Capítulo 1 del libro de Ziegler [1], al que se hace referencia como el *Main Theorem*.

Teorema 1.1.13. *Todo politopo está acotado y se corresponde con el conjunto de soluciones de un conjunto finito de desigualdades:*

$$P = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_d \leq b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_d \leq b_m \end{array} \right\}$$

para ciertos $(a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $(b_i) \in \mathbb{R}^m$. El recíproco también es cierto.

El *Teorema de Minkowski-Weyl* establece que un politopo también se puede describir por un sistema finito de desigualdades lineales.

La idea de que un politopo está acotado resulta trivial, puesto que el politopo se puede definir a partir de una configuración finita de puntos, es decir, A es un conjunto acotado, luego $\exists r > 0$ tal que $A \subset B(0, r)$. Y la bola $B(0, r)$ está acotada por definición. Si ahora se utilizan las propiedades de la definición de la envolvente convexa se tiene que $\text{conv}(A) \subset \text{conv}(B(0, r)) = B(0, r)$, por tanto la envolvente convexa de A está acotada y el politopo está acotado.

Este teorema es muy empleado en Programación Lineal y resulta muy interesante puesto que desde el punto de vista algorítmico la información proporcionada es distinta, es decir, no es lo mismo trabajar con los vértices de un politopo que con las desigualdades. Por ejemplo, supongamos que tenemos un cubo en \mathbb{R}^d , para definirlo, necesitaríamos o bien $2d$ desigualdades o 2^d vértices. No es posible pasar en tiempo polinómico de uno a otro. Es decir, se tendría que definir de antemano cuál de las dos opciones resulta más beneficiosa.

En conclusión, el *Teorema de Minkowski-Weyl* proporciona dos caracterizaciones independientes de politopos.

Ejemplo 1.1.14. Sean a, b, c, d las siguientes desigualdades:

$$a : 3x + 2y \geq 1$$

$$b : -x + 2y \geq \frac{1}{2}$$

$$c : 2x - y \leq 2$$

$$d : y \leq 3$$

El conjunto de soluciones de estas desigualdades forma un politopo. La Figura 1.6 representa gráficamente en negro el politopo acotado por a, b, c, d . En azul oscuro la desigualdad a , en amarillo la desigualdad b , en rojo c y en azul claro d . Cada una de las desigualdades define una faceta del politopo. En particular, al ser un poltopo de dimensión 2, las desigualdades definen además facetas.

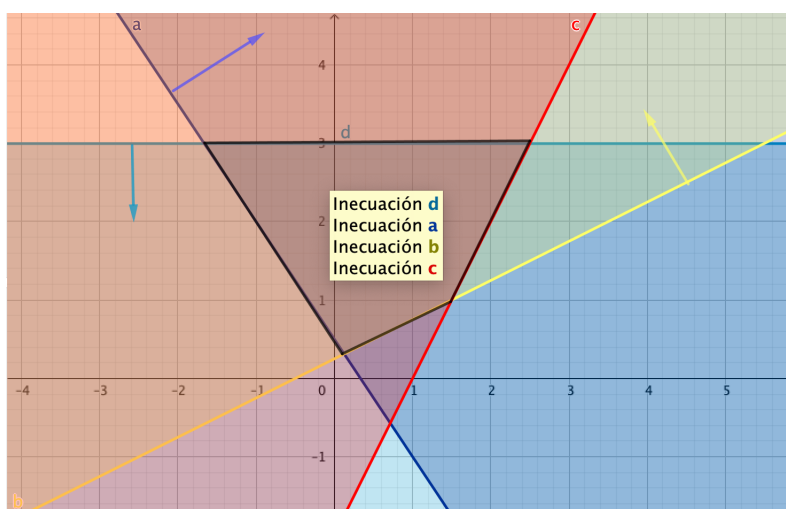


Figura 1.8: Definición de un politopo a partir de desigualdades

Definición 1.1.15. Un **poset** (S, \leq) , *partially ordered set* en inglés, es un conjunto parcialmente ordenado, es decir, un conjunto finito S dotado de una relación “ \leq ” que es reflexiva, transitiva y antisimétrica. Esto es, dados $x, y, z \in S$:

1. $x \leq x$ (*reflexiva*)
2. $x \leq y$ e $y \leq x \implies x = y$ (*antisimétrica*)
3. $x \leq y$ e $y \leq z \implies x \leq z$ (*transitiva*)

Las caras de un politopo son un *poset* con la relación: “ \subseteq ”, *estar contenido en*. En particular, las caras de un politopo además de formar un poset, forman lo que se conoce como un *retículo*, término que se definirá después del ejemplo. En esta memoria los posets que van a aparecer son todos finitos.

Ejemplo 1.1.16. Supongamos que tenemos un triángulo de vértices P_1, P_2, P_3 , aristas P_1P_2, P_1P_3 y P_2P_3 . En la siguiente Figura 1.9b se muestra el poset ordenado por las caras de mayor a menor dimensión, donde el triángulo completo se denota como $\{P_1, P_2, P_3\}$ y está en la parte superior del poset, en la segunda fila se encuentran las aristas o facetas en este caso, en la tercera fila los vértices y por último el vacío.

Definición 1.1.17. Un poset (S, \leq) es un **retículo** si es acotado, es decir, si tiene elementos maximal y minimal únicos, y si dados dos elementos $x, y \in S$, existe un único supremo de x e y en S y un único ínfimo de x e y en S .

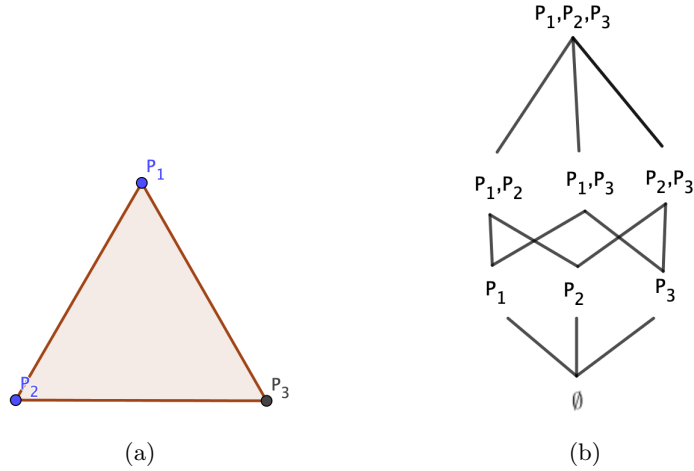


Figura 1.9: Poset de las caras de un triángulo

1.1.1. Abanicos

Antes de definir el concepto de cono y abanico es importante aclarar la idea de funcional.

La definición de funcional lineal está clara, es una función de la forma cx donde c es un vector, es un producto escalar con un vector. Se identifica al funcional con ese vector c . Ahora vamos a definir el concepto de funcional afín:

Definición 1.1.18. Un **funcional afín** es una función de la forma $cx - c_0$, donde c es un vector y c_0 es una constante. El espacio de funcionales afines se define sobre el dual de \mathbb{R}^d usualmente denotado como $(\mathbb{R}^d)^*$.

A partir de esta sección y en el resto de la memoria se identificará a \mathbb{R}^d y a su dual $(\mathbb{R}^d)^*$ de la manera estándar, \mathbb{R}^d . Identificando cada funcional c con el vector de imágenes por c de la base canónica. En las fórmulas donde sea necesario, para evitar confusiones, los elementos de $(\mathbb{R}^d)^*$ serán vectores fila mientras que los de \mathbb{R}^d aparecerán como vectores columna.

Definición 1.1.19. Un **cono** es un conjunto no vacío de vectores $C \in \mathbb{R}^d$ tal que todo conjunto finito de vectores también contiene a todas sus combinaciones lineales con coeficientes no negativos. En particular el vector $\mathbf{0}$ está contenido en todo cono.

Para un conjunto cualquiera $Y \subseteq \mathbb{R}^d$, se define su envolvente cónica, $cone(Y)$ como la intersección de todos los conos en \mathbb{R}^d que contienen a Y .

Es decir, dado $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\} \subseteq \mathbb{R}^d$ un conjunto finito se tiene que:

$$cone(Y) := \{t_1 y_1 + \dots + t_n y_n : t_i \geq 0\} = \{Yt, t \geq 0\}$$

Donde en la última expresión se entiende Y como una matriz cuyas columnas son y_1, \dots, y_n , y $t = (t_1, \dots, t_n)$ es un vector columna.

De forma análoga que con los politopos, la envolvente cónica de Y coincide con el conjunto de combinaciones cónicas de elementos de Y . La demostración es muy similar a la realizada para el Lema 1.1.7.

Ejemplo 1.1.20. Supongamos que $Y = \{\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}, \vec{AE}, \vec{AF}\}$ su envolvente cónica sería la que se muestra en la Figura 1.10.

La dimensión de un cono está definida por la dimensión de su envolvente lineal, es decir, el subespacio lineal que define la envolvente cónica. En el ejemplo anterior, la dimensión sería 3.

Definición 1.1.21. Se definen las **caras de un cono** C como los conjuntos que satisfacen:

$$C \cap \{c \in \mathbb{R}^d : cx = 0\}$$

donde $cx \leq 0$ es una desigualdad lineal que se satisface en todo C .

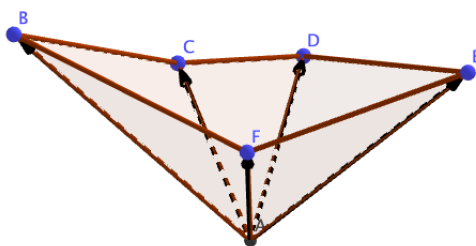


Figura 1.10: Cono formado por un conjunto de vectores

La definición de caras de un cono es la misma que para polítopos. Las únicas diferencias resultan en que en vez de utilizar desigualdades afines se utilizan desigualdades lineales, es decir, el término independiente de las desigualdades siempre va a ser 0. Asimismo, se puede pensar en un cono como ejemplo de un polítopo “no acotado”.

Si F es una cara de C , se denota como $F \leq C$, en concreto si $F \neq C$, al igual que con las configuraciones de puntos, se dice que F es una cara propia de C . Obsérvese que C siempre es una cara de C , obtenida por el funcional cero. En cambio, cuando se habla de conos el vacío no se suele considerar una cara, lo cual es consistente con que no hay ningún funcional *lineal* que sea estrictamente positivo en todo el cono, porque el origen forma parte de cualquier cono.

La dimensión de una cara de un cono está definida por la dimensión de su envolvente lineal.

Se puede enunciar de igual forma el Teorema de *Weyl-Minkowski* que veíamos para polítopos en su equivalente para conos:

Teorema 1.1.22 (Weyl-Minkowski para conos. Teorema 1.3 de [1]). *Un cono $C \subseteq \mathbb{R}^d$ es la envolvente cónica de un conjunto finito de vectores para cierto $Y \subseteq \mathbb{R}^{d \times n}$ si y solo si es la intersección finita de semiespacios lineales cerrados.*

No se va a demostrar este teorema aunque la demostración sería similar a su equivalente para polítopos. Si se desea ver la demostración, ésta aparece en el libro de Ziegler [1] en la Sección 1.3.

Definición 1.1.23. Un **abanico** en \mathbb{R}^d es una familia $\mathcal{F} = \{C_1, C_2, \dots, C_N\}$ de conos poliédricos no vacíos que cumplen que:

- i) Toda cara no vacía de un cono de \mathcal{F} es en sí misma un cono en \mathcal{F} .
- ii) La intersección de dos conos cualesquiera en \mathcal{F} es una cara de ambos.

Un abanico es **completo** si la unión de todos los conos genera el espacio sobre el que está definido: $\bigcup \mathcal{F} := C_1 \cup \dots \cup C_N$ de \mathcal{F} es \mathbb{R}^d , es decir, si $\bigcup_{i=1}^N C_i = \mathbb{R}^d$

Definición 1.1.24. El **abanico normal** de un polítopo P , es la descomposición en \mathbb{R}^d en funcionales que se maximizan en la misma cara de P .

Dicho de otra forma, para formar el abanico normal simplemente hay que coger los conos de los funcionales lineales que son maximales en una cara fija de P .

Ejemplo 1.1.25. Supongamos que tenemos la siguiente configuración de puntos representada en la Figura 1.11a, calculamos su envolvente convexa tal y como aparece en la Figura 1.11b. Calculamos los funcionales lineales que son maximales en cada cara, que no es más que calcular la recta perpendicular a cada arista que pasa por los vértices. El cono resultante es un elemento del abanico normal, ejemplificado en la Figura 1.12b, que en este caso es completo ya que llena todo el plano \mathbb{R}^2 .

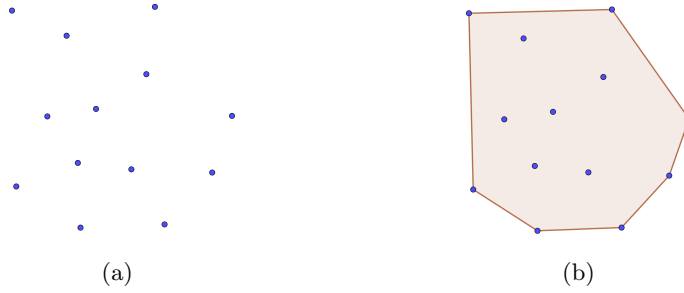


Figura 1.11: Configuración de puntos y su envolvente convexa

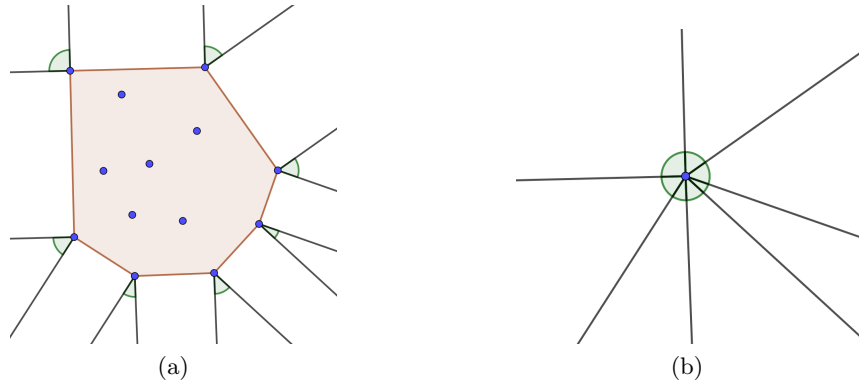


Figura 1.12: Abanico Normal

1.2. Triangulaciones y subdivisiones

Ahora que ya se conocen las definiciones de politopos, caras y abanicos vamos a definir las subdivisiones de politopos.

Antes de nada, cabe destacar un politopo con propiedades interesantes: el conocido como *símplice*, aquel que tiene el mínimo número de vértices:

Definición 1.2.1. Un **símplice** k -dimensional es un politopo de dimensión k con exactamente $k+1$ vértices. Equivalentemente, es la envolvente convexa de un conjunto de $k+1$ puntos afínmente independientes.

Ejemplos de símplices de dimensión 0, 1, 2, 3 serían los puntos, segmentos, triángulos y tetraedros respectivamente.

Además, el poset de caras de un símplice es un *poset booleano*. Tal y como se define en [8] y [9]: Un poset booleano o una álgebra booleana es una estructura matemática definida por todos los subconjuntos de un conjunto dado. Hay un orden parcial definido en los subconjuntos bajo la operación de inclusión. De igual forma, un álgebra booleana también es un retículo.

El poset booleano es el retículo de caras de un símplice. Tiene 2^n elementos. Es isomorfo al conjunto de subconjuntos del conjunto de vértices del símplice. Hay una biyección entre el poset de caras y el subconjunto de vértices del símplice.

Definición 1.2.2. Una **subdivisión poliédrica** (o, en esta memoria, una subdivisión “a secas”) de A es una colección finita $S = \{S_1, S_2, \dots, S_m\}$ de subconjuntos de A tal que :

- a) Para todo $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $conv(S_i)$ es un politopo de dimensión d .
- b) $conv(A) = \bigcup_i conv(S_i)$
- c) Dados $i \neq j$, se cumple que $S_i \cap S_j$ es una cara común propia de ambos S_i y S_j y $conv(S_i) \cap conv(S_j) = conv(S_i \cap S_j)$

La subdivisión trivial es la del propio politopo, es decir, $S = \{A\}$, con un solo elemento.

Una subdivisión donde sus elementos son símlices se llama *triangulación*.

Cabe destacar que una subdivisión es un conjunto de subconjuntos de A , no un conjunto de politopos que intersecan de forma correcta. Esta idea es relevante y se puede observar este matiz en el Ejemplo 1.2.6, donde se distingue el punto de vista geométrico y el combinatorio.

También resulta interesante definir el concepto de **celda**. Los elementos de S se llaman las **celdas** de S . A veces se las llama celdas maximales porque se consideran también celdas todas las caras de elementos de S .

Ejemplo 1.2.3. La Figura 1.13 muestra gráficamente dos posibles triangulaciones de un pentágono regular. Es fácil comprobar que se satisfacen todas las condiciones de la Definición 1.2.2.

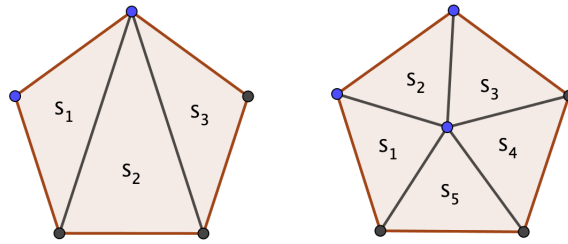


Figura 1.13: Triangulaciones de un pentágono

Ejemplo 1.2.4. En cambio, la siguiente Figura 1.14 ilustra dos ejemplos de no triangulaciones. La imagen de la izquierda (a) formada por los triángulos que aparecen en azul, verde y rojo. Es evidente que no es una triangulación de la configuración de puntos azules ya que la unión no es igual a la envolvente convexa, dibujada en marrón. En cuanto a la imagen de la derecha, (b), vemos que no es una triangulación debido a que los triángulos rojo y morado no se intersecan de forma correcta:

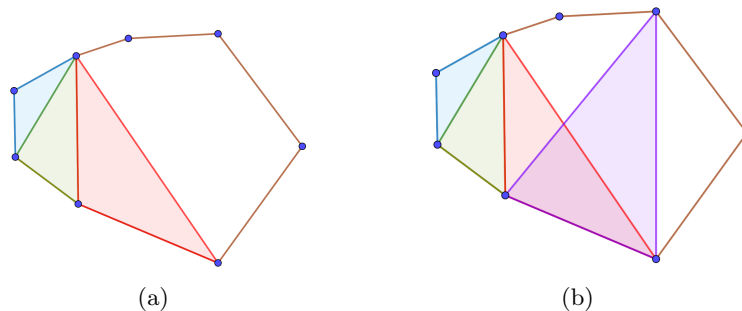


Figura 1.14: Ejemplos de no triangulaciones

Definición 1.2.5. Sean $\mathcal{T} = \{T_1, \dots, T_l\}$ y $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_m\}$ dos subdivisiones de una configuración de puntos. Se dice que \mathcal{T} es un **refinamiento** de \mathcal{S} si para todo $i \in \{1, \dots, l\}$, existe un $j \in \{1, \dots, m\}$ tal que $T_i \subseteq S_j$. En ese caso, se denota como $\mathcal{T} \preceq \mathcal{S}$.

Las subdivisiones de una configuración de puntos A , con la relación del *refinamiento* forman un poset, donde el elemento maximal es la subdivisión trivial formada por $\{A\}$ y sus elementos minimales son las triangulaciones.

