

MA-702: VARIABLE COMPLEJA

Joseph C. Várilly

Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica

I Ciclo Lectivo del 2012

Introducción

Es tradicional repartir el campo del análisis matemático en dos grandes subdivisiones, etiquetadas por los nombres de *variable real* y *variable compleja*. Esto puede parecer curioso, porque un número complejo no es más que un par de números reales dotado de una ley de multiplicación. Sin embargo, el comportamiento de las funciones diferenciables en los dos contextos es muy distinto. Por un lado, hay funciones suaves no nulas de dos argumentos reales con soporte en una parte compacta de su dominio, pero una función diferenciable de un argumento complejo con soporte compacto es idénticamente nula. En cambio, las funciones diferenciables complejas admiten desarrollos en serie de Taylor y por ende son indefinidamente diferenciables, al contrario de lo que ocurre en el caso real. Estas diferencias motivan la consideración del caso complejo por aparte.

Hay dos maneras de estudiar funciones en el plano complejo. Los trabajos de Cauchy,¹ a partir de 1825, enfocaron las integrales de línea de las funciones complejas sin singularidades (funciones *holomorfas*). Más tarde, Weierstrass,² a partir de 1854, enfatizó las funciones *analíticas*, las que admiten desarrollos en series de potencias convergentes. Ahora bien, las funciones analíticas de un argumento complejo son holomorfas; y viceversa. Las interacciones entre estos dos puntos de vista enriquecen la teoría.

Hoy en día, la teoría de “variable compleja” comprende varias subdisciplinas, cada una con su propio interés y estilo: las aplicaciones conformes, el análisis asintótico, las funciones elípticas, etc. Además, hay muchas interacciones con la teoría de “variable real”: por ejemplo, en las series e integrales de Fourier. Aquí se pretende ofrecer un curso “clásico”, abarcando un temario mínimo que abre las puertas a todo lo demás.

¹Augustin-Louis Cauchy, *Mémoire sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires*, sometido a la Académie des Sciences de Paris, el 28 de febrero de 1825.

²Karl Weierstrass, *Theorie der Abel'schen Funktionen*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **52** (1856), 285–380.

Temario

★ *Funciones en el Plano Complejo.*

El cuerpo \mathbb{C} de los números complejos, conjugados complejos y módulos. Forma polar de un número complejo. Rectas y círculos en \mathbb{C} , la esfera de Riemann \mathbb{C}_∞ . Series de potencias, las funciones exponencial y logarítmica. Derivada de una función compleja, las ecuaciones de Cauchy y Riemann. Aplicaciones del plano complejo, transformaciones de Möbius, razón doble.

★ *El Teorema de Cauchy y las Funciones Holomorfas.*

Integrales de línea en \mathbb{C} . El teorema de Cauchy y Goursat para rectángulos. La fórmula integral de Cauchy, las desigualdades de Cauchy, serie de Taylor de una función holomorfa, el teorema de Cauchy en general. El teorema de Liouville y sus consecuencias. Series de Laurent para funciones meromorfas, clasificación de singularidades aisladas. El teorema del residuo y las integrales de contorno. Cálculo de integrales definidas. Integrales de valor principal, sumación de series. El principio del argumento, conteo de ceros y polos, el teorema de Rouché. El teorema de la aplicación abierta, el teorema del módulo máximo, el lema de Schwarz.

★ *Series y Productos de Funciones Holomorfas.*

Convergencia uniforme sobre compactos, funciones holomorfas definidas por series o integrales. Productos infinitas, funciones holomorfas definidas por productos. La función gamma y su continuación meromorfa. La función zeta de Riemann.

★ *Aplicaciones Conformes.*

Aplicaciones conformes en el plano complejo. Isomorfismo conforme de regiones en \mathbb{C} , automorfismos del disco unitario y del plano.

Bibliografía

El curso seguirá, en buena medida, el libro de Ahlfors y el libro de Stein y Shakarchi, mencionados a continuación. He aquí una lista de libros de mucha utilidad para los temas del curso.

1. M. J. Ablowitz & A. S. Fokas, *Complex Variables: Introduction and Applications*, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
2. L. V. Ahlfors, *Complex Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1979.
3. J. Bak and D. J. Newman, *Complex Analysis*, Springer, Berlin, 1997.
4. R. P. Boas, *Invitation to Complex Analysis*, MAA, Washington, DC, 2010.
5. H. P. Cartan, *Elementary Theory of Analytic Functions of One or Several Complex Variables*, Dover, Mineola, NY, 1995.
6. P. Henrici, *Applied and Computational Complex Analysis I*, Wiley, New York, 1986.
7. G. A. Jones & D. Singerman, *Complex Functions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.
8. K. Kodaira, *Complex Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 2007.
9. N. Levinson & R. M. Redheffer, *Complex Variables*, Holden-Day, San Francisco, 1970.
10. A. I. Markushevich, *Teoría de las Funciones Analíticas*, Mir, Moscú, 1978.
11. T. Needham, *Visual Complex Analysis*, Oxford University Press, Oxford, 1997.
12. W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1966.
13. M. R. Spiegel, *Teoría y Problemas de Variable Compleja*, McGraw-Hill Latinoamericana, México, DF, 1971.
14. E. M. Stein & R. Shakarchi, *Complex Analysis*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2003.
15. D. G. Zill & P. D. Shanahan, *A First Course in Complex Analysis with Applications*, 2ª edición, Jones and Bartlett, Sudbury, MA, 2009.

1 Funciones en el Plano Complejo

1.1 El cuerpo complejo \mathbb{C}

Los números complejos forman un cuerpo¹ que incluye el cuerpo \mathbb{R} de los números reales pero también admite una solución de la ecuación $z^2 = -1$. De hecho, admite dos soluciones distintas de esta ecuación cuadrática, ya que $(-z)^2 = z^2$. Estas soluciones se denotan por i y $-i$, porque antiguamente se consideró “imaginario” una cantidad de cuadrado negativo, en contraste con los números de cuadrado positivo o cero, apodados “reales”.

En este curso, se toma como conocidas las propiedades de los números reales y la convergencia de sucesiones y series en \mathbb{R} . Entonces, siguiendo a Euler, se define un **número complejo** como una expresión

$$z = x + iy, \quad \text{con } x, y \in \mathbb{R}.$$

El número real $x =: \Re z$ se llama la *parte real* de z ; mientras $y =: \Im z$ es su *parte imaginaria* —aunque y también es un número real. Las operaciones de *suma* y *producto* de números complejos se definen así:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &:= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2), \\ z_1 z_2 &:= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1). \end{aligned} \tag{1.1}$$

La ley de multiplicación en (1.1) viene de tomar $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ como polinomios reales en una “incógnita” i , seguido por una reducción por la regla $i^2 = -1$,

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) + i^2 y_1 y_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Se deja como ejercicio² comprobar que estas operaciones son conmutativas y asociativas y que cumplen la ley distributiva: $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$.

Fíjese que $z_1 z_2 = 0 + i0$ si y sólo si $x_1 x_2 = y_1 y_2$ y $x_1 y_2 = -x_2 y_1$; es fácil comprobar que estas ecuaciones entre números reales sólo se cumplen si $x_1 = y_1 = 0$ o bien $x_2 = y_2 = 0$. Entonces $\mathbb{C} := \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}\}$ es un anillo entero³ cuyo elemento es $0 + i0$,

¹El término viene del alemán *Körper*, traducido como *corps* en francés, *cuerpo* en español, *corp* en rumano, etc., aunque en inglés se dice *field*. Nunca debe usarse la traducción secundaria “campo”, reservada para campos vectoriales, campos magnéticos, etc.

²El lector al que le parece demasiado informal este proceso tiene una alternativa: definir \mathbb{C} como el cociente del anillo de polinomios $\mathbb{R}[X]$ por el ideal principal $(X^2 - 1)$, en donde el elemento i se identifica con la coclase $X + (X^2 - 1)$. Luego habría que comprobar que este anillo es un cuerpo.

³Un anillo conmutativo es **entero** si no posee divisores de cero: $ab = 0$ implica $a = 0$ o bien $b = 0$.

en adelante denotado por 0 simplemente; y cuyo elemento unidad es $1 + i0$, en adelante denotado por 1 .

De hecho, al abreviar $x + i0 = x$, se considera \mathbb{R} como parte de \mathbb{C} .

► El anillo \mathbb{C} tiene una tercera operación (unaria), la **conjugación compleja** $z \mapsto \bar{z}$,

$$z = x + iy \implies \bar{z} := x - iy.$$

Las siguientes propiedades de la conjugación compleja son inmediatas:

$$\bar{\bar{z}} = z, \quad \overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}, \quad \overline{z\bar{w}} = \bar{z}w.$$

Obsérvese que el producto $z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$ es real y *no negativo*, de modo que $z\bar{z} = 0$ en \mathbb{R} si y sólo si $z = 0$ en \mathbb{C} .

En consecuencia, cada $z \neq 0$ en \mathbb{C} tiene un inverso multiplicativo $1/z$, dada por

$$\frac{1}{z} := \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

En síntesis: \mathbb{C} es un anillo conmutativo entero, en donde cada elemento no nulo posee un inverso; es decir, \mathbb{C} es un *cuerpo*.

El **valor absoluto**, o el **módulo**, de $z \in \mathbb{C}$ es el número real no negativo

$$|z| := \sqrt{z\bar{z}}.$$

Obsérvese que $|\bar{z}| = |z|$ y que $|-z| = |z|$. Además, se ve que $|zw| = \sqrt{z\bar{w}\bar{z}w} = |z||w|$.

Al tomar raíces cuadradas en las inecuaciones $x^2 \leq x^2 + y^2$, $y^2 \leq x^2 + y^2$, se obtiene

$$-|z| \leq \Re z \leq |z|, \quad -|z| \leq \Im z \leq |z|, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}.$$

Lema 1.1. *El módulo de números complejos cumple la **desigualdad triangular**:*

$$|z + w| \leq |z| + |w|, \quad \text{para todo } z, w \in \mathbb{C}. \quad (1.2)$$

Demostración. Es cuestión de comparar los cuadrados de ambos lados:

$$\begin{aligned} |z + w|^2 &= (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) = z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w} \\ &= |z|^2 + 2\Re(z\bar{w}) + |w|^2 \\ &\leq |z|^2 + 2|z\bar{w}| + |w|^2 = |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2. \quad \square \end{aligned}$$

► La biyección $x + iy \leftrightarrow (x, y)$ entre \mathbb{C} y \mathbb{R}^2 sugiere que los números complejos pueden representarse por los puntos de un plano. Esta biyección es \mathbb{R} -lineal (ya que tanto \mathbb{C} como \mathbb{R}^2 pueden considerarse como espacios vectoriales sobre \mathbb{R}) pero habría que interpretar la multiplicación compleja como una operación geométrica sobre el plano. El topógrafo danés Wessel observó en 1797 que la multiplicación por i , es decir,

$$z \mapsto iz, \quad \text{o equivalentemente,} \quad x + iy \mapsto -y + ix,$$

efectúa una rotación del plano por un ángulo recto (en el sentido antihorario).⁴

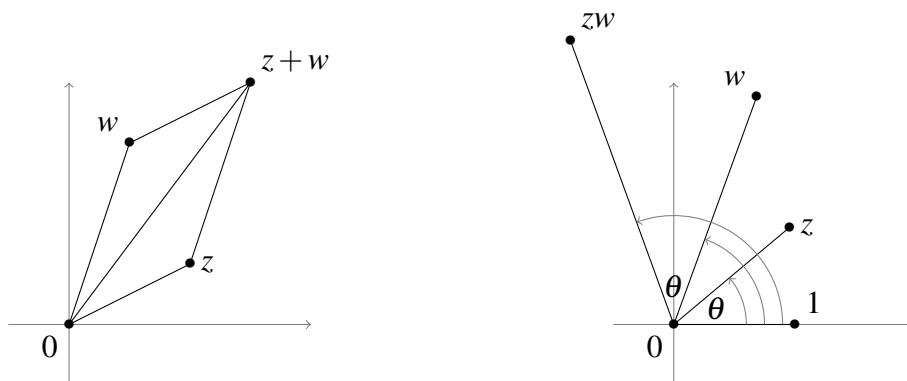


Figura 1.1: Suma y producto de dos números complejos

La representación de la **suma** $z + w$ en el plano complejo es idéntico que la representación de la suma de dos vectores en \mathbb{R}^2 . Si $z, w \in \mathbb{C}$, el punto $z + w$ en el plano se coloca para que el segmento $[0, z + w]$ sea la diagonal del paralelogramo⁵ cuyos lados adyacentes son los segmentos $[0, z]$ y $[0, w]$: véase la Figura 1.1. (Este dibujo deja de lado los casos excepcionales $z = 0$; $w = 0$; y $z = tw$ con t real.)

Para representar el **producto** zw en el plano, conviene recordar las **coordenadas polares** en \mathbb{R}^2 :

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \operatorname{sen} \theta,$$

⁴Caspar Wessel presentó su reporte *Om directionens analytiske betegning* (Sobre la representación analítica de la dirección) ante la Real Academia Danés de Ciencias, el 10 de marzo de 1797. Unos años después, en 1806, Jean-Robert Argand publicó privadamente en París su ensayo *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques*, con la misma idea, dando así el nombre *plano de Argand* a la representación geométrica de \mathbb{C} .

⁵La notación $[a, b]$ aquí denota el *segmento de recta* cuyos extremos son los vectores a y b . En el plano complejo, por ejemplo, se escribe $[z, w] := \{(1-t)z + tw : t \in \mathbb{R}, 0 \leq t \leq 1\}$.

que permiten expresar un número complejo $z = x + iy$ en la forma

$$z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta). \quad (1.3)$$

Obsérvese que $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$ es la distancia del origen 0 al punto z en el plano.

Si $w = u + iv = s(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$ es otro número complejo, entonces

$$\begin{aligned} zw &= rs(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi) \\ &= rs((\cos \theta \cos \varphi - \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi) + i(\operatorname{sen} \theta \cos \varphi + \cos \theta \operatorname{sen} \varphi)) \\ &= rs(\cos(\theta + \varphi) + i \operatorname{sen}(\theta + \varphi)). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Como $rs = |z||w| = |zw|$, este cálculo muestra que el ángulo polar que corresponde al producto zw es la *suma* $\theta + \varphi$ de los ángulos correspondientes a los factores z y w — aunque se permite sumar o restar un múltiplo de 2π a cada ángulo.

El **argumento** del número complejo no cero $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) \neq 0$ es la cantidad $\theta \bmod 2\pi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, que será denotado por $\arg z$. Informalmente, se considera $z \mapsto \arg z$ como una “función multiforme” con infinitos valores distintos (que difieren entre sí por múltiplos de 2π); usualmente, se toma el *valor principal* del argumento, escrito $\operatorname{Arg} z$, que cumple $-\pi < \operatorname{Arg} z \leq \pi$. No se define el argumento de 0.

En vista de (1.3), cada $z \neq 0$ en \mathbb{C} queda determinado por $|z|$ y $\arg z$; el producto en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ cumple las reglas

$$|zw| = |z||w|, \quad \arg(zw) = \arg z + \arg w.$$

Obsérvese también que $|\bar{z}| = |z|$ pero $\arg \bar{z} = -\arg z$. Para cada $z \neq 0$ fijo, la multiplicación $w \mapsto zw$ combina una *dilatación* del plano por un factor de $|z|$ con una *rotación* del plano por un ángulo $\operatorname{Arg} z$; estas dos transformaciones dejan fijo el origen 0. Véase la Figura 1.1.

La transformación $z \mapsto \bar{z}$ también tiene una interpretación geométrica: se trata de una *reflexión* del plano que deja fijo la recta \mathbb{R} .

► Las fórmulas de adición para senos y cosenos, exhibidas en (1.4), muestran que la función $\theta \mapsto \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$ cumple la ley de exponentes; esto justifica parcialmente la notación, introducida por Euler:

$$e^{i\theta} := \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta, \quad \text{así que } z = re^{i\theta}. \quad (1.5)$$

El cálculo (1.4) se traduce en $zw = re^{i\theta} se^{i\varphi} = rse^{i(\theta+\varphi)}$.

Por inducción sobre $n \in \mathbb{N}$, se obtiene $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$. En la notación trigonométrica, esta es la **fórmula de de Moivre**:⁶

$$(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n = \cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}. \quad (1.6)$$

El caso $n = 0$ es trivial; el caso $n = -1$ viene de la identidad $\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta \equiv 1$; los demás casos siguen por inducción.

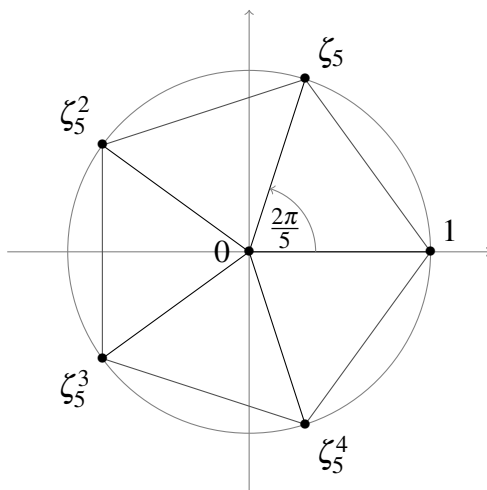


Figura 1.2: las cinco raíces quintas de 1

Si $n \in \mathbb{N}$ es un entero positivo,⁷ considérese el siguiente número complejo,

$$\zeta_n := e^{2\pi i/n} = \cos \frac{2\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n}.$$

La fórmula (1.6) implica que $\zeta_n^n = e^{2\pi i} = 1$. De hecho, para $k = 0, 1, \dots, n-1$, se obtiene

$$(\zeta_n^k)^n = (e^{2k\pi i/n})^n = \cos 2k\pi + i \operatorname{sen} 2k\pi = 1,$$

de modo que la ecuación $z^n = 1$ admite n soluciones distintas $z = 1, \zeta_n, \zeta_n^2, \dots, \zeta_n^{n-1}$. Para ver que estas **raíces n -ésimas de 1** son distintas, basta observar que los ζ_n^k forman los vértices de un polígono regular de n lados inscrito en el círculo de radio 1 centrado en el origen (Figura 1.2).

⁶Esta fórmula fue demostrada en 1722 por el matemático franco-inglés Abraham de Moivre, para n un entero positivo.

⁷Aquí se sigue el convenio francés que toma 0 como un “número natural”: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

► La ecuación de una **recta** en \mathbb{R}^2 es $ax + by + c = 0$, donde $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $a^2 + b^2 \neq 0$. Al sustituir

$$x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad y = \frac{i}{2}(\bar{z} - z), \quad (1.7)$$

y al tomar $\lambda := \frac{1}{2}(a + ib) \in \mathbb{C}$, la ecuación de la recta toma la forma

$$\bar{\lambda}z + \lambda\bar{z} + c = 0, \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Dos rectas $\bar{\lambda}z + \lambda\bar{z} + c = 0$, $\bar{\mu}z + \mu\bar{z} + d = 0$ son paralelas o iguales si $\lambda/\mu \in \mathbb{R}$; son perpendiculares si $\lambda/\mu = it$ con $t \in \mathbb{R}$. Se deja como ejercicio comprobar estas afirmaciones.

La ecuación de un **círculo** con centro $\alpha = a + ib$ y radio k es $(x - a)^2 + (y - b)^2 = k^2$, esto es, $|z - \alpha|^2 = k^2$, o más simplemente

$$|z - \alpha| = k.$$

Obsérvese que la cantidad $|z - w|$ es la distancia entre los dos puntos z, w en el plano complejo. Por lo tanto, la desigualdad $|z - \alpha| < k$ representa la región *interior* del círculo $|z - \alpha| = k$; y la desigualdad $|z - \alpha| > k$ representa la región *exterior* del círculo.

La esfera de Riemann

A veces conviene agregar un “elemento infinito” al plano complejo, para representar el “recíproco de cero”. Para tener una idea visual de este elemento extra, considérese el plano complejo $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ como el subespacio real $\{(x, y, 0) : x + iy \in \mathbb{C}\}$ de \mathbb{R}^3 . La esfera unitaria

$$\mathbb{S}^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

tiene “polo norte” $N = (0, 0, 1)$ y “polo sur” $S = (0, 0, -1)$ fuera del plano \mathbb{C} : véase la Figura 1.3.

Si $z = x + iy \in \mathbb{C}$, la recta \overleftrightarrow{Nz} corta la esfera \mathbb{S}^2 en N y en otro punto $Z = (x_1, x_2, x_3)$. Inversamente, si $Z \in \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$, la recta \overleftrightarrow{NZ} no es horizontal y por ende corta el plano \mathbb{C} en un solo punto z . La correspondencia $z \leftrightarrow Z$ entre \mathbb{C} y $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ se llama la **proyección estereográfica**.

Como N, Z y z son puntos colineales, la comparación de coordenadas entre los segmentos Nz y NZ muestra que

$$\frac{x}{x_1} = \frac{y}{x_2} = \frac{1}{1 - x_3}.$$

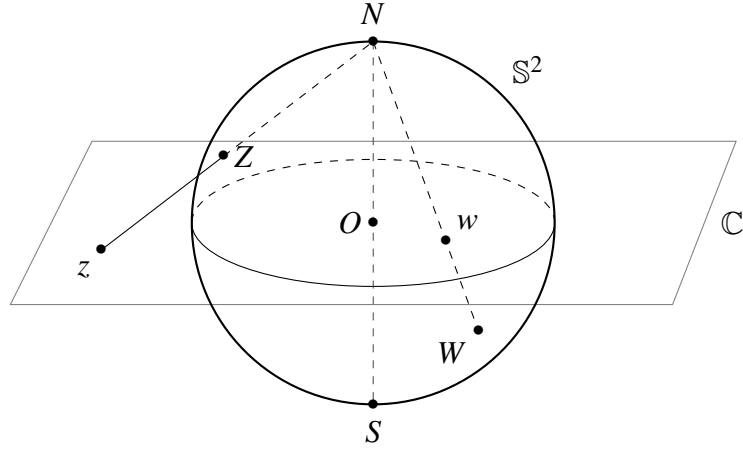


Figura 1.3: La proyección estereográfica

Entonces la proyección $Z \mapsto z$ viene dada por

$$z = x + iy = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}.$$

Inversamente, la relación $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ implica

$$x^2 + y^2 + 1 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + (1 - x_3)^2}{(1 - x_3)^2} = \frac{2 - 2x_3}{(1 - x_3)^2} = \frac{2}{1 - x_3},$$

así que la correspondencia $z \mapsto Z$ viene dada por

$$x_1 = \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \quad x_2 = \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \quad x_3 = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1}.$$

Estas fórmulas se escriben como funciones de z de la siguiente manera:

$$x_1 = \frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1}, \quad x_2 = \frac{i(\bar{z} - z)}{|z|^2 + 1}, \quad x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}. \quad (1.8)$$

Obsérvese que $Z = z$ si y sólo si $z \in \mathbb{C} \cap \mathbb{S}^2$, si y sólo si $x_3 = 0$, si y sólo si $|z| = 1$.

El interior $|z| < 1$ del círculo unitario corresponde con el “hemisferio sur” $x_3 < 0$, mientras el exterior $|z| > 1$ de dicho círculo corresponde con el “hemisferio norte” $x_3 > 0$ (excluyendo el polo norte N).

Definición 1.2. El **plano complejo extendido** es el conjunto $\mathbb{C}_\infty := \mathbb{C} \uplus \{\infty\}$ (unión disjunta). La biyección $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} : z \mapsto Z$ se extiende a una biyección $\mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{S}^2$ al

hacer corresponder el elemento extra $\infty \in \mathbb{C}_\infty$ con el polo norte $N \in \mathbb{S}^2$. En coordenadas, $\infty \leftrightarrow (0, 0, 1)$ puede ser considerado como un caso límite de las fórmulas (1.8), cuando $|z| \rightarrow +\infty$.

Si $R > 0$ y $z \in \mathbb{C}$, nótese que

$$|z| > R \iff |z|^2 + 1 > R^2 + 1 \iff x_3 > \frac{R^2 - 1}{R^2 + 1} = 1 - \frac{2}{R^2 + 1},$$

Entonces la parte $\{\infty\} \uplus \{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$ de \mathbb{C}_∞ corresponde con la capa esférica abierta $x_3 > 1 - 2/(R^2 + 1)$ de \mathbb{S}^2 . Estas capas esféricas forman un sistema de vecindarios básicos del polo norte N . Al declarar que estas partes son los *vecindarios básicos del punto* $\infty \in \mathbb{C}_\infty$, el conjunto \mathbb{C}_∞ resulta ser un espacio topológico homeomorfa a la esfera \mathbb{S}^2 : esta es la *compactificación de un punto* del plano complejo.⁸ Con esta estructura, el plano extendido \mathbb{C}_∞ se llama la **esfera de Riemann**.

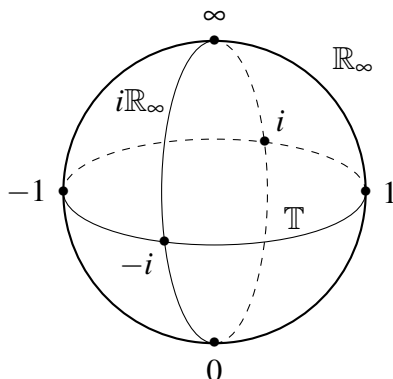


Figura 1.4: Tres círculos en la esfera de Riemann

Si \overleftrightarrow{zw} es una *recta* en \mathbb{C} , su imagen en \mathbb{S}^2 bajo proyección estereográfica es la intersección de \mathbb{S}^2 con el plano Nzw : este es un *círculo* que pasa por el punto N . Por otro lado, es un ejercicio comprobar que la imagen de un círculo en \mathbb{C} es otro círculo sobre \mathbb{S}^2 , pero esta vez no pasa por N . Entonces un **círculo en \mathbb{C}_∞** puede definirse como (a) un círculo ordinario en \mathbb{C} ; o bien (b) una recta en \mathbb{C} con el punto ∞ agregado a ella.

La aritmética del cuerpo \mathbb{C} se extiende parcialmente a \mathbb{C}_∞ , bajo los convenios

$$z + \infty = \infty, \quad z \cdot \infty = \infty, \quad z/0 = \infty, \quad z/\infty = 0 \quad \text{para todo } z \neq 0.$$

⁸Si X es un espacio topológico localmente compacto y de Hausdorff, su *compactificación de un punto* es el espacio compacto (y de Hausdorff) $X^+ := X \uplus \{\infty\}$, en donde los vecindarios básicos de ∞ son los conjuntos de la forma $\{\infty\} \uplus (X \setminus K)$, siendo K una parte compacta de X .

También se puede declarar $0 + \infty = \infty$ y además $0/\infty = 0$. Sin embargo, otras expresiones tales como $0/0$ y $\infty + \infty$ permanecen indefinidas.

1.2 Series de potencias

Las funciones complejas más sencillas son los *polinomios* $p(z) = a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n$. Luego habrá que considerar las llamadas funciones “elementales”, tales como las funciones trigonométricas y las funciones exponencial y logarítmica; y después, las funciones obtenidas como primitivas de aquellas.⁹ Muchas de estas funciones poseen desarrollos en series cuyas sumas parciales son polinomios. Vale la pena empezar con el estudio de dichas series y sus propiedades de convergencia.

La discusión de convergencia de sucesiones y series en la recta real se traslada sin cambio al plano complejo; la única diferencia reside en la naturaleza del *valor absoluto* de un número: la cantidad no negativa $|x| := \sqrt{x^2}$ para $x \in \mathbb{R}$ queda reemplazada por $|x + iy| := \sqrt{x^2 + y^2}$. Así, por ejemplo, una sucesión (z_n) en \mathbb{C} es *convergente* con límite $z \in \mathbb{C}$ si, para cada $\varepsilon > 0$, existe $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N \implies |z_n - z| < \varepsilon$. Una serie converge en \mathbb{C} si la sucesión de sus sumas parciales converge en \mathbb{C} . Una función $f: E \rightarrow \mathbb{C}$, definida en una parte $E \subseteq \mathbb{C}$, es *continua en* $\alpha \in E$ si, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que $z \in E$, $|z - \alpha| < \delta \implies |f(z) - f(\alpha)| < \varepsilon$. Etcétera.

Definición 1.3. Sea $E \subseteq \mathbb{C}$ una parte cualquiera del plano complejo. Una sucesión de funciones $(f_n: E \rightarrow \mathbb{C})_{n \in \mathbb{N}}$, **converge uniformemente** en E si para cada $z \in E$, hay un elemento $f(z) \in \mathbb{C}$ que cumple la siguiente propiedad: para cualquier $\varepsilon > 0$, existe $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N \implies |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ para todo $z \in E$.

La función $f: E \rightarrow \mathbb{C}$ así definida es el *límite* de la sucesión de funciones (f_n) ; se escribe “ $f_n \rightarrow f$ uniformemente en E ”.

Lema 1.4. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n: E \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua en E .¹⁰ Si $f_n \rightarrow f$ uniformemente en E , la función límite f es también continua en E .

Demostración. El “argumento de $\varepsilon/3$ ”, bien conocido en el caso real, funciona de igual manera en el plano complejo. Sea dado $\varepsilon > 0$. Tómesese $N \in \mathbb{N}$, de acuerdo con la Definición 1.3, tal que $n \geq N \implies |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon/3$ para todo $z \in E$.

⁹Informalmente, una *primitiva* de una función es otra función cuya derivada coincide con la primera.

¹⁰Una función $g: E \rightarrow \mathbb{C}$ es **continua en** E si g es continua en α para todo $\alpha \in E$.

Si $\alpha \in E$, la continuidad de f_N muestra que hay $\delta > 0$ tal que $z \in E$, $|z - \alpha| < \delta \implies |f_N(z) - f_N(\alpha)| < \varepsilon/3$. Para $z \in E$ con $|z - \alpha| < \delta$, entonces, vale

$$|f(z) - f(\alpha)| \leq |f(z) - f_N(z)| + |f_N(z) - f_N(\alpha)| + |f_N(\alpha) - f(\alpha)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Nótese el uso de la desigualdad triangular para el valor absoluto. Se ha mostrado que f es continua en α , para todo $\alpha \in E$. \square

La convergencia uniforme de funciones se demuestra, en muchos ejemplos concretos, mediante el uso del siguiente *criterio mayorizante* de Weierstrass.

Lema 1.5 (Weierstrass). *Si un juego de funciones $g_k: E \rightarrow \mathbb{C}$, para $k \in \mathbb{N}$, cumple unas estimaciones $|g_k(z)| \leq M_k$ para todo $z \in E$; y si la serie numérica $\sum_{k=0}^{\infty} M_k$ converge, entonces la serie $\sum_{k=0}^{\infty} g_k(z)$ converge absoluta y uniformemente en E .*

Demostración. Sean $s_n(z) := \sum_{k=0}^n g_k(z)$, para $n \in \mathbb{N}$, las sumas parciales de la serie. Si $n > m$ en \mathbb{N} y $z \in E$, entonces

$$|s_n(z) - s_m(z)| = \left| \sum_{k=m+1}^n g_k(z) \right| \leq \sum_{k=m+1}^n |g_k(z)| \leq \sum_{k=m+1}^n M_k \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} M_k. \quad (1.9)$$

La convergencia de la serie $\sum_{k=0}^{\infty} M_k$ implica que el lado derecho es pequeño: dado $\varepsilon > 0$, hay $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $m \geq N \implies \sum_{k>m} M_k < \varepsilon$.

Entonces, para cada $z \in E$, las sumas parciales $s_n(z)$ forman una sucesión de Cauchy: $n > m \geq N \implies |s_n(z) - s_m(z)| < \varepsilon$. Por la completitud de \mathbb{C} , existe un límite

$$s(z) := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(z) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} g_k(z)$$

para cada $z \in E$. Al dejar $n \rightarrow \infty$, se obtiene

$$m \geq N \implies |s(z) - s_m(z)| \leq \varepsilon, \quad \text{para todo } z \in E.$$

Ahora bien, como $N = N(\varepsilon)$ no depende de z , esto dice que $s_m \rightarrow s$ uniformemente en E ; es decir, la sumatoria $\sum_{k=0}^{\infty} g_k$ converge uniformemente a la suma s .

En vista de la estimación (1.9), los mismos considerandos son aplicables a la serie de valores absolutos $\sum_{k=0}^{\infty} |g_k(z)|$; la convergencia de la serie es también absoluta. \square

Definición 1.6. Una serie de funciones complejas de la forma

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - \alpha)^n, \quad (1.10)$$

con $\alpha \in \mathbb{C}$ y $a_n \in \mathbb{C}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se llama una **serie de potencias** centrado en α , con *coeficientes* a_n .

Es evidente que $f(\alpha) = a_0 + 0 + 0 + \dots = a_0$, así que la serie converge al menos en el punto $z = \alpha$. Para $z \neq \alpha$, la convergencia o divergencia de la serie depende de la naturaleza de los coeficientes. Conviene usar la notación (1.10) en todo caso; si no hay evidencias de convergencia, esta expresión es una **serie de potencias formal**.

Una serie de potencias formal no es más que una sucesión de coeficientes (a_n) y un parámetro α , escritos de una manera curiosa que indica las reglas apropiadas de suma y multiplicación. Para manipular estas series formales algebraicamente, conviene usar una “incógnita” X en lugar de $(z - \alpha)$. Con las operaciones aritméticas

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n X^n \right) &:= \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) X^n, \\ \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n X^n \right) &:= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j+k=n} a_j b_k \right) X^n, \end{aligned} \quad (1.11)$$

las series de potencias formales forman un *anillo conmutativo entero* $\mathbb{C}[[X]]$, que incluye los *polinomios* $\mathbb{C}[X]$ como subanillo.

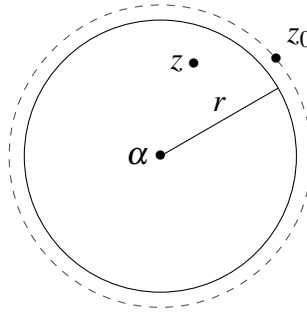


Figura 1.5: Ámbito de convergencia de una serie de potencias

Lema 1.7. Si una serie de potencias (1.10) converge para algún $z_0 \neq \alpha$, entonces esta serie converge en el disco abierto $\{z \in \mathbb{C} : |z - \alpha| < |z_0 - \alpha|\}$; además, la convergencia es uniforme en cualquier disco cerrado $\{z \in \mathbb{C} : |z - \alpha| \leq r\}$, si $0 < r < |z_0 - \alpha|$.

Demostración. La convergencia de la serie en $z = z_0$ implica que $a_n(z_0 - \alpha)^n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Entonces hay $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N \implies |a_n(z_0 - \alpha)^n| < 1$. Luego,

$$n \geq N \implies |a_n(z - \alpha)^n| = |a_n(z_0 - \alpha)^n| \left| \frac{(z - \alpha)^n}{(z_0 - \alpha)^n} \right| < \left| \frac{z - \alpha}{z_0 - \alpha} \right|^n.$$

Si $|z - \alpha| \leq r$ con $r < |z_0 - \alpha|$, sea $t := r/|z_0 - \alpha| < 1$. Entonces $|a_n(z - \alpha)^n| < t^n$ para $n \geq N$. La convergencia de la serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} t^n = 1/(1-t)$ y el Lema 1.5 implica que la serie de potencias (1.10) converge absoluta y uniformemente en el disco cerrado $\{z \in \mathbb{C} : |z - \alpha| \leq r\}$.

La unión de los discos cerrados $\{z \in \mathbb{C} : |z - \alpha| \leq r\}$, para todo r con $0 < r < |z_0 - \alpha|$, es el disco *abierto* $\{z \in \mathbb{C} : |z - \alpha| < |z_0 - \alpha|\}$. Por tanto, la serie de potencias converge en este disco abierto, aunque su convergencia allí no sea necesariamente uniforme. \square

Proposición 1.8. *La convergencia de una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - \alpha)^n$ obedece exactamente una de estas tres posibilidades:*

- (a) *la serie converge para $z = \alpha$ solamente;*
- (b) *la serie converge para todo $z \in \mathbb{C}$;*
- (c) *existe un número R , con $0 < R < \infty$, tal que la serie converge para $|z - \alpha| < R$ y diverge para $|z - \alpha| > R$.*

*En el tercer caso, R se llama el **radio de convergencia** de la serie de potencias.*

Demostración. Si la serie no cumple las posibilidades (a) ni (b), existen $z_0, z_1 \in \mathbb{C} \setminus \{\alpha\}$ tales que la serie converge en $z = z_0$ pero diverge en $z = z_1$. Del Lema 1.7 se ve que $|z_1 - \alpha| \geq |z_0 - \alpha|$.

Sea $S := \{r > 0 : \text{la serie converge para } |z - \alpha| < r\}$. El Lema 1.7 muestra que $|z_0 - \alpha| \in S$, de modo que $S \neq \emptyset$. El mismo lema muestra que $r \leq |z_1 - \alpha|$ para todo $r \in S$, así que el conjunto de números positivos S tiene una cota superior. Defínase $R := \sup S$. Esta definición implica que

$$0 < |z_0 - \alpha| \leq R \leq |z_1 - \alpha| < \infty.$$

Si $|z_2 - \alpha| < R$, entonces hay $r \in S$ con $|z_2 - \alpha| < r < R$ y la serie converge para $z = z_2$. Por otro lado, si $|z_3 - \alpha| > R$, entonces la serie diverge para $z = z_3$; porque, de lo contrario, convergiría en el disco $|z - \alpha| < |z_3 - \alpha|$, por el Lema 1.7, lo cual implicaría $|z_3 - \alpha| \in S$, contrario a la hipótesis $|z_3 - \alpha| > \sup S$. \square

Algunos autores emplean un truco de notación, al colocar $R = 0$ en el caso (a) y $R = \infty$ en el caso (b) de la proposición anterior. Con estas dos valores “impropios” de R , se permite hablar del radio de convergencia de una serie de potencias cualquiera.

La Proposición 1.8 resalta la importancia de los discos circulares en la teoría de funciones complejas. Vale la pena introducir las notaciones:

$$D(\alpha; r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - \alpha| < r\},$$

$$\bar{D}(\alpha; r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - \alpha| \leq r\}.$$

Entonces $D(\alpha; r)$ es el **disco abierto** con centro α y radio r ; mientras $\bar{D}(\alpha; r)$ es el **disco cerrado** con el mismo centro y radio.¹¹ Fíjese que $D(\alpha; r) \subset \bar{D}(\alpha; r) \subset D(\alpha; s)$ para todo $s > r$.

Lema 1.9 (Hadamard). *El radio de convergencia R de la serie de potencias (1.10) está dado por la fórmula siguiente:*

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}. \quad (1.12)$$

Demostración. Denótese por $1/R'$ el lado derecho de (1.12). Hay que comprobar $R = R'$.

Es útil recordar que el *límite superior* de una sucesión real (x_n) , denotado

$$L = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n := \lim_{k \rightarrow \infty} (\sup\{x_n : n \geq k\}),$$

satisface (a): $L = +\infty$ si (x_n) no está acotada superiormente; o bien (b): si (x_n) tiene cota superior, para cada $\varepsilon > 0$, vale $x_n < L + \varepsilon$ para todo $n \geq N(\varepsilon)$ mientras $x_m > L - \varepsilon$ para un juego infinito de valores de m .

Si $|z - \alpha| < r < R'$, entonces $1/r > 1/R'$, es decir, $\limsup_n |a_n|^{1/n} < 1/r$. En ese caso, hay $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N \implies |a_n| < 1/r^n$. En consecuencia,

$$\sum_{n \geq N} |a_n(z - \alpha)^n| \leq \sum_{n \geq N} \frac{|z - \alpha|^n}{r^n} = \frac{|z - \alpha|^N}{r^N} \frac{r}{r - |z - \alpha|} < \infty,$$

así la serie de potencias converge (absolutamente) en z , lo cual implica que $|z - \alpha| \leq R$. Se ha comprobado que $R' \leq R$.

En cambio, si $|z - \alpha| > s > R'$, entonces $1/s < 1/R'$, así que $|a_m| > 1/s^m$ para $m \in S$, donde S es una *parte infinita* de \mathbb{N} . En este caso, vale

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(z - \alpha)^n| \geq \sum_{m \in S} |a_m(z - \alpha)^m| \geq \sum_{m \in S} \frac{|z - \alpha|^m}{s^m} \geq \sum_{m \in S} 1 = \infty,$$

así que la serie de potencias no converge absolutamente en z . Esto conlleva $|z - \alpha| \geq R$. Se ha comprobado que $R' \geq R$. \square

¹¹Algunos textos usan el término “círculo” para denotar un disco cerrado circular, pero “circunferencia” para referirse a su curva de borde. Las desventajas de semejante notación deben de ser obvias. En estos apuntes, el vocablo **círculo** denota únicamente *la curva frontera* de un disco circular.

Definición 1.10. Si la serie de potencias

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - \alpha)^n$$

tiene radio de convergencia positivo, $R > 0$, la suma de la serie define una **función analítica** $f: D(\alpha; R) \rightarrow \mathbb{C}$ en su disco abierto de convergencia. En el caso $R = \infty$, dicese que $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es una **función analítica entera**, o simplemente una *función entera*.

Una parte $U \subseteq \mathbb{C}$ es un *conjunto abierto*, o simplemente un **abierto**, si U es una unión (arbitraria) de discos abiertos. Una función $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ es una función *analítica en U* si para cada $\alpha \in U$ hay un radio $r > 0$ tal que $D(\alpha; r) \subseteq U$, en donde f coincide con la suma de una serie de potencias convergente en $D(\alpha; r)$.

Cualquier polinomio $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_m z^m$ es una función analítica entera, de oficio. El mayor índice n tal que $a_n \neq 0$ es el *grado* del polinomio. A continuación se ofrece un juego de ejemplos con series de potencias que no terminan.

Ejemplo 1.11. La **función exponencial** se define como la suma de la serie de potencias

$$\exp z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n. \quad (1.13)$$

Para cualquier $z \in \mathbb{C}$, la convergencia absoluta de esta serie es una consecuencia del *criterio de la razón* para series reales positivas, porque

$$\frac{|z|^{n+1}/(n+1)!}{|z|^n/n!} = \frac{|z|}{n+1} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

El Lema 1.7 garantiza que \exp es una función analítica entera. El producto de dos valores de esta serie es

$$(\exp z)(\exp w) = \sum_{k,l=0}^{\infty} \frac{1}{k!l!} z^k w^l = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k w^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z+w)^n = \exp(z+w)$$

con el uso del teorema binomial. (El cambio del orden de sumación se justifica por la convergencia absoluta de ambos lados.) La conclusión es que esta función entera obedece la regla multiplicativa

$$\exp(z+w) = (\exp z)(\exp w), \quad \text{para todo } z, w \in \mathbb{C}. \quad (1.14)$$

El número positivo

$$e := \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

entonces satisface $\exp(m) = e^m$ para $m \in \mathbb{Z}$, y luego $\exp(q) = e^q$ para $q \in \mathbb{Q}$. Esto motiva la notación

$$e^z := \exp z \quad \text{para cualquier } z \in \mathbb{C}.$$

Con esta notación, la “ley de exponentes” (1.14) se escribe $e^{z+w} = e^z e^w$. \diamond

Ejemplo 1.12. Las funciones trigonométricas **coseno** y **seno** se definen mediante las dos series de potencias

$$\cos z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}, \quad \text{sen } z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}.$$

Nuevamente, el criterio de la razón demuestra la convergencia absoluta de las dos series para todo $z \in \mathbb{C}$; el coseno y el seno son dos funciones enteras.

Es evidente que

$$\cos z + i \text{sen } z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n}}{(2n)!} z^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n+1}}{(2n+1)!} z^{2n+1} = \exp(iz).$$

En particular, la fórmula (1.5), que dice que $e^{i\theta} = \cos \theta + i \text{sen } \theta$, para $\theta \in \mathbb{R}$ queda demostrada *a posteriori*; más aun, dicha fórmula ahora tiene validez para todo $z \in \mathbb{C}$.

Las funciones trigonométricas también pueden expresarse en términos de la función exponencial, así:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \text{sen } z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \quad \diamond$$

Ejemplo 1.13. La serie geométrica

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

tiene radio de convergencia $R = 1$. En efecto, como $a_n = 1$ para todo n , la fórmula de Hadamard (1.12) implica que $1/R = 1$. La función racional $1/(1-z)$ es entonces analítica en el disco unitario $D(0; 1)$ y posee una singularidad evidente en $z = 1$ donde la serie diverge.

La fracción $1/(1-z)$ no parece ser singular para $|z| > 1$, aunque en esta región no podría representarse por la misma serie. En el disco $D(2; 1)$, por ejemplo, habría que expresar esta fracción como una función de $(z-2)$:

$$\frac{1}{1-z} = \frac{-1}{1+(z-2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (z-2)^n.$$

Esta nueva serie de potencias también tiene radio de convergencia $R = 1$ y luego converge para $|z - 2| < 1$. La misma función racional $1/(1 - z)$ es analítica en los dos discos abiertos $D(0; 1)$ y $D(2; 1)$, aunque sus dos desarrollos en series de potencias no coinciden. \diamond

Ejemplo 1.14. La serie logarítmica

$$\log(1 + z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots \quad (1.15)$$

también tiene radio de convergencia $R = 1$. Esto puede demostrarse indirectamente, al observar que la serie converge para $z = +1$ (al aplicar el criterio de Leibniz a una serie real alternante) pero diverge en $z = -1$ (la serie armónica). La fórmula de Hadamard (1.12) entonces muestra el corolario interesante:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/n} = 1. \quad (1.16)$$

[De hecho, la fórmula (1.12) implica que $\limsup_{n \rightarrow \infty} n^{1/n} = 1$; pero como la sucesión $(n^{1/n})$ es creciente para $n \geq 3$, el límite existe y coincide con el límite superior.]

La serie de potencias define la siguiente función analítica en el disco $D(1; 1)$,

$$\log z := - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - z)^n}{n}.$$

Del análisis real, se sabe que para $z > 0$ real, esta serie coincide con la serie de Taylor de la función inversa de la exponencial. Sin embargo, las fórmulas conocidas para el logaritmo no son fácilmente deducibles de esta serie de potencias. \diamond

► Una propiedad importante de una serie de potencias es *su diferenciabilidad término por término*, dentro de su disco de convergencia.

Proposición 1.15. Para cualquier serie de potencias con radio de convergencia $R > 0$,

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - \alpha)^n,$$

sea $f'(z)$ la siguiente serie de potencias:

$$f'(z) := \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - \alpha)^{n-1} = \sum_{m=0}^{\infty} (m + 1) a_{m+1} (z - \alpha)^m. \quad (1.17)$$

Entonces la serie $f'(z)$ tiene el mismo radio de convergencia R . Además, dentro del disco abierto $D(\alpha; R)$ la siguiente relación es válida:

$$f'(z) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{f(z + \eta) - f(z)}{\eta}. \quad (1.18)$$

La función analítica f' definida por (1.17) se llama la **derivada** de f .

Demostración. Como $n^{1/n} \rightarrow 1$ cuando $n \rightarrow \infty$, en vista de (1.16), la fórmula de Hadamard muestra que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |na_n|^{1/n} = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} = \frac{1}{R},$$

donde R es el radio de convergencia de la serie $f(z)$. Esta igualdad es válida en los dos casos $0 < R < \infty$; o bien $R = \infty$. Entonces la serie de potencias (1.17) tiene el mismo ámbito de convergencia, sea este el disco abierto $D(\alpha; R)$; o bien el plano \mathbb{C} .

Para comprobar (1.18), tómesese $z_0 \in D(\alpha; R)$ y elíjase r tal que $|z_0 - \alpha| < r < R$. Sea $\eta \neq 0$ en \mathbb{C} tal que $|(z_0 + \eta) - \alpha| < r$. Para $N \in \mathbb{N}$, la serie de potencias $f(z)$ escinde en una suma parcial s_N y una cola t_N , así:

$$f(z) = s_N(z) + t_N(z) := \sum_{n=0}^N a_n (z - \alpha)^n + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n (z - \alpha)^n.$$

Denótese por $s'_N(z) = \sum_{n=1}^N na_n (z - \alpha)^{n-1}$ la suma parcial correspondiente de f' . Entonces

$$\begin{aligned} & \frac{f(z_0 + \eta) - f(z_0)}{\eta} - f'(z_0) \\ &= \left(\frac{s_N(z_0 + \eta) - s_N(z_0)}{\eta} - s'_N(z_0) \right) + (s'_N(z_0) - f'(z_0)) + \left(\frac{t_N(z_0 + \eta) - t_N(z_0)}{\eta} \right). \end{aligned}$$

La fórmula binomial finita

$$z^n - w^n = (z - w)(z^{n-1} + z^{n-2}w + \dots + zw^{n-2} + w^{n-1})$$

y las condiciones $|z_0 + \eta| < r$, $|z_0| < r$ muestran que

$$\left| \frac{t_N(z_0 + \eta) - t_N(z_0)}{\eta} \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \left| \frac{(z_0 + \eta)^n - z_0^n}{\eta} \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| nr^{n-1}.$$

El lado derecho de esta desigualdad es la cola de una serie positiva convergente, ya que la serie de potencias $f'(z)$ converge *absolutamente* en el disco $\bar{D}(\alpha; r)$. Entonces esta cola tiende a 0 cuando $N \rightarrow \infty$. Por lo tanto, dado $\varepsilon > 0$, hay $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$N \geq N_1 \implies \left| \frac{t_N(z_0 + \eta) - t_N(z_0)}{\eta} \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

La convergencia de la serie $f'(z_0)$ dice que $s'_N(z_0) \rightarrow f'(z_0)$ cuando $N \rightarrow \infty$; luego, hay $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$N \geq N_2 \implies |s'_N(z_0) - f'(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Tómese $N \in \mathbb{N}$ fijo, con $N \geq \max\{N_1, N_2\}$. La prueba tradicional para verificar la derivada de un polinomio muestra que hay $\delta > 0$ tal que

$$0 < |\eta| < \delta \implies \left| \frac{s_N(z_0 + \eta) - s_N(z_0)}{\eta} - s'_N(z_0) \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Entonces, dado $\varepsilon > 0$ hay $\delta > 0$ con $\delta < r - |z_0 - \alpha|$ (condición suficiente para que $|\eta| < \delta$ conlleve $|z_0 + \eta| < r$) tal que

$$0 < |\eta| < \delta \implies \left| \frac{f(z_0 + \eta) - f(z_0)}{\eta} - f'(z_0) \right| < \varepsilon. \quad (1.19)$$

Se ha comprobado la existencia y el valor del límite (1.18) para $z = z_0$. Como z_0 es un punto cualquiera de $D(\alpha; R)$, la relación (1.18) es válida en este disco —o bien en todo \mathbb{C} , en el caso $R = \infty$. \square

La Proposición 1.15 motiva la introducción del concepto de una *función diferenciable de una variable compleja*.

Definición 1.16. Sea $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ una función definida en una parte $U \subseteq \mathbb{C}$ tal que $D(z_0; r) \subseteq U$ para algún radio positivo r . Si existe un número complejo $f'(z_0) \in \mathbb{C}$ tal que el límite (1.18) existe para $z = z_0$, dicese que f es **diferenciable en z_0** , con **derivada $f'(z_0)$** . La existencia del límite significa que, para cada $\varepsilon > 0$, exista $\delta > 0$ tal que la relación (1.19) sea válida.

Si el dominio U de f es una unión de discos abiertos $D(z; r_z)$, dicese que f es **diferenciable en U** si es diferenciable en cada punto $z \in U$.

Si f es diferenciable en U , es fácil comprobar que $\lim_{\eta \rightarrow 0} (f(z + \eta) - f(z)) = 0$; es decir, que $\lim_{\eta \rightarrow 0} f(z + \eta) = f(z)$, para todo $z \in U$; esto es, que la función f es **continua en U** .

Si f es diferenciable en U , la fórmula (1.18) define una nueva función $f' : U \rightarrow \mathbb{C}$, que se llama la **derivada de f** . Dícese que f es **continuamente diferenciable** en U si la función f' es también continua en U .

Proposición 1.17. *Una serie de potencias $f(z)$, con radio de convergencia $R > 0$, es indefinidamente diferenciable, o suave, en su disco de convergencia. Las derivadas sucesivas $f'(z)$, $f''(z)$, $f'''(z)$, etcétera, se obtienen por diferenciación término por término de la serie de potencias original.*

Demostración. La prueba de la Proposición 1.15 muestra que la derivada de la serie de potencias $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - \alpha)^n$ es la serie de potencias $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(z - \alpha)^{n-1}$, obtenido por diferenciación término por término de $f(z)$. Además, la serie derivada posee el mismo radio de convergencia R .

Considérese, entonces, la serie de potencias (1.17) para $f'(z)$. El mismo argumento dice que esta serie es también diferenciable, con derivada

$$f''(z) := \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(z - \alpha)^{n-2} = \sum_{m=0}^{\infty} (m+2)(m+1)a_{m+2}(z - \alpha)^m.$$

Además, la serie para $f''(z)$ converge también en el mismo disco $D(\alpha; R)$; así que f es dos veces diferenciable en este disco abierto. La existencia de las derivadas superiores sigue por inducción. \square

En conclusión: *una función analítica es suave*. Las mismas pruebas, con pequeños ajustes de terminología, muestra que una función analítica de una variable *real* es también suave (en un intervalo abierto de la recta \mathbb{R}). Ahora bien, buena parte de la teoría de las variedades diferenciables reales depende de la existencia de funciones suaves que no son analíticas. En el contexto complejo, en cambio, resultará —la prueba aparece más adelante— que cada función diferenciable una vez es automáticamente suave y además es analítica.

Proposición 1.18. *Si la serie de potencias $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - \alpha)^n$ tiene radio de convergencia $R > 0$, y si al menos un coeficiente a_k no es cero, hay un número r con $0 < r < R$ tal que $f(z) \neq 0$ para $0 < |z - \alpha| < r$.*

Demostración. Sea $k \in \mathbb{N}$ el menor índice tal que $a_k \neq 0$; entonces

$$f(z) := \sum_{n=k}^{\infty} a_n(z - \alpha)^n = (z - \alpha)^k \sum_{m=0}^{\infty} a_{m+k}(z - \alpha)^m =: (z - \alpha)^k g(z).$$

El radio de convergencia de la serie de potencias $g(z)$ es igual a R , porque las dos series convergen para los mismos valores de z . Luego $|g(z)|$ es una función *continua* en el disco $D(\alpha; R)$, con $|g(\alpha)| = |a_k| > 0$. Por tanto, hay un radio r con $0 < r < R$ tal que $|g(z)| > 0$ para $z \in D(\alpha; r)$. Entonces $f(z) = (z - \alpha)^k g(z) \neq 0$ para $z \in D(\alpha; r) \setminus \{\alpha\}$. \square

El resultado de esta proposición se conoce como **el principio de los ceros aislados** para funciones analíticas: si $f(\alpha) = 0$ pero $f(z) \neq 0$ en un disco abierto $D(\alpha; R)$, entonces el *cero* α de f es aislado, en el sentido de que exista un disco abierto $D(\alpha; r)$ centrado en α que no contenga otro cero de la función analítica f .

Corolario 1.19. *La serie de potencias que representa una función analítica en un disco abierto $D(\alpha; R)$ es única.*

Demostración. Si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - \alpha)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - \alpha)^n$ es una función analítica representada por dos series de potencias en un disco $D(\alpha; R)$, entonces la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n) (z - \alpha)^n$ converge en $D(\alpha; R)$ y es idénticamente nula. La Proposición 1.18 implica que $a_n = b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. \square

Considérese una serie de potencias, con radio de convergencia $R > 0$, que representa una función analítica f ,

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - \alpha)^n.$$

Si $k \in \mathbb{N}$, la Proposición 1.17 dice que f es k veces diferenciable, con k -ésima derivada

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n (z - \alpha)^{n-k}.$$

Al evaluar esta serie en $z = \alpha$, se obtiene

$$f^{(k)}(\alpha) = k! a_k.$$

Entonces los coeficientes de la serie de potencias original quedan determinadas por las derivadas superiores de f en $z = \alpha$:

$$a_k = \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}. \quad (1.20)$$

Esto demuestra la existencia de la serie de potencias para $f(z)$. Además, permite expresar la función analítica mediante una **serie de Taylor**,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!} (z - \alpha)^n \quad (1.21)$$

que converge, con suma igual a $f(z)$, en el disco $D(\alpha; R)$.

1.3 Las ecuaciones de Cauchy y Riemann

La función de conjugación compleja, $z \mapsto \bar{z}$, es continua en el plano complejo \mathbb{C} , pero tiene una importante desventaja.

Lema 1.20. *La función $g(z) := \bar{z}$ no es diferenciable en punto alguno de \mathbb{C} ; y por consiguiente, esta función tampoco es analítica.*

Demostración. Hay que mostrar, para cualquier $z_0 \in \mathbb{C}$, que el límite

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{g(z_0 + \eta) - g(z_0)}{\eta} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{(\bar{z}_0 + \bar{\eta}) - \bar{z}_0}{\eta} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\bar{\eta}}{\eta}$$

no existe. Escríbese $\eta = s e^{i\varphi}$ en forma polar, con $s > 0$; entonces $\bar{\eta} = s e^{-i\varphi}$. Luego, el límite putativo para obtener $g'(z_0)$ sería

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\bar{\eta}}{\eta} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{s e^{-i\varphi}}{s e^{i\varphi}} = \lim_{\eta \rightarrow 0} e^{-2i\varphi}.$$

Se busca, entonces, un número $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que, para cualquier $\varepsilon > 0$ dado, satisfaga $|e^{-2i\varphi} - \alpha|$ toda vez que $|\eta| < \delta(\varepsilon)$, es decir, toda vez que $s < \delta(\varepsilon)$. Aquí, sin embargo, $e^{-2i\varphi}$ es un número complejo arbitrario sujeto únicamente a la relación $|e^{-2i\varphi}| = 1$; ninguna condición sobre s resuelve esa ambigüedad. Es decir, no hay candidato α para la derivada de g en z_0 . \square

Este ejemplo pone de manifiesto que la *diferenciabilidad compleja* de una función $f(z)$ no coincide con la *diferenciabilidad real* de la función de dos variables reales $F(x, y) := f(x + iy)$. Conviene precisar esta diferencia entre los dos conceptos.

Recuérdese que una parte $U \subset \mathbb{R}^2$ es un **abierto** en \mathbb{R}^2 si es una unión de discos abiertos de radio positivo.¹² Cuando se identifica \mathbb{C} con \mathbb{R}^2 , se usa la misma topología: un abierto en \mathbb{C} es una unión $U = \bigcup_k D(\alpha_k; r_k)$ con cada $r_k > 0$. De hecho, como la condición $|z| < \delta$ es lo mismo que $x^2 + y^2 < \delta^2$, la noción de continuidad para funciones en \mathbb{C} o bien en \mathbb{R}^2 es la misma.

Notación. Si $f: E \rightarrow \mathbb{C}$ es una función definida en $E \subseteq \mathbb{C}$, se escribe

$$f(z) \equiv f(x + iy) =: u(x, y) + iv(x, y) = \Re f(x, y) + \Im f(x, y), \quad (1.22)$$

donde $\Re f \equiv u: E \rightarrow \mathbb{R}$ y $\Im f \equiv v: E \rightarrow \mathbb{R}$ son la **parte real** y la **parte imaginaria**, respectivamente, de la función compleja f .

¹²Excepcionalmente, el conjunto vacío \emptyset es también un abierto en \mathbb{R}^2 , por ser la unión de una familia vacía de discos abiertos.

Proposición 1.21. Si $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ es una función diferenciable en un abierto $U \subseteq \mathbb{C}$, sus partes real e imaginaria son funciones diferenciables reales, cuyas derivadas parciales cumplen las **ecuaciones de Cauchy y Riemann**:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}. \quad (1.23)$$

Inversamente, si $u, v: U \rightarrow \mathbb{R}$ son dos funciones reales diferenciables cuyas derivadas parciales cumplen (1.23), entonces $f(x+iy) =: u(x,y) + iv(x,y)$ define una función diferenciable en U .

Demostración. Si f es diferenciable (en el sentido complejo) en $z_0 \in U$, con derivada $f'(z_0) = a + ib \in \mathbb{C}$, entonces resulta que

$$f(z_0 + \eta) - f(z_0) = f'(z_0) \eta + o(\eta),$$

donde $o(\eta)$ denota¹³ una función de η tal que $o(\eta)/\eta \rightarrow 0$ cuando $\eta \rightarrow 0$. Al tomar $\eta =: h + ik$ con h, k reales, se obtiene

$$f(z_0 + \eta) - f(z_0) = (a + ib)(h + ik) + o(\eta). \quad (1.24a)$$

Las partes real e imaginaria de esta igualdad son

$$\begin{aligned} u(x_0 + h, y_0 + k) - u(x_0, y_0) &= ah - bk + o(\sqrt{h^2 + k^2}), \\ v(x_0 + h, y_0 + k) - v(x_0, y_0) &= bh + ak + o(\sqrt{h^2 + k^2}). \end{aligned} \quad (1.24b)$$

Se concluye que las funciones u y v son diferenciables en el punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Al considerar los casos respectivos $k = 0$ y $h = 0$, sus derivadas parciales cumplen

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) = a, \quad v_x(x_0, y_0) = -u_y(x_0, y_0) = b.$$

Entonces las ecuaciones son válidas en $(x_0, y_0) \in U$.

Inversamente, si u y v son diferenciables en (x_0, y_0) y si sus derivadas parciales cumplen (1.23) en ese punto, esto significa que existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que las condiciones de diferenciabilidad (1.24b) estén satisfechos. Con la notación $f = u + iv$, se obtiene (1.24a), que dice que f es diferenciable en $z_0 = x_0 + iy_0$, con derivada $a + ib$ en ese punto. \square

¹³Cuando se emplea esta **notación de Landau**, el término $o(\eta)$ denota *cualquier* función que cumple la condición mencionada; en el transcurso de un cálculo pueden emplearse varias instancias de tales funciones, pero todos reciben la misma designación $o(\eta)$.

Cabe recordar que la diferenciabilidad de una función real u no es fácil de establecer; aun cuando las derivadas parciales u_x, u_y existen en cada punto (x_0, y_0) de su dominio, esto no garantiza una estimación del tipo (1.24b). Sin embargo, si u_x, u_y existen y son *continuas* en el dominio de u , entonces u es diferenciable en cada punto, sin necesidad de verificar la estimación. En tal caso, dicese que u es *continuamente diferenciable* (o bien *de clase C^1*). Ahora, si tanto u como v son continuamente diferenciables en un abierto de $U \subseteq \mathbb{R}^2$ y además cumplen (1.23) en U , entonces f es diferenciable en U y su derivada es continua.

Definición 1.22. Sea $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ una función compleja, definida en un abierto $U \subset \mathbb{C}$. Si f es diferenciable en U y si la derivada $z \mapsto f'(z)$ es continua en U , dicese que f es una **función holomorfa** en U .

Es importante señalar que esta definición es provisional, ya que pide que f es *continuamente* diferenciable en su dominio. Más adelante se verá (por el teorema de Goursat) que la continuidad de la derivada es automática. Nótese, mientras tanto, que *una función analítica es holomorfa*; la afirmación inversa se comprobará más adelante.

► La conjugación compleja no es holomorfa, ya que no es diferenciable. Es evidente que la función $z \mapsto \bar{z}$ incumple las ecuaciones de Cauchy y Riemann (1.23), puesto que $u(x, y) = x, v(x, y) = -y$ en este caso. De hecho, para este ejemplo se verifican las relaciones $u_x = -v_y, v_x = u_y$ entre las derivadas parciales, en contraste con (1.23). Esto motiva la siguiente notación.

Notación. Sea $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ una función compleja tales que u, v son continuamente diferenciables en un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^2$, aunque no necesariamente cumplen las ecuaciones de Cauchy y Riemann. Escríbase

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial z} &:= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} &:= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right),\end{aligned}$$

El caso $f(z) = z$ cumple $\partial f / \partial z = 1, \partial f / \partial \bar{z} = 0$; mientras $g(z) = \bar{z}$ cumple $\partial g / \partial z = 0, \partial g / \partial \bar{z} = 1$; así se explica la elección de los signos.

Obsérvese que, con esta notación, las ecuaciones de Cauchy y Riemann se combinan en una sola ecuación:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0,$$

sin mención explícita de la partes real e imaginaria.

Al notar que $x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$, $y = \frac{i}{2}(\bar{z} - z)$, queda claro que cualquier función $F(x, y)$ también puede escribirse como una función $G(z, \bar{z})$. Algo que distingue las series de potencias ya vistas es la ausencia de la variable \bar{z} . Dicha ausencia implica que cada uno de los términos $a_n(z - \alpha)^n$ cumple las ecuaciones de Cauchy y Riemann; como la suma de la serie de potencias es diferenciable término por término (en el sentido real), estas ecuaciones también están satisfechas por la suma.

1.4 Algunas funciones holomorfas

Los ejemplos más obvias de funciones son los **polinomios**

$$p(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_nz^n.$$

El mayor índice n tal que $a_n \neq 0$ es el **grado** de este polinomio.

Como series de potencias terminantes, los polinomios son funciones analíticas enteras, e *ipso facto* son funciones holomorfas en todo el plano \mathbb{C} . Un resultado básico, cuya demostración aparecerá más adelante, es el llamado *teorema fundamental del álgebra*, que dice que p , si no es constante, tiene al menos una raíz $\alpha_1 \in \mathbb{C}$ tal que $p(\alpha_1) = 0$.

Un cálculo algebraico, la llamada “división larga” de polinomios, muestra que hay un polinomio $p_1(z)$, de grado $n - 1$, tal que¹⁴

$$p(z) = (z - \alpha_1)p_1(z).$$

Si α_2 es una raíz del polinomio p_1 , entonces $p(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2)p_2(z)$. Al repetir el argumento n veces, se obtiene la *factorización* de p ,

$$p(z) = a_n(z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \cdots (z - \alpha_n), \quad (1.25)$$

donde las raíces $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ no necesariamente son distintas.

Dícese que $\alpha \in \mathbb{C}$ es un **cero** de una función f si $f(\alpha) = 0$. Los ceros de un polinomio p son las raíces, listados sin repetición. El *orden* de un cero α es el número de veces (al menos una) que el factor $(z - \alpha)$ aparece en el producto (1.25). Dícese que α es un **cero simple** si su orden es 1; en cuyo caso, $p(z) = (z - \alpha)p_1(z)$ donde $p_1(\alpha) \neq 0$. Por derivación, se obtiene $p'(z) = p_1(z) + (z - \alpha)p_1'(z)$, así que $p'(\alpha) = p_1(\alpha) \neq 0$. En

¹⁴Esta observación algebraica recibe el nombre *teorema del factor*. Nótese que un polinomio constante no nulo tiene grado 0; no se define el grado del polinomio constante 0.

cambio, si β es un cero de orden 2 o mayor, entonces $p(z) = (z - \beta)^2 p_2(z)$ y por tanto vale $p'(\beta) = 0$. En breve: α es un cero simple de p si y sólo si $p(\alpha) = 0$ pero $p'(\alpha) \neq 0$.

► El cociente de dos polinomios es una **función racional**,

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} := \frac{a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n}{b_0 + b_1z + \cdots + b_mz^m} \quad (1.26)$$

donde se supone, sin perder generalidad, que los polinomios p y q no tienen factor común $(z - \alpha)$ alguno; y por lo tanto, no tienen ceros en común. Los ceros del denominador q se llaman **polos** de la función racional f ; el orden del polo β de f es su orden como cero de q .

En primera instancia, los polos se excluyen del dominio de f . En el resto del plano \mathbb{C} , la función racional $f(z)$ es continuamente diferenciable, con derivada

$$f'(z) = \frac{p'(z)q(z) - p(z)q'(z)}{q(z)^2}.$$

Si β es un polo de f de orden k , entonces $(z - \beta)^{k-1}$ divide el numerador del lado derecho mientras $(z - \beta)^{2k}$ divide $q(z)^2$: luego, β es un polo de f' de orden $k + 1$.

En un polo β de f , vale $q(\beta) = 0$ mientras $p(\beta) \neq 0$. Entonces tiene sentido definir $f(\beta) := \infty$. Al hacerlo, se está considerando f como una función $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}_\infty$. Pero entonces es apropiado *extender el dominio de f a toda la esfera de Riemann*, al colocar

$$f(\infty) := g(0), \quad \text{donde } g(z) \equiv f(1/z).$$

Dícese que f tiene *un cero en ∞* , de orden k , si g tiene un cero en 0 de orden k ; y que f tiene *un polo en ∞* , de orden l , si g tiene un polo en 0 de orden l . (En particular, un polinomio p de grado n tiene un polo de orden n en ∞ .)

Lema 1.23. *Una función racional $f(z) = p(z)/q(z)$ se extiende a una función continua $f: \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$, de manera que la función extendida tiene igual número de ceros y de polos (contados con multiplicidad).¹⁵*

Demostración. Al hacer el cambio $z \mapsto 1/z$ en (1.26), se obtiene

$$g(z) = z^{m-n} \frac{a_0z^n + a_1z^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0z^m + b_1z^{m-1} + \cdots + b_m}.$$

¹⁵Esto es, un cero o polo de orden k se cuenta k veces.

Si $m > n$, $g(z)$ tiene un cero de orden $m - n$ en 0 , así que f tiene un cero de orden $m - n$ en ∞ , amén de n ceros finitos y m polos finitos, contados con multiplicidad.

Si $m < n$, $g(z)$ tiene un polo de orden $n - m$ en 0 , así que f tiene un polo de orden $n - m$ en ∞ , amén de n ceros finitos y m polos finitos, contados con multiplicidad.

Si $m = n$, entonces $f(\infty) = g(0) = a_n/b_m \in \mathbb{C} \setminus \{0\} = \mathbb{C}_\infty \setminus \{0, \infty\}$, así que f no tiene cero ni polo en ∞ . Contando con multiplicidad, f tiene $m = n$ polos finitos y n ceros finitos.

En todos los casos, el número total de polos o ceros es $\max\{m, n\}$.

La continuidad de f en z_0 es evidente si z_0 no es un polo y si $z_0 \neq \infty$. Para estos casos excepcionales, hay que recordar que un vecindario básico de ∞ en \mathbb{C}_∞ es un abierto de la forma $\{\infty\} \uplus \{z \in \mathbb{C} : |z| > r\}$. Basta notar, entonces, que $|f(z)| \rightarrow \infty$ cuando z tiende a un cero de $q(z)$; y que $f(z) \rightarrow g(0)$ cuando $1/z \rightarrow 0$. \square

Definición 1.24. El **orden** de una función racional es el número de sus ceros, o equivalentemente el número de sus polos, *contados con multiplicidad*, en el plano extendido \mathbb{C}_∞ .

► Una función racional *de orden 1* es una **fracción lineal**¹⁶

$$s(z) := \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \quad \text{con} \quad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0. \quad (1.27)$$

Nótese que $s(0) = \beta/\delta$ mientras $s(\infty) = \alpha/\gamma$.

Entre las fracciones lineales, aparecen:

- ★ las **traslaciones** del plano, $z \mapsto z + \beta$ (obsérvese que $\infty \mapsto \infty$);
- ★ las **rotaciones con dilatación** alrededor del origen, $z \mapsto \alpha z$ (fíjese que $0 \mapsto 0$);
- ★ la **inversión** $z \mapsto 1/z$ (nótese que $0 \leftrightarrow \infty$).

Es fácil comprobar que cualquier fracción lineal es una composición de estos tres tipos básicos. Obsérvese que la fracción lineal

$$t(w) = \frac{\delta w - \beta}{-\gamma w + \alpha}$$

es una *función inversa* de (1.27), porque

$$w = s(z) \iff z = t(w).$$

¹⁶Esta terminología es tradicional, pero cabe notar que esta función *no es lineal* en el sentido de los espacios vectoriales, salvo si $\beta = \gamma = 0$.

Fíjese también que $t(\beta/\delta) = 0$ y que $t(\alpha/\gamma) = (\alpha\delta - \beta\gamma)/0 = \infty$; mientras $t(0) = -\beta/\alpha$, $s(-\beta/\alpha) = 0$, y $t(\infty) = -\delta/\gamma$, $s(-\delta/\gamma) = \infty$. Entonces $s: \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ es una biyección. (Como s y t son funciones inversas continuas, cada fracción lineal establece un homeomorfismo de la esfera de Riemann \mathbb{C}_∞ en sí mismo.)

La condición $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ advierte que la parametrización de $s(z)$ tiene cierta redundancia: al eliminar un factor común, se podría exigir que $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. Sin embargo, esto reduciría sacrificaría comodidad: es más fácil referirse a $1/z$ que a i/iz , aunque estas dos funciones coinciden. En todo caso, está claro que la totalidad de fracciones lineales depende de 3 parámetros complejos. Para determinar una fracción lineal, debería de ser suficiente precisar sus valores en tres puntos distintos de \mathbb{C}_∞ .

Por ejemplo, si $s(0) = 0$, entonces $\beta = 0$; si $s(\infty) = \infty$, entonces $\gamma = 0$; y si $s(1) = 1$, entonces $\alpha + \beta = \gamma + \delta$. Por lo tanto,

$$s(0) = 0, s(1) = 1, s(\infty) = \infty \implies s(z) \equiv z.$$

Lema 1.25. Si z_2, z_3, z_4 son tres puntos distintos de \mathbb{C}_∞ , hay una única fracción lineal s tal que $s(z_2) = 1$, $s(z_3) = 0$, $s(z_4) = \infty$.

Demostración. Si s, t son dos fracciones lineales tales que $s(1) = t(1)$, $s(0) = t(0)$ y $s(\infty) = t(\infty)$, entonces la función compuesta $t^{-1} \circ s$ deja fijos los tres puntos 1, 0 e ∞ , así que $t^{-1} \circ s$ es la identidad; es decir, $t(z) = s(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}_\infty$. Esto establece la *unicidad* de la fracción s del enunciado.

Para establecer la *existencia* de s , nótese que la fórmula siguiente,

$$s(z) := \frac{z - z_3}{z - z_4} \bigg/ \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}$$

define una fracción lineal —el cociente a la derecha del *solidus* es una constante— que evidentemente cumple $s(z_2) = 1$, $s(z_3) = 0$ y $s(z_4) = \infty$. \square

Definición 1.26. La **razón doble** de cuatro puntos distintos $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}_\infty$ es el valor $s(z_1)$ de la (única) fracción lineal s que cumple $s(z_2) = 1$, $s(z_3) = 0$, $s(z_4) = \infty$.

Concretamente, esta razón doble está dada por la fórmula¹⁷

$$[z_1, z_2; z_3, z_4] := \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} \bigg/ \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4} = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)}. \quad (1.28)$$

¹⁷Algunos autores escriben (z_1, z_2, z_3, z_4) o bien $X(z_1, z_2, z_3, z_4)$ para denotar esta razón doble. Otros cambian el orden cíclico de los 4 puntos, al escribir (z_1, z_3, z_2, z_4) para denotar el lado derecho de (1.28).

Lema 1.27. Una fracción lineal $z \mapsto s(z)$ conserva la razón doble de cuatro puntos distintos cualesquiera:

$$[s(z_1), s(z_2); s(z_3), s(z_4)] = [z_1, z_2; z_3, z_4].$$

Demostración. Dados $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}_\infty$ distintos, la función $t(z) := [z, z_2; z_3, z_4]$ es la única fracción lineal tal que $t(z_2) = 1$, $t(z_3) = 0$, $t(z_4) = \infty$. La función compuesta $r := t \circ s^{-1}$ es una fracción lineal tal que $r(s(z_2)) = 1$, $r(s(z_3)) = 0$, $r(s(z_4)) = \infty$. Por la definición de la razón doble, $[s(z_1), s(z_2); s(z_3), s(z_4)]$ coincide con $r(s(z_1)) = t(z_1) = [z_1, z_2; z_3, z_4]$. \square

En general, la razón doble es un número complejo (sin excluir el posible valor ∞). Un caso de particular importancia ocurre cuando la razón doble es real (de nuevo, no se excluye ∞ ; el conjunto $\mathbb{R}_\infty := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ es el “círculo real” en la esfera de Riemann, obtenido al agregar el punto ∞ a la recta real \mathbb{R}).

Lema 1.28. Cuatro puntos distintos $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}_\infty$ tienen razón doble real si y sólo si son concíclicos.¹⁸

Demostración. Es evidente de la fórmula (1.28) que la razón doble de 4 puntos en \mathbb{R}_∞ cumple $[z_1, z_2; z_3, z_4] \in \mathbb{R}_\infty$. En vista del Lema 1.27, basta mostrar que cualquier círculo en \mathbb{C}_∞ es la imagen bajo alguna fracción lineal, del círculo real \mathbb{R}_∞ .

Ya se ha observado que cualquier fracción lineal es una composición de tres casos particulares. Una *traslación* $z \mapsto z + \beta$ o bien una *rotación con dilatación* $z \mapsto \alpha z$ lleva rectas en rectas y círculos en círculos, dejando fijo el punto ∞ . Con estas funciones, una recta cualquiera puede transformarse en \mathbb{R} ; y un círculo cualquiera (que no pasa por ∞) puede transformarse en un círculo particular. Para terminar, basta exhibir una recta y un círculo que son intercambiados por la *inversión* $z \mapsto 1/z$.

Considérese la *recta* $\Re z = \frac{1}{2}$, es decir,

$$z + \bar{z} = 1.$$

Su imagen bajo la inversión $z \mapsto w := 1/z$ es la curva $1/w + 1/\bar{w} = 1$, o bien $\bar{w} + w = w\bar{w}$. Esta ecuación puede escribirse como

$$(w - 1)(\bar{w} - 1) = 1, \quad \text{o bien} \quad |w - 1| = 1.$$

La curva imagen, entonces, es el *círculo* con centro 1 y radio 1, que pasa por el origen. Es fácil verificar que la inversión $z := 1/w$ lleva este círculo en la recta $z + \bar{z} = 1$. \square

¹⁸Hay que recordar que una *recta* en \mathbb{C} , junto con el punto ∞ , forma un *círculo* en \mathbb{C}_∞ . Entonces la palabra “concíclico” incluye los casos de 4 puntos colineales y de 3 puntos colineales junto con ∞ .

2 El Teorema de Cauchy y las Funciones Holomorfas

El análisis complejo, como materia distinguible del análisis real, comienza con una observación fundamental: la integral indefinida de una función holomorfa es independiente del camino de integración, toda vez que la región encerrada por dos caminos no contenga una singularidad de dicha función. La primera demostración fue publicada por Cauchy en 1825 y hoy en día recibe el nombre “teorema de Cauchy”.

Sin embargo, ya en 1811, Gauss escribió en una carta al astrónomo Friedrich Bessel,¹ que para una función $f(z)$ de argumento complejo, “¿qué debe pensarse de $\int f(z) dz$ para $z = a + ib$?” Después de discutir la ambigüedad de formular la integral como suma de pequeños incrementos en z , enunció su conjetura que la integral resultante no es ambigua cuando el integrando no se vuelve infinito en la región entre dos curvas que representan las transiciones en z . Alegó tener una prueba, no muy difícil, de este fenómeno, que publicaría oportunamente. Sin embargo, no lo hizo hasta 1832.

Lo que tanto Gauss como Cauchy vieron con claridad es la necesidad de precisar bien el concepto de la integral de una función en el plano complejo. Es necesario, entonces, comenzar con una discusión previa de las integrales de línea.

2.1 Integrales de línea en \mathbb{C}

Para definir integrales en el plano complejo, primero hay que considerar los posibles dominios de integración. En contraste con el caso de la recta real, en donde “la integral de una función de a a b ” tiene lugar en el intervalo real $[a, b]$, hay una gran variedad de caminos de integración entre dos puntos α y β del plano complejo.

Definición 2.1. Una **curva parametrizada** es una función continua $t \mapsto z(t) \in \mathbb{C}$, definido en un intervalo real $[a, b]$. Esta parametrización es **regular** si la derivada $z'(t)$ existe y es continua² en $[a, b]$, con $z'(t) \neq 0$ para $a \leq t \leq b$. En los extremos, se sobreentiende que las derivadas son unilaterales:

$$z'(a) := \lim_{h \downarrow 0} \frac{z(a+h) - z(a)}{h}, \quad z'(b) := \lim_{h \uparrow 0} \frac{z(b+h) - z(b)}{h}.$$

(El denominador de la primera fracción es positivo, el de la segunda es negativo.)

¹Citado por Saunders MacLane, “Foundations of Complex Analysis”, p. 31, en *A Source Book in Mathematics, 1200–1800*, ed. por Dirk J. Struik, (Harvard University Press, Cambridge, MA, 1969).

²Algunos autores dicen **suave** en vez de *regular*; y no piden la continuidad de la derivada $z'(t)$, prefiriendo hablar de una parametrización *de clase C^1* cuando $z(t)$ es continuamente diferenciable.

Más generalmente, una parametrización es **regular por trozos** si hay una partición finita del intervalo, $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, donde $t \mapsto z(t)$ es regular en cada subintervalo $[t_i, t_{i+1}]$.

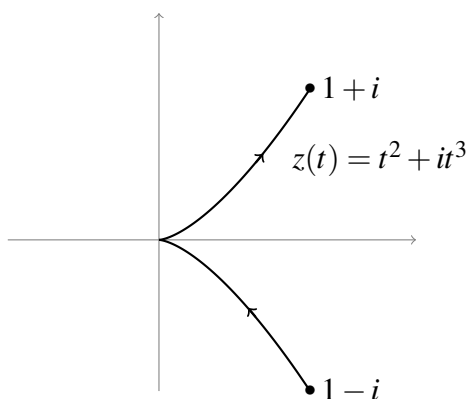


Figura 2.1: Una curva parametrizada no regular

Ejemplo 2.2. Considérese la curva parametrizada $z(t) := t^2 + it^3$ para $-1 \leq t \leq 1$. Está claro que $z'(t) = 2t + 3it^2$ es continua en el intervalo $[-1, 1]$. Sin embargo, esta parametrización no es regular, porque $z'(0) = 0$. Geométricamente, la falta de regularidad en $t = 0$ se manifiesta como una *cúspide* en la curva, en el origen $0 \in \mathbb{C}$. Véase la Figura 2.1. \diamond

Definición 2.3. Dos parametrizaciones $z: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ y $w: [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$, ambos regulares [por trozos], se llaman *equivalentes* si hay una biyección continuamente diferenciable $s \mapsto t(s): [c, d] \rightarrow [a, b]$, con $t'(s) > 0$ para todo s , tal que

$$w(s) = z(t(s)) \quad \text{para } c \leq s \leq d. \quad (2.1)$$

Fíjese que la función inversa $t \mapsto s(t)$ es también continuamente diferenciable, con $s'(t) = 1/t'(s(t)) > 0$, así que esta relación en efecto es simétrica. Su transitividad sigue fácilmente de la regla de la cadena. Una **curva suave**³ [por trozos] se define como una clase de equivalencia de parametrizaciones regulares [por trozos]. El punto $z(a) = w(c)$ es el **punto inicial** de esta curva, mientras $z(b) = w(d)$ es el **punto final** de la curva.

³El adjetivo *suave* (o *liso*, en mexicano) usualmente es aplicable a funciones reales que son indefinidamente diferenciables; pero en el contexto actual las funciones pertinentes son continuamente diferenciables una vez. Sería más correcta hablar de una *curva de clase C^1* ; pero en esta instancia es permisible decir “suave”, por una costumbre largamente establecida.

Obsérvese que los puntos inicial y final de una curva suave no dependen de la parametrización: no es posible que $z(a) = w(d)$ ni tampoco $z(b) = w(c)$ porque la *reparametrización* $s \mapsto t(s)$ es una función *creciente*, en vista de la condición $t'(s) > 0$.

En particular, dada una curva suave C con una parametrización regular $t \mapsto z(t)$ para $a \leq t \leq b$, considérese la parametrización regular dada por

$$\tilde{z}(s) := z(a + b - s), \quad \text{para } a \leq s \leq b. \quad (2.2)$$

Aquí $t(s) := a + b - s$ cumple $t'(s) \equiv -1 < 0$, así que esta curva parametrizada no es equivalente a la primera. En efecto, la parametrización $s \mapsto \tilde{z}(s)$ *recorre los mismos puntos que* $t \mapsto z(t)$, pero *en el orden reverso*: está claro que $\tilde{z}(a) = z(b)$ y $\tilde{z}(b) = z(a)$. La clase de equivalencia de $s \mapsto \tilde{z}(s)$ se denota por $-C$: esta es la **curva opuesta** de C .

De ahora en adelante, salvo indicación contraria, la palabra **curva** indicará una curva suave.

Definición 2.4. Una **curva cerrada** es una curva cuyos puntos inicial y final coinciden: $z(a) = z(b)$ para cualquier parametrización $t \mapsto z(t)$. (Para que esta curva sea suave en el punto $z(a) = z(b)$, la parametrización debe obedecer $z'(a) = z'(b)$ también.)

Una **curva simple** es una curva suave C con una parametrización regular⁴ tal que $z(t_1) \neq z(t_2)$ si $t_1 \neq t_2$ en $[a, b]$, con la posible excepción del caso $z(a) = z(b)$. En este caso excepcional, si C es una **curva cerrada simple**.

La **traza** de una curva C es el conjunto de los puntos $\{z(t) : a \leq t \leq b\}$ en \mathbb{C} . La traza es obviamente independiente de la parametrización. Además, es evidente que las dos curvas C y $-C$ tienen la misma traza, pero el “sentido de recorrido” las distingue.

Ejemplo 2.5. Una **lemniscata** es una curva plana (el nombre significa *cinta*) que obedece una ecuación polar de la forma $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$, con $a > 0$ constante. Su traza no tiene puntos en los sectores $\pi/4 < \theta < 3\pi/4$ y $-3\pi/4 < \theta < -\pi/4$, donde $\cos 2\theta < 0$. Una posible parametrización de la lemniscata es $z(t) = x(t) + iy(t)$, donde

$$x(t) := \frac{a\sqrt{2}\cos t}{1 + \sin^2 t}, \quad y(t) := \frac{a\sqrt{2}\sin t \cos t}{1 + \sin^2 t}, \quad \text{para } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Esta es una curva cerrada, ya que $z(0) = z(2\pi) = a\sqrt{2}$. Sin embargo, esta curva no es simple, porque $z(\pi/2) = z(3\pi/2) = 0$. El recorrido de la curva dada por esta parametrización está ilustrada en la Figura 2.2. \diamond

⁴Nótese que cualquier otra parametrización equivalente cumple la misma condición: ¿por qué?

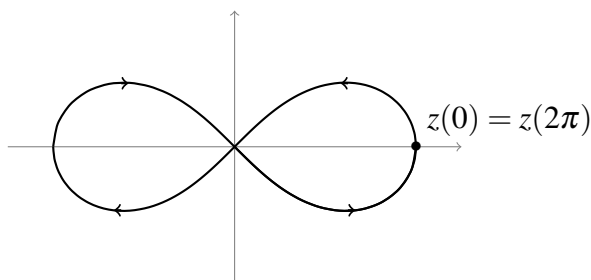


Figura 2.2: La lemniscata: una curva cerrada pero no simple

Ejemplo 2.6. La curva C parametrizada por

$$z(t) := \alpha + re^{it}, \quad \text{para } 0 \leq t \leq 2\pi,$$

es el *círculo* con centro α y radio r , *recorrido una vez contrario a reloj*. Esta es una curva cerrada simple. La curva opuesta $-C$ se puede parametrizar por $t \mapsto \alpha + re^{-it}$; esta curva es el mismo círculo *recorrido una vez a favor de reloj*.

La parametrización $t \mapsto \alpha + re^{it}$, para $0 \leq t \leq 4\pi$, es equivalente a $s \mapsto \alpha + re^{2is}$, para $0 \leq s \leq 2\pi$. Se trata del mismo círculo, recorrido ahora *dos veces consecutivas* contrario a reloj. Esta curva recibe el nombre $2C$; es cerrada pero no es simple.

En general, si $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, se denota por nC la curva cerrada parametrizada por $t \mapsto \alpha + re^{nit}$, para $0 \leq t \leq 2\pi$; así se recorre el círculo n veces, con el convenio de que un recorrido “negativo” obra en el sentido opuesto de un recorrido “positivo”. Del mismo modo, cualquier curva cerrada puede ser recorrida n veces, si $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. \diamond

Lema 2.7. Sea C una curva suave en \mathbb{C} , parametrizada por $t \mapsto z(t)$ con $a \leq t \leq b$. Si $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ es una función continua cuyo dominio incluye la traza de C , la integral

$$\int_a^b f(z(t)) z'(t) dt \tag{2.3}$$

no depende de la parametrización de C .

Demostración. Si $f(z) \equiv u(z) + iv(z)$ expresa las partes real e imaginaria de la función f , y si $z(t) \equiv x(t) + iy(t)$, la integral (2.3) significa

$$\begin{aligned} & \int_a^b (u(z(t)) + iv(z(t))) (x'(t) + iy'(t)) dt \\ & := \int_a^b (u(z(t))x'(t) - v(z(t))y'(t)) dt + i \int_a^b (u(z(t))y'(t) + v(z(t))x'(t)) dt, \end{aligned}$$

donde las dos integrales al lado derecho son integrales de Riemann de funciones reales continuas. (La continuidad de f y de z' garantiza la existencia de estas integrales de Riemann; es una condición suficiente aunque no estrictamente necesaria.)

Sea $s \mapsto w(s)$ otra parametrización de C , que cumple (2.1). Entonces, por la reglas de cambio de variable y de la cadena para funciones reales, se obtiene

$$\int_a^b f(z(t)) z'(t) dt = \int_c^d f(z(t(s))) z'(t(s)) t'(s) ds = \int_c^d f(w(s)) w'(s) ds.$$

El lado derecho es la expresión análoga a (2.3) en la nueva parametrización. \square

Definición 2.8. Sea f es una función continua, definida en la traza de una curva suave C . La **integral de línea** de f sobre C es la cantidad

$$\int_C f(z) dz := \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt, \quad (2.4)$$

donde al lado derecho $t \mapsto z(t)$ es una parametrización regular cualquiera de C .

Si C es una curva suave por trozos, se puede subdividir C en un número finito de curvas suaves C_1, C_2, \dots, C_k donde el punto final de cada C_i es el punto inicial del trozo siguiente C_{i+1} . En este caso, se define

$$\int_C f(z) dz := \sum_{i=1}^k \int_{C_i} f(z) dz = \sum_{i=1}^k \int_{a_i}^{b_i} f(z_i(t)) z'_i(t) dt.$$

También se emplea la notación

$$\oint_C f(z) dz \equiv \int_C f(z) dz$$

cuando C es una curva *cerrada*.

Ejemplo 2.9. Vale la pena calcular la integral $\int_C \bar{z} dz$, para algunas curvas en \mathbb{C} .

(a) Si C es el segmento de recta desde 0 a $1+i$, tómesese $z(t) := t+it$; entonces

$$\int_C \bar{z} dz = \int_0^1 (t-it)(1+i) dt = \int_0^1 2t dt = 1.$$

(b) Si C es el segmento $[0, 1]$ seguido por el segmento $[1, 1+i]$, parametrizado por $x \mapsto x$ y luego $y \mapsto 1+iy$, entonces

$$\int_C \bar{z} dz = \int_0^1 x dx + \int_0^1 (1-iy) i dy = \frac{1}{2} + (i + \frac{1}{2}) = 1+i.$$

- (c) Si C es el segmento $[0, i]$ seguido por el segmento $[i, 1 + i]$, parametrizado por $y \mapsto iy$ y luego $x \mapsto x + i$, entonces

$$\int_C \bar{z} dz = \int_0^1 (-iy)i dy + \int_0^1 (x - i) dx = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - i\right) = 1 - i.$$

- (d) Si C es el círculo unitario \mathbb{T} recorrido una vez contrario a reloj, parametrizado por $\theta \mapsto e^{i\theta}$, entonces

$$\oint_C \bar{z} dz = \int_0^{2\pi} e^{-i\theta} (ie^{i\theta}) d\theta = \int_0^{2\pi} i d\theta = 2\pi i.$$

Los casos (a), (b), (c) son ejemplos de una misma función continua (pero ¡no holomorfa!) sobre tres curvas suaves por trozos con los mismos puntos inicial y final. Esto pone en evidencia que, en general, una integral de línea *depende del camino* recorrido entre sus extremos. El caso (d), con una curva cerrada, exhibe el mismo fenómeno: una integral independiente del camino tendría integral cero sobre una curva cerrada, lo cual no es el caso para este ejemplo. \diamond

Lema 2.10. *Las integrales de línea de funciones continuas sobre curvas suaves por trozos en \mathbb{C} obedecen las siguientes propiedades:*

- (a) *Linealidad de $f \mapsto \int_C f(z) dz$:*

$$\int_C (\alpha f(z) + \beta g(z)) dz = \alpha \int_C f(z) dz + \beta \int_C g(z) dz.$$

- (b) *La reversión del recorrido cambia el signo de la integral:*

$$\int_{-C} f(z) dz = - \int_C f(z) dz. \quad (2.5)$$

- (c) *Acotación por la longitud de la curva:*

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq \ell(C) \sup_{z \in C} |f(z)|, \quad (2.6)$$

donde

$$\ell(C) := \int_a^b |z'(t)| dt$$

denota la longitud de C .

Demostración. Elíjase una parametrización regular $t \mapsto z(t)$ de C . La propiedad (a) sigue fácilmente de la linealidad de integrales reales, habida cuenta de (2.4).

La parametrización (2.2) de $-C$ por $\tilde{z}(s) := z(a+b-s)$ convierte (2.5) en la identidad

$$\int_b^a f(\tilde{z}(s))\tilde{z}'(s) ds = - \int_a^b f(z(t))z'(t) dt$$

que sigue directamente por la sustitución $t = a + b - s$.

La acotación (c) es consecuencia de la desigualdad triangular para integrales reales:

$$\left| \int_a^b f(z(t))z'(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(z(t))||z'(t)| dt.$$

Hay que notar que la integral $\int_a^b |z'(t)| dt$ no depende de la parametrización de C , porque

$$\int_c^d |w'(s)| ds = \int_a^b |w'(s(t))|s'(t) dt = \int_a^b |w'(s(t))s'(t)| dt = \int_a^b |z'(t)| dt$$

en vista de la propiedad $s'(t) > 0$ de la reparametrización. \square

Definición 2.11. Si $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ es una función continua definida en un abierto $U \subseteq \mathbb{C}$, una **primitiva** de f es una función diferenciable $F: U \rightarrow \mathbb{C}$ cuya derivada coincide con f , es decir, $F'(z) = f(z)$ para todo $z \in U$.

En vista de la Definición 1.22, *cualquier primitiva* de una función continua es *holomorfa*.

Proposición 2.12. Sea $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua, definida en un abierto $U \subseteq \mathbb{C}$, que admite una primitiva $F: U \rightarrow \mathbb{C}$. Si C es una curva desde α a β cuya traza está incluida en U , entonces

$$\int_C f(z) dz = F(\beta) - F(\alpha), \quad (2.7)$$

así que esta integral “no depende del camino”, es decir, sólo depende de los puntos inicial y final de C .

Demostración. Sea $z: [a, b] \rightarrow U$ una parametrización regular de C , con $z(a) = \alpha$ y $z(b) = \beta$. Entonces

$$\int_C f(z) dz = \int_C F'(z) dz = \int_a^b F'(z(t))z'(t) dt$$

y la regla de la cadena (para funciones diferenciables reales) implica que

$$F'(z(t))z'(t) = \frac{d}{dt}F(z(t)) \quad \text{para } a < t < b,$$

y por el “teorema fundamental del cálculo” real, vale

$$\int_a^b F'(z(t)) z'(t) dt = F(z(b)) - F(z(a)) = F(\beta) - F(\alpha). \quad \square$$

Corolario 2.13. Si C es una curva cerrada cuya traza queda en un abierto $U \subseteq \mathbb{C}$ y si $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ es una función continua que admite una primitiva en U , entonces

$$\oint_C f(z) dz = 0. \quad \square$$

La dificultad esencial en aplicar la Proposición 2.12 y su corolario es esta: ¿cuáles funciones continuas admiten primitivas? En una variable real, la respuesta es inmediata: la *integral indefinida* de una función continua proporciona una primitiva para cualquier función continua (de hecho, una familia de primitivas que difieren entre sí por constantes). Pero en el plano complejo, para hallar una especie de “integral indefinida” habría que establecer de antemano la independencia del camino del proceso de integración: el asunto muerde su cola. Además, el Ejemplo 2.9 implica que la función continua $z \mapsto \bar{z}$ no admite primitiva alguna.

Aun así, hay una clase de funciones continuas que sí admiten primitivas. Una función *analítica*, definida por una serie de potencias en un disco abierto $D(\alpha; R)$, admite una primitiva dada por la fórmula inversa de la fórmula (1.17), que define su derivada término por término. (Los detalles se dejan como un ejercicio.) Entonces la integral sobre una curva cerrada se anula para una función analítica, en su disco de convergencia.

El resultado fundamental de la teoría de variable compleja dice que la conclusión del Corolario 2.13 es válida para una *función holomorfa* cualquiera. Este es el tema de la próxima sección.

2.2 Integrales en un contorno cerrado

El teorema de Cauchy dice, informalmente, que la integral de una función f sobre una curva cerrada simple se anula, si f es holomorfa en un abierto U que incluye la traza de la curva C y *también el interior de C* . Esta formulación, sin embargo, enfrenta un problema topológico inesperadamente difícil: ¿qué cosa es el interior de una curva cerrada simple? Hay un famoso *teorema de Jordan*⁵ que dice que el complemento en \mathbb{C}

⁵El teorema fue demostrada por Camille Jordan, en su libro: *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, Gauthier-Villars, Paris, 1887. Para Jordan, una curva cerrada simple es la imagen biyectiva *continua* de un círculo en el plano, sin pedir condiciones de suavidad ni parametrización del recorrido. Como tal, incluye curvas fractales tales como los bordes de regiones de Mandelbrot. Una demostración para curvas suaves por trozos aparece en el Apéndice B del libro de Stein y Shakarchi.

de una curva cerrada simple C es la unión disjunta de dos abiertos conexos, $\mathbb{C} \setminus C = I(C) \uplus E(C)$, uno de los cuales es acotado y el otro no acotado. La componente acotada $I(C)$ es la **región interior** de C y la componente no acotada $E(C)$ es la **región exterior** de C . En la mayoría de los problemas de aplicación, basta considerar una curva cerrada simple cuya región interior es “evidente”.

Definición 2.14. Un abierto $U \subset \mathbb{C}$ es **disconexo** si es posible expresar U como una unión disjunta $U = V \uplus W$, donde V y W son abiertos no vacíos. En cambio, un abierto U es **conexo** si no es desconexo, es decir, si es imposible partir U en dos abiertos disjuntos no vacíos.⁶

Un abierto $U \subseteq \mathbb{C}$ es **conexo por caminos** si, para cada par de puntos $\alpha \neq \beta$ en U , hay una función continua $z: [a, b] \rightarrow U$ tal que $z(a) = \alpha$, $z(b) = \beta$. En particular, U es conexo por caminos si cada par de puntos distintos de U son extremos de una curva suave por trozos cuya traza queda en U . Resulta que un abierto de \mathbb{C} es conexo si y sólo si es conexo por caminos.⁷ Un abierto conexo se llama una **región** de \mathbb{C} .

Una parte $E \subseteq \mathbb{C}$ es **convexa** si para todo $\alpha, \beta \in E$, el segmento

$$[\alpha, \beta] := \{(1-t)\alpha + t\beta : 0 \leq t \leq 1\}$$

queda en E , es decir, $[\alpha, \beta] \subset E$. Un abierto convexo es también conexo (por caminos), obviamente; es decir, es una región. En particular, un disco abierto $D(\alpha; r)$ es conexo. Si $R = [a, c] \times [b, d]$ es un *rectángulo* cerrado en \mathbb{R}^2 , R es convexo; y su *interior*

$$(a, b) \times (c, d) = \{z \in \mathbb{C} : a < \Re z < c, b < \Im z < d\}$$

es abierto y convexo, y por ende es una región en \mathbb{C} .

Por otro lado, un disco abierto “perforado”

$$D(\alpha; r) \setminus \{\alpha\} = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - \alpha| < r\}$$

es una región, pero no es convexo. Si $0 < r < s$, el anillo abierto $D(\alpha; s) \setminus \bar{D}(\alpha; r)$ también es conexo pero no convexo.

⁶Más generalmente, una parte cualquiera E de un espacio topológico X es *disconexo* si hay abiertos disjuntos V y W con $E = (V \cap E) \uplus (W \cap E)$, una partición no trivial de E ; en cambio, E es *conexo* si no es desconexo. En particular, cualquier intervalo de \mathbb{R} es conexo; y la traza en \mathbb{C} de una curva suave es también conexo.

⁷En el plano complejo, un *abierto* es conexo si y sólo si es conexo por caminos; pero hay partes conexas, no abiertas, de \mathbb{C} que no son conexas por caminos. Consúltese cualquier libro de topología.

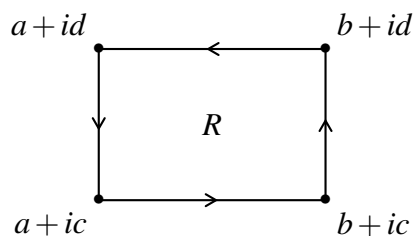


Figura 2.3: Un rectángulo R con el recorrido positivo de su borde ∂R

► Es aconsejable demostrar el teorema de Cauchy en un caso sencillo antes de abordar el caso general. Si $R = [a, b] \times [c, d]$ es un *rectángulo* en \mathbb{R}^2 , con $a < b$ y $c < d$, considerado como parte de \mathbb{C} , su borde es la curva $C = \partial R$ compuesto de cuatro segmentos consecutivos:

$$\partial R = [a + ic, b + ic] \cup [b + ic, b + id] \cup [b + id, a + id] \cup [a + id, a + ic].$$

En cada caso, el segmento $[z, w]$ se parametriza por $t \mapsto (1 - t)z + tw$ para $0 \leq t \leq 1$, o por una parametrización equivalente. Entonces ∂R es una curva simple cerrada, suave por trozos, que recorre la frontera de R en dirección contraria a reloj (Figura 2.3).

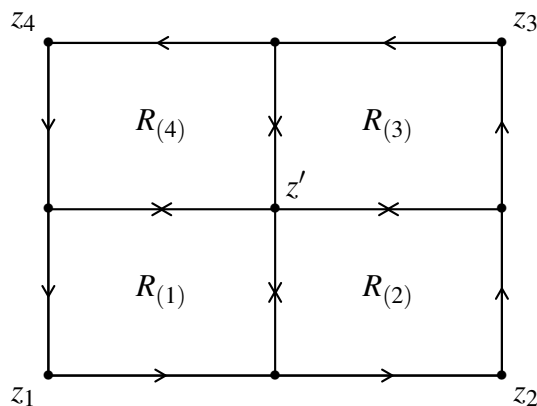


Figura 2.4: Cuadrisección de un rectángulo y su borde

Proposición 2.15 (Goursat). *Sea $F : U \rightarrow \mathbb{C}$ una función diferenciable en un abierto U que incluye un rectángulo R con lados paralelos a los ejes. Entonces la integral de f alrededor del borde de R se anula:*

$$\oint_{\partial R} f(z) dz = 0. \tag{2.8}$$

Demostración. Sean z_1, z_2, z_3, z_4 los vértices sucesivos del rectángulo R ; el centroide $z' := \frac{1}{2}(z_1 + z_3) = \frac{1}{2}(z_2 + z_4)$ sirve para dividir R en cuatro rectángulos $R_{(j)}$ con vértices opuestos z_j y z' , para $j = 1, 2, 3, 4$ (véase la Figura 2.4).

El borde $\partial R_{(1)}$ incluye el segmento $[\frac{1}{2}(z_1 + z_2), z']$ y $\partial R_{(2)}$ incluye $[z', \frac{1}{2}(z_1 + z_2)]$, el mismo segmento con el recorrido opuesto. En la suma $\int_{\partial R_{(1)}} f(z) dz + \int_{\partial R_{(2)}} f(z) dz$, las contribuciones de este segmento se cancelan. De igual modo, se cancelan las contribuciones de los segmentos que colindan con z' en el lado derecho de la siguiente igualdad:

$$\oint_{\partial R} f(z) dz = \oint_{\partial R_{(1)}} f(z) dz + \oint_{\partial R_{(2)}} f(z) dz + \oint_{\partial R_{(3)}} f(z) dz + \oint_{\partial R_{(4)}} f(z) dz. \quad (2.9)$$

Obsérvese que los otros segmentos de los $\partial R_{(j)}$ conforman la curva ∂R , lo cual establece la igualdad (2.9).

Sea $A := \left| \oint_{\partial R} f(z) dz \right|$. Entonces la desigualdad triangular establece que *al menos uno* de los cuatro rectángulos $R_{(1)}, R_{(2)}, R_{(3)}, R_{(4)}$, que puede llamarse R_1 , cumple

$$\left| \oint_{\partial R_1} f(z) dz \right| \geq \frac{A}{4}.$$

Ahora se procede por inducción: se subdivide el rectángulo R_1 en cuatro rectángulos con un vértice común en el centroide de R_1 ; ellos obedecen el análogo de la fórmula (2.9), así que al menos uno de los cuatro, denotado por R_2 , cumple

$$\left| \oint_{\partial R_2} f(z) dz \right| \geq \frac{A}{4^2}.$$

En el n -ésimo paso, se obtiene un rectángulo R_n , cuya diagonal mide $2^{-n}|z_3 - z_1|$ y que cumple

$$\left| \oint_{\partial R_n} f(z) dz \right| \geq \frac{A}{4^n}.$$

Los rectángulos encajados $R \supset R_1 \supset R_2 \supset R_n \supset \dots$ tienen un sólo punto w en común, ya que sus diámetros tienden a cero: $\text{diam}(R_n) = 2^{-n}|z_3 - z_1| \rightarrow 0$.

Como f es diferenciable en $w \in R \subset U$, para cada $\varepsilon > 0$ dado hay $\delta > 0$ tal que $D(w; \delta) \subset U$ y además

$$|z - w| < \delta \implies |f(z) - f(w) - f'(w)(z - w)| < \varepsilon|z - w|.$$

Además, hay $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N \implies R_n \subset D(w; \delta)$.

Sea $g(z) := f(z) - f(w) - f'(w)(z - w)$. La función $h(z) := f(w) - f'(w)(z - w)$ tiene una primitiva $H(z) := f(w)z - \frac{1}{2}f'(w)(z - w)^2$, así que el Corolario 2.13 muestra que $\oint_{\partial R_n} h(z) dz = 0$. En vista de la estimación (2.6), para $n \geq N$ resulta que

$$\begin{aligned} \left| \oint_{\partial R_n} f(z) dz \right| &= \left| \oint_{\partial R_n} g(z) dz \right| \leq \varepsilon \ell(R_n) \sup_{z \in \partial R_n} |g(z)| \\ &\leq \varepsilon \ell(R_n) \sup_{z \in \partial R_n} |z - w| \leq 2\sqrt{2} \varepsilon \operatorname{diam}(R_n)^2 = \varepsilon \frac{2\sqrt{2} |z_3 - z_1|^2}{4^n}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, se obtiene

$$A = \left| \oint_{\partial R} f(z) dz \right| \leq 4^n \left| \oint_{\partial R_n} f(z) dz \right| \leq \varepsilon (2\sqrt{2} |z_3 - z_1|^2).$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, se concluye que $A = 0$, lo cual verifica (2.8). \square

La Proposición 2.15 es un caso particular del teorema de Cauchy, para una clase especial de contornos. Debido al proceso de subdivisión repetida de rectángulos (ésta fue la contribución de Goursat), no es necesario suponer que f es *continuamente* diferenciable, sino solamente *diferenciable* en cada punto de su dominio, que debe incluir tanto la frontera de R como su región interior.

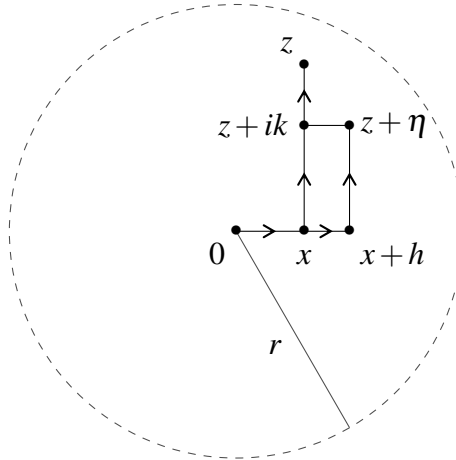


Figura 2.5: Caminos en un disco abierto

Proposición 2.16. Sea $f: D(\alpha; r) \rightarrow \mathbb{C}$ una función diferenciable en el disco abierto $D(\alpha; r)$. Entonces hay una primitiva $F: D(\alpha; r) \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $F'(z) \equiv f(z)$ en ese disco.

Demostración. Sin perder generalidad, se puede suponer que $\alpha = 0$. Si $z \in D(0; r)$, $z = x + iy$, defínase

$$F(z) := \int_0^x f(w) dw + \int_x^z f(w) dw,$$

donde la notación indica que $F(z) := \int_C f(w) dw$ sobre una curva C que consta del segmento horizontal $[0, x]$ seguido por el segmento vertical $[x, z]$. Si $\eta = h + ik \neq 0$ con $|\eta| < r - |z|$, entonces $z + \eta \in D(0, r)$ y además

$$F(z + \eta) = \int_0^{x+h} f(w) dw + \int_{x+h}^{z+\eta} f(w) dw.$$

La diferencia $F(z + \eta) - F(z)$ es la integral de línea de f sobre la curva C que atraviesa, en orden los segmentos $z \rightarrow x \rightarrow 0 \rightarrow x + h \rightarrow z + \eta$. Al eliminar cualquier segmento recorrido dos veces en sentidos opuestos, se obtiene

$$F(z + \eta) - F(z) = \int_C f(w) dw + \oint_{\partial R} f(w) dw$$

donde C va de z a $z + \eta$ por un segmento horizontal y un segmento horizontal, y R es un rectángulo incluido en el disco $D(0; r)$. Por ejemplo, si $h > 0$ y $k < 0$, se obtiene $C = [z, x + ik] \cup [z + ik, z + \eta]$ mientras R es el rectángulo con esquinas opuestas x y $z + \eta$; véase la Figura 2.5. (Se deja como ejercicio determinar los detalles de los otros casos posibles.)

La Proposición 2.15 muestra que $\oint_{\partial R} f(w) dw = 0$. Como la función f es continua en z , se puede escribir $h(w) := f(w) - f(z)$ de modo que $h(w) \rightarrow 0$ cuando $w \rightarrow z$. Para $\varepsilon > 0$ dado, hay $\delta > 0$ tal que $|\eta| < \delta \implies |h(w)| < \varepsilon/\sqrt{2}$. Entonces

$$F(z + \eta) - F(z) = \int_C (f(z) + h(w)) dw = f(z) (z + \eta - z) + \int_C h(w) dw,$$

así que, cuando $|\eta| < \delta$ resulta que

$$\left| \frac{F(z + \eta) - F(z)}{\eta} - f(z) \right| = \frac{1}{|\eta|} \left| \int_C h(w) dw \right| < \frac{\ell(C)}{|\eta|} \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \leq \varepsilon.$$

Esto muestra que F es diferenciable en z con $F'(z) = f(z)$. Como $z \in D(0; r)$ es arbitrario, se concluye que F es holomorfo en $D(0; r)$ y que F es una primitiva de f . \square

Corolario 2.17. Si $f: D(\alpha; r) \rightarrow \mathbb{C}$ una función diferenciable, entonces

$$\oint_C f(z) dz = 0$$

para cualquier curva cerrada C cuya traza queda en $D(\alpha; r)$.

Demostración. Aplíquese el Corolario 2.13 y la Proposición anterior. \square

► En la demostración de la Proposición 2.16 se usan dos propiedades del dominio de la función diferenciable f . En primer lugar, este dominio es un abierto, para poder comparar el valor $F(z)$ de la primitiva con su valor $F(z + \eta)$ en un vecindario de z . En segundo lugar, el camino cerrado $0 \rightarrow z \rightarrow z + \eta \rightarrow 0$ trazado en las evaluaciones de $F(z)$ y $F(z + \eta)$ encierra una región de puntos dentro del dominio (concretamente, el rectángulo R en la demostración). Esta segunda propiedad es la *conectividad simple* del disco.

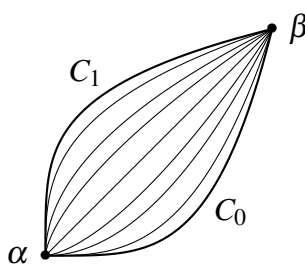


Figura 2.6: Una homotopía entre dos curvas

Definición 2.18. Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ una región (abierta y conexa) del plano complejo. Dos curvas C_0 y C_1 en U entre dos puntos distintos $\alpha, \beta \in U$ son **homotópicas** en U si hay una familia continua de curvas $\{C_s : 0 \leq s \leq 1\}$, con trazas en la región U , intercaladas entre C_0 y C_1 .

En otras palabras, si $f_0: [a, b] \rightarrow U$ y $f_1: [a, b] \rightarrow U$ son dos parametrizaciones continuas⁸ con $f_0(a) = f_1(a) = \alpha$ y $f_0(b) = f_1(b) = \beta$, hay una función continua $F: [0, 1] \times [a, b] \rightarrow U$ tal que $F(0, t) \equiv f_0(t)$ y $F(1, t) \equiv f_1(t)$ para $a \leq t \leq b$. Al colocar $f_s(t) := F(s, t)$, la función $f_s: [a, b] \rightarrow U$ parametriza una curva C_s con traza en U , para $0 \leq s \leq 1$.

La región U es **simplemente conexa** si cada par de curvas entre dos puntos distintos de U son homotópicos en U .

Ejemplo 2.19. El plano complejo \mathbb{C} es simplemente conexo. Un disco abierto $D(\alpha; r)$ es simplemente conexo. El interior de un rectángulo R es simplemente conexo.

La región $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$, obtenida al excluir la semirrecta real negativa del plano, es también simplemente conexa.

⁸En general, las dos curvas deben ser imágenes continuas de intervalos compactos en \mathbb{R} ; pero en una región de \mathbb{C} , es posible usar curvas suaves por trozos, sin perder generalidad.

Por otro lado, el plano perforado $\mathbb{C} \setminus \{0\}$; el disco perforado $D(\alpha; r) \setminus \{\alpha\}$; y el **anillo** abierto

$$A(\alpha; r, s) := \{z \in \mathbb{C} : r < |z - \alpha| < s\}, \quad \text{con } 0 < r < s;$$

son regiones que *no son simplemente conexas*. ◇

Para la existencia de una primitiva de una función diferenciable en una región simplemente conexa, basta definir la integral de línea $F(z) := \int_C f(w) dw$ a lo largo de una curva desde algún punto fijo α hasta z . De hecho, se puede tomar C como una cadena de segmentos horizontales y verticales dentro de U ; en este caso, las dos curvas C_0 y C_1 de α a $z + \eta$ así obtenidas son homotópicas, y la curva cerrada “ C_0 seguido por $-C_1$ ” encierra un número finito de rectángulos R_i dentro de U y las integrales $\oint_{\partial R_i} f(w) dw$ se anulan. Estos argumentos conducen a la siguiente generalización de la Proposición 2.16 y del Corolario 2.17.

Proposición 2.20. *Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ una región simplemente conexa. Si $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ es una función diferenciable, entonces hay una primitiva $F: U \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $F'(z) \equiv f(z)$ en U .*

En particular, vale $\oint_C f(z) dz = 0$ para cualquier curva cerrada C cuya traza queda en U . □

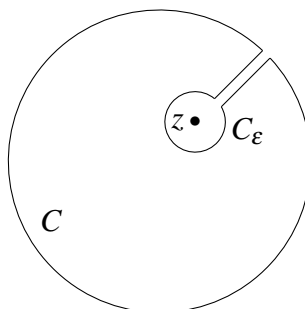
2.3 La fórmula integral de Cauchy

Teorema 2.21. *Si $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ es una función diferenciable en un abierto que incluye un disco cerrado \bar{D} con interior D , y si C es el círculo de borde de D (recorrido una vez contrario a reloj), la siguiente **fórmula de Cauchy** es válida:*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{w - z} dw \quad \text{para cada } z \in D. \tag{2.10}$$

Demostración. Sea D' un disco abierto, concéntrico con D pero con un radio un poco mayor, tal que $D' \subseteq U$.

Sea C el círculo $\bar{D} \setminus D$, esto es, el borde de D , recorrido una vez contrario a reloj. Tómese $z \in D$, sea $\varepsilon > 0$ tal que $\bar{D}(z; \varepsilon) \subset D$, y sea C_ε el círculo $\{w : |w - z| = \varepsilon\}$, recorrido una vez contra reloj. Considérese un segmento $[\alpha, \beta]$ que une un punto $\alpha \in C_\varepsilon$ a un punto $\beta \in C$; dado $\delta > 0$ suficientemente pequeño con $\delta < \varepsilon$, hay dos segmentos paralelos a $[\alpha, \beta]$, separados por un pasillo de anchura δ , con extremos en C_ε y C respectivamente, formando así una curva cerrada Γ_ε (véase la Figura 2.7).

Figura 2.7: Curva de tipo cerradura Γ_ε

Esta curva cerrada Γ_ε consta de cuatro trozos suaves: un arco largo de C , seguido por un segmento paralelo a $[\beta, \alpha]$, seguido de un arco largo del círculo $-C_\varepsilon$ recorrido a favor de reloj, seguido por el otro segmento paralelo a $[\alpha, \beta]$. La región interior $I(\Gamma_\varepsilon)$ es simplemente conexa y excluye el punto z . La unión $U_\delta := \bigcup \{D(w; \frac{1}{3}\delta) : w \in I(\Gamma_\varepsilon)\}$ es una región simplemente conexa que incluye la traza de Γ_ε . Como $z \notin U_\delta$, la función

$$g(w) := \frac{f(w)}{w-z}$$

es diferenciable en U_δ . La Proposición 2.20 entonces implica que

$$\oint_{\Gamma_\varepsilon} \frac{f(w)}{w-z} dw = 0.$$

Al parametrizar los cuatro trozos mencionados de Γ_ε , se obtiene cuatro integrales de línea con suma igual a 0. Al dejar $\delta \rightarrow 0$ en cada una de estas integrales, resulta

$$\oint_C \frac{f(w)}{w-z} dw + \int_{[\beta, \alpha]} \frac{f(w)}{w-z} dw - \oint_{C_\varepsilon} \frac{f(w)}{w-z} dw + \int_{[\alpha, \beta]} \frac{f(w)}{w-z} dw = 0.$$

Las dos integrales sobre los segmentos $[\alpha, \beta]$ y $[\beta, \alpha]$ (curvas opuestas) se cancelan, de modo que

$$\oint_C \frac{f(w)}{w-z} dw = \oint_{C_\varepsilon} \frac{f(w)}{w-z} dw.$$

El integrando a la derecha tiene la forma

$$\frac{f(w)}{w-z} = \frac{f(w) - f(z)}{w-z} + \frac{f(z)}{w-z},$$

donde el primer término a la derecha es de la forma $f'(z) + o(w-z)$; su integral sobre C_ε tiendo a 0 cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. Por otro lado, al parametrizar C_ε por $\theta \mapsto z + \varepsilon e^{i\theta}$, se calcula

$$\oint_{C_\varepsilon} \frac{f(z)}{w-z} dw = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(z)}{\varepsilon e^{i\theta}} i\varepsilon e^{i\theta} d\theta = 2\pi i f(z),$$

así que $\oint_C \frac{f(w)}{w-z} dw = 2\pi i f(z)$, lo cual establece (2.10). \square

Proposición 2.22. Si $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ es una función diferenciable en un abierto $U \subset \mathbb{C}$, entonces f es holomorfa en U . Además, si C es un círculo tal que $C \uplus I(C) \subset U$, entonces vale

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw \quad \text{para } z \in I(C). \quad (2.11)$$

Demostración. Para que una función diferenciable sea holomorfa, hay que comprobar la continuidad de la función $z \mapsto f'(z)$ —según la Definición 1.22.

Si z es un punto del abierto U , entonces $z \in D \subset \bar{D} \subset U$ para algún disco abierto D ; aquí $\bar{D} = D \uplus C$ donde $C = \partial D$ es el borde circular de D . Fíjese que $I(C) = D$.

Tómese η con $|\eta| < \delta < d(z, C)$, de modo que $z + \eta \in D$ también.⁹ El Teorema 2.21 implica que

$$\begin{aligned} \frac{f(z+\eta) - f(z)}{\eta} &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{\eta} \left(\frac{1}{w-z-\eta} - \frac{1}{w-z} \right) dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{(w-z-\eta)(w-z)} dw. \end{aligned}$$

Al dejar $\eta \rightarrow 0$, el lado izquierdo converge a $f'(z)$; mientras el integrando al lado derecho está mayorizado por $d(z, C)^{-1}(d(z, C) - \delta)^{-1} \sup_{w \in C} |f(w)|$, permitiendo tomar el límite bajo el signo integral; y se obtiene la fórmula (2.11). El integrando al lado derecho de (2.11) es continuo en z , lo cual establece la continuidad de $z \mapsto f'(z)$ para $z \in D$. \square

La Proposición 2.22 muestra que una función diferenciable (en el sentido complejo) es también *continuamente* diferenciable, así que los términos **diferenciable** y **holomorfo** son *sinónimos* para funciones de una variable compleja. El siguiente resultado establece que los términos **holomorfo** y **suave** son también sinónimos. Además, proporciona una fórmula utilísima para cada una de las derivadas superiores de la función holomorfa.

⁹Aquí $d(z, C) := \inf\{|w-z| : w \in C\}$ denota la **distancia** del punto z al círculo C .

Proposición 2.23 (La fórmula integral de Cauchy). *Una función holomorfa $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ en un abierto $U \subset \mathbb{C}$ es indefinidamente diferenciable en U . Además, si C es un círculo tal que $C \cup I(C) \subset U$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ la n -ésima derivada $f^{(n)}$ obedece la fórmula:*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw \quad \text{para } z \in I(C). \quad (2.12)$$

Demostración. Los casos $n = 0$ y $n = 1$ de esta fórmula ya han sido demostrados en el Teorema 2.21 y la Proposición 2.22.

Los demás casos siguen por inducción sobre n . Supóngase que f es $(n-1)$ veces diferenciable y que obedece (2.12) con $n-1$ en lugar de n . Entonces

$$\frac{f^{(n-1)}(z+\eta) - f^{(n-1)}(z)}{\eta} = \frac{(n-1)!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{\eta} \left(\frac{1}{(w-z-\eta)^n} - \frac{1}{(w-z)^n} \right) dw$$

para $z \in D$ y $|\eta| < \delta < d(z, C)$, usando las notaciones de la demostración anterior. Al escribir $u := 1/(w-z-\eta)$ y $v := 1/(w-z)$, la fórmula

$$u^n - v^n = (u-v)(u^{n-1} + u^{n-2}v + \dots + uv^{n-2} + v^{n-1})$$

muestra que

$$\frac{f^{(n-1)}(z+\eta) - f^{(n-1)}(z)}{\eta} = \frac{(n-1)!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{(w-z-\eta)(w-z)} \left(\sum_{k=0}^{n-1} u^k v^{n-1-k} \right) dw.$$

Al dejar $\eta \rightarrow 0$ con $|\eta| < \delta$, cada $u^k v^{n-1-k}$ tiende a $v^{n-1} = 1/(w-z)^{n-1}$ y el integrando al lado derecho permanece acotado (garantizando la convergencia de la integral), de modo que el lado izquierdo converge a $f^{(n)}(z)$ y la integral converge al lado derecho de (2.12). \square

Corolario 2.24 (Desigualdades de Cauchy). *Si f es una función holomorfa en un abierto que incluye un disco cerrado $\bar{D}(\alpha; R)$, y si $|f(z)| \leq M$ para $|z - \alpha| = R$, entonces las siguientes desigualdades son válidas, para cada $n \in \mathbb{N}$:*

$$|f^{(n)}(\alpha)| \leq \frac{n!M}{R^n}. \quad (2.13)$$

Demostración. Es cuestión de aplicar la fórmula integral de Cauchy en el círculo $C = \{z : |z - \alpha| = R\}$:

$$\begin{aligned} |f^{(n)}(\alpha)| &= \left| \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-\alpha)^{n+1}} dz \right| = \frac{n!}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\alpha + Re^{i\theta})}{R^{n+1} e^{i(n+1)\theta}} iRe^{i\theta} d\theta \right| \\ &\leq \frac{n!}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|f(\alpha + Re^{i\theta})|}{R^{n+1}} R d\theta \leq \frac{n!}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{M}{R^n} d\theta = \frac{n!}{2\pi} \frac{2\pi M}{R^n}. \quad \square \end{aligned}$$

Proposición 2.25. Si f es una función holomorfa en un abierto que incluye un disco cerrado $\bar{D}(\alpha; R)$, entonces f es analítica en el disco abierto $D(\alpha; R)$ ya que coincide con la *serie de Taylor*:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!} (z - \alpha)^n \quad \text{para } |z - \alpha| < R. \quad (2.14)$$

Demostración. Si $|z - \alpha| < R$, las desigualdades de Cauchy implican que la serie de potencias (2.14) converge, por comparación con la serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} |z - \alpha|^n / R^n$. Así, esta serie de potencias tiene radio de convergencia $\geq R$.

Si C es el círculo $|z - \alpha| = R$, la fórmula de Cauchy (2.10) muestra que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{w - z} dw \quad \text{para } |z - \alpha| < R.$$

Ahora bien, para $0 < |z - \alpha| < R$, la identidad

$$\frac{1}{w - z} = \frac{1}{(w - \alpha) - (z - \alpha)} = \frac{1}{w - \alpha} \left/ \left(1 - \frac{z - \alpha}{w - \alpha} \right) \right.$$

permite desarrollar el último integrando en una serie geométrica. Para cada $z \in D(\alpha; R)$ fijo, se obtiene

$$\frac{1}{w - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - \alpha)^n}{(w - \alpha)^{n+1}}.$$

La desigualdad $|z - \alpha| < R = |w - \alpha|$ muestra que esta serie converge absoluta y uniformemente para $w \in C$. Entonces se puede intercambiar la suma con la integral en la expansión

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)(z - \alpha)^n}{(w - \alpha)^{n+1}} dw \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{(w - \alpha)^{n+1}} dw \right) (z - \alpha)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!} (z - \alpha)^n \end{aligned}$$

al aplicar la fórmula integral de Cauchy (2.12) para cada n . □

En consecuencia, los términos **holomorfo** y **analítico** son también sinónimos para funciones de una variable compleja, con la siguiente reservación: la *serie de Taylor*

(2.14) representa la función holomorfa $f(z)$ en un disco circular solamente, mientras que el dominio de f podría ser un abierto cualquiera. Así, por ejemplo, la función $z \mapsto 1/(1-z)$ es holomorfo y por ende analítico en cualquier disco D de centro $\alpha \neq 1$ y de radio $|\alpha - 1|$, pero las diversas series de potencias que representan $1/(1-z)$ en el abierto $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ dependen del disco elegido.

► Una de las consecuencias más importantes de la fórmula de Cauchy es la siguiente *propiedad de rigidez* de las funciones enteras. Una función holomorfa se llama *entera* si su dominio es todo \mathbb{C} . Entre otras cosas, la Proposición 2.25 muestra que una función holomorfa entera posee una serie de Taylor con cualquier centro y radio de convergencia infinito; es decir, coincide con una función *analítica entera* en el sentido de la Definición 1.10. En adelante, se usará el término **función entera**, simplemente.

Teorema 2.26 (Liouville). *Si $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es una función entera acotada, entonces f es una función constante.*

Demostración. Sea $M := \sup_{z \in \mathbb{C}} |f(z)|$, finito por hipótesis. Dado cualquier $z \in \mathbb{C}$, sea C el círculo $\{w \in \mathbb{C} : |w| = r\}$ para algún $r > |z|$. Entonces la fórmula integral de Cauchy implica que

$$f(z) - f(0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \left(\frac{f(w)}{w-z} - \frac{f(w)}{w} \right) dw = \frac{z}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{w(w-z)} dw.$$

Por lo tanto,

$$|f(z) - f(0)| \leq \frac{|z|}{2\pi} 2\pi R \sup_{w \in C} \frac{|f(w)|}{|w||w-z|} \leq \frac{MR|z|}{R(R-|z|)} = \frac{M|z|}{R-|z|}.$$

Para cada z fijo, el lado derecho tiende a 0 cuando $R \rightarrow \infty$ y por tanto $f(z) = f(0)$. Luego f es una función constante. \square

Proposición 2.27 (Teorema Fundamental del Algebra). *Cualquier polinomio no constante en $\mathbb{C}[X]$ tiene un cero en \mathbb{C} .*

Demostración. Sea $p(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$ un polinomio no constante [es decir, $a_n \neq 0$ con $n > 0$] y supóngase —por ahora— que $p(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Entonces la función $f(z) := 1/p(z)$ es una función entera.

Tómese $R > 0$ suficientemente grande tal que $\sum_{k=0}^{n-1} |a_k| R^k \leq \frac{1}{2} |a_n| R^n$. Entonces $|p(z)| \geq |a_n| R^n$ para $|z| = R$. En consecuencia, $|p(z)| \rightarrow \infty$ cuando $|z| \rightarrow \infty$; y por ende, $f(z) \rightarrow 0$ cuando $|z| \rightarrow \infty$. Luego f está acotada: si $|f(z)| \leq 1$ para $|z| > R'$, y si $M := \sup\{|f(z)| : |z| \leq R'\}$, entonces $|f(z)| \leq \max\{1, M\}$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

El Teorema 2.26 muestra que $f(z) \equiv f(0)$ es una constante no nula: $f(0) \neq 0$. Pero esto contradice la convergencia $f(z) \rightarrow 0$ cuando $|z| \rightarrow \infty$. Por tanto, hay al menos un punto $z_1 \in \mathbb{C}$ tal que $p(z_1) = 0$. \square

Corolario 2.28. *Un polinomio de grado $n > 0$ tiene n raíces en \mathbb{C} (no necesariamente distintas).*

Demostración. Por inducción sobre n : si p es un polinomio de grado $n > 0$, entonces p no es constante (un polinomio constante no nulo tiene grado 0), así que hay $z_1 \in \mathbb{C}$ con $p(z_1) \neq 0$. Entonces $p(z) = (z - z_1)q(z)$ donde q es un polinomio de grado $n - 1$. Por la hipótesis inductiva, hay $z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ tal que $q(z) = a_n(z - z_2) \dots (z - z_n)$. Luego

$$p(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n). \quad \square$$

► Hay una especie de teorema inverso al teorema de Cauchy, que en ciertas circunstancias resulta útil para comprobar la holomorficidad de una función compleja.

Teorema 2.29 (Morera). *Si U es una región de \mathbb{C} y si $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ es una función continua tal que $\oint_C f(z) dz = 0$ para toda curva cerrada en U , entonces f es holomorfa en U .*

Demostración. Basta mostrar que f posee una primitiva en U . Tómese $\alpha \in U$ fijo; para $z \in U$, sean $C(z)$ y $C'(z)$ dos curvas (suaves por trozos) desde α a z . Sean C la curva cerrada obtenida al recorrer $C(z)$ seguido por $-C'(z)$. Entonces

$$\int_{C(z)} f(w) dw - \int_{C'(z)} f(w) dw = \oint_C f(w) dw = 0$$

por hipótesis. Entonces la función continua

$$F(z) := \int_{C(z)} f(w) dw$$

está bien definida, es decir, no depende de la curva particular $C(z)$ sino solamente de sus extremos α y z .

Como U es abierto, hay $\delta > 0$ tal que $D(z; \delta) \subseteq U$. Entonces, para $|\eta| < \delta$, sea $C(z + \eta)$ la curva $C(z)$ seguido por el segmento $[z, z + \eta]$. Luego

$$\frac{F(z + \eta) - F(z)}{\eta} = \frac{1}{\eta} \int_{[z, z + \eta]} f(w) dw = \int_0^1 f(z + t\eta) dt \rightarrow f(z) \quad \text{cuando } \eta \rightarrow 0.$$

Luego F es holomorfa en U con $F'(z) \equiv f(z)$. Ahora, la Proposición 2.23 implica que su derivada $f = F'$ es también holomorfa en U . \square

► Es necesario extender el teorema de Cauchy y las fórmulas integrales al caso en donde la integral de línea \oint_C se calcula sobre una curva cerrada C que no necesariamente es simple. La traza de una curva cerrada C (suave por trozos, como siempre) es una parte compacta del plano complejo \mathbb{C} y su complemento $\mathbb{C} \setminus C$ es un abierto, en general desconexo: este complemento es una unión de componentes conexas.¹⁰ En el plano extendido \mathbb{C}_∞ , el complemento $\mathbb{C}_\infty \setminus C$ es también una unión disjunta de componentes; exactamente una de estas contiene el punto ∞ . Luego, en $\mathbb{C} \setminus C$ hay exactamente una componente no acotada; las otras componentes son acotadas.

Lema 2.30. Si C es una curva cerrada, suave por trozos, que no pasa por z , el valor de la integral

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{dw}{w-z}$$

es un número entero.

Demostración. Sea $w: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ una parametrización (regular por trozos) de la curva C , con $w(b) = w(a)$. Defínase una función continua $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ por

$$g(t) := \int_a^t \frac{w'(s)}{w(s) - z} ds.$$

Entonces g es diferenciable en $[a, b]$, excepto en un número finito de valores de t , con derivada

$$g'(t) = \frac{w'(t)}{w(t) - z}.$$

Entonces la función continua

$$h(t) := e^{-g(t)}(w(t) - z)$$

tiene derivada $h'(t) \equiv 0$ para $a \leq t \leq b$. Luego h es una función *constante*, al aplicar el teorema de valor medio para funciones reales a $\Re h$ y a $\Im h$. Fíjese que $g(a) = 0$, así que $h(a) = w(a) - z \neq 0$ y también

$$e^{g(b)} = \frac{w(b) - z}{h(b)} = \frac{w(a) - z}{h(a)} = 1.$$

¹⁰Un abierto $U \subseteq \mathbb{C}$ es una unión disjunta de partes conexas maximales, que son sus **componentes**. Cada componente V es un abierto (porque el espacio topológico \mathbb{C} es localmente conexo) y es maximal: si $V \subseteq W \subseteq U$ con W conexo, entonces $U = W$. El número de componentes de U podría ser infinito, pero es numerable.

Por lo tanto, $g(b) = 2\pi in$ para algún $n \in \mathbb{Z}$; luego,

$$n = \frac{g(b)}{2\pi i} = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{w'(s)}{w(s) - z} ds = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{dw}{w - z}. \quad \square$$

Definición 2.31. Si C es una curva cerrada (suave por trozos) en \mathbb{C} , y si $z \notin C$, el número entero

$$n(C, z) := \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{dw}{w - z} \quad (2.15)$$

es el **índice** del punto z con respecto a la curva cerrada C . Este $n(C, z)$ también se llama el **número de vueltas** de C alrededor del punto z .

Ejemplo 2.32. La parametrización $z: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $z(\theta) := e^{im\theta}$ describe

1. el círculo unitario $|z| = 1$, recorrido m veces contrario a reloj, si $m > 0$;
2. el círculo unitario $|z| = 1$, recorrido $|m|$ veces a favor de reloj, si $m < 0$.

En los dos casos,

$$n(C, 0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{dw}{w} = \int_a^b \frac{im e^{im\theta} d\theta}{e^{im\theta}} = \frac{2\pi im}{2\pi i} = m.$$

Informalmente, el círculo da m vueltas alrededor del origen 0 , contando los giros a favor de reloj con signo negativo. \diamond

Lema 2.33. Si C es una curva cerrada en \mathbb{C} , el índice $z \mapsto n(C, z)$ es constante en cada componente conexa de $\mathbb{C} \setminus C$. El índice es cero en la componente no acotada.

Demostración. La integral al lado derecho de (2.15) es *continua* en la variable z . Como la función $g(z) \equiv n(C, z)$ toma valores en \mathbb{Z} , la preimagen $g^{-1}(m) = g^{-1}((m - \frac{1}{2}, m + \frac{1}{2}))$ es una parte cerrada y también abierta de $\mathbb{C} \setminus C$. Si $g^{-1}(m) \neq \emptyset$, entonces $g^{-1}(m)$ es una unión de componentes conexas de $\mathbb{C} \setminus C$.

La traza de C es compacta en \mathbb{C} , así que es acotada: hay $R > 0$ tal que $C \subset \bar{D}(0; r)$. Si $|z| > r$, entonces la función $w \mapsto 1/(w - z)$ es holomorfa en un abierto que incluye $\bar{D}(0; r)$. Entonces, por el Corolario 2.17, vale $\oint_C (w - z)^{-1} dw = 0$ y por ende $n(C, z) = 0$. Se ha mostrado que $g(z) = 0$ para $|z| > r$: el valor constante de g en la componente no acotada debe ser 0. \square

A veces hay que trabajar con una función holomorfa $f: U \setminus \{\alpha\} \rightarrow \mathbb{C}$, donde α es un punto de una región U en donde $f(\alpha)$ no está definido *a priori*, pero sin embargo el límite $\lim_{z \rightarrow \alpha} f(z)$ existe. Dícese que f posee una **singularidad removible** en α . El siguiente resultado explica cómo remover esta singularidad.

Lema 2.34 (Riemann). *Sea U una región de \mathbb{C} , sea $\alpha \in U$ y sea $f: U \setminus \{\alpha\} \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa y acotada. Si además $\lim_{z \rightarrow \alpha} f(z)$ existe, la extensión $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ definida por la fórmula $f(\alpha) := \lim_{z \rightarrow \alpha} f(z)$ define una función holomorfa en U .*

Demostración. Como una función diferenciable en U es también holomorfa en U , a partir de la Proposición 2.22, basta comprobar la existencia de la derivada $f'(\alpha)$.

Defínase una función $g: U \rightarrow \mathbb{C}$ por

$$g(z) := \begin{cases} (z - \alpha)^2 f(z) & \text{si } z \neq \alpha, \\ 0 & \text{si } z = \alpha. \end{cases}$$

Está claro que g es holomorfa en $U \setminus \{\alpha\}$ y que g es continua en U . Además, como f es acotada en $U \setminus \{\alpha\}$,

$$\lim_{z \rightarrow \alpha} \frac{g(z) - g(\alpha)}{z - \alpha} = \lim_{z \rightarrow \alpha} (z - \alpha) f(z) = 0,$$

así que g es diferenciable en U con $g'(\alpha) = 0$.

Tómese $r > 0$ tal que $D(\alpha; r) \subseteq U$. la Proposición 2.25 muestra que g es analítica en $D(\alpha; r)$, con serie de Taylor

$$g(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{g^{(n)}(\alpha)}{n!} (z - \alpha)^n$$

al notar que $g(\alpha) = 0$ y $g'(\alpha) = 0$. Defínase una función analítica $h: D(\alpha; r) \rightarrow \mathbb{C}$ por

$$h(z) := \sum_{n=2}^{\infty} \frac{g^{(n)}(\alpha)}{n!} (z - \alpha)^{n-2} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{g^{(m+2)}(\alpha)}{(m+2)!} (z - \alpha)^m.$$

Desde luego, vale $g(z) \equiv (z - \alpha)^2 h(z)$, así que $h(z) = f(z)$ para $0 < |z - \alpha| < r$. Como h es analítica y en particular continua en α , vale $h(\alpha) = \lim_{z \rightarrow \alpha} h(z) = f(\alpha)$. Entonces $h(z) = f(z)$ para $|z - \alpha| < r$, así que f es diferenciable en α con $f'(\alpha) = h'(\alpha)$. \square

El lema anterior permite dar una versión más general de la fórmula de Cauchy, al usar curvas cerradas pero no necesariamente simples.

Proposición 2.35. *Si $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa en un disco abierto D y si C es una curva cerrada con traza en D , entonces vale*

$$n(C, z) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{w - z} dw \quad (2.16)$$

para cada $z \in D \setminus C$.

Demostración. Si $z \in D \setminus C$, considérese la función holomorfa $g: D \setminus \{z\} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$g(w) := \frac{f(w) - f(z)}{w - z}.$$

Por el Lema 2.34, esta función se extiende a una función holomorfa $g: D \rightarrow \mathbb{C}$ al colocar $g(z) := f'(z)$. El Corolario 2.17 ahora muestra que

$$\oint_C \frac{f(w) - f(z)}{w - z} dw = \oint_C g(w) dw = 0,$$

así que

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{w - z} dw = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{w - z} dw = n(C, z) f(z). \quad \square$$

Definición 2.36. Dícese que una curva cerrada simple C se recorre (una vez) en el **sentido positivo** si $n(C, z) = +1$ para $z \in I(C)$. En cambio, C se recorre en el **sentido negativo** si $n(C, z) = -1$ para $z \in I(C)$.

Para un círculo, un recorrido positivo va contrario a reloj, mientras que un recorrido negativo va a favor de reloj.

2.4 Representación por series de Laurent

Los resultados de la última sección dan mucha información sobre las funciones holomorfas en un disco, o más generalmente en una región simplemente conexa. Por ejemplo, en un disco abierto, una función holomorfa es analítica ya que queda representada por su serie de Taylor. Sin embargo, también es importante discutir el carácter de una función holomorfa en regiones no simplemente conexas: por ejemplo, en un disco perforado $D(\alpha; r) \setminus \{\alpha\}$ la función $f(z) = 1/(z - \alpha)$ es holomorfa pero no puede representarse por una serie de potencias centrada en α .

Hay una clase de región no simplemente conexa en donde la fórmula de Cauchy admite una generalización sencilla: el *anillo* entre dos círculos concéntricos. El círculo interno puede tener radio cero, de manera que un disco perforado es un caso particular de un anillo.

Notación. Si $\alpha \in \mathbb{C}$ y si $0 \leq R < S$, la región

$$A(\alpha; R, S) := \{z \in \mathbb{C} : R < |z - \alpha| < S\}$$

se llama el **anillo** abierto con centro α y radios R y S .

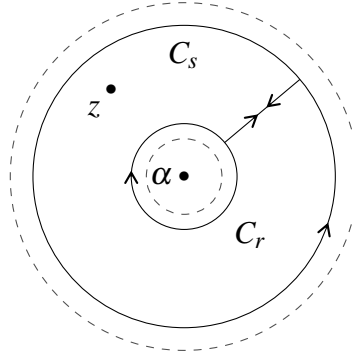


Figura 2.8: Contorno de dos círculos en un anillo circular

Proposición 2.37. Si $f: A(\alpha; R, S) \rightarrow \mathbb{C}$ es una función holomorfa y si $z \in A(\alpha; R, S)$, entonces vale

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_s} \frac{f(w)}{w-z} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(w)}{w-z} dw \quad (2.17)$$

toda vez que $R < r < |z - \alpha| < s < S$, donde C_t denota el círculo $|z - \alpha| = t$, recorrido una vez positivamente; para $t = r, s$.

Demostración. Para algún ángulo fijo θ , sea Γ el contorno cerrado formado por estos cuatro trozos sucesivos (Figura 2.8): un recorrido positivo del círculo C_s con punto inicial y final $\alpha + se^{i\theta}$; el segmento radial $[\alpha + se^{i\theta}, \alpha + re^{i\theta}]$; un recorrido negativo del círculo C_r con punto inicial y final $\alpha + re^{i\theta}$; y el segmento radial $[\alpha + re^{i\theta}, \alpha + se^{i\theta}]$.

La demostración del Teorema 2.21 muestra que la integral de una función holomorfa g sobre Γ puede calcularse como el límite uniforme de integrales sobre contornos simples cerrados Γ_δ obtenidos de Γ al abrir un pasillo delgado de anchura δ alrededor del segmento $[\alpha + re^{i\theta}, \alpha + se^{i\theta}]$. Del teorema de Cauchy se concluye que

$$0 = \oint_{\Gamma} g(w) dw = \oint_{C_s} g(w) dw + \oint_{-C_r} g(w) dw = \oint_{C_s} g(w) dw - \oint_{C_r} g(w) dw, \quad (2.18)$$

porque las integrales sobre los segmentos $[\alpha + se^{i\theta}, \alpha + re^{i\theta}]$ y $[\alpha + re^{i\theta}, \alpha + se^{i\theta}]$ se cancelan.

Para un punto z entre C_r y C_s , defínase

$$g(w) := \frac{f(w) - f(z)}{w - z} \quad \text{para } w \neq z; \quad g(z) := f'(z).$$

Entonces g es holomorfa en el anillo $A(\alpha; R, S)$. La igualdad (2.18) se transforma en

$$\oint_{C_s} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} dw = \oint_{C_r} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} dw,$$

Al recoger los términos con $f(z)$ a un lado, se obtiene

$$f(z) \oint_{C_s} \frac{dw}{w-z} - f(z) \oint_{C_r} \frac{dw}{w-z} = \oint_{C_s} \frac{f(w)}{w-z} dw - \oint_{C_r} \frac{f(w)}{w-z} dw.$$

Ahora bien, como $n(C_s, z) = +1$ pero $n(C_r, z) = 0$ ya que $r < |z - \alpha| < s$, el lado izquierdo se simplifica en $2\pi i f(z)$. Al dividir por $2\pi i$, se obtiene (2.17). \square

La primera integral en (2.17) representa una función holomorfa, no solamente en el anillo $A(\alpha; R, S)$, sino en todo el disco abierto $D(\alpha; S)$. En primer lugar, obsérvese que la integral $\oint_{C_s} f(w)/(w-z) dw$ no depende de s toda vez que $|z - \alpha| < s < S$, al aplicar la fórmula (2.18) con $g(w) := f(w)/(w-z)$ para dos valores del radio s . Luego, al expandir $1/(w-z)$ en serie geométrica alrededor de α como en la demostración de la Proposición 2.25, se obtiene una serie de potencias

$$f_1(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - \alpha)^n \quad \text{donde} \quad a_n := \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_s} \frac{f(w)}{(w - \alpha)^{n+1}} dw.$$

Esta serie es analítica en el disco $D(\alpha; s)$ para cada $s < S$, así que su radio de convergencia es mayor o igual que S .

Por otro lado, la segunda integral en (2.17) no depende de r , para $R < r < |z - \alpha|$. Hay una expansión en serie geométrica

$$-\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(z-\alpha) - (w-\alpha)} = \frac{1}{z-\alpha} \left/ \left(1 - \frac{w-\alpha}{z-\alpha} \right) \right. = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(w-\alpha)^k}{(z-\alpha)^{k+1}}$$

que es válida toda vez que

$$\left| \frac{w-\alpha}{z-\alpha} \right| = \frac{r}{|z-\alpha|} < 1.$$

Se concluye que la función

$$f_2(z) := \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - \alpha)^{-k-1} \quad \text{donde} \quad b_k := -\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_r} f(w) (w - \alpha)^k dw$$

representa una función holomorfa (por ser suma de una serie diferenciable término por término) en la región $|z - \alpha| > r$ para cualquier $r > R$. De hecho, al hacer el cambio de variable $\zeta := \alpha + (z - \alpha)^{-1}$, esta sumatoria es una serie de potencias en la variable $(\zeta - \alpha)$, cuyo radio de convergencia es al menos $1/R$; lo cual justifica la diferenciación término por término cuando $|z - \alpha| > R$. Esta serie de potencias tiene término constante nula; al evaluarla en $\zeta = \alpha$, se obtiene $f_2(\infty) = 0$.

Por construcción, las igualdades

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_s} \frac{f(w)}{w-z} dw, \quad f_2(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

son válidas toda vez que $R < r < |z - \alpha| < s < S$.

Corolario 2.38. Si $0 \leq R < S$, una función holomorfa $f: A(\alpha; R, S) \rightarrow \mathbb{C}$ puede expresarse de manera única como una suma

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) \quad \text{para } R < |z - \alpha| < S,$$

donde f_1 es una función holomorfa en el disco abierto $D(\alpha; S)$ y f_2 es una función holomorfa en $\mathbb{C}_\infty \setminus \bar{D}(\alpha; R)$ con $f_2(\infty) = 0$.

Demostración. Sólo falta comprobar la unicidad. Si $f = g_1 + g_2$ en $A(\alpha; R, S)$, donde g_1 es holomorfa en $D(\alpha; S)$ y g_2 es una función holomorfa en $\mathbb{C}_\infty \setminus \bar{D}(\alpha; R)$ con $g_2(\infty) = 0$, entonces se puede definir una función entera h al colocar

$$h(z) := \begin{cases} f_1(z) - g_1(z) & \text{para } |z - \alpha| < S, \\ g_2(z) - f_2(z) & \text{para } |z - \alpha| > R, \end{cases}$$

porque $f = f_1 + f_2 = g_1 + g_2$ implica $f_1 - g_1 = g_2 - f_2$ en $A(\alpha; R, S)$. La condición $h(\infty) = g_2(\infty) - f_2(\infty) = 0$ dice que $h(z) \rightarrow 0$ cuando $z \rightarrow \infty$ en \mathbb{C} , así que la función entera h está acotada. Por el Teorema 2.26 (el de Liouville), h es constante, así que $h(z) \equiv 0$. En consecuencia, $f_1 = g_1$ en $D(\alpha; S)$ y además $f_2 = g_2$ fuera de $\bar{D}(\alpha; R)$. \square

Al colocar $n = -k - 1$ y $a_{-n} := b_k$ en la serie que representa f_2 , se obtiene un desarrollo de la función holomorfa f en una serie de potencias positivas y negativas.

Definición 2.39. Si $f: A(\alpha; R, S) \rightarrow \mathbb{C}$ es una función holomorfa en un anillo centrado en α , tiene un desarrollo en **serie de Laurent**¹¹

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - \alpha)^n \quad \text{para todo } R < |z - \alpha| < S, \quad (2.19)$$

cuyos coeficientes están dados por

$$a_n := \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{(w - \alpha)^{n+1}} dw \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}, \quad (2.20)$$

donde C es cualquier círculo $|w - \alpha| = t$ con $R < t < S$, recorrido una vez positivamente.

¹¹Pierre Alphonse Laurent obtuvo este desarrollo en 1843, pero su ensayo *Mémoire sur le calcul des variations* que lo contiene no fue publicado y sólo sobrevive una reseña hecha por Cauchy.

Como la serie de Laurent es la suma de una serie de potencias f_1 en la variable $(z - \alpha)$ y otra serie de potencias f_2 en la variable $(z - \alpha)^{-1}$, se ve que la convergencia de (2.19) es *absoluta* en $A(\alpha; R, S)$. Además, si $R < r < s < S$, la serie de Laurent *converge uniformemente en el anillo cerrado* $\bar{A}(\alpha; r, s) := \{z \in \mathbb{C} : r \leq |z - \alpha| \leq s\}$. En efecto, la serie de potencias f_1 converge uniformemente para $|z - \alpha| \leq s$ y la serie f_2 converge uniformemente para $|z - \alpha| \geq r$. Esta f_2 se llama la **parte principal** de la serie de Laurent.

Ejemplo 2.40. Considérese la función

$$f(z) := \frac{1}{z-2} + \frac{1}{z-3}.$$

Esta función es holomorfa en la región $\mathbb{C} \setminus \{2, 3\}$ y además es analítica en el disco abierto $D(0; 2)$. En el anillo $A(0; 2, 3)$, f queda representada por una serie de Laurent $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n$. Para calcular esta serie, obsérvese que $1/(z-3)$ puede ser desarrollada en una serie geométrica

$$\frac{1}{z-3} = -\frac{1}{3} \frac{1}{1-z/3} = -\frac{1}{3} - \frac{z}{3^2} - \frac{z^2}{3^3} - \frac{z^3}{3^4} - \dots$$

mientras $1/(z-2)$ admite otro desarrollo en serie geométrica con potencias negativas de z :

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z} \frac{1}{1-2/z} = \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} + \frac{2^2}{z^3} + \frac{2^3}{z^4} + \dots$$

La suma de estas dos series da la serie de Laurent para $f(z)$, en vista de la unicidad en el Corolario 2.38:

$$f(z) = \dots + 4z^{-3} + 2z^{-2} + z^{-1} - \frac{1}{3} - \frac{1}{9}z^2 - \frac{1}{27}z^3 - \dots$$

En el anillo $A(0; 3, \infty) = \{z : |z| > 3\}$, la función $f(z)$ queda representada por otra serie de Laurent,

$$f(z) = 2z^{-1} + 5z^{-2} + 13z^{-3} + 35z^{-4} + \dots$$

obtenida al combinar series geométricas para $1/(z-2)$ y $1/(z-3)$. ◇

► Un anillo $A(\alpha; 0, S)$, cuyo radio inferior es 0, es un *disco perforado* $D(\alpha; S) \setminus \{\alpha\}$. Si $f : U \setminus \{\alpha\} \rightarrow \mathbb{C}$ es una función holomorfa en una región U salvo posiblemente en α , entonces hay $S > 0$ tal que $D(\alpha; S) \subseteq U$. En particular, f es holomorfa en el disco perforado $D(\alpha; S) \setminus \{\alpha\}$ y posee una representación allí por una serie de Laurent. Dícese que α es una **singularidad aislada** de la función f ; la naturaleza de esta singularidad depende de la parte principal f_2 .

Proposición 2.41 (Riemann). *Sea U una región de \mathbb{C} , sea $\alpha \in U$ y sea $f: U \setminus \{\alpha\} \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa. Si f está acotada en $D(\alpha; R) \setminus \{\alpha\}$ para algún $R > 0$, entonces $\lim_{z \rightarrow \alpha} f(z)$ existe; y al colocar $f(\alpha) := \lim_{z \rightarrow \alpha} f(z)$, la función f se extiende a una función holomorfa $f: U \rightarrow \mathbb{C}$. En tal caso, dícese que α es una **singularidad removible** de f .*

Demostración. La holomorficidad de la función extendida viene del Lema 2.34. En contraste con ese lema, aquí no se supone *a priori* que $\lim_{z \rightarrow \alpha} f(z)$ existe.

La fórmula (2.20) para los coeficientes de la serie de Laurent implica una estimación

$$|a_n| \leq \frac{M_r}{r^n}, \quad \text{con } M_r := \sup\{|f(z)| : |z - \alpha| = r\} \quad \text{para } 0 < r < R,$$

por la demostración del Corolario 2.24, aunque ahora $n \in \mathbb{Z}$.

Si $M := \sup\{|f(z)| : 0 < |z - \alpha| < r\} < \infty$, entonces $M_r \leq M$ para cada r , así que $|a_n| \leq Mr^{-n}$ para $n \in \mathbb{Z}$ y $0 < r < R$. Si $n < 0$, entonces $r^{-n} \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow 0$; se concluye que $a_n = 0$ para $n < 0$. Entonces *la parte principal de la serie de Laurent es nula* y dicha serie es una serie de potencias convergente $f(z) \equiv f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - \alpha)^n$ para $0 < |z - \alpha| < R$. En particular, $f(z) \rightarrow a_0$ cuando $z \rightarrow \alpha$. \square

Ejemplo 2.42. La función $f(z) := (\text{sen } z)/z$ está definida en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Al dividir la serie de Taylor de $\text{sen } z$ (en el origen) por z , se ve que la serie de Laurent de $f(z)$ alrededor de 0 es una serie de potencias convergente en todo \mathbb{C} :

$$\frac{\text{sen } z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \cdots + \frac{z^{2m}}{(2m+1)!} + \cdots$$

y la singularidad en el origen es removible, al tomar $f(0) := 1$. Como corolario, se obtiene $\lim_{z \rightarrow 0} (\text{sen } z)/z = 1$. \diamond

Definición 2.43. Si $f: U \setminus \{\alpha\} \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa y si $M_r := \sup\{|f(z)| : |z - \alpha| = r\}$ toda vez que $D(\alpha; r) \subseteq U$, entonces ocurre una de tres posibilidades:

- (a) La función $r \mapsto M_r$ está acotada cuando $r \rightarrow 0$; por la Proposición 2.41, la singularidad de f en α es removible.
- (b) La función $r \mapsto M_r$ no está acotada, pero existe $c > 0$ tal que $r \mapsto r^c M_r$ está acotada cuando $r \rightarrow 0$. En este caso, los coeficientes de la serie de Laurent cumplen $|a_n| \leq Mr^{-c-n}$ para alguna constante M ; luego, vale $a_n = 0$ para $n < -c$. Si $m := \min\{k \in \mathbb{N} : a_{-k} \neq 0\}$, entonces la parte principal de la serie de Laurent es un “polinomio” $f_2(z) = a_{-1}(z - \alpha)^{-1} + \cdots + a_{-m}(z - \alpha)^{-m}$; y el límite

$a_{-m} = \lim_{z \rightarrow \alpha} (z - \alpha)^m f(z)$ existe.¹² En este caso, la singularidad de f en α se llama un **polo** de orden m .

- (c) Si $r \mapsto r^c M_r$ no está acotada cuando $r \rightarrow 0$, para todo $c > 0$. En este caso, dicese que f posee una **singularidad esencial** en α . La serie de Laurent correspondiente tiene infinitos coeficientes $a_n \neq 0$ para $n < 0$.

Si f es analítica en α , o tiene una singularidad removible o bien un polo en α , dicese que f es **meromorfa**¹³ en la región U .

Ejemplo 2.44. La función $f(z) := e^{1/z}$ tiene una singularidad esencial en 0, porque es obvio que

$$e^{1/z} = 1 + z^{-1} + \frac{z^{-2}}{2} + \cdots + \frac{z^{-n}}{n!} + \cdots$$

en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

En cambio, una función racional $f(z) = p(z)/q(z)$, donde p, q son polinomios sin factor común, tiene un polo de orden k en α toda vez que q tiene una cero de orden k en α , porque en ese caso $q(z) = (z - \alpha)^k q_k(z)$ con $q_k(\alpha) \neq 0$, $p(\alpha) \neq 0$, lo cual implica que $(z - \alpha)^k f(z) \rightarrow p(\alpha)/q_k(\alpha) \neq 0$ cuando $z \rightarrow \alpha$. La definición de polos y sus órdenes es entonces consistente con la discusión en la Sección 1.4 para funciones racionales.

Cabe notar que una función holomorfa en una región $U \setminus \{\alpha\}$ puede tener una singularidad *no aislada* en α . Un ejemplo sería la función $g(z) := \text{ctg}(1/z)$, con $\alpha = 0$. \diamond

Si α es un polo de f , entonces $|f(z)| \rightarrow \infty$ cuando $z \rightarrow \alpha$ ya que $|a_{-m}(z - \alpha)^{-m}| \rightarrow \infty$; luego, $\lim_{z \rightarrow \alpha} f(z) = \infty$ en la esfera de Riemann \mathbb{C}_∞ . En cambio, si f tiene una singularidad esencial en α , el límite $\lim_{z \rightarrow \alpha} f(z)$ no existe, ni siquiera en \mathbb{C}_∞ . El siguiente resultado sorprendente muestra que la imagen bajo f de cualquier vecindario perforado de α es densa en el plano complejo.¹⁴

Teorema 2.45 (Casorati y Weierstrass). *Si una función holomorfa $f: U \setminus \{\alpha\} \rightarrow \mathbb{C}$ tiene una singularidad esencial en α , entonces, para todo $\beta \in \mathbb{C}$ y cada $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$, hay un punto $z \in U$ tal que*

$$0 < |z - \alpha| < \delta \quad \text{y a la vez} \quad |f(z) - \beta| < \varepsilon.$$

¹²Fijese que $r^m M_r \rightarrow |a_{-m}|$, así que se puede tomar $c = m \in \mathbb{N}^*$ en la hipótesis.

¹³El prefijo *mero-* viene del griego $\mu\epsilon\rho\omicron\varsigma$ y significa “parcial”.

¹⁴Hay un resultado más fino, el llamada *Gran Teorema de Picard*, que muestra que esta imagen omite a lo sumo un punto de \mathbb{C} .

Demostración. Si así no fuera, habría un punto $\beta \in \mathbb{C}$ y dos números positivos ε y δ tales que

$$0 < |z - \alpha| < \delta \implies |f(z) - \beta| \geq \varepsilon.$$

Considérese la función

$$g(z) := \frac{1}{f(z) - \beta} \quad \text{para } z \in U \setminus \{\alpha\}.$$

Entonces g es holomorfa en $D(\alpha; \delta) \setminus \{\alpha\}$ porque $f(z) \neq \beta$ en este disco perforado. Además, $|g(z)| \leq 1/\varepsilon$ allí; la Proposición 2.41 muestra que g tiene una singularidad removible en α .

Sea $w_0 := \lim_{z \rightarrow \alpha} g(z)$. Si $w_0 \neq 0$, entonces $f(z) \rightarrow \beta + 1/w_0$ cuando $z \rightarrow \alpha$, así que la singularidad de f en α es removible, en vez de esencial.

Si $w_0 = 0$, entonces —por la Proposición 1.18— $g(z) \equiv (z - \alpha)^m h(z)$ para algún $m \in \mathbb{N}^*$, donde h es analítica en $D(0; \delta)$ con $h(\alpha) \neq 0$. Entonces

$$f(z) = (z - \alpha)^{-m} \frac{1}{h(z)} + \beta \quad \text{para } 0 < |z - \alpha| < \delta,$$

así que f tiene un polo de orden m en α , en vez de una singularidad esencial. \square

2.5 Las integrales de contorno

En esta sección, se evaluarán ciertas integrales de funciones que son holomorfas en determinadas regiones, menos en un número finito de singularidades aisladas. Cerca de cada una de estas singularidades, se puede efectuar un desarrollo de Laurent; el primer coeficiente de su parte principal merece un nombre especial.

Definición 2.46. Si f es una función holomorfa en un disco perforado $D(\alpha; R) \setminus \{\alpha\}$, el **residuo** de f en el punto α es el coeficiente a_{-1} de la serie de Laurent de f centrado en α :

$$\operatorname{Res}_{z=\alpha} f(z) := a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz. \quad (2.21)$$

Aquí C puede tomarse como un círculo de radio r , con $0 < r < R$, recorrido una vez contrario a reloj; o más generalmente como cualquier curva cerrada con traza en $D(\alpha; R) \setminus \{\alpha\}$ tal que $n(C; \alpha) = 1$.

La segunda igualdad en (2.21) es una consecuencia de la fórmula siguiente.

Lema 2.47. Si C es el círculo $\{z : |z - \alpha| = r\}$ con $r > 0$ y si $m \in \mathbb{Z}$, entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{dz}{(z - \alpha)^m} = \begin{cases} 1 & \text{si } m = 1, \\ 0 & \text{si } m \neq 1. \end{cases}$$

Demostración. Al parametrizar C por $\theta \mapsto \alpha + re^{i\theta}$, es fácil evaluar la integral:¹⁵

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{dz}{(z - \alpha)^m} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{re^{i\theta} d\theta}{r^m e^{im\theta}} = \frac{1}{2\pi r^{m-1}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(m-1)\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{\pi r^{m-1}} \int_0^{\pi} \cos((m-1)\theta) d\theta = \delta_{m-1,0} = \delta_{m,1}. \end{aligned}$$

En el cálculo, se usa $e^{-i(m-1)\theta} = \cos((m-1)\theta) - i\sin((m-1)\theta)$, notando que las funciones de variable real cos y sen son, respectivamente, par e impar. \square

Para curvas cerradas más generales que no pasan por α , el lema anterior admite la generalización siguiente.

Lema 2.48. Si C es una curva cerrada suave que no pasa por el punto $\alpha \in \mathbb{C}$ y si $m \in \mathbb{Z}$, entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{dz}{(z - \alpha)^m} = \begin{cases} n(C, \alpha) & \text{si } m = 1, \\ 0 & \text{si } m \neq 1. \end{cases}$$

Demostración. El caso $m = 1$ es el Lema 2.30, ya mostrado. En el caso $m \neq 1$, la función $f(z) := (z - \alpha)^{-m}$ admite una primitiva $F(z) := (z - \alpha)^{1-m}/(1-m)$ en $\mathbb{C} \setminus \{\alpha\}$, así que $\oint_C (z - \alpha)^{-m} dz = 0$ por el Corolario 2.13. \square

El siguiente resultado se conoce como el **teorema de los residuos**.

Teorema 2.49. Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ una región simplemente conexa y sea f una función holomorfa en U salvo por un número finito de singularidades aisladas $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in U$. Si C es una curva cerrada con traza en U que no pasa por los puntos α_k , entonces

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^m n(C, \alpha_k) \operatorname{Res}_{z=\alpha_k} f(z). \quad (2.22)$$

¹⁵En la notación se emplea la **delta de Kronecker**: $\delta_{k,k} = 1$ pero $\delta_{k,l} = 0$ si $k \neq l$.

Demostración. Sea h_k la parte principal de la serie de Laurent de f centrada en α_k ; la función h_k es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{\alpha_k\}$ y la función $f - h_k$ tiene una singularidad removible en α_k . Por tanto, la función

$$g(z) := f(z) - h_1(z) - h_2(z) - \cdots - h_m(z),$$

definido en $U \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$, se extiende a una función holomorfa en U . El teorema de Cauchy en U garantiza que $\oint_C g(z) dz = 0$, así que

$$\oint_C f(z) dz = \sum_{k=1}^m \oint_C h_k(z) dz.$$

Por otro lado, la serie de Laurent $h_k(z) := \sum_{n \geq 1} a_{-n}(z - \alpha_k)^{-n}$ converge uniformemente en cualquier anillo cerrado $\bar{A}(\alpha_k; r, s) = \{z : r \leq |z - \alpha_k| \leq s\}$ con $0 < r < s$. Como la traza de C es un conjunto compacto y $\alpha_k \notin C$, es posible hallar r, s tales que $C \subset \bar{A}(\alpha_k; r, s)$. Por ende, esta serie de Laurent converge uniformemente en C ; luego,

$$\oint_C h_k(z) dz = \oint_C \sum_{n \geq 1} a_{-n}(z - \alpha_k)^{-n} dz = \sum_{n \geq 1} a_{-n} \oint_C (z - \alpha_k)^{-n} dz = 2\pi i a_{-1} n(C, \alpha_k),$$

en vista del Lema 2.48. (Si la singularidad de f en α_k es un *polo*, la sumatoria $\sum_{n \geq 1}$ es finita y la convergencia uniforme en C es supererogatoria.) \square

► En la práctica, se trata de aplicar el teorema anterior en contextos en donde la curva cerrada C es simple, con recorrido en el sentido positivo. En tal caso, $n(C, \alpha_k) = +1$ para $\alpha_k \in I(C)$ y $n(C, \alpha_j) = 0$ para $\alpha_j \in E(C)$; la integral es $2\pi i$ veces *la suma de los residuos* en los puntos α_k en la *región interior* de C .

Además, es útil tener algunas recetas para calcular residuos rápidamente. Los tres fórmulas que siguen son suficientes en muchos casos.

Lema 2.50. *Si f tiene un polo simple en α , su residuo en α está dado por*

$$\operatorname{Res} f(z) = \lim_{z \rightarrow \alpha} (z - \alpha) f(z).$$

Demostración. La función f tiene un polo simple en α si y sólo si

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - \alpha} + g(z),$$

donde g es holomorfo en un vecindario de α . Como $\lim_{z \rightarrow \alpha} (z - \alpha)g(z) = 0$, se obtiene $\lim_{z \rightarrow \alpha} (z - \alpha)f(z) = a_{-1}$.

Además, se ve que la existencia de un polo *simple* en α es equivalente a la existencia del límite, con valor no nulo, $\lim_{z \rightarrow \alpha} (z - \alpha)f(z)$. \square

Corolario 2.51. Si g y h son holomorfos cerca de α y si α es un cero simple de h , entonces

$$\operatorname{Res}_{z=\alpha} \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{g(\alpha)}{h'(\alpha)}.$$

Demostración. La hipótesis dice que $h(z) = (z - \alpha)h_1(z)$ con $h_1(\alpha) \neq 0$, lo cual implica que $h'(z) = h_1(z) + (z - \alpha)h_1'(z)$ y en particular $h'(\alpha) = h_1(\alpha)$. Al aplicar el Lema 2.50, se obtiene

$$\operatorname{Res}_{z=\alpha} \frac{g(z)}{h(z)} = \lim_{z \rightarrow \alpha} (z - \alpha) \frac{g(z)}{h(z)} = \lim_{z \rightarrow \alpha} \frac{(z - \alpha)g(z)}{h(z)} = \frac{g(\alpha)}{h_1(\alpha)} = \frac{g(\alpha)}{h'(\alpha)}. \quad \square$$

Lema 2.52. Si f tiene un polo de orden $m > 1$ en α , su residuo en α está dado por

$$\operatorname{Res}_{z=\alpha} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} g^{(m-1)}(\alpha), \quad \text{donde } g(z) := (z - \alpha)^m f(z). \quad (2.23)$$

Demostración. La hipótesis dice que la función $g(z) := (z - \alpha)^m f(z)$ tiene una singularidad removible en α , con $g(\alpha) \neq 0$. Si la serie de Laurent de f es

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z - \alpha)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z - \alpha)^{m-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z - \alpha} + a_0 + a_1(z - \alpha) + \cdots$$

entonces la serie de Taylor de g es

$$g(z) = a_{-m} + a_{-m+1}(z - \alpha) + \cdots + a_{-1}(z - \alpha)^{m-1} + a_0(z - \alpha)^m + \cdots$$

y para extraer el coeficiente a_{-1} se deriva $(m - 1)$ veces: $g^{(m-1)}(\alpha) = (m - 1)!a_{-1}$. \square

► Ya es hora de aplicar el Teorema 2.49 al cálculo de integrales de una variable *real*.

Ejemplo 2.53. Si $a > 1$, hallar la integral

$$I_a := \int_0^\pi \frac{d\theta}{a + \cos \theta}.$$

Fíjese que el caso $a = 1$ daría una integral impropia divergente:

$$I_1 = \int_0^\pi \frac{d\theta}{1 + \cos \theta} = \frac{1}{2} \int_0^\pi \sec^2 \theta d\theta = \int_0^{\pi/2} \sec^2 \theta d\theta = \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} = +\infty.$$

En cambio, si $a > 1$, el integrando es continuo en $[0, \pi]$.

En el círculo $C = \{z : |z| = 1\}$, vale $\cos \theta = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) = \frac{1}{2}(z + 1/z)$. La segunda opción $\frac{1}{2}(z + 1/z)$ es preferible, por ser (la restricción al círculo de) una función meromorfa.

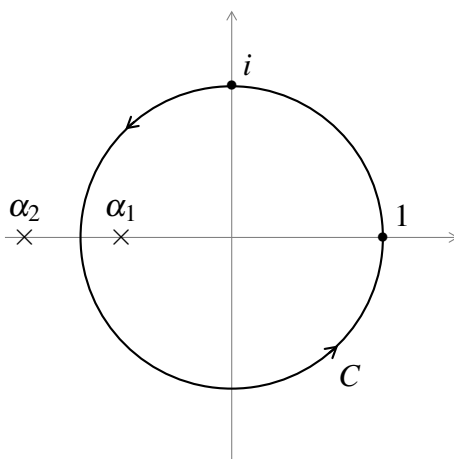


Figura 2.9: Contorno con un polo adentro y otro afuera

Al parametrizar el círculo por $z = e^{i\theta}$, de modo que $dz = ie^{i\theta} d\theta$, se obtiene

$$I_a = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{a + \cos \theta} = \frac{1}{i} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{ie^{i\theta} d\theta}{e^{2i\theta} + 2ae^{i\theta} + 1} = \frac{1}{i} \oint_C \frac{dz}{z^2 + 2az + 1}.$$

La función $z^2 + 2az + 1$ tiene dos ceros, en $z = -a \pm \sqrt{a^2 - 1}$. Estos son los polos del integrando $f(z) := 1/(z^2 + 2az + 1)$. Fíjese que $\alpha_1 := -a + \sqrt{a^2 - 1}$ queda dentro de C pero que $\alpha_2 := -a - \sqrt{a^2 - 1}$ queda fuera de C : véase la Figura 2.9. Como $n(C, \alpha_2) = 0$, el residuo en α_2 no contribuye a la integral.

El residuo de $f(z)$ en α_1 se calcula con el Corolario 2.51:

$$\text{Res}_{z=\alpha_1} \left(\frac{1}{z^2 + 2az + 1} \right) = \frac{1}{2\alpha_1 + 2a} = \frac{1}{2\sqrt{a^2 - 1}}.$$

El teorema del residuo entonces permite evaluar la integral:

$$I_a = \frac{1}{i} \oint_C \frac{dz}{z^2 + 2az + 1} = 2\pi \text{Res}_{z=\alpha_1} \left(\frac{1}{z^2 + 2az + 1} \right) = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}. \quad \diamond$$

Ejemplo 2.54. Evaluar la integral de Riemann impropia

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1 + x^2}.$$

Esta integral puede evaluarse fácilmente al notar que la función $F(x) := \arctg x$ es una primitiva de $f(x) := 1/(1 + x^2)$, así que $I = \arctg(+\infty) - \arctg(-\infty) = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi$. Sin embargo, vale la pena evaluarla con el teorema de los residuos.

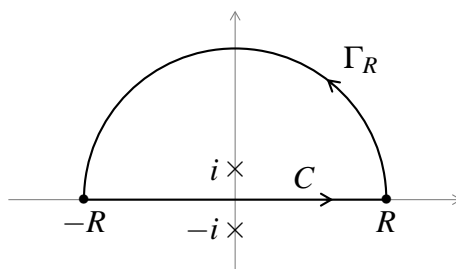


Figura 2.10: Contorno semicircular con diámetro largo

La función meromorfa

$$f(z) := \frac{1}{1+z^2}$$

coincide con el integrando en la recta real \mathbb{R} , así que habría que elegir el contorno C como una curva cerrada (simple) que sustituye el eje x . Tómese C como el segmento $[-R, R] \subset \mathbb{R}$, para algún $R > 0$, seguido por el semicírculo $\Gamma_R = \{Re^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq \pi\}$ (véase la Figura 2.10.)

Los polos de f son i , dentro de C si $R > 1$; y -1 , fuera de C . Ahora

$$\oint_C \frac{dz}{1+z^2} = \int_{[-R,R]} \frac{dz}{1+z^2} + \int_{\Gamma_R} \frac{dz}{1+z^2} = \int_{-R}^R \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^\pi \frac{iRe^{i\theta} d\theta}{1+R^2e^{2i\theta}}.$$

La primera integral a la derecha tiende a I cuando $R \rightarrow \infty$. Habría que asegurar que la integral sobre el semicírculo Γ_R tiende a 0 cuando $R \rightarrow \infty$. Como $|1+R^2e^{2i\theta}| = |R^2+e^{-2i\theta}| \geq R^2-1$ para $R > 1$, se obtiene

$$\left| \int_{\Gamma_R} \frac{dz}{1+z^2} \right| \leq \pi \sup_{0 \leq \theta \leq \pi} \frac{R}{|1+R^2e^{2i\theta}|} \leq \frac{\pi R}{R^2-1} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } R \rightarrow \infty.$$

Por otro lado, la integral sobre C es independiente del radio R , toda vez que $R > 1$:

$$\oint_C \frac{dz}{1+z^2} = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=i} \left(\frac{1}{1+z^2} \right) = 2\pi i \left(\frac{1}{2i} \right) = \pi.$$

En conclusión,

$$I = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{dx}{1+x^2} = \oint_C \frac{dz}{1+z^2} = \pi. \quad \diamond$$

Ejemplo 2.55. El mismo contorno C de la Figura 2.10 sirve para integrar sobre \mathbb{R} ciertas funciones racionales $f(x) = p(x)/q(x)$ toda vez que $\operatorname{gr} q \geq 2 + \operatorname{gr} p$. Por ejemplo, para evaluar

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^4+1},$$

se toma $f(z) := z^2/(z^4 + 1)$. Al estimar su integral sobre el semicírculo Γ_R , se obtiene

$$\left| \int_{\Gamma_R} \frac{z^2 dz}{z^4 + 1} \right| \leq \pi \sup_{0 \leq \theta \leq \pi} \frac{R^3}{|R^4 e^{4i\theta} + 1|} \leq \frac{\pi R^3}{R^4 - 1} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } R \rightarrow \infty.$$

En este caso, los polos (simples) de $f(z)$ son los ceros (simples) de $z^4 + 1$. Para $R > 1$, dos de ellos, $e^{\pi i/4}$ y $e^{3\pi i/4}$, quedan dentro de C . Entonces

$$\begin{aligned} I &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{x^2 dx}{x^4 + 1} = \oint_C \frac{z^2 dz}{z^4 + 1} \\ &= 2\pi i \operatorname{Res}_{z=e^{\pi i/4}} \left(\frac{z^2}{z^4 + 1} \right) + 2\pi i \operatorname{Res}_{z=e^{3\pi i/4}} \left(\frac{z^2}{z^4 + 1} \right) = 2\pi i \left(\frac{i}{4e^{3\pi i/4}} + \frac{-i}{4e^{9\pi i/4}} \right) \\ &= \frac{\pi}{2} (e^{\pi i/4} + e^{-\pi i/4}) = \pi \cos(\pi/4) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Más generalmente, si $p(z) = a_m z^m + \dots + a_1 z + a_0$ y $q(z) = b_n z^n + \dots + b_1 z + b_0$, la estimación de la integral de $f(z) = p(z)/q(z)$ sobre Γ_R se obtiene de

$$\left| \int_{\Gamma_R} \frac{p(z) dz}{q(z)} \right| \leq \pi \sup_{0 \leq \theta \leq \pi} \frac{R |p(Re^{i\theta})|}{|q(Re^{i\theta})|} \sim \frac{\pi |a_m| R^{m+1}}{|b_n| R^n} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } R \rightarrow \infty$$

todo vez que $n > m + 1$, es decir, $n \geq m + 2$. \diamond

Ejemplo 2.56. Si $0 < a < 1$, hallar la integral

$$I_a := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax} dx}{1 + e^x}.$$

Aquí se puede tomar $f(z) := e^{az}/(1 + e^z)$. Esta función tiene polos donde $e^z = -1$, es decir, en los puntos $z = (2m + 1)\pi i$, para $m \in \mathbb{Z}$; estos polos son todos simples. Como hay una infinitud de polos en el eje imaginario, en $\{\pm\pi i, \pm 3\pi i, \pm 5\pi i, \dots\}$, el contorno semicircular de la Figura 2.10 no es recomendable.

Sea C el rectángulo con vértices consecutivos $-R, R, R + 2\pi i, -R + 2\pi i$. Entonces C es una curva cerrada, suave por trozos, que encierra el polo πi de $f(z)$ pero ningún otro: véase la Figura 2.11. El residuo en este polo simple es

$$\operatorname{Res}_{z=\pi i} \left(\frac{e^{az}}{1 + e^z} \right) = \lim_{z \rightarrow \pi i} (z - \pi i) \frac{e^{az}}{1 + e^z} = e^{a\pi i} \lim_{z \rightarrow \pi i} \frac{z - \pi i}{e^z - e^{\pi i}} = e^{a\pi i} \frac{1}{e^{\pi i}} = -e^{a\pi i},$$

al evaluar la derivada de e^z en $z = \pi i$. Por lo tanto,

$$\oint_C \frac{e^{az}}{1 + e^z} dz = -2\pi i e^{a\pi i}.$$

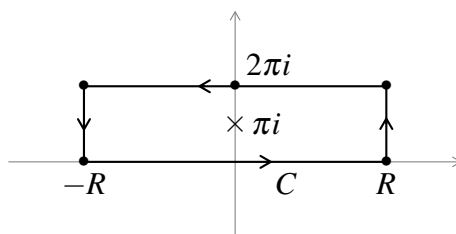


Figura 2.11: Contorno rectangular que encierra un solo polo

La integral deseada es el límite, cuando $R \rightarrow \infty$, de la integral de f sobre el segmento $[-R, R]$. (Esta integral impropia existe y es finita porque $a < 1$). Habría que mostrar que las integrales sobre los otros segmentos de C son despreciables para R grande. Pero resulta que esto no es cierto: en el segmento $[R + 2\pi i, -R + 2\pi i]$ se ve que

$$\int_{[R+2\pi i, -R+2\pi i]} \frac{e^{az}}{1+e^z} dz = \int_R^{-R} \frac{e^{a(x+2\pi i)}}{1+e^x} dx = -e^{2a\pi i} \int_{-R}^R \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx,$$

así que este segmento contribuye un monto de $-e^{2a\pi i} I_a$ a la integral sobre C , cuando $R \rightarrow \infty$.

No obstante, las integrales sobre los lados verticales pueden estimarse por

$$\left| \int_{[R, R+2\pi i]} \frac{e^{az}}{1+e^z} dz \right| \leq \int_0^{2\pi} \left| \frac{e^{a(R+it)}}{1+e^{R+it}} \right| dt \leq C e^{-(1-a)R} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } R \rightarrow \infty,$$

para alguna constante $C > 0$, ya que $a < 1$. Una estimación similar muestra que la integral sobre $[-R + 2\pi i, -R]$ tiende a 0 cuando $R \rightarrow \infty$.

En consecuencia,

$$I_a - e^{2a\pi i} I_a = \oint_C \frac{e^{az}}{1+e^z} dz = -2\pi i e^{a\pi i},$$

y por lo tanto,

$$I_a = -2\pi i \frac{e^{a\pi i}}{1 - e^{2a\pi i}} = \frac{2\pi i}{e^{a\pi i} - e^{-a\pi i}} = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi a}. \quad \diamond$$

► En los tres ejemplos anteriores, ciertas integrales impropias de Riemann fueron calculados usando la relación

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx. \quad (2.24)$$

Esta relación ciertamente es válida *si se sabe de antemano que la integral impropia existe*. Si f es una función continua sobre \mathbb{R} , la integral impropia se define por

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R f(x) dx + \lim_{S \rightarrow \infty} \int_{-S}^0 f(x) dx,$$

donde los parámetros R y S son independientes. Está claro que se puede tomar $S = R$, como caso particular para evaluar la integral impropia, si los dos límites existen. También es evidente que la fórmula (2.24) define la integral impropia *si f es una función par*, es decir, $f(-x) \equiv f(x)$ para $x \in \mathbb{R}$. En cambio, si f no es par, podría ser que el lado derecho de (2.24) existe —y coincide con el resultado de un cálculo de una integral de contorno— aunque la integral impropia no existe. En tal caso, dicho lado derecho merece un nombre especial.

Definición 2.57. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua; entonces la integral de Riemann $\int_a^b f(x) dx$ existe para cada subintervalo compacto $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Si el límite al lado derecho de (2.24) existe, este límite se llama el **valor principal** (de Cauchy) de la integral de f sobre \mathbb{R} :

$$\text{P} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx := \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx. \quad (2.25)$$

Si la integral impropia de Riemann $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ también existe, entonces coincide con su valor principal.

Si $a < c < b$ y si $g: [a, b] \setminus \{c\} \rightarrow \mathbb{C}$ es una función continua, la integral de Riemann impropia

$$\int_a^b g(x) dx := \lim_{h \downarrow 0} \int_a^{c-h} g(x) dx + \lim_{k \downarrow 0} \int_{c+k}^b g(x) dx$$

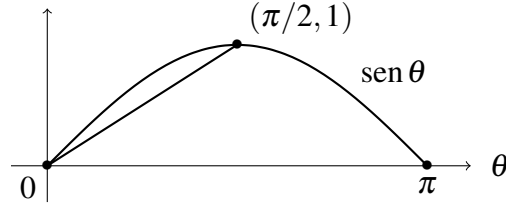
existe si y sólo si los dos límites a la derecha existen. El **valor principal** de esta integral es el siguiente límite, si existe:

$$\text{P} \int_a^b g(x) dx := \lim_{h \downarrow 0} \left(\int_a^{c-h} g(x) dx + \int_{c+h}^b g(x) dx \right). \quad (2.26)$$

Por ejemplo, la integral impropia $\int_{-1}^1 x^{-1} dx$ no existe, pero

$$\text{P} \int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = \lim_{h \downarrow 0} (\log h - \log h) = 0.$$

► Antes de abordar el siguiente ejemplo, conviene mencionar un importante *Lema de Jordan*.


 Figura 2.12: Concavidad del seno en el intervalo $[0, \pi]$

Lema 2.58 (Jordan). Si Γ_R es el semicírculo $\{Re^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq \pi\}$, y si h es una función continua en $\{z \in \mathbb{C} : \Im z \geq 0, |z| \geq R_0\}$ tal que $\sup\{|h(z)| : z \in \Gamma_R\} \rightarrow 0$ cuando $R \rightarrow \infty$, entonces

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} e^{itz} h(z) dz = 0, \quad \text{para cada } t > 0.$$

Demostración. Al escribir $M_R = \sup\{|h(z)| : z \in \Gamma_R\}$, se obtiene

$$\left| \int_{\Gamma_R} e^{itz} h(z) dz \right| \leq \int_0^\pi |e^{itR(\cos\theta + i\sin\theta)} h(Re^{i\theta})| R d\theta \leq \int_0^\pi e^{-tR\sin\theta} M_R R d\theta.$$

Como $\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$, la integral a la derecha es igual a

$$2 \int_0^{\pi/2} e^{-tR\sin\theta} M_R R d\theta.$$

La concavidad de la función seno en $[0, \frac{\pi}{2}]$, debido a $(\sin\theta)'' = -\sin\theta \leq 0$, implica que el segmento desde $(0,0)$ a $(\frac{\pi}{2}, 1)$ queda por debajo del grafo del seno (Figura 2.12). En consecuencia,

$$\sin\theta \geq \frac{\theta}{\pi/2} = \frac{2\theta}{\pi} \quad \text{para } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Por lo tanto,

$$\left| \int_{\Gamma_R} e^{itz} h(z) dz \right| \leq 2RM_R \int_0^{\pi/2} e^{-2tR\theta/\pi} d\theta = \frac{\pi M_R}{t} (1 - e^{-tR}) \rightarrow 0 \quad \text{cuando } R \rightarrow \infty,$$

porque $M_R \rightarrow 0$ por hipótesis. \square

Lema 2.59. Sea f una función meromorfa en $D(\alpha; r)$ que tiene un único polo simple en α , con residuo a_{-1} . Si $\Gamma_\varepsilon = \{\alpha + \varepsilon e^{i\theta} : \varphi \leq \theta \leq \psi\}$ es un arco de círculo centrado en α , entonces

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} f(z) dz = ia_{-1}(\psi - \varphi).$$

Demostración. Como el polo de f en α es simple, hay una función holomorfa g en $D(\alpha; r)$ tal que $f(z) \equiv a_{-1}(z - \alpha)^{-1} + g(z)$. Si $M := \sup\{|g(z)| : |z - \alpha| \leq r/2\}$, entonces para $0 < \varepsilon \leq r/2$ resulta que

$$\left| \int_{\Gamma_\varepsilon} g(z) dz \right| \leq M\varepsilon(\psi - \varphi),$$

lo cual es despreciable cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. Al parametrizar la curva por el ángulo θ , también se obtiene

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{a_{-1}}{z - \alpha} dz = \int_\varphi^\psi \frac{ia_{-1}\varepsilon e^{i\theta} d\theta}{\varepsilon e^{i\theta}} = ia_{-1}(\psi - \varphi). \quad \square$$

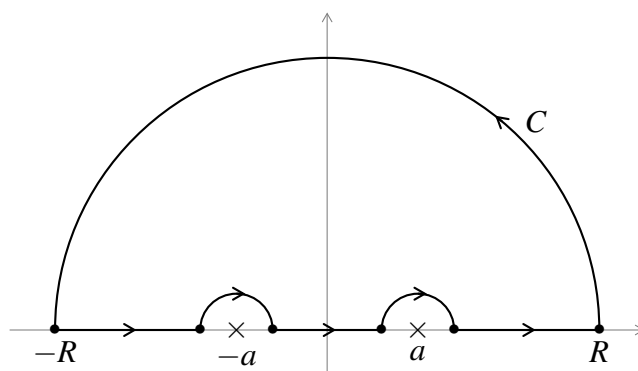


Figura 2.13: Contorno semicircular con dos desviaciones

Ejemplo 2.60. Si $a > 0$, hallar el valor principal de Cauchy de la integral

$$\text{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x dx}{a^2 - x^2}.$$

Esta integral impropia converge en $\pm\infty$, porque $\int_R^\infty x^{-2} dx = 1/R \rightarrow 0$ cuando $R \rightarrow \infty$. Sin embargo, el integrando es singular en $x = \pm a$; el valor principal es del tipo (2.26) tanto en $c = a$ como en $c = -a$.

La función $\cos x/(a^2 - x^2)$ es la parte real, cuando $x \in \mathbb{R}$, de la función

$$f(z) := \frac{e^{iz}}{a^2 - z^2},$$

que es meromorfa en \mathbb{C} , con polos (simples) en $z = a$ y $z = -a$. Del Corolario 2.51, se ve que

$$\text{Res}_{z=a} \frac{e^{iz}}{a^2 - z^2} = -\frac{e^{ia}}{2a}, \quad \text{Res}_{z=-a} \frac{e^{iz}}{a^2 - z^2} = \frac{e^{-ia}}{2a}.$$

Sin embargo, el contorno $[-R, R] \cup \Gamma_R$ de la Figura 2.10 atraviesa los polos si $R > a$; por ahora, es preferible evitar esa circunstancia. Lo que corresponde es modificar ese contorno, al rodear cada polo por un semicírculo de radio pequeño ε —recorridos a favor de reloj— para así obtener el contorno C de la Figura 2.13, que deja los polos en su región exterior. Como $n(C, a) = n(C, -a) = 0$, los residuos no contribuyen a la integral, así que

$$\oint_C \frac{e^{iz} dz}{a^2 - z^2} = 0. \tag{2.27}$$

Ahora bien: hay que calcular la contribución de cada semicírculo a esta integral nula. En primer lugar, al tomar $h(z) := 1/(a^2 - z^2)$ en el Lema 2.58 de Jordan, donde $M_R \leq 1/(R^2 - a^2) \rightarrow 0$ cuando $R \rightarrow \infty$, se obtiene

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz} dz}{a^2 - z^2} = 0.$$

La integral de los semicírculos pequeño alrededor de los polos dan $(-\pi i)$ veces el residuo en cada caso, por el Lema 2.59, habida cuenta del recorrido *a favor de reloj* en cada caso. Sus contribuciones a la integral (2.27), al dejar $\varepsilon \rightarrow 0$, son

$$-\frac{e^{ia}}{2a}(-\pi i) + \frac{e^{-ia}}{2a}(-\pi i) = -\pi \frac{\text{sen } a}{a}.$$

Al restar estos términos de la integral de contorno (2.27), queda el valor principal de la integral sobre \mathbb{R} :

$$\pi \frac{\text{sen } a}{a} = \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \varepsilon \downarrow 0}} \left(\int_{-R}^{-a-\varepsilon} \frac{e^{ix} dx}{a^2 - x^2} + \int_{-a+\varepsilon}^{a-\varepsilon} \frac{e^{ix} dx}{a^2 - x^2} + \int_{a+\varepsilon}^R \frac{e^{ix} dx}{a^2 - x^2} \right) = \text{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix} dx}{a^2 - x^2}.$$

Al tomar sus partes reales, se obtiene, finalmente:

$$\text{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x dx}{a^2 - x^2} = \pi \frac{\text{sen } a}{a}. \quad \diamond$$

Ejemplo 2.61. Comprobar la evaluación de esta integral de Riemann impropia:

$$\int_0^{\infty} \frac{\text{sen } x}{x} dx = \frac{\pi}{2}. \tag{2.28}$$

Como la función real $x \mapsto (\text{sen } x)/x$ es *par*, bastaría comprobar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen } x}{x} dx = \pi$$

y luego dividir por 2. Sin embargo, no es evidente que estas integrales impropias convergen. De hecho, la función $(\operatorname{sen} x)/x$ no es integrable sobre \mathbb{R} en el sentido de Lebesgue, porque la integral de su valor absoluto $\int_0^\infty x^{-1} |\operatorname{sen} x| dx$ diverge. (Este ejemplo indica que la integral de Riemann no queda desplazada por la de Lebesgue, en general.)

De nuevo, para poder aplicar el Lema de Jordan sobre Γ_R , es preferible reemplazar $(\operatorname{sen} x)/x$ por e^{ix}/x , para después tomar partes imaginarias. Sin embargo, la función

$$\frac{e^{iz}}{z} = \frac{\cos z}{z} + i \frac{\operatorname{sen} z}{z}$$

tiene un polo (simple) en 0. Como en el ejemplo anterior, se podría usar un contorno semicircular con una entradita cerca del polo en 0. Una alternativa mejor es usar la función

$$f(z) := \frac{e^{iz} - 1}{z}$$

con una singularidad removible en 0 —fíjese que su parte imaginaria en \mathbb{R} es también $(\operatorname{sen} x)/x$. Ya se puede usar el contorno $C = [-R, R] \cup \Gamma_R$ de la Figura 2.10. Como $f(z)$ es holomorfa en el interior de C , su integral se anula:

$$0 = \oint_C \frac{e^{iz} - 1}{z} dz = \int_{-R}^R \frac{e^{ix} - 1}{x} dx + \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz} - 1}{z} dz.$$

Entonces

$$\int_{-R}^R \frac{e^{ix} - 1}{x} dx = \int_{\Gamma_R} \frac{1 - e^{iz}}{z} dz = \int_{\Gamma_R} \frac{dz}{z} - \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz} dz}{z}.$$

La primera integral a la derecha vale $i\pi$ por cálculo directo; la segunda es despreciable para R grande, por el Lema de Jordan. De hecho, se puede hacer una estimación más explícita:

$$\left| \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz} dz}{z} \right| \leq \int_0^\pi e^{-R \operatorname{sen} \theta} d\theta \leq 2 \int_0^{\pi/2} e^{-2R\theta/\pi} d\theta < \frac{\pi}{R}.$$

De ahí se obtiene la desigualdad

$$\left| \int_{-R}^R \frac{e^{ix} - 1}{x} dx - i\pi \right| < \frac{\pi}{R}.$$

En vista de que $|\Im z| \leq |z|$, se concluye que

$$\left| \int_{-R}^R \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx - \pi \right| < \frac{\pi}{R} \quad \text{y también} \quad \left| \int_0^R \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx - \frac{\pi}{2} \right| < \frac{\pi}{2R}.$$

Al dejar $R \rightarrow \infty$, se obtiene el resultado (2.28) y también la existencia de esta integral impropia de Riemann. \diamond

2.6 El principio del argumento y sus consecuencias

Las integrales de contorno de las funciones meromorfas reducen el cálculo de una integral de línea a una suma, generalmente finita, de residuos en los polos dentro del contorno. Hay una variante de este procedimiento que requiere la identificación de los *ceros* de la función meromorfa, además de sus *polos*. Es importante notar que dichos ceros, al igual que sus polos, deben ser aislados.

Proposición 2.62. Si $U \subseteq \mathbb{C}$ es una región y si $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ es una función holomorfa no constante, entonces los ceros de f son aislados: es decir, si $\alpha \in U$ satisface $f(\alpha) = 0$, entonces hay $\delta > 0$ tal que $D(\alpha; \delta) \subseteq U$ y $f(z) \neq 0$ para $0 < |z - \alpha| < \delta$.

Demostración. En la Proposición 1.18, ya se ha notado que una función analítica no constante en un disco abierto debe tener ceros aislados. Se trata entonces de extender este resultado al caso de dominios más generales.

Dado $\alpha \in U$ con $f(\alpha) = 0$, hay $r > 0$ tal que $D(\alpha; r) \subseteq U$. Por la Proposición 2.25, f es analítico en $D(\alpha; r)$. La Proposición 1.18 entonces implica que hay δ con $0 < \delta \leq r$ tal que $f(z) \neq 0$ para $0 < |z - \alpha| < \delta$; o bien, de lo contrario, que $f(z) \equiv f(\alpha) = 0$ para $z \in D(\alpha; r)$.

En el segundo caso, la serie de Taylor de f , centrada en α se anula, así que $f^{(n)}(z) \equiv 0$ en $D(\alpha; r)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Defínase $V := \{z \in U : f^{(n)}(z) = 0 \text{ para cada } n\}$. Como cada $f^{(n)}$ es una función continua, V es una parte cerrada de U (es decir, $V = B \cap U$ para alguna parte cerrada B en \mathbb{C}). Por otro lado, si $\beta \in V$, entonces $\beta \in U$ y la serie de Taylor de f centrada en β se anula en algún disco abierto $D(\beta; r_\beta) \subseteq U$; lo cual implica que V es una parte abierta de U . Como U es conexa y $V \neq \emptyset$ puesto que $\alpha \in V$, se concluye que $V = U$; en otras palabras, que f es constante en su dominio U . \square

El siguiente corolario se conoce a veces como el *principio de los ceros aislados*.

Corolario 2.63. Si $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa en una región U y si $f(\alpha_n) = 0$ para una sucesión $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con un punto de acumulación $\beta \in U$, entonces $f(z) \equiv 0$ para $z \in U$.

Demostración. Decir que β es un punto de acumulación de $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ significa que hay una subsucesión $(\alpha_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ con un número infinito de entradas distintas tal que $\alpha_{n_k} \rightarrow \beta$ cuando $k \rightarrow \infty$. Entonces $f(\beta) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(\alpha_{n_k}) = 0$ por la continuidad de f , así que β es un cero no aislado de f . Se concluye que f es idénticamente nula. \square

Definición 2.64. Una función holomorfa no constante $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ tiene un **cero de orden** m en $\alpha \in U$, con $m \in \mathbb{N}^*$, si $f(\alpha) = 0$ y si hay una función holomorfa $g: U \rightarrow \mathbb{C}$

con $g(\alpha) \neq 0$ tal que

$$f(z) = (z - \alpha)^m g(z) \quad \text{para } z \in U. \quad (2.29)$$

Si $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - \alpha)^k$ es la serie de Taylor de f centrada en α , entonces $a_0 = 0$ y m es el menor índice positivo tal que $a_m \neq 0$. Está claro que $g(z) = \sum_{k=m}^{\infty} a_k (z - \alpha)^{k-m}$ cerca de $z = \alpha$; y que $g(z) = (z - \alpha)^{-m} f(z)$ para $z \in U \setminus \{\alpha\}$. Esta función g está bien definida y es holomorfa en U .

► Una función *meromorfa* f en una región U puede tener un juego de polos β_k . La totalidad de estos polos es una parte posiblemente infinita pero discreta en U (los polos son, por definición, singularidades aisladas). Es evidente que los ceros de f no son polos y viceversa. Al quitar los polos de U , lo que queda es una región abierta V en donde f es holomorfa. La Proposición 2.62 dice que los ceros α_j de f son aislados en V , siempre que f no sea una función constante. Por lo tanto, esta Proposición es también aplicable a una función meromorfa no constante: tanto sus ceros como sus polos son aislados en la región U .

Cabe notar también, al examinar el desarrollo de Laurent de f cerca de un *polo* β de orden n , que hay una función holomorfa $h(z)$ con $h(\beta) \neq 0$, definida en un disco abierto $D(\beta; s)$ que no contiene otros polos de f , tal que

$$f(z) = (z - \alpha)^{-n} h(z) \quad \text{para } 0 < |z - \beta| < s. \quad (2.30)$$

El siguiente resultado se llama **el principio del argumento**, por razones discutidas más adelante.

Teorema 2.65. *Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ una región simplemente conexa, y sea $f: U \rightarrow \mathbb{C}_{\infty}$ una función meromorfa no constante, con ceros $\alpha_j \in U$ con órdenes respectivos m_j ; y polos $\beta_k \in U$ con órdenes respectivos n_k . Entonces, si C es una curva cerrada (suave por trozos) con traza en U , que no pasa por cero o polo alguno, la siguiente fórmula es válida:*

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_j n(C, \alpha_j) m_j - \sum_k n(C, \beta_k) n_k. \quad (2.31)$$

Demostración. Los polos de la función f'/f son los polos de f y también los ceros de f . En efecto, si $z_0 \in U$ cumple $f(z_0) \neq 0$, entonces f'/f es holomorfa en un vecindario de z_0 , en donde $f(z) \neq 0$ por continuidad.

Además, cada α_j y cada β_k es un *polo simple* de f'/f . De hecho, en un vecindario de α_j , se ve de (2.29) que $f'(z) = m_j(z - \alpha_j)^{m_j-1} g_j(z) + (z - \alpha_j)^{m_j} g'_j(z)$ y por ende

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m_j}{(z - \alpha_j)} + \frac{g'_j(z)}{g_j(z)}.$$

También, se ve de (2.30) que $f'(z) = -n_k(z - \beta_k)^{-n_k-1} h_k(z) + (z - \beta_k)^{-n_k} h'_k(z)$ en un vecindario de β_k , y por ende

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = -\frac{n_k}{(z - \beta_k)} + \frac{h'_k(z)}{h_k(z)}.$$

Entonces la fórmula (2.31) sigue directamente del Teorema 2.49 “de los residuos”, al notar que

$$\operatorname{Res}_{z=\alpha_j} \frac{f'(z)}{f(z)} = m_j, \quad \operatorname{Res}_{z=\beta_k} \frac{f'(z)}{f(z)} = -n_k. \quad \square$$

La hipótesis de que U sea simplemente conexa es necesaria para aplicar el Teorema 2.49. Entonces la fórmula (2.31) es aplicable a curvas cerradas cualesquiera. Si se trata de integrar sobre una curva cerrada *simple* (un círculo, por ejemplo), es posible obtener una fórmula más sencilla, sin el requisito de conexidad simple de U .

Corolario 2.66. *Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ una región, y sea $f: U \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ una función meromorfa no constante. Sea C una curva cerrada simple, recorrida una vez en el sentido positivo, tal que $C \cup I(C) \subset U$, que no atraviesa los ceros ni los polos de f . Si los ceros en $I(C)$ tienen órdenes respectivos m_j ; y los polos en $I(C)$ tienen órdenes respectivos n_k ; entonces*

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_j m_j - \sum_k n_k. \quad (2.32)$$

El lado derecho es la cantidad total de ceros, menos la cantidad total de polos, dentro de C ; contados con multiplicidad. \square

Ejemplo 2.67. Sea $f(z) = p(z)/q(z)$ una *función racional*. Sus ceros son las raíces α_j del polinomio p y sus polos son las raíces β_k del polinomio q . Entonces hay una constante $c \neq 0$ tal que

$$f(z) = c(z - \alpha_1)^{m_1} \dots (z - \alpha_r)^{m_r} (z - \beta_1)^{-n_1} \dots (z - \beta_s)^{-n_s} \quad (2.33)$$

donde los grados de p y q son $m = m_1 + \dots + m_r$ y $n = n_1 + \dots + n_s$, respectivamente. Fíjese que

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m_1}{z - \alpha_1} + \dots + \frac{m_r}{z - \alpha_r} - \frac{n_1}{z - \beta_1} - \dots - \frac{n_s}{z - \beta_s}.$$

Si C es un círculo de radio suficientemente grande como para encerrar todos los α_j y los β_k , entonces el Corolario 2.66, o bien un cálculo directo con la fórmula integral de Cauchy, muestra que

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = m - n.$$

Falta considerar el cero o polo de f en ∞ ; si $m = n$, entonces $f(\infty) = c \neq 0$ y no hay tal cero o polo. Escribese $g(z) := f(1/z)$; es evidente de (2.33) que si $m < n$, entonces f tiene un cero en ∞ (es decir, g tiene un cero en 0) de orden $n - m$; pero si $m > n$, f tiene un polo en ∞ de orden $m - n$. De este modo se recupera el resultado del Lema 1.23: la suma algebraica del número de ceros y polos de una función racional es cero, cuando se incluye el comportamiento en el punto ∞ . \diamond

► Si una función f es holomorfa, el lado derecho de la fórmula (2.31) se reduce a $\sum_j n(C, \alpha_j) m_j$. Esta expresión cuenta el número de ceros encerrados por la curva C , sin factores de peso si la curva cerrada C es simple. Como se trata de un número entero, debería de permanecer igual, por continuidad, bajo un cambio leve en la función $f(z)$ —su derivada $f'(z)$ y el cociente $f'(z)/f(z)$ también sufren perturbaciones leves. Esto sería acorde con la intuición de que los ceros de $f(z)$ deben de desplazarse por una distancia corta sin cruzar la traza de C , evitando la desaparición de unos ni el brote de otros. Resulta que hay un criterio cuantitativo sencillo para reforzar esa intuición, en la hipótesis del siguiente teorema.

Teorema 2.68 (Rouché). *Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ una región y sea C una curva cerrada simple tal que $C \cup I(C) \subset U$. Si $f, g: U \rightarrow \mathbb{C}$ son dos funciones holomorfas en U tales que*

$$|f(z)| > |g(z)| \quad \text{para todo } z \in C,$$

entonces las funciones f y $(f + g)$ tienen el mismo número de ceros en $I(C)$, contados con multiplicidad.

Demostración. La hipótesis implica que $|f(z)| > 0$ y también que $|f(z) + g(z)| > 0$, para todo $z \in C$, así que ni f ni $f + g$ tiene un cero sobre la curva C . De hecho, si

$$\delta_0 := \inf\{|f(z)| - |g(z)| : z \in C\},$$

entonces $\delta_0 > 0$ porque el ínfimo se alcanza en algún punto de la traza de C , un conjunto compacto; y $|f(z) + g(z)| \geq \delta_0 > 0$ para $z \in C$. El Corolario 2.66 es entonces aplicable para contar el número de sus ceros en la región interior $I(C)$.

Más generalmente, para $0 \leq t \leq 1$, defínase

$$f_t(z) := f(z) + t g(z) \quad \text{para } z \in U.$$

La función f_t es holomorfa en U y cumple

$$|f_t(z)| \geq |f(z)| - t|g(z)| \geq |f(z)| - |g(z)| \geq \delta_0 > 0$$

para $z \in C$. Defínase

$$m(t) := \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'_t(z)}{f_t(z)} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z) + t g'(z)}{f(z) + t g(z)}.$$

El integrando es continuo en $(z, t) \in C \times [0, 1]$, uniformemente en t , así que $t \mapsto m(t)$ es continua en $[0, 1]$. La fórmula (2.32) muestra que cada $m(t) \in \mathbb{N}$. Su continuidad implica entonces que $t \mapsto m(t)$ es constante; en particular, $m(0) = m(1)$. Pero $m(0)$ y $m(1)$ son los números de ceros de f y de $(f + g)$, respectivamente, en $I(C)$. \square

Ejemplo 2.69. ¿Dónde están las raíces del polinomio $p(z) = z^8 + 4z^2 + 1$?

Como $p(-z) \equiv p(z)$, las raíces ocurren en pares $\{\alpha_i, -\alpha_i\}$. En el círculo $|z| = 1.3$, se puede observar que $|z^8| = (1.3)^8 > 8.15$ mientras $|4z^2 + 1| \leq 4|z|^2 + 1 \leq 7.76$, así que $p(z)$ tiene el mismo número de ceros —contados con multiplicidad— en el disco $|z| < 1.3$ que z^8 , es decir, 8 ceros en total.

Por otro lado, en el círculo $|z| = 1$, vale $|4z^2| = 4$ mientras $|z^8 + 1| < |z|^8 + 1 = 2$. Mejor aun, para $|z| = 1.2$, vale $|4z^2| = 5.76$ pero $|z^8 + 1| < |z|^8 + 1 = (1.2)^8 + 1 < 5.3$, así que $p(z)$ tiene el mismo número de ceros en el disco $|z| < 1.2$ que $4z^2$, esto es, solamente 2 ceros. Conclusión: hay dos ceros $\pm\alpha_1$ en el disco $|z| < 1.2$ y otros seis ceros $\pm\alpha_2, \pm\alpha_3, \pm\alpha_4$ en el anillo $1.2 < |z| < 1.3$. \diamond

► Hay una propiedad muy importante de las funciones holomorfas: las que no son constantes son *aplicaciones abiertas*, es decir, llevan partes abiertas de su dominio en partes abiertas de \mathbb{C} ; en particular, la imagen total del dominio es un conjunto abierto en el plano complejo. Hay varias maneras de demostrar este resultado; pero el teorema de Rouché proporciona una prueba rápida y sencilla.

Teorema 2.70. Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ una región y sea $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa no constante. Entonces la imagen $f(U)$ es una parte abierta de \mathbb{C} .

Demostración. Tómesese $\alpha \in U$ y sea $\beta := f(\alpha) \in f(U)$. Hay que mostrar que $f(U)$ incluye un vecindario del punto β .

Como f no es constante en U , la función $h: z \mapsto f(z) - \beta$ no es idénticamente nula en U . Por la Proposición 2.62, hay $r > 0$ tal que $\overline{D}(\alpha; r) \subset U$ y $f(z) - \beta \neq 0$ para $0 < |z - \alpha| \leq r$. En el círculo $|z - \alpha| = r$, la función continua $z \mapsto |h(z)|$ alcanza un mínimo positivo,

$$s := \inf\{|f(z) - \beta| : |z - \alpha| = r\} > 0.$$

Ahora, para cualquier $w \in D(\beta; s)$, se ve que

$$|f(z) - \beta| \geq s > |\beta - w| \quad \text{para} \quad |z - \alpha| = r.$$

Al aplicar el Teorema 2.68 de Rouché a la función h y la función constante $z \mapsto \beta - w$, se concluye que las funciones h y $z \mapsto (f(z) - \beta) + (\beta - w) = f(z) - w$ tienen el mismo número de ceros en el disco abierto $D(\alpha; r)$. Como $h(\alpha) = f(\alpha) - \beta = 0$, hay al menos un punto $z_0 \in D(\alpha; r)$ tal que $f(z_0) - w = 0$, es decir, $f(z_0) = w$.

En resumen, dado $w \in D(\beta; s)$, se ha mostrado que $w \in f(D(\alpha; r)) \subseteq f(U)$; así que $D(\beta; s) \subset f(U)$, como se quiso demostrar. \square

Si V es cualquier parte abierta de U , y si $\beta \in f(V)$, la demostración del Teorema 2.70 también muestra que $f(V)$ es un abierto en \mathbb{C} . En otras palabras: una función holomorfa no constante envía abiertos en abiertos, así que esta función es una **aplicación abierta**.

► Un corolario importante del teorema de la aplicación abierta es el resultado siguiente, conocido como el **teorema del módulo máximo**.

Teorema 2.71. *Si $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ es una función holomorfa no constante en una región $U \subseteq \mathbb{C}$, entonces la función $z \mapsto |f(z)|$ no alcanza un máximo local en U .*

Demostración. Si esta función tuviera un máximo local en un punto $\alpha \in U$, habría un radio $r > 0$ con $D(\alpha; r) \subseteq U$ tal que

$$|f(\alpha)| \geq |f(z)| \quad \text{para} \quad |z - \alpha| < r.$$

Sea $\beta := f(\alpha) \in f(U)$; está claro que $\beta \neq 0$ porque la función f no se anula en $D(\alpha; r)$, por la Proposición 2.62. Además, la relación anterior dice que

$$f(D(\alpha; r)) \subset \overline{D}(0; |f(\alpha)|) = \overline{D}(0; \beta).$$

En particular, el conjunto $f(D(\alpha; r))$ no contendría $(1 + \varepsilon)\beta$ para $\varepsilon > 0$ alguno, y por tanto $f(D(\alpha; r))$ no sería un vecindario de β , contrario al Teorema 2.70. Se concluye que ningún $\alpha \in U$ es un máximo local de $z \mapsto |f(z)|$. \square

Corolario 2.72. Si U es una región acotada en \mathbb{C} , de tal manera que su clausura \bar{U} es compacta, el máximo del módulo de una función continua definida en \bar{U} y holomorfa en U se alcanza en la frontera $\partial U = \bar{U} \setminus U$:

$$\sup\{|f(z)| : z \in \bar{U}\} = \sup\{|f(w)| : w \in \partial U\}.$$

Demostración. El resultado es evidente si f es una función constante. De todos modos, hay un punto $\alpha \in \bar{U}$ con $|f(\alpha)| \geq |f(z)|$ para todo $z \in \bar{U}$, porque una función real continua sobre un compacto alcanza su supremo. Si f no es constante, el Teorema 2.71 dice que $\alpha \notin U$, así que $\alpha \in \partial U$. \square

El teorema del módulo máximo puede proporcionar información sobre una función holomorfa que no sería evidente a simple vista. Un ejemplo clásico de este fenómeno es el célebre **Lema de Schwarz**.

Lema 2.73 (Schwarz). Si $f: D(0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$ es una función holomorfa tal que $f(0) = 0$ y $|f(z)| \leq 1$ para todo $z \in D(0; 1)$, entonces

$$|f(z)| \leq |z| \quad \text{para } |z| < 1; \quad \text{y } |f'(0)| \leq 1. \quad (2.34)$$

Además, si cualquiera de las desigualdades en (2.34) se cumple con igualdad, entonces $f(z) \equiv e^{i\theta} z$ para algún $\theta \in \mathbb{R}$.

Demostración. La condición $f(0) = 0$ implica que la función holomorfa f satisface $f(z) \equiv zg(z)$ donde $g: D(0; 1) \rightarrow \mathbb{C}$ es también holomorfa; es decir, $g(z) := f(z)/z$ tiene una singularidad removible en 0.

Si $0 < r < 1$, la hipótesis $|f(z)| \leq 1$ implica que

$$|g(z)| = \frac{|f(z)|}{|z|} \leq \frac{1}{r} \quad \text{para } |z| = r.$$

El Corolario 2.72 muestra que $|g(z)| < 1/r$ en el disco $D(0; r)$ también. Luego

$$\sup\{|g(z)| : |z| < 1\} \leq \inf\{1/r : 0 < r < 1\} = 1,$$

lo cual establece que $|f(z)| \leq |z|$ cuando $|z| < 1$.

También, al notar que

$$f'(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} g(z) = g(0),$$

se obtiene $|f'(0)| = |g(0)| \leq 1$.

Si $|f(z_0)| = |z_0|$ para algún $z_0 \in D(0; 1)$, entonces $|g(z_0)| = 1$ y por tanto la función $z \mapsto |g(z)|$ alcanza un máximo local en z_0 . El Teorema 2.71 entonces dice que g es una función constante, necesariamente de módulo 1: $g(z) \equiv e^{i\theta}$ para algún $\theta \in \mathbb{R}$. Del mismo modo, si $|f'(0)| = 1$, entonces $|g(0)| = 1$ y $|g|$ alcanza un máximo local en 0; de nuevo, g es constante. \square

► El Lema de Schwarz es importante porque el disco unitario abierto juega un papel notable en la teoría de una variable compleja. Conviene introducir la notación

$$\mathbb{D} := D(0; 1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}.$$

El Lema 2.73 implica que una función holomorfa $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ que cumple $f(0) = 0$, si no es una **rotación** $z \mapsto e^{i\theta}z$, debe cumplir $|f(z)| < |z|$ para $z \in \mathbb{D}$. Esto es el caso, evidentemente, para las *potencias* $f(z) := z^n$, con $n \in \mathbb{N}^*$.

La condición $f(0) = 0$ puede ser modificada, con el uso de las fracciones lineales:

$$s_\alpha(z) := \frac{\alpha - z}{1 - \bar{\alpha}z}, \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{D}. \quad (2.35)$$

Está claro que $s_\alpha(0) = \alpha$, $s_\alpha(\alpha) = 0$ y que el único polo de s_α es $1/\bar{\alpha}$, con $|1/\bar{\alpha}| > 1$. Luego s_α es holomorfa en \mathbb{D} . Además, en el círculo $\mathbb{T} = \{z : |z| = 1\}$, se ve que

$$s_\alpha(e^{i\theta}) = \frac{\alpha - e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}\bar{\alpha}} = -e^{-i\theta} \frac{\alpha - e^{i\theta}}{\bar{\alpha} - e^{-i\theta}}$$

donde la fracción al lado derecho es de la forma $w/\bar{w} \in \mathbb{T}$. Entonces $|s_\alpha(e^{i\theta})| = 1$. El Teorema 2.71 implica que $|s_\alpha(z)| < 1$ para $|z| < 1$, es decir, que $s_\alpha(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$.

La fracción lineal inversa de s_α es $w \mapsto (w - \alpha)/(\bar{\alpha}w - 1) = s_\alpha(w)$; entonces, s_α coincide con su función inversa (!) así que s_α es una *biyección holomorfa* de \mathbb{D} en sí mismo.

Ahora bien, si $g: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ es una función holomorfa tal que $g(\alpha) = \beta$, entonces la composición $f := s_\beta \circ g \circ s_\alpha$ es una función holomorfa $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ con $f(0) = 0$.

► Las fracciones lineales s_α son inyectivas, o bien **univalentes**, como suele decirse en el análisis complejo. Una función holomorfa univalente es una biyección de su dominio en su imagen; como tal, posee una función inversa. No debe sorprender que la función inversa es también holomorfa.

Lema 2.74. *Una función holomorfa univalente $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ posee un inverso holomorfo $g: f(U) \rightarrow U$. Además, la derivada f' no se anula en el dominio U .*

Demostración. Si $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa e inyectiva, obviamente f no es constante. Por el Teorema 2.70, $V := f(U)$ es una parte abierta de \mathbb{C} . Sea $g: V \rightarrow U$ la función inversa de f . Entonces g es *continua* porque f es una aplicación abierta. (En efecto, si $W \subseteq U$ es abierto, entonces $g^{-1}(W) = f(W)$ es abierto en V .)

Si hubiera $\alpha \in U$ con $f'(\alpha) = 0$, la serie de Taylor de f centrada en α muestra que habría $m \geq 2$ en \mathbb{N} y una función h , holomorfa en U , con $h(\alpha) \neq 0$, tales que

$$\begin{aligned} f(z) - f(\alpha) &= (z - \alpha)^m h(z), \\ f'(z) &= (z - \alpha)^{m-1} (mh(z) + (z - \alpha)h'(z)), \end{aligned}$$

para todo $z \in U$. Luego, habría $r > 0$ tal que $f(z) - f(\alpha) \neq 0$ y también $f'(z) \neq 0$ para $0 < |z - \alpha| \leq r$. Si $t := \inf\{|f(z) - f(\alpha)| : |z - \alpha| = r\}$, entonces $t > 0$ y el Teorema 2.68 de Rouché muestra que la función $z \mapsto f(z) - f(\alpha) - \frac{1}{2}t$ tendría m ceros en el disco $D(\alpha; r)$, al igual que la función $z \mapsto f(z) - f(\alpha)$. Estos ceros serían simples, porque la derivada $f'(z)$ de la nueva función sólo se anula en $z = \alpha$. En resumen: la preimagen $f^{-1}(\{f(\alpha) - \frac{1}{2}t\})$ contendría m puntos distintos, contrario a la hipótesis de univalencia.

Para mostrar que g es holomorfa, basta comprobar la existencia de su derivada en cualquier $\beta = f(\alpha) \in V$. Para $\zeta \in \mathbb{C}$ tal que $\beta + \zeta \in V$, hay $\alpha + \eta \in U$ con $\beta + \zeta = f(\alpha + \eta)$ o bien $\alpha + \eta = g(\beta + \zeta)$. La continuidad de g dice que $\eta \rightarrow 0$ cuando $\zeta \rightarrow 0$. Luego

$$\frac{g(\beta + \zeta) - g(\beta)}{\zeta} = \frac{\eta}{f(\alpha + \eta) - f(\alpha)} \rightarrow \frac{1}{f'(\alpha)} \quad \text{cuando } \zeta \rightarrow 0.$$

Entonces $g'(f(\alpha))$ existe — ya que $f'(\alpha) \neq 0$ — con $g'(f(\alpha)) = 1/f'(\alpha)$. \square

Proposición 2.75. Si $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ es una biyección holomorfa, entonces $f(z) \equiv e^{i\theta} s_\alpha(z)$ para algún $\theta \in \mathbb{R}$ y algún $\alpha \in \mathbb{D}$.

Demostración. Hay un único $\alpha \in \mathbb{D}$ con $f(\alpha) = 0$. Sea $h(z) := f(s_\alpha(z))$; entonces $h(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$ y $h(0) = 0$. El Lema 2.73 de Schwarz muestra que $|h(z)| \leq |z|$ para $z \in \mathbb{D}$.

La composición $h = f \circ s_\alpha$ es una biyección sobre \mathbb{D} . Sea $g: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ su función inversa, también holomorfa por el Lema 2.74. Está claro que $g(0) = 0$. Luego, el Lema de Schwarz muestra que $|g(w)| \leq |w|$ para $w \in \mathbb{D}$. Al tomar $w = h(z)$, se concluye que $|h(z)| = |z|$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Por tanto, hay $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $h(z) \equiv e^{i\theta} z$.

Ahora $f = h \circ s_\alpha$ porque s_α es su propio inverso. Luego, $f(z) \equiv e^{i\theta} s_\alpha(z)$. \square

2.7 El logaritmo y las funciones ramificadas

El logaritmo se define en el análisis complejo, al igual que en el análisis real, como la función inversa de la función exponencial. La distinción entre los dos casos es que *la función exponencial compleja no es inyectiva*: la ecuación $e^z = 1$ tiene un juego infinito de raíces $z = 2k\pi i$, con $k \in \mathbb{Z}$.

La función $x \mapsto e^x$, para $x \in \mathbb{R}$, lleva \mathbb{R} en el intervalo real $(0, \infty)$ y es inyectiva, así que la asignación $\text{Log}(e^x) := x$ determina el logaritmo de un número real positivo. Por otro lado, la función $\theta \mapsto e^{i\theta}$ lleva \mathbb{R} en el círculo unitario \mathbb{T} ; la función correspondiente sería $e^{i\theta} \mapsto i\theta$. Al usar la forma polar $z = re^{i\theta}$, su logaritmo debería de ser

$$\log(re^{i\theta}) := \text{Log } r + i\theta, \quad \text{para } re^{i\theta} \neq 0.$$

Evidentemente, esta definición es ambigua, porque $\theta \mapsto e^{i\theta}$ no es uno-a-uno. Evidentemente, hay que usar el *argumento* $\arg(re^{i\theta}) := (\theta \bmod 2\pi) \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, para eliminar esa ambigüedad.

Notación. Escríbase $\mathbb{R}_+ := [0, \infty)$ y $\mathbb{R}_- := (-\infty, 0]$, como semirrectas en el plano complejo. Más generalmente, cualquier semirrecta saliente del origen 0 es de la forma $e^{i\varphi} \mathbb{R}_+ = \{re^{i\varphi} : r \geq 0\}$ para algún ángulo φ . Fíjese que $e^{\pi i} \mathbb{R}_+ = \mathbb{R}_-$.

Definición 2.76. Si $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ es un número complejo fuera del semieje real negativo, es posible expresar $z = re^{i\theta}$ de manera única, con $r > 0$ y $-\pi < \theta < \pi$. El *valor principal de su argumento* es $\text{Arg } z := \theta \in (-\pi, \pi)$. Se define el **valor principal del logaritmo** de z por

$$\text{Log } z := \text{Log } r + i\theta = \text{Log } |z| + i \text{Arg } z,$$

donde $\text{Log } r$ es el único número real tal que $e^{\text{Log } r} = r$. Obsérvese que $\text{Arg } t = -\pi$ está definido para $t \in (-\infty, 0)$, pero no conviene incluir $(-\infty, 0)$ en el dominio de Log porque la función resultante no sería continua en el semieje real negativo.

Más generalmente, se define

$$\log z := \text{Log } |z| + i \arg z \quad \text{para } z \neq 0. \quad (2.36)$$

De esta manera,¹⁶ el logaritmo sería una función de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ en $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. En la práctica, la ambigüedad de la parte imaginaria del logaritmo se resuelve de otro modo. Después de elegir un ángulo fijo φ , se considera el **plano cortado** $\mathbb{C} \setminus e^{i\varphi} \mathbb{R}_+$, el cual es una *región estelar* a partir del punto $z_0 = -e^{i\varphi}$; véase la Figura 2.14. Ahora, al escribir

¹⁶Los textos clásicos hablan de una *función multivaluada*, un término oximorónico.

$\arg(re^{i\theta}) := \theta$ y $\log(re^{i\theta}) := \text{Log } r + i\theta$, con $\varphi < \theta < \varphi + 2\pi$ únicamente, se define **una rama del logaritmo** como función ordinaria en el dominio $\mathbb{C} \setminus e^{i\varphi}\mathbb{R}_+$. (Para cada $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, la sustitución $\varphi \mapsto \varphi + 2k\pi$ define otras ramas del logaritmo con el mismo plano cortado por dominio.)

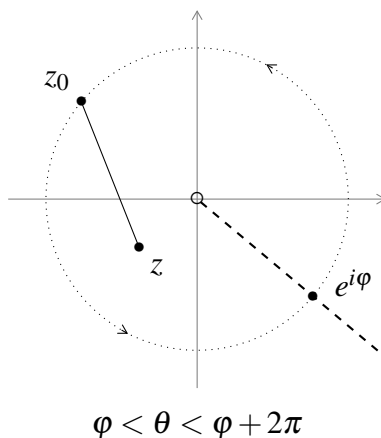


Figura 2.14: Plano cortado a lo largo de una semirrecta

Es importante señalar que la propiedad homomórfica del logaritmo real debe modificarse, según (2.36), en la fórmula: $\log(zw) \equiv \log z + \log w \pmod{2\pi i\mathbb{Z}}$. Para una rama específica, lo que corresponde es la fórmula

$$\log(zw) = \log z + \log w + 2k\pi i \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}.$$

Alternativamente, se puede definir (unas ramas de) el logaritmo al formar una primitiva de la función $1/z$. El dominio debe ser una región *simplemente conexa* U que no contiene el origen 0 . Por ejemplo, el plano cortado $\mathbb{C} \setminus e^{i\varphi}\mathbb{R}_+$ excluye 0 y es una región estelar, luego simplemente conexa. Elíjase, entonces, un punto $z_0 \in U$ y defínase

$$L(z) := \int_{z_0}^z \frac{dw}{w} + \text{Log } |z_0| + i \arg z_0, \quad (2.37)$$

donde $\arg z_0$ aquí denota cualquier ángulo θ_0 tal que $e^{i\theta_0} = z_0/|z_0|$; la notación $\int_{z_0}^z$ denota la integral de línea sobre cualquier curva C en U de z_0 a z , por ejemplo, el segmento $[z_0, z]$ en una región estelar.

La función $g(z) := z^{-1}e^{L(z)}$ tiene derivada

$$g'(z) = -z^{-2}e^{L(z)} + z^{-1}L'(z)e^{L(z)} = (-z^{-2} + z^{-2})e^{L(z)} \equiv 0,$$

así que $g(z) \equiv g(z_0) = 1$, ya que U es conexo. Entonces la función holomorfa $L: U \rightarrow \mathbb{C}$ cumple la ecuación $e^{L(z)} = z$, es decir, es una función inversa de la exponencial en la región U . En otras palabras, $\log z := L(z)$ es una rama del logaritmo con dominio U , simplemente conexo. (Fíjese que la ambigüedad del ángulo θ , hasta sumandos de $2k\pi$, implica que hay varias maneras de elegir esta rama, pero todos difieren por múltiplos constantes de $2\pi i$.) La fórmula (2.37) hace evidente que *cada rama del logaritmo es holomorfa en su dominio*.

Definición 2.77. Si $\alpha \in \mathbb{C}$ y si U es una región simplemente conexa con $0 \notin U$ —en particular, si U es cualquier plano cortado— elíjase una rama del logaritmo en U . La rama correspondiente de la **potencia** $z \mapsto z^\alpha$ se define en U por

$$z^\alpha := \exp(\alpha \log z).$$

Por ejemplo,¹⁷ en el plano cortado $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ se puede definir $z^{1/2} := \exp(\frac{1}{2} \text{Log } z)$, de tal manera que $(re^{i\theta})^{1/2} = \sqrt{r}e^{i\theta/2}$. Sin embargo, al elegir otra rama del logaritmo $\log z := \text{Log } z + 2\pi i$, la fórmula correspondiente sería $(re^{i\theta})^{1/2} = -\sqrt{r}e^{i\theta/2}$. En resumen, la ambigüedad en la definición

$$(re^{i\theta})^{1/2} = \pm\sqrt{r}e^{i\theta/2}$$

es inherente en el escogimiento de la rama del logaritmo: la raíz cuadrada posee dos ramas. En general, si $n \in \mathbb{N}^*$, la raíz enésima $z \mapsto z^{1/n}$ posee n ramas distintas, que difieren entre sí por factores multiplicativos de $e^{2k\pi i/n}$.

► El logaritmo y las potencias no enteras conducen a nuevas clases de integrales de contorno, en las cuales los contornos C están trazados en planos cortados, amén de evitar los polos del integrando.

Ejemplo 2.78. Evaluar la integral de Riemann impropia

$$I := \int_0^\infty \frac{\log x}{(1+x^2)^2} dx.$$

Esta integral impropia converge en el extremo superior ya que el integrando es $O(x^{-4} \log x) = o(x^{-4+\varepsilon})$ para $\varepsilon > 0$. La convergencia en $x = 0$ es menos evidente, pero emergerá del cálculo subsiguiente.

¹⁷En esta discusión, \sqrt{r} denota la raíz cuadrada positiva del número real positivo r .

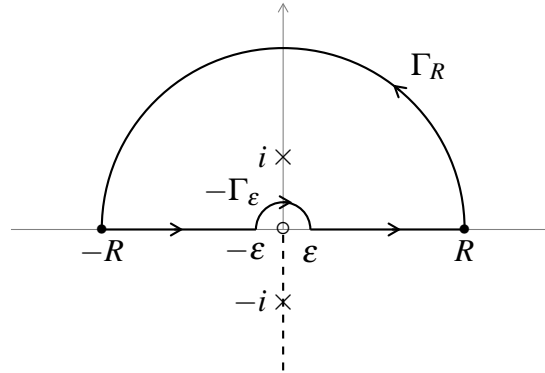


Figura 2.15: Contorno semicircular en un plano cortado

El contorno C será una modificación del contorno $[-R, R] \cup \Gamma_R$ de la Figura 2.10. Para evitar la indefinición del logaritmo en $z = 0$, hay que seguir (en el sentido negativo) un pequeño semicírculo Γ_ε centrado en 0. Luego se corta el plano a lo largo de la recta $e^{-i\pi/2} \mathbb{R}_+$ (Figura 2.15) y se usa la rama del logaritmo dado por

$$\log(re^{i\theta}) := \text{Log } r + i\theta, \quad \text{con } -\pi/2 < \theta < 3\pi/2.$$

Obsérvese que $\log 1 = 0$, $\log i = \pi i/2$, $\log(-1) = \pi i$ para esa rama.

La integral de la función

$$f(z) := \frac{\log z}{(1+z^2)^2}$$

en el contorno cerrado $C := [\varepsilon, R] \cup \Gamma_R \cup [-R, -\varepsilon] \cup (-\Gamma_\varepsilon)$ vale $2\pi i$ veces el residuo en el único polo de f dentro de C , el cual es un polo doble en i . Para calcular este residuo, se usa la fórmula (2.23) con $m = 2$:

$$g(z) := (z-i)^2 f(z) = \frac{\log z}{(z+i)^2},$$

$$\text{Res}_{z=i} f(z) = g'(i) = \left[\frac{1}{z(z+i)^2} - \frac{2 \log z}{(z+i)^3} \right]_{z=i} = \frac{1}{-4i} - \frac{\pi i}{-8i} = \frac{i}{4} + \frac{\pi}{8}.$$

Como ya es tradicional, se muestra que la integral sobre el semicírculo es depreciable para R grande:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_R} \frac{\log z}{(1+z^2)^2} dz \right| &= \left| \int_0^\pi \frac{\log R + i\theta}{(1+R^2 e^{2i\theta})^2} iR e^{i\theta} d\theta \right| \leq \int_0^\pi \frac{R \log R + R\theta}{(R^2 - 1)^2} d\theta \\ &= \frac{\pi R \log R + \pi^2 R/2}{(R^2 - 1)^2} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } R \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Un cálculo similar, usando el límite conocido $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon \log \varepsilon = 0$, muestra que la integral sobre el semicírculo pequeño también es despreciable para ε pequeño:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\log z}{(1+z^2)^2} dz \right| &= \left| \int_0^\pi \frac{\log \varepsilon + i\theta}{(1+\varepsilon^2 e^{2i\theta})^2} i\varepsilon e^{i\theta} d\theta \right| \leq \int_0^\pi \frac{\varepsilon \log \varepsilon + \varepsilon \theta}{(1-\varepsilon^2)^2} d\theta \\ &= \frac{\pi \varepsilon \log \varepsilon + \pi^2 \varepsilon^2 / 2}{(1-\varepsilon^2)^2} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } \varepsilon \downarrow 0. \end{aligned}$$

La integral sobre el contorno C — la cual no depende de ε ni de R — entonces se reduce a dos integrales sobre semirrectas:

$$\oint_C \frac{\log z}{(1+z^2)^2} dz = \int_0^\infty \frac{\log x}{(1+x^2)^2} dx + \int_{-\infty}^0 \frac{\log u}{(1+u^2)^2} du.$$

La primera integral a la derecha es la integral deseada I . Para la segunda, se coloca $u = -x$ y se usa $\log(-x) = \log x + \pi i$ para la rama del logaritmo en uso, así que

$$\oint_C \frac{\log z}{(1+z^2)^2} dz = 2 \int_0^\infty \frac{\log x}{(1+x^2)^2} dx + \int_0^\infty \frac{\pi i}{(1+x^2)^2} dx.$$

Por otro lado, el teorema del residuo muestra que

$$\oint_C \frac{\log z}{(1+z^2)^2} dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=i} f(z) = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{4} i.$$

Al comparar las partes reales e imaginarias de las dos expresiones anteriores, se obtiene la integral deseada y otra integral también, de feria:

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{(1+x^2)^2} dx = -\frac{\pi}{4}, \quad \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^2} = +\frac{\pi}{4}. \quad \diamond$$

Ejemplo 2.79. Calcular las integrales

$$I_a := \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x} dx \quad \text{para } 0 < a < 1.$$

La condición $a < 1$ es necesaria para la convergencia de esta integral impropia en el extremo superior; y la condición $a > 0$ garantiza su convergencia en $x = 0$.

Después de elegir un corte apropiado del plano para definir una rama de la potencia x^{a-1} , la función $f(z) := z^{a-1}/(1+z)$ tendrá un polo simple en $z = -1$. Un corte en la semirrecta \mathbb{R}_- no es aconsejable, porque escondería el residuo. En este caso resulta mejor cortar a lo largo de la semirrecta \mathbb{R}_+ y mover el intervalo $[\varepsilon, R]$ arriba y abajo del corte para obtener la “cerradura” ilustrada en la Figura 2.16.

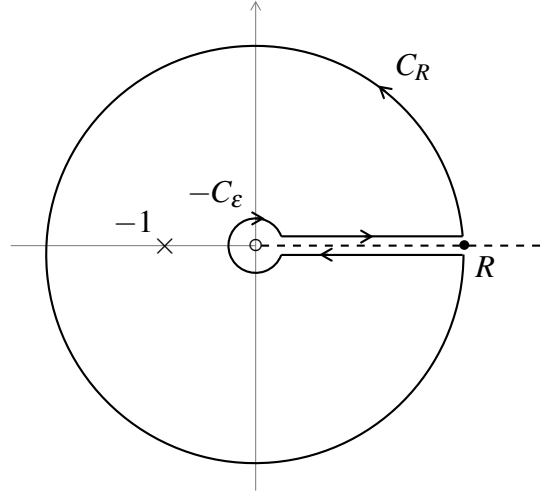


Figura 2.16: Contorno de cerradura en un plano cortado

El contorno simple cerrado C tiene cuatro trozos: el segmento $[\varepsilon + i\delta, R + i\delta]$; un arco grande C_R de un círculo desde $R + i\delta$ hasta $R - i\delta$, rodando en torno al origen para no cruzar el corte \mathbb{R}_+ ; el segmento $[R - i\delta, \varepsilon - i\delta]$; y otro arco grande $-C_\varepsilon$ de círculo, desde $\varepsilon - i\delta$ a $\varepsilon + i\delta$, recorrido a favor de reloj. La integral de línea $\oint_C f(z) dz$ depende solamente del residuo en el polo -1 ; luego se puede dejar $\delta \downarrow 0$ antes de calcular las integrales sobre cada trozo.

Para definir $z^{a-1} := \exp((a-1)\log z)$, tómesese la rama del logaritmo $\log(re^{i\theta}) := \text{Log } r + i\theta$ con $0 < \theta < 2\pi$ en el plano cortado $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$. Fíjese que

$$\log(x + i\delta) \doteq \text{Log } x + i\delta \quad \text{pero} \quad \log(x - i\delta) \doteq \text{Log } x + i(2\pi - \delta), \quad \text{para } x > 0.$$

Por tanto, $(x + i\delta)^{a-1} \rightarrow x^{a-1}$ pero $(x - i\delta)^{a-1} \rightarrow x^{a-1} e^{2\pi i(a-1)}$ cuando $\delta \downarrow 0$. Este es el efecto de cortar el plano en \mathbb{R}_+ .

El residuo en $z = -1$ se calcula fácilmente, habida cuenta de que $\log(-1) = \pi i$:

$$\text{Res}_{z=-1} \frac{z^{a-1}}{1+z} = \lim_{z \rightarrow -1} z^{a-1} = \exp((a-1)\log(-1)) = e^{\pi i(a-1)} = -e^{i\pi a}.$$

Para estimar la integral sobre los arcos circulares, se puede dejar $\delta \downarrow 0$, de modo que C_R y C_ε se vuelven círculos completos. Como $a < 1$, se obtiene

$$\begin{aligned} \left| \oint_{C_R} \frac{z^{a-1}}{1+z} dz \right| &= \left| \int_0^{2\pi} \frac{e^{(a-1)(\log R + i\theta)}}{1 + Re^{i\theta}} iRe^{i\theta} d\theta \right| \\ &\leq \int_0^{2\pi} \frac{R^{a-1}}{R-1} R d\theta = \frac{2\pi R^a}{R-1} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } R \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

De modo similar, debido a $a > 0$, se ve que

$$\left| \int_{C_\varepsilon} \frac{z^{a-1}}{1+z} dz \right| \leq \frac{2\pi\varepsilon^a}{1-\varepsilon} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } \varepsilon \downarrow 0.$$

Luego, al dejar $\varepsilon \downarrow 0$ y $R \rightarrow \infty$, se obtiene

$$\oint_C \frac{z^{a-1}}{1+z} dz = \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x} dx + \int_\infty^0 \frac{x^{a-1} e^{2\pi i(a-1)}}{1+x} dx = (1 - e^{2\pi i(a-1)}) \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x} dx.$$

El teorema del residuo implica que

$$\oint_C \frac{z^{a-1}}{1+z} dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=-1} \frac{z^{a-1}}{1+z} = -2\pi i e^{i\pi a}.$$

En conclusión, se obtiene

$$I_a = \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x} dx = \frac{-2\pi i e^{i\pi a}}{1 - e^{2\pi i(a-1)}} = \frac{-2\pi i e^{i\pi a}}{1 - e^{2i\pi a}} = \frac{2\pi i}{e^{i\pi a} - e^{-i\pi a}} = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi a}. \quad (2.38)$$

Esta fórmula resultará útil más adelante. \diamond

3 Series y Productos de Funciones Holomorfas

Una de las propiedades más importantes de las funciones holomorfas es su estabilidad bajo ciertos procesos de sumación o multiplicación infinita. Conviene recordar que un límite uniforme de funciones continuas es continuo (Lema 1.4). Para funciones cuyos dominios son regiones abiertas, la convergencia en todo el dominio no suele ser uniforme. Hay un concepto intermedio entre convergencia puntual y uniforme, el cual es la idea de convergencia uniforme sobre las partes compactas del dominio dado. Esta versión de convergencia de funciones se adapta muy bien a las funciones holomorfas.

3.1 Convergencia uniforme sobre compactos

Lema 3.1. Si $V \subseteq \mathbb{C}$ es un abierto no vacío en el plano complejo, hay partes compactas $K_n \subset V$ para cada $n \in \mathbb{N}$ tales que $K_n \subset K_{n+1}^\circ$ para cada n ,¹ y además $V = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$.

Demostración. La distancia desde un punto $z \in \mathbb{C}$ y una parte $E \subseteq \mathbb{C}$ se define por $d(z, E) := \inf\{|z - u| : u \in E\}$. La desigualdad triangular implica que

$$|d(z, E) - d(w, E)| \leq |z - w|, \quad \text{para todo } z, w \in \mathbb{C},$$

así que, para cada E fijo, la función $z \mapsto d(z, E)$ es continua. Defínase

$$\begin{aligned} V_n &:= D(0; n) \cap \{z \in V : d(z, \mathbb{C} \setminus V) > 1/n\}, \\ K_n &:= \bar{D}(0; n) \cap \{z \in V : d(z, \mathbb{C} \setminus V) \geq 1/n\}. \end{aligned}$$

Entonces cada V_n es un abierto y cada K_n es un compacto (por estar acotado y cerrado en \mathbb{C}). Está claro que $K_n \subseteq V_{n+1} \subseteq K_{n+1}$, lo cual implica que $K_n \subset K_{n+1}^\circ$. Además, como $V \neq \emptyset$, hay algún $m \in \mathbb{N}$ tal que $V_m \neq \emptyset$; por tanto, $K_n \neq \emptyset$ para $n > m$.

La unión creciente $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n = V$ sigue de las definiciones: si $z \in V$, hay $n \in \mathbb{N}$ tal que $|z| \leq n$ y a la vez $D(z; 1/n) \subseteq V$; en consecuencia, vale $d(z, \mathbb{C} \setminus V) \geq 1/n$. \square

Obsérvese que $V = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n$ también, una unión creciente. Si $C \subset V$ es una parte compacta cualquiera, entonces los V_n forman un cubrimiento abierto de C . Luego, hay un índice m tal que $C \subset V_m \subset K_m$. En resumen: toda parte compacta de V está incluida en algún K_m .

¹La notación E° significa el **interior** topológico de E , es decir, la unión de todas las partes abiertas de E ; fíjese que $E^\circ \subseteq E$, con igualdad si y sólo si E es un abierto.

Definición 3.2. Sea $V \subseteq \mathbb{C}$ un abierto. Denótese por $C(V)$ el espacio vectorial de todas las funciones continuas $f: V \rightarrow \mathbb{C}$. Una sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C(V)$ **converge uniformemente sobre compactos** a una función límite $f: V \rightarrow \mathbb{C}$ si $f_n(z) \rightarrow f(z)$ para $z \in V$ y si esta convergencia es uniforme sobre cualquier compacto $C \subset V$.

En vista del Lema 3.1, este ocurre si y sólo si $f_n \rightarrow f$ uniformemente sobre cada K_m . Por el Lema 1.4, la restricción $f|_{K_m}$ es continua; como $V = \bigcup_m K_m$, la función límite $f: V \rightarrow \mathbb{C}$ es continua en todo punto de V , así que $f \in C(V)$.

Las *seminormas*

$$p_m(f) := \sup_{z \in K_m} |f(z)|$$

definen una topología sobre $C(V)$, en el sentido de que $f_n \rightarrow f$ uniformemente sobre compactos para cada m . La fórmula

$$\rho_V(f_n, f) := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^m} \frac{p_m(f_n - f)}{1 + p_m(f_n - f)}$$

define una **métrica** sobre $C(V)$; la convergencia uniforme sobre compactos es equivalente a la convergencia en esta métrica. No es difícil comprobar que este espacio métrico es *completo* (sus sucesiones de Cauchy son convergentes).²

Lema 3.3. Si $V \subseteq \mathbb{C}$ es un abierto, si $f \in C(V)$ es el límite uniforme sobre compactos de una sucesión (f_n) en $C(V)$, entonces para cualquier curva suave por trozos C con traza en V , la integral de f sobre C está dada por

$$\int_C f(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_C f_n(z) dz.$$

Demostración. La traza de C es una parte compacta de V . La hipótesis de que $f_n \rightarrow f$ en $C(V)$ implica que $f_n(z) \rightarrow f(z)$ uniformemente para $z \in C$. Sea dada $\varepsilon > 0$; entonces hay $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N \implies |f_n(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{\ell(C)} \quad \text{para todo } z \in C.$$

De ahí se obtiene

$$\left| \int_C f_n(z) dz - \int_C f(z) dz \right| = \left| \int_C (f_n(z) - f(z)) dz \right| \leq \ell(C) \frac{\varepsilon}{\ell(C)} = \varepsilon. \quad \square$$

²El espacio vectorial topológico $C(V)$ es un ejemplo de un **espacio de Fréchet**: este es un espacio vectorial metrizable y completo, cuya métrica está dada por una familia numerable de seminormas.

Teorema 3.4 (Weierstrass). *Sea U una región de \mathbb{C} y sea $(f_n: U \rightarrow \mathbb{C})_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones holomorfas en U . Si $f_n \rightarrow f$ en $C(U)$ con convergencia uniforme sobre compactos, la función f también es holomorfa en U . Además, $f_n^{(k)} \rightarrow f^{(k)}$ uniformemente sobre compactos, para cada $k \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Para mostrar que f es holomorfa en U , basta verificar que f es holomorfa en cada disco abierto $D(\alpha; s) \subseteq U$. Sea C una curva cerrada cualquiera con traza en $D(\alpha; s)$. El teorema de Cauchy —concretamente, el Corolario 2.17— muestra que $\oint_C f_n(z) dz = 0$ para cada n . Del Lema 3.3 se concluye que

$$\oint_C f(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \oint_C f_n(z) dz = 0.$$

Como esta integral es nula para cualquier C , el Teorema 2.29 de Morera implica que f es holomorfa en $D(\alpha; r)$.

Para demostrar la convergencia de las derivadas, por inducción sobre k , basta comprobar que $f'_n \rightarrow f'$ uniformemente sobre compactos en U . Si $0 < r < s$, de modo que $\bar{D}(\alpha; r) \subset U$, sea C_r el círculo $|w - \alpha| = r$. Para cada $z \in D(\alpha; r)$, se obtiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{n \rightarrow \infty} \oint_{C_r} \frac{f_n(w)}{(w-z)^2} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_r} \frac{f(w)}{(w-z)^2} dz = f'(z),$$

de la fórmula integral de Cauchy (Proposición 2.22) y el Lema 3.3.

Esta convergencia es uniforme en $\bar{D}(\alpha; t)$ si $0 < t < r$, porque $|w - z| \geq r - t$ para $z \in \bar{D}(\alpha; t)$, $w \in C_r$. Si $n \geq N \implies |f_n(w) - f(w)| \leq \delta$ para $w \in C_r$, entonces

$$\left| \frac{f_n(w) - f(w)}{(w-z)^2} \right| \leq \frac{\delta}{(r-t)^2},$$

y por tanto $|f'_n(z) - f'(z)| \leq \delta r / (r-t)^2$ para $n \geq N$. Luego $f'_n \rightarrow f'$ uniformemente sobre compactos en $D(\alpha; r)$. Cualquier compacto $K \subset U$ queda cubierto por un número finito de tales discos abiertos; luego $f'_n \rightarrow f'$ uniformemente sobre compactos en U . \square

Corolario 3.5. *Si una serie de funciones holomorfas en una región U ,*

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} h_n(z) \quad \text{para } z \in U,$$

converge uniformemente sobre compactos, la suma f es una función holomorfa en U y la serie puede derivarse término por término: si $k \in \mathbb{N}$, entonces

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n^{(k)}(z) \quad \text{si } z \in U,$$

y esta serie también converge uniformemente sobre compactos. \square

Ejemplo 3.6. La fórmula clásica para la función exponencial:

$$e^z = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \quad (3.1)$$

es válido para todo $z \in \mathbb{C}$, con convergencia uniforme sobre compactos.

Para comprobar esa afirmación, basta verificar la convergencia en el disco cerrado $\bar{D}(0; R)$ para cualquier $R > 0$. Considérese el polinomio $f_n(z) := (1 + z/n)^n$ para n fijo:

$$\begin{aligned} f_n(z) &= \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{z^k}{n^k} = \sum_{k=0}^n \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n \cdot n \cdots n} \frac{z^k}{k!} \\ &= 1 + z + \sum_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \frac{z^k}{k!}. \end{aligned}$$

Al usar repetidamente la identidad $(1-a)(1-b) > 1-a-b$ para $a, b > 0$, se obtiene, para $|z| \leq R$:

$$\begin{aligned} \left| e^z - \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \right| &\leq \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \cdots + \frac{k-1}{n}\right) \frac{|z|^k}{k!} + \sum_{k>n} \frac{|z|^k}{k!} \\ &\leq \frac{1}{2n} \sum_{k=2}^n \frac{R^k}{(k-2)!} + \sum_{k>n} \frac{R^k}{k!} = \frac{R^2}{2n} \sum_{m=0}^{n-2} \frac{R^m}{m!} + \sum_{k>n} \frac{R^k}{k!} \\ &< \frac{R^2 e^R}{2n} + \sum_{k>n} \frac{R^k}{k!} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

con convergencia obviamente uniforme en $|z| \leq R$.

El Teorema 3.4 confirma que la función $z \mapsto e^z$ es entera y que coincide con su propia derivada:

$$\frac{d}{dz}(e^z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{dz} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n / \left(1 + \frac{z}{n}\right) = e^z. \quad \diamond$$

Ejemplo 3.7. La serie

$$\zeta(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} \quad (3.2)$$

converge si $\Re z > 1$, porque si $z = x + iy$, entonces

$$\left| \frac{1}{n^z} \right| = |n^{-z}| = |e^{-z \operatorname{Log} n}| = e^{-x \operatorname{Log} n} = \frac{1}{n^x}$$

y la serie positiva $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^x$ converge si $x > 1$. Además, si $s > 1$, entonces para $\Re z \geq s$ la desigualdad $|n^{-z}| \leq n^{-s}$ y el criterio mayorizante de Weierstrass (el Lema 1.5) muestran que la convergencia es uniforme en el semiplano $\Re z \geq s$.

Si K es un compacto en el semiplano $\Re z > 1$, entonces existe algún $s_0 > 1$ tal que $K \subset \{z : \Re z \geq s_0\}$. (Fíjese que los semiplanos $\{z : \Re z > \frac{1}{2}(1+s)\}$ forman un cubrimiento abierto de K .) Entonces la convergencia de la serie (3.2) es uniforme sobre K . El Teorema 3.4 muestra que la función ζ es holomorfa en el semiplano abierto $\Re z > 1$. Esta es la **función zeta de Riemann**.³ \diamond

El teorema de Weierstrass es aplicable a la formación de funciones analíticas mediante integrales sobre una variable auxiliar.

Proposición 3.8. *Sea $U \subset \mathbb{C}$ una región y sea $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervalo compacto. Si $g : U \times [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ es una función continua tal que $z \mapsto g(z, t)$ es holomorfa en U para cada $t \in [a, b]$, entonces la función $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ definida por*

$$f(z) := \int_a^b g(z, t) dt$$

es holomorfa en U .

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}^*$ y $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, sea $t_n(k) := a + k(b-a)/n$, así que $\{t_n(0), t_n(1), \dots, t_n(n)\}$ es una partición del intervalo $[a, b]$ con espaciado uniforme. Sea $f_n(z)$ la *suma de Riemann* definida por

$$f_n(z) := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n g(z, t_n(k)).$$

Para cada $z \in U$, la continuidad de $t \mapsto g(z, t)$ muestra que estas sumas de Riemann convergen a la integral: $f_n(z) \rightarrow f(z)$ cuando $n \rightarrow \infty$. Para obtener la holomorphicidad de f , basta mostrar que esta convergencia es uniforme sobre compactos.

Si $K \subset U$ es compacto, entonces $K \times [a, b]$ es compacto en $U \times [a, b]$. La función g es continua en sus dos variables y por ende es *uniformemente continua* en $K \times [a, b]$. En consecuencia, dado $\varepsilon > 0$ hay $\delta > 0$ tal que

$$|s - t| < \delta \implies \sup_{z \in K} |g(z, s) - g(z, t)| < \varepsilon.$$

³La función zeta de Riemann es una función *meromorfa en todo el plano complejo*, con un polo en $z = 1$. Luego la fórmula (3.2) es solamente una definición parcial de $\zeta(z)$, a la derecha de este polo. Más adelante, se completará su definición en el resto del plano.

Ahora, si $z \in K$, entonces

$$\begin{aligned} n > \frac{1}{\delta} \implies |f_n(z) - f(z)| &= \left| \sum_{k=1}^n \int_{t_n(k-1)}^{t_n(k)} (g(z, t_n(k)) - g(z, t)) dt \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^n \int_{t_n(k-1)}^{t_n(k)} |g(z, t_n(k)) - g(z, t)| dt < \sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Como δ no depende de $z \in K$, se concluye que $f_n \rightarrow f$ uniformemente sobre K . Ahora el Teorema 3.4 muestra que f es holomorfa en U . \square

Ejemplo 3.9. Considérese la función $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ definida por la serie

$$f(z) := \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}.$$

El lado derecho tiene la apariencia de una función meromorfa con polos en \mathbb{Z} . Para comprobar eso, hay que investigar la convergencia de la serie.

Tómese $R > 0$ y $N \in \mathbb{N}^*$ tal que $N > 2R$. Entonces la suma parcial

$$s_N(z) := \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^N \frac{2z}{z^2 - n^2}$$

es una función meromorfa con polos simples en $\{-N, \dots, N-1, N\}$. Sus residuos son

$$\operatorname{Res}_{z=n} s_N(z) = \operatorname{Res}_{z=n} \frac{2z}{z^2 - n^2} = \frac{2n}{2n} = 1, \quad \text{si } n \neq 0; \quad \operatorname{Res}_{z=0} s_N(z) = \operatorname{Res}_{z=0} \frac{1}{z} = 1.$$

La cola de la serie

$$t_N(z) := \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}$$

tiene términos holomorfos en el disco $|z| < R$. Además, si $|z| < R$ y $n > N > 2R$, entonces

$$\left| \frac{2z}{z^2 - n^2} \right| \leq \frac{2R}{n^2 - R^2} = \frac{1}{n^2} \frac{2R}{1 - (R/n)^2} < \frac{1}{n^2} \frac{2R}{3/4} = \frac{8R}{3n^2}.$$

Entonces la serie para $t_n(z)$ converge uniformemente en el disco $D(0; R)$, por el criterio mayorizante de Weierstrass. Luego t_N es una función holomorfa en $D(0; R)$, por el Teorema 3.4. La serie original $f(z) = s_N(z) + t_N(z)$ entonces es meromorfa en cualquier disco abierto $|z| < R$. Por tanto, f es meromorfa en todo \mathbb{C} , con un polo simple en cada $n \in \mathbb{Z}$ y residuo 1 en cada n .

La función $g(z) := \pi \operatorname{ctg} \pi z$ es otra función meromorfa con polos simples en cada $n \in \mathbb{Z}$. Además, como

$$\operatorname{Res}_{z=n} \pi \operatorname{ctg} \pi z = \left. \frac{\pi \cos \pi z}{\pi \cos \pi z} \right|_{z=n} = 1,$$

la diferencia $f(z) - g(z)$ es una función entera. Es posible mostrar que esta función entera es acotada en todo \mathbb{C} ; por el teorema de Liouville, es una constante. Pero es evidente que $f - g$ es una *función impar*: $f(-z) - g(-z) \equiv g(z) - f(z)$, y en consecuencia la constante es nula: $f(z) - g(z) \equiv 0$. En conclusión, se obtiene:

$$\pi \operatorname{ctg} \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}$$

con convergencia uniforme sobre compactos en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. \diamond

Lema 3.10. Si para cada $k \in \mathbb{N}$, f_k es una función holomorfa en el disco abierto $D(\alpha; R)$, con serie de Taylor $f_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{kn} (z - \alpha)^n$; y si la serie

$$f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)$$

converge uniformemente sobre compactos en $D(\alpha; R)$, entonces la serie de Taylor de f centrado en α está dada por

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - \alpha)^n, \quad \text{con} \quad c_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{kn}.$$

Demostración. Por el Teorema 3.4, f es holomorfa en el disco $D(\alpha; R)$. La Proposición 2.25 muestra que la serie de Taylor de f tiene radio de convergencia al menos R . Además, como $f^{(n)} = \sum_{k=0}^{\infty} f_k^{(n)}$ uniformemente sobre compactos, para cada $n \in \mathbb{N}$, se obtiene

$$c_n = \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_k^{(n)}(\alpha)}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{kn}. \quad \square$$

Ejemplo 3.11. Considérese la función definida por

$$f(z) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{1 - z^k} \quad \text{para} \quad |z| < 1.$$

Está claro que el término $z^k/(1 - z^k)$ es holomorfo en el disco $|z| < 1$. Hay que comprobar convergencia uniforme sobre cada disco cerrado $\bar{D}(0; r)$, para $0 < r < 1$. Como

$|1 - z^k| \geq 1 - r^k$ para $|z| \leq r$, se obtiene

$$\left| \frac{z^k}{1 - z^k} \right| \leq \frac{r^k}{1 - r^k} \leq \frac{r^k}{1 - r} \quad \text{cuando } |z| \leq r,$$

y la serie geométrica $\sum_{k=1}^{\infty} r^k / (1 - r) = r / (1 - r)^2$ converge ya que $r < 1$, se obtiene la convergencia uniforme deseada del Lema 1.5.

La serie de Taylor de f , centrado en 0, se obtiene del Lema 3.10. Al notar que

$$\frac{z^k}{1 - z^k} = z^k + z^{2k} + z^{3k} + \dots$$

es una serie geométrica, se obtiene $a_{kn} = 0$ o 1 en cada caso; y $a_{kn} = 1$ si y sólo si $n = mk$ para algún $m \in \mathbb{N}^*$. En otras palabras, $a_{kn} = 1$ si y sólo si k es un *divisor* de n . Por lo tanto,⁴

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) z^n = z + 2z^2 + 2z^3 + 3z^4 + 2z^5 + 4z^6 + \dots$$

donde $\tau(n)$ es el **número de divisores** de n , incluyendo los extremos 1 y n . ◇

3.2 Productos infinitos

Definición 3.12. Si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de números complejos, el **producto infinito** de los términos $(1 + a_n)$ es evidentemente nulo si $a_n = -1$ para algún n . De lo contrario, el **producto parcial**

$$p_n := \prod_{k=1}^n (1 + a_k) = (1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n)$$

pertenece a $\mathbb{C}^\times := \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Si $p_n \rightarrow p \in \mathbb{C}^\times$ cuando $n \rightarrow \infty$, dicese que el producto **converge** a p ,

$$\prod_{n=0}^{\infty} (1 + a_n) = p. \quad (3.3)$$

En cualquier otro caso, el producto infinito es *divergente*:

- ★ si $p_n \rightarrow \infty$ en \mathbb{C}_∞ , dicese que el producto *diverge al infinito*;
- ★ si $p_n \rightarrow 0$ en \mathbb{C}_∞ , dicese que el producto *diverge a 0*;

⁴La fórmula $f(z) = \sum_{n \geq 1} \tau(n) z^n$ también dice que f es la **función generatriz** de la sucesión $(\tau(n))$. La otra fórmula $f(z) = \sum_{k \geq 1} z^k / (1 - z^k)$ permite aplicar la teoría de las funciones analíticas al estudio de los divisores. Este es un ejemplo de la llamada *teoría analítica de los números*.

★ si la sucesión (p_n) no tiene límite en \mathbb{C}_∞ , el producto también diverge.

En el caso de que $a_m = -1$ para algún $m \in \mathbb{N}$, entonces $p_n = 0$ para $n \geq m$; luego el producto *se anula* de manera trivial.

Si $p_n \rightarrow p$ en \mathbb{C}^\times , entonces $1 + a_n = p_n/p_{n-1} \rightarrow p/p = 1$ y por ende $a_n \rightarrow 0$. La condición $a_n \rightarrow 0$ es *necesaria* para la convergencia (3.3) del producto infinito.

Si $a_n \rightarrow 0$, entonces hay $n \in \mathbb{N}$ tal que $\Re(1 + a_n) > 0$ para $n \geq N$. Entonces la rama principal del logaritmo es aplicable para evaluar $\text{Log}(1 + a_n) \in \mathbb{C}$ para $n \geq N$; entonces se puede formar la serie $\sum_{n=N}^\infty \text{Log}(1 + a_n)$ para luego investigar su convergencia.

Lema 3.13. Si $a_n \neq -1$ para todo n , el producto $\prod_{n=0}^\infty (1 + a_n)$ converge si y sólo si la serie $\sum_{n=0}^\infty \text{Log}(1 + a_n)$ converge.

Demostración. Sin perder generalidad, se puede suponer que $\Re(1 + a_n) > 0$ para todo n . Si $s_n := \sum_{k=0}^n \text{Log}(1 + a_k)$, entonces $e^{s_n} = \prod_{k=0}^n (1 + a_k) = p_n$. Si la serie converge, es decir, $s_n \rightarrow s \in \mathbb{C}$, entonces $p_n = e^{s_n} \rightarrow e^s \in \mathbb{C}^\times$, así que el producto converge.

Por otro lado, si el producto converge, entonces hay $p \in \mathbb{C}^\times$ tal que $p_n \rightarrow p$. Entonces $|p_n| \rightarrow |p| \in (0, \infty)$, por lo tanto $\text{Log}|p_n| \rightarrow \text{Log}|p| \in \mathbb{R}$. Además, $\arg p_n \rightarrow \arg p$ en $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Si $\text{Arg } p \neq \pi$, entonces $|\text{Arg } p_n - \text{Arg } p| < \frac{1}{2}|\text{Arg } p \mp \pi|$ para n suficientemente grande, así que $\text{Arg } p_n \rightarrow \text{Arg } p$ también. En consecuencia, $\text{Log } p_n \rightarrow \text{Log } p \in \mathbb{C}$, es decir, la serie converge. (En el caso excepcional $\text{Arg } p = \pi$, como $-p_n \rightarrow -p$ se obtiene $\text{Log } p_n - \pi \rightarrow \text{Log } p - \pi$; y de nuevo, la serie converge.) \square

Definición 3.14. Un producto infinito $\prod_{n=0}^\infty (1 + a_n)$ converge absolutamente si el producto de términos positivos $\prod_{n=0}^\infty (1 + |a_n|)$ converge.

Lema 3.15. Un producto absolutamente convergente es convergente. Además, el producto $\prod_{n=0}^\infty (1 + a_n)$ converge absolutamente si y sólo si la serie $\sum_{n=0}^\infty |a_n|$ converge.

Demostración. Escribáse $u_n := |a_n| \geq 0$. Si el producto $\prod_{n=0}^\infty (1 + u_n)$ converge, entonces la serie $\sum_{n=0}^\infty \text{Log}(1 + u_n)$ converge también, por el Lema 3.13. La desigualdad $1 + x \leq e^x$, válido para $x \in \mathbb{R}$, implica que

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n \leq \prod_{k=0}^n (1 + u_k) \leq \exp(u_0 + u_1 + \cdots + u_n).$$

Entonces $\sum_{n=0}^\infty \text{Log}(1 + u_n)$ converge si y sólo si la serie positiva $\sum_{n=0}^\infty u_n$ converge. Esto comprueba la segunda afirmación del enunciado.

Supóngase, entonces, que $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge. Hay $N \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n| \leq \frac{1}{2}$ para $n \geq N$. De la serie de Taylor de $\text{Log}(1+z)$ se obtiene, para $n \geq N$:

$$|\text{Log}(1+a_n)| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} a_n^k \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_n|^k}{k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_n|^k = \frac{|a_n|}{1-|a_n|} \leq 2|a_n|. \quad (3.4)$$

Luego la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \text{Log}(1+a_n)$ converge (absolutamente) y del Lema 3.13 sigue la convergencia de $\prod_{n=0}^{\infty} (1+a_n)$. \square

Hay una versión del criterio mayorizante de Weierstrass para la convergencia absoluta y uniforme de un producto infinito de funciones. El siguiente resultado se adapta al caso de factores holomorfos.

Proposición 3.16. *Sea $(g_n: U \rightarrow \mathbb{C})_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones holomorfas en una región U . Si existen $N \in \mathbb{N}$ y constantes $M_n > 0$ para $n \geq N$, tales que*

$$\sum_{n=N}^{\infty} M_n < \infty \quad \text{y} \quad |g_n(z)| \leq M_n \quad \text{para} \quad z \in U,$$

entonces el producto

$$f(z) := \prod_{n=0}^{\infty} (1+g_n(z)) \quad (3.5)$$

converge a una función holomorfa $f: U \rightarrow \mathbb{C}$. Los ceros de f (si no es idénticamente nula) son aquellos $z \in U$ tales que $g_m(z) = -1$ para un número finito de índices m .

Demostración. En primer lugar, supóngase que $g_n(z) \neq -1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $z \in U$. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} |g_n(z)|$ converge absoluta y uniformemente en U , por el Lema 1.5. Luego $\sum_{n=0}^{\infty} \text{Log}(1+g_n(z))$ también converge absolutamente en U . Como $|g_n(z)| \leq \frac{1}{2}$ implica $|\text{Log}(1+g_n(z))| \leq 2|g_n(z)|$, en vista de (3.4), la convergencia de la segunda serie es también uniforme.

Entonces

$$\prod_{n=0}^{\infty} (1+g_n(z)) = \exp\left(\sum_{n=0}^{\infty} \text{Log}(1+g_n(z))\right)$$

converge, uniformemente en U , a una función $f: U \rightarrow \mathbb{C}^{\times}$ que no se anula en U . Como los productos parciales son holomorfas, f es también holomorfa, por el Teorema 3.4.⁵

En el caso general, para cada $z_0 \in U$ hay $M \in \mathbb{N}$ tal que $g_m(z_0) \neq -1$ para $m > M$, por la condición necesaria $\lim_{m \rightarrow \infty} g_m(z_0) = 0$. Si $\{z \in U : g_m(z) = -1 \text{ para algún } m\}$ tiene

⁵Obsérvese que es suficiente, para esta conclusión, que para compacto $K \subset U$, hubiera una serie convergente de constantes $M_n(K)$ tales que $|g_n(z)| \leq M_n(K)$ para $z \in K$.

un punto de acumulación, estos son ceros de f y $f(z) \equiv 0$ por el Corolario 2.63. En el caso contrario, los ceros de f son aislados y ocurren en los $z \in U$ para los cuales hay un número finito de factores (al menos uno) en el producto (3.5) tales que $1 + g_m(z) = 0$. \square

Ejemplo 3.17. Evaluar el producto infinito

$$P := \prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

Obsérvese que el productorio comienza con $n = 2$ porque $(1 - 1/n^2)$ sería cero cuando $n = 1$, lo cual anularía el producto.

Antes de evaluar P , hay que *comprobar la convergencia* del producto. De hecho, con $a_n := -1/n^2$, el producto converge *absolutamente*, en vista del Lema 3.15, porque

$$\sum_{n=2}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - 1.$$

Ahora $P = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n$, donde el producto parcial p_n está dado por

$$p_n := \prod_{k=2}^n \frac{k^2 - 1}{k^2} = \prod_{k=2}^n \frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 3} \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 4} \cdots \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} = \frac{n+1}{2n},$$

por cancelación telescópica de factores. Al final, $P = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$. \diamond

Ejemplo 3.18. Euler notó que la función $(\sin \pi z)/\pi z$ se anula en todo $n \in \mathbb{Z}$, salvo en $n = 0$ donde vale 1. Propuso una “factorización infinita” de esta función en factores de primer grado de tipo $(1 - z/n)$. Sin embargo, $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - x/n)$ diverge para $x < 0$, ya que la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ diverge. Para obtener un producto convergente, hay que combinar los factores $(1 - z/n)$ y $(1 + z/n)$, como paso previo:

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) =: f(z). \quad (3.6)$$

Para verificar (3.6), hay que asegurar que el lado derecho $f(z)$ es un producto convergente, para todo $z \in \mathbb{C}$. Sea $R > 0$ con $R \notin \mathbb{N}$. En el disco $D(0; R)$ los términos iniciales se anulan en $0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm [R]$, respectivamente. Para $n > R$, vale $|z^2/n^2| < R^2/n^2$ y la serie $\sum_{n>R} R^2/n^2$ converge. Luego, la Proposición 3.16 muestra que el producto $f(z)$ converge a una función holomorfa en $D(0; R)$. Como R es arbitrario, se concluye que el producto en la fórmula (3.6) es una *función entera*.

Los ceros de esta función entera son los ceros de los factores individuales: en efecto, cada $n \in \mathbb{Z}$ es un cero simple. Estos son los ceros simples de $z \mapsto \operatorname{sen} \pi z$ también.

Para identificar la serie $f(z)$, se aplica la llamada *derivación logarítmica*; es decir, se forma el cociente $f'(z)/f(z)$, una función meromorfa cuyos polos son los ceros de f . Si g y h son dos funciones holomorfas, entonces

$$\frac{(gh)'(z)}{(gh)(z)} = \frac{g'(z)h(z) + g(z)h'(z)}{g(z)h(z)} = \frac{g'(z)}{g(z)} + \frac{h'(z)}{h(z)}.$$

Un producto finito $\prod_{k=1}^n g_k(z)$ se transforma en una suma finita $\sum_{k=1}^n g'_k(z)/g_k(z)$. Luego

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}. \quad (3.7)$$

Esta expresión se justifica al dejar $n \rightarrow \infty$ en los productos parciales de $f(z)$, exhibidos en (3.6), y en las sumas parciales de (3.7). Si $K \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ es un compacto, los denominadores están acotados por debajo: $|z| \geq C_0 > 0$ y $|z^2 - n^2| \geq C_n > 0$ para $z \in K$, así que la serie (3.7) converge uniformemente sobre compactos en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ y representa una función holomorfa allí. En breve, esta serie es un función *meromorfa* en \mathbb{C} con polos simples en \mathbb{Z} .

Ahora bien: en el Ejemplo 3.9 esta misma serie representa la función meromorfa $\pi \operatorname{ctg} \pi z$. Al escribir $g(z) := \operatorname{sen} \pi z$, es inmediato que $g'(z)/g(z) = \pi \operatorname{ctg} \pi z = f'(z)/f(z)$. De la identidad

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{f(z)}{g(z)} \right) = \frac{f(z)}{g(z)} \left(\frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{g'(z)}{g(z)} \right) \equiv 0$$

se concluye que $g(z) \equiv c f(z)$ para alguna constante c . Por lo tanto, vale

$$\frac{\operatorname{sen} \pi z}{\pi z} \equiv c \frac{f(z)}{\pi z} = c \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2} \right).$$

Al evaluar los dos lados en $z = 0$, se obtiene $c = 1$. Se ha comprobado la fórmula (3.6), que representa $\operatorname{sen} \pi z$ como producto convergente de polinomios de primer grado. \diamond

► La utilidad de los productos infinitos es evidente del ejemplo anterior: ofrece una manera de crear funciones holomorfas con un conjunto de ceros previamente establecido. Sin embargo, hay que avanzar con cautela, en vista del ejemplo siguiente.

Ejemplo 3.19. Si se desea obtener una función entera con ceros simples en los enteros positivos, $n \in \mathbb{N}^*$, conviene examinar el producto

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n} \right). \quad (3.8)$$

Sin embargo, esta expresión es sólo formal, porque este producto no converge absolutamente: $\sum_{n \geq 1} |z|/n = |z| \sum_{n \geq 1} 1/n$ es un múltiplo de la serie armónica. Se verá en breve que este producto tampoco converge condicionalmente.

Otra opción sería molificar cada término $(1 - z/n)$ con un factor que no introduce ceros nuevos, pero “regulariza” la serie de Taylor de $\text{Log}(1 - z/n)$, al definir

$$g(z) := \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{z/n}. \quad (3.9)$$

Para obtener su convergencia, en vista del Lema 3.13, hay que considerar el logaritmo de cada término. Para $|w| < 1$, la serie de Taylor del logaritmo (rama principal) da

$$\text{Log}((1-w)e^w) = w + \text{Log}(1-w) = -\frac{w^2}{2} - \frac{w^3}{3} - \frac{w^4}{4} - \dots$$

y para $|w| < \frac{1}{2}$ se obtiene el estimado

$$\begin{aligned} |\text{Log}((1-w)e^w)| &= |w|^2 \left| \frac{1}{2} + \frac{w}{3} + \frac{w^2}{4} + \dots \right| \leq |w|^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{|w|}{2} + \frac{|w|^2}{2} + \dots \right) \\ &\leq |w|^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \right) = |w|^2. \end{aligned}$$

Entonces, si $|z| \leq R$ y $n > 2R$, las desigualdades

$$\left| \text{Log} \left(\left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{z/n} \right) \right| \leq \frac{|z|^2}{n^2} \leq \frac{R^2}{n^2}$$

y la Proposición 3.16, con $M_n = R^2/n^2$ para $N > 2R$, muestra que el producto converge absoluta y uniformemente para $|z| \leq R$. Como R es arbitrario, el producto converge, uniformemente sobre compactos, a una función entera $g(z)$, cuyos ceros son precisamente los $n \in \mathbb{N}^*$.

Es evidente que cada n es un cero simple, porque en el disco $D(n; 1)$ se puede escribir

$$g(z) = \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{z/n} \prod_{k \neq n} \left(1 - \frac{z}{k}\right) e^{z/k}$$

y el producto a la derecha no se anula (porque converge en \mathbb{C}^\times) para $|z - n| < 1$.

Ahora se puede reconsiderar la convergencia de la expresión (3.8), al escribir sus productos parciales como

$$\prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{z}{k}\right) = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{z}{k}\right) e^{z/k} e^{-z/k} = e^{-H_n z} \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{z}{k}\right) e^{z/k} =: e^{-H_n z} p_n(z),$$

donde $H_n := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ es la suma armónica finita. Como $H_n \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$, aunque $p_n(z) \rightarrow G(z)$, se ve que el producto (3.8) *diverge a 0* para $\Re z > 0$ y *diverge a ∞* para $\Re z < 0$. \diamond

Para obtener una función entera $f(z)$ cuyos ceros coinciden con una sucesión dada (α_n) , es necesario es que esta sucesión no tenga punto de acumulación alguna: de lo contrario, f debe ser idénticamente nula, según el Corolario 2.63. Entonces $|\alpha_n| \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$. Un producto de factores tales como $(1 - z/\alpha_n) e^{z/\alpha_n}$ no siempre es suficiente para obtener convergencia del producto. Pero se puede ensayar con factores más complicadas, tales como $(1 - z/\alpha_n) e^{z/\alpha_n + z^2/2\alpha_n^2}$, para cancelar más términos en la expansión de $\text{Log}(1 - z/\alpha_n)$. Hay un teorema de Weierstrass, omitido aquí, que establece una fórmula general para fabricar una función entera cuyo juego de ceros coinciden con (α_n) , toda vez que $|\alpha_n| \rightarrow \infty$.

3.3 La función gamma de Euler

Un problema general de *interpolación* es la búsqueda de una función f , dada por una fórmula explícita, que toma valores preasignados w_n en determinados puntos z_n ; es decir, hay que hallar f tal que $f(z_n) = w_n$ para todo n . Si los z_n forman un conjunto finito, f podría ser un polinomio; por ejemplo, el polinomio interpolante de Lagrange.

Euler consideró el problema de hallar una función cuyos valores en números enteros son los *factoriales*: $0! = 1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, etc. Como $n \mapsto n!$ crece más rápidamente que e^n , el problema exige una solución sofisticada. A continuación, se estudiarán tres fórmulas que contribuyen a resolverlo; su definición detallada, sus propiedades y sus interrelaciones forman el temario de esta sección.

Definición 3.20. Para $\Re z > 0$, defínase dos funciones:

$$\Gamma(z) := \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad (3.10a)$$

$$F(z) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)}, \quad (3.10b)$$

Para todo $z \in \mathbb{C}$, defínase la función:

$$G(z) := z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n}, \quad (3.11)$$

donde la constante $\gamma > 0$ está determinada por la condición $G(1) = 1$.

En adelante, se comprobará que $\Gamma(z) = F(z) = 1/G(z)$, para $\Re z > 0$. Sin embargo, conviene examinar estas funciones separadamente, antes de demostrar su coincidencia.

Proposición 3.21. *La integral (3.10a) define una función holomorfa en el semiplano derecho $\mathbb{C}_{>} := \{z \in \mathbb{C} : \Re z > 0\}$.*

Demostración. Escribese $z = x + iy$ con $x > 0$. Tómese $n \in \mathbb{N}$ tal que $t^{x-1} \leq e^{t/2}$ para $t \geq n$; entonces, la estimación

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \right| &\leq \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \\ &= \int_0^{1/n} t^{x-1} e^{-t} dt + \int_{1/n}^n t^{x-1} e^{-t} dt + \int_n^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \\ &\leq \int_0^{1/n} t^{x-1} dt + \int_{1/n}^n t^{x-1} e^{-t} dt + \int_n^\infty e^{-t/2} dt \end{aligned}$$

se ve que la integral impropia converge para cada $z \in \mathbb{C}_{>}$.

Para $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$, defínase la función

$$h_n(z) := \int_{1/n}^n t^{z-1} e^{-t} dt,$$

la cual es holomorfa en $\mathbb{C}_{>}$ por la Proposición 3.8. Hay que mostrar que $h_n \rightarrow \Gamma$ uniformemente sobre compactos en $\mathbb{C}_{>}$; basta mostrar convergencia uniforme en cada franja vertical $a \leq x \leq b$, si $0 < a < b < \infty$. En efecto, si $x \in [a, b]$, entonces

$$\begin{aligned} |h_n(z) - \Gamma(z)| &= \left| \int_0^{1/n} t^{z-1} e^{-t} dt + \int_n^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \right| \\ &\leq \int_0^{1/n} t^{x-1} e^{-t} dt + \int_n^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \\ &\leq \int_0^{1/n} t^{a-1} e^{-t} dt + \int_n^\infty t^{b-1} e^{-t} dt \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

porque $t^{x-1} \leq t^{a-1}$ para $x \geq a$ cuando $0 < t \leq 1$. Las integrales al lado derecho no dependen de x , así que la convergencia $h_n \rightarrow \Gamma$ es uniforme en la franja. El Teorema 3.4 ahora muestra que Γ es holomorfa en $\mathbb{C}_{>}$. \square

Lema 3.22. *Si $\Re z > 0$, entonces*

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z). \quad (3.12)$$

En consecuencia, vale $\Gamma(n+1) = n!$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Con una integración por partes, se obtiene, para $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} h_n(z+1) &= \int_{1/n}^n t^z e^{-t} dt = \left[-t^z e^{-t} \right]_{t=1/n}^{t=n} + \int_{1/n}^n z t^{z-1} e^{-t} dt \\ &= (n^{-z} e^{-1/n} - n^z e^{-n}) + z h_n(z), \end{aligned}$$

y al dejar $n \rightarrow \infty$, se obtiene $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.

Nótese que

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1,$$

luego $\Gamma(2) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1$, $\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2$, etc.; la fórmula $\Gamma(n+1) = n!$ sigue por inducción sobre n . \square

► La fórmula (3.12) permite extender Γ del semiplano derecho $\mathbb{C}_{>}$ a todo el plano \mathbb{C} , porque la función

$$\Gamma_1(z) := \frac{\Gamma(z+1)}{z}$$

está definido para $\Re z > -1$, excepto en $z = 0$; y (3.12) dice que $\Gamma_1(z) \equiv \Gamma(z)$ para $\Re z > 0$. La función Γ_1 es meromorfo en el semiplano $\Re z > -1$ y tiene un polo simple en 0, con residuo

$$\operatorname{Res}_{z=0} \Gamma_1(z) = \lim_{z \rightarrow 0} z \Gamma_1(z) = \Gamma(1) = 1.$$

Para una segunda iteración de este proceso, se define

$$\Gamma_2(z) := \frac{\Gamma(z+2)}{z(z+1)} \quad \text{para } \Re z > -2,$$

con $z \notin \{0, -1\}$. Esta función Γ_2 es meromorfa en el semiplano $\Re z > -2$, coincide con Γ para $\Re z > 0$, y tiene polos simples en 0 y -1 , con residuos

$$\operatorname{Res}_{z=0} \Gamma_2(z) = \lim_{z \rightarrow 0} z \Gamma_2(z) = \Gamma(2) = 1, \quad \operatorname{Res}_{z=-1} \Gamma_2(z) = \lim_{z \rightarrow -1} (z+1) \Gamma_2(z) = -\Gamma(1) = -1.$$

Dado cualquier $m \in \mathbb{N}^*$, defínase

$$\Gamma_m(z) := \frac{\Gamma(z+m)}{z(z+1)\dots(z+m-1)} \quad \text{para } \Re z > -m. \quad (3.13)$$

Esta es una **continuación meromorfa** de $\Gamma(z)$ al semiplano $\Re(z) > -m$, con polos simples en $\{0, -1, -2, \dots, -m+1\}$. El residuo en $z = -k$, para $k \in \{0, 1, \dots, m-1\}$,

está dado por

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=-k} \Gamma_m(z) &= \lim_{z \rightarrow -k} (z+k) \Gamma_m(z) \lim_{z \rightarrow -k} \frac{(z+k) \Gamma(z+m)}{z(z+1) \dots (z+m-1)} \\ &= \frac{(m-k-1)!}{(-k)(-k+1) \dots (-1)(1) \dots (m-k-1)} = \frac{1}{(-k)(-k+1) \dots (-1)} \\ &= \frac{(-1)^k}{k!}. \end{aligned}$$

Obsérvese que el residuo no depende de m .

Definición 3.23. La **función gamma** de Euler $\Gamma: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ es la función meromorfa definida así: si $\Re z > 0$, $\Gamma(z)$ es la integral (3.10a); luego, si $z \notin -\mathbb{N} = \{0, -1, -2, \dots\}$, se define $\Gamma(z) := \Gamma_m(z)$ para cualquier $m > -\Re z$. De esta manera, Γ es una función holomorfa en la región $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$. Al poner $\Gamma(-k) := \infty$ para $-k \in -\mathbb{N}$, se obtiene una función meromorfa en \mathbb{C} , donde el residuo en el polo $-k$ es $(-1)^k/k!$ para cada $k \in \mathbb{N}$.

► Ahora conviene considerar el producto infinito (3.11).

Lema 3.24. La función $G(z)$ dada por la fórmula (3.11) define una función entera con ceros simples en $-\mathbb{N}$.

Demostración. Obsérvese que $G(z) = z e^{\gamma z} g(-z)$ donde $g(z)$ es el producto infinito del Ejemplo 3.19. Esto demuestra que G es una función entera, con ceros simples en $\{-1, -2, -3, \dots\}$ y otro cero simple en 0 debido al factor $z e^{\gamma z}$. \square

Lema 3.25. La constante positiva γ en la fórmula (3.11) está dada por

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \log n \right). \quad (3.14)$$

Demostración. Las sumas parciales de la serie armónica se definen por

$$H_n := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \int_1^{n+1} \varphi(t) dt,$$

donde φ es la *función escalonada* definida por $\varphi(t) := 1/k$ para $k \leq t < k+1$.

Por otro lado, como $\log(n+1) = \int_1^{n+1} (1/t) dt$, la siguiente estimación es válida para cada $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} 0 < H_n - \log(n+1) &= \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{t} \right) dt, \\ &= \sum_{k=1}^n \int_0^1 \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+s} \right) ds = \sum_{k=1}^n \int_0^1 \frac{s}{k(k+s)} ds \\ &\leq \sum_{k=1}^n \int_0^1 \frac{1}{k^2} ds = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < \frac{\pi^2}{6}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $n \mapsto H_n - \log(n+1)$ es una sucesión creciente acotada de números positivos, la cual converge a un límite

$$c := \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{s}{k(k+s)} ds.$$

Además, como $\log(n+1) - \log n = \log(1 + 1/n) \rightarrow \log 1 = 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, se ve que

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} H_n - \log(n+1) = \lim_{n \rightarrow \infty} H_n - \log n.$$

El producto parcial $p_n(z)$ de $G(z)$, evaluado en $z = 1$, es

$$p_n(1) = e^{\gamma} \prod_{k=1}^n \left(\frac{k+1}{k} \right) e^{-1/k} = (n+1) e^{\gamma - H_n} = \exp(\gamma - H_n + \log(n+1)).$$

La condición $G(1) = 1$ entonces implica que $e^{\gamma - c} = 1$. Como $\gamma > 0$ por hipótesis, esto conlleva $\gamma - c = 0$, o bien $\gamma = c = \lim_{n \rightarrow \infty} (H_n - \log n)$. \square

Lema 3.26. *La función meromorfa dada por*

$$\frac{1}{G(z)} = \frac{1}{z} e^{-\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n} \right)^{-1} e^{z/n}$$

tiene un polo simple en cada $-k \in -\mathbb{N}$ y coincide con el límite $F(z)$ de (3.10b) para $z \notin -\mathbb{N}$.

Demostración. Los polos (simples) de $1/G(z)$ son los ceros (simples) de $G(z)$, es decir, los enteros no positivos.

Si $p_n(z)$ denota un producto parcial de $G(z)$, entonces

$$\frac{1}{G(z)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{p_n(z)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{k=1}^n \frac{k e^{z/k}}{z+k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! e^{-\gamma z} e^{H_n z}}{z(z+1)\dots(z+k)}.$$

Como $e^{-\gamma z + H_n z} = n^z e^{(H_n - \log n - \gamma)z}$ para cada $n \in \mathbb{N}^*$, se obtiene

$$\frac{1}{G(z)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)\dots(z+n)} = F(z),$$

y, de feria, la convergencia de este límite queda establecido para $z \notin -\mathbb{N}$. Se ha comprobado que la fórmula (3.10b) define F como función meromorfa en \mathbb{C} , con polos simples en $-\mathbb{N}$ solamente. En particular, F es holomorfa en el semiplano derecho $\mathbb{C}_{>}$. \square

Lema 3.27. Si $z \notin -\mathbb{N}$, entonces $F(z+1) = zF(z)$; y $F(1) = 1$.

Demostración. Es fácil evaluar

$$F(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Si $z \notin -\mathbb{N}$, entonces

$$\begin{aligned} F(z+1) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^{z+1}}{(z+1)\dots(z+n+1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{nz}{z+n+1} \right) \left(\frac{n! n^z}{z(z+1)\dots(z+n)} \right) = zF(z). \end{aligned} \quad \square$$

Proposición 3.28. Vale $F(z) = \Gamma(z)$ para todo $z \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$.

Demostración. Basta comprobar que $F(x) = \Gamma(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$ con $0 < x \leq 1$; porque entonces la función holomorfa $F - \Gamma$, definido en la región $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$, se anula en el intervalo real $(0, 1]$ y por tanto es idénticamente cero, por el Corolario 2.63.

Basta mostrar, entonces, que

$$\frac{\Gamma(x)x(x+1)\dots(x+n)}{n! n^x} \rightarrow 1 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty, \quad \text{para } 0 < x \leq 1.$$

En vista del Lema 3.22, es equivalente mostrar que

$$\frac{\Gamma(x+n+1)}{n! n^x} \rightarrow 1 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty, \quad \text{para } 0 < x \leq 1.$$

Tómese $x \in (0, 1]$. So $0 \leq t \leq n$, entonces $t^x \leq n^x$ y $t^{x-1} \geq n^{x-1}$. En cambio, si $t \geq n$, entonces $t^x \geq n^x$ y $t^{x-1} \leq n^{x-1}$. Estas desigualdades conducen a dos estimaciones:

$$\begin{aligned}\Gamma(x+n+1) &= \int_0^\infty t^{x+n} e^{-t} dt \\ &\leq n^x \int_0^n t^n e^{-t} dt + n^{x-1} \int_n^\infty t^{n+1} e^{-t} dt \\ &= n^x \int_0^\infty t^n e^{-t} dt + n^{n+x} e^{-n} + n^{x-1} \int_n^\infty t^n e^{-t} dt, \\ \Gamma(x+n+1) &= \int_0^\infty t^{x+n} e^{-t} dt \\ &\geq n^{x-1} \int_0^n t^{n+1} e^{-t} dt + n^x \int_n^\infty t^n e^{-t} dt \\ &= n^{x-1} \int_0^n t^n e^{-t} dt - n^{n+x} e^{-n} + n^x \int_0^\infty t^n e^{-t} dt.\end{aligned}$$

En los dos casos, se ha aplicado una integración por partes a los integrandos $t^{n+1} e^{-t}$.

Al lado derecho en cada caso, el coeficiente de n^x es $\int_0^\infty t^n e^{-t} dt = \Gamma(n+1) = n!$, mientras que los coeficientes de n^{x-1} son menores que $n!$. Al dividir por $n! n^x$, se obtiene

$$1 + \frac{a_n}{n} - \frac{n^n e^{-n}}{n!} \leq \frac{\Gamma(x+n+1)}{n! n^x} \leq 1 + \frac{b_n}{n} + \frac{n^n e^{-n}}{n!}$$

donde $0 < a_n < 1$ y $0 < b_n < 1$. En consecuencia, como $a_n/n \rightarrow 0$ y $b_n/n \rightarrow 0$, sólo hay que comprobar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n e^{-n}}{n!} = 0, \quad \text{o bien} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! e^n}{n^n} = \infty. \quad (3.15)$$

Si se omiten los primeros n términos en serie de Taylor para e^n , se obtiene

$$e^n \geq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^{n+k}}{(n+k)!} = \frac{n^n}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k n!}{(n+k)!} = \frac{n^n}{n!} \left(1 + \frac{n}{n+1} + \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} + \cdots \right),$$

y la suma entre paréntesis diverge cuando $n \rightarrow \infty$. Esto verifica el límite (3.15), que es lo que hacía falta. \square

La verificación de la coincidencia de las funciones Γ y F , en la última demostración, no fue trivial. Sin embargo, está basado esencialmente en las dos propiedades comunes mencionados en los Lemas 3.22 y 3.27. Si se agrega una tercera hipótesis sobre Γ , a saber, que la función $x \mapsto \log \Gamma(x)$, para $x \in (0, \infty)$, es una *función convexa*, entonces un teorema de Bohr y Mollerup garantiza que estas tres propiedades caracterizan la función gamma.

► Una propiedad muy importante de la función gamma es la siguiente ecuación funcional, la llamada **fórmula de reflexión** de la función gamma.

Proposición 3.29. Vale $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi z}$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

Demostración. Fíjese que los dos lados de esta ecuación son funciones meromorfas en \mathbb{C} , con polos simples en cada $n \in \mathbb{Z}$. Para verificar su igualdad en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, basta mostrar que $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \pi/\operatorname{sen} \pi x$ para $0 < x < 1$.

Si $0 < x < 1$, el factor $\Gamma(1-x)$ está dada por

$$\Gamma(1-x) = \int_0^\infty t^{-x} e^{-t} dt = s \int_0^\infty (us)^{-x} e^{-us} du,$$

al hacer la sustitución $t =: us$ en la primera integral. Luego,

$$\begin{aligned} \Gamma(x)\Gamma(1-x) &= \int_0^\infty s^{x-1} e^{-s} \Gamma(1-x) ds = \int_0^\infty \int_0^\infty u^{-x} e^{-(1+u)s} du ds \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty u^{-x} e^{-(1+u)s} ds du = \int_0^\infty \frac{u^{-x}}{1+u} du. \end{aligned}$$

(Habría que justificar el cambio de orden de integración; esta tarea se deja como un ejercicio.)

Ahora conviene recordar el Ejemplo 2.79, donde una integración de contorno verificó que

$$\int_0^\infty \frac{u^{a-1}}{1+u} du = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi a} \quad \text{para } 0 < a < 1.$$

Al tomar $a = 1-x$, este resultado demuestra que

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi(1-x)} = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi x}.$$

Una demostración alternativa emplea productos infinitos. De la identidad $\Gamma(1-z) = -z\Gamma(-z)$ y las fórmulas

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^\infty \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n}, \quad \frac{1}{\Gamma(-z)} = -z e^{-\gamma z} \prod_{n=1}^\infty \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{z/n},$$

se obtiene, por cancelación de los factores exponenciales en los productos, la relación

$$\frac{1}{\Gamma(z)} \frac{1}{\Gamma(1-z)} = -\frac{1}{z} \frac{1}{\Gamma(z)} \frac{1}{\Gamma(-z)} = z \prod_{n=1}^\infty \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) = \frac{1}{\pi} \operatorname{sen} \pi z.$$

La última igualdad es una consecuencia del resultado del Ejemplo 3.18. □

Otro resultado clásico es la **fórmula de duplicación** de Legendre.

Proposición 3.30. Para todo $z \in \mathbb{C}$, vale:

$$\Gamma(z)\Gamma(z + \frac{1}{2}) = 2^{1-2z} \sqrt{\pi} \Gamma(2z). \quad (3.16)$$

Demostración. Los dos lados de esta ecuación son funciones meromorfas con polos simples en $\frac{1}{2}\mathbb{Z} = \{n/2 : n \in \mathbb{Z}\}$. Hay que verificar que coinciden para $z \in \mathbb{C} \setminus \frac{1}{2}\mathbb{Z}$.

De la fórmula (3.10b) para $\Gamma(z)$, se obtiene

$$\begin{aligned} \Gamma(z)\Gamma(z + \frac{1}{2}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^2 n^{2z + \frac{1}{2}} 2^{2n+2}}{(2z)(2z+1)\dots(2z+2n+1)} \\ &= C_z \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)!(2n+1)^{2z}}{(2z)(2z+1)\dots(2z+2n+1)} = C_z \Gamma(2z), \\ \text{donde } C_z &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^2 2^{2n+2} \sqrt{n}}{(2n+1)!} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2z} = 2^{-2z} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^2 2^{2n+2} \sqrt{n}}{(2n+1)!}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

El último límite a la derecha puede obtenerse del producto sen $\pi z = \pi z \prod_{n \geq 1} (1 - z^2/n^2)$ al tomar $z = \frac{1}{2}$:

$$1 = \frac{\pi}{2} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right) = \frac{\pi}{2} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n)(2n)}$$

lo cual es equivalente a la **fórmula de Wallis**:⁶

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)(2n)}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdots$$

Al reorganizar los términos de este producto, se obtiene

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n))^2}{(3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1))^2} (2n+1),$$

así que

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n) \sqrt{2n+1}}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2^n n!)^2 \sqrt{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Al sustituir esta expresión en (3.17), resulta

$$C_z = 2^{-2z} 2\sqrt{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} = 2^{1-2z} \sqrt{\pi}$$

y la igualdad (3.16) queda establecida. \square

⁶John Wallis, matemático de Oxford, propuso esta fórmula en 1665 como una conjetura, a partir una interpolación entre áreas debajo de curvas polinomiales. Quiso calcular el área del cuadrante debajo de la curva $y = (1-x^2)^{1/2}$ pero no disponía del teorema binomial.

3.4 La función zeta de Riemann

Una función muy importante en la teoría de números es la función zeta, definida inicialmente como una serie cuyos términos son potencias, todos con el mismo exponente, de los enteros positivos. Si x es real, con $x > 1$, la serie positiva $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^x = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-x}$ es convergente, por comparación con la integral $\int_1^{\infty} t^{-x} dt = 1/(x-1)$.

Lema 3.31. *La serie*

$$\zeta(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}, \quad \text{para } \Re z > 1, \quad (3.18)$$

define una función holomorfa en el semiplano $\Re z > 1$.

Demostración. Basta demostrar, en vista del Corolario 3.5, que la serie converge uniformemente en el semiplano cerrado $\Re z \geq a$, para cada $a > 1$.

Como $x \geq a \implies |n^{-z}| = n^{-x} \leq n^{-a}$ para cada $n \in \mathbb{N}^*$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-a}$ converge, el criterio de Weierstrass demuestra la convergencia uniforme para $\Re z \geq a$. \square

Euler logró relacionar la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$ con el producto infinito

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - p_k^{-z}} = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - p_k^{-z})^{-1} \quad (3.19)$$

que converge (como se verá en seguida) para $\Re z > 1$; donde $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, y en general $(p_k)_{k \geq 1}$ es la lista de los números primos en \mathbb{N} .

Proposición 3.32. *La fórmula (3.19) de Euler define una función holomorfa en $\Re z > 1$, que además coincide la suma de la serie (3.18).*

Demostración. Para $x > 1$, la serie positiva $\sum_{k=1}^{\infty} p_k^{-x}$ es una suma de algunos de los términos de la serie (3.18), así que esta serie también converge, con $\sum_{k=1}^{\infty} p_k^{-x} < \zeta(x)$.

Como $|p_k^{-z}| = p_k^{-x}$, el producto infinito $f(z) := \prod_{k=1}^{\infty} (1 - p_k^{-z})$ converge absolutamente; y además uniformemente en un semiplano $\Re z \geq a$, si $a > 1$. Es obvio que ningún factor del producto se anula, porque

$$|p_k^{-z}| = p_k^{-x} = e^{-x \log p_k} < 1 \quad \text{para } x > 1.$$

Luego el producto $f(z)$ converge en \mathbb{C}^\times ; y su recíproco

$$\frac{1}{f(z)} = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - p_k^{-z})^{-1}$$

converge también a un límite en \mathbb{C}^\times , uniformemente sobre compactos en $\Re z > 1$.

Para verificar que $1/f(z) = \zeta(z)$ en este semiplano, basta mostrar igualdad para $z = x > 1$.

Para $x > 1$, $n \in \mathbb{N}^*$, sea $q_n(x)$ el producto parcial

$$q_n(x) := \prod_{k=1}^n \frac{1}{1 - p_k^{-x}} = \prod_{k=1}^n (1 + p_k^{-x} + p_k^{-2x} + p_k^{-3x} + \dots).$$

Al multiplicar estos n factores, se obtiene la serie $\sum p_1^{-r_1 x} p_2^{-r_2 x} \dots p_n^{-r_n x}$ donde se suma sobre los índices $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{N}^*$. Por la propiedad de factorización única en \mathbb{N}^* , los términos de esta serie son distintos; todos son de la forma m^{-x} para algunos $m \in \mathbb{N}$; y los términos $\{1, 2^{-x}, 3^{-x}, \dots, n^{-x}\}$ aparecen en la suma. Por la tanto, vale

$$\sum_{m=1}^n m^{-x} \leq q_n(x) \leq \sum_{m=1}^{\infty} m^{-x} = \zeta(x).$$

Al dejar $n \rightarrow \infty$, se obtiene $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n(x) = \zeta(x)$ cuando $x > 1$, que es lo que faltaba comprobar. \square

Corolario 3.33. La función ζ dada por (3.18) no se anula en el semiplano $\Re z > 1$. \square

Al igual que la función gamma, la función zeta posee una continuación meromorfa a todo el plano complejo. Si x es real, con $x > 1$, fíjese que la función $t \mapsto t^{-x}$ es decreciente para $t > 1$, así que

$$\int_n^{n+1} t^{-x} dt \leq n^{-x} \leq \int_{n-1}^n t^{-x} dt \quad \text{para } n \geq 2.$$

Al sumar estas desigualdades, se obtiene

$$\frac{1}{x-1} = \int_1^{\infty} t^{-x} dt \leq \zeta(x) \leq 1 + \int_1^{\infty} t^{-x} dt = \frac{x}{x-1} \quad \text{para } x > 1.$$

Entonces $\zeta(x) \rightarrow \infty$ cuando $x \downarrow 1$. La continuación meromorfa de la función ζ entonces debe tener un polo en 1.

Lema 3.34. Para $\Re z > 1$, la siguiente igualdad es válida:

$$\zeta(z) \Gamma(z) = \int_0^{\infty} \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt. \quad (3.20)$$

Demostración. Si $n \in \mathbb{N}^*$, el cambio de variable $u = nt$ muestra que

$$\int_0^\infty t^{z-1} e^{-nt} dt = n^{-z} \int_0^\infty u^{z-1} e^{-u} du = \frac{\Gamma(z)}{n^z} \quad \text{para } \Re z > 0.$$

Entonces, para $\Re z > 1$, vale

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty t^{z-1} e^{-nt} dt \right).$$

Para obtener la fórmula (3.20), bastaría cambiar la suma con la integral en la última ecuación. A continuación, se justificará este intercambio.

Considérese la suma parcial

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k^{-z} &= \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty t^{z-1} \left(\sum_{k=1}^n e^{-kt} \right) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt - \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty \frac{t^{z-1} e^{-nt}}{e^t - 1} dt \end{aligned}$$

porque

$$\sum_{k=1}^n e^{-kt} = \frac{e^{-t} - e^{-(n+1)t}}{1 - e^{-t}} = \frac{1 - e^{-nt}}{e^t - 1}.$$

Estas integrales impropias convergen en $t = 0$, porque $x > 1$. Dado $\varepsilon > 0$, tómesese $\delta > 0$ tal que

$$\int_0^\delta \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} dt < \frac{\varepsilon}{2}; \quad \text{y sea } C_\delta := \int_\delta^\infty \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} dt.$$

Ahora tómesese $N \in \mathbb{N}^*$ tal que $C_\delta e^{-N\delta} < \varepsilon/2$. Entonces, para $n \geq N$, vale

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\infty \frac{t^{z-1} e^{-nt}}{e^t - 1} dt \right| &\leq \int_0^\delta \frac{t^{x-1} e^{-nt}}{e^t - 1} dt + \int_\delta^\infty \frac{t^{x-1} e^{-nt}}{e^t - 1} dt \\ &\leq \int_0^\delta \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} dt + e^{-n\delta} \int_\delta^\infty \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} dt < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto, para cada z con $\Re z > 1$, se concluye que

$$\int_0^\infty \frac{t^{z-1} e^{-nt}}{e^t - 1} dt \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

En consecuencia, la igualdad (3.20) es válida en el semiplano $\Re z > 1$. \square

Proposición 3.35. *La función ζ se extiende a una función meromorfa en todo \mathbb{C} , con un único polo simple en 1.*

Demostración. La fórmula (3.20) permite escribir el producto $\zeta(z)\Gamma(z)$ en la forma

$$\zeta(z)\Gamma(z) = \int_0^1 \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt + \int_1^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt =: g(z) + h(z),$$

donde la segunda integral define una función *entera*,

$$h(z) := \int_1^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt.$$

En efecto, este límite es uniforme en cada semiplano cerrado $\Re z \geq b$ con $b \in \mathbb{R}$; y las integrales $\int_1^n t^{z-1} dt / (e^t - 1)$ definen funciones enteras de z , por la Proposición 3.8.

Para analizar la otra integral $g(z)$, conviene recordar la serie de Taylor

$$\frac{t}{e^t - 1} = 1 - \frac{t}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_{2m}}{(2m)!} t^{2m}$$

donde los B_{2m} son los números de Bernoulli. Esta serie de potencias tiene radio de convergencia 2π , porque $e^t - 1 \neq 0$ para $0 < |t| < 2\pi$. En consecuencia, vale

$$\frac{t^{z-1}}{e^t - 1} = t^{z-2} - \frac{t^{z-1}}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_{2m}}{(2m)!} t^{z+2m-2}.$$

Al integrar término por término, se obtiene la fórmula

$$g(z) := \int_0^1 \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{2z} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_{2m}}{(2m)!} \frac{1}{z+2m-1}. \quad (3.21)$$

Por convergencia uniforme sobre compactos en discos $|z| < R$, es fácil verificar que $g(z)$ es una función meromorfa en \mathbb{C} , con polos simples en $1, 0, -1, -3, -5, \dots$

La continuación de ζ al plano complejo está dada por

$$\zeta(z) := \frac{g(z)}{\Gamma(z)} + \frac{h(z)}{\Gamma(z)}.$$

Por el Lema 3.24, la función $1/\Gamma(z)$ es entera, con ceros simples en $0, -1, -2, -3, \dots$ así que el segundo sumando es entero; el primer sumando tiene singularidades removibles en $0, -1, -3, -5, \dots$ y un polo en 1, con residuo

$$\operatorname{Res}_{z=1} \zeta(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1)g(z)}{\Gamma(z)} = \frac{1}{\Gamma(1)} = 1.$$

Además, $\zeta(z)$ tiene *ceros simples* en $z = -2, -4, -6, \dots$ los cuales se llaman los *ceros triviales* de la función zeta. \square

► La función zeta obedece una ecuación funcional que conduce a una *propiedad de reflexión*. Defínase la función auxiliar

$$\xi(z) := \frac{z(z-1)}{2} \pi^{-z/2} \Gamma(z/2) \zeta(z). \quad (3.22)$$

Obsérvese que ξ es holomorfa en el semiplano $\Re z > 1$, con posibles singularidades en 0 y 1. Pero $(z-1)\zeta(z)$ es una función entera, y $\frac{1}{2}z\Gamma(\frac{1}{2}z) = \Gamma(\frac{1}{2}z+1)$ es holomorfa en la región $\Re z > -2$, así que estas singularidades son removibles. Además, $z \mapsto \Gamma(\frac{1}{2}z)$ tiene polos simples en $-2, -4, -6, \dots$ donde ζ tiene ceros simples. En conclusión: la función ξ definido por (3.22) es una *función entera*.

Proposición 3.36. *La función ξ obedece la identidad: $\xi(z) \equiv \xi(1-z)$.* \square

Para la demostración de esta Proposición, véase, por ejemplo, la Sección 4.3 del libro de Ahlfors. No será demostrada aquí; pero es justo mencionar algunos corolarios. En primer lugar, en vista de la propiedad de reflexión $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi \csc \pi z$ de la función gamma, se obtiene la **ecuación funcional** para la función zeta:

$$\zeta(z) \equiv 2(2\pi)^{z-1} \operatorname{sen} \frac{\pi z}{2} \Gamma(1-z) \zeta(1-z).$$

En particular, se ve que los únicos ceros de ζ en el semiplano $\Re z < 0$ son los ceros triviales $-2, -4, -6, \dots$ ya mencionados. La función ζ tiene una infinidad de otros ceros en la franja vertical $0 < \Re z < 1$. La **conjetura de Riemann** dice que todos estos *ceros no triviales* quedan sobre la recta $\Re z = \frac{1}{2}$. Hay un premio de \$1 000 000, ofrecido por el Clay Mathematical Institute, para la confirmación o refutación de esta conjetura.

Lema 3.37. *Vale $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$.*

Demostración. Es cuestión de evaluar la función ξ en 0 y en 1:

$$\begin{aligned} \xi(0) &= \lim_{z \rightarrow 0} (z-1) \pi^{-z/2} \Gamma(\frac{1}{2}z+1) \zeta(z) = -\zeta(0), \\ \xi(1) &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{2}z \pi^{-z/2} \Gamma(\frac{1}{2}z) (z-1) \zeta(z) = \frac{1}{2} \pi^{-1/2} \pi^{1/2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

La igualdad $\xi(0) = \xi(1)$ dice que $-\zeta(0) = \frac{1}{2}$. \square

Cabe mencionar otra fórmula útil para la función zeta:

$$\zeta'(0) = -\frac{1}{2} \log(2\pi).$$

Para una demostración, véase la Sección 1.3 del libro: George E. Andrews, Richard Askey y Ranjan Roy, *Special Functions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

4 Aplicaciones Conformes

El objetivo de este capítulo corto es un estudio de la naturaleza geométrica de las funciones holomorfas. Resulta que una función holomorfa f , en un vecindario de cualquier punto z_0 de su dominio donde $f'(z_0) \neq 0$, tiene la propiedad de *conformidad*, que significa la preservación de ángulos entre curvas.

Definición 4.1. Considérese dos curvas suaves C_1 y C_2 que pasan por un punto z_0 . Es posible parametrizarlas simultáneamente por dos funciones diferenciables $z_1: [a, b] \rightarrow U$ y $z_2: [a, b] \rightarrow U$ tales que $z_1(t_0) = z_2(t_0) = z_0$ para algún $t_0 \in (a, b)$. El **ángulo entre las curvas** C_1 y C_2 es su punto de intersección z_0 se define como el ángulo entre las rectas tangentes respectivas:

$$\theta := \arg z_2'(t_0) - \arg z_1'(t_0) = \arg \left(\frac{z_2'(t_0)}{z_1'(t_0)} \right). \quad (4.1)$$

Obsérvese que $z_1'(t_0) \neq 0$ porque la parametrización es regular, por hipótesis; y que se toma $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ para aprovechar la propiedad homomórfica del argumento. Sin embargo, en muchos ejemplos particulares se puede usar el valor principal del argumento.

Hay que tomar en cuenta *el orden de las dos curvas* C_1 y C_2 . De la fórmula (4.1) se ve que el ángulo entre C_2 y C_1 es $-\theta$ en vez de θ .

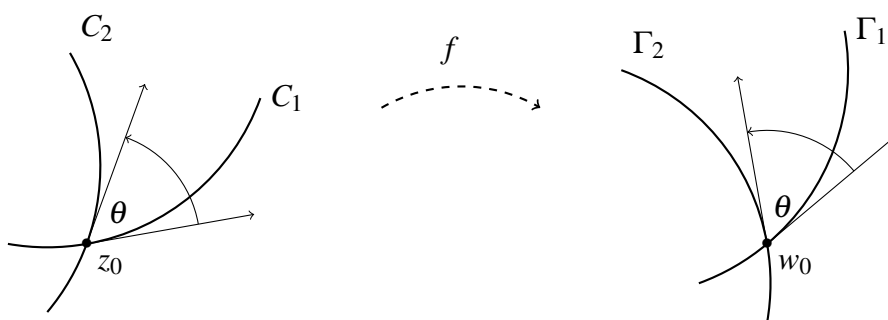


Figura 4.1: Preservación de ángulos entre curvas

Lema 4.2. Sea $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa y sea $z_0 \in U$ tal que $f'(z_0) \neq 0$. Si C_1 y C_2 son dos curvas suaves con trazas en U que pasan por un punto z_0 , sean Γ_1 y Γ_2 sus imágenes bajo la función f , pasando por $w_0 := f(z_0)$. Entonces el ángulo entre Γ_1 y Γ_2 en w_0 es igual al ángulo entre C_1 y C_2 en z_0 . (Véase la Figura 4.1.)

Demostración. Concretamente, Γ_1 puede parametrizarse por $w_1(t) := f(z_1(t))$ y Γ_2 por $w_2(t) := f(z_2(t))$, para $t \in [a, b]$. Al aplicar la regla de la cadena en $t = t_0$, se obtiene:

$$\begin{aligned} w_1'(t_0) &= f'(z_1(t_0)) z_1'(t_0) = f'(z_0) z_1'(t_0), \\ w_2'(t_0) &= f'(z_2(t_0)) z_2'(t_0) = f'(z_0) z_2'(t_0). \end{aligned} \quad (4.2)$$

El ángulo entre Γ_1 y Γ_2 se obtiene de la fórmula (4.1):

$$\arg\left(\frac{w_2'(t_0)}{w_1'(t_0)}\right) = \arg\left(\frac{f'(z_0) z_2'(t_0)}{f'(z_0) z_1'(t_0)}\right) = \arg\left(\frac{z_2'(t_0)}{z_1'(t_0)}\right) = \theta.$$

Fíjese que la condición $f'(z_0) \neq 0$ permite su cancelación como factor común en estas fracciones. \square

Nótese que $\arg z_1'(t_0)$ es el ángulo entre la recta tangente a C_1 y el eje x positivo. Entonces la fórmula

$$\arg w_1'(t_0) = \arg f'(z_0) + \arg z_1'(t_0)$$

dice que la aplicación f actúa, cerca de z_0 , como una *rotación* por un ángulo $\arg f'(z_0)$ —amén de un *cambio de escala* local. Este cambio de escala está dado por

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} = |f'(z_0)| \neq 0. \quad (4.3)$$

Fíjese que este **factor de dilatación local** es positivo y *no depende de la dirección* $\arg(z - z_0)$ a partir de z_0 . Esta dilatación es otro aspecto de la conformidad de la aplicación holomorfa f .

Definición 4.3. Si U es una región del plano \mathbb{R}^2 y si $(x_0, y_0) \in U$, una aplicación continua $h: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ es **conforme en** (x_0, y_0) si h preserva ángulos entre curvas suaves que pasan por ese punto. La función h es **conforme en** U si es conforme en cada punto de U .

Ejemplo 4.4. La *reflexión* $z \mapsto \bar{z}$ no es conforme, porque $\arg \bar{z} = -\arg z$ para $z \in \mathbb{C}^\times$; por lo tanto, el ángulo θ de (4.1) se transformaría en $-\theta$. Esta reflexión es **isógona**, en el sentido de que la magnitud del ángulo $|\text{Arg } z_2'(t_0) - \text{Arg } z_1'(t_0)|$ es invariante bajo $z \mapsto \bar{z}$. Como esta reflexión conserva magnitudes de ángulos pero cambia sus signos, a veces se dice que es “anticonforme”; una aplicación conforme o anticonforme es isógona. \diamond

Es posible mostrar que una transformación entre dominios del plano complejo es conforme si y sólo si es holomorfa, con una derivada que no se anula. Aquí sólo se

indicará la conexión con las ecuaciones de Cauchy y Riemann (1.23). Si $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ es holomorfa en $U \subset \mathbb{C}$, entonces su derivada está dada por¹

$$f'(x + iy) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x, y).$$

El *jacobiano* de la transformación de \mathbb{R}^2 está dado por

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \partial u / \partial x & \partial u / \partial y \\ \partial v / \partial x & \partial v / \partial y \end{vmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = |f'(x + iy)|^2.$$

En otras palabras, una función holomorfa es conforme donde el jacobiano asociado es positivo; la magnificación local de áreas está dada por el cuadrado del cambio de escala (4.3).

► Si $f(z_0) = w_0$ y $f'(z_0) \neq 0$, entonces hay un disco abierto $D(z_0; \delta)$ en donde la función f es inyectiva. En cambio, si $f'(z_0) = 0$, entonces, por la demostración del Lema 2.74, hay un entero $m \geq 2$ tal que $z \mapsto f(z) - w_0$ tiene un cero de orden m en z_0 , y además hay un disco abierto $D(z_0; \delta)$ en donde f es m -a-uno. Por lo tanto, una función holomorfa f es conforme en z_0 si y sólo si $f'(z_0) \neq 0$, si y sólo si f es *univalente* en un vecindario de z_0 . El Lema 2.74 también garantiza que la función inversa $w \mapsto z = g(w)$ es holomorfa cerca de w_0 , con $g'(w_0) = 1/f'(z_0)$.

Ejemplo 4.5. La función $\exp: z \mapsto e^z$ tiene derivada e^z que no se anula, y por tanto es localmente univalente. Pero \exp no es inyectiva en todo \mathbb{C} , sino en cada franja horizontal $V_\varphi = \{z : \varphi - \pi < \Im z < \varphi + \pi\}$. Como la función $x \mapsto \exp(x + i(\varphi \pm \pi)) = -e^x e^{i\varphi}$ parametriza una semirrecta a partir de 0, se obtiene una biyección holomorfa $\exp: V_\varphi \rightarrow \mathbb{C} \setminus (-e^{i\varphi} \mathbb{R}_+)$, cuya función inversa es una rama del logaritmo. \diamond

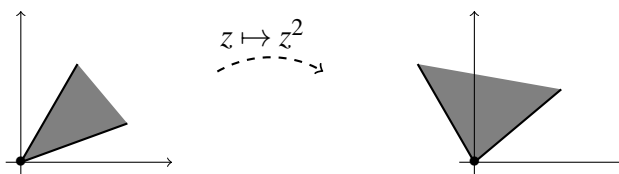


Figura 4.2: Duplicación de ángulos en el origen

¹La diferenciabilidad de f implica que la derivada puede calcularse al tomar derivadas parciales en cualquier dirección fija.

Ejemplo 4.6. La función holomorfa $f(z) = z^2$ no es conforme en $z = 0$.

Es evidente que $\text{Arg } z^2 = 2 \text{Arg } z$ si $\Re z > 0$; los ángulos en $z = 0$ se duplican (Figura 4.2).

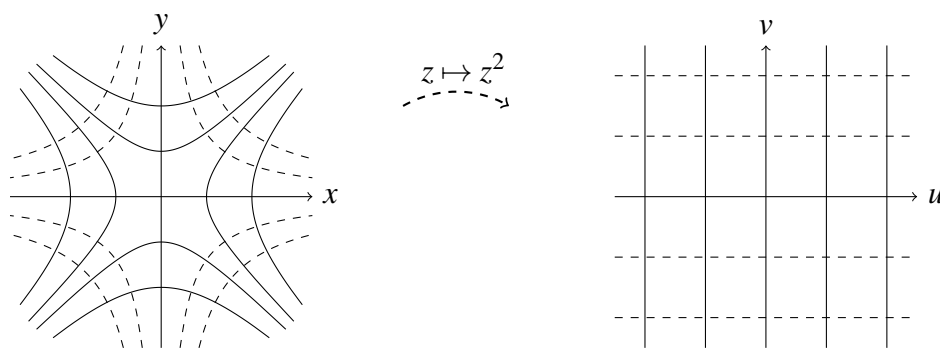


Figura 4.3: Curvas de nivel para $w = z^2$

Sin embargo, la aplicación $z \mapsto w = z^2$ sí es conforme en cada $z_0 \neq 0$. Para graficar esta aplicación, se puede tomar partes reales e imaginarias:

$$w = u + iv = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy,$$

así que $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$. Las **curvas de nivel** $u = u_0$ y $v = v_0$ son *hipérbolas* $x^2 - y^2 = u_0$ y $2xy = v_0$ en el plano z , que corresponden a las rectas respectivas $u = u_0$ y $v = v_0$ en el plano w .

Estas rectas en el plano w forman dos familias mutuamente perpendiculares: cada recta de la primera familia es perpendicular a cada recta de la segunda. En el plano z , las curvas de nivel (que no pasan por el origen) forman dos familias de hipérbolas, también mutuamente ortogonales: véase la Figura 4.3. \diamond

A esta altura, se puede plantear el siguiente *problema*: dadas dos regiones U y V del plano complejo \mathbb{C} (o bien de la esfera de Riemann \mathbb{C}_∞), *hallar*, si fuera posible, *una aplicación conforme biyectiva* $f: U \rightarrow V$. La función inversa $g: V \rightarrow U$, como ya se ha observado, es también conforme.

Es necesario, en primer lugar, que U y V sean *regiones homeomorfas* (porque las funciones holomorfas f y g , si existen, son también continuas). En particular, si U es simplemente conexa, entonces V también debe ser simplemente conexa. Resulta, sin embargo, que esta condición necesaria no es suficiente.

Lema 4.7. *No hay isomorfismo conforme alguno entre el plano complejo \mathbb{C} y el disco abierto unitario \mathbb{D} .*

Demostración. Fíjese que las regiones \mathbb{C} y \mathbb{D} sí son homeomorfos; por ejemplo, la aplicación

$$r e^{i\theta} \mapsto \frac{r}{1+r} e^{i\theta} \quad \text{con inverso} \quad s e^{i\theta} \mapsto \frac{s}{1-s} e^{i\theta}$$

es un homeomorfismo de \mathbb{C} en \mathbb{D} .

Si hubiera una función *holomorfa* univalente $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$, entonces f sería una función entera acotada; pero el teorema de Liouville dice que f entonces sería constante y por tanto no podría ser univalente. \square

► Algunas funciones *meromorfas* definen aplicaciones conformes entre regiones de la esfera de Riemann \mathbb{C}_∞ . Una función $f(z)$ es conforme en el punto ∞ si la función $h(z) := f(1/z)$ es conforme en 0, es decir, si $h'(0) \neq 0$. Entonces, cada *fracción lineal*²

$$w = s(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad \text{con inverso} \quad z = t(w) = \frac{\delta w - \beta}{-\gamma w + \alpha},$$

que satisface $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, es un **automorfismo conforme** de \mathbb{C}_∞ ; y resulta que no hay otros. Fíjese que

$$s'(z) = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\gamma z + \delta)^2} \neq 0 \quad \text{para} \quad z \in \mathbb{C}.$$

Aunque $\mathbb{C}_\infty \approx \mathbb{S}^2$ es simplemente conexo, también es compacto, así que no es homeomorfo ni a \mathbb{C} ni a \mathbb{D} .

Un teorema profundo de Riemann dice que *cualquier región simplemente conexa* $U \subset \mathbb{C}$, con $U \neq \mathbb{C}$, *es conformemente isomorfa al disco abierto unitario* \mathbb{D} . Para la demostración, véase, por ejemplo, la Sección 6.1 del libro de Ahlfors.

A continuación se verá algunos ejemplos de aplicaciones conformes entre dominios preasignados.

Ejemplo 4.8. Hallar un isomorfismo conforme entre el disco abierto \mathbb{D} y el semiplano abierto $\mathbb{C}_> = \{z \in \mathbb{C} : \Re z > 0\}$.

En la esfera de Riemann \mathbb{C}_∞ , estas dos regiones son hemisferios abiertos. Se busca una **transformación homográfica**,³ que lleva círculos en círculos en \mathbb{C}_∞ , dada por una fracción lineal: $w = (\alpha z + \beta)/(\gamma z + \delta)$, que lleva \mathbb{D} en $\mathbb{C}_>$.

²Los libros clásicos de la teoría de variable compleja llaman **aplicación bilineal** a $z \mapsto s(z)$, porque la aplicación inversa $w \mapsto t(w)$ es también una fracción lineal. No se trata de una función de dos variables.

³Esta terminología, empleada por Arthur Cayley, significa una aplicación de \mathbb{C}_∞ en sí misma que lleva círculos en círculos.

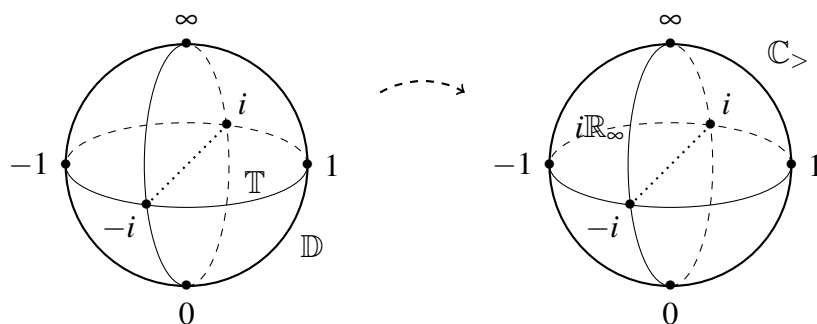


Figura 4.4: Rotación de la esfera de Riemann

Geoméricamente, se busca una *rotación* de la esfera que lleva un hemisferio en el otro y también relaciona los “ecuadores” correspondientes. El ecuador de \mathbb{D} es el círculo \mathbb{T} ; el borde de $\mathbb{C}_>$ es el círculo $i\mathbb{R}_\infty$.

El Lema 1.25 dice que una fracción lineal s queda determinada por tres puntos distintos. La rotación buscada tiene el siguiente efecto sobre los puntos cardinales (véase la Figura 4.4):

$$i \mapsto i, \quad -i \mapsto -i, \quad 1 \mapsto \infty, \quad -1 \mapsto 0, \quad 0 \mapsto 1, \quad \infty \mapsto -1.$$

Basta emplear tres de estas condiciones

$$\begin{aligned} 0 \mapsto 1 &\implies 1 = \beta/\delta \implies \delta = \beta, \\ -1 \mapsto 0 &\implies 0 = \beta - \alpha \implies \alpha = \beta, \\ 1 \mapsto \infty &\implies 0 = \gamma + \delta \implies \gamma = -\delta, \end{aligned}$$

y por lo tanto, la función lineal buscada es

$$w = \frac{z+1}{1-z}.$$

Es fácil comprobar que $-i$ e i son puntos fijos de esta transformación. \diamond

Ejemplo 4.9. La *inversión* $z \mapsto w = 1/z$ llena \mathbb{D} —el hemisferio sur— en $\mathbb{C}_\infty \setminus \overline{\mathbb{D}}$ —el hemisferio norte. Al omitir 0 de \mathbb{D} y ∞ de $\mathbb{C}_\infty \setminus \overline{\mathbb{D}}$, esta aplicación lleva el *disco perforado* $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ en el *exterior del disco* $\mathbb{C}_\infty \setminus \mathbb{D}$.

Geoméricamente, esta transformación es la composición de la reflexión en \mathbb{T} , dada por $z \mapsto 1/\bar{z}$, la cual es la “inversión” de la geometría clásica, con la reflexión en \mathbb{R} , dada por $\bar{w} \mapsto w$. Esta es la rotación de la esfera de Riemann que deja fijos los puntos -1 y 1 .

(La reflexiones mencionadas son anticonformes; la rotación $z \mapsