

U. PORTO

FEP FACULDADE DE ECONOMIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

Flutuações extremas nos principais índices de mercado – uma abordagem da teoria de valores extremos para caracterizar dependências entre grandes quedas e grandes subidas consecutivas

Catarina Isabel Nelas Afonso de Albuquerque

Dissertação

Mestrado em Economia e Administração de Empresas

Orientado por
Alexandra Patrícia Horta Ramos
Manuel Duarte da Silva Rocha

2020/2021

Dissertação
Mestrado em Economia e Administração de Empresas

Agradecimentos

Gostaria de começar por agradecer, em primeiro lugar, à minha orientadora, Professora Alexandra Ramos, pela motivação que me deu ao longo de todo o processo, dedicação e disponibilidade em ajudar sempre que necessário. De igual forma ao meu coorientador, Professor Manuel Rocha, pela disponibilidade, pelo rigor e exigência ao longo do desenvolvimento deste trabalho. Foi realmente um prazer ter tido a oportunidade de realizar este trabalho acompanhada por ambos.

Em segundo lugar, quero agradecer à minha família que sempre me apoiou em todos os momentos deste meu percurso académico, em especial à minha mãe, Paula Nelas, pelo carinho e apoio constante, por acreditar e lutar ao meu lado, e ao meu pai, Fernando Albuquerque, que sempre me acompanhou e ajudou em todas as etapas e que apesar de já não estar presente, com profunda tristeza e dor minha, olhou por mim nesta minha última etapa. Um enorme obrigada pelo amor incondicional, pela educação que me proporcionaram, pelos valores e toda a sabedoria que me transmitiram e por sempre me encorajarem a lutar pelo meu futuro.

Aos meus amigos, por sempre acreditarem nas minhas capacidades e nunca me deixarem desistir, pela constante presença, tanto nos bons como nos maus momentos, pelas longas conversas e conselhos partilhados, pelos momentos que vivemos e memórias que criámos que um dia mais tarde irei recordar com saudade. São, sem dúvida, amizades que levo para a vida.

Resumo

Ao longo dos anos, diversas foram as ocorrências de caráter extremos que o mercado financeiro sofreu, como é o caso dos *crashes* e bolhas no preço dos ativos. Apesar da sua raridade, resultam geralmente em perdas avultadas, tanto a nível das instituições financeiras, como de toda a economia, pelo que a implementação de metodologias adequadas que contribuam para uma melhor prevenção e gestão do risco a que estão sujeitas tem-se tornado cada vez mais importante.

Neste contexto, dada a pertinência de estudar os valores extremos das séries financeiras e uma vez que os eventos extremos são os que mais preocupam os agentes económicos, no presente trabalho, pretende-se estudar o comportamento extremal temporal dos principais índices de mercado, Euro Stoxx 50, S&P 500 e Nikkei 225, representativos do mercado europeu, americano e asiático, respetivamente. Para tal, irá ser estudada a dependência entre dois pontos de quedas extremas consecutivas, da cauda inferior da distribuição, e entre dois pontos de subidas extremas consecutivas, da cauda superior. A caracterização do comportamento extremal da distribuição séries financeiras é realizada utilizando os dados dos retornos diários logaritmizados recorrendo, para tal, a uma abordagem multivariada da teoria dos valores extremos, em particular, a um modelo bivariado que admite dependência entre observações extremas consecutivas. Este estudo parte do pressuposto de que as séries temporais analisadas exibem propriedades Markov.

A pertinência deste trabalho prende-se com o facto de ser utilizado um modelo de caudas conjuntas para o estudo em causa e que permitir a existência de dependência entre observações extremas consecutivas. Assim, baseando-se em pressupostos mais realistas, poderá constituir uma melhoria no cálculo das medidas de risco, como o *Value-at-Risk* e o *Expected Shortfall*.

Palavras-chave: Teoria dos Valores Extremos Multivariada, Cadeias de Markov, Método *peak over the threshold*, distribuição de Pareto generalizada, *Value-at-Risk*, *Expected Shortfall*.

Abstract

Over the years, the financial market has suffered several extreme events, such as crashes and asset price bubbles. Despite the rarity of these events, they tend to result in huge losses, not only when it comes to financial institutions, but also to the global economy, and for that reason, the implementation of appropriate methodologies that contribute to a better prevention and management of the risk they face has become increasingly important.

So, in this context, given the importance of the extreme values of the financial series and since the extreme events are what most concerns the economic agents, throughout this work, it is aimed to study the extreme temporal behavior of the main market indices, Euro Stoxx 50, S&P 500 and Nikkei 225, which represent the European market, the American market and the Asian market, respectively. So, in this work, the dependence between two consecutive extreme negative observations, from the lower tail of the distribution, and between two consecutive extreme positive observations, from the upper tail, will be studied. The characterization of the extreme behavior of the distribution of financial series is carried out using the logarithmic daily returns resorting, for that purpose, to a multivariate approach of the extreme value theory, in particular, to a bivariate model which admits dependence between consecutive extreme observations. This study is based on the assumption that the analyzed time series exhibit Markov properties.

The relevance of this work lies in the fact for this particular study is used a model of joint tails which allows dependence between consecutive extreme observations. For this reason, based on more realistic assumptions, it may improve the computation of the risk measures, such as Value-at-Risk and Expected Shortfall.

Keywords: Multivariate Extreme Value Theory, Markov chains, peak over the threshold method, Generalized Pareto Distribution, Value-at-Risk, Expected Shortfall.

Índice

Agradecimentos.....	i
Resumo.....	ii
Abstract.....	iii
Índice de tabelas.....	vi
Índice de figuras.....	vii
Capítulo I.....	1
1. Introdução.....	1
1.1 Risco Financeiro.....	2
1.2 Risco de Cauda e importância da sua mitigação.....	4
1.2.1 Fatores que potenciam o Risco de Cauda.....	5
1.3 Eventos extremos e implicações financeiras.....	6
1.3.1 Bolhas e <i>crashes</i>	7
1.3.1.1 Definição de Bolhas.....	8
1.3.1.2 Definição de <i>crash</i>	9
1.3.1.3 Os <i>crashes</i> nos mercados financeiros.....	10
2. Medidas de risco.....	11
2.1 <i>Value-at-Risk</i> (VaR).....	12
2.2 <i>Expected Shortfall</i> (ES).....	14
2.3 Métodos tradicionais de estimação do VaR.....	14
3. Dados.....	16
4. Teoria dos valores extremos.....	17
Capítulo II.....	21
1. Teoria dos Valores Extremos.....	21
1.1 Noções Básicas.....	21
1.2 Distribuição dos valores máximos.....	23
1.2.1 Método <i>Peak over the threshold</i>	26
2. Séries temporais estacionárias.....	29
3. Modelos multivariados dos extremos.....	30
3.1 Notação e distribuição limite.....	31
3.1.1 Método <i>peak over threshold</i> (POT).....	32
3.2 Medidas de dependência para valores extremos.....	34
4. Modelos para as caudas de cadeias de Markov.....	36

Capítulo III	41
1. Aplicação aos dados	41
1.1 Análise do comportamento extremal temporal	44
1.2 Comparação entre os resultados obtidos para cada índice financeiro.....	55
1.3 Melhorias obtidas no cálculo do VaR e ES	56
Conclusão	57
Referências Bibliográficas	59
Anexos.....	64

Índice de tabelas

Tabela 1: Estimativas dos parâmetros de dependência, η , e peso da cauda, ξ , para os diversos níveis elevados e respectivos desvios-padrão, referentes ao índice Euro Stoxx 50.	46
Tabela 2: Estimativas dos parâmetros de dependência, η , e peso da cauda, ξ , para os diversos níveis elevados e respectivos desvios-padrão, referentes ao índice S&P 500.	49
Tabela 3: Estimativas dos parâmetros de dependência, η , e peso da cauda, ξ , para os diversos níveis elevados e respectivos desvios-padrão, referentes ao índice Nikkei 225.	52

Índice de figuras

Figura 1: Amostra de dados e função densidade, f (fonte Stuart Coles (1999)).	21
Figura 2: Método block maxima, gráfico da esquerda, e método peak over the threshold u , gráfico da direita (fonte Manfred Gilli e Evis KÄellezi (2006)).	22
Figura 3: Índices financeiros EuroStoxx 50, S&P 500 e Nikkei 225.	42
Figura 4: Retornos logarítmicos dos índices financeiros Euro stoxx 50, S&P 500 e Nikkei 225.	42
Figura 5: Caixa de bigodes da distribuição dos retornos diários do índice Euro Stoxx 50.	43
Figura 6: Caixa de bigodes da distribuição dos retornos diários do índice S&P 500.	43
Figura 7: Caixa de bigodes da distribuição dos retornos diários do índice Nikkei 225.	43
Figura 8: Curvas de nível da densidade do modelo ajustado às caudas conjuntas das observações $X_i, X_i + 1$ do índice Euro Stoxx 50. O nível elevado escolhido está, também, identificado a verde para o caso da cauda superior e a vermelho para a cauda inferior.	45
Figura 9: Estimativas de η (gráfico de cima) e de ξ (gráfico de baixo) obtidas ajustando o modelo descrito para vários valores do nível u_1 e respetivos intervalos de confiança a 95%, do índice Euro stoxx 50.	47
Figura 10: Curvas de nível da densidade do modelo ajustado às caudas conjuntas das observações $X_i, X_i + 1$ do índice S&P 500. O nível elevado escolhido está, também, identificado a verde para o caso da cauda superior e a vermelho para a cauda inferior.	48
Figura 11: Estimativas de η (gráfico de cima) e de ξ (gráfico de baixo) obtidas ajustando o modelo descrito para vários valores do nível u_1 e respetivos intervalos de confiança a 95%, do índice S&P 500.	50
Figura 12: Curvas de nível da densidade do modelo ajustado às caudas conjuntas das observações $X_i, X_i + 1$ do índice Nikkei 225. O nível elevado escolhido está, também, identificado a verde para o caso da cauda superior e a vermelho para a cauda inferior.	52
Figura 13: Estimativas de η (gráfico de cima) e de ξ (gráfico de baixo) obtidas ajustando o modelo descrito para vários valores do nível u_1 e respetivos intervalos de confiança a 95%, do índice Nikkei 225.	54

Capítulo I

1. Introdução

Nos últimos anos, o mercado financeiro tem sofrido diversas ocorrências intrigantes de cariz extremo que, apesar da sua raridade, resultam em perdas avultadas, não só a nível das instituições financeiras, como de toda a economia. As evidências deste tipo de ocorrência têm clarificado que não se trata de uma mera questão teórica. Foram várias as crises que dominaram os mercados financeiros ao longo dos últimos anos, como o *crash* no mercado de ações em outubro de 1987, aquando da queda do índice S&P 500 em mais de 20% em apenas um dia, 19 de outubro, segundo Rocco (2014), que ficou conhecido por “Black Monday”; a crise financeira asiática de 1997-98; a crise financeira global de 2007, entre outras. Assim, com a crescente preocupação em gerir o risco financeiro, a sua previsão tem-se tornado um problema crucial, essencialmente a nível do setor bancário e financeiro, como forma de minimizar as perdas, o que implica, também, a implementação, por parte dos órgãos reguladores e administrativos de metodologias adequadas e precisas que contribuam para uma melhor prevenção e gestão do risco a que estão sujeitas. Sendo a tarefa principal da gestão do risco a sua quantificação, a mais adequada e informativa forma de medir o risco dos retornos dos ativos financeiros é dada pelos dados contidos na cauda da distribuição desses retornos. Em geral, a distribuição desses valores é desconhecida e difícil de lidar, dado que contem demasiada informação, pelo que as medidas de risco devem ter o poder de sintetizar os dados que caracterizam toda a distribuição de probabilidade. Este ponto, segundo Rocco (2014), levou à adoção de diversos métodos distintos de medição do risco ao longo dos últimos anos, de entre os quais se destacam: (i) a variância, relativamente à teoria da seleção do portfólio descrita por Markowitz (1952), (ii) *Value-at-Risk* (VaR) inicialmente usada após a *Black Monday* em 1987, sendo posteriormente desenvolvida e publicada por J. P. Morgan em 1994, (iii) *Expected Shortfall* (ES), possivelmente uma medida de risco mais adequada que o VaR, uma vez que tem em consideração todos os valores da cauda da distribuição e apresenta todas as propriedades requeridas para ser classificada como medida de risco coerente, definida por Artzner et al. (1999).

No caso concreto deste estudo, pretende-se estudar a dependência entre dois pontos de quedas extremas consecutivas, como acontece frequentemente em *crashes* de mercado, e entre dois pontos de subidas extremas consecutivas, como acontece em caso de bolhas, dado que

os eventos extremos são os que mais preocupam os agentes económicos. A caracterização do comportamento extremal da distribuição dos índices de mercado é realizada neste trabalho, tomando como dados os retornos diários dos principais índices de mercado e usando, para tal, uma abordagem multivariada da teoria dos valores extremos, em particular recorrendo a modelos bivariados que admitam dependência entre observações extremas consecutivas. É um estudo que parte do pressuposto de que as séries temporais analisadas exibem propriedades Markov, em que o valor futuro depende do seu valor atual.

Assim, a motivação deste trabalho prende-se com a falta de trabalhos que, neste âmbito, façam o mesmo tipo de estudo recorrendo a metodologias da teoria dos valores extremos, em particular a este novo modelo, pelo que as questões de investigação do presente trabalho são: a) como se caracteriza o comportamento extremal dos índices de mercado, em particular do Euro Stoxx 50, S&P 500 e Nikkei 225? b) Existe uma dependência entre quedas extremas consecutivas e subidas extremas consecutivas? c) Isto é, no seguimento de uma queda extrema (ou subida extrema) é expectável seguir-se uma nova queda extrema (subida extrema), e em que mercado é mais expectável que isso aconteça?

Como tal, interessa para o estudo em causa, modelar e prever o comportamento extremal dos índices financeiros, destacando, também, a adequação do uso da teoria dos valores extremos e a sua importância, relativamente a outras metodologias tradicionais, no que respeita ao interesse em estudar os valores extremos, como tem sido demonstrado na literatura.

1.1 Risco Financeiro

Importa deixar clara a definição do conceito de risco financeiro a que os investidores se encontram frequentemente expostos. O risco financeiro, segundo Nolde e Zhou (2021), refere-se à possibilidade de ocorrer um determinado cenário de caráter desfavorável, com potencial para debilitar a estabilidade financeira de uma instituição financeira individual, um mercado financeiro em particular ou, até mesmo, a economia global. Desta forma, o foco principal em gestão de risco são essencialmente os eventos extremos que correspondem a estes cenários adversos.

De acordo com Holton (2004), o risco envolve duas componentes fundamentais: a exposição e a incerteza, associadas a eventuais perdas relacionadas com as atividades financeiras.

Quanto maior for o risco, maior a probabilidade de os resultados se apresentarem de forma distinta do esperado.

Os riscos financeiros, por norma, são agrupados conforme a natureza que representam. Dos diferentes tipos de riscos financeiros podem ser destacados os seguintes:

- Risco de crédito, quando uma das partes de um contrato de uma operação de empréstimo não cumpre com as suas obrigações;
- Risco de mercado, quando há possibilidade dos resultados serem impactados de forma negativa, devido a movimentos pouco favoráveis nos preços do mercado financeiro;
- Risco sistémico, surge, geralmente, em situações nas quais uma instituição financeira, ou uma empresa particular, experiencia dificuldades financeiras, potenciando instabilidade a nível de todo o sistema financeiro. Um exemplo comum que ilustra a extensão deste risco, bem como as suas consequências a nível da economia global foi a crise financeira global de 2007;
- Risco de liquidez, assumido pelas instituições financeiras, como a incapacidade de cumprir com as suas obrigações monetárias;
- Risco de evento, que se refere à possibilidade de um evento não previsto afetar negativamente a empresa ou a indústria, causando perdas para os investidores e para os restantes *stakeholders*;
- Risco operacional, que resulta do fracasso de processos internos inadequados, de pessoas ou de eventos extremos. Trata-se de uma definição que inclui o risco legal, mas exclui riscos estratégicos e de reputação. As perdas que resultam do risco operacional podem causar dificuldades severas na estabilidade das instituições financeiras, sendo que em alguns casos, poderão conduzir à falência dos bancos (Nolde e Zhou, 2021).

Importa, no presente trabalho, centrar a atenção no risco inerente às caudas da distribuição dos retornos, isto é, o risco de ocorrência de eventos extremos, bem como os riscos de mercado e sistémico.

1.2 Risco de Cauda e importância da sua mitigação

Os riscos associados às caudas da distribuição dos retornos das séries financeiras, isto é, riscos que derivam da possibilidade de ocorrência de eventos extremos nos mercados financeiros, foram bastante pronunciados em todos os mercados, especialmente nos mercados europeus, no decorrer da crise global financeira de 2007 (Orlowski, 2010). Desta forma, esta crise sublinhou a importância dos riscos de cauda inerentes ao comportamento das principais variáveis chave do mercado financeiro, de entre as quais se destacam os índices de mercado de ações.

A prevalência e escala destes riscos contribuíram largamente para a severidade e profundidade da crise, caracterizada por períodos de elevada incerteza e de ampla propagação do risco, segundo Mishkin (2009) e Orlowski (2008). Tal, por sua vez, proporcionou elevados níveis de proliferação do risco sistémico a toda a economia, isto é, elevou a probabilidade de colapso do sistema financeiro, num ambiente caracterizado por dificuldade financeira e elevados níveis de volatilidade.

De facto, níveis extremos de volatilidade constituem uma das principais fontes de risco sistémico no mercado financeiro. O risco sistémico deriva da propagação do risco de mercado e, segundo Bullard et al. (2009), refere-se à possibilidade de determinado evento, como o colapso de grandes empresas ou bancos, ser capaz de provocar consequências severas a outras instituições financeiras, e até a todo o sistema financeiro ou mercado. O cálculo do risco de mercado é crítico na avaliação da estabilidade financeira, uma vez que afeta a avaliação do risco associado aos diversos tipos de ativos financeiros. Em períodos de dificuldades financeiras, a presença de elevados níveis de volatilidade no retorno das séries financeiras é intensificada, manifestando-se na distribuição inerente aos dados como uma característica de presença de caudas pesadas na distribuição dos retornos das séries financeiras, o que indica uma grande concentração dos dados em torno do valor médio em períodos sob condições de normalidade e uma ampla dispersão dos mesmos em períodos de elevada turbulência. No entanto, a maior parte dos modelos aplicados na avaliação e prevenção do risco financeiro, nomeadamente modelos tradicionais do *Value-at-Risk* (VaR), assentam no pressuposto da normalidade das distribuições. De acordo com Orlowski (2010), estes modelos tendem a sobrestimar os níveis de volatilidade em condições de normalidade no mercado e a subestimar em períodos de grande turbulência económica.

Segundo o autor, no contexto da recente crise financeira global, um dos principais fatores que contribuiu para o eclodir de forma inesperada da crise foi sobretudo esta subestimação em larga medida do risco de ocorrência de eventos caracterizados por uma extrema volatilidade das variáveis financeiras, que surpreendeu a maior parte dos investidores, economistas e analistas financeiros. Deste modo, tem-se tornado cada vez mais importante e indispensável a monitorização destes riscos de cauda para a implementação de políticas económicas e macro prudenciais adequadas e de forma atempada, no sentido de conter a especulação e de mitigar os riscos. Estas políticas devem ter um carácter essencialmente contra cíclico e ser suficientemente flexíveis de forma a permitir respostas apropriadas, tanto em condições de normalidade no mercado financeiro, como em contexto de dificuldade financeira, (Orlowski, 2010).

Neste contexto, Vila (2000) argumenta que os bancos centrais se devem focar não só na estabilidade dos preços nos mercados de produtos, como na monitorização do desenvolvimento do preço dos ativos financeiros, uma vez que pode afetar de forma direta a procura agregada ou indiretamente, por via do canal do balanço, isto é, pelos efeitos que produz nas famílias e no balanço dos negócios. Além disso, segundo a autora, a sobreavaliação dos preços nos mercados de ativos pode causar fragilidade financeira, pelo que existe uma grande preocupação, em particular, pela formação e desenvolvimento de bolhas no preço dos ativos, bem como a consequente explosão da bolha que eleva em grande escala os níveis de risco sistémico.

1.2.1 Fatores que potenciam o Risco de Cauda

De acordo com Orlowski (2010), um dos principais fatores que potenciou o desencadeamento e extensão global da crise financeira foi o choque que ocorreu no sistema a nível macroeconómico. Estes choques podem ser induzidos por diversos tipos de interrupções sistémicas, como é o caso das grandes guerras, choques na procura ou oferta, mudanças drásticas na regulamentação, ou outro tipo de mudanças a nível político que potenciam a instabilidade financeira, (Orlowski, 2010).

Uma ideia bastante comum na literatura é a existência de assimetria de informação como um fator chave no desencadeamento de crises no setor bancário. De acordo com Mishkin (2009), face a um ambiente de elevado risco no mercado financeiro, o fluxo de informação entre os

diversos agentes económicos é inferior, pelo que existe uma maior assimetria de informação. Para além disso, os crescentes níveis de volatilidade no mercado dificultam em maior escala a correta avaliação do preço dos ativos. Segundo Vila (2000), este problema da assimetria de informação, em conjunto com o problema de risco moral, ou *moral hazard*¹, são geralmente intensificados durante períodos de quedas acentuadas nos preços dos ativos, como *crashes*, à medida que o valor dos colaterais dos credores e o património líquido das empresas devedoras diminui. Como consequência, aumentam os riscos de cauda, bem como a possibilidade de ocorrência de crises bancárias.