Esto es, sean T, S, V tres subdivisiones de A se cumple que:

- i) $T \preceq T$

ii) $T \preceq S$ y $S \preceq T \Rightarrow T = S$

iii) $T \preceq S$ y $S \preceq V \Rightarrow T \preceq V$

Demostración: *i)* es trivial siguiendo la Definición 1.2.5. En cuanto a *ii)*, sea C una celda maximal de T , como $T \preceq S$, entonces existe una celda $C' \in S$ tal que $C \subseteq C'$. Por otro lado, como $S \preceq T$ existe una celda $C'' \in T$ tal que $C' \subseteq C''$, lo que implica que o bien $C = C''$ o bien $\dim(C) < \dim(C'')$. Y dado que C es maximal, la única opción posible es que $C = C'' \Rightarrow C = C' = C''$ y por tanto, $T = S$. Por último *iii)* es nuevamente trivial siguiendo la definición.

De ahora en adelante a los puntos del conjunto $A = \{p_1, \dots, p_n\}$ los consideramos etiquetados por el conjunto $\{1, \dots, n\}$, y nos referimos a los elementos por sus etiquetas.

Ejemplo 1.2.6. Supongamos que tenemos la configuración de puntos representada en la Figura 1.15, y tres posibles subdivisiones $\mathcal{R}, \mathcal{S}, \mathcal{T}$ representadas en la Figura 1.16.

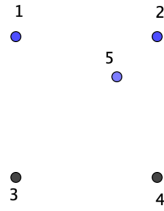


Figura 1.15: Configuración de 5 puntos

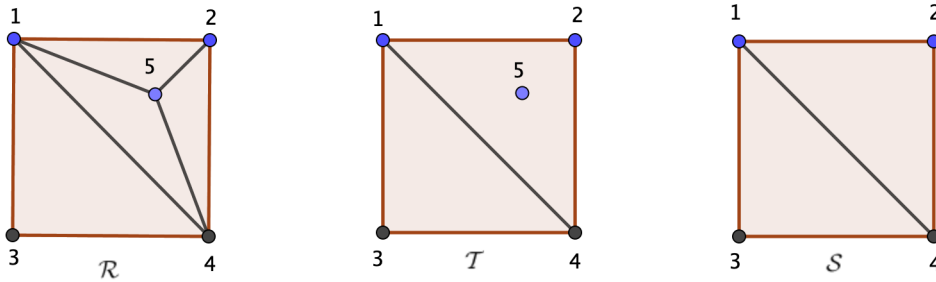


Figura 1.16: Ejemplo de Refinamiento en subdivisiones

Las subdivisiones están compuestas de los siguientes subconjuntos:

$$\mathcal{R} = \{134, 145, 245, 125\},$$

$$\mathcal{T} = \{134, 1245\},$$

$$\mathcal{S} = \{134, 124\},$$

Siguiendo la definición, es fácil comprobar que: $\mathcal{R} \preceq \mathcal{T} \succeq \mathcal{S}$. Es decir, \mathcal{R} y \mathcal{S} son dos refinamientos distintos de \mathcal{T} .

Obsérvese que las subdivisiones \mathcal{S} y \mathcal{T} parecen iguales desde el punto de vista geométrico; en ambas se divide el cuadrado en dos triángulos 124 y 134. Pero nuestra definición tiene en cuenta no solo las celdas como objetos geométricos, sino también como objetos combinatorios, es decir como envolventes de un subconjunto concreto de puntos. En ese sentido \mathcal{S} y \mathcal{T} son distintas, y \mathcal{S} no se considera una triangulación porque la celda 1245 no es un triángulo (desde el punto de vista combinatorio; los puntos que la generan no son afinmente independientes, por tanto, no forman un símplice).

Este último párrafo representa el matiz que se mencionaba anteriormente. También se tiene que tener esto en cuenta a la hora de referirse a las facetas de un conjunto de puntos, ya que en realidad no se piensa en la faceta geométrica del politopo, sino de forma combinatoria en el subconjunto de puntos que se encuentran en esa faceta.

1.2.1. Subdivisiones regulares

Una vez conocido el concepto de subdivisión, vamos a ver que éstas se pueden dividir en dos grupos: las regulares y las no regulares.

Definición 1.2.7. Dada una configuración de puntos $A = \{p_1, \dots, p_n\}$ en \mathbb{R}^d y un vector $w = (w_1, w_2, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^n$ se define el **conjunto levantado de A por w** en \mathbb{R}^{d+1} como el conjunto de puntos $\tilde{A} = \{\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_n\}$ donde:

$$\tilde{p}_i = (p_i, w_i) \text{ con } i = 1, \dots, n$$

Definición 1.2.8. Se define una **faceta inferior** de \tilde{A} como una faceta que es “visible desde abajo”, es decir, una faceta que se puede definir minimizando un funcional lineal que es positivo en su última coordenada, obteniendo así una faceta cuyo vector normal externo tiene la última coordenada negativa.

La **subdivisión regular** de A obtenida por el levantamiento del vector w se define de la siguiente forma:

1. Elevar el conjunto por el vector w obteniendo los puntos: $\tilde{p}_i = (p_i, w_i) \in \mathbb{R}^{d+1}$ con $i = 1, \dots, n$.
2. Calcular las facetas del conjunto $\tilde{A} := \{\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \dots, \tilde{p}_n\}$, entiéndase facetas desde el punto de vista combinatorio, como se ha explicado anteriormente. Considerando cada faceta como el conjunto de puntos de \tilde{A} que están en esa faceta. Se maximiza un funcional pero dentro del conjunto \tilde{A} .
3. Proyectar las facetas inferiores de \tilde{A} en \mathbb{R}^d . Los puntos de \tilde{A} están en biyección con los puntos de A , entiéndase proyectar como coger los puntos de \tilde{A} en A .
4. Si todas las facetas inferiores son símlices, su proyección forma una triangulación de A . De igual manera, entiéndase símlice en el sentido combinatorio, como conjunto afínmente independiente. Si volvemos al Ejemplo 1.2.6, \mathcal{T} es una subdivisión regular pero no es una triangulación, pues 1245, no es un símlice.

Las triangulaciones que se obtienen por este procedimiento son las conocidas como **triangulaciones regulares**.

Proposición 1.2.9 (Proposición 2.2.4 de [6]). *Toda configuración de puntos admite una triangulación regular.*

Demostración. Tenemos que probar que dado cualquier conjunto A , hay vectores de levantamiento w que cumplen que todas las facetas inferiores de \tilde{A} son símlices. Una condición suficiente es que toda base afín B contenida en A se eleve de tal forma que el único hiperplano que contiene al conjunto \tilde{B} , que se corresponde con la base B elevada por el vector w , no contenga ningún otro punto \tilde{p} de \tilde{A} .

Sea $B = \{p_1, \dots, p_{d+1}\} \subseteq A$ y un punto adicional $p \in A \setminus B$, la condición anterior es equivalente a que el determinante de la siguiente matriz no se anule:

$$\begin{vmatrix} p_1 & \dots & p_{d+1} & p \\ w_1 & \dots & w_{d+1} & w_p \end{vmatrix}$$

Este determinante es una ecuación lineal en los w 's con coeficientes distintos de cero, al menos en la coordenada w_p , por lo tanto, va a ser distinto de cero excepto en un hiperplano concreto del espacio \mathbb{R}^n de posibles vectores de levantamiento. Como conclusión, como hay una cantidad finita de posibilidades para p_1, \dots, p_{d+1}, p , casi cualquier elección de w satisface dicha condición para todas las bases B . \square

En concreto, el conjunto de vectores de levantamiento w en \mathbb{R}^n que produce triangulaciones es un conjunto abierto y denso.

Contiene al complementario de cierta unión finita de hiperplanos. Esto es así debido a que las condiciones de la demostración son suficientes para obtener una triangulación, pero no necesarias. El contenido no es una igualdad porque podría darse el caso en el que los w 's produjesen determinantes nulos pero esos determinantes no se correspondieran con facetas inferiores de tal forma que no afectarían a la subdivisión.

Si un vector de levantamiento no produce triangulaciones regulares, quiere decir, que al menos una de las caras inferiores no es un símplice, lo que se traduce en que los puntos de al menos una cara no son afínmente independientes. Esto implica que existe una dependencia afín entre los puntos de esa celda levantada. La idea clave es que esa dependencia afín no recae simplemente en los puntos de esa celda, sino también en los otros puntos levantados. Es decir, encontramos una dependencia afín en los puntos que se conserva al levantarlos, lo que significa que las coordenadas del vector de levantamiento que se ha usado para elevar esos puntos satisfacen una cierta igualdad, que geoméricamente se traduce en que esas coordenadas representan un hiperplano. Además los posibles hiperplanos son una cantidad finita.

Otra forma de explicarlo es usando la noción de posición general: Un conjunto de puntos en \mathbb{R}^d se dice que está en **posición general** si no hay $d + 1$ puntos en un hiperplano.

Por ejemplo un conjunto de puntos en \mathbb{R}^2 está en posición general si no hay 3 puntos alineados, un conjunto en \mathbb{R}^3 está en posición general si 4 puntos no coinciden en el mismo plano.

Si las coordenadas del vector de levantamiento provocan que los puntos levantados estén en posición general entonces la subdivisión generada es una triangulación. Si los puntos no están en posición general quiere decir que se conserva alguna de las dependencias afines.

Todas las triangulaciones de un polígono regular convexo son regulares, al igual que con la configuración de puntos de la Figura 1.15. Sin embargo, algunas configuraciones de puntos tienen triangulaciones no regulares; el siguiente ejemplo, muy empleado en el libro sobre triangulaciones [6] al cual se refieren como *moae*, *mother of all examples*, ejemplifica un caso de triangulación no regular:

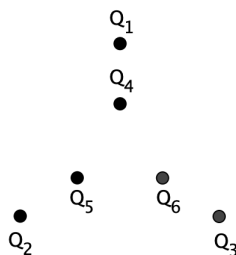


Figura 1.17: Configuración de puntos

Ejemplo 1.2.10. Supongamos que tenemos la configuración de puntos de la Figura 1.17, se trata de dos triángulos concéntricos de aristas paralelas. Construimos la siguiente triangulación ejemplificada en la Figura 1.18. Vamos a demostrar que es no regular por reducción a lo absurdo.

Supongamos que la triangulación es regular y que proviene de un levantamiento por el vector $w = (w_1, \dots, w_6)$. Para simplificar el argumento, asumimos, sin pérdida de generalidad, que a los puntos del triángulo interior se les da altura 0, es decir, $w_4 = w_5 = w_6 = 0$, esto lo podemos hacer porque son tres puntos afínmente independientes, y al sumarle una función afín en el plano a un vector de levantamiento dado, la envolvente inferior no va a cambiar. (Este resultado se probará más adelante en el Lema 2.1.3). Ahora nos fijamos en qué tienen que cumplir las alturas de los puntos Q_1, Q_2 y Q_3 . Si observamos el cuadrilátero que se forma con Q_1, Q_2 y la arista interior Q_4, Q_5 , para que aparezca la arista de la triangulación Q_1Q_5 se necesita que $w_1 < w_2$. Siguiendo el mismo argumento, lo mismo ocurre con la arista Q_2Q_6 , que implicaría que $w_2 < w_3$, y análogamente

con la arista Q_3Q_4 , que resultaría en que $w_3 < w_1$. Por tanto, se tiene una serie de desigualdades cíclicas $w_1 < w_2 < w_3 < w_1$. Aquí tenemos la contradicción. Por lo que podemos concluir que la triangulación de la Figura 1.18 es no regular.

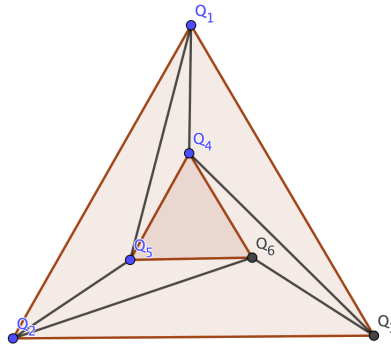


Figura 1.18: Subdivisión no regular

Definición 1.2.11. Una subdivisión de una configuración de puntos, $A \in \mathbb{R}^d$ se llama **regular** si se obtiene como la proyección de A en \mathbb{R}^{d+1} , es decir, por el levantamiento de A de un vector w .

Decimos que es una **triangulación regular** en el caso en el que el conjunto obtenido por ese levantamiento este compuesto por símlices en todas sus facetas, entiéndase nuevamente símlice en el sentido combinatorio, los puntos de cada celda afinmente independientes.

Las triangulaciones regulares son un caso particular de las subdivisiones regulares.

La importancia de las triangulaciones regulares es que el poset que forman las subdivisiones de A con la relación de refinamiento sigue una interesante estructura que relaciona los conceptos vistos hasta ahora con la noción de politopo secundario que se verá en el siguiente capítulo.

1.2.2. Configuraciones de Vectores y sus subdivisiones

Definición 1.2.12. Una **configuración de vectores** en \mathbb{R}^m es un conjunto finito $B = \{u_j : j \in J\}$, donde $u_j \in \mathbb{R}^m$ son vectores.

Una configuración de vectores se dice que es **independiente** si no tiene vectores repetidos y todos son linealmente independientes. En cambio si se incumple alguna de las condiciones anteriores se dice que es **dependiente**.

Definición 1.2.13. Se dice que una configuración de vectores B es **acíclica** si existe un funcional lineal que sea positivo en todos los elementos de la configuración. Es decir, por el *Lema de Farkas* que aparece en [1] en la Sección 1.4, esta propiedad es equivalente a que entre los vectores de la configuración no exista ninguna dependencia lineal con coeficientes positivos.

Enlazando estos conceptos con la sección anterior, Sección 1.1.1:

Definición 1.2.14. Un cono es **puntiagudo**, *pointed* en inglés, si está generado por una configuración acíclica de vectores. Equivalentemente, un cono es puntiagudo si existe un hiperplano que deja todo el cono menos el origen en uno de los semiespacios abiertos que genera.

Por ejemplo, si se tiene un politopo en \mathbb{R}^d los conos normales de las caras son puntiagudos.

Definición 1.2.15. Se define el **interior relativo** de una configuración de vectores como:

$$\text{relint}_B(C) := \left\{ \sum_{j \in C} \lambda_j u_j : \lambda_j > 0 \text{ para todo } j \in C \right\}$$

Definición 1.2.16. Una **subdivisión poliédrica** (o, en esta memoria, una subdivisión “a secas”) de una configuración de vectores B de dimensión d es una colección finita $C = \{C_1, C_2, \dots, C_m\}$ de subconjuntos de B tal que :

- a) Para todo $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $\text{cone}(C_i)$ es un cono de dimensión d .
- b) $\text{cone}(B) = \bigcup_i \text{cone}(C_i)$
- c) Dados $i \neq j$, se cumple que $C_i \cap C_j$ es una cara común propia de ambos C_i y C_j y $\text{cone}(C_i) \cap \text{cone}(C_j) = \text{cone}(C_i \cap C_j)$

Los elementos de una subdivisión poliédrica se llaman **celdas**.

Una triangulación de B es una subdivisión poliédrica en la que todas sus celdas son conjuntos linealmente independientes (a los que llamaremos **símplices**, al igual que en el caso afín). También, igual que en el caso afín, a veces se consideran celdas no solo los conos de dimensión d que forman la subdivisión sino también todas sus caras.

Multiplicar un vector o varios pertenecientes a una configuración de vectores por una constante *positiva* no afecta a su combinatoria, es decir, las caras, el interior relativo,... permanece igual. En concreto, se mantienen los conjuntos de subdivisiones y triangulaciones de la configuración original.

Ejemplo 1.2.17. Supongamos que A consiste en 5 vectores en el plano equiespaciados. Cada **símplice maximal** está formado por dos cualesquiera de los vectores de A . Se tienen las siguientes subdivisiones:

1. Los 5 conos: $\{12, 23, 34, 45, 15\}$
2. 5 triangulaciones formadas por 4 conos: $\{13, 34, 45, 15\}$ y los obtenidos mediante simetría como: $\{12, 24, 45, 15\}$
3. 5 triangulaciones formadas por 3 conos $\{13, 35, 15\}$ y los resultantes de la simetría como por ejemplo: $\{12, 24, 14\}$.

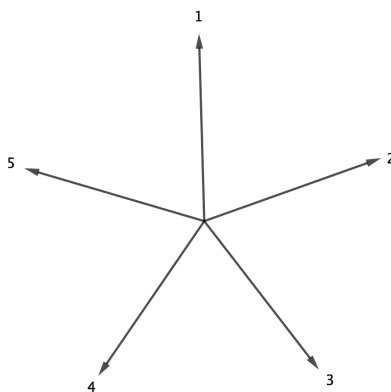


Figura 1.19: Configuración A

Además, hay 6 tipos de subdivisiones no simpliciales:

1. La subdivisión trivial: $\{12345\}$
2. Las subdivisiones no triviales con solo una celda maximal. $\{1345\}$ y $\{135\}$. Obsérvese que $\{123\}$ no es una subdivisión porque no cubre todo el espacio generado por A , que sería todo el plano.
3. Y $\{123, 345, 15\}$, $\{13, 345, 15\}$ y $\{123, 34, 45, 15\}$.

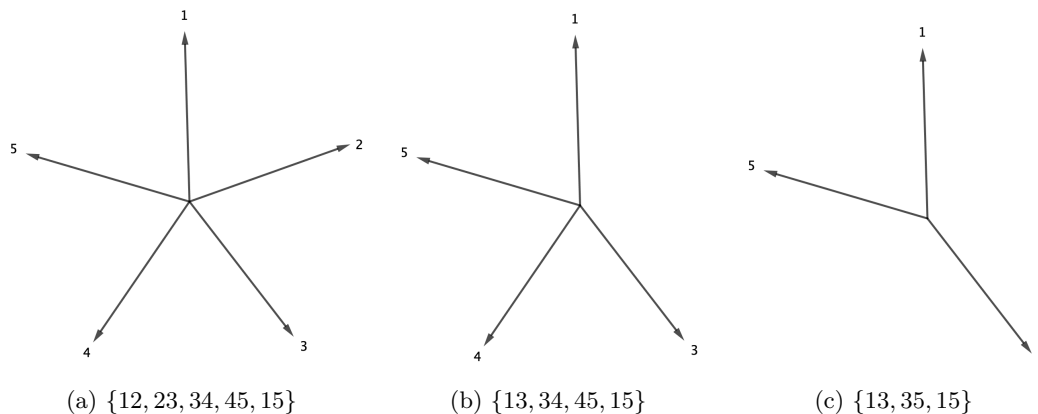


Figura 1.20: Triangulaciones de vectores

La definición de subdivisión regular para configuraciones de vectores es análoga a la definida en la Sección 1.2.

Sin embargo, existe una leve diferencia, y es el caso en el que los vectores de levantamiento tomen valores negativos. Volviendo al caso de la configuración de puntos, esto no ocasionaba ningún problema, ya que modificar los valores por una constante no altera la combinatoria. Las caras inferiores siguen siendo las mismas, dando lugar así a la misma subdivisión.

Pero en el contexto lineal de una configuración de vectores esto no es así. Por ejemplo, en el ejemplo anterior, el Ejemplo 1.2.17, si se elevan los 5 vectores con altura 1, se obtienen 5 vectores hacia arriba que forman un cono con forma pentagonal. Si observamos este cono desde abajo, se observan claramente las 5 caras inferiores. En cambio, si se elevan con altura -1, el cono que forman es hacia abajo, por lo tanto, al observar ese cono desde abajo se descubre que no tiene caras inferiores, ya que la visión que se tiene es desde “el interior” de ese cono.

De manera más precisa, la cuestión relevante a la hora de formar subdivisiones regulares de configuraciones de vectores es que al levantar estos vectores, en el cono generado no esté incluido el vector vertical negativo, $(0, \dots, 0, -1)$. Los conos que contengan a este vector no generan caras inferiores y por tanto no definen una subdivisión regular. Una condición suficiente, pero no necesaria, para que el cono levantado no contenga a ese vector es que el vector de levantamiento sea no negativo. Recíprocamente, si el cono levantado no contiene al vector $(0, \dots, 0, -1)$ entonces, por el *Lema de Farkas*, existe un funcional Φ que es negativo en ese vector y no negativo en todo el cono. Restando al vector de levantamiento los valores que toma Φ en la configuración se obtiene un vector de levantamiento no negativo que induce la misma subdivisión regular que el original. En resumen: *Cuando hablamos de subdivisiones regulares, no hay pérdida de generalidad en considerar solo vectores de levantamiento no negativos.*

Si se tiene una configuración de vectores acíclica nunca va a ocurrir que el cono levantado contenga a $(0, \dots, 0, -1)$. Por tanto, para configuraciones acíclicas, se puede elegir un vector de levantamiento cualquiera produciendo que el cono resultante no contenga a ese vector vertical negativo.

En cambio, si la configuración es cíclica, hay que tener cuidado con el vector de levantamiento escogido ya que no se garantiza que vaya a generar caras inferiores.

El caso de una configuración de puntos se puede ver como un caso particular de la configuración de vectores. Al escribirlos como matriz, pasamos de geometría afín a álgebra lineal. Simplemente consiste en homogenizar los puntos afines añadiéndoles una última coordenada igual a 1 al final, indicando que se toman como si estuviesen en un espacio de dimensión mayor, como vectores. Una configuración de puntos homogeneizada de esta manera siempre va a ser acíclica, ya que si entendemos la última coordenada añadida como un funcional, va a ser positiva en todos los vectores.

Ejemplo 1.2.18. Siguiendo con el ejemplo de la Figura 1.15, supongamos que tenemos los siguientes puntos: $P_1 = (0, 3)$, $P_2 = (3, 3)$, $P_3 = (0, 0)$, $P_4 = (3, 0)$, $P_5 = (2, 2)$.

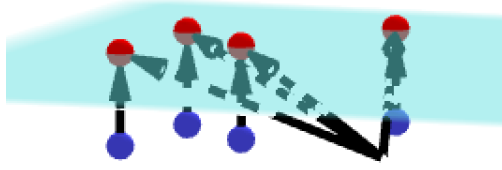


Figura 1.21: Homogenización de puntos

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

La fila que se encuentra encima de la matriz representa las etiquetas que se han puesto a los puntos. Las columnas de la matriz representan las coordenadas de cada punto en \mathbb{R}^d . Sin embargo, resulta interesante homogeneizar estos puntos, es decir, representarlos en \mathbb{R}^{d+1} añadiendo una fila constante con valor de 1, consiguiendo así pasar de geometría afín a algebra lineal.

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

1.3. Matroides Orientadas

Las matroides son objetos combinatorios abstractos que generalizan el concepto de independencia lineal en los espacios vectoriales. Las matroides se pueden definir en dos versiones una orientada y la otra sin orientar. La que se va a tratar en esta memoria es la versión orientada.

Las matroides orientadas son abstracciones combinatorias de configuraciones de puntos en arreglos de hiperplanos, politopos convexos y grafos dirigidos que aportan información acerca de la posición relativa de sus puntos. Por el contrario, las matroides sin orientar representan las propiedades de dependencia que son comunes tanto a los grafos, que no están necesariamente dirigidos, como a las disposiciones de los vectores sobre los cuerpos, que no están necesariamente ordenados. [7]

Dicho de otro modo, las matroides orientadas capturan no solo la dependencia/independencia sino también los signos posibles en las dependencias. Es decir, las matroides orientadas modelizan de manera combinatoria la dependencia/independencia de vectores sobre cuerpos ordenados, y en particular capturan la noción de convexidad, que en las matroides sin orientar no está presente.

La bibliografía utilizada en esta sección es del libro sobre matroides orientadas [5].

Las matroides se pueden definir de diversas formas, todas ellas equivalentes. Para ello, es necesario conocer previamente algunos conceptos:

1.3.1. Matroide de un conjunto de vectores

En general, las matroides orientadas se definen sobre un conjunto de vectores y no sobre un conjunto de puntos, sin embargo, este último caso se puede tratar como un caso particular del primero: pasando de geometría afín a algebra lineal mediante el proceso de homogeneización, como se ha mencionado en el apartado anterior. En esta sección se va a considerar el caso lineal que incluye el caso afín, que es equivalente por homogeneización al caso lineal acíclico.

Definición 1.3.1. La **signatura** de un vector $x = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ de \mathbb{R}^n (o de \mathbb{K}^n , donde \mathbb{K} es cualquier cuerpo ordenado) es otro vector de la forma $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ donde

$$\epsilon_i = \frac{\lambda_i}{|\lambda_i|} \in \{-1, 0, 1\} \text{ (Se toma como convenio: } \frac{0}{0} = 0 \text{)}.$$

También se denota como vector de signo.

Ejemplo 1.3.2. Sea $x = (-3, 0, 1, 4, \frac{1}{2}, 0)$ su signatura es $(-1, 0, 1, 1, 1, 0)$

Además, se define la función $sign(u)$ como:

$$sign : \mathbb{R} \rightarrow \{+, -, 0\} \quad z \mapsto sign(z) = \begin{cases} + & \text{si } z > 0 \\ 0 & \text{si } z = 0 \\ - & \text{si } z < 0 \end{cases}$$

El conjunto $SIGN(U)$ denota al conjunto $\{sign(x) : x \in U\}$, donde $U \subseteq \mathbb{R}^d$.

Las dependencias lineales minimales determinan completamente la estructura de una configuración de puntos. Sea A una configuración de puntos, se definen:

Definición 1.3.3. Los **circuitos** de A son sus conjuntos minimales linealmente dependientes. Al ser minimales, tienen una única dependencia lineal, módulo un factor escalar. Los **circuitos orientados** de A son la signatura de esa dependencia lineal.

Todo circuito o, más generalmente, todo vector de signos de longitud n , se puede representar como una dupla. En cada lado se ponen los puntos que reciben un signo o el contrario en la dependencia lineal, por ejemplo, en la Figura 1.22 para identificar la dependencia lineal entre los puntos 2, 3, 5, se denota de la siguiente forma: $(23, 5)$ o $(5, 23)$, según el criterio de orientación que se tome, donde claramente el punto 5 es linealmente dependiente de los puntos 2, 3. Del mismo modo, el circuito 1234 tiene como circuito orientado 14, 23 (o su opuesto $(23, 14)$).

Se puede demostrar que los circuitos de una configuración U forman el conjunto $MIN(SIGN(U))$, donde U es el espacio vectorial formado por las dependencias lineales y MIN significa, para un conjunto de vectores de signo, que se consideran los vectores minimales coordenada a coordenada, con respecto al orden parcial en el que $+$ $<$ 0 ; $-$ $<$ 0 , y $+$ y $-$ son incomparables.

Definición 1.3.4. Los **cocircuitos** de A son los subconjuntos minimales de A en los cuales un funcional lineal es distinto de cero. Cuando esto ocurre, hay un único funcional, módulo multiplicación por una constante, que define dicho cocircuito. Los **cocircuitos orientados** son los vectores de signo que toma ese único funcional en los puntos de A . De nuevo, cada cocircuito sin orientar define dos circuitos orientados, opuestos entre sí.

Al igual que con los circuitos, se denotan como una pareja de subconjuntos disjuntos de A , donde cada elemento denota el semiespacio formado por el funcional lineal. Por ejemplo en la Figura 1.22, si tomamos como funcional lineal la recta que pasa por los puntos 2, 3 el cocircuito resultante sería $(1, 4)$ o su opuesto según el criterio que se tome: $(4, 1)$.

Los cocircuitos es el conjunto $MIN(SIGN(V))$, donde V es el conjunto de evaluaciones lineales.

Los circuitos y los cocircuitos aportan información sobre la envolvente convexa de la configuración de puntos.

Ejemplo 1.3.5. Supongamos que tenemos una configuración de 5 puntos dispuestos como en la Figura 1.22. Vamos a identificar todos los circuitos y cocircuitos:

La lista de circuitos:

$$(124, 5), (23, 5), (14, 23), (35, 14)$$

$$(5, 124), (5, 23), (23, 14), (14, 35)$$

La lista de cocircuitos:

$$(135, \emptyset), (245, \emptyset), (345, \emptyset), (125, \emptyset), (25, 3), (1, 4), (13, 2), (34, 2)$$

$$(\emptyset, 135), (\emptyset, 245), (\emptyset, 345), (\emptyset, 125), (3, 25), (4, 1), (2, 13), (2, 34)$$

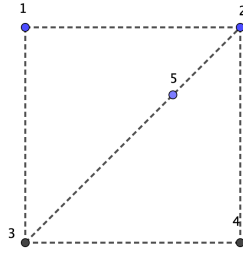


Figura 1.22: Configuración de 5 puntos

Un resultado bastante útil e interesante es el lema que aparece en el libro sobre triangulaciones es el siguiente:

Lema 1.3.6 (Lema 4.1.34 de [6]). *Las dependencias lineales y las evaluaciones lineales de A forman dos subespacios lineales ortogonales y complementarios en \mathbb{R}^d , de rango $d - k$ y k respectivamente. Siendo k el rango de la configuración de vectores A .*

Demostración. Supongamos que el conjunto de vectores viene dado en forma de matriz con los elementos de la configuración como columnas. Las dependencias lineales son el núcleo de esa matriz, es decir, son los vectores que al multiplicarlos por esa matriz dan como resultado 0. Y por otra parte, las evaluaciones son las combinaciones lineales de las filas de la matriz. Si una dependencia lineal da 0 al multiplicarla por la matriz, en particular da 0 al multiplarla por cada fila, por tanto, el resultado será 0 al multiplicarla por combinaciones lineales de las filas.

Esto demuestra que los espacios de dependencias y evaluaciones son ortogonales. El que son complementarios ortogonales se sigue del estudio de las dimensiones: por definición de rango, el espacio de evaluaciones tiene dimensión k , y por el Primer Teorema de Isomorfía el espacio de dependencias (es decir, el núcleo de la matriz) tiene dimensión $d - k$. \square

Definición 1.3.7. Los **vectores orientados** de la configuración A son las signaturas correspondientes a cada dependencia afín entre los elementos de A .

Los vectores son el conjunto $\text{SIGN}(U)$ donde U es el conjunto de dependencias afines.

Los circuitos son los vectores minimales.

Definición 1.3.8. Los **covectores orientados** de la configuración A son los vectores de signo de todos los funcionales lineales evaluados en A .

Los covectores son el conjunto $\text{SIGN}(V)$ donde V es el conjunto de funcionales afines.

Los cocircuitos son los covectores minimales.

Ejemplo 1.3.9. Si continuamos con el ejemplo de la Figura 1.22, supongamos que elegimos el funcional lineal que se anula en la recta 34 y le damos como orientación positiva el semiespacio donde se encuentran los puntos 1, 2, 5. El covector resultante sería $(+, +, 0, 0, +)$, que podemos escribir también de forma abreviada como $(\emptyset, 124)$. En cambio, si elegimos la recta 14 como hiperplano y el semiespacio positivo generado es donde se encuentran los puntos 2, 5, el covector que genera es: $(0, +, -, 0, +)$, o $(25, 3)$

En el Ejemplo 1.3.18 se identifican todos los covectores de un arreglo de hiperplanos.

Teorema 1.3.10. *Dado un conjunto de puntos A , si se conocen los circuitos orientados se pueden calcular los cocircuitos orientados y viceversa. Es decir, el conjunto de circuitos orientados y el de cocircuitos orientados contienen la misma información sobre el conjunto de puntos. A cualquiera de estos dos conjuntos se le puede llamar matroide orientada.*

En particular los 4 conjuntos de datos: *vectores*, *covectores*, *circuitos* y *cocircuitos* son equivalentes, es decir, que aportan la misma información. La demostración completa se encuentra en el libro de Ziegler [1] en el Capítulo 6, Sección 6.3.

Antes de ver cómo se pasa de unos a otros, vamos a definir algunos conceptos:

En primer lugar, recapitulando los conceptos previamente vistos. Los circuitos se definen como dependencias minimales, los vectores como dependencias, los cocircuitos como evaluaciones minimales y los covectores como evaluaciones.

Definición 1.3.11. Sean x, c las firmas de dos vectores. Se define la **relación de “ortogonalidad”** $cx = 0$ si se cumple una de las siguientes dos condiciones:

- Para cada coordenada i se tiene que $x_i = 0$ o $c_i = 0$.
- Existen índices i, j tales que $c_i = x_i \neq 0$ o $c_j = -x_j \neq 0$.

Para un conjunto de firmas de vectores, $S \subseteq \{+, -, 0\}^n$ se define:

$$S^\perp := \{c \in \{+, -, 0\}^n : cu = 0 \quad \forall u \in S\}$$

Intuitivamente se mantienen las normas de las multiplicaciones usuales:

$0 \cdot + = 0$; $0 \cdot - = 0$; $+ \cdot + = +$; $+ \cdot - = -, \dots$ Y al hacer el producto escalar de dos vectores de signo, el resultado se considera nulo si se pueden cancelar los signos, es decir, o bien obtenemos todo 0 o se tiene tanto algún $+$ como algún $-$.

Ejemplo 1.3.12. Las siguientes firmas son ortogonales: $(+, 0, 0, -)$, $(+, 0, -, +)$, ya que el resultado de la operación es nulo. Sin embargo, $(+, 0, 0, +)$, $(+, 0, -, +)$ no son ortogonales porque el resultado de la operación no es nulo sino $+00+$, luego los $+$ no se cancelan.

La idea principal recae en que a partir de los vectores de una configuración de puntos, se pueden obtener los covectores como los vectores de signo que sean ortogonales a todos los vectores.

Por ejemplo si se tienen los circuitos de una configuración de puntos y se calculan todos los vectores de signo que sean ortogonales a todos los circuitos, se obtienen los covectores. Una vez que se conocen los covectores, basta calcular cuales son minimales, y estos últimos son los cocircuitos.

Se sigue del Lema 1.3.6 que los covectores están contenidos en el conjunto ortogonal a los vectores, sin embargo, el otro contenido no se va a demostrar en esta memoria.

Es decir, sea U el conjunto de dependencias afines, su ortogonal, U^\perp , es el conjunto de evaluaciones afines. Manteniendo la notación anterior: $SIGN(U^\perp)$ es el conjunto de covectores y $SIGN(U)$ el de vectores.

Sea u un vector de signo que pertenece al conjunto de los circuitos, $MIN(SIGN(U))$, y sea c un vector de signo perteneciente al conjunto de los covectores, $SIGN(U^\perp)$. Entonces, existen $\mathbf{u} \in U$ y $\mathbf{c} \in U^\perp$ que cumplen que $sign(\mathbf{u}) = u$ y $sign(\mathbf{c}) = c$, debido a que $\mathbf{c}\mathbf{u} = 0$, lo que implica que $cu = 0$, por definición de la relación de ortogonalidad. Lo que prueba que:

$$SIGN(U^\perp) \subseteq (SIGN(U))^\perp \subseteq (MIN(SIGN(U)))^\perp$$

Por lo tanto, se tiene que cualquiera de los 4 conjuntos que hemos definido para una matroide orientada puede determinar los otros 3. El diagrama de la Figura 1.23 resume la conexión:

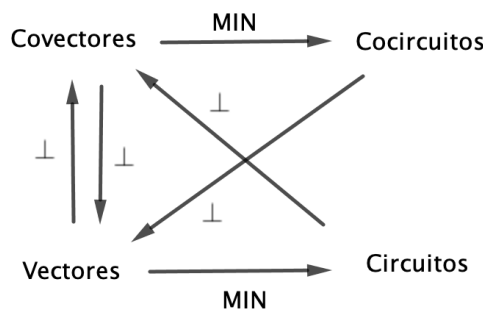


Figura 1.23: Diagrama de los 4 conjuntos

Definimos así el concepto de matroide orientada:

Definición 1.3.13. La **matroide orientada** de un conjunto B de vectores de \mathbb{R}^d viene dada por los cocircuitos de B o equivalentemente por sus circuitos, vectores o covectores.

El conjunto de vectores orientados que provienen de una configuración de vectores en el sentido arriba empleado se conocen como matroides orientadas **realizables**. Las matroides orientadas también se pueden definir de un modo más general, sin hacer referencia a un conjunto de puntos o de vectores, sino más bien mediante axiomas. Ese tipo de matroides orientadas son las no realizables y no se van a tratar en esta memoria.

En una matroide orientada, se llaman conjuntos **independientes** a los que no contienen ningún circuito. Los conjuntos independientes maximales se llaman **bases**, y tienen todas el mismo número de elementos.

El **rango** de una matroide orientada se define como el número de elementos de las bases. Si la matroide está definida a partir de un conjunto de vectores entonces el rango de la matroide coincide con la definición de rango del álgebra lineal, el rango del espacio generado por esos vectores.

Se observa que a partir de una matroide orientada A se puede recopilar una serie de datos:

- Las facetas de A , como configuración de puntos o vectores, son los complementarios de los cocircuitos positivos, es decir, F es una faceta de A si y solo si $(A \setminus F, \emptyset)$ es un cocircuito.
- Las caras de A son todas las posibles intersecciones de facetas y coinciden con los complementarios de los covectores positivos.
- Si $B \subset A$, los circuitos de B son los circuitos de A contenidos en B y los cocircuitos de B son un subconjunto restringido a B de los cocircuitos de A . Esto quiere decir que no todas las evaluaciones que son minimales en A tienen por qué serlo en B , no obstante, toda evaluación en A restringida a B es una evaluación en B .
- Los subconjuntos afinmente independientes de A son aquellos que no contienen ningún circuito.
- A partir de la matroide orientada se puede calcular la dimensión de A y la de cualquier subconjunto de A .

Ejemplo 1.3.14. Matroide de un grafo dirigido:

Sea $D = (V, E)$ un grafo dirigido donde V es el conjunto de vértices del grafo y E es el conjunto de aristas definido con una orientación para cada arista.

Si consideramos un ciclo del grafo D , con una de sus dos posibles orientaciones, eso induce un vector de signos sobre el conjunto E : positivo cuando la arista esté dirigida en el sentido de nuestro ciclo y negativo cuando esté dirigida de la forma opuesta. Por tanto, podemos asociar a cada ciclo del grafo un *subconjunto orientado de E* . A este subconjunto orientado que proviene de un ciclo se llama *circuito orientado de D* .

La matroide orientada $\mathcal{M} = \mathcal{M}_D$ de D es un par (E, C) donde C es el conjunto de circuitos orientados del grafo dirigido.

Ejemplo 1.3.15. Supongamos que nuestro grafo dirigido es el grafo K_4 representado en la Figura 1.24. Supongamos que le damos una orientación en sentido horario y el ciclo es V_1, V_3, V_4, V_2, V_1 . Recorreríamos las aristas 2 y 6 en sentido positivo ya que la orientación que le hemos dado es en sentido horario, mientras que las aristas 1 y 5 se recorren en sentido negativo. Por tanto, el circuito orientado correspondiente al ciclo V_1, V_3, V_4, V_2, V_1 en K_4 sería:

$$X = X^+ \cup X^- = \{\{2, 6\}, \{1, 5\}\}$$

Otra forma de obtener la matroide orientada de un grafo dirigido es mediante la matriz de incidencia, cuyas columnas se corresponden con las aristas. La arista (dirigida) ij se representa con un -1 en la posición i y un $+1$ en la posición j . Se tiene que la matroide orientada del grafo coincide con la de los vectores columna de esa matriz. La matriz de incidencia de K_4 es:

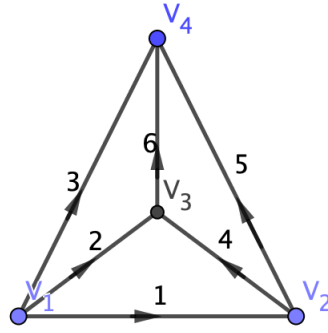


Figura 1.24: Grafo dirigido K_4

$$\begin{matrix}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
 \begin{matrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix}
 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1
 \end{pmatrix}
 \end{matrix}$$

1.3.2. Arreglos de Hiperplanos y sus Matroides Orientadas

Definición 1.3.16. Un **hiperplano** lineal de \mathbb{R}^d es un subespacio lineal de dimensión $(d - 1)$.

Un hiperplano orientado es una 3-upla (H, H^+, H^-) donde H es un hiperplano y H^+, H^- son los dos semiespacios abiertos generados por H .

Ejemplo 1.3.17. La siguiente Figura 1.25 representa un hiperplano H , que es una recta, y los dos semiespacios generados por esa recta, arriba H^+ y debajo de la recta H^- .

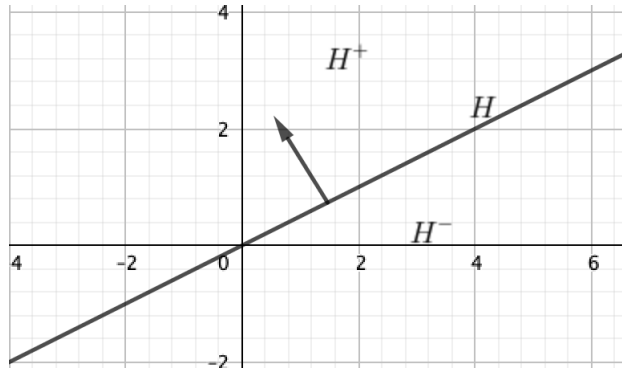


Figura 1.25: Hiperplano orientado

Sea $A = \{H_1, \dots, H_n\}$ un conjunto de hiperplanos en \mathbb{R}^d . Para construir la matroide orientada del conjunto A tenemos que ver cada hiperplano como el conjunto $H_i = \{x \in \mathbb{R}^d : l_i(x) = 0\}$ donde $l_i(x) = \sum_{j=1}^d a_{ij}x_j$ que es la función lineal que determina el plano. Por lo tanto, podemos ver que los l_i forman una configuración de vectores en $(\mathbb{R}^d)^*$, y definimos su matroide orientada a partir de esta configuración de vectores como hemos visto en las secciones anteriores, donde separamos un lado positivo y otro negativo para cada H_i .

Cada arreglo de hiperplanos descompone el espacio en lo que llamaremos **celdas** (cells). Otra manera de definir la matroide orientada del arreglo es a través de sus celdas. Cada celda induce un vector de signo, dependiendo de en qué parte H^+, H^- o H se encuentre la celda. Esos vectores de signo son los covectores de la matroide orientada de los l_i .

En cierto modo, lo que se está haciendo es usar la dualidad de espacios vectoriales; si se tiene un conjunto de vectores en un espacio vectorial, estos definen una matroide según los valores que toman los funcionales en esos vectores. Ahora, se tiene un conjunto de funcionales en el espacio vectorial dual que definen también una matroide, en función del signo que dan a cada vector esos funcionales.

Ejemplo 1.3.18. En este ejemplo en lugar de trabajar con hiperplanos lineales, se va a trabajar con hiperplanos afines. Realmente lo que se hace es considerar el espacio afín como un hiperplano dentro del espacio lineal de una dimensión mayor. Cada hiperplano lineal intersecado con nuestro espacio afín genera un hiperplano afín que resulta en la misma matroide. Realmente este ejemplo es un caso particular. Estamos utilizando geometría afín para conseguir matroides de rango 3 con objetos de dimensión 2 en el plano.

Supongamos que tenemos un arreglo de 3 hiperplanos orientados, H_1, H_2, H_3 , el espacio \mathbb{R}^2 queda dividido en 7 celdas de dimensión 2, como se puede ver en la siguiente Figura 1.26. Cada cono abierto o celda, se puede representar por una 3-upla de signos que describe la posición relativa del cono con respecto a los tres hiperplanos.

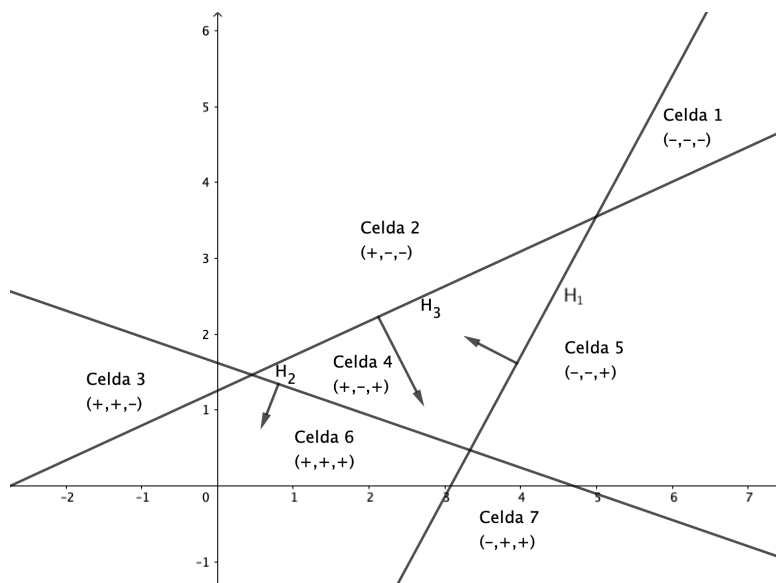


Figura 1.26: Descomposición en celdas por un arreglo de hiperplanos

El conjunto de covectores de estos hiperplanos son los formados por las celdas de dimensión 2 a las que falta por añadir las celdas de dimensión 1 que serían los hiperplanos que separan las celdas de dimensión 2 y las de dimensión 0, que son las intersecciones de los hiperplanos. Por ejemplo, la semirrecta que separa la Celda 2 y la Celda 3 genera el covector $(+, 0, -)$. Por lo tanto, el conjunto de todos los covectores que forman la matroide orientada de este arreglo de hiperplanos es:

$$\begin{aligned} &(-, -, -), (+, -, -), (+, +, -), (+, -, +), (-, -, +), (+, +, +), (-, +, +) \\ &(0, -, -), (+, -, 0), (+, 0, -), (+, +, 0), (+, 0, +), (0, +, +), (-, 0, +), (0, -, +), (-, -, 0) \\ &(0, -, 0), (+, 0, 0), (0, 0, +) \end{aligned}$$

Donde en la primera están los covectores formados por las celdas de dimensión 2, en la segunda los formados por las de dimensión 1 y en la última los formados por las de dimensión 0. Eso sí, en este dibujo afín solo vemos la mitad de los covectores; nos falta la otra mitad, que no son más que los opuestos de los que hemos dado. (Para ser más precisos: los covectores correspondientes a celdas no acotadas ya aparecen junto a sus opuestos, como el $(+, +, -)$ y $(-, -, +)$. Pero para las celdas acotadas como la $(+, -, +)$ o la $(0, -, +)$ los opuestos no aparecen en el dibujo afín).

1.3.3. Transformada de Gale

Sea $V \subset \mathbb{R}^k$ y $W \subset \mathbb{R}^l$ dos configuraciones de vectores con n elementos representados en dos matrices M_V de tamaño $k \times n$ y M_W de tamaño $l \times n$ respectivamente.

Definición 1.3.19. Se dice que las matroides orientadas de V y W son duales si los circuitos orientados de V son los cocircuitos orientados de W y viceversa.

Se dice que W es la **Transformada de Gale** de V si el espacio de las filas de M_V y el espacio de las filas de M_W son complementarios ortogonales entre sí. La *Transformada de Gale* de una configuración de vectores A es una configuración de vectores B tal que las dependencias lineales de A son las evaluaciones lineales de B y viceversa. Es decir, el espacio de filas de B es el espacio de dependencias lineales entre columnas de A . El conjunto de transformadas de Gale de A se denota como $Gale(A)$.

Si V y W son transformadas de Gale la una de la otra, se tiene que en particular sus matroides orientadas son duales.

Lema 1.3.20 (Lema 4.1.36 de [6]). *Toda configuración de vectores A tiene al menos una transformada de Gale.*

Demostración. Para demostrar el lema anterior solo tenemos que probar que dada cualquier configuración de vectores A , se puede calcular una configuración de puntos B que sería su transformada de Gale.

Simplemente tendríamos que calcular el complementario ortogonal de los vectores fila de A , que sería el núcleo de A y escoger cualquier base del núcleo como los vectores fila de la matriz de la configuración B . Además, todas las transformadas de Gale de A son configuraciones de vectores linealmente isomórficas. \square

Ejemplo 1.3.21. Supongamos que A es una configuración de puntos cuya envolvente convexa es un pentágono regular, representado en la Figura 1.27a, la cual podemos considerar como una configuración acíclica de rango tres. Su transformada de Gale es el conjunto de vectores representados en la Figura 1.27b, lo llamaremos B . Por ejemplo, el circuito de $A = (35, 24)$, es el cocircuito en B obtenido por el funcional afín que pasa por el vector 1, que deja a un lado los vectores 2, 4 y en el otro los vectores 3, 5. Asimismo el circuito $(1, 34)$ de B , se corresponde con el cocircuito de A obtenido al tomar el hiperplano que pasa por los puntos 25.

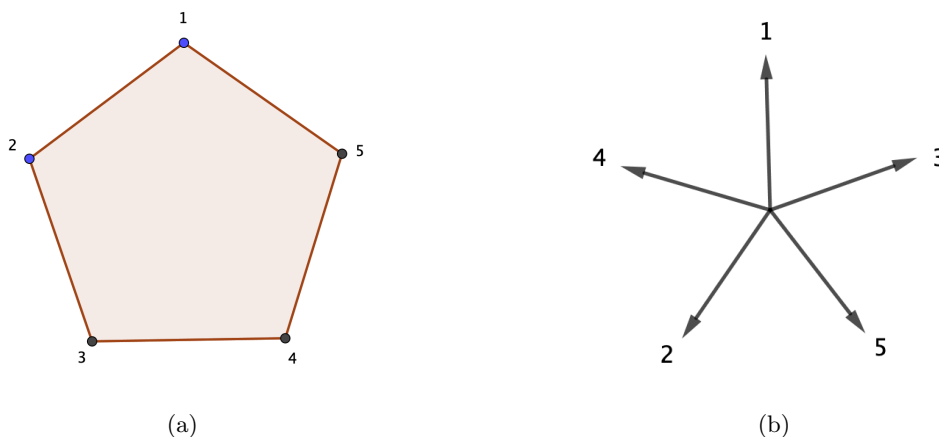


Figura 1.27: Pentágono regular y su Transformada de Gale

Capítulo 2

Politopo Secundario y Teorema de Gelfand, Kapranov y Zelevinsky

En este capítulo se definirá el politopo secundario para llegar a enunciar el Teorema de Gelfand, Kapranov y Zelevinsky.

2.1. Abanico secundario

Definición 2.1.1. Se define el **cono secundario** para cualquier subdivisión regular S de una configuración de n puntos $A \in \mathbb{R}^d$, como

$$K(S) := \{w \in \mathbb{R}^d : \text{el vector del levantamiento } w \text{ induce } S \text{ en } A\}$$

Por definición, todo vector $w \in \mathbb{R}^d$ induce una subdivisión regular. Por lo tanto, el conjunto de todos los conos secundarios cubre todo el espacio \mathbb{R}^d . De hecho, forman un abanico conocido como el **abanico secundario** de A .

La definición se extiende a una configuración de vectores pero, si la configuración no es acíclica, el abanico secundario solo cubre una parte de \mathbb{R}^d , como hemos visto en el capítulo anterior.

Concretamente los conos secundarios de las diferentes triangulaciones regulares son las componentes conexas del espacio de levantamientos que producen triangulaciones, que como se menciona en el capítulo anterior, es un espacio abierto y denso en \mathbb{R}^d .

El abanico secundario en el fondo consiste en estudiar el espacio de levantamientos mencionado anteriormente y ver cómo se divide en partes según que subdivisión genera.

Complejo de Cámaras

Definición 2.1.2. Sea B una configuración de vectores en \mathbb{R}^k , cuyos índices pertenecen al conjunto J .

Una **cámara (chamber) relativamente abierta** es un conjunto no vacío minimal que puede ser obtenido como intersecciones de conos relativamente abiertos formados por las subconfiguraciones de B . Es decir, decimos que dos vectores x, y están en la misma **cámara** relativamente abierta si para todo $C \subseteq J$, se tiene que

$$y \in \text{cone}_B(C) \Leftrightarrow x \in \text{cone}_B(C).$$

Las cámaras son conos y los llamamos relativamente abiertos porque son abiertos como subconjuntos del espacio (en este caso vectorial) que generan. En general, un conjunto relativamente abierto es un espacio abierto en el espacio (vectorial, afín, etc; según el contexto) que genera. Por ejemplo, un segmento sin dos extremos, si lo consideramos en \mathbb{R}^3 no es abierto, sin embargo sí es un espacio relativamente abierto si se estudia como un subconjunto dentro de la recta que lo contiene.

La clausura de una cámara relativamente abierta es una cámara cerrado.

El complejo de cámaras, o en inglés *chamber complex*, o abanico de chambers de B es el abanico poliédrico que consiste en las cámaras cerradas de B .

Como veremos más adelante, el abanico secundario de una configuración de vectores coincide con el complejo de cámaras de su Transformada de Gale.

Pero antes, vamos a enunciar algunos resultados.

Lema 2.1.3. *Sea B una configuración de n vectores de rango k . Si dos vectores de levantamiento difieren por una evaluación, entonces definen la misma subdivisión regular.*

Demostración. Se trata de demostrar que si dos vectores de levantamiento difieren por un funcional lineal, entonces tienen las mismas caras inferiores. Para demostrar esto supongamos que tenemos un conjunto de vectores $B = \{p_1, \dots, p_n\}$ y sea $\tilde{B} = \{\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_n\}$ el conjunto levantado. Es decir, $\tilde{p}_i = (p_i, w_i)$ donde $w = (w_1, \dots, w_n)$ es un vector de levantamiento. Consideremos un funcional lineal $\phi : \mathbb{R}^{d+1} \rightarrow \mathbb{R}$ que define una cara F , es decir, cumple que $\phi(\tilde{p}_i) \geq 0 \forall i$ y $\phi(\tilde{p}_i) = 0 \Leftrightarrow i \in F$. Además, suponemos que es una cara inferior, luego también debe satisfacer que $\phi(e_{d+1}) > 0$. La construcción se puede ver en la Figura 2.1.

Asimismo, supongamos que tenemos otro levantamiento del mismo conjunto de vectores B cuyo valor es $w + f$, donde $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ es un funcional lineal. Es decir, llamamos \hat{p}_i al punto $(p_i, w_i + f(p_i))$.

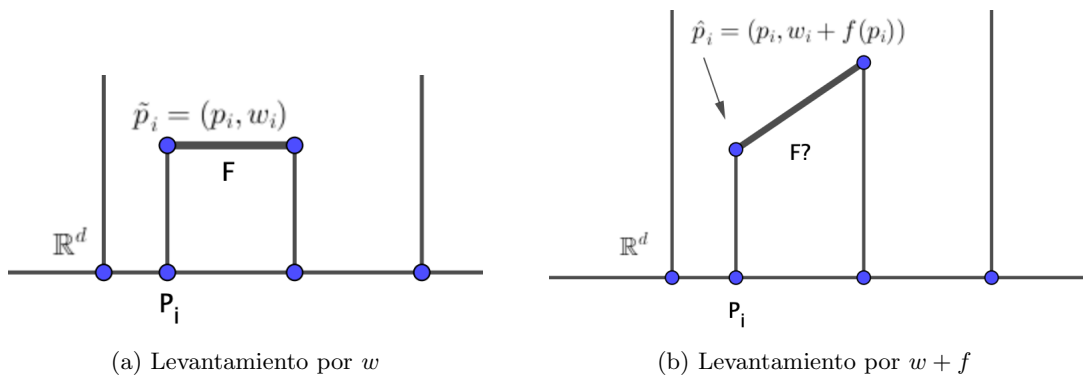


Figura 2.1: Construcción de la demostración del Lema 2.1.3

Queremos ver que existe otro funcional ψ que define a la misma cara inferior F , como cara de la configuración formada por los \hat{p}_i . Es decir, queremos que se tenga que $\psi(\hat{p}_i) = \phi(\tilde{p}_i)$. Para ello basta tomar como funcional:

$$\psi(x_1, \dots, x_d, x_{d+1}) := \phi(x_1, \dots, x_d, x_{d+1}) - f(x_1, \dots, x_d)\phi(e_{d+1})$$

Desarrollándolo tenemos que:

$$\begin{aligned} \psi(\hat{p}_i) &= \psi(p_i, w_i + f(p_i)) = \phi(p_i, w_i + f(p_i)) - f(p_i)\phi(e_{d+1}) = \\ &= \phi((p_i, w_i) + (0, f(p_i))) - f(p_i)\phi(e_{d+1}) = \\ &= \phi(p_i, w_i) + \phi(0, f(p_i)) - f(p_i)\phi(e_{d+1}) = \\ &= \phi(p_i, w_i) + f(p_i)\phi(0, 1) - f(p_i)\phi(e_{d+1}) = \phi(p_i, w_i), \end{aligned}$$

donde para las dos últimas igualdades se ha usado que ϕ es lineal

Además F es una cara inferior puesto que:

$$\psi(e_{d+1}) = \phi(e_{d+1}) - f(0)\phi(0, 1) = \phi(e_{d+1}) > 0.$$

□

Corolario 2.1.4. *El abanico secundario de B es compatible con el cociente de \mathbb{R}^n por el espacio lineal V de evaluaciones en B . Es decir, lo podemos entender como un abanico en el espacio cociente \mathbb{R}^n/V , que es isomorfo a \mathbb{R}^{n-k} .*

Teorema 2.1.5. *Con la identificación del corolario anterior, el abanico secundario de B es linealmente isomorfo al complejo de cámaras de cualquier transformada de Gale de B .*

Un esquema de la demostración es el siguiente:

Demostración. Consideramos como generadores del espacio \mathbb{R}^n de levantamientos la base canónica, o sea, los levantamientos que dan altura 1 a cierto elemento y cero a los demás.

La primera observación es que esos generadores, entendidos como elementos de \mathbb{R}^n/V , forman de hecho una transformada de Gale de B . En efecto, las dependencias entre esos elementos son precisamente los vectores de \mathbb{R}^n que se anulan en el cociente, o sea, que estén en V . Llamemos D a esa transformada de Gale de B , que en cierto modo es la transformada “canónica”, solo que vive en un espacio vectorial cociente para el que no tenemos una base canónica.

Para demostrar el Teorema vamos a demostrar que el complejo de cámaras de esta transformada de Gale D coincide, en efecto, con el abanico secundario de B . El Teorema valdrá para cualquier transformada de Gale, porque todas las transformadas de Gale de B son linealmente isomorfas. (Recuérdese que elegir una transformada de Gale concreta es equivalente a elegir una base para el núcleo de la matriz).

Dada una posible celda C de B , esa celda está en la subdivisión regular inducida por un cierto vector $w \in \mathbb{R}^n$ si y solo si w es equivalente en \mathbb{R}/V a un levantamiento que es cero en C y positivo en los demás elementos de B . Es decir, si y solo si ese levantamiento está en el cono relativamente abierto definido por el complementario de C en D . (Nota: como B y D son transformadas de Gale, hay una biyección natural entre los elementos de B y los de D ; eso implica que a todo subconjunto C de B le corresponde de manera canónica un subconjunto de D , al que seguimos denotando C).

Por tanto, tenemos que los w que definen una cierta subdivisión regular S están caracterizados por estar contenidos en los interiores relativos de ciertas celdas de D : los complementarios de las celdas de S . Eso significa que dichos vectores forman una cámara de D . Recíprocamente, si dos vectores están en la misma cámara de D , es decir, están en el interior relativo de los mismos conos abiertos en D , el mismo argumento nos dice que esos dos vectores producen la misma subdivisión regular. \square

Ejemplo 2.1.6. Supongamos que tenemos una configuración de 5 puntos que forman un pentágono regular. Si dibujamos su complejo de cámaras, estamos dibujando todos los posibles símlices que hay con esos vértices. Obtenemos 11 regiones. Estas 11 regiones se corresponden con las 11 triangulaciones de la configuración de vectores que se mencionan en el Ejemplo 1.2.17

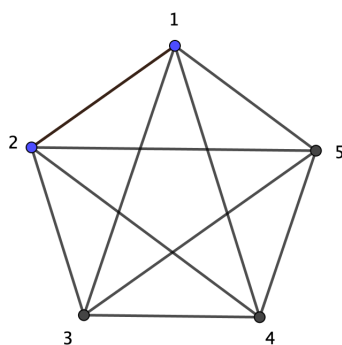


Figura 2.2: 11 regiones del complejo de cámaras

También obtenemos cinco tipos de cámaras de dimensión uno o cero: tres tipos de segmentos, y dos tipos de vértices (los puntos originales y las intersecciones de dos diagonales). Estos cinco tipos de cámaras se corresponden con los tipos de subdivisiones que no son triangulaciones en el Ejemplo 1.2.17, a excepción de la subdivisión trivial. La subdivisión trivial se corresponde con la cámara nula (el origen) que no aparece en la Figura 2.2 por ser un dibujo afín, pero que sí forma parte del complejo de cámaras de esta configuración si la entendemos como una configuración de vectores.

Por ejemplo como consideremos como cámara el pentágono central. Esa cámara está contenida en los triángulos 124, 134, 135, 235 y 345. Como hemos visto en la demostración del Teorema 2.1.5 esa cámara se corresponde con la subdivisión que tiene como celdas a los complementarios de esos triángulos, es decir, a los conos 35, 25, 24, 14 y 12, que forman la triangulación de más a la izquierda en la Figura 1.20. Podemos considerar también cámaras de menor dimensión, como el punto de intersección de los segmentos 14 y 25. Ese punto está en el interior relativo de 14 y 25, pero también de 135. Como cono del abanico secundario se corresponde por tanto con la subdivisión regular formada por los conos 235, 134 y 24, que no es una triangulación porque los dos primeros conjuntos no son símplices en la Transformada de Gale.

2.2. Politopo Secundario

Antes de definir el concepto de politopo secundario, se van a introducir algunos ejemplos sobre triangulaciones regulares y los vectores de levantamiento que motivarán la definición de politopo secundario.



Figura 2.3: Conjunto A

Ejemplo 2.2.1. Supongamos que tenemos una configuración de 4 puntos en una recta. Por ejemplo $A = \{P_1, P_2, P_3, P_4\} \subset \mathbb{R}$, con $P_1 = 1$, $P_2 = 2$, $P_3 = 4$ y $P_4 = 6$, en la recta real. Identificados como se muestra en la Figura 2.3. La lista de triangulaciones es la siguiente, donde la celda $\{P_i, P_j\}$ se denota como P_iP_j para todo i, j :

$$\mathcal{T}_1 = \{P_1P_4\},$$

$$\mathcal{T}_2 = \{P_1P_2, P_2P_4\},$$

$$\mathcal{T}_3 = \{P_1P_3, P_3P_4\},$$

$$\mathcal{T}_4 = \{P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4\}$$

Todas estas triangulaciones son regulares. Los correspondientes vectores de levantamiento son:

- $w_1 = (1, 2, 2, 1)$ es decir, los puntos P_2, P_3 más elevados que P_1, P_4
- $w_2 = (2, 1, 2, 2)$ es decir, el punto P_2 menos elevado que el resto.
- $w_3 = (2, 2, 1, 2)$ que corresponde con el punto P_3 menos elevado que el resto.
- $w_4 = (2, 1, 1, 2)$ es decir, los puntos P_1, P_4 más elevados que P_2, P_3

Podríamos haber elegido otros valores para los vectores de levantamiento siempre y cuando se respeten los puntos a los que se les da más o menos altura. Por ejemplo para obtener la triangulación \mathcal{T}_1 también podríamos haber cogido el vector $w_1 = (0, 1, 1, 0)$.

Ejemplo 2.2.2. Ahora supongamos que tenemos una configuración de puntos B pero esta vez formando un cuadrado. Tenemos las siguientes subdivisiones:

Sus correspondientes vectores de levantamiento son: Para $\epsilon > 0$

- $w_1 = (1 - \epsilon, 1, 1, 1)$, el punto 1 debe estar por debajo del hiperplano generado por 2, 3, 4.
- $w_2 = (1 + \epsilon, 1, 1, 1)$, el punto 1 debe estar por encima del hiperplano generado por 2, 3, 4
- $w_3 = (1, 1, 1, 1)$, todos a la misma altura.

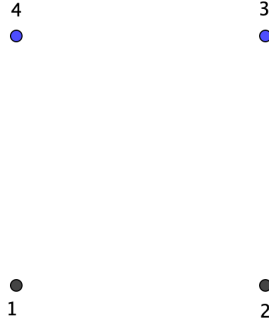


Figura 2.4: Conjunto B

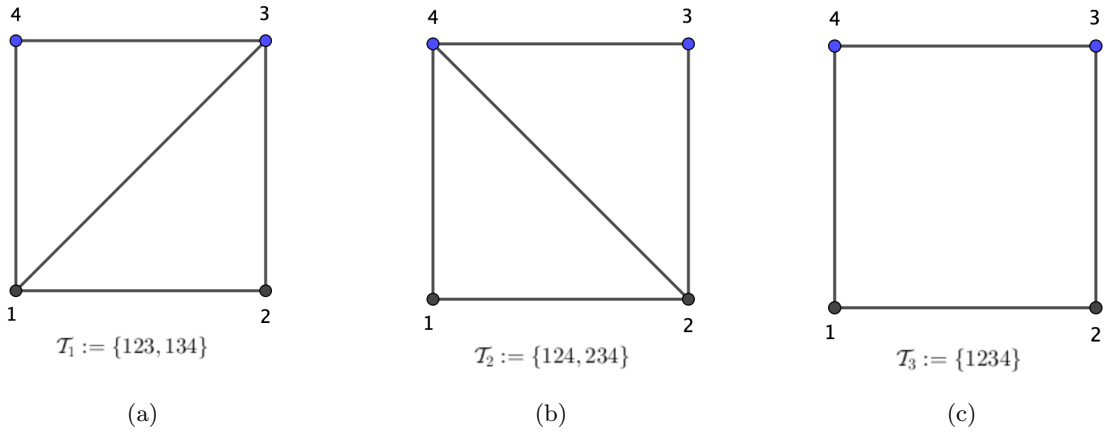


Figura 2.5: Posibles subdivisiones de B

Definición 2.2.3. Sea A una configuración de puntos y T una triangulación de A . Se define el **vector Gelfand-Kapranov-Zelevinsky** de T , denotado como $\phi_A(T)$, de la siguiente forma:

$$\phi_A(T) = \sum_{j \in J} \sum_{C \in T: j \in C} \text{vol}(C) e_j \in \mathbb{R}^J \cong \mathbb{R}^n$$

Donde $\{e_j\}_{j \in J}$ son los vectores de la base de \mathbb{R}^J y $\text{vol}(\cdot)$, representa el volumen euclídeo de un cuerpo en un d -espacio.

El vector GKZ es único para cada triangulación regular pero éste puede no ser único para las no regulares.

Siguiendo con el Ejemplo 2.2.1, vamos a calcular los volúmenes para obtener los vectores GKZ :

- $\mathcal{T}_1 : \text{vol}(14) = 5$
- $\mathcal{T}_2 : \text{vol}(12) = 1, \text{vol}(24) = 4$
- $\mathcal{T}_3 : \text{vol}(13) = 3, \text{vol}(34) = 2$
- $\mathcal{T}_4 : \text{vol}(12) = 1, \text{vol}(23) = 2, \text{vol}(34) = 2$

Vectores GKZ :

$$\phi(\mathcal{T}_1) := \begin{pmatrix} \text{vol}(14) \\ 0 \\ 0 \\ \text{vol}(14) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\phi(\mathcal{T}_2) := \begin{pmatrix} \text{vol}(12) \\ \text{vol}(12) + \text{vol}(24) \\ 0 \\ \text{vol}(24) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\phi(\mathcal{T}_3) := \begin{pmatrix} \text{vol}(13) \\ 0 \\ \text{vol}(13) + \text{vol}(34) \\ \text{vol}(34) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\phi(\mathcal{T}_4) := \begin{pmatrix} \text{vol}(12) \\ \text{vol}(12) + \text{vol}(23) \\ \text{vol}(23) + \text{vol}(34) \\ \text{vol}(34) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Definición 2.2.4. El politopo $\Sigma(A) = \{\phi_A(T) : T \text{ Triangulación de } A\} \subset \mathbb{R}^J \cong \mathbb{R}^n$ es el **politopo secundario de A**.

Acabando así con el Ejemplo 2.2.1: El politopo secundario es la envolvente convexa de los vectores GKZ

$$\Sigma(A) = \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Este ejemplo aunque tenga 4 coordenadas, el politopo resultante es de dimensión 2 ya que podemos encontrar dos dependencias afines:

Todo volumen se cuenta doble por cada triangulación, es decir, como el volumen de la configuración de puntos es 5, la suma de las coordenadas de los vectores GKZ es igual a 10. Aquí encontramos la primera dependencia afín.

La segunda aparece si por ejemplo multiplicamos cada coordenada por su punto, es decir, los puntos $P_1 = 1, P_2 = 2, P_3 = 4$ y $P_4 = 6$: La primera por 1, la segunda por 2, la tercera por 4 y la última por 6 y sumamos las coordenadas de cada vector GKZ obtenemos la constante de 35. Por lo tanto las dos últimas coordenadas se pueden deducir de las dos primeras mediante esas dependencias afines arriba descritas. El politopo secundario se muestra en la Figura 2.6.

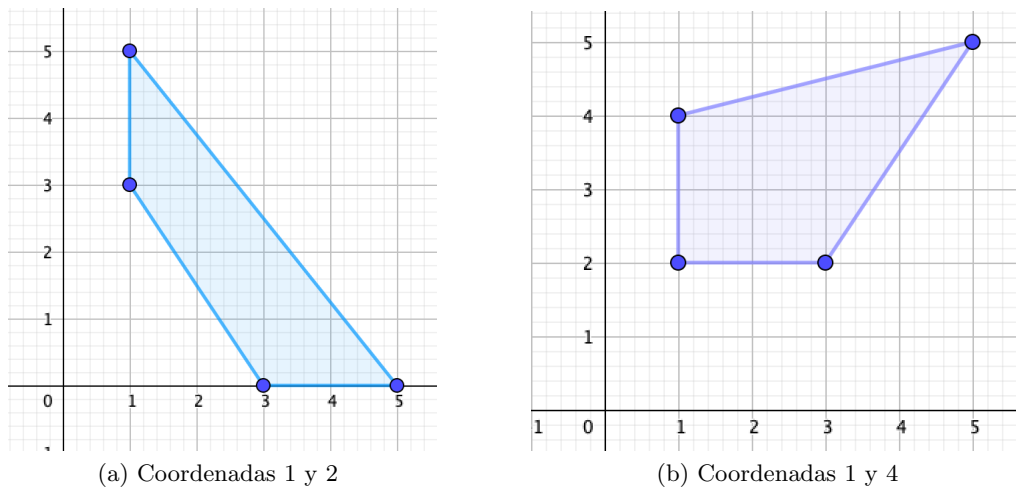


Figura 2.6: Politopo Secundario de A

Donde en la figura de la izquierda se han representado las coordenadas 1 y 2 mientras que en la de la derecha las 1 y 4.

Ahora vamos a calcular el abanico secundario de esta configuración de puntos. Para ello, necesitamos conocer las 4 subdivisiones intermedias y calcular los valores de las coordenadas de los vectores de levantamiento para obtener dichas subdivisiones.

La siguiente Figura 2.7 ilustra las subdivisiones intermedias entre las triangulaciones. Los puntos que no están rellenos representan puntos intermedios de una celda de la subdivisión.

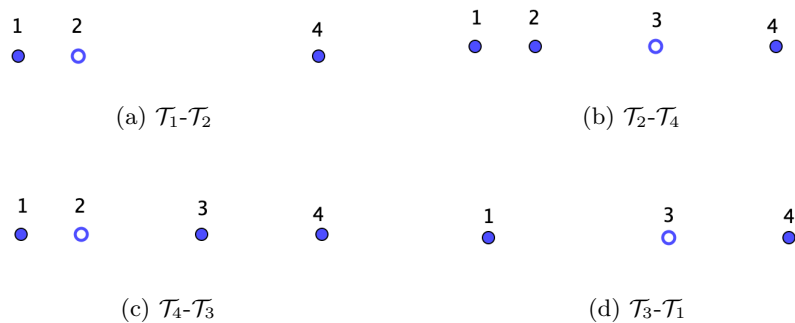


Figura 2.7: Subdivisiones intermedias de A

Para simplificar los cálculos, podemos asumir que dos de las alturas son cero debido a las dependencias: $w_2 = w_3 = 0$. Por tanto, vamos a deducir los valores de w_1 y w_4 :

Si nos fijamos en $\mathcal{T}_1\text{-}\mathcal{T}_2$, para que ocurra esa triangulación la pendiente entre 1 y 2 tiene que ser la misma entre 2 y 4, es decir: $w_2 - w_1 = \frac{w_4 - w_2}{4} \implies 4w_1 + w_4 = 0$ y además $w_4 < 0$.

Análogamente, en el caso $\mathcal{T}_3\text{-}\mathcal{T}_1$, la pendiente entre 1 y 3 tiene que ser la misma entre 3 y 4, es decir: $\frac{w_3 - w_1}{3} = \frac{w_4 - w_3}{2} \implies 3w_4 + 2w_1 = 0$ y además $w_4 > 0$.

Las dos restantes son más sencillas: en $\mathcal{T}_2\text{-}\mathcal{T}_4$ es necesario que $w_4 = 0$ y que $w_1 > 0$. Por último en $\mathcal{T}_4\text{-}\mathcal{T}_3$ se necesita que $w_1 = 0$ y $w_4 > 0$.

Si ahora representamos estos valores, obtenemos el abanico secundario de A representado en la Figura 2.8.

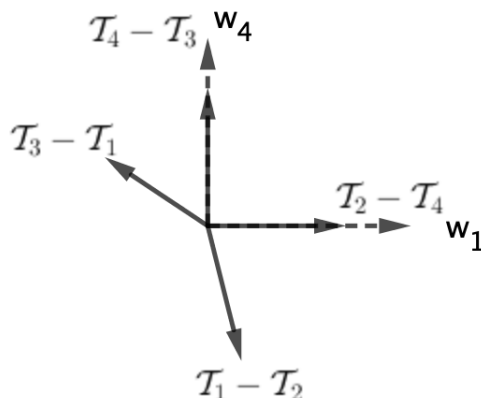


Figura 2.8: Abanico Secundario de A

Si se calcula el abanico secundario de una configuración de vectores, ese abanico puede no ser completo. Ya que, existen vectores de alturas que no definen ninguna subdivisión.

Si a los vectores les damos a todos un valor de altura negativo, nos encontramos en un caso en el que no hay caras inferiores, ya que el cono está *hacia abajo* luego el abanico ya no es completo porque no cubre todo el espacio, si no, solo una parte de éste.

A continuación se va a realizar otro ejemplo de politopo secundario usando nuevamente un pentágono regular.

Ejemplo 2.2.5. Las 5 triangulaciones regulares del pentágono son simétricas unas con respecto a las otras, con lo cual, los 5 vectores GKZ que obtendremos serán permutaciones uno del otro. Aún así, podremos comprobar que aunque los vectores GKZ tengan 5 coordenadas sabemos que habrá 3 dependencias afines entre ellos, por lo tanto, el politopo secundario resultante tendrá dimensión 2.

Sea $A = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$, los vértices de un pentágono regular de lado 1, donde $P_1 = (4.19, 0.55)$, $P_2 = (5, 0)$, $P_3 = (4.69, -0.95)$, $P_4 = (3.7, -0.95)$ y $P_5 = (3.39, 0)$. Se han obtenido estas coordenadas al utilizar la herramienta de *Geogebra* de construcción de un polígono regular. Las 5 triangulaciones regulares se obtienen trazando desde cada vértice las dos diagonales:

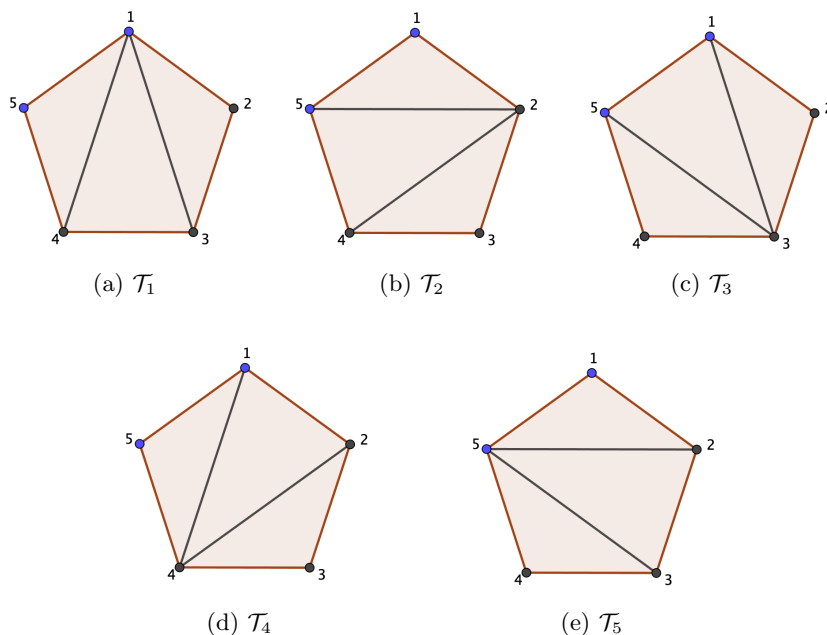


Figura 2.9: Triangulaciones de un pentágono regular

La lista completa sería: $\mathcal{T}_1 = \{123, 134, 145\}$, $\mathcal{T}_2 = \{125, 245, 234\}$, $\mathcal{T}_3 = \{123, 135, 345\}$, $\mathcal{T}_4 = \{124, 234, 145\}$ y $\mathcal{T}_5 = \{125, 235, 345\}$. Asimismo, mediante el programa *Geogebra 5* se han calculado las áreas. Los vectores *GKZ* resultantes serían:

$$\phi(\mathcal{T}_1) := \begin{pmatrix} vol(123) + vol(134) + vol(145) \\ vol(123) \\ vol(123) + vol(134) \\ vol(134) + vol(145) \\ vol(145) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.47 + 0.76 + 0.47 \\ 0.47 \\ 0.47 + 0.76 \\ 0.76 + 0.47 \\ 0.47 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.47 \\ 0.47 \\ 1.23 \\ 1.23 \\ 0.47 \end{pmatrix}$$

$$\phi(\mathcal{T}_2) := \begin{pmatrix} vol(125) \\ vol(125) + vol(245) + vol(234) \\ vol(234) \\ vol(234) + vol(245) \\ vol(125) + vol(245) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.47 \\ 1.7 \\ 0.47 \\ 1.23 \\ 1.23 \end{pmatrix}$$

El resto se calcularían de forma análoga. La primera dependencia afín que se puede ver a simple vista es que la suma de todas las coordenadas es constante igual a 32,25, que se corresponde con el área del pentágono multiplicada por 3. Como sabemos que tiene que haber 3 dependencias afines, podemos prescindir de las 3 últimas coordenadas, representando así el politopo secundario simplemente con las dos primeras coordenadas de los 5 vectores *GKZ*:

$$\Sigma(A) = conv \left\{ \begin{pmatrix} 1.7 \\ 0.47 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.47 \\ 1.7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1.23 \\ 0.47 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1.23 \\ 1.23 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.47 \\ 1.23 \end{pmatrix} \right\}$$

En la Figura 2.10 se puede ver representado el politopo secundario usando las dos primeras coordenadas. Obsérvese que los vértices adyacentes de este pentágono se corresponden con triangulaciones que están relacionadas por un flip.

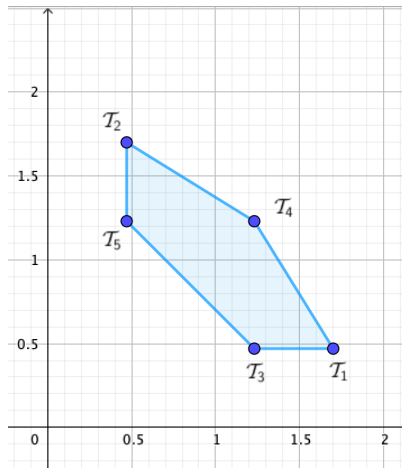


Figura 2.10: Politopo Secundario del pentágono A

Los flips son cambios locales que transforman una triangulación en otra. En esta memoria no vamos a entrar mucho en detalle sobre los flips, si se desea profundizar en este tema, la Sección 2.4 del libro de triangulaciones [6] aporta muchos resultados relacionados con este concepto.

Simplemente se dice que dos triangulaciones están relacionadas por un flip si son los dos únicos refinamientos de una subdivisión poliédrica que sólo puede ser refinada por triangulaciones. Otra definición equivalente tiene que ver con que en cualquier circuito va a haber exactamente dos triangulaciones que se identifican como \mathcal{T}_+ y \mathcal{T}_- (este resultado es un lema que no se va a demostrar en esta memoria, si se desea más información véase el *Lema 2.4.2* de [6]). Un flip intercambia estas dos triangulaciones formadas por un circuito. Un ejemplo sencillo de dos triangulaciones relacionadas por un flip es el siguiente:

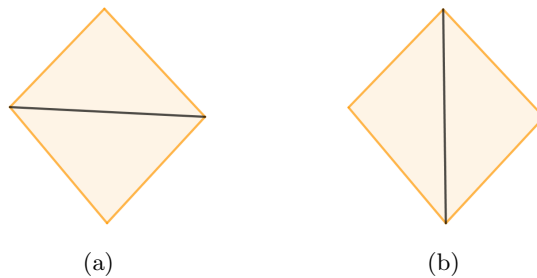


Figura 2.11: Dos triangulaciones relacionadas por un flip

Asimismo, si se calcula el abanico secundario del pentágono regular el resultado obtenido será el mismo que en la Figura 1.27b, pero haciendo el simétrico respecto del vector 1, debido a que en este ejemplo se han enumerado los vértices en el sentido horario.

Es importante entender esa figura como el abanico secundario. Por ejemplo, el cono que se encuentra entre 2 y 5 representa una triangulación cuyos símlices son el complementario del 25, esto es, el 134, el complementario del 23 (porque el cono 23 contiene al 25), que sería 145 y por último, el complementario del 24, que sería 123. Lo que se corresponde con la triangulación que hemos denotado como $\mathcal{T}_1 = \{123, 134, 145\}$.

2.3. Teorema de Gelfand, Kalpranov y Zelenvinsky

El Teorema de *Gelfand, Kalpranov y Zelevinsky* relaciona el politopo secundario con el politopo inicial. En esta memoria no se va a realizar su demostración debido a su complejidad, no obstante, una prueba completa de este teorema se puede encontrar en el libro de triangulaciones [6] en la sección 5.2.

Teorema 2.3.1. *Sea A una configuración de n puntos con dimensión d . Entonces, el politopo secundario de A tiene dimensión $n - d - 1$ y su poset de caras es isomorfo al poset de subdivisiones regulares de A , por refinamiento. En concreto,*

- *Vértices de $\Sigma(A) \longleftrightarrow$ triangulaciones regulares de A .*
- *Aristas de $\Sigma(A) \longleftrightarrow$ flips entre triangulaciones regulares de A .*
- *Facetas de $\Sigma(A) \longleftrightarrow$ Subdivisiones regulares “más gruesas” de A .*
- *La cara de dimensión completa de $\Sigma(A)$ corresponde con la subdivisión trivial, $\{A\}$.*

En el tercer punto, cabe recordar que las subdivisiones “más gruesas” son aquellas subdivisiones que con la relación de refinamiento se encuentran justo debajo de la subdivisión trivial en el poset de caras del politopo.

Siguiendo con los ejemplos descritos en la sección anterior es fácil comprobar este teorema:

Si nos fijamos en la Figura 2.10 vemos el politopo secundario de un pentágono regular. Obsérvese que los 5 vértices de este politopo se corresponden con las 5 posibles triangulaciones regulares de los vértices de un pentágono regular. Por ejemplo, el vértice \mathcal{T}_1 se corresponde con el vector GKZ correspondiente a la Triangulación \mathcal{T}_1 representada en la Figura 2.9a.

Asimismo, las 5 aristas identifican triangulaciones que están relacionadas por un flip. Esto es, la arista que une \mathcal{T}_2 con \mathcal{T}_4 representa la diagonal trazada en el pentágono regular que divide el pentágono en un triángulo y en un cuadrilátero, en este caso, uniendo el vértice 2 con el vértice 4.

El propio pentágono como cara del propio politopo secundario se corresponde con la subdivisión trivial del pentágono regular.

Si ahora se observa el politopo secundario representado en la Figura 2.6a de 4 puntos de una recta, se llega a las mismas conclusiones. Sus 4 vértices se corresponden con las 4 triangulaciones regulares descritas en el ejemplo.

Otro resultado importante es el siguiente:

Teorema 2.3.2. *El abanico secundario de A es igual al abanico normal del politopo secundario de $A, \Sigma(A)$*

El teorema enuncia que el abanico secundario definido como la descomposición regular de \mathbb{R}^n según qué subdivisión se produzca coincide con el abanico normal del politopo secundario definido con los vectores GKZ .

Si volvemos al Ejemplo 2.2.1, en la Figura 2.8 está representado el abanico secundario. Vamos a calcular el abanico normal del politopo secundario y comprobar que coinciden: Calculando primero el abanico normal, representado en la Figura 2.12, de la representación de las coordenadas 1 y 4 (Figura 2.6b).

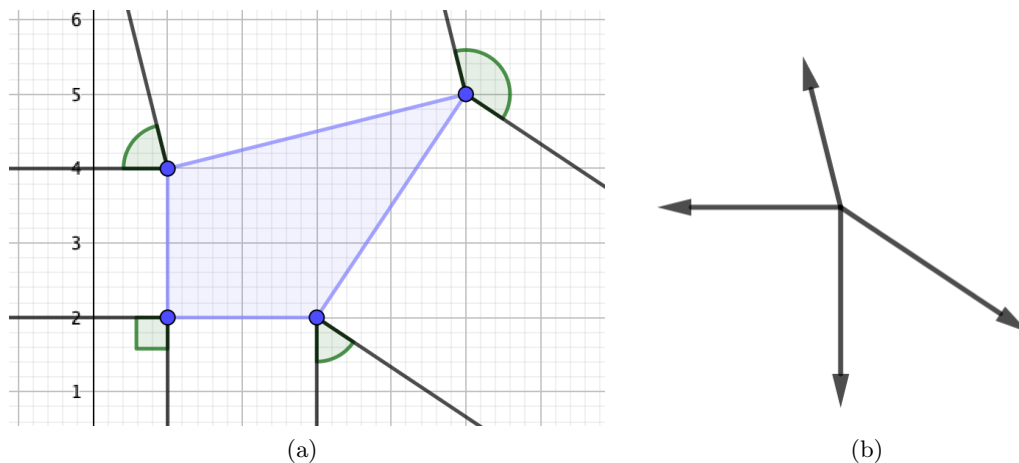


Figura 2.12: Abanico normal de A

Juntando los Teoremas 2.1.5 y Teorema 2.3.2 tenemos que:

Teorema 2.3.3. *El abanico normal del politopo secundario de A es el complejo de cámaras de $Gale(A)$.*

Vamos a ilustrar este nuevo teorema continuando con los ejemplos con los que ya se ha estado trabajando como el Ejemplo 2.2.1. En primer lugar, es necesario trabajar con los puntos como vectores, es decir, hay que homogeneizarlos, obteniendo así la siguiente configuración de vectores:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Para calcular su complejo de cámaras, hay que encontrar una base de vectores ortogonales a estos, una forma rápida y sencilla es buscando las dependencias entre los puntos, por ejemplo, entre los puntos 1,2,3 es fácil encontrar la dependencia afín: $2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 0$. Ahora solo nos queda buscar otra dependencia que puede ser por ejemplo: $1 \cdot 2 - 2 \cdot 3 + 1 \cdot 4 = 0$. Por lo tanto una base de vectores ortogonales a la configuración de vectores sería:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Si se representan los vectores columna de la base, se obtiene la Transformada de Gale de nuestro conjunto de 4 puntos inicial:

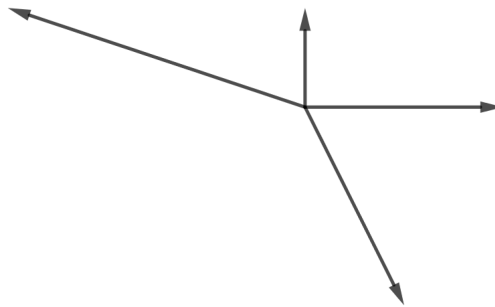


Figura 2.13: Transformada de Gale

El complejo de cámaras lo forman los cuatro conos de la Transformada de Gale.

Es fácil ver que la Transformada de Gale en 2.13 y el abanico representado en 2.12 son linealmente isomorfos. Realizando una simetría central obtenemos el otro.

Capítulo 3

Zonotos y Teselaciones Zonotopales

En este último capítulo se introducen los conceptos de zonotos y teselaciones zonotopales. El objetivo de este capítulo es relacionar la teoría de las teselaciones zonotopales con lo expuesto anteriormente sobre el politopo secundario. Por ejemplo, hay un zonotopo de todas las subdivisiones zonotopales regulares, hay un grafo de flips entre teselaciones cúbicas. Se darán algunos ejemplos y se enunciará el Teorema de Bohne-Dress, sin embargo, no se van a demostrar muchos de los resultados que aparecen en este capítulo sino que más bien se van a introducir las ideas y las relaciones para conseguir encajar toda esta teoría con lo anterior.

Los resultados recogidos se han estudiado en la referencia Ziegler [1], donde se habla de este tema en la Sección 7.

3.1. Zonotos. Suma de Minkowski

Definición 3.1.1. En primer lugar, definimos la **Suma de Minkowski** de los conjuntos P y Q en \mathbb{R}^d como el conjunto $P + Q := \{x + y \mid x \in P, y \in Q\}$.

Definición 3.1.2. Decimos que P es un **sumando de Minkowski** de un conjunto X si existe un conjunto Q tal que $P + Q = X$.

Ejemplo 3.1.3. Sea $A = \{(0, -1), (0, 1), (1, 0)\}$, $B = \{(0, 0), (1, -1), (1, 1)\}$ representados en la Figura 3.1a, donde el conjunto A está representado en rojo y el conjunto B en verde, y al lado en la Figura 3.1b su correspondiente suma acorde a la Definición 3.1.1:

$$A + B = \{(0, -1), (0, 1), (1, 0), (1, -2), (1, 0), (2, -1), (1, 0), (1, 2), (2, 1)\}$$

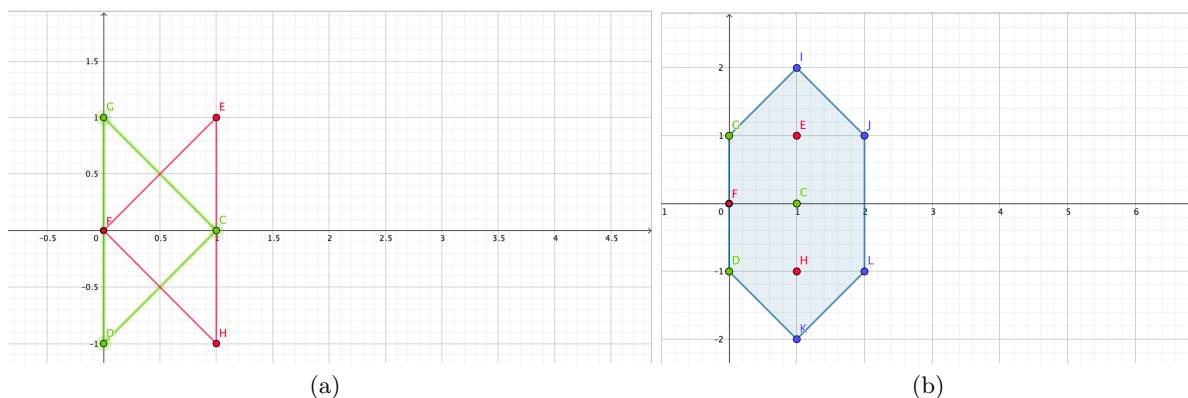


Figura 3.1: Suma de Minkowski de A y B

Definición 3.1.4. Decimos que un politopo Z es un **zonotopo** si se puede escribir como suma de Minkowski de segmentos. Si V es una configuración finita de vectores, llamamos zonotopo generado por V a la suma de Minkowski de los segmentos v , con $v \in V$.

Un **zonotopo** es un politopo especial que puede verse de varias formas: como una proyección de un cubo, una suma de Minkowski de segmentos de línea y un politopo en el cual todas sus caras son centralmente simétricas.

Vamos a probar que son equivalentes.

Proposición 3.1.5 (Proposición 2.2.14 de [5]). *Sea Z un politopo con caras centralmente simétricas entonces Z es un zonotopo.*

Demostración. Siguiendo la definición anterior está claro que toda cara de un zonotopo Z es a su vez un zonotopo y un sumando de Minkowski de Z .

Un polígono en el plano es centralmente simétrico si y solo si para cualquier arista existe otra arista paralela de igual longitud, lo que implica que toda arista es un sumando de Minkowski. Por lo tanto, tenemos que si toda cara de dimensión 2 de Z es centralmente simétrica, entonces toda cara de dimensión 2 de Z es un zonotopo. Faltaría demostrar que esto implica que cualquier arista de Z es un sumando de Minkowski de Z , en cualquier dimensión. Para demostrar este último paso lo haremos por inducción.

Si el politopo Z es de dimensión 2 la implicación está clara.

Supongamos que Z tiene $\dim = r \geq 3$ y suponemos que la implicación es cierta para cualquier politopo de $\dim \leq r - 1$. Por lo que tenemos que todas las facetas de Z son zonotos. Solo tendríamos que demostrar que bajo esta hipótesis Z también es un zonotopo.

Sea e_0 una arista de Z , F_0 una faceta de Z que contiene a e_0 , Z' la proyección de Z sobre e_0 y F'_0 la proyección de F_0 en la dirección de e_0 . Afirmamos que toda faceta de Z' es la proyección de una faceta de Z que incluye a e_0 como sumando de Minkowski. Por construcción, esta afirmación es cierta para la faceta F'_0 de Z' . Luego consideramos otra faceta distinta F'_1 de Z' que interseque con F'_0 . Por lo tanto $F'_0 \cap F'_1$ contiene un vértice que denotaremos por v_1 y que pertenece a Z' . Como $v_1 \in F'_0$, v_1 es la proyección de una arista e_1 de Z paralela a e_0 . Pero esto quiere decir que e_1 es una arista de la preimagen F_1 de F'_1 y por tanto, e_0 es un sumando de F_1 . Ahora sea F'_2 otra faceta de Z' que interseca con F'_1 . Entonces podemos utilizar el mismo argumento que en el anterior caso para concluir que F'_2 es la imagen de una faceta F_2 de Z que tiene a e_1 y por consecuencia a e_0 como suma de Minkowski. Como $r \geq 3$, la frontera del $(r - 1)$ -politopo Z' es conexa, es decir, desde F'_0 podemos llegar a todas las facetas, así que la afirmación es cierta para todas.

Consideremos ahora la función $h : Z' \rightarrow \mathbb{R}$ que a cada punto de Z' lo asocia la anchura del politopo Z en la dirección de la arista e_0 sobre ese punto. Es decir, para cada $p \in Z'$, $h(p)$ es la longitud de $Z \cap l_p$ donde l_p es la recta paralela a e_0 que pasa por p . Esa función es convexa en Z' y la afirmación del párrafo anterior nos dice que es mayor o igual que $\text{longitud}(e_0)$ en la frontera de Z' . Por tanto, es $\geq \text{longitud}(e_0)$ en todo Z' , lo que prueba que e_0 es un sumando de Minkowski de Z . \square

Esta prueba ha sido sacada de [5].

Visualmente, sacamos una foto de un cubo regular de dimensión 3 desde un punto de vista genérico. Lo que veríamos en la fotografía es un hexágono centralmente simétrico, que sería la proyección del cubo.

En dimensión dos un zonotopo es un polígono simétrico por rotación de 180 grados (sus lados vienen en parejas paralelas y de igual longitud). La siguiente Figura 3.2a muestra un zonotopo Z en dimensión 2 como la suma de Minkowski de 4 segmentos: 1, 2, 3, 4, todos de longitud 1 representados en la Figura 3.2b.

Definición 3.1.6. Una **pseudorrecta** es una curva poligonal sin autointersecciones, con un número finito de puntos donde la derivada no es continua y cuyos extremos “se van” al infinito en direcciones opuestas. Un arreglo de pseudorrectas es un conjunto finito de pseudorrectas en el plano que cumplen que:

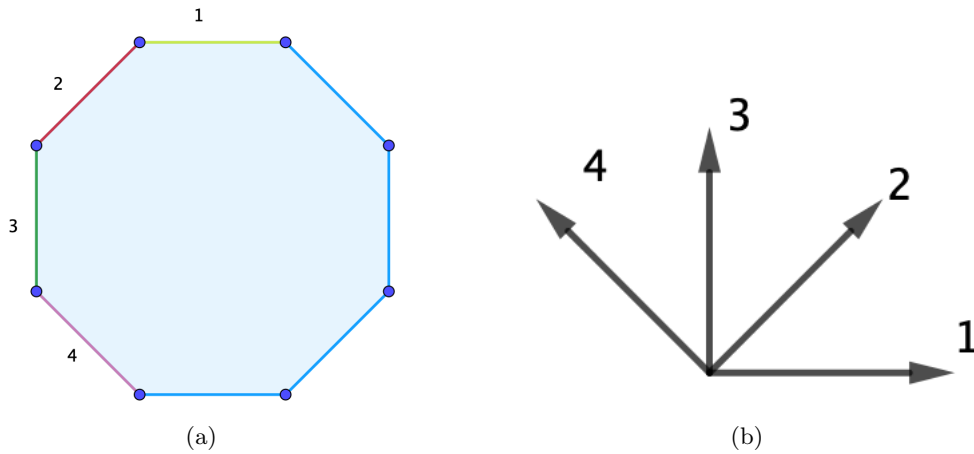


Figura 3.2: Zonotopo Z y sus generadores

- i) Dos pseudorrectas cualesquiera son disjuntas (lo que llamaremos paralelas) o bien se intersecan en un único punto.
- ii) La propiedad de ser paralela es transitiva, esto es, si una pseudorrecta interseca a otra perteneciente a un par de paralelas, también intersecará a la segunda.

Sea $P = \{\ell_1, \dots, \ell_{n-1}\}$ un arreglo de $n - 1$ pseudorrectas. Al igual que ocurriría con los hiperplanos, se puede definir un semiespacio positivo y otro negativo generado por cada pseudorrecta. La siguiente figura, sacada del libro de Ziegler [1] página 214, muestra un ejemplo en \mathbb{R}^2 de un arreglo de 5 pseudorrectas sobre las que se han definido un semiespacio negativo y otro positivo, la flecha que se encuentra al lado de la etiqueta señala el semiespacio positivo. En este ejemplo podemos ver que las rectas ℓ_3 y ℓ_4 son paralelas.

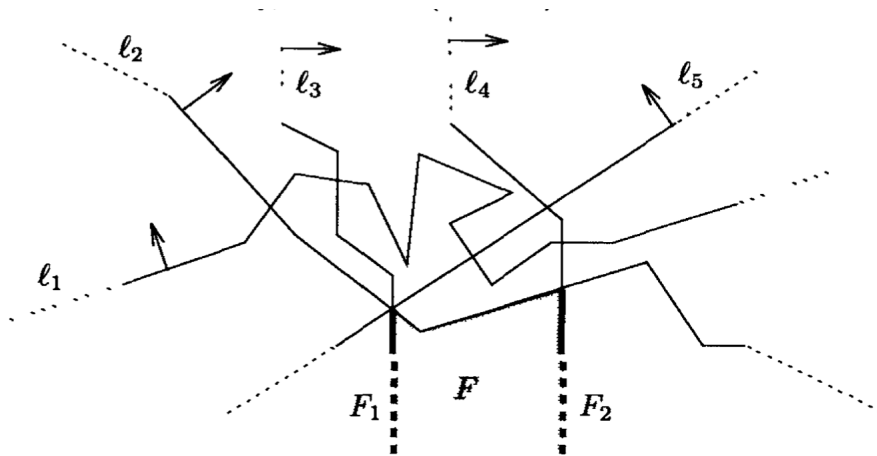


Figura 3.3: Arreglo de pseudorrectas P

Se define una cara de P como el conjunto F^X , donde $X \in \{+, -, 0\}^{n-1}$, formado por todos los puntos $x \in \mathbb{R}^2$, que se encuentran en el lado positivo de ℓ_i si $X_i = +$, en el negativo si $X_i = -$ y en la propia pseudorrecta ℓ_i si $X_i = 0$.

Así por ejemplo para el trozo que se encuentra en negrita en la Figura 3.3, comprendido entre F_1 y F_2 , si seguimos el mismo procedimiento que el empleado en los hiperplanos le correspondería el vector de signo: $(-, 0, +, -, -)$. Se dice que ese trozo es el asociado a la cara $(-, 0, +, -, -)$.

De igual manera, también se asignan nombres a las caras en el infinito, obtenidas por cada cara no acotada en P , donde se tiene en cuenta que las rectas paralelas se intersecan en el infinito. Siguiendo con el ejemplo de la Figura 3.3. Los dos tramos F_1 y F_2 y la región F , los cuales se identifican como: $(-, -, 0, -, -)$, $(-, -, +, 0, -)$ y $(-, -, +, -, -)$, respectivamente. Determinan la

cara en el infinito G^Y con $Y = (-, -, 0, 0, -)$ el punto de intersección entre ℓ_3 y ℓ_4 (tomando ℓ_3 y ℓ_4 como pseudorrectas paralelas).

Lema 3.1.7. *Sea $P = \{\ell_1, \dots, \ell_{n-1}\}$ un arreglo de pseudorrectas para las cuales se ha definido una región positiva. Entonces el conjunto de vectores de signo:*

$$\mathcal{V}^* = \{(X^F, +) : F \text{ es una cara de } P\} \cup \{(Y^G, 0) : G \text{ es una cara en el infinito de } P\} \cup \\ \cup \{(-X^F, -) : F \text{ es una cara de } P\} \subseteq \{+, -, 0\}^n$$

forma una matroide orientada de rango 3.

La demostración de este lema se puede encontrar en el libro de Ziegler [1], en la Sección 7.4

Otro concepto interesante que aparece en el libro de Ziegler es el de **pseudoplano**, que no es más que una pseudorrecta pero en una dimensión más.

Podemos incluso irnos a dimensión arbitraria: Un **pseudohiperplano** en \mathbb{R}^d es un subespacio topológico P tal que el par (\mathbb{R}^d, P) es homeomorfo al par (\mathbb{R}^d, H) , donde H es un hiperplano. (Ser homeomorfos como pares significa que existe un homeomorfismo de \mathbb{R}^d en \mathbb{R}^d que lleva P a H). Un arreglo de pseudohiperplanos es un conjunto finito de pseudohiperplanos que satisface ciertos axiomas de intersección que no se van a especificar en esta memoria, pero que permiten definir el concepto y enunciar el siguiente teorema que relaciona los arreglos de pseudohiperplanos con las matroides orientadas; se conoce como el Teorema de la representación topológica de Lawrence y es el siguiente:

Teorema 3.1.8. *Todo arreglo lineal de n pseudohiperplanos en \mathbb{R}^d produce una matroide orientada de rango d .*

El recíproco también es cierto:

Toda matroide orientada de n elementos de rango d puede ser representada por un arreglo lineal de n pseudohiperplanos en \mathbb{R}^d de manera esencialmente única.

Este enunciado aparece en el libro de Ziegler pero la demostración completa solo aparece en [5],

3.2. Teselaciones Zonotopales

3.2.1. Teselación regular o coherente

Una teselación zonotopal es una subdivisión de un zonotopo en zonotopos más pequeños con ciertas propiedades. La definición formal sería:

Definición 3.2.1. Una **teselación zonotopal** de rango d es un complejo poliédrico C de dimensión $d + 1$, tal que la unión de todos los poliedros, así como cada uno de ellos, son zonotopos. Una teselación zonotopal \mathcal{T} de $Z(V)$ se dice regular o coherente si se obtiene como la proyección de la envolvente inferior de un zonotopo de una dimensión mayor, que se puede obtener simplemente añadiendo una coordenada más a cada vector de V .

El procedimiento es similar al de los politopos: Se tiene un conjunto de vectores en \mathbb{R}^d que definen un zonotopo. Los vectores se levantan a \mathbb{R}^{d+1} y cada levantamiento genera un zonotopo de dimensión $d + 1$. Si se observa su parte inferior, ésta se proyecta y genera una subdivisión zonotopal regular.

Si una teselación zonotopal es regular, entonces proviene de un zonotopo de dimensión $d + 1$ el cual se corresponde con una matroide orientada de rango $d + 1$.

Las teselaciones zonotopales de $Z(V)$ admiten una estructura de poset por refinamiento. Las teselaciones más finas son aquellas cuyas caras son todas paralelepípedos, es decir, están generadas por subconjuntos linealmente independientes de V . Las llamamos **teselaciones cúbicas**.

En dimensión 2 una teselación cúbica es una teselación en paralelogramos. Una de las propiedades interesantes de las teselaciones cúbicas es el hecho de que es posible construir todas las teselaciones de un zonotopo dado partiendo de una concreta y haciendo lo que se llaman “flips”. En el caso

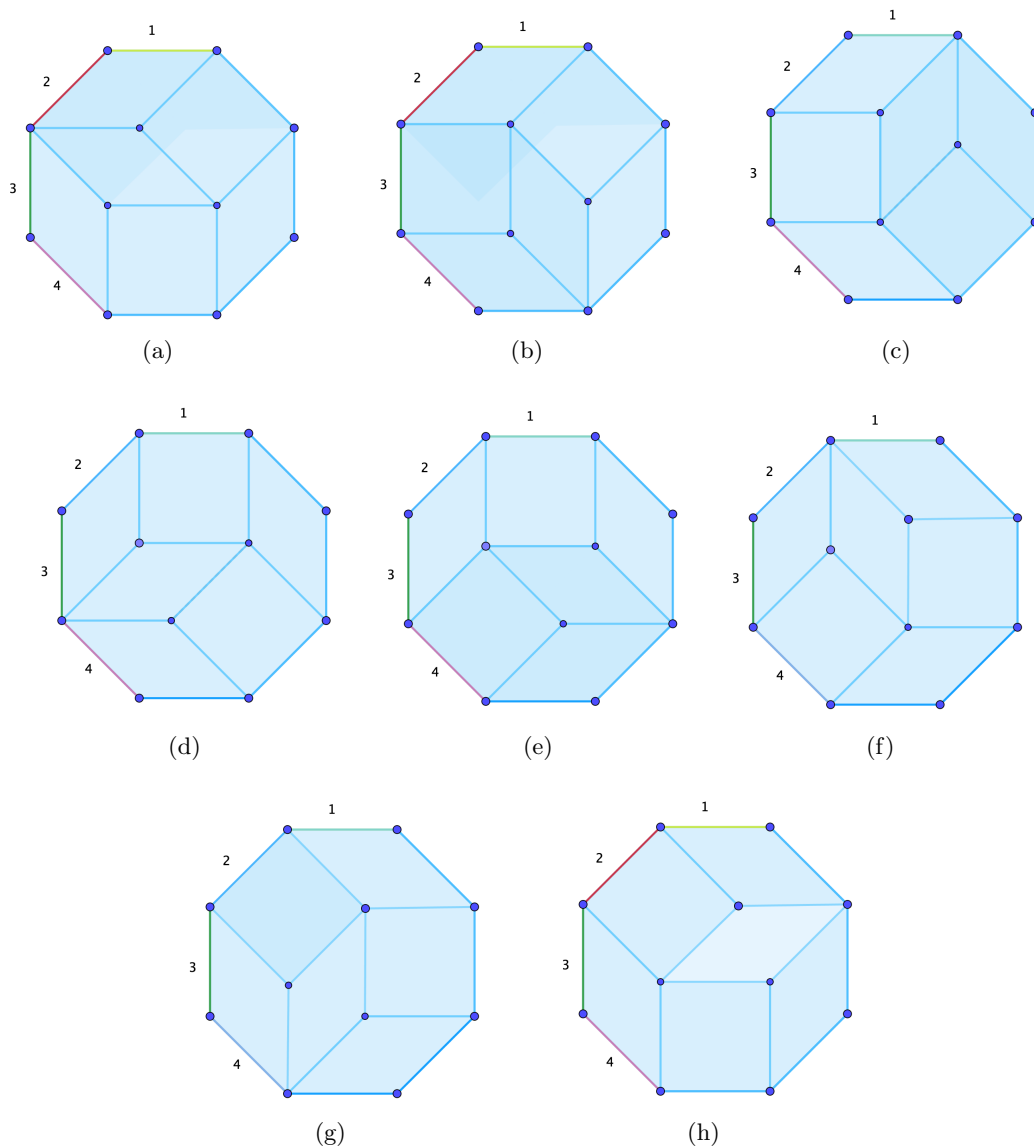


Figura 3.4: Teselaciones cúbicas de Z

de dimensión dos, un flip consiste en encontrar un hexágono dividido en tres trozos, y girar ese hexágono 180 grados. En la Figura 3.4 se van a ilustrar las posibles teselaciones cúbicas del zonotopo Z de la Figura 3.2a.

Las teselaciones están ordenadas de tal forma que forman un ciclo: a-b-c-d-e-f-g-h-a y están conectadas por flips. Es decir, dos teselaciones consecutivas únicamente difieren en un flip.

Para definir flips en dimensión arbitraria se usa el hecho de que un zonotopo de dimensión d con $d + 1$ generadores tiene exactamente 2 teselaciones cúbicas, las cuales están conectadas mediante un flip, igual que ocurría con las triangulaciones y los circuitos.

Por ejemplo, si partimos de la teselación dibujada en (a) vemos que el hexágono inferior izquierdo, formado por los generadores 1,3,4, podemos rotarlo 180 grados y obtenemos la teselación de (b). Si ahora en (b) rotamos el hexágono situado en el extremo superior derecho generado por 2,3,4, obtenemos (c) y así hasta obtener las 8 teselaciones regulares del zonotopo de la Figura 3.2a.

Al igual que sucedía con los politopos, el ciclo que forman las teselaciones es un politopo secundario, en particular un zonotopo secundario.

Para representar las coordenadas de este zonotopo secundario el procedimiento es un poco distinto que con los politopos. Cada generador, o sea, cada elemento de V , define una **zona** dentro de la teselación zonotopal que es la unión de todas las celdas que usan a ese generador. Por ejemplo, si observamos la teselación (a), la zona que define el generador 1 queda representada en la Figura

3.5a, para calcular el politopo secundario hay que calcular el volumen de la región positiva que define cada zona en cada teselación. Por ejemplo, en la teselación (a) obtendríamos el siguiente vector:

$$\begin{pmatrix} 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ 1 + \sqrt{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

La primera coordenada $1 + \sqrt{2}/2$ viene de que en la parte positiva (o sea, a la derecha) de la zona 1 tenemos un cuadrado de área 1 y un rombo de área $\sqrt{2}/2$. La segunda coordenada es cero porque en la parte positiva (es decir, superior derecha) de la zona 2 no hay nada. La tercera coordenada proviene de que la parte positiva de la zona 3 (la parte superior) hay un cuadrado de área 1 y dos rombos de área $\sqrt{2}/2$. Por último, la cuarta coordenada la obtenemos al sumar el área de la parte positiva de la zona 4 (esto es, la parte superior izquierda) que es un rombo de área $\sqrt{2}/2$.

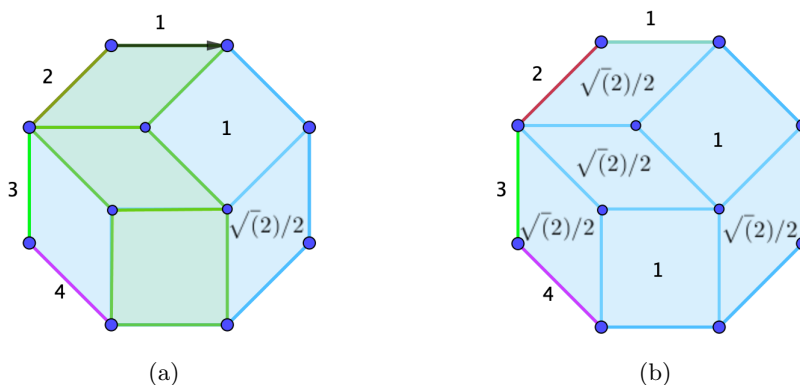


Figura 3.5: Zona del generador 1 en (a) y área de las teselas en (a)

Al igual que sucedía con los politopos usuales, no es necesario calcular todas las coordenadas ya que habrá algunas dependencias y por lo tanto, con dos coordenadas es suficiente para representar el politopo secundario, en general, es suficiente con $n - d$ para un zonotopo con n generadores y dimensión d .

En este caso, se van a elegir las coordenadas correspondientes a los generadores 1 y 3.

Dado que los 4 segmentos generadores tienen longitud igual a 1, resulta sencillo calcular el área de las teselas.

$$\Sigma(Z) =$$

$$\text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 + \sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2} \\ 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 + \sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}$$

Obteniendo así el politopo secundario $\Sigma(Z)$ que resulta ser también un zonotopo, Figura 3.6a.

El resultado es un octógono regular. Ahora vamos a calcular su abanico normal, representado en la Figura 3.6b:

Se puede dibujar también el abanico secundario. En una subdivisión zonotopal no se dan vectores de altura a cada vértice del zonotopo sino que se dan vectores de altura a cada vector, siendo los vectores generadores los 4 segmentos que generan el zonotopo, la orientación que se va a definir para cada vector queda representada en la Figura 3.2b, donde la flecha indica el extremo en el que se va a definir la altura.

Para dibujar el abanico secundario, se necesita conocer el vector de alturas intermedio entre dos subdivisiones. Por ejemplo, si nos fijamos en las subdivisiones (a) y (h) de la Figura 3.4, la subdivisión intermedia sería aquella con un hexágono en la parte superior y debajo los 3 cuadriláteros, como se puede ver en la Figura 3.7a.

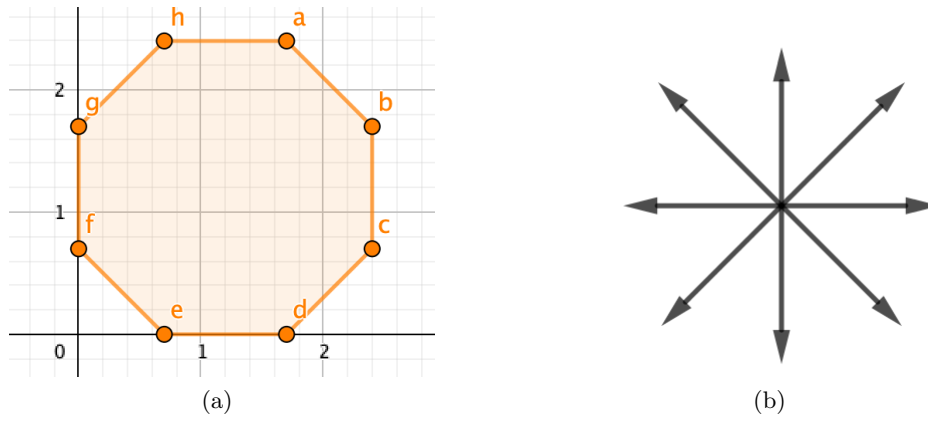


Figura 3.6: Zonotopo secundario $\Sigma(Z)$ y su abanico normal

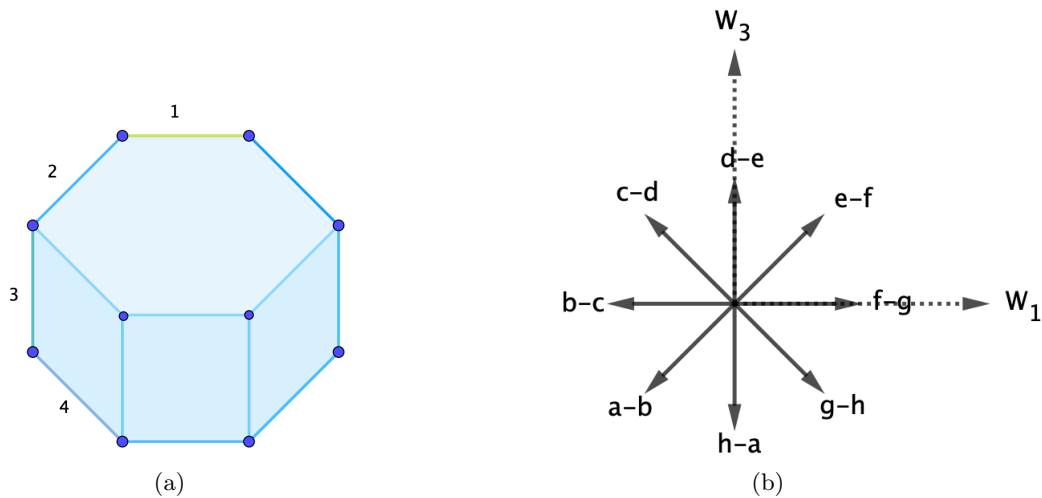


Figura 3.7: Subdivisión intermedia entre (a) y (h) y Abanico secundario de Z

Para formar esta subdivisión intermedia las alturas de 1,2,3, deben generar que el hexágono sea coplanar. La altura de 4 es libre siempre y cuando se garantice que el zonotopo se doble en el sentido deseado para obtener esa subdivisión.

Al igual que ocurría con el politopo secundario, debido a las dependencias entre los vectores, podemos asumir que dos de las alturas son 0. Por ejemplo, tomaremos como norma que los generadores diagonales 2 y 4 siempre van a tener altura 0. Esto simplifica el problema, simplemente hay que encontrar los valores adecuados para las alturas de 1 y 3.

Siguiendo con el ejemplo de la subdivisión intermedia de la Figura 3.7a, se debe asignar al vector 1 altura 0, el mismo valor que tienen 2 y 4 para así garantizar que el hexágono sea coplanar. Sin embargo, el 3 debe tener altura distinta de 0 para que se originen los cuadriláteros. Tal y como se ha definido la orientación en la Figura 3.2b, la altura correspondiente a 3 debe ser negativa.

Si ahora nos fijamos en la subdivisión intermedia entre (c) y (d), el hexágono coplanar sería el diagonal situado en el extremo superior izquierdo, formado por 1, 2, 3. En este caso, se desconoce la altura de 1, 3 mientras que la de 2 sigue siendo 0. Para que sean coplanares, basta con que la altura del 1 y la de 3 sean opuestas, para conseguir que la media aritmética sea 0. En este caso, la altura del 1 debe ser negativa ya que al ser 0 la altura del 4, se garantiza que se dobla de manera convexa, ya que la parte izquierda queda más levantada que la parte derecha, haciendo que el hexágono se vea así.

Finalmente, si repetimos el mismo argumento para las otras subdivisiones, obtenemos su abanico secundario, representado en la Figura 3.7b donde los ejes representan las coordenadas del vector del levantamiento asignadas a los generadores 1 y 3.

En el abanico secundario están etiquetados los rayos con la subdivisión intermedia entre cada

teselación, el cono formado por dos rayos consecutivos se corresponde con la teselación común a ambos, es decir, el cono formado por los rayos etiquetados como $d-e$ y $e-f$ es el cono correspondiente a la teselación (e).

Es fácil comprobar que el abanico normal del zototopo secundario representado en la Figura 3.6b y el abanico secundario del zototopo inicial que se puede ver en la Figura 3.7b coinciden.

3.2.2. Subdivisiones zototopales y arreglos de pseudohiperplanos. Teorema de Bohne-Dress

A cada teselación zototopal \mathcal{T} de un zototopo $Z(V)$ le podemos asociar un arreglo de pseudohiperplanos, usando el concepto de zona. Para cada celda de \mathcal{T} , dibujamos en esa celda el arreglo de hiperplanos dual, poniendo el origen en el centro de la celda, y de modo que los hiperplanos corten al borde de la celda a la mitad. Véase un ejemplo en la Figura 3.8. Haciendo esto se tiene que los “pedazos” correspondientes a un mismo generador se pegan bien formando un pseudohiperplano que recorre la zona de ese generador.

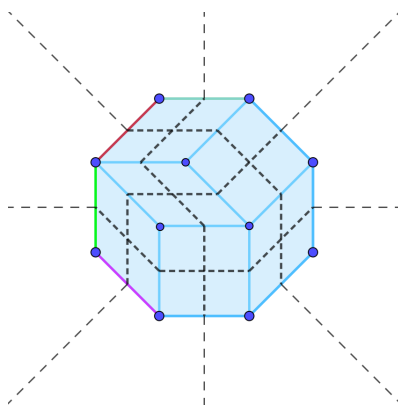


Figura 3.8: Arreglo de pseudohiperplanos de Z

Con esta construcción, las teselaciones coherentes de $Z(V)$ son las que se corresponden con arreglos de pseudohiperplanos combinatoriamente equivalentes a los obtenidos por traslación de los hiperplanos del arreglo dual de $Z(V)$. Aunque no entraremos en detalle, la correspondencia es que el vector de levantamiento que usamos para teselar $Z(V)$ nos dice cuánto hay que trasladar cada hiperplano para obtener el arreglo dual de esa teselación. Olvidar la última coordenada, $d+1$, en el levantamiento de los vectores se corresponde con olvidar el término independiente de los hiperplanos (afines) trasladados, obteniendo así el arreglo de hiperplanos vectoriales original.

Si en lugar de utilizar ese hiperplano para intersecar, se utiliza $x_{d+1} = 1$, se genera un arreglo de hiperplanos afines, en lugar de lineales. Por lo tanto, en el ámbito de los hiperplanos se han convertido hiperplanos lineales en hiperplanos afines trasladando cada uno de los hiperplanos para que no contengan el origen. Esta es la manera de entender todas las subdivisiones regulares del zototopo. El zototopo es dual a este arreglo de hiperplanos y las subdivisiones regulares de ese zototopo se corresponden con los arreglos de hiperplanos afines que se obtiene mediante esa traslación de hiperplanos lineales. En particular:

Lema 3.2.2 (Lema 7.30 de [1]). *Todo arreglo de pseudohiperplanos que provenga de una teselación zototopal regular es realizable (es decir, es combinatoriamente equivalente a un arreglo de hiperplanos afines).*

Las teselaciones zototopales no regulares están por tanto relacionadas con las matroides orientadas no realizables como conjuntos de vectores.

Un ejemplo bastante ilustrativo de una matroide orientada no realizable es la matroide orientada que viola el famoso *Teorema de Pappus*, el cual establece que si se tiene un conjunto de 9 puntos en el plano \mathbb{R}^2 y se cumple que ciertas ternas de ese conjunto son colineales, entonces existe otra terna que también lo tiene que ser. La matroide orientada *non-pappus* es una matroide orientada

con 9 elementos donde hay 8 ternas colineales y una que no lo es. Para entender bien este ejemplo vamos a pensar en la matroide orientada como una configuración de rectas en lugar de puntos, el resultado se muestra en la Figura 3.9a, obtenida del libro de Ziegler [1], Sección 7.4 página 216, al cual se ha añadido la recta horizontal formada por los 3 puntos colineales en negrita.

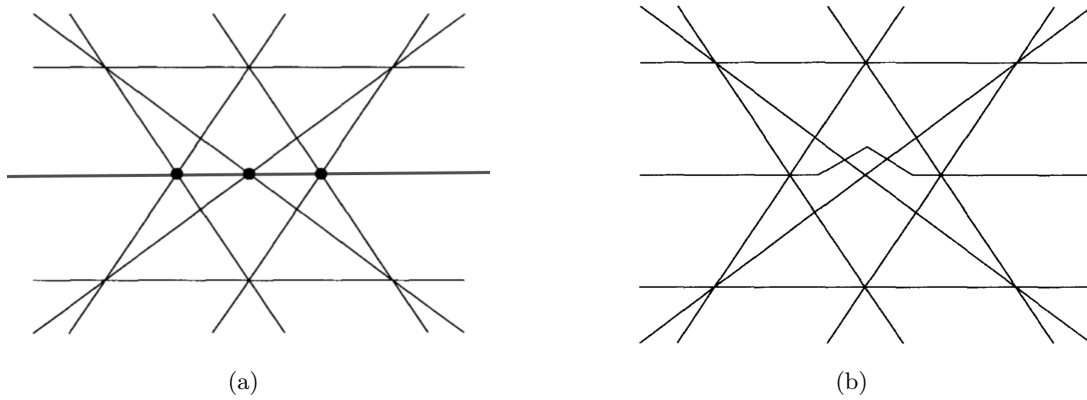


Figura 3.9: Arreglo de rectas *Pappus* y *non-Pappus*

Si ahora se perturba el arreglo de rectas de la figura anterior, haciendo que no se forme la terna que contiene a los puntos señalados en negrita como se muestra en la Figura 3.9b, sacada del libro de Ziegler [1] Sección 7.4 página 217, se obtiene un arreglo de pseudorrectas cuya matroide orientada es no realizable.

Vamos a trasladar este ejemplo a las subdivisiones zonotopales para poner un ejemplo de una teselación zonotopal no regular:

Consideramos un vector generador ortogonal a cada una de las rectas de la Figura 3.9a, obteniendo los siguientes generadores que denotaremos como 1,2,3,4,5:

$$1 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad 2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \quad 3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad 4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \quad 5 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Se han dibujado solo 5 generadores en vez de 9 ya que hay que tener en cuenta que hay un conjunto de 3 rectas paralelas (el generador 3) y 2 conjuntos de 2 rectas paralelas (los generadores 1 y 5).

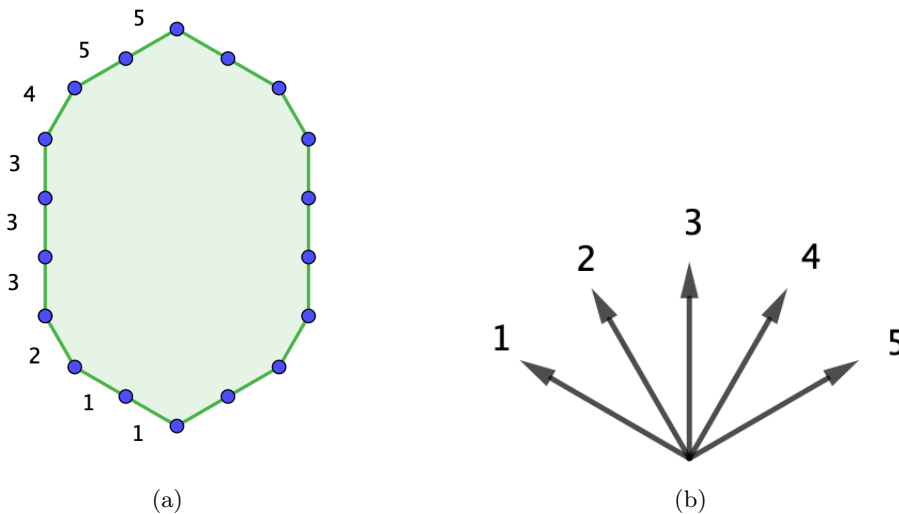


Figura 3.10: Zonotopo *Pappus* y sus generadores

La Figura 3.10a representa el zonotopo de 18 lados formado por los 9 generadores ortogonales a las rectas (contados con repetición). Se han elegido todos los generadores de longitud 1.

Ahora vamos a convertir el dibujo de la Figura 3.9a en una subdivisión zototopal de la siguiente forma:

Los puntos que se forman como la intersección de 3 rectas serán hexágonos generados por los 3 generadores correspondientes a esas rectas. De igual forma, los puntos que son intersección de 2 rectas serán cuadriláteros, en este caso cuadrados, formados por los correspondientes 2 generadores, obteniendo así el dibujo resultante de la Figura 3.11a, que representa la teselación zototopal formada por 9 hexágonos, ya que se ven 9 puntos donde intersecan 3 rectas, y 4 cuadrados. Esta teselación zototopal es dual del arreglo de rectas de la Figura 3.9a y por lo tanto es regular.

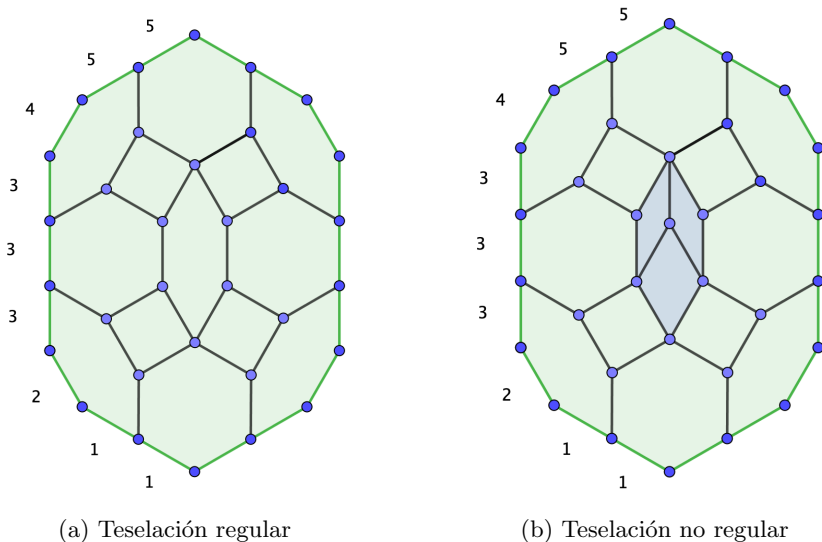


Figura 3.11: Teselaciones zototopales duales

En cambio, si en vez de hacer la teselación dual del arreglo de rectas de la Figura 3.9a lo hacemos del ejemplo *non-pappus*: Figura 3.9b, al perturbarse esa recta, vamos a perder el hexágono central. Se va a descomponer en 3 rombos obteniendo así la teselación representada en la Figura 3.11b y esta ya no va a ser regular porque su dual no es un arreglo de rectas. El *Teorema de Pappus* impide que exista tal arreglo de rectas debido a su combinatoria. (En otros ejemplos de teselaciones no regulares puede ocurrir que la no regularidad venga de la geometría y no de la combinatoria. O sea, puede ocurrir que el arreglo sea realizable, pero que no se pueda realizar con hiperplanos ortogonales a los generadores del zototopo).

A continuación, se va a enunciar el famoso Teorema de Bohne-Dress que relaciona las teselaciones zototopales con las matroides orientadas. La idea es la siguiente:

Dada una teselación zototopal \mathcal{T} de un zototopo $Z(V)$, el arreglo de hiperplanos dual a \mathcal{T} nos da un vector de signos para cada celda del arreglo (equivalentemente, para cada cara de las celdas de \mathcal{T}) y, por el Teorema de Representación, Teorema 3.1.8, esos vectores son los covectores de una matroide orientada $M(\mathcal{T})$. El rango de esa matroide es $d + 1$ por ser un arreglo afín. De hecho, esa matroide orientada “eleva” a la matroide orientada original $M(V)$, en el sentido de que todas las dependencias (circuitos y vectores) de $M(\mathcal{T})$ son también dependencias en $M(V)$. En cierto modo, $M(\mathcal{T})$ se proyecta a $M(V)$ en el sentido de que si se tiene una configuración de vectores de dimensión $d + 1$ y se proyecta en una dimensión menor, dimensión d , lo que se tiene que cumplir es que se sigan manteniendo las dependencias.

En realidad, se considera que la matroide $M(\mathcal{T})$ además de tener una dimensión más que $M(V)$ tiene también un elemento más, que representa el “hiperplano del infinito” del espacio afín. (De hecho, otra manera de obtener $M(V)$ a partir de $M(\mathcal{T})$ es intersectar el arreglo de pseudohiperplanos que representa $M(\mathcal{T})$ con el hiperplano del infinito). Por esta razón decimos que $M(\mathcal{T})$ es un **levantamiento de $M(V)$ por un elemento**; es decir, una matroide orientada que tiene rango y cardinal una unidad mayor que $M(V)$, y que levanta a $M(V)$.

El recíproco también es cierto, y eso es lo que dice el Teorema de Bohné-Dress:

Teorema 3.2.3 (Teorema de Bohné-Dress). *Sea Z un r -zonótopo con n zonas y M su matroide orientada correspondiente. Entonces la aplicación $\mathcal{T} \mapsto M(\mathcal{T})$ es una biyección entre las subdivisiones zonotopales de Z y los levantamientos de M por un elemento, es decir, las matroides M' con $n + 1$ elementos y rango $d + 1$ que contienen como vectores a todos los de M .*

Es decir, el Teorema de Bohné-Dress establece que hay una biyección entre las tesselaciones zonotopales de $Z(V)$ y los arreglos de pseudohiperplanos que coinciden con el arreglo ortogonal a V en el infinito. En esa correspondencia, las tesselaciones regulares son aquellas en las que el arreglo de pseudohiperplanos puede obtenerse simplemente por traslaciones de los hiperplanos lineales ortogonales a V .

Volviendo al ejemplo del arreglo de rectas *Pappus* y *Non-pappus*, vemos un ejemplo de ambos casos, una tesselación regular que sí se corresponde con un arreglo de rectas, es decir que es realizable, y otro en el que la tesselación no es regular y por tanto no se puede convertir en un arreglo de rectas.

Bibliografía

- [1] Ziegler, G. M. (1995). Lectures on polytopes. New York: Springer-Verlag.
- [2] Santos, F., Blanco, M. and Castillo, F.(2021). Triangulations of polytopes and point configurations. In “Algebraic and Geometric Combinatorics”, edited by Federico Ardila; Carolina Benedetti; Alejandro Morales, Cambridge University Press, en prensa.
- [3] Richter-Gebert, J y Ziegler, G.M. (1993). Zonotopal tilings and the Bohne-Dress theorem. Jerusalem Combinatorics '93. H. Barcelo, G. Kalai (eds.) American Mathematical Society, 1994. (Contemporary Mathematics, 178), pp. 211-232
- [4] Huber, B., Rambau, J. and Santos, F. The Cayley Trick, lifting subdivisions and the Bohne-Dress theorem on zonotopal tilings. J. Eur. Math. Soc. 2, 179–198 (2000). <https://doi.org/10.1007/s100970050003>
- [5] Björner, A., Las Vergnas, M., Sturmfels, B., White, N., Ziegler, G. (1999). A First Orientation Session. In Oriented Matroids (Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Capítulos 1,2). Cambridge: Cambridge University Press. doi:10.1017/CBO9780511586507.004
- [6] De Loera, J.A. , Rambau, J. , Santos, F. (2016). Triangulations: Structures for Algorithms and Applications. Springer Berlin Heidelberg.
- [7] Matroide Orientado - Oriented Matroids. Disponible en: https://es.abcdef.wiki/wiki/Oriented_matroid. Página traducida de:https://en.wikipedia.org/wiki/Oriented_matroid. Última consulta: 26/07/2021.
- [8] Boolean Algebra. Disponible en: https://en.wikipedia.org/wiki/Boolean_algebra#Boolean_algebras. Última consulta: 11/08/2021.
- [9] Boolean Algebra. Disponible en: <https://mathworld.wolfram.com/BooleanAlgebra.html>. Última consulta: 11/08/2021.