De acordo com Orłowski (2010), outro dos fatores principais que eleva o risco de ocorrência de eventos extremos é o comportamento de rebanho, ou *herd behaviour*, adotado pelos investidores. Nos mercados financeiros sob condições normais, o fluxo de informação é rápido e sem restrições, permitindo aos investidores aprender mutuamente e formular as suas expectativas relativas ao futuro da tendência do preço dos ativos. Trata-se de um tipo de comportamento mais característico de investidores racionalmente imperfeitos por basearem as suas decisões de investimento nesse pressuposto, pelo que, por exemplo, tendem a comprar ativos por assumirem que outros investidores possuem informação otimista relativa à evolução do preço desses ativos, o que fará o preço subir ainda mais, (Froot et al., 1992). Este fenómeno que se tem vindo a confirmar em diversos estudos onde demonstram que o comportamento em rebanho dos investidores prevalece num cenário em que o mercado esteja sob condições de elevada incerteza relativamente ao preço dos ativos. No entanto, estes modelos têm sido expostos a várias críticas, na medida em que demonstram ser insuficientes para explicar episódios de crise financeira no mercado (Orłowski, 2010).

1.3 Eventos extremos e implicações financeiras

Um movimento extremo pode ser definido, segundo Longin (1996), relativamente ao mercado financeiro, como o valor mais baixo observado do retorno diário (o valor mínimo) ou o valor mais elevado (o máximo) de um índice de mercado de ações, observados durante um determinado horizonte temporal. Os valores extremos são variáveis aleatórias que dependem da distribuição dos retornos e do tamanho da amostra do período de seleção. Por

¹ O risco moral refere-se ao risco de uma parte não celebrar um contrato de boa-fé ou fornecer falsas informações sobre os seus ativos, passivos ou capacidade de liquidar as suas dívidas.

definição, são observações que se encontram nas caudas da distribuição dos retornos, isto é, são *outliers* da distribuição, e são de significativa importância, não só para os investidores como para toda a economia, pois, na presença de dados que seguem uma distribuição caracterizada por grandes caudas, uma determinada série de valores máximos, ou mínimos, pode ser da mesma ordem de magnitude e intensidade que a soma de todos os restantes elementos da amostra para um determinado horizonte temporal.

Como referido anteriormente, estudos recentes na área financeira têm vindo a realçar a importância relacionada com a raridade de eventos extremos nos mercados financeiros, no preço dos ativos, bem como na seleção de portfólio. Estes eventos, são capazes de causar grandes perturbações, a nível do retorno dos investimentos realizados, pelas quebras ou *crashes* nos mercados de ações; os elevados níveis de incumprimento de dívidas, segundo a análise do risco de crédito; ou o colapso do preço dos ativos de elevado risco (Poon et al., 2004).

1.3.1 Bolhas e *crashes*

A existência de bolhas especulativas no preço dos ativos financeiros e a consequente ocorrência de *crashes* é bastante frequente nos mercados financeiros, e a sua recorrência não parece ter vindo a diminuir ao longo do tempo, daí a necessidade de utilizar metodologias adequadas para prevenção do risco, bem como a sua mitigação, na tentativa de minimizar as perdas que advêm destes eventos.

De acordo com De Grauwe (2008), as bolhas e *crashes* são uma característica endémica dos mercados financeiros nos países capitalistas. Além disso, face à desregulamentação, os balanços patrimoniais dos bancos tornaram-se totalmente expostos a estes episódios, o que fragilizou a estabilidade do setor bancário. Segundo a abordagem de Basel com o intuito de estabilizar o sistema bancário, o pressuposto implícito de que os mercados financeiros são eficientes permite a modelação dos riscos a que os bancos estão sujeitos, bem como o cálculo dos rácios de capital requeridos para minimizar o risco. No entanto, o autor argumenta que esta abordagem é impraticável, dado que os riscos que efetivamente são importantes para os bancos são os riscos de cauda, associados a estes episódios extremos que ocorrem nos mercados, isto é, bolhas e *crashes*.

Nos seguintes subcapítulos serão apresentadas as definições de *crashes* e bolhas, bem como as respetivas características.

1.3.1.1 Definição de Bolhas

Geralmente uma bolha está associada a uma situação em que o preço de mercado de um ativo está a ser transacionado a preços significativamente superiores em relação aos que seriam determinados pelo seu valor fundamental, que se reconhece, à posteriori, como absurdos e insustentáveis, de acordo com Vogel (2018). Este fenómeno decorre principalmente das expectativas dos *shareholders* relativamente à evolução do preço dos ativos. Importa, ainda, clarificar o facto de que uma bolha não deverá ocorrer sem especulação, no entanto, pode haver especulação no mercado sem que se forme uma bolha no preço dos ativos. Isto é, segundo Vogel (2018), a mera presença de especulação não constitui uma condição suficiente para a formação e desenvolvimento de uma bolha. As bolhas podem, de facto, ser caracterizadas por elevados níveis de uma loucura especulativa que é fomentada pela prontidão de dinheiro disponível e de crédito que convida, estimula e permite uma participação ampla pelo público em geral.

Na verdade, os mercados movem-se sobretudo consoante a reação dos agentes, participantes de mercado, a novos eventos, pelo que as notícias, por si só, não movem os mercados, funcionando antes como catalisador (Vogel, 2018). Os desenvolvimentos dados como favoráveis, sejam estes de natureza política, tecnológica ou monetária, fornecem, normalmente, um terreno fértil que possibilita a formação e desenvolvimento de uma bolha no preço dos ativos. O excesso de otimismo relativamente à evolução da economia no futuro, leva os investidores a acreditar que se irá manter em crescimento permanente por tempo indefinido, deixando-se levar por uma onda de loucura especulativa. São estas crenças sobre um “futuro maravilhoso” que se podem encontrar, por norma, em grande parte dos períodos de bolha ocorridos ao longo da história dos mercados financeiros (Kindleberger, 2005). No seu livro, Kindleberger (2005) demonstra, ainda, como a história dos mercados financeiros está repleta de episódios durante os quais os mercados de ativos enfrentaram uma febre especulativa que força os preços a subir de forma descontrolada e não relacionada com as variáveis económicas fundamentais.

Estas febres especulativas a que os mercados financeiros estão frequentemente expostos, não só potenciam a formação de bolhas como e, consequentemente, a ocorrência de *crashes*, o que possivelmente não seria um problema se prevenissem os bancos de se envolverem nos mercados financeiros (De Grauwe, 2008). No entanto, como referido anteriormente, a desregulamentação no setor bancário, no início dos anos 80, deixou os bancos totalmente expostos à ocorrência endémica destes episódios. Uma vez que os bancos tinham a possibilidade de ter ao seu dispor na totalidade uma panóplia de ativos financeiros, o seu balanço patrimonial tornou-se extremamente sensível à ocorrência de bolhas e consequentes *crashes*.

De facto, Brunnermeier e Oehmke (2013) constataram que, geralmente, seguem-se *crashes* a bolhas no preço dos ativos, que são despoletados por determinados eventos, pelo que as bolhas devem ser incluídas na determinação do risco. Neste contexto, quanto maior a magnitude de uma bolha no preço dos ativos, maior o desvio do preço relativamente ao valor fundamental do ativo, pelo que maior será o risco de ocorrência de *crash* no mercado financeiro.

1.3.1.2 Definição de *crash*

Um *crash* pode ser definido, segundo Aboura (2015), como um evento que sucede de forma repentina, com efeitos significativos e de breve duração, isto é, corresponde a uma descida significativa e relativamente rápida, de horas, dias ou semanas, no preço dos ativos, que é causada por norma, por exemplo, pela falência de um banco ou grande empresa, por uma fraude, ou pela simples queda do preço de um ativo que representa uma importante proporção de riqueza e irá requerer muito tempo para reverter.

Segundo Vogel (2018), trata-se de variações no preço dos ativos financeiros que evaporam, no espaço de horas ou dias, valores que em condições normais de mercado levariam meses ou até anos a atingir. Assim, um *crash* representa um episódio de elevada volatilidade, sendo o seu reconhecimento atempado de extrema importância. De facto, segundo o autor, torna-se mais importante o reconhecimento de um *crash* relativamente ao reconhecimento de um período de bolha, uma vez que ao longo desse período um agente económico pode continuar a participar durante algum tempo sem grande apreensão relativamente a possíveis perdas

com os ativos. Por outro lado, um *crash* requer maior perspicácia e uma atenção imediata para que o agente económico se possa preparar atempadamente.

Quando sob condições de elevados níveis de volatilidade, os mercados financeiros tendem a reagir de forma exagerada a más notícias. Esta reação exagerada é caracterizada por grandes volumes de ordens de venda, o que potencia a ocorrência de períodos de volatilidade em termos negativos, como argumentam Gabaix et al. (2003) relativamente à relação de grandes flutuações nos preços, volumes de transação e número de transações. Por outro lado, mesmo em períodos pautados por níveis relativamente reduzidos de volatilidade, perante más notícias no que respeita à evolução do preço dos ativos, a probabilidade do sistema financeiro colapsar de forma inesperada aumenta acentuadamente, como foi o caso após a morte por insuficiência cardíaca do presidente dos EUA Eisenhower, a 26 de setembro de 1995, o que potenciou uma queda de 6.85% do índice S&P 500 em apenas um dia. Assim, Aboura (2015) argumenta que, ao contrário do que se possa pensar, os *crashes* no mercado financeiro podem ocorrer, e com maior probabilidade, em períodos de reduzida volatilidade, devido, sobretudo, ao efeito surpresa.

Como referido anteriormente por Aboura (2015), os *crashes* estão associados a uma descida acentuada e bastante significativa no preço dos ativos, a nível doméstico (*crashes* domésticos), o que é capaz de conduzir ao aumento do risco sistémico em todo o mercado financeiro, que, por sua vez, contribui para uma maior correlação entre os índices de mercado de ações, potenciando a ocorrência de *crashes* a nível internacional. Os mercados financeiros reagem não só a fatores políticos e económicos domésticos como a pressões a nível das transações efetuadas à escala global.

1.3.1.3 Os *crashes* nos mercados financeiros

Os *crashes* nos mercados financeiros são, segundo Aboura (2015), dos eventos mais fascinantes e intrigantes na área financeira. Apesar de não ser tarefa fácil a identificação de um *crash* a priori, os investidores são capazes de o identificar a posteriori, especialmente pelo efeito de pânico geralmente causado, o qual pode vir associado ao risco sistémico, risco de liquidez ou risco de regulamentação, conforme referido pelo autor.

É, de facto, de extrema importância identificar a ocorrência de um *crash* pela utilidade que representa para os investidores, reguladores e decisores políticos. Por outras palavras,

reconhecer eventos associados a *crashes* no mercado financeiro pode justificar políticas de intervenção tomadas pelos decisores políticos num *timing* mais adequado como forma de fazer face às consequências usuais resultantes da sua ocorrência. Um exemplo referido por Aboura (2015) é questionarmo-nos relativamente à possibilidade da identificação atempada do *crash* de mercado, aquando da crise financeira global de 2007, após o colapso da bolha imobiliária, ter permitido a implementação de políticas a tempo de conter a insolvência do banco de investimento americano Lehman Brothers, evitando, dessa forma, os elevados níveis de volatilidade que se seguiram, à escala global, no ano de 2008. Neste contexto, Brockmeijer et al. (2011) sugeriram que a atuação por parte dos decisores políticos deveria ocorrer sempre que as medidas do risco ultrapassassem um determinado valor limite, de forma a possibilitar uma resposta política adequada e atempada para evitar perdas avultadas, tanto a nível das instituições financeiras como da economia global.

Além disso, devemos-nos ainda questionar relativamente à distinção entre um *crash* e um evento de cauda, sendo que a definição associada aos eventos de cauda é bastante direta, uma vez que estes correspondem a qualquer nível de retorno que se localiza nas caudas da distribuição da série de retornos financeiros. Já um *crash* corresponde a níveis de retorno negativos de ordem extrema, no entanto o inverso não se verifica, isto é, níveis de retorno negativos extremos podem não estar associados a um *crash* no mercado, (Aboura, 2015).

Desta forma, de acordo Cotter (2006) entre outros autores, uma das principais preocupações que ocupa a mente dos investidores é solucionar a típica questão que se colocam: “Podendo as coisas correr mal, quão mal poderão correr?”. Assim, torna-se necessário recorrer ao uso de metodologias mais precisas na previsão da frequência e severidade dos níveis de retorno extremos. Estimar a ocorrência de *crashes* nos mercados financeiros é um processo que está dependente de uma previsão correta e precisa no que respeita a eventos raros, por natureza localizados nas caudas da distribuição dos retornos das séries financeiras. Por consequência, a modelação desta região da distribuição é de grande importância.

2. Medidas de risco

Como foi referido anteriormente, a distribuição dos dados das séries financeiras tende a apresentar, por natureza, caudas extremas pesadas, de acordo com Singh et al. (2013). Esta característica comum neste tipo de distribuições relaciona-se com a possibilidade de uma

observação extrema, negativa ou positiva, poder ter um efeito da mesma ordem de impacto que a soma dos restantes elementos da amostra, por exemplo, perdas de ordem extrema observadas durante uma semana podem causar uma perda comparável a um ano em que se tenham observado lucros de ordem normal.

Assim, questões frequentemente apresentadas no que respeita à gestão do risco financeiro, que advém da possibilidade de ocorrência destes eventos, envolvem a estimação de quantis extremos da distribuição das observações das séries financeiras, o que corresponde à determinação do valor que a variável em causa excede, dada uma determinada probabilidade relativamente baixa, de acordo com Gilli e Kellezi (2006). Para tal, são tipicamente usadas, como medidas mais adequadas do risco, o *Value-at-Risk* (VaR) e o *Expected Shortfall* (ES).

2.1 *Value-at-Risk* (VaR)

O *Value-at-Risk* (VaR) é definido, segundo Omari et al. (2020), como a máxima perda que pode ocorrer, com um determinado nível de confiança, para um determinado horizonte temporal, sob condições de normalidade do mercado. Trata-se de uma medida de risco que mede a pior perda expectável sob o normal funcionamento do mercado financeiro, num determinado período, e atendendo a um determinado nível de significância α , ou de confiança $(1-\alpha)$. “VaR answers the question: how much can I lose with x% probability over a pre-set horizon” (J.P. Morgan, RiskMetrics–Technical Document - 1996).

A definição formal do VaR é dada de forma implícita por:

$$\Pr[\Delta P_{\Delta t} \leq -\text{VaR}] = \alpha \quad (1.1)$$

Onde, $\Delta P_{\Delta t}$ é a variação do valor de mercado de um portfólio P durante um determinado horizonte temporal Δt , com probabilidade de α . A partir da equação (1.1), infere-se que a perda igual, ou superior ao determinado valor do VaR ocorre com probabilidade de α . De outra forma, para uma determinada probabilidade α , perdas de valor igual ou superior ao VaR irão ocorrer. Assim, o VaR pode ser escrito novamente em função da probabilidade α . Seja F a função distribuição de probabilidade de $\Delta P_{\Delta t}$, então tem-se que

$$F^{-1}(1 - \alpha) = \text{VaR} \quad (1.2)$$

Onde F^{-1} representa o inverso da função F . Um dos maiores problemas da implementação da análise do VaR é a especificação da distribuição de probabilidade F , usada no cálculo efetuado em (1.2).

Esta medida de risco é utilizada pelos bancos de forma rotineira para monitorizar a exposição corrente dos seus portfólios ao risco de mercado. Como forma de simplificação, por exemplo, falamos em “queda em 20.5%” do índice S&P500 no dia da *Black Monday*, em vez de “-20.5% de taxa de retorno” nesse mesmo dia. Assim, substituindo $\Delta P_{\Delta t}$ por $-\Delta P_{\Delta t}$, tem-se que VaR vem definido pelo inverso de $F(\cdot)$, em (1.2).

Ao longo do trabalho, serão usados retornos em termos logarítmicos, representados por $X_k = \ln\left(\frac{Y_k}{Y_{k-1}}\right)$ em vez dos preços Y_k , uma vez que têm maior probabilidade de formar sequências estacionárias.

Trata-se de uma medida que apresenta diversas vantagens, de entre as quais se destacam o facto de se obter apenas um valor capaz de captar e quantificar o nível de risco, de ser uma medida bem definida, apesar das propriedades da distribuição, e o facto de ser uma medida conservativa à inclusão, ou exclusão, de um elemento da amostra, (Novak, 2011). No entanto, segundo o autor, podemos obter estimativas pouco precisas ao usar um estimador de quantis empírico ou por assumir pressuposto irrealistas (como assumir que os dados seguem uma distribuição normal, quando na verdade se pautam por caudas extremas pesadas). Para além disso, o VaR não é subaditivo e, portanto, não se torna adequado para justificar a vantagem da diversificação do portfólio. Isto é, por vezes dividindo um portfólio em subportfólios, tal que a soma do VaR correspondente aos subportfólios é inferior ao VaR associado ao portfólio original, de acordo com Kourouma et al. (2010).

Propriedades do VaR:

1. Linearidade:

$$\text{VaR}_{a+bX} = a + b\text{VaR}_X$$

2. Não é necessariamente convexo.

São diversos os autores que apontam para alguns problemas associados a esta medida de risco, sendo um dos mais importantes o facto do VaR não considerar níveis de perdas para além do seu nível calculado, sendo também criticado por não ser, exatamente, uma medida

de risco coerente, (Artzner et al., 1999). Assim, como forma de contornar os obstáculos impostos pelo VaR, propõem a medida de risco *Expected Shortfall*, sendo esta uma medida que tem em consideração as perdas que vão para além do nível do VaR, isto é, avalia adequadamente as perdas extremas na cauda da distribuição, quando o nível proposto para o VaR é excedido. Para além disso, o *Expected Shortfall* assegura maior coerência enquanto medida do risco.

2.2 *Expected Shortfall* (ES)

O *Expected Shortfall* (ES), ou também, conhecido por VaR condicional (CVaR), estima a dimensão potencial esperada da perda que excede o quantil dado pelo VaR. Dada a preferência em trabalhar com números positivos, assume-se $y = -VaR_\alpha(X)$, pelo que

$$ES_\alpha(L) = E(L|L \geq VaR_\alpha(L)) \quad (1.3)$$

Onde $L = -X$, representa as perdas (por exemplo, retorno logarítmico diário do preço de ação). Como referido anteriormente, por simplificação, é preferível referir-nos a uma queda em $x\%$ no índice de mercado de ações, em vez de taxa de retorno observada de $-x\%$.

Propriedades do ES:

1. Linearidade:

$$ES_{a+bX} = a + bES_X$$

2. Convexidade. Caso as funções distribuição sejam contínuas, então

$$ES_{aX+(1-a)Y} \leq ES_X + (1-a)ES_Y \quad (0 \leq a \leq 1)$$

Pelo que, o ES é subaditivo:

$$ES_{X+Y} \leq ES_X + ES_Y$$

2.3 Métodos tradicionais de estimação do VaR

Os modelos convencionais para estimar o VaR têm sido alvo de críticas ao longo da última década, de acordo com Omari et al. (2020), uma vez que falharam numa previsão precisa das grandes perdas repentinas que abalaram os mercados financeiros durante a crise global

financeira 2007-08. Por se tratar de modelos que assumem que os retornos dos ativos seguem uma distribuição normal, ignorando características de caudas tipicamente grandes, subestimam a probabilidade de ocorrência de movimentos extremos no preço dos ativos.

No contexto do VaR, segundo Assaf (2009), prever de forma precisa a probabilidade de ocorrência de um evento extremo e compreender a influência do mesmo nos mercados financeiros é uma das grandes responsabilidades dos gestores de risco. Dado que as metodologias das medidas de risco usada para estimar o VaR de um portfólio assumem que o comportamento do mercado é relativamente estável, o estudo dos eventos extremos requer uma abordagem especial, uma vez que estão relacionados com as caudas da distribuição dos retornos, como é o caso da teoria dos valores extremos.

Em termos práticos, existem diversas formas de avaliar as medidas de risco e a probabilidade de ocorrência de eventos extremos e raros. O cálculo do VaR pode ser obtido, segundo Danielsson e De Vries (2000), com recurso a métodos paramétricos, semi-paramétricos e não paramétricos. De entre os métodos tradicionais, não-paramétricos, destacam-se os seguintes:

Simulação histórica (HS): Em vez de se basear na assunção de distribuições relativamente aos retornos, tem em consideração retornos passados que serão os usados para prever retornos futuros. Trata-se de um termo pouco correto, na medida em que consiste no cálculo de um estimador empírico do quantil de uma amostra de dados históricos, pelo que não existe propriamente uma simulação. A vantagem desta abordagem é unicamente a simplicidade de cálculo, mas falha pela falta de precisão.

Simulação de Monte Carlo: é uma tentativa de modelação da incerteza do mundo real, que visa a duplicação, por meio de simulações, das suas características. É uma abordagem flexível, pois não existem restrições no que diz respeito ao tipo de incerteza que pode ser modelada nem ao tipo de regras de decisão que devem ser incorporadas. É frequentemente utilizada pelas empresas, normalmente grandes empresas, como parte do processo de tomada de decisão de investimentos, entre outros.

No que respeita à previsão em termos paramétricos, a volatilidade futura prevista de um ativo é uma função explícita de retornos passados e dos parâmetros estimados do modelo. Os modelos mais comuns são a normal incondicional com estimação da variância frequentemente atualizada, ou os modelos explícitos para heteroscedasticidade condicional,

como o caso do GARCH (*Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity Model*). O modelo GARCH (1,1) é o mais usual na literatura financeira, sendo a sua característica principal, e mais importante, a capacidade de captar a volatilidade entre *clusters* nos dados recolhidos.

A abordagem popular de *RiskMetrics* que usa um modelo normal frequentemente atualizado é assintoticamente equivalente a um modelo IGARCH. No entanto, segundo Danielsson e De Vries (2000), trata-se de uma abordagem que apresenta diversas razões de fracasso no que respeita à captura adequada das probabilidades das caudas, devido sobretudo ao pressuposto de normalidade da distribuição inerente aos retornos financeiros.

3. Dados

Relativamente às séries financeiras a usar para efeito do estudo em causa, opto por usar dados secundários recolhidos a partir do Datastream, referentes ao retorno logarítmico diário de três dos índices de mercado referentes a três das áreas financeiras mais relevantes a nível mundial, Estados Unidos da América, União Europeia e Japão. As séries financeiras selecionadas foram, respetivamente, S&P 500, Euro Stoxx 50 e Nikkei 225, cujo período de análise abrange os dados desde 1 de janeiro de 2002 até 30 de junho de 2021, como forma de incluir o período de bolha no mercado imobiliário nos Estados Unidos da América, que se estendeu até 2007, bem como o *crash* que sucedeu, entre outros eventos de caráter extremo. Incluem-se na amostra 5087 observações diárias, um número suficientemente grande de observações de forma a tornar o estudo dos valores extremos mais viável, não comprometendo a estacionariedade das séries temporais financeiras. O índice S&P 500, também conhecido por Standard & Poor's 500, é um índice composto por quinhentas ações cotadas em bolsa dos índices de mercado NYSE ou de NASDAQ. Inclui as quinhentas principais empresas e cobre aproximadamente 80% da capitalização de mercado disponível. As principais características dos índices S&P 500 são bem conhecidas. Trata-se de um índice ponderado do valor de mercado compilado, respetivamente, em intervalos de 1 minuto e 15 segundos. Não inclui os pagamentos de dividendos e representam uma proporção considerável do mercado respetivo, tanto em termos de capitalização como de *turnover*. É uma média aritmética ponderada, tendo a capitalização de mercado como peso. Relativamente ao Euro Stoxx 50, representa o desempenho das 50 maiores empresas que

operam na zona euro e capta, aproximadamente, 60% da capitalização bolsista em circulação. Inclui empresas que são líderes nos respetivos setores e de países da zona euro, entre os quais a Alemanha, Bélgica, Espanha, Finlândia, França, Países Baixos, Irlanda, Itália, Luxemburgo. No que respeita ao índice Nikkei 225, índice da Bolsa de Valores de Tóquio, é a referência mais importante da bolsa de valores do mercado asiático e o mais popular no mercado japonês. É composto por 225 empresas com a liquidez mais elevada de entre as 450 ações mais líquidas (ponderadas pelo preço e não pela capitalização) do Primeiro Mercado da Bolsa de Valores de Tóquio. O Nikkei 225 é o índice mais citado dos movimentos de preço no *Tokyo Stock Exchange* (TSE). É uma média ponderada dos preços das 225 ações listadas na primeira secção do TSE e é atualizado em intervalos de um minuto ao longo do dia de negociações.

4. Teoria dos valores extremos

Para efeitos de um cálculo mais adequado das medidas de risco, são diversas as metodologias usadas, no entanto as tradicionais assumem que as séries financeiras seguem uma distribuição normal. Uma vez que a distribuição característica dos retornos das séries financeiras se pauta frequentemente por caudas mais pesadas que as consideradas pela normalidade, o recurso a estas metodologias torna-se pouco preciso no cálculo das medidas de risco mencionadas. Neste contexto, a Teoria dos Valores Extremos (EVT) é a mais privilegiada como metodologia de cálculo das medidas de risco e fornece procedimentos científica e estatisticamente racionais para estimar valores extremos constantes das caudas das distribuições.

No contexto dos eventos extremos e, como tal, raros, a análise dos valores extremos oferece um paradigma teórico natural que se baseia essencialmente na teoria dos valores extremos em conjunto com uma série de ferramentas estatísticas modernas e técnicas de forma a solucionar a mais ampla série de questões que surgem no contexto da avaliação e gestão do risco financeiro (Nolde e Zhou, 2021).

Em termos históricos, os fundamentos teóricos do argumento assintótico que se encontra na base da teoria dos valores extremos foram formulados por Fisher e Tippett (1928), apesar da sua relutância em propor os modelos para aplicação estatística. Esta teoria foi, mais tarde,

unificada e estendida por Gnedenko (1948), tendo o mesmo autor, em 1958, sido o primeiro a estudar e a formalizar a aplicação estatística dos modelos probabilísticos para extremos.

Mais tarde, o comportamento das caudas da distribuição esteve na base de diversos argumentos discutidos por diversos autores, entre os quais se destacam Koedijk et al. (1990), Dacorogna et al. (2001), Loretan e Phillips (1994), Longin (1996), Danielsson e De Vries (2000) e McNeil e Frey (2000). Relativamente ao potencial da aplicação da teoria dos valores extremos na gestão do risco, uma abordagem interessante é discutida por Christoffersen et al. (1998).

Uma questão importante relativamente à EVT é a possibilidade de estender os seus resultados principais a um contexto multivariado. No entanto, trata-se de um enquadramento que envolve cálculos complexos pelo que, na prática, as distribuições são geralmente consideradas bivariadas, caso que será abordado neste trabalho.

De um ponto de vista teórico, quando estudamos os extremos das séries temporais multivariadas, a dependência entre os valores extremos de componentes distintos tem um papel crucial. No que respeita à medida de dependência convencional, o coeficiente de correlação de Pearson ρ , esta é calculada como uma média dos desvios em relação ao valor médio, pelo que não faz qualquer distinção entre realizações grandes e pequenas, (Poon et al., 2004). Além disso, não distingue retornos positivos de retornos negativos, assumindo uma relação linear e uma distribuição do tipo Gaussiana multivariada, o que pode levar a uma subestimação significativa do risco sobre eventos extremos conjuntos.

As estruturas de dependência podem ser agrupadas da seguinte forma: independente, perfeitamente dependente, assintoticamente dependente e assintoticamente independente. No caso das variáveis serem positivamente relacionadas e assintoticamente dependentes ou independentes, valores significativamente grandes de cada variável irão ocorrer de forma simultânea mais vezes do que se estas variáveis fossem independentes, ou menos vezes caso fossem perfeitamente dependentes. Esta distinção entre as estruturas de dependência ocorre quando ambas as variáveis se aproximam dos respetivos limites superiores. À medida que uma variável tende para o seu limite superior, a probabilidade da outra variável estar próxima do respetivo limite superior tende para zero no caso de serem variáveis aleatórias assintoticamente independentes, e para um limite diferente de zero se considerarmos variáveis assintoticamente dependentes. Desta forma, os valores extremos de cada variável

apenas podem ocorrer simultaneamente se as variáveis exibirem uma relação de dependência assintótica, caso contrário, irão ocorrer em tempos distintos no caso de serem assintoticamente independentes. No Capítulo II serão definidos os parâmetros de dependência de cauda usados para o estudo em causa com maior pormenor.

Neste trabalho é realizada a caracterização do comportamento extremal das séries financeiras das respetivas economias mais importantes, tomando, para tal, como dados os logaritmos dos retornos diários, de forma a garantir a estacionariedade das séries temporais, e recorrendo a uma abordagem que admite dependência entre observações extremas consecutivas, tanto da cauda dos mínimos, inferior, como da cauda dos máximos da distribuição, superior. É adotado um método paramétrico nesta abordagem para a realização do estudo para a cauda conjunta de uma distribuição bivariada, descrito por Ramos e Ledford (2009). Trata-se, portanto, de um modelo flexível paramétrico em que é possível a análise da dependência temporal de curta duração numa série temporal estacionária, de forma a caracterizar o comportamento extremal da série. Este tipo de caracterização parte do pressuposto essencialmente de que a série temporal apresenta propriedades de Markov, visto que a classe das cadeias de Markov de ordem d é suficientemente geral e tratável. A modelação da cauda conjunta da distribuição de um par de valores consecutivos (X_i, X_{i+1}) de uma cadeia de Markov estacionária de primeira ordem vai ser realizada através do modelo proposto por Ramos e Ledford (2009). Esta análise requer a avaliação conjunta dos extremos da estrutura de dependência temporal, bem como da cauda da distribuição marginal. Em particular, estuda-se o grau de dependência extremal na cauda conjunta superior e na inferior de duas observações consecutivas e o peso da cauda da série, pela estimativa de parâmetros que serão posteriormente descritos.

Assim, no que diz respeito à metodologia, pretende-se realizar o estudo do comportamento extremal temporal de séries financeiras, no caso concreto, os principais índices de mercado de ações, Euro Stoxx 50, S&P 500 e Nikkei 225. Isto é, pretende-se estudar a existência de dependência temporal de curto prazo entre quedas extremas consecutivas, como é o caso dos *crashes* no mercado financeiro, e subidas extremas consecutivas, como acontece em períodos de bolhas, recorrendo, para efeitos do estudo em causa, à utilização de modelos multivariados da teoria dos valores extremos, sendo, para o caso, particularmente úteis os modelos bivariados. A partir das estimativas obtidas para os diversos parâmetros estudados no seguinte Capítulo, pode efetuar-se a análise do risco financeiro de forma mais precisa,

devido ao modelo utilizado, através das medidas de risco, como o VaR e o *Expected Shortfall*. Danielsson (2011) combinou, no que respeita à previsão do risco financeiro, o estudo do VaR e a teoria dos valores extremos com a versatilidade e o poder de processamento de *softwares* como R ou o MATLAB.

Capítulo II

1. Teoria dos Valores Extremos

1.1 Noções Básicas

A teoria dos valores extremos (EVT), na sua forma mais simplista, dada uma amostra aleatória de dados independentes e identicamente distribuídos (i.i.d.) X_1, X_2, \dots, X_n , de uma função distribuição desconhecida, F , a teoria dos valores extremos preocupa-se essencialmente com o estudo estatístico das suas propriedades extremas. De forma geral, os métodos utilizados por esta teoria envolvem a modelação da cauda da distribuição desconhecida de uma série de dados observados e fornecem meios de quantificação da intensidade e frequência dos extremos. No entanto, como se pode observar no gráfico da Figura 1, os valores extremos são escassos, existem poucas observações nas caudas, concentrando-se a maior parte no centro da distribuição, pelo que existe uma certa dificuldade em ultrapassar este problema por falta de informação. Assim, a extrapolação do modelo para além da série de dados observados é requerida e trata-se de uma característica que distingue a estatística de valores extremos da maior parte das outras áreas de modelação estatística.

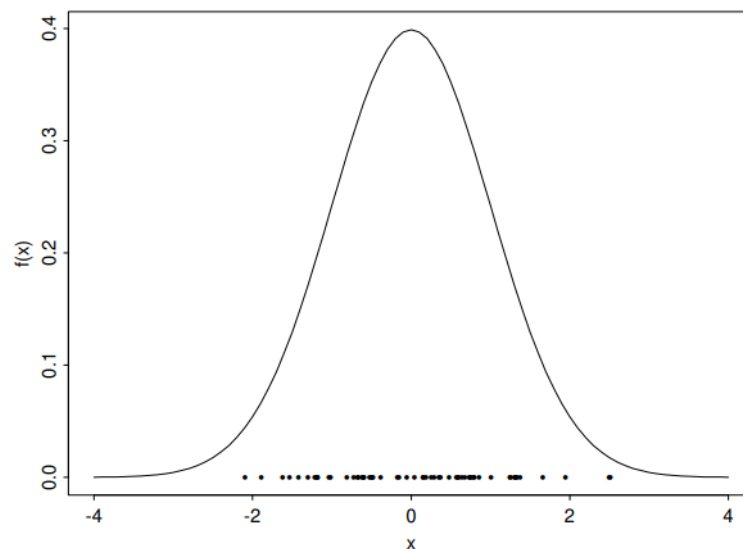


Figura 1: Amostra de dados e função densidade, f (fonte Stuart Coles (1999)).

A EVT capta os valores extremos das caudas de uma determinada distribuição e prever os riscos associados. Pode ser aplicada segundo essencialmente dois métodos, o primeiro, o

método *Block Maxima*, considera que a distribuição assintótica dos valores mínimos e máximos (extremos da amostra) é modelada sendo essa função distribuição estandardizada dada por uma das três distribuições de valores extremos, Gumbel, Fréchet ou Weibull, que serão definidos posteriormente. A distribuição generalizada de valores extremos (*Generalized extreme value distribution*, GEV) é a forma estandardizada geral das três distribuições apresentadas e, portanto, as séries de valores máximos ou mínimos devem convergir para a GEV. O segundo método, *peak over the threshold* (POT), modela a distribuição dos valores que excedem um determinado limite. A EVT mostra que a distribuição limite dessas excedências é a distribuição de Pareto generalizada (*Generalized Pareto Distribution*, GPD).

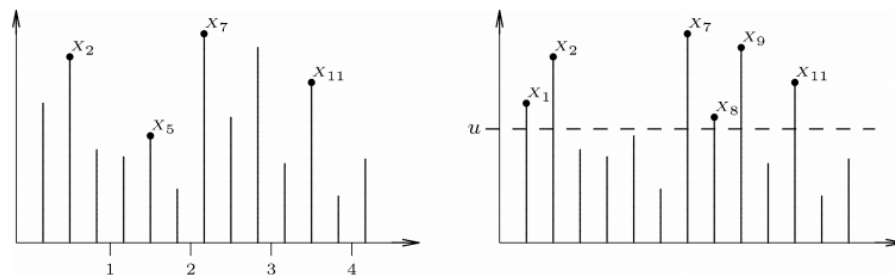


Figura 2: Método block maxima, gráfico da esquerda, e método peak over the threshold u , gráfico da direita (fonte Manfred Gilli e Evis KÄellezi (2006)).

Relativamente à primeira abordagem, concentra-se nos valores máximos que a variável pode tomar em períodos com o mesmo horizonte temporal e sucessivos, em meses ou anos, por exemplo. Para cada período de análise, o valor máximo observado constitui um evento extremo, conhecidos por *block maxima* (por período). Por exemplo, no gráfico da esquerda Figura 2, os valores observados, X_2 , X_5 , X_7 e X_{11} constituem os *block maxima* por quatro períodos de três observações cada, os quais se representam por M_n .

No caso da segunda abordagem, interessam, para a análise, os valores que excedem um determinado valor limite relativamente elevado, u . Assim, como representado no gráfico, os valores que constituem extremos são as observações X_1 , X_2 , X_7 , X_8 , X_9 e X_{11} , pois são os que excedem esse determinado patamar, previamente selecionado. Considerando, novamente, uma função distribuição F , de uma variável aleatória X , nesta abordagem, o interesse recai sobre a estimação da função distribuição F_u das observações acima do patamar estipulado, u . Uma vez que os dados se encontram essencialmente entre 0 e u , a estimação

da função das excedências, por natureza escassas, apresenta um problema para o qual a teoria dos valores extremos se mostra particularmente útil.

A aplicação de um dos métodos referidos depende essencialmente da disponibilidade dos dados, do horizonte temporal selecionado para o estudo em causa e do tipo de medidas do risco que queremos prever, Singh et al. (2013). Tradicionalmente, o método *block maxima* é o mais utilizado quando os dados apresentam características de sazonalidade. No entanto, o método *peak over the threshold* é capaz de fazer uso dos dados de forma mais eficiente e, como tal, tem sido o mais utilizado em aplicações recentes, dado que usa apenas valores extremos que excedem um determinado limiar, o *threshold*. Assim, no caso do meu trabalho irei recorrer ao método POT.

1.2 Distribuição dos valores máximos

Seja X_1, \dots, X_n uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com uma função distribuição comum F . Segundo esta forma de caracterização do comportamento dos extremos considera-se o comportamento do máximo $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$, onde n representa o tamanho da subamostra, ou bloco. Então, a função distribuição de M_n é dada por

$$\Pr(M_n \leq x) = \Pr(X_1 \leq x, \dots, X_n \leq x) = F^n(x) \quad (2.1)$$

Para um determinado x fixo, este resultado torna-se degenerativo, isto é, tende para 0 ou para 1, à medida que $n \rightarrow \infty$, uma vez que, com probabilidade de 1, M_n converge para o ponto limite superior $w(F)$ da função distribuição F , definido por $w(F) = \sup\{x : F(x) < 1\}$. Assim, tal como para o teorema do limite central, é requerida alguma normalização de M_n como forma de obter uma distribuição limite não degenerada.

A lei limite para o conjunto de máximos, M_n , é dada pelo seguinte teorema:

Teorema 2.1 (Fisher e Tippett (1928), Gnedenko (1943)) Seja X_n uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.). Se existirem constantes $a_n > 0$ e $b_n \in \mathbb{R}$, tal que, à medida que $n \rightarrow \infty$,

$$\Pr\{(M_n - b_n)/a_n \leq x\} \rightarrow G(x) \quad (2.2)$$

o resultado em (2.1) seja satisfeito para uma função distribuição G não degenerada, então G é do mesmo tipo que uma das seguintes distribuições:

$$\begin{aligned}
 I: G(x) &= \exp\{-\exp(-x)\} \quad -\infty < x < \infty; \\
 II: G(x) &= \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \exp(-x^{-a}) & x > 0, a > 0 \end{cases}; \\
 III: G(x) &= \begin{cases} \exp\{-(-x^a)\} & x < 0, a > 0 \\ \exp(-x^{-a}) & x \geq 0 \end{cases}.
 \end{aligned}$$

Por outro lado, cada uma destas distribuições, G , pode aparecer como limite para a distribuição de $(M_n - b_n)/a_n$ e, de facto, tal acontece quando o próprio G é a distribuição de X .

Estas três classes de distribuição do Teorema 2.1 são as chamadas distribuições dos valores extremos, sendo, respetivamente, os tipos I, II e III amplamente conhecidos por tipos Gumbel, Fréchet e Weibull. O Teorema 2.1 não garante, porém, a existência de um limite não degenerado para M_n , nem especifica qual o limite que irá surgir quando tal limite existe. No entanto, quando esse limite existe efetivamente recorrendo a analogia com o Teorema do Limite Central, temos que a distribuição limite do máximo da amostra segue uma das distribuições especificadas no Teorema 2.1, seja qual for a distribuição original de F .

No que respeita à distribuição Fréchet, esta apresenta uma cauda decrescente de forma polinomial pelo que é a mais adequada para distribuições que apresentem caudas pesadas. As caudas decrescentes de forma exponencial da distribuição do tipo Gumbel caracterizam essencialmente distribuições de caudas finas. Por fim, a distribuição do tipo Weibull é a distribuição assintótica de distribuições de ponto limite superior finito.

Jenkinson (1955) e von Mises (1954) sugerem a seguinte representação generalizada de apenas um parâmetro,

$$H_{\xi}(x) = \begin{cases} e^{-(1+\xi x)^{-\frac{1}{\xi}}} & \text{se } \xi \neq 0; \\ e^{-e^{-x}} & \text{se } \xi = 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

das três distribuições padrão, com x tal que $1 + \xi x > 0$. Esta generalização é conhecida como a distribuição generalizada dos valores extremos (*Generalized Extreme Value*, GEV), onde o parâmetro ξ é denominado índice de cauda, que mede o peso e determina o comportamento da cauda de $H_\xi(x)$. Trata-se de uma distribuição não degenerada e generalizada na medida em que a forma paramétrica sumariza os três tipos de distribuições conhecidos. Além disso, se $\xi = 0$, então H é uma distribuição do tipo Gumbel; se $\xi > 0$, então H é uma distribuição do tipo Fréchet; por fim, se tivermos $\xi < 0$, então H é do tipo Weibull.

Geralmente não sabemos, à priori, o tipo de distribuição limite inerente aos dados da amostra de máximos, pelo que a GEV é particularmente útil quando se devem calcular estimativas de máxima verosimilhança. Além disso, a GEV padrão definida anteriormente é a distribuição limite dos extremos normalizados. Uma vez que, na prática, a verdadeira distribuição dos retornos não é conhecida e, como consequência, não são conhecidas as constantes a_n e b_n , usamos a especificação de três parâmetros da GEV, como distribuição limite dos máximos não normalizados,

$$H_{\xi,\sigma,\mu}(x) = H_\xi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \quad x \in D, \quad D = \begin{cases}]-\infty, \mu - \frac{\sigma}{\xi}[& \text{se } \xi < 0; \\]-\infty, \infty[& \text{se } \xi = 0; \\]\mu - \frac{\sigma}{\xi}, \infty[& \text{se } \xi > 0. \end{cases}$$

Os parâmetros adicionais, μ e σ , são os parâmetros de localização e de escala, respetivamente, que representam as constantes de normalização desconhecidas.

As quantidades de interesse não são os parâmetros em si, mas antes os quantis, também denominados de níveis de retorno, da GEV estimada,

$$R^k = H_{\xi,\sigma,\mu}^{-1}\left(1 - \frac{1}{k}\right) \quad (2.4)$$

Substituindo os parâmetros ξ , σ e μ pelas suas estimativas $\hat{\xi}$, $\hat{\sigma}$ e $\hat{\mu}$, temos

$$\hat{R}^k = \begin{cases} \hat{\mu} - \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\xi}} \left(1 - \left(-\log\left(1 - \frac{1}{k}\right)\right)^{-\hat{\xi}}\right) & \text{se } \hat{\xi} \neq 0 \\ \hat{\mu} - \hat{\sigma} \log\left(-\log\left(1 - \frac{1}{k}\right)\right) & \text{se } \hat{\xi} = 0 \end{cases}$$

Neste contexto, um valor de \hat{R}^{10} de 7 significa que a máxima perda observada durante o período de um ano irá exceder 7% uma vez em cada 10 anos, em média.

1.2.1 Método *Peak over the threshold*

Como referido anteriormente, uma abordagem alternativa ao método *Block Maxima*, e mais eficiente na utilização das observações extremas, é o método *peak over the threshold*, no qual são considerados os valores que excedem um determinado limiar (*threshold*). Quando temos uma sucessão de variáveis i.i.d. aleatórias $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ associadas a uma função distribuição desconhecida $F(x) = \Pr[X_i \leq x]$, os valores extremos definem-se como os valores X_i que excedem um determinado limiar u relativamente elevado. Desta forma, a variável $X - u$ representa os excessos sobre esse limiar e a distribuição de excessos sobre o limiar u define-se como uma probabilidade condicional

$$F_u(y) = \Pr(X - u \leq y | X > u) = \frac{F(y + u) - F(u)}{1 - F(u)}, \quad y > 0 \quad (2.5)$$

onde X é uma variável aleatória, u o determinado nível elevado, $y = x - u$ os excessos sobre o determinado nível elevado e $x_F \leq \infty$ é o ponto final direito da função F . Esta equação pode ser interpretada como a probabilidade de uma perda exceder o limiar u em um determinado valor igual ou inferior a y , dado que o limiar u foi excedido. Para $M_n = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, definido como as piores perdas numa amostra de perdas de dimensão n , a função distribuição F satisfaz o Teorema Fisher-Tippett (Teorema 2.1).

As realizações da variável aleatória X situam-se geralmente entre 0 e u , pelo que a estimação de F , para este intervalo, é relativamente simples. Já a estimação da função F_u pode ser mais complexa, uma vez que lidamos com poucas observações nesta área. Neste contexto, a EVT pode ser particularmente útil, dado que fornece um forte resultado relativo à função distribuição de excessos condicional, tal como o estabelece o seguinte teorema:

Teorema 2.2 (Pickands (1975), Balkema e de Haan (1974)) Para uma classe de funções distribuição subjacentes F , a função distribuição de excessos condicional $F_u(y)$, para um u elevado, é bem aproximada por

$$F_u(y) \approx G_{\xi, \sigma}(y), \quad u \rightarrow \infty,$$

onde temos

$$G_{\xi,\sigma}(y) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \frac{\xi}{\sigma}y\right)^{-\frac{1}{\xi}} & \text{se } \xi \neq 0 \\ 1 - e^{-\frac{y}{\sigma}} & \text{se } \xi = 0 \end{cases}$$

para $y \in [0, (x_F - u)]$, se $\xi \geq 0$ e $y \in [0, -\frac{\sigma}{\xi}]$, se $\xi < 0$. $G_{\xi,\sigma}$ é a chamada distribuição de Pareto generalizada (Generalized Pareto Distribution, GPD).

Se x for definido como $x = u + y$, a GPD pode, também, ser expressa em função de x , isto é, $G_{\xi,\sigma}(x) = 1 - \left(1 + \frac{\xi(x-u)}{\sigma}\right)^{-1/\xi}$.

A distribuição de Pareto generalizada assume formas diferentes, consoante o valor do parâmetro de forma ξ , ou índice de cauda, tem um valor negativo, positivo ou nulo. O índice de cauda ξ indica a forma como decai a cauda da distribuição, isto é, indica o peso da cauda. Assim, quanto maior for ξ , mais pesada será a cauda, pelo que esta decai mais drasticamente. Como, geralmente, não é possível estabelecer um limite superior para perdas a nível financeiro, apenas são consideradas adequadas distribuições com um parâmetro $\xi \geq 0$ para modelar distribuições de retornos financeiros.

Assumindo a função GPD para a distribuição da cauda, podemos definir expressões analíticas para o Var_P e ES_p como função dos parâmetros GPD. Isolando $F(x) = (u + y)$ em (2.5), tem-se

$$F(x) = (1 - F(u))F_u(y) + F(u) \quad (2.6)$$

e substituindo F_u pela distribuição de Pareto generalizada, e $F(u)$ pela estimativa $\frac{(n-N_u)}{n}$, onde n representa o número total de observações e N_u o número de observações que excedem o limiar u , obtemos

$$\hat{F}(x) = \frac{N_u}{n} \left(1 - \left(1 + \frac{\xi}{\hat{\sigma}}(x - u) \right)^{-1/\hat{\xi}} \right) + \left(1 - \frac{N_u}{n} \right)$$

Que podemos simplificar para

$$\hat{F}(x) = 1 - \frac{N_u}{n} \left(1 + \frac{\hat{\xi}}{\hat{\sigma}} (x - u) \right)^{-1/\hat{\xi}} \quad (2.7)$$

Se invertermos esta equação para uma determinada probabilidade α obtemos

$$\widehat{VaR}_\alpha = u + \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\xi}} \left(\left(\frac{n}{N_u} \alpha \right)^{-\hat{\xi}} - 1 \right) \quad (2.8)$$

Podemos reescrever a equação do *Expected Shortfall* da seguinte forma

$$\widehat{ES}_\alpha = \widehat{VaR}_\alpha + E(L - \widehat{VaR}_\alpha | L > \widehat{VaR}_\alpha) \quad (2.9)$$

onde $L = -X$ representa os retornos negativos e na qual o segundo termos da direita da equação é o valor expectável dos excedentes sobre o limiar VaR_α . Sabemos que a função média de excessos (*mean excess function*) para a GPD com parâmetro $\xi < 1$ é dada por

$$e(z) = E(X - z | X > z) = \frac{\sigma + \xi z}{1 - \xi}, \quad \sigma + \xi z > 0 \quad (2.10)$$

que nos dá os excessos de X , em média, sobre valores variáveis do limiar z .

De forma similar, tendo em consideração a definição descrita em (2.9) para o *Expected Shortfall* e recorrendo a (2.10), para $z = VaR_p - u$, obtemos

$$\widehat{ES}_\alpha = \widehat{VaR}_\alpha + \frac{\hat{\sigma} + \hat{\xi}(\widehat{VaR}_\alpha - u)}{1 - \hat{\xi}} = \frac{\widehat{VaR}_\alpha}{1 - \hat{\xi}} + \frac{\hat{\sigma} - \hat{\xi}u}{1 - \hat{\xi}} \quad (2.11)$$

É, também, possível realizar uma estimativa não paramétrica do parâmetro de forma, ξ , e do parâmetro de escala σ das distribuições $H_\xi(z)$ e $G_{\xi,\sigma}(y)$ com recurso ao método Hill, Hill (1975), no qual $\xi > 0$ ($\alpha > 0$), é gerado pelas mesmas distribuições de caudas grandes no domínio de atração da distribuição GEV do tipo Fréchet. Tendo em consideração uma amostra de perdas $\{X_1, X_2, \dots, X_T\}$, estatísticas de ordem são definidas como $X_{(1)} \geq X_{(2)} \geq \dots \geq X_{(T)}$ e para todo o k positivo, e o estimador de Hill de ξ é definido como $\hat{\xi}^{Hill}(k) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k [\log X_{(j)} - \log X_{(k)}]$.

2. Séries temporais estacionárias

Em diversas áreas de aplicação os dados observados exibem alguma forma de dependência temporal ou espacial, sendo a consequência que resulta da dependência entre valores observados de uma série um aspeto muito importante a ter em consideração. Assim, neste ponto importa descrever o conceito de séries temporais estacionárias.

A importância da estacionariedade revela-se em diversos aspetos, entre os quais a possibilidade de desenvolver uma teoria de valores extremos adequada, generalizando os métodos clássicos; o facto de existir uma ampla variedade de aplicações práticas para as quais os modelos de estacionariedade são geralmente mais realistas relativamente ao pressuposto de variáveis i.i.d.; por último, mesmo séries não estacionárias podem geralmente ser divididas em períodos em que apresentem alguma estacionariedade, podendo considerar-se aproximadamente independentes.

Definição 2.1 (Estacionariedade) *Uma sequência de variáveis aleatórias X_1, X_2, \dots é estacionária se as distribuições conjuntas de $(X_{j_1}, \dots, X_{j_p})$ e $(X_{j_1+q}, \dots, X_{j_p+q})$ são idênticas para todo p, j_1, \dots, j_p e q .*

Para obter resultados úteis, devem ser impostas condições de forma a limitar a persistência da dependência entre X_j e X_{j+k} à medida que $|k| \rightarrow \infty$. Para este propósito, foram consideradas por Leadbetter et al. (1983) duas condições D e D' . A condição D restringe dependência de longo alcance, enquanto que a condição D' restringe a dependência entre observações X_j 's próximas (dependência a curto prazo).

Definição 2.2 (A condição $D(u_n)$) *Para uma determinada sequência u_n , a condição $D(u_n)$ diz-se que se verifica para todo $i_1 < \dots < i_p < j_1 < \dots < j_q$ com $j_1 - i_p \geq l$ se*

$$\left| \frac{\Pr(X_{i_1} \leq u_n, \dots, X_{i_p}, X_{j_1} \leq u_n, \dots, X_{j_q} \leq u_n) - \Pr(X_{i_1} \leq u_n, \dots, X_{i_p} \leq u_n) \times \Pr(X_{j_1} \leq u_n, \dots, X_{j_q} \leq u_n)}{\Pr(X_{i_1} \leq u_n, \dots, X_{i_p} \leq u_n) \times \Pr(X_{j_1} \leq u_n, \dots, X_{j_q} \leq u_n)} \right| \leq \alpha_{n,l}$$

onde $\alpha_{n,l} \rightarrow 0$ à medida que $n \rightarrow \infty$ para alguma sequência $l_n = o(n)$.

Considerando, agora, que X_1, \dots, X_n é uma sequência estacionária de variáveis aleatórias com uma função distribuição comum F . Para M_n definido como anteriormente, temos os seguintes resultados

Teorema 2.3 (Teorema dos tipos extremos para sequências estacionárias) *Se $D(u_n)$ é satisfeita com $u_n = a_n x + b_n$, com $a_n > 0$ e b_n constantes, e se*

$$\Pr \left\{ \frac{(M_n - b_n)}{a_n} \leq x \right\} \xrightarrow{w} G(x)$$

Em alguma função distribuição G não degenerada, então G é uma distribuição generalizada dos valores extremos.

O Teorema 2.3 pode ser interpretado da seguinte forma: para processos estacionários que sejam independentes a longo prazo (no contexto definido pela condição $D(u_n)$), os limites assintóticos standard aplicam-se também aos seus máximos M_n . Isto é, a dependência não tem qualquer impacto na classe das possíveis distribuições limites não degeneradas. Tal como no caso de variáveis aleatórias i.i.d., este teorema não nos informa sobre qual a distribuição, se é que existe, que se aplica dos três tipos de possíveis limites para um determinado processo estacionário, mesmo que F seja conhecida.

3. Modelos multivariados dos extremos

A partir deste ponto serão considerar os valores extremos de dados multivariados. Ao contrário do que acontece no caso dos dados univariados, nos quais conceitos como função de máximos, estatísticas de ordem e valores extremos têm definições naturais, no caso dos dados multivariados, estas definições não aparecem de forma tão natural e imediata. A abordagem clássica neste caso tem sido considerar os máximos de uma amostra multivariada como um vetor de componentes máximas.

As séries temporais multivariadas podem, à semelhança do caso das séries univariadas, ser modeladas por via dos métodos mais comuns, *block maxima* e a abordagem *peak over the threshold*. Em ambos os casos, as funções conjuntas têm um papel fundamental. Neste contexto, a função conjunta k -dimensional é uma função distribuição conjunta definida em $[0,1]^k$ com distribuições marginais padrão. De acordo com o Teorema de Sklar, para cada função distribuição conjunta F com margens F_1, \dots, F_k , existe uma copula C , isto é, uma função distribuição cumulativa multivariada, tal que $F(x_1, \dots, x_k) = C(F_1(x_1), \dots, F_k(x_k))$ para todos os valores de $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}$. A função copula é geralmente usada para descrever ou modelar dependência entre variáveis aleatórias. Se as margens são contínuas, então C é única,

pele que as funções conjuntas permitem que a estrutura de dependência de uma distribuição conjunta seja dissociada do seu comportamento marginal.

Tanto para o caso do método multivariado dos blocos máximos, como o método multivariado *peak over the threshold*, os parâmetros podem ser estimados por via da máxima verosimilhança. Na abordagem dos valores que excedem um determinado limiar u , a função de verosimilhança é normalmente calculada com dados censurados, o que significa que para cada observação $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k)$, a única informação de interesse que pode ser retirada das componentes x_j que se situam abaixo do determinado limiar u_j correspondente é que $x_j < u_j$, independentemente dos valores que tomam.

3.1 Notação e distribuição limite

Considerando que X_1, X_2, \dots, X_n são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.) k -dimensionais com função distribuição conjunta comum $F(\mathbf{x}) = F(x_1, \dots, x_d)$. Sejam F_1, \dots, F_d as distribuições marginais de $F(\mathbf{x})$ e definindo M_n como o vetor de dimensão d de observações das componentes máximas, isto é, $M_n = (M_n^{(1)}, \dots, M_n^{(d)})$, onde $M_n^{(j)} = \max(X_1^{(j)}, \dots, X_n^{(j)})$ para $j = 1, \dots, d$ e $X_i^{(j)}$ representa a j -ésima componente de X_i .

Tal como no caso das séries univariadas, pretende-se caracterizar o comportamento limite de M_n , ou seja, a distribuição G multivariada que deverá surgir como limite à medida que $n \rightarrow \infty$ na seguinte expressão

$$\Pr \left\{ \frac{(M_n^{(j)} - b_n^{(j)})}{a_n^{(j)}} \leq x_j; j = 1, \dots, d \right\} = F^n(u_n^{(1)}, \dots, u_n^{(d)}) \rightarrow G(\mathbf{x}) \quad (2.12)$$

onde temos $u_n^{(j)} = a_n^{(j)} x_j + b_n^{(j)}$, para sequências $a_n^{(j)} > 0$ e $b_n^{(j)} \in \mathbb{R}$; $1 \leq j \leq d, n \geq 1$.

As distribuições limite G não degeneradas são chamadas distribuições multivariadas dos valores extremos.

Pela equação anterior (2.12) podemos obter, de forma simplificada

$$\Pr\{(M_n - b_n)/a_n \leq x\} = F^n(a_n x + b_n) \rightarrow G(x). \quad (2.13)$$

De notar que cada distribuição marginal G_j da distribuição limite conjunta G é de valores extremos. Qualquer função distribuição multivariada F para a qual a equação (2.13) se ajusta é tida como pertencendo ao domínio de atração de G .

Existem dois aspetos separados a ter em atenção em (2.13) e que devem ser considerados individualmente: a convergência de cada distribuição marginal de F^n para as distribuições marginais correspondentes de G , e a convergência da estrutura de dependência de F^n para a mesma de G .

Aspetos que se relacionam com a convergência marginal podem ser tratados com recurso aos resultados univariados apresentados anteriormente. Assim, a estrutura de dependência de G , bem como a convergência da estrutura de dependência de F^n para a de G , devem ser consideradas para variáveis marginais estandardizadas. Por simplicidade de notação e transparência na apresentação de resultados, é conveniente escolher as variáveis marginais como Fréchet unitária distribuída, isto é, tendo a seguinte função distribuição $\Pr(X \leq x) = \exp(-1/x)$ com $x > 0$, o que não resulta em falta de generalidade, uma vez que transformações univariadas de probabilidade integral podem ser usadas para relacionar os resultados a distribuições marginais arbitrárias.

3.1.1 Método *peak over threshold* (POT)

No caso do método *peak over the threshold*, este pode ser estendido de forma similar ao enquadramento multivariado ao dissociar as margens da estrutura de dependência inerente à função copula. O objetivo neste caso é modelar a cauda superior da distribuição conjunta F , calculada nos pontos que excedem um determinado vetor de limiares relativamente elevados $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_k)^T$. Sob o pressuposto de que a função F pertence ao domínio de atração dos máximos da distribuição multivariada dos valores extremos, para todo $x_j \geq u_j$ ($j = 1, \dots, k$) então $F(x) = C(F_1(x_1), \dots, F_k(x_k))$ pode ser aproximado por $\tilde{F}(x) = C_0(\tilde{F}_1(x_1), \dots, \tilde{F}_k(x_k))$, onde C_0 representa a copula limitante dos valores extremos de C e as margens $\tilde{F}_j, j = 1, \dots, k$, têm formas derivadas das distribuições de Pareto generalizadas.

No contexto dos modelos multivariados, assume-se que os valores excedentários relativamente a um determinado limiar u seguem uma distribuição de Pareto generalizada. Para valores que se situem abaixo do limiar u , consideram-se censurados em u . O modelo para a cauda da distribuição F é dada, como resultado, por

$$\Pr(X \leq x) = 1 - \lambda_u \left\{ 1 + \frac{\xi(x - u)}{\sigma'} \right\}^{-\frac{1}{\xi}} \quad \text{para } x \geq u \quad (2.14)$$

onde $\lambda_u = 1 - F(u)$, $\sigma' > 0$ representa o parâmetro de escala e ξ o parâmetro de forma. Qualquer ponto com $x_i > u$ contribui para a verosimilhança $L(\lambda_u, \sigma', \xi; x_i)$ da seguinte forma

$$L(\lambda_u, \sigma', \xi; x_i) = \frac{dF(x)}{dx} \Big|_{x=x_i} = \lambda_u \sigma'^{-1} \left\{ 1 + \frac{\xi(x_i - u)}{\sigma'} \right\}_+^{-(1+\xi)/\xi} \quad (2.15)$$

Devido ao sistema de censura, a contribuição para a verosimilhança de um determinado ponto x_i que não exceda o limiar u é dada pela seguinte expressão

$$L(\lambda_u, \sigma', \xi; x_i) = F(u) = 1 - \lambda_u. \quad (2.16)$$

Desta forma, o valor de verosimilhança para uma determinada série de n pontos i.i.d., é dada por

$$\begin{aligned} L(\lambda_u, \sigma', \xi; \mathbf{x}) &= \prod_{i=1}^n L(\lambda_u, \sigma', \xi; x_i) \\ &= \left\{ \prod_{i: x_i \leq u} (1 - \lambda_u) \right\} \left\{ \prod_{j: x_j > u} \lambda_u \sigma'^{-1} \left\{ 1 + \frac{\xi(x_j - u)}{\sigma'} \right\}_+^{-(1+\xi)/\xi} \right\} \\ &= (1 - \lambda_u)^{n - n_u} \lambda_u^{n_u} \sigma'^{-n_u} \prod_{j: x_j > u} \left\{ 1 + \frac{\xi(x_j - u)}{\sigma'} \right\}_+^{-(1+\xi)/\xi} \end{aligned}$$

onde n_u representa o número de pontos que excedem o limiar u .

De facto, a contribuição da observação \mathbf{x} para a função de verosimilhança é dada pela derivada parcial de F no que respeita às componentes x_j de \mathbf{x} tais que $x_j \geq u_j$, avaliadas no ponto $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_k)^T$ definido como $y_i = x_i$ se $x_i \geq u_i$, e $y_i = u_i$ caso contrário.

3.2 Medidas de dependência para valores extremos

A distribuição conjunta de uma série de variáveis pode ser separada nas respectivas distribuições marginais e estrutura de dependência entre elas. É útil, para o estudo da estrutura de dependência de distribuições multivariadas, remover qualquer influência de aspetos marginais, inicialmente pela transformação de dados aleatórios numa distribuição comum marginal. Após essa transformação, qualquer diferença entre as distribuições é devida unicamente a aspetos de dependência, (Poon et al., 2004). Assim, retornos bivariados (X, Y) podem ser transformados em marginais Fréchet unitárias (S, T) da seguinte forma

$$U_1 = -\frac{1}{\log F_X(X)} \quad e \quad U_2 = -\frac{1}{\log F_Y(Y)} \quad (2.17)$$

onde F_X e F_Y representam as respectivas funções distribuição marginais para as variáveis X e Y . É usada uma transformação do tipo Fréchet devido à evidência na literatura relativamente à característica de caudas pesadas típica na distribuição dos retornos dos ativos e representada pela distribuição Fréchet, segundo Loretan e Phillips (1994) e Longin (1999). Neste trabalho, a discussão de resultados irá centrar-se na estimação da dependência no contexto bivariado, apesar das técnicas utilizadas se estenderem naturalmente a dimensões de ordens superiores.

3.2.1 Dependência assintótica e independência assintótica

Seja (X, Y) uma variável bivariada aleatória sobre a qual assumimos, por conveniência, que X e Y seguem distribuição marginal Fréchet unitária tal que $\Pr(X \leq x) = \Pr(Y \leq x) = \exp(-1/x)$ para $x > 0$. Seja κ a probabilidade condicional limite em

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \{\Pr(X > u | Y > u)\} = \kappa \quad (2.18)$$

então X e Y dizem-se ser assintoticamente dependentes se $\kappa > 0$ e assintoticamente independentes no caso de $\kappa = 0$. Os modelos que forem obtidos por intermédio da abordagem clássica dos extremos bivariados são bem-sucedidos quando X e Y são assintoticamente independentes. Por exemplo, quando X e Y apresentam uma estrutura de dependência bivariada normal com correlação $\rho \neq 1$ então a abordagem clássica fornece um

modelo limite que trata os extremos marginais como independentes seja qual for o valor de ρ , de acordo com Sibuya (1960).

Existem, no entanto, dificuldades adicionais causadas sobretudo pelo paradigma fundamental da modelação dos valores extremos que se baseia no tratamento de resultados assintóticos como aproximações dentro de regiões da cauda que sejam suficientemente extremas. Uma forma de ilustrar este problema é demonstrando que se o limite definido em (2.18) for tratado como uma igualdade quando ambos $X \geq u$ e $Y \geq u$ para um determinado nível elevado u , então $\Pr(X > u, Y > u) \equiv \Pr(X > u|Y > u) \Pr(Y > u) = \kappa \Pr(Y > u)$ que é 0 se X e Y forem assintoticamente independentes. No seu nível mais simples, a abordagem de Ledford e Tawn (1996) evita esta dificuldade ao introduzir o parâmetro η que controla a taxa de decadência de $\Pr(X > u, Y > u)$ para um elevado valor de u .

3.2.2 Parâmetro de dependência de cauda, η

Focando no caso bivariado, no contexto da dependência de caudas conjuntas, Ledford e Tawn (1997) introduziram o coeficiente de dependência de cauda $\eta \in (0, 1]$ e demonstraram através de uma variedade de exemplos que as estruturas de dependência de todas as distribuições bivariadas de valores extremos e uma vasta variedade de copulas comumente utilizadas podiam ser expressas dentro da sua estrutura ou seu enquadramento e que o parâmetro η governa amplamente a força e natureza da dependência extremal.

Uma vez que as variáveis marginais X e Y são estandardizadas de modo a serem distribuídos Fréchet unitários, o parâmetro η fornece uma medida de dependência entre caudas marginais. Nestes termos, a dependência assintótica corresponde ao caso em que $\eta = 1$, o que significa que as observações são sempre dependentes para qualquer nível elevado, e a independência assintótica a $\eta < 1$, o que significa que a independência entre as observações pode ocorrer no infinito, no entanto, para limites finitos, sub-assintóticos, existe dependência entre as observações, sendo que diminui à medida que se consideram níveis cada vez maiores. No caso de termos $\frac{1}{2} < \eta \leq 1$ então diz-se que as variáveis marginais se encontram positivamente associadas. Já no caso em que $\eta = \frac{1}{2}$ dizem-se independentes. Por fim, se $0 < \eta < \frac{1}{2}$ então as variáveis estão negativamente associadas.

Toda a estrutura de dependência de valores extremos bivariados e a grande maioria das estruturas de dependência que existem no contexto da literatura das copulas têm estruturas de dependência extremal que podem ser representadas na seguinte forma simplificada da abordagem de Ledford e Tawn (1997)

$$\bar{F}_{XY}(x, y) = \Pr(X > x, Y > y) = \frac{\mathcal{L}(x, y)}{(xy)^{1/2\eta}}$$

onde $\eta \in (0, 1]$ é o coeficiente de dependência de cauda e \mathcal{L} a função bivariada de variação lenta. Ao examinar o valor do parâmetro η para estruturas de dependência parametrizadas diferentes podemos comparar e contrastar as suas características de dependência. Sem este parâmetro, ou outras escalas de referência como o caso de χ e de $\bar{\chi}$ medidas de dependência extremal dadas por Coles et al. (1999), tais comparações são muito mais difíceis de efetuar.

4. Modelos para as caudas de cadeias de Markov

Os avanços na teoria dos valores extremos multivariados têm permitido desenvolver e melhorar técnicas de caracterização do comportamento extremal das séries temporais estacionárias, nomeadamente no que respeita ao comportamento dentro de *clusters* de valores extremos de uma série temporal, que se determina pela dependência temporal de curto prazo. Por serem facilmente tratáveis e suficientemente gerais, assumem-se características de cadeia de Markov associadas ao comportamento das séries temporais.

Para a modelação estatística da cauda de uma cadeia de Markov, uma abordagem comum consiste na utilização de uma determinada distribuição conjunta d -dimensional de valores extremos como forma de modelar a estrutura de dependência entre variáveis consecutivas X_i, \dots, X_{i+d} que excedam um determinado limiar, nível relativamente elevado, fixo u . Esta abordagem pressupõe que o comportamento extremal da cadeia é de igual modo válido para valores acima de um limiar u .

Uma cadeia Markov de 1ª ordem significa que uma determinada observação depende apenas da observação imediatamente anterior, isto é, uma observação x_{i+1} depende apenas da observação anterior x_i , a observação x_{i+2} depende da observação x_{i+1} e assim sucessivamente. No caso de uma cadeia de Markov de 2ª ordem temos que uma determinada observação depende das duas observações imediatamente anteriores. No presente trabalho,

uma vez que o estudo se centra na dependência temporal de curto prazo e de forma a simplificar o cálculo, recorre-se às cadeias de Markov de 1ª ordem. Assim, seja $\{X_n\}_{n \geq 1}$ uma cadeia de Markov estacionária, de 1ª ordem com espaços de estados contínuos e seja a sua função de distribuição conjunta $F(x_i, x_{i+1})$, cuja distribuição marginal é dada por $F(x) = \Pr(X_i \leq x)$ para todo o $i \geq 1$. Posteriormente, considera-se a distribuição de Pareto generalizada (GPD) para descrever o comportamento da cauda univariada acima do determinado nível elevado u_1 , nível na escala original da variável X_i , isto é, a distribuição

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \lambda_1 \left\{ 1 + \frac{\xi(x - u_1)}{\sigma} \right\}_+^{-\frac{1}{\xi}}, & x \geq u_1 \\ 1 - \lambda_1, & x < u_1 \end{cases} \quad (2.19)$$

onde $s_+ = \max(s, 0)$, ξ e $\sigma > 0$ representam, respetivamente, os parâmetros de forma e de escala, e $\lambda_1 = \Pr(X > u_1)$ representa a probabilidade do nível ser excedido, sendo que ξ quantifica o peso da cauda. A distribuição conjunta (X_i, X_{i+1}) numa região de cauda $R_{11} = (u_1, \infty) \times (u_1, \infty)$ obtém-se de forma semelhante. É adotado um modelo logístico η -assimétrico como modelo da cauda conjunta de forma a descrever a dependência entre observações extremas consecutivas da cadeia, o qual é dado por

$$F(x_i, x_{i+1}) = F(x_i) + F(x_{i+1}) - 1 + \frac{\lambda}{N_\varrho} \left[\left(\frac{\varrho y_i}{u_f} \right)^{-1/\eta} + \left(\frac{y_{i+1}}{\varrho u_f} \right)^{-1/\eta} - \left\{ \left(\frac{\varrho y_i}{u_f} \right)^{-1/\alpha} + \left(\frac{y_{i+1}}{\varrho u_f} \right)^{-1/\alpha} \right\}^{\alpha/\eta} \right] \quad (2.20)$$

para $x_i, x_{i+1} > u_1$ e onde $\eta, \alpha \in (0, 1]$ e $\varrho > 0, N_\varrho = \varrho^{-1/\eta} + \varrho^{1/\eta} - \left(\varrho^{-\frac{1}{\alpha}} + \varrho^{\frac{1}{\alpha}} \right)^{\frac{\alpha}{\eta}}$, $y_j = -1/\log F(x_j)$ ($j = i, i + 1$), $F(x)$, e $u_f = -1/\log(1 - \lambda_1)$ é o nível elevado na escala de Fréchet unitária.

O ajustamento do modelo é feito com recurso ao método da máxima verosimilhança com múltipla censura, sendo observações que se situem abaixo de um nível elevado censuradas para cada margem, como será demonstrado de seguida na secção 4.1.

Para o cálculo do VaR e do ES,

$$F(X, Y) = P(X \leq x, Y \leq y) \quad (2.21)$$

onde X e Y representam as observações x_i e x_{i+1} , respetivamente. O cálculo conjunto das variáveis não é possível, pelo que pode ser atribuído um valor suficientemente elevado a uma das variáveis, como por exemplo o valor do próprio nível elevado u . No entanto, tal valor não aparente ter significado económico. Assim, no caso concreto, substituímos na expressão (2.21) da seguinte forma

$$P(X \leq x, Y \leq +\infty)$$

onde $Y \leq +\infty$, sendo um acontecimento certo, tem probabilidade de 1, pelo que obtemos assim as margens

$$P(X \leq x) = F(x_i)$$

onde $F(x_i)$ representa a função distribuição de Pareto generalizada da expressão (2.20), tal como obtido no caso dos métodos univariados da EVT apresentados anteriormente no presente capítulo, diferenciando-se este método pela forma como os parâmetros são estimados com recurso a um modelo conjunto, mais completo e realista, tornando as previsões mais fiáveis e precisas.

Assim, de forma idêntica à demonstrada no subcapítulo 1.2.1, partindo da expressão da distribuição de Pareto generalizada em (2.19), tem-se

$$\hat{F}(x) = 1 - \lambda_1 \left(1 + \frac{\hat{\xi}(x - u_1)}{\hat{\sigma}} \right)^{-1/\hat{\xi}}$$

de onde, invertendo a expressão anterior, obtemos, à semelhança da equação (2.8), a seguinte expressão para o *Value-at-Risk*

$$\widehat{VaR} = u + \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\xi}} \left(\left(\frac{\alpha}{\lambda_1} \right)^{-\hat{\xi}} - 1 \right)$$

Para o *Expected Shortfall* obtemos novamente a expressão descrita em (2.9)

$$\widehat{ES}_\alpha = \widehat{VaR}_\alpha + E(X - \widehat{VaR}_\alpha | X > \widehat{VaR}_\alpha)$$

4.1 Método da máxima verosimilhança

O ponto de partida é a abordagem da máxima verosimilhança de níveis censurados que foi descrita por Smith et al. (1997), onde dados abaixo de um determinado nível elevado em cada margem são censurados. Seja $\{(X_i, Y_i), i = 1, \dots, n\}$ uma série de observações bivariadas independentes e identicamente distribuídas. Neste contexto, ignora-se o problema da necessidade em estimar as distribuições marginais ao assumir que X e Y são conhecidas por seguirem uma distribuição Fréchet unitária. A estimação das distribuições marginais serão demonstradas posteriormente (no artigo). O resultado é dividido em quatro regiões $\{R_{ij}: i = I(x \geq u), j = I(y \geq u)\}$ onde $I(\cdot)$ representa a função indicadora. Observações marginais que não excedam o nível elevado u são consideradas censuradas ao nível u , e, portanto, não são realizadas assunções relativas à estrutura de dependência fora da região R_{11} .

Representando por $L_{ij}(x_0, y_0)$ a contribuição de verosimilhança para um determinado ponto (x_0, y_0) que se situa na região R_{ij} , temos

$$\begin{aligned} L_{00}(x_0, y_0) &= 2F(u) - 1 + \bar{F}_{XY}(u, u), \\ L_{01}(x_0, y_0) &= f(y_0) + \left. \frac{\partial \bar{F}_{XY}(u, y)}{\partial y} \right|_{y=y_0}, \\ L_{10}(x_0, y_0) &= f(x_0) + \left. \frac{\partial \bar{F}_{XY}(x, u)}{\partial x} \right|_{x=x_0}, \\ L_{11}(x_0, y_0) &= \left. \frac{\partial^2 \bar{F}_{XY}(x, y)}{\partial x \partial y} \right|_{(x,y)=(x_0,y_0)}. \end{aligned}$$

Onde $F(x) = \exp(-1/x)$ e $f(x) = x^{-2} \exp(-1/x)$ são, respetivamente, a distribuição unitária Fréchet e a função densidade. Das expressões anteriores, de acordo com Ramos e Ledford (2009), obtém-se

$$\begin{aligned} L_{00}(x_0, y_0) &= 2 \exp(-u^{-1}) - 1 + \lambda, \\ L_{01}(x_0, y_0) &= f(y_0) - \frac{\lambda u^{\frac{1}{\eta}}}{\eta \rho N_\rho} \left[\left(\frac{y_0}{\rho} \right)^{-(1+\frac{1}{\eta})} - \left\{ (\rho u)^{-\frac{1}{\alpha}} + \left(\frac{y_0}{\rho} \right)^{-\frac{1}{\alpha}} \right\}^{\frac{\alpha}{\eta}-1} \left(\frac{y_0}{\rho} \right)^{-(1+\frac{1}{\alpha})} \right], \end{aligned}$$

$$L_{10}(x_0, y_0) = f(x_0) - \frac{\lambda u^{\frac{1}{\eta}} \rho}{\eta N_\rho} \left[(\rho x_0)^{-(1+\frac{1}{\eta})} \left\{ (\rho x_0)^{-\frac{1}{\alpha}} + \left(\frac{u}{\rho} \right)^{-\frac{1}{\alpha}} \right\}^{\frac{\alpha}{\eta}-1} (\rho x_0)^{-(1+\frac{1}{\alpha})} \right],$$

$$L_{11}(x_0, y_0) = \frac{\lambda u^{1/\eta} (\eta - \alpha)}{\alpha \eta^2 N_\rho} \left\{ (\rho x_0)^{-\frac{1}{\alpha}} + \left(\frac{y_0}{\rho} \right)^{-\frac{1}{\alpha}} \right\}^{\frac{\alpha}{\eta}-2} (x_0 y_0)^{-(1+\frac{1}{\alpha})}.$$

Desta forma, a máxima verosimilhança de uma determinada série de n observações bivariadas independentes é dada por

$$L_n(\eta, \alpha, \rho, \lambda) = \prod_{k=1}^n \sum_{ij} L_{ij}(x_k, y_k) I\{(x_k, y_k) \in R_{ij}\}.$$

Esta abordagem pode ser estendida a aplicações em que as distribuições marginais sejam desconhecidas recorrendo, para tal, à GDP para modelar as caudas das distribuições marginais.

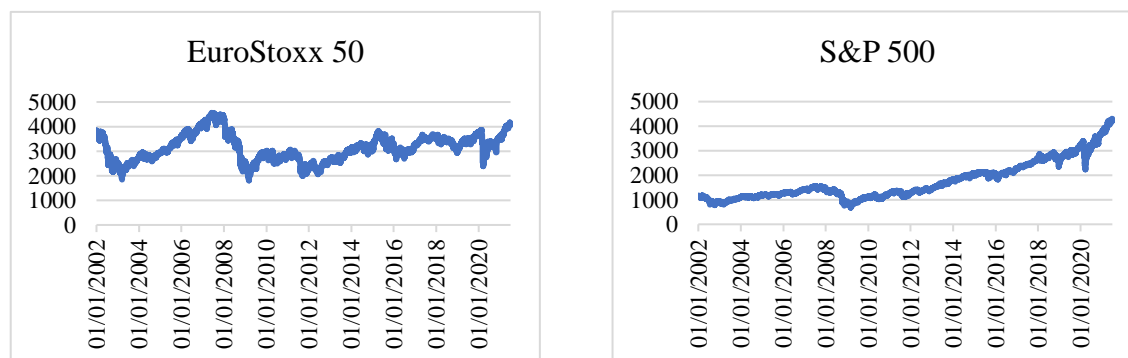
Capítulo III

1. Aplicação aos dados

Neste capítulo será realizada a análise do comportamento temporal extremal dos dados recolhidos, referentes aos índices Euro Stoxx 50, S&P 500 e Nikkei 225, bem como a implementação dos modelos da teoria dos valores extremos descritos anteriormente, a partir dos quais se prevê atingir uma melhoria na previsão das medidas de risco, VaR e ES, tendo em consideração os conceitos do capítulo anterior.

Neste trabalho são analisadas 5087 observações diárias, 5 dias por semana, no horizonte temporal compreendido entre 1 de janeiro de 2002 e 30 de junho de 2021. Os dados das respetivas séries temporais financeiras foram obtidos com recurso à base de dados Datastream conforme referido anteriormente e dizem respeito aos preços de fecho do mercado de ações dos índices mencionados. Para que seja observada estacionariedade nas séries temporais, consideram-se, como é habitual na área económica e financeira, os retornos diários logaritmizados.

Como podemos observar nos gráficos apresentados em seguida, em termos visuais facilmente se retira a conclusão de que os retornos diários não logaritmizados, representados pelo gráfico da Figura 3, evidenciam um comportamento totalmente irregular, não se verificando estacionariedade, pelo que o primeiro passo da análise será transformar os retornos em retornos logaritmizados a fim de se obter estacionariedade das séries temporais.



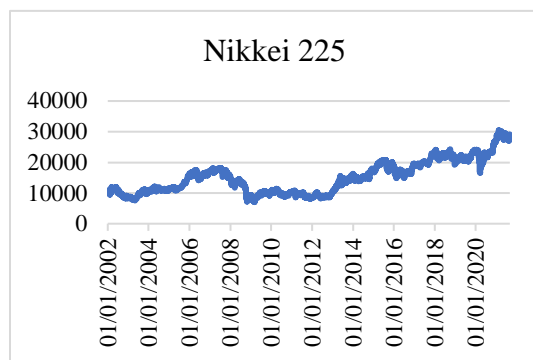


Figura 3: Índices financeiros EuroStoxx 50, S&P 500 e Nikkei 225.

Nos gráficos da Figura 4, são apresentados os retornos logarítmicos das séries financeiras e, como é possível observar visualmente, os dados exibem uma maior estabilidade, evidenciando, de facto, a existência de estacionariedade.

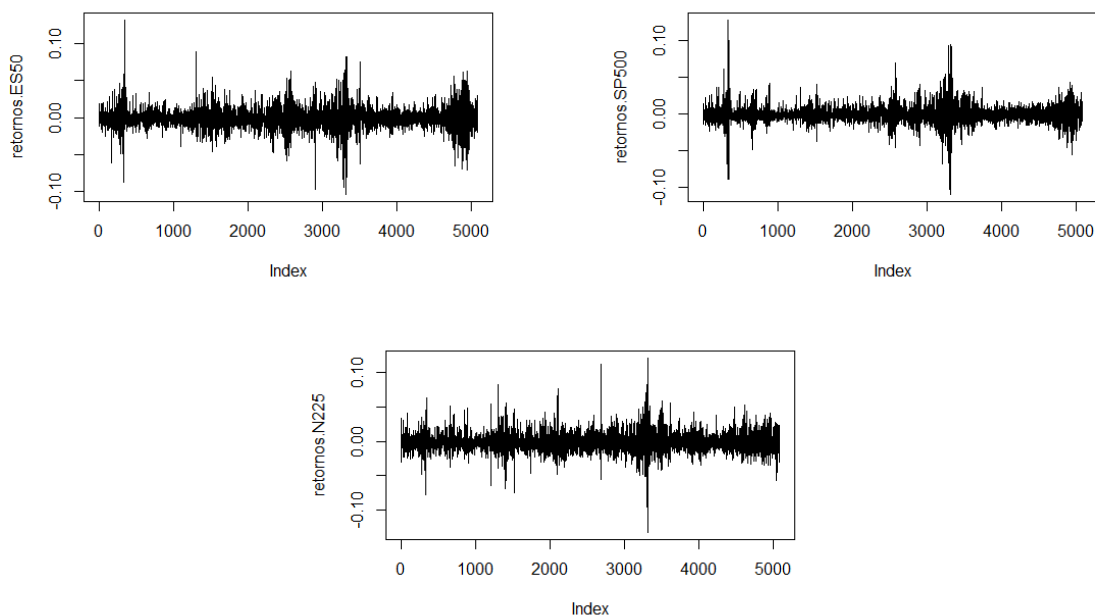


Figura 4: Retornos logarítmicos dos índices financeiros Euro stoxx 50, S&P 500 e Nikkei 225.

A existência e consequente importância dos valores extremos, tanto em termos de grandes quedas como de grandes subidas é já bastante evidente na distribuição dos retornos diários das séries financeiras consideradas que apresentam caudas pesadas, onde valores superiores a aproximadamente 0.025 e inferiores a -0.025, no caso dos índices Euro Stoxx 50 e Nikkei 225, são considerados *outliers*, e superiores a 0.020 e inferiores a 0.020, no caso do índice S&P

500, tal como pode ser observado nas caixas de bigodes representadas nos gráficos das Figuras 5, 6 e 7 apresentadas em seguida.

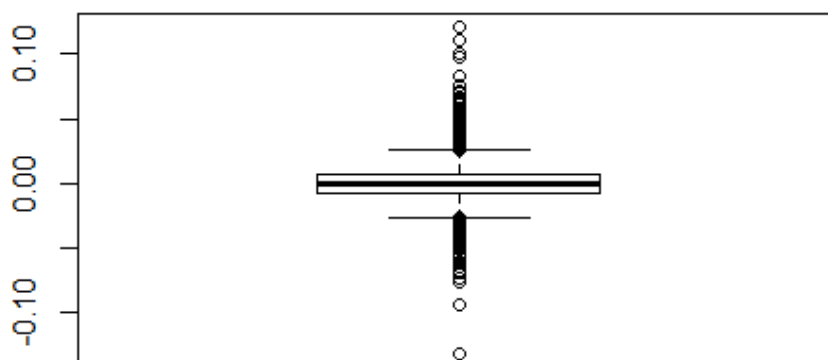


Figura 5: Caixa de bigodes da distribuição dos retornos diários do índice Euro Stoxx 50.

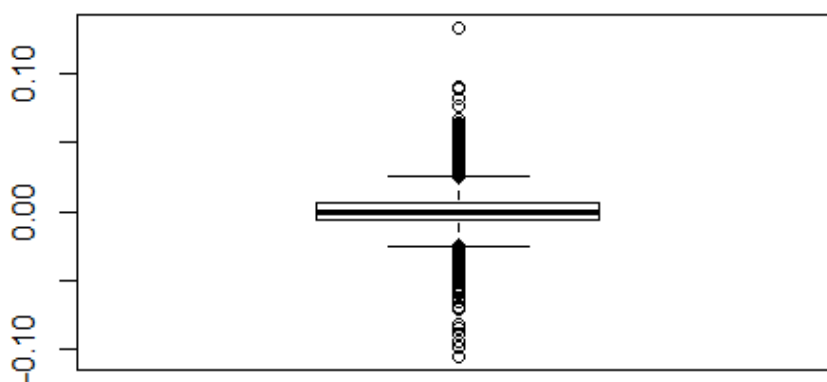


Figura 6: Caixa de bigodes da distribuição dos retornos diários do índice S&P 500.

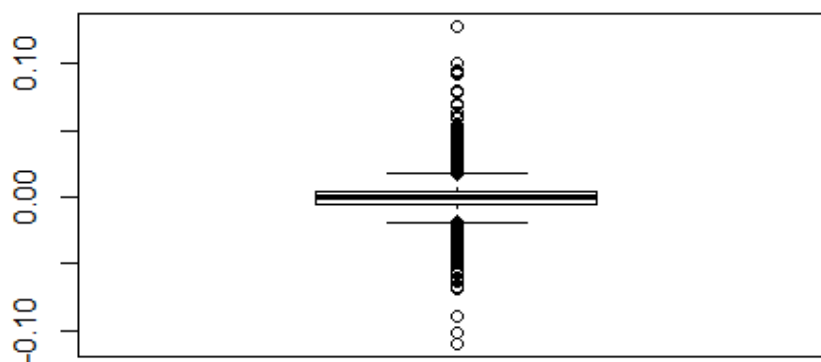


Figura 7: Caixa de bigodes da distribuição dos retornos diários do índice Nikkei 225.

1.1 Análise do comportamento extremal temporal

Nesta secção será aplicada a metodologia dos modelos das cadeias de Markov, conforme descrito anteriormente, no Capítulo II. Para a cauda conjunta superior dos pares (X_i, X_{i+1}) irá ser estudada o grau de dependência extremal, medida por via do parâmetro de dependência η , bem como o peso de ambas as caudas, superior e inferior, por via do parâmetro ξ , dos índices financeiros considerados para efeito. Trata-se de uma análise que requer a estimação conjunta da estrutura de dependência temporal extremal, assim como da cauda da distribuição marginal.

O modelo Markov descrito no Capítulo II para as caudas conjuntas, superior e inferior, foi ajustado aos dados para o nível elevado que corresponde ao quantil empírico de ordem 0.92, o que significa que apenas 8% das observações se situam acima do nível elevado, da distribuição marginal de $\{X_n\}$.

Para o caso do índice Euro Stoxx 50, através desta análise, foram obtidas, por via do método da máxima verosimilhança descrito no capítulo anterior, as seguintes estimativas relativas aos parâmetros de dependência, para a cauda superior: $\hat{\alpha} = 1.116$, $\hat{\eta} = 0.628$, $\hat{\rho} = 2.341$ e as estimativas dos parâmetros marginais: $\hat{\xi} = 0.110$ e $\hat{\sigma} = 0.011$. Para a cauda inferior, foram obtidas as seguintes estimativas dos parâmetros de dependência: $\hat{\alpha} = 0.903$, $\hat{\eta} = 0.663$, $\hat{\rho} = 1.220$, e as estimativas dos parâmetros marginais: $\hat{\xi} = 0.191$ e $\hat{\sigma} = 0.010$. Estes valores foram obtidos com recurso à programação no *software* R, cujos comandos utilizados se encontram no Anexo I.

A partir destes valores podemos concluir que para valores estimados do coeficiente de dependência assintótica de cauda, η , significativamente inferiores a 1 indica que a série analisada é assintoticamente independente, apesar de se observar alguma dependência temporal extremal positiva entre observações consecutivas (X_i, X_{i+1}) acima de níveis elevados sub-assintóticos visto que o valor estimado do coeficiente η se situa entre 0.5 e 1. Conclui-se, ainda, que, estando o valor do parâmetro estimado para a cauda inferior um pouco mais próximo de 0.5, esta apresenta uma fraca dependência entre retornos negativos extremos consecutivas. Além disso, a estimativa obtida no caso do parâmetro que mede o peso da cauda, o índice de cauda, ξ , superior a 0 sugere que a distribuição marginal apresenta caudas pesadas, tanto a nível da cauda superior como da inferior, sendo mais pesada no caso da inferior.

A qualidade do ajuste do modelo utilizado na análise do comportamento extremo do índice Euro Stoxx 50 pode ser observada no gráfico da Figura 8, onde estão representadas as curvas de nível da densidade do modelo que foi ajustado às caudas conjuntas das observações extremas consecutivas (X_i, X_{i+1}) que se apresentam sobrepostas. Neste gráfico observa-se que as curvas acompanham de forma adequada o comportamento das observações extremas.

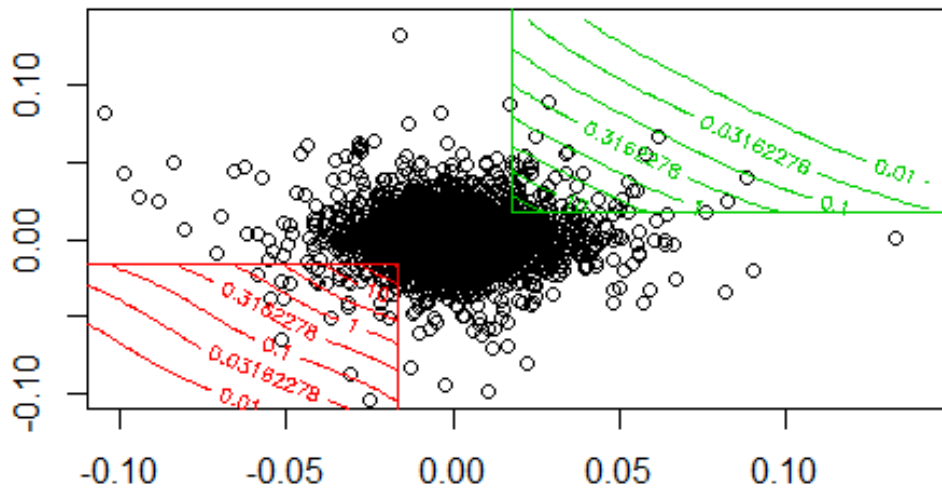


Figura 8: Curvas de nível da densidade do modelo ajustado às caudas conjuntas das observações (X_i, X_{i+1}) do índice Euro Stoxx 50. O nível elevado escolhido está, também, identificado a verde para o caso da cauda superior e a vermelho para a cauda inferior.

Para verificar a existência de estabilidade relativa às estimativas obtidas, o modelo descrito foi novamente ajustado a vários níveis elevados u_1 . As estimativas obtidas para os parâmetros são apresentadas na Tabela 1 para os diversos níveis elevados, os quantis empíricos de ordem 0.88, 0.89, 0.90, 0.91, 0.92, 0.93, 0.94 e 0.95, como forma de obter estimativas mais viáveis de ambos os parâmetros. Na seguinte tabela são apresentadas as estimativas obtidas, para o caso do índice Euro Stoxx 50, relativas aos parâmetros de dependência de cauda, $\hat{\eta}$, e índice de cauda, $\hat{\xi}$, para a cauda superior e inferior, bem como os respectivos desvios-padrão, apresentados entre parêntesis:

Tabela 1: Estimativas dos parâmetros de dependência, η , e índice de cauda, ξ , para os diversos níveis elevados e respectivos desvios-padrão, referentes ao índice Euro Stoxx 50.

		$\hat{\eta}$		$\hat{\xi}$	
		Cauda Superior	Cauda Inferior	Cauda Superior	Cauda Inferior
p	0.88	0.676 (0.054)	0.775 (0.080)	0.130 (0.048)	0.154 (0.047)
	0.89	0.659 (0.056)	0.770 (0.084)	0.132 (0.050)	0.160 (0.050)
	0.90	0.665 (0.060)	0.719 (0.081)	0.139 (0.054)	0.164 (0.052)
	0.91	0.636 (0.063)	0.706 (0.085)	0.137 (0.057)	0.188 (0.058)
	0.92	0.621 (0.064)	0.664 (0.083)	0.110 (0.058)	0.191 (0.061)
	0.93	0.623 (0.079)	0.713 (0.103)	0.078 (0.057)	0.167 (0.063)
	0.94	0.709 (0.107)	0.732 (0.120)	0.078 (0.062)	0.163 (0.068)
	0.95	0.681 (0.115)	0.725 (0.133)	0.081 (0.068)	0.211 (0.081)

Com as estimativas dos parâmetros representadas na tabela anterior, foi possível obter os gráficos da Figura 9, no qual é possível verificar uma estabilidade das estimativas do parâmetro η da cauda superior, representada pela linha a preto, e da cauda inferior, representada pela linha a azul, bem como das estimativas do parâmetro ξ no gráfico a baixo. No caso da cauda superior, verifica-se uma estabilidade do parâmetro η em torno de 0.63 e do parâmetro ξ em torno do valor positivo 0.11. No caso da cauda inferior, verifica-se estabilidade das estimativas do parâmetro η em torno do valor 0.70 e das estimativas do parâmetro ξ em torno do valor 0.2. São ainda incluídos na figura, os respetivos intervalos de confiança das estimativas obtidas, para um nível de confiança de 95%, representados pelas linhas a tracejado.

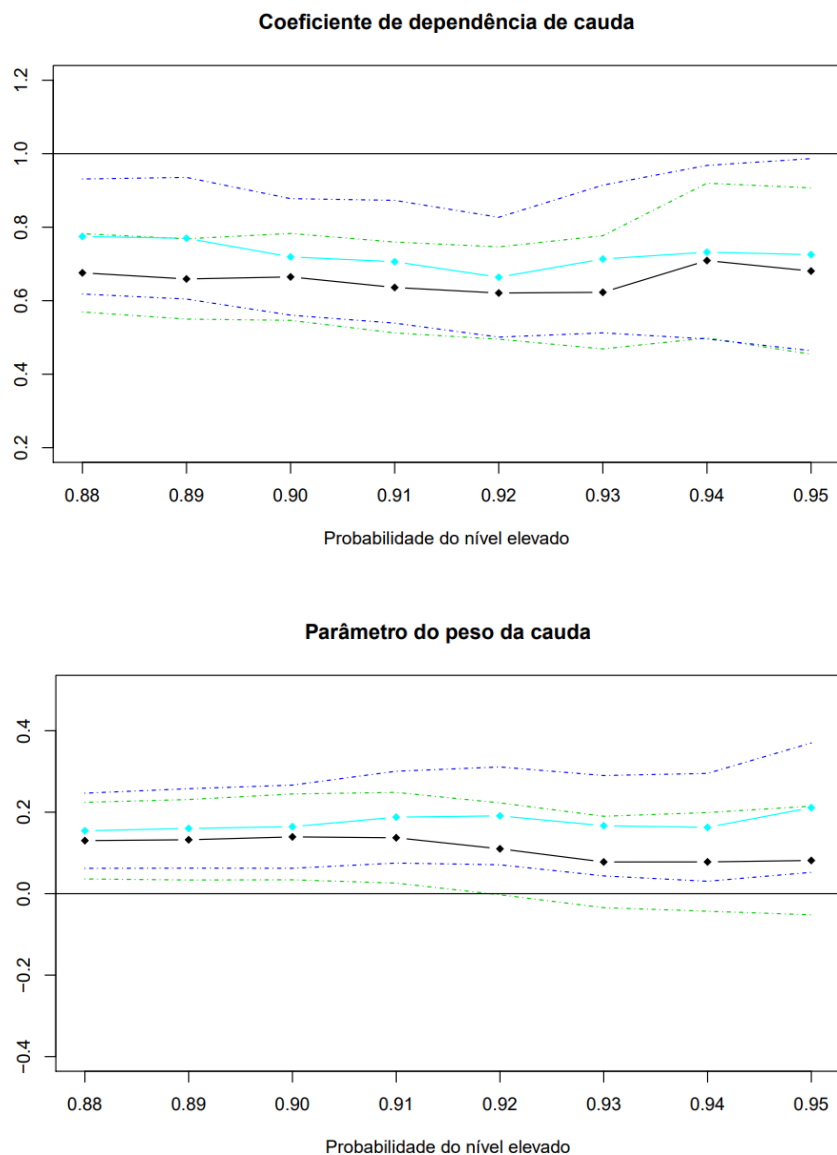


Figura 9: Estimativas de η (gráfico de cima) e de ξ (gráfico de baixo) obtidas ajustando o modelo descrito para vários valores do nível u_1 e respectivos intervalos de confiança a 95%, do índice Euro stoxx 50.

Os valores observados continuam a sugerir uma forte dependência temporal extremal, bem como cauda marginais pesadas. Pode-se, ainda, concluir, por análise dos gráficos, que existe maior dependência temporal extremal no caso da cauda inferior relativamente à cauda superior, isto é, subidas extremas tendem a ocorrer de forma mais isolada (de forma separada) no tempo relativamente às quedas extremas. Relativamente ao parâmetro que mede o peso da cauda, podemos concluir que no caso do Euro Stoxx 50, este índice apresenta uma cauda inferior mais pesada relativamente à cauda superior, o que sugere que as quedas extremas são geralmente mais agressivas que as subidas extremas.

Para o caso do índice financeiro S&P 500, foram obtidas as seguintes estimativas, por via do mesmo método, dos parâmetros de dependência da cauda superior: $\hat{\alpha} = 0.771$, $\hat{\eta} = 0.905$ e $\hat{\rho} = 0.908$ e as estimativas dos parâmetros marginais: $\hat{\xi} = 0.211$ e $\hat{\sigma} = 0.009$. Para o caso da cauda inferior, obtiveram-se os seguintes valores dos parâmetros de dependência: $\hat{\alpha} = 0.506$, $\hat{\eta} = 0.681$ e $\hat{\rho} = 0.989$, e as estimativas dos parâmetros marginais: $\hat{\xi} = 0.333$ e $\hat{\sigma} = 0.006$.

De acordo com as estimativas obtidas, conclui-se que para o coeficiente de dependência assintótica, η , em ambas as caudas, inferior a 1 sugere que a série é assintoticamente independente em ambos os casos, embora se observe uma maior dependência temporal extremal positiva entre as observações consecutivas da cauda superior acima de níveis elevados sub-assintóticos, uma vez que o valor de η em ambos os casos se situa entre 0.5 e 1, estando mais próximo de 1 no caso da cauda superior. Além disso, verifica-se um valor da estimativa do índice de cauda, ξ , superior a 0, que indica que as distribuições marginais apresentam caudas pesadas.

A qualidade do modelo utilizado ajustado aos dados pode ser verificada na Figura 10, conforme descrito anteriormente para a série financeira S&P 500.

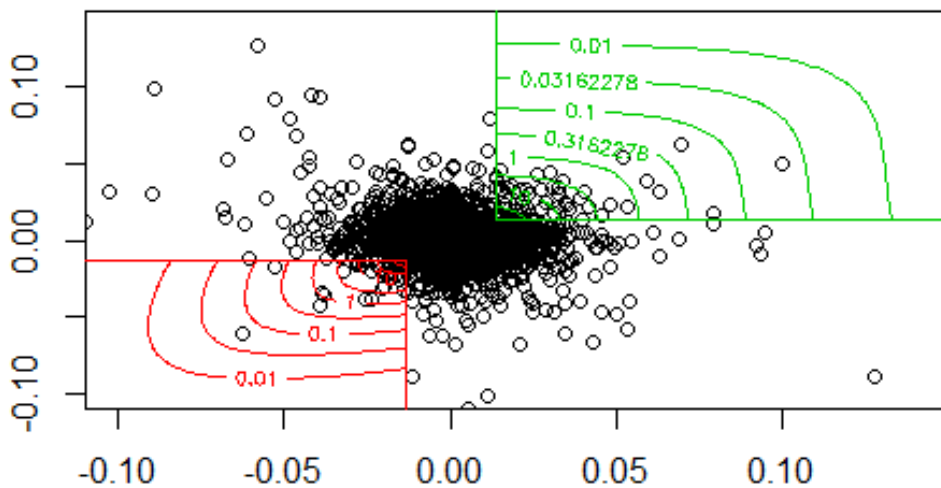


Figura 10: Curvas de nível da densidade do modelo ajustado às caudas conjuntas das observações (X_i, X_{i+1}) do índice S&P 500. O nível elevado escolhido está, também, identificado a verde para o caso da cauda superior e a vermelho para a cauda inferior.

Para verificar a estabilidade das estimativas que foram anteriormente obtidas, ajustou-se novamente o modelo anteriormente descrito para os vários níveis de u_1 considerados

anteriormente. Na Tabela 2 são apresentados os valores das estimativas dos parâmetros η e ξ para os diversos níveis elevados, bem como os respectivos desvios padrões, entre parêntesis, obtidos para o caso do índice financeiro S&P 500.

Tabela 2: Estimativas dos parâmetros de dependência, η , e índice de cauda, ξ , para os diversos níveis elevados e respectivos desvios-padrão, referentes ao índice S&P 500.

		$\hat{\eta}$		$\hat{\xi}$	
		Cauda Superior	Cauda Inferior	Cauda Superior	Cauda Inferior
p	0.88	0.774 (0.068)	0.661 (0.066)	0.158 (0.045)	0.282 (0.053)
	0.89	0.773 (0.073)	0.632 (0.067)	0.163 (0.048)	0.278 (0.055)
	0.90	0.866 (0.088)	0.664 (0.076)	0.184 (0.053)	0.288 (0.059)
	0.91	0.830 (0.090)	0.671 (0.084)	0.203 (0.058)	0.308 (0.065)
	0.92	0.894 (0.110)	0.667 (0.091)	0.211 (0.064)	0.333 (0.072)
	0.93	0.840 (0.106)	0.688 (0.106)	0.195 (0.064)	0.297 (0.074)
	0.94	0.885 (0.127)	0.690 (0.119)	0.177 (0.067)	0.280 (0.080)
	0.95	0.875 (0.139)	0.692 (0.138)	0.204 (0.077)	0.284 (0.090)

Obtiveram-se, de forma semelhante, os gráficos da Figura 11, no qual é possível analisar visualmente uma estabilidade das estimativas do parâmetro η da cauda superior, representada pela linha a preto, e da cauda inferior, representada pela linha a azul, assim como as estimativas do parâmetro ξ . Para a cauda superior, verifica-se uma estabilidade do parâmetro de dependência em torno do valor 0.9 e do parâmetro ξ em torno do valor 0.2. No caso da cauda superior, verifica-se uma estabilidade do parâmetro η em torno de 0.63 e do parâmetro ξ em torno do valor positivo 0.11. São ainda incluídos na figura, os respectivos intervalos de

confiança das estimativas obtidas, para um nível de confiança de 95%, representados pelas linhas a tracejado.

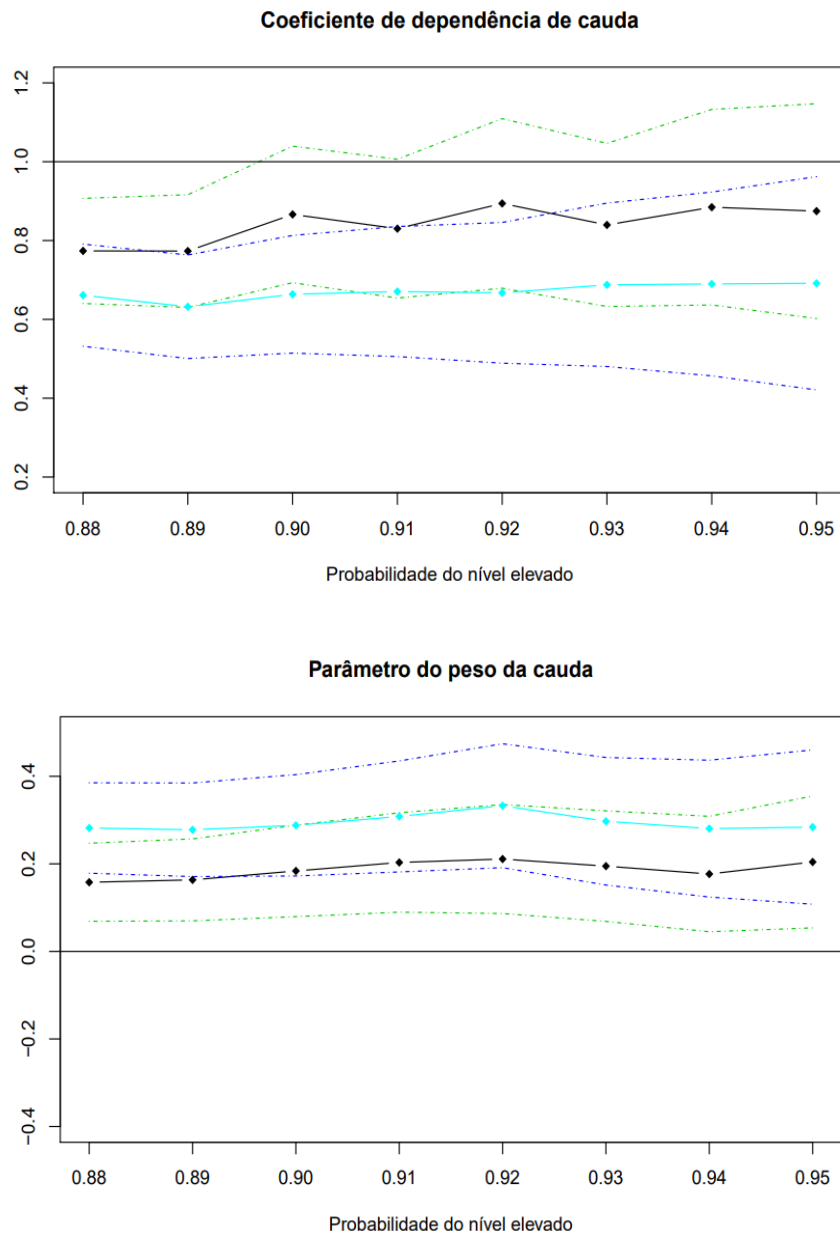


Figura 11: Estimativas de η (gráfico de cima) e de ξ (gráfico de baixo) obtidas ajustando o modelo descrito para vários valores do nível u_1 e respectivos intervalos de confiança a 95%, do índice S&P 500.

Observando os gráficos da Figura anterior, conclui-se que os valores obtidos sugerem novamente uma forte dependência temporal extremal e caudas marginais pesadas. Conclui-se, também, que existe maior dependência temporal extremal no caso da cauda superior

relativamente à cauda inferior, isto é, quedas extremas tendem a ocorrer de forma mais isolada (de forma separada) no tempo relativamente às subidas extremas, ao contrário do que acontece no caso do índice estudado anteriormente. Relativamente ao parâmetro que mede o peso da cauda, este índice apresenta uma cauda inferior mais pesada relativamente à cauda superior, o que sugere ser expectável que as quedas extremas sejam geralmente mais agressivas que as subidas extremas.

Por fim, no caso do índice financeiro Nikkei 225, obtiveram-se as seguintes estimativas dos parâmetros de dependência da cauda superior: $\hat{\alpha} = 1.018$, $\hat{\eta} = 0.894$ e $\hat{\rho} = 0.526$ e as estimativas dos parâmetros marginais e respetivos desvios padrão entre parêntesis: $\hat{\xi} = 0.174$ e $\hat{\sigma} = 0.009$. No caso da cauda inferior, obtiveram-se os seguintes valores dos parâmetros de dependência: $\hat{\alpha} = 0.848$, $\hat{\eta} = 1.000$ e $\hat{\rho} = 0.723$, e as estimativas dos parâmetros marginais: $\hat{\xi} = 0.195$ e $\hat{\sigma} = 0.007$.

A partir das estimativas obtidas anteriormente, é possível concluir que um valor do coeficiente de dependência assintótica, η , no caso da cauda superior, inferior a 1, e superior a 0.5, sugere que a série financeira é assintoticamente independente, estando positivamente relacionadas. Já no caso da cauda inferior, este valor é exatamente 1, o que sugere dependência assintótica entre quedas extremas desta série financeira. Verifica-se, ainda, um valor estimado do índice de cauda, ξ , superior a 0, o que sugere a presença de caudas pesadas.

A qualidade do modelo utilizado ajustado aos dados pode ser verificada na Figura 12, conforme descrito anteriormente para a série financeira Nikkei 225.

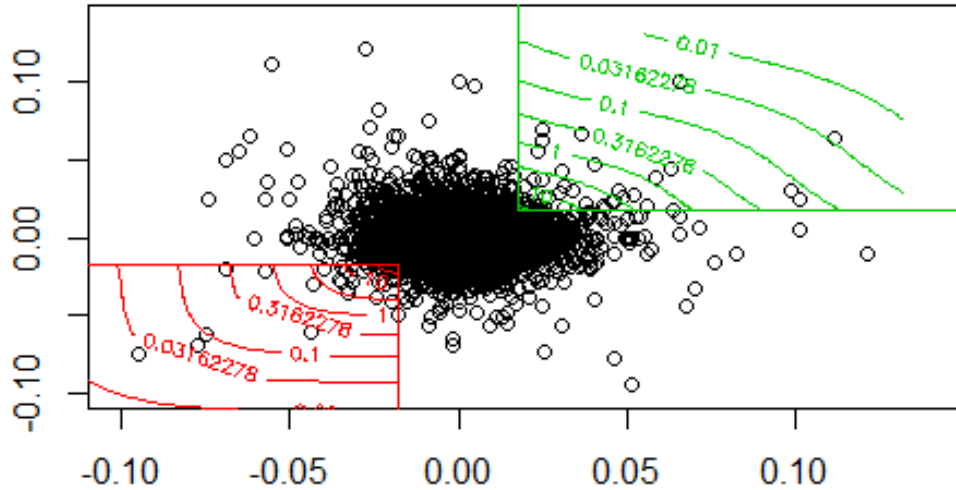


Figura 12: Curvas de nível da densidade do modelo ajustado às caudas conjuntas das observações (X_i, X_{i+1}) do índice Nikkei 225. O nível elevado escolhido está, também, identificado a verde para o caso da cauda superior e a vermelho para a cauda inferior.

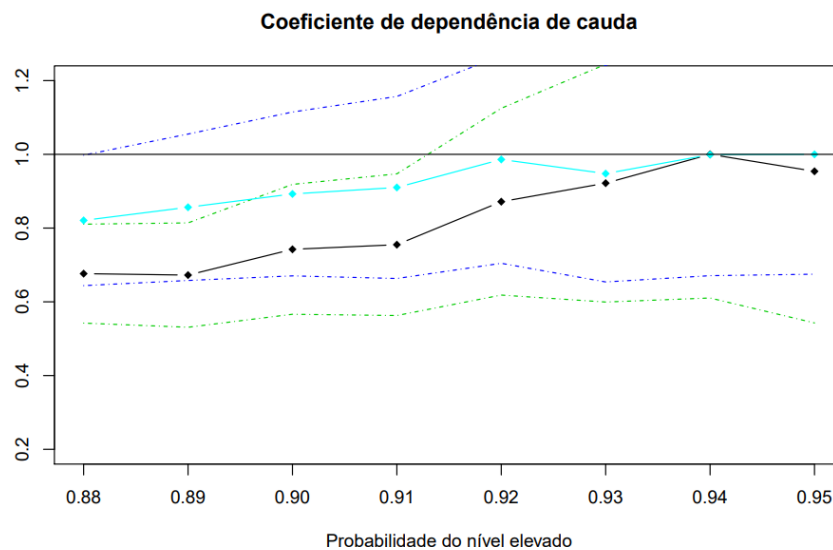
Novamente, para verificar a estabilidade das estimativas anteriormente obtidas, o modelo descrito foi ajustado para vários níveis de u_1 . Na Tabela 3 são apresentados os vários valores obtidos para as estimativas dos parâmetros η e ξ para cada nível elevado, bem como os respectivos desvios padrões, entre parêntesis.

Tabela 3: Estimativas dos parâmetros de dependência, η , e índice de cauda, ξ , para os diversos níveis elevados e respetivos desvios-padrão, referentes ao índice Nikkei 225.

		$\hat{\eta}$		$\hat{\xi}$	
		Cauda Superior	Cauda Inferior	Cauda Superior	Cauda Inferior
p	0.88	0.676 (0.068)	0.821 (0.090)	0.126 (0.042)	0.135 (0.042)
	0.89	0.673 (0.072)	0.856 (0.101)	0.142 (0.072)	0.155 (0.046)
	0.90	0.742 (0.090)	0.893 (0.113)	0.148 (0.048)	0.160 (0.049)
	0.91	0.755 (0.098)	0.910 (0.126)	0.151 (0.050)	0.198 (0.056)
	0.92	0.872 (0.129)	0.986 (0.144)	0.174 (0.056)	0.195 (0.060)
	0.93	0.922 (0.164)	0.948 (0.150)	0.269 (0.071)	0.203 (0.064)

	0.94	1.000 (0.199)	0.999 (0.167)	0.274 (0.076)	0.190 (0.068)
	0.95	0.954 (0.210)	1.000 (0.166)	0.266 (0.083)	0.186 (0.070)

No gráfico seguinte da Figura 13, é possível observar visualmente a estabilidade das estimativas obtidas anteriormente para os parâmetros η , para a cauda superior representada pela linha a preto e cauda inferior representada pela linha a azul, e ξ da mesma forma para ambas as caudas. Em comparação com os casos apresentados anteriormente, observa-se menor estabilidade dos valores obtidos para o parâmetro de dependência de cauda, η . No caso da cauda superior este valor situa-se por volta de 0.83, próximo do valor obtido anteriormente. Para o caso da cauda inferior verifica-se maior estabilidade do valor das estimativas obtidas para o parâmetro em causa, em comparação com o caso da cauda superior, em torno do valor 0.93, muito próximo de 1, conforme o valor obtido anteriormente para o nível elevado de 0.92. Observa-se para níveis cada vez mais elevados que os valores destas estimativas se aproximam de 1., o que indica que à medida que se consideram níveis mais elevados, é sempre possível que se observem duas observações superiores a esse nível elevado consecutivas, devido à dependência assintótica.



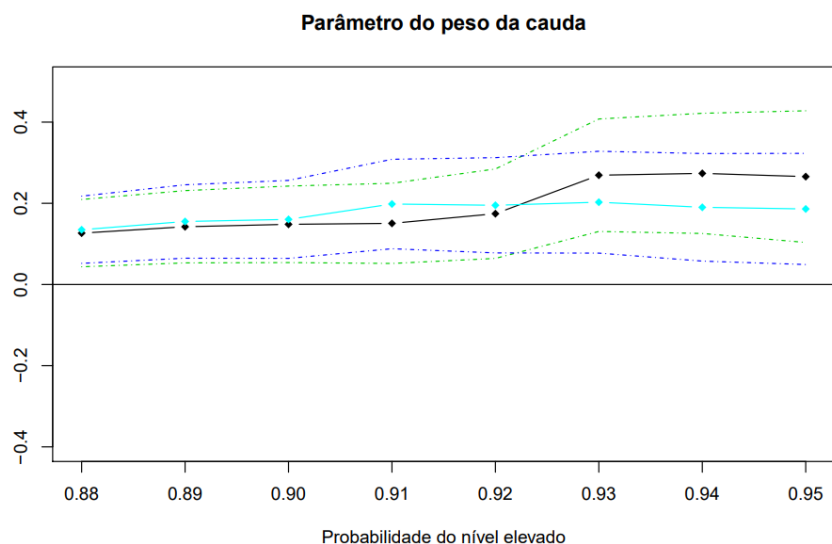


Figura 13: Estimativas de η (gráfico de cima) e de ξ (gráfico de baixo) obtidas ajustando o modelo descrito para vários valores do nível u_1 e respectivos intervalos de confiança a 95%, do índice Nikkei 225.

No caso das estimativas obtidas em cada nível elevado para o parâmetro que mede o peso da cauda, observa-se, visualmente, uma maior estabilidade, que em ambos os casos sugere caudas pesadas. Para o caso da cauda superior, verifica-se uma certa estabilidade das estimativas obtidas em torno do valor 0.2, situando-se, para o caso da cauda inferior, em torno de 0.19. Estes valores sugerem que a cauda superior tem um peso superior ao da cauda inferior, pelo que se espera que subidas de ordem extrema tenham um peso superior ao das quedas extremas.

Os valores observados no gráfico da Figura anterior sugerem uma forte dependência temporal extremal, bem como caudas marginais pesadas. Conclui-se, ainda, que existe maior dependência temporal extremal no caso da cauda inferior relativamente à cauda superior, isto é, subidas extremas tendem a ocorrer de forma mais isolada relativamente às quedas extremas, pelo que é mais expectável seguir-se uma nova queda de ordem extrema após ter sido observada uma queda extrema, do que no caso das subidas extremas. Atentando nos valores obtidos para o parâmetro que mede o peso da cauda, conclui-se que apresenta uma cauda inferior mais pesada relativamente à cauda superior, para valores do nível elevado inferiores, de 0.88 a 0.92, o que sugere que as quedas extremas são geralmente mais agressivas que as subidas extremas.

1.2 Comparação entre os resultados obtidos para cada índice financeiro

A partir dos resultados apresentados na secção anterior, podemos fazer algumas comparações entre as estimativas obtidas para os parâmetros de dependência e peso da cauda dos índices selecionados para o efeito.

Para valores extremos positivos, da cauda superior da distribuição dos retornos diários, no que respeita ao peso da cauda, ξ , podemos concluir que o índice financeiro S&P 500 apresenta o valor da estimativa mais elevado relativamente aos restantes, o que indica a existência de uma cauda superior mais pesada, sugerindo que este geralmente experiencia subidas mais acentuadas dos retornos. Por outro lado, o Euro Stoxx 50 apresenta o valor mais baixo da estimativa deste parâmetro, sugerindo que geralmente quando ocorrem subidas de ordem extremas, estas tendem a ser, neste caso, as menos acentuadas. No que respeita ao parâmetro de dependência de cauda, η , o índice S&P 500 é, também, o que apresenta um valor estimado superior, o que sugere que se trata do índice que apresenta maior dependência temporal extremal relativamente aos restantes. Isto é, é mais expectável, neste caso, que se observem subidas consecutivas de ordem extrema nos retornos diários financeiros. Por outro lado, o índice Euro Stoxx 50 é novamente o que apresenta o menor valor estimado deste parâmetro, sugerindo uma menor dependência extremal temporal.

No caso dos valores extremos que se situam na cauda inferior da distribuição dos retornos diários financeiros, que representam as quedas de carácter extremo, podemos concluir que o índice S&P 500 é o que apresenta a cauda inferior mais pesada, sugerindo ser mais expectável estar sujeito a quedas extremas mais acentuadas que os restantes. Por outro lado, o índice Euro Stoxx 50 é o que apresenta um menor valor da estimativa do parâmetro do peso da cauda, o que sugere que as quedas extremas no retorno diário financeiro sejam menos severas que os restantes. Por fim, no que respeita ao parâmetro de dependência de cauda, o índice Nikkei 225 é o que apresenta maior dependência extremal temporal, sendo mais expectável, neste caso, a observação de quedas consecutivas nos retornos diários extremas. Neste contexto, o índice S&P 500 é o que apresenta menor dependência extremal temporal entre quedas extremas consecutivas, não sendo expectável que após uma queda extrema se observe nova queda extrema, como nos restantes casos estudados.

1.3 Melhorias obtidas no cálculo do VaR e ES

Trata-se de uma abordagem assente em pressupostos mais realistas relativamente às metodologias univariadas da teoria dos valores extremos, uma vez que admite existir dependência extremal temporal entre duas observações extremas consecutivas, ao contrário do pressuposto das variáveis independentes e identicamente distribuídas. Na realidade é expectável que se observe dependência entre subidas extremas consecutivas ou quedas extremas consecutivas, especialmente no caso dos eventos extremos como *crashes*, para o caso das quedas extremas, e bolhas, no caso de subidas extremas, como foi referido anteriormente no Capítulo I, como se concluiu por análise dos parâmetros estimados para cada índice estudado. Desta forma, o modelo utilizado para estudar os vários parâmetros, com especial atenção dos parâmetros de dependência de cauda e do peso da cauda, proporciona estimativas mais realistas que, por si só, contribuem para uma melhoria no cálculo do VaR e do ES.

No presente trabalho pretende-se apenas demonstrar a forma como este modelo Markov pode melhorar o cálculo das medidas do risco referidas, destacando, por conseguinte, a importância desta melhoria na área da gestão do risco financeiro, pois permite a obtenção de previsões do risco mais precisas e próximas da realidade. Apesar de se recorrer às funções marginais para cálculo dos mesmos, isto é, o cálculo das medidas do risco efetua-se da mesma forma que para o caso das metodologias univariadas, tal como foi descrito no Capítulo II, obtém-se uma melhoria por via de valores estimados dos parâmetros mais viáveis. O facto de serem usadas as funções marginais aproxima o cálculo do VaR e do ES do que é efetuado com recurso às metodologias univariadas da teoria dos valores extremos, no entanto, como referido anteriormente, trata-se de uma melhoria devido à forma como os parâmetros são estimados.

Em trabalhos futuros, pode ser estudada uma forma de, com recurso ao modelo descrito no presente trabalho, calcular as medidas de risco de forma conjunta, encontrando um determinado valor com significado económico para uma das observações.

Conclusão

Ao longo dos anos, foram diversas as ocorrências extremas nos mercados financeiros que, apesar de raras, têm preocupado os agentes económicos pelas perdas avultadas em que resultam, não só a nível das instituições financeiras como da economia global. Por esta razão tem-se tornado cada vez mais crucial o desenvolvimento de uma gestão do risco financeiro adequada, de forma a minimizar as perdas. Para tal, têm sido desenvolvidas formas de tornar o cálculo das medidas de risco, como o VaR e o ES, cada vez mais precisas e viáveis de maneira a adequar a implementação de políticas.

Ao longo do presente trabalho, foi demonstrada a melhor adequação da teoria dos valores extremos relativamente às metodologias tradicionais, devidos aos pressupostos em que assenta. Como foi possível observar pelos resultados obtidos, a distribuição dos retornos diários logaritmizados das séries financeiras apresenta, de facto, caudas pesadas, pelo que o pressuposto da normalidade assumido pelas metodologias tradicionais descritas no Capítulo I não descreve corretamente estas distribuições.

De facto, do estudo realizado pode concluir-se que, no geral, os índices financeiros apresentam cauda pesadas, tanto a nível dos retornos positivos extremos, isto é, cauda superior, como dos retornos negativos extremos, cauda inferior, sendo mais comum as caudas inferiores apresentarem um peso superior ao das caudas superiores, o que indica que as quedas extremas tendem a ser mais severas, cujas consequências são as que mais preocupam os agentes económicos. Esta conclusão, que já seria de prever, demonstra a adequação da teoria dos valores extremos no estudo dos extremos para cálculo das medidas de risco, permitindo um cálculo das mesmas mais preciso e viável. No caso em concreto, demonstrou-se ainda que o modelo conjunto baseado em metodologias multivariadas da EVT é adequado e parte de pressupostos mais realistas, pois permite que haja dependência entre duas observações extremas consecutivas, seja da cauda superior ou inferior, ao contrário do pressuposto assente na independência entre observações das teorias univariadas. Desta forma, em relação às teorias univariadas da EVT, é possível obter uma melhoria no cálculo das medidas de risco, VaR e ES, uma vez que os parâmetros são estimados com recurso a este modelo conjunto.

Como se pode observar pelos resultados obtidos, existe, de facto dependência entre observações extremas consecutivas, sendo expectável que após uma queda extrema, como

acontece em períodos de *crashes*, se suceda uma nova queda de ordem extrema. O mesmo acontece no caso de subidas extremas, o que pode ser esperado em períodos de bolhas.

Por último, como foi referido anteriormente, o cálculo das medidas de risco é realizado de forma semelhante quando recorrendo a metodologias univariadas da EVT, diferenciando apenas na forma como se obtêm as estimativas dos parâmetros necessários ao cálculo do VaR e do ES. Não sendo possível o cálculo conjunto, recorre-se às margens, conforme demonstrado anteriormente. Seria possível atribuir um valor suficientemente elevado a uma das variáveis, no entanto, não teria qualquer significado económico. Este ponto pode vir a ser estudado e desenvolvido em estudos futuros.

Referências Bibliográficas

- Aboura, S. (2015). Disentangling Crashes from Tail Events. *International Journal of Finance & Economics*, 20(3), 206-219. <https://doi.org/10.1002/ijfe.1510>
- Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.-M., & Heath, D. (1999). Coherent Measures of Risk. *Mathematical Finance*, 9(3), 203-228. <https://doi.org/10.1111/1467-9965.00068>
- Assaf, A. (2009). Extreme observations and risk assessment in the equity markets of MENA region: Tail measures and Value-at-Risk. *International Review of Financial Analysis*, 18, 109-116. <https://doi.org/10.1016/j.irfa.2009.03.007>
- Brunnermeier, M. K., & Oehmke, M. (2013). Bubbles, Financial Crises, and Systemic Risk, *Handbook of the economics of finance*, 18398 (2), 1221-1288. <https://doi.org/10.1016/b978-0-44-459406-8.00018-4>
- Bullard, J., Neely, C. J., & Wheelock, D. C. (2009). Systemic Risk and the Financial Crisis: A Primer. *Federal Reserve Bank of St. Louis Review*, 91(5), 403-417.
- Christoffersen, P. F., Diebold, F., & Schuermann, T. (1998). Horizon problems and extreme events in financial risk management. *Economic Policy Review*, 4, 109-118.
- Christoffersen, P., Hahn, J., & Inoue, A. (2001). Testing and comparing Value-at-Risk measures. *Journal of Empirical Finance*, 8(3), 325-342. [https://doi.org/10.1016/s0927-5398\(01\)00025-1](https://doi.org/10.1016/s0927-5398(01)00025-1).
- Coles, S. G. (1999). Extreme value theory and applications. In *Lecture notes for the 44th Reunião Anual da RBRAS e 8th SEAGRO*. São Paulo. Brasil.
- Cotter, J. (2006). Extreme Value Estimation of Boom and Crash Statistics. *The European Journal of Finance*, 12(6-7), 553-566. <https://doi.org/10.1080/13518470500460111>
- Dacorogna, M. M., Müller, U. A., Pictet, O. V., & De Vries, C. G. (2001). Extremal Forex Returns in Extremely Large Data Sets. *Extremes*, 4(2), 105-127. <https://doi.org/10.1023/a:1013917009089>
- Danielsson, J. (2011). *Financial risk forecasting: The theory and practice of forecasting market risk, with implementation in R and MATLAB*. Chichester: John Wiley.

- Danielsson, J., & De Vries, C. (2000). Value-at-risk and extreme returns. *Annales d'Économie et de Statistique*, 60, 239-270. <https://doi.org/10.2307/20076262>
- Davison, A. C., & Smith, R. L. (1990). Models for Exceedances over High Thresholds. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 52 (3), 393-442.
- De Grauwe, P. (2008). The Banking Crisis: Causes, Consequences and Remedies. 10-31, Palgrave Macmillan UK. https://doi.org/10.1057/9780230281530_2
- Fernandez, V. (2005). Risk management under extreme events. *International Review of Financial Analysis*, 14(2), 113-148. <https://doi.org/10.1016/j.irfa.2004.06.012>
- Fisher, R. A., & Tippett, L. C. (1928). Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 24(2), 180-190. <https://doi.org/10.1017/s0305004100015681>
- Froot, K.A., Scharfstein, D.S., & Stein, J.C., (1992). Herd on the street: informational inefficiencies in a market with short term speculation. *Journal of Finance* 47(4), 1461- 1484.
- Gilli, M., & kellezi, E. (2006). An Application of Extreme Value Theory for Measuring Financial Risk. *Computational Economics*, 27(2-3), 207-228. <https://doi.org/10.1007/s10614-006-9025-7>
- Gkillas, K., & Katsiampa, P. (2018). An application of extreme value theory to cryptocurrencies. *Economics Letters*, 164, 109-111. <https://doi.org/10.1016/j.econlet.2018.01.020>
- Heffernan, J. E., & Tawn, J. A. (2004). A conditional approach for multivariate extreme values (with discussion). *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)*, 66(3), 497–546. <https://doi.org/10.1111/j.1467-9868.2004.02050.x>
- Holton, G. A. (2004). Defining Risk. *Financial Analysts Journal*, 60(6), 19-25. <https://doi.org/10.2469/faj.v60.n6.2669>
- J. P. Morgan (1996). Riskmetrics: Technical document.
- Kindleberger, C. (2015). *Manias, Panics and Crashes: A History of Financial Crises* (7th Edition), Palgrave Macmillan UK.

- Koedijk, K. G., Schafgans, M. M. A., & Vries, C. G. (1990). The tail index of exchange rate returns. *Journal of International Economics*, 29(1-2), 93-108. [https://doi.org/10.1016/0022-1996\(90\)90065-t](https://doi.org/10.1016/0022-1996(90)90065-t)
- Kourouma, L., Dupre, D., Sanfilippo, G., & Taramasco, O. (2010). Extreme Value at Risk and Expected Shortfall During Financial Crisis. *SSRN Electronic Journal*. <https://doi.org/10.2139/ssrn.1744091>
- Longin, F. M. (1996). The Asymptotic Distribution of Extreme Stock Market Returns. *The Journal of Business*, 69(3), 383. <https://doi.org/10.1086/209695>
- Leadbetter, M. R. (1983). Extremes and local dependence in stationary sequences. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, 65(2), 291-306. <https://doi.org/10.1007/bf00532484>
- Ledford, A. W., & Tawn, J. A. (1997). Modelling Dependence within Joint Tail Regions. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)*, 59(2), 475-499. <https://doi.org/10.1111/1467-9868.00080>
- McNeil, A. J., & Frey, R. (2000). Estimation of tail-related risk measures for heteroscedastic financial time series: an extreme value approach. *Journal of Empirical Finance*, 7(3-4), 271-300. [https://doi.org/10.1016/S0927-5398\(00\)00012-8](https://doi.org/10.1016/S0927-5398(00)00012-8)
- Mishkin, F.S. (2009). Is monetary policy effective during financial crises? *NBER Working Paper*, no. 14678.
- Nolde, N., & Zhou, C. (2021). Extreme Value Analysis for Financial Risk Management. *Annual Review of Statistics and Its Application*, 8(1), 217-240. <https://doi.org/10.1146/annurev-statistics-042720-015705>
- Novak, S. Y. (2011). *Extreme Value Methods with Applications to Finance* (1st Edition). CRC Press. <https://doi.org/10.1201/b11537>
- Novak, S. Y. (2007). Measures of financial risks and market crashes. *Theory of Stochastic Processes*, 13 (29), no.1-2, 182-193.
- Omari, C., Mundia, S. & Ngina, I. (2020). Forecasting Value-at-Risk of Financial Markets under the Global Pandemic of COVID-19 Using Conditional Extreme Value Theory. *Journal of Mathematical Finance*, 10, 569-597. <https://doi.org/10.4236/jmf.2020.104034>

- Orlowski, L.T. (2008). Stages of the 2007-2008 global financial crisis: Is there a wandering asset-price bubble? *SSRN Electronic Journal*. <https://doi.org/10.2139/ssrn.1326649>
- Orlowski, L., T. (2010). Proliferation of Tail Risks and Policy Responses in the EU Financial Markets. *Economic Papers*, 416, 1-26. doi: 10.2765/42600
- Poon, S.-H., Rockinger, M., & Tawn, J. (2004). Extreme Value Dependence in Financial Markets: Diagnostics, Models, and Financial Implications. *The Review of Financial Studies*, 17(2), 581–610. <https://doi.org/10.1093/rfs/hhg058>
- Poon, S. H., Rockinger, M., & Tawn, J. (2003). Modelling Extreme-Values Dependence in International Stock Markets. *Statistica Sinica*, 13, 929-953.
- Ramos, A., & Ledford, A. (2009). A new class of models for bivariate joint tails. *J. R. Statist. Soc., B*, 71(1), 219–241.
- Rocco, M. (2014). EXTREME VALUE THEORY IN FINANCE: A SURVEY. *Journal of Economic Surveys*, 28(1), 82-108. <https://doi.org/10.1111/j.1467-6419.2012.00744.x>
- Sibuya, M. (1960). Bivariate extreme statistics. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 11, 195-210. <https://doi.org/10.1007/BF01682329>
- Singh, A. K., Allen, D. E., & Robert, P. J. (2013). Extreme market risk and extreme value theory. *Mathematics and Computers in Simulation*, 94, 310-328. <https://doi.org/10.1016/j.matcom.2012.05.010>
- Singh, A. K., Allen, D. E., & Powell, R. J. (2011). Value at Risk Estimation Using Extreme Value Theory. ECU Publications, 1478- 1484.
- Smith, R. L., Tawn, J. A., & Coles, S. G. (1997). Markov chain models for threshold exceedances. *Biometrika*, 84, 249-268.
- Vila, A. (2000). Asset price crises and banking crises: some empirical evidence. *Bank for International Settlements*, 8, 243-252.
- Vogel, H. L. (2018). *Financial Market Bubbles and Crashes, Second Edition: Features, Causes and Effects* (2nd Edition), Palgrave Macmillan.

Yamai, Y., & Yoshida, T. (2005). Value-at-risk versus expected shortfall: A practical perspective. *Journal of Banking & Finance*, 29(4), 997-1015.
<https://doi.org/10.1016/j.jbankfin.2004.08.010>

Anexos

Anexo I – comandos principais utilizados para realizar o estudo do comportamento extremal dos índices financeiros

```
#Cálculo dos retornos logarítmicos
retornos <- diff(log(dados))
#para as caudas inferiores
Retornos.n <- - retornos
#tornar os dados unit Fréchet
Retornos.F <- -1/log(rank(retornos)/(length(retornos)+1))

lik11.mark.frech <- function(datapair,a,e,ro,uval,la)
{
  ss <- (datapair[,1])
  tt <- (datapair[,2])
  N.t.f <- ro^(-1/e) +ro^(1/e)- (ro^(-1/a) +ro^(1/a))^(a/e)
  answer <- -log((e-a)/N.t.f) +log(a) +2*log(e) -
    (a/e-2)*log(ss^(-1/a)+tt^(-1/a)) -(1/e)*log(uval) -log(la) +
    (1/a+1)*log(ss*tt)
  return(answer)
}
lik10.mark.frech <- function(datapair,a,e,ro,uval,la)
{
  ss <- (datapair[,1])
  tt <- rep(uval/ro,length=length(ss))
  N.t.f <- ro^(-1/e) +ro^(1/e)- (ro^(-1/a) +ro^(1/a))^(a/e)
  d1 <- (exp(-ro/(ss))*ro^(2))/(ss^2)
  d2 <- e * N.t.f
  d3 <- ss^(-1/e - 1) -
  (ss^(-1/a) + tt^(-1/a))^(a/e - 1)* ss^(-1/a-1)
```

```

    answer <- -log(d1 -(la*uval^(1/e)*ro*d3)/d2)
    return(answer)
}
lik01.mark.frech <- function(datapair,a,e,ro,uval,la)
{
    tt <- (datapair[,2])
    ss <- rep(ro*uval,length=length(tt))
    N.t.f <- ro^(-1/e) +ro^(1/e)- (ro^(-1/a) +ro^(1/a))^(a/e)
    d1 <- exp(-1/(ro*tt))/(ro^2*tt^2)
    d2 <- e * N.t.f * ro
    d3 <- tt^(-1/e - 1) -
(ss^(-1/a) + tt^(-1/a))^(a/e - 1)* tt^(-1/a-1)
    answer <- -log(d1 -(la*uval^(1/e)*d3)/d2)
    return(answer)
}
lik00.mark.frech <- function(datapair,a, e, uval, la)
{
    d1 <- 2*exp(-1/uval) -1 +la
    answer <- rep(-log(d1),length=length(datapair[,1]))
    return(answer)
}
overall.mark.frech <- function(p,mark,u)
{
    a <- p[1]
    e <- p[2]
    ro <- p[3]
    n <- length(mark)
    x <- mark[1:n-1]
    y <- mark[2:n]
    if (abs(a-e)<1e-5) answer <- 1e18
    else {

```

```

index1 <- x < u & y < u
index2 <- x < u & y >= u
index3 <- x >= u & y < u
index4 <- x >= u & y >= u
ss <- ro*x
tt <- y/ro
la <- sum(index4)/length(x)
datapair <- cbind(ss,tt)
LL00 <- lik00.mark.frech(datapair,a,e,uval=u,la)
LL01 <- lik01.mark.frech(datapair,a,e,ro,uval=u,la)
LL10 <- lik10.mark.frech(datapair,a,e,ro,uval=u,la)
LL11 <- lik11.mark.frech(datapair,a,e,ro,uval=u,la)
answer <- sum(LL00[index1]) + sum(LL01[index2]) + sum(LL10[index3])
+ sum(LL11[index4])
den.f <- x^(-2)*exp(-x^(-1))
LL.den <- log(den.f)
answer <- answer +(sum(LL.den)-LL.den[1])
cat('a=',a,'e=',e,fill=T)
cat('answer=',answer,fill=T)
}
answer
}
Threshprob <- 0.92
#transformar na escala Fréchet
thresh.x <- quantile(Retornos.F, threshprob)
resultados <- nlm(b(c(0.9,0.75,0.9),overall.mark.frech,
lower=c(1e-3,1e-3,1e-4),
upper=c(10,1,20),mark=Retornos.F, u=thresh.x)
parametros <- resultados$par

```

Para obter estimativas para os parâmetros com vários thresholds e respectivos intervalos de confiança

```

l.lik00.mark.n <- function(x,la1,la)
{
#   answer <- -log( 1 -2*la1 +la)  + log(1-la1) assim fazia 2 vezes!
  answer <- -log( 1 -2*la1 +la)
  answer <- rep(answer, length(x))
  answer
}

l.lik01.mark.n <- function(p,u,den2,T1,Fy,la)
{
  a <- p[1]
  e <- p[2]
  ro <- p[3]
  N.t.f <- ro^(-1/e) +ro^(1/e)- (ro^(-1/a) +ro^(1/a))^(a/e)
  u <- rep(u, length(den2))
  d2 <- (la*u*ro)/(e*Fy*N.t.f)
  d3 <- T1^(-1/e+1) -(ro^(-1/a) + T1^(-1/a))^(a/e-1)*T1^(-1/a+1)
  answer <- -log(den2) -log(1-d2*d3)
#   answer <- -log(1-d2*d3)
  answer
}

l.lik10.mark.n <- function(p,u,den1,S1,Fx,la,la1)
{
  a <- p[1]
  e <- p[2]
  ro <- p[3]
  N.t.f <- ro^(-1/e) +ro^(1/e)- (ro^(-1/a) +ro^(1/a))^(a/e)
  u <- rep(u, length(den1))
  d2 <- (la*u)/(ro*e*Fx*N.t.f)
  d3 <- S1^(-1/e+1) -(S1^(-1/a) +ro^(1/a))^(a/e-1)*S1^(-1/a+1)

```

```

#   answer <- -log(den1) -log(1-d2*d3) +log(1-la1)
      answer <- -log(den1) -log(1-d2*d3)
      answer
}
l.lik11.mark.n <- function(p,den1,den2,S1,T1,Fx,Fy,u,la)
{
  a <- p[1]
  e <- p[2]
  ro <- p[3]
  N.t.f <- ro^(-1/e) +ro^(1/e)- (ro^(-1/a) +ro^(1/a))^(a/e)
  answer <- -log(la) -2*log(u) -log((e-a)/N.t.f) +log(a) +
            2*log(e) - log(den1) -log(den2) +log(Fx) +log(Fy)-
            (a/e -2)*log( S1^(-1/a) + T1^(-1/a) )-
            (-1/a +1)*log(S1*T1)
#   -log(den2)
      answer
}
overall.loglik.mark.n <- function(p,mark,uG)
{
  a <- p[1]
  e <- p[2]
  ro <- p[3]
  xi1 <- p[4]
  si1 <- p[5]
  n <- length(mark)
  x <- mark[1:n-1]
  y <- mark[2:n]
  ind <- mark>uG
  nu <- length(mark[ind])
  la1 <- nu/n
  l1 <- pmax((1 + xi1*(x-uG)/si1),rep(0,length=n-1))

```

```

l2 <- pmax((1 + xi1*(y-uG)/si1),rep(0,length=n-1))
  ind1 <- ind[1:n-1]
  ind2 <- ind[2:n]
flag1 <- sum(l1[ind1] <= 0)
flag2 <- sum(l2[ind2] <= 0)
F1 <- 1 - la1*l1^(-1/xi1)
F1[ind1] <- 1 - la1
F2 <- 1 - la1*l2^(-1/xi1)
F2[ind2] <- 1 - la1
den1 <- (la1/si1)*l1^(-1/xi1-1)
den2 <- (la1/si1)*l2^(-1/xi1-1)
  u <- -1/log(1-la1)
la <- sum(x >= uG & y >= uG)/(n-1)
  xx <- -ro/log(F1)
  yy <- -1/(ro*log(F2))
  S1 <- xx/u
  T1 <- yy/u
if (flag1 != 0 | flag2 != 0) answer <- 1e18
  else {
    if (abs(a-e)<1e-5) answer <- 1e18
    else {
      index1 <- x < uG & y < uG
      index2 <- x < uG & y >= uG
      index3 <- x >= uG & y < uG
      index4 <- x >= uG & y >= uG
      LL00 <- l.lik00.mark.n(x,la1,la)
      LL01 <- l.lik01.mark.n(p,u,den2,T1,Fy=F2,la)
      LL10 <- l.lik10.mark.n(p,u,den1,S1,Fx=F1,la,la1)
      LL11 <- l.lik11.mark.n(p,den1,den2,S1,T1,Fx=F1,Fy=F2,u,la)
      answer <- sum(LL00[index1]) + sum(LL01[index2]) + sum(LL10[index3]) +
sum(LL11[index4])

```

```

den.f <- den1
den.f[[ind1]] <- 1 - la1
LL.den <- log(den.f)
answer <- answer +(sum(LL.den)-LL.den[1])
#   cat('a=',a,'e=',e,fill='T')
#   cat('answer=',answer,fill='T')
  }
  }
  answer
}
obs.info1.mark <- function(f, alpha, ep = 1e-4, data, u)
{
  eps <- ep * alpha
  n <- length(alpha)
  m <- matrix(0, ncol = n, nrow = n)
  for(i in 1:n) {
    for(j in 1:n) {
      a1 <- alpha
      a1[i] <- a1[i]+eps[i]
      a1[j] <- a1[j]+eps[j]
      a2 <- alpha
      a2[i] <- a2[i]+eps[i]
      a2[j] <- a2[j]-eps[j]
      a3 <- alpha
      a3[i] <- a3[i]-eps[i]
      a3[j] <- a3[j]+eps[j]
      a4 <- alpha
      a4[i] <- a4[i]-eps[i]
      a4[j] <- a4[j]-eps[j]
      m[i, j] <- (f(a1,mark=data,uG=u)-f(a2,mark=data,uG=u)-
        f(a3,mark=data,uG=u)+f(a4,mark=data,uG=u))/(4*eps[i]*eps[j])
    }
  }
}

```



```

    }
  }
  answer <- m
  answer
}
desvio.mark <- function(results,data,u)
{
  mark <- data
  ob.info.vals <- obs.info1.mark(overall.loglik.mark.n,alpha=results,
                                data=data,u=u)

  mle.var <- solve(ob.info.vals)
  alpha.var <- mle.var[1,1]
  eta.var <- mle.var[2,2]
  ro.var <- mle.var[3,3]
  xi1.var <- mle.var[4,4]
  si1.var <- mle.var[5,5]
  answer <- cbind(alpha.var,eta.var,ro.var,xi1.var,si1.var)
  answer <- sqrt(answer)
  answer
}
function(ret.ind)
{
  ret.ind.n <- -ret.ind
  etaInd <- NULL
  xiInd <- NULL
  etaInd.L <- NULL
  xiInd.L <- NULL
  eta.st <- NULL
  xi.sd <- NULL
  eta.st.L <- NULL
  xi.sd.L <- NULL

```

```

siInd <- NULL
siInd.L <- NULL
si.st <- NULL
si.st.L <- NULL
TSdata1 <- na.exclude(ret.ind)
TSdata2 <- na.exclude(ret.ind.n)
prob.thres <- c(0.88,0.89,0.9,0.91,0.92,0.93,0.94,0.95)
for (i in 1:8){
  results1 <- NULL
  threshprob <- prob.thres[i]
  thresh.x <- quantile(TSdata1, threshprob)
  cat("p=",threshprob,fill=T)
  results1 <- nlminb(c(0.2,0.7,0.6,-0.16,1.6),overall.loglik.mark.n,
                    lower=c(1e-3,1e-3,1e-3,-1,1e-8),
                    upper=c(10,1,10,1,3),mark=TSdata1,uG=thresh.x)
  etaInd[i] <- results1$par[2]
  xiInd[i] <- results1$par[4]
  siInd[i] <- results1$par[5]
  cat("results1=",results1$par,fill=T)
  rr <- results1$par
  desv.up <- desvio.mark(rr,data=TSdata1,u=thresh.x)
  cat("desv=",desv.up,fill=T)
  eta.st[i] <- desv.up[2]
  xi.sd[i] <- desv.up[4]
  si.st[i] <- desv.up[5]
  thresh.x2 <- quantile(TSdata2, threshprob)
  results2 <- NULL
  results2 <- nlminb(c(0.2,0.7,0.6,-0.16,1.6),overall.loglik.mark.n,
                    lower=c(1e-3,1e-3,1e-3,-1,1e-8),
                    upper=c(10,1,10,1,3),mark=TSdata2,uG=thresh.x2)
  etaInd.L[i] <- results2$par[2]

```

```

xiInd.L[i] <- results2$par[4]
siInd.L[i] <- results2$par[5]
rs <- results2$par
desv.dw <- desvio.mark(rs,data=TSdata2,u=thresh.x2)
#      cat("desv=",desv.dw)
eta.st.L[i] <- desv.dw[2]
xi.sd.L[i] <- desv.dw[4]
si.st.L[i] <- desv.dw[5]
}
answer <-
cbind(etaInd,xiInd,etaInd.L,xiInd.L,eta.st,xi.sd,eta.st.L,xi.sd.L,siInd,siInd.L,si.st,si.st.L)
answer
}
parametros <- st.ret.etaxi.series(Retornos)

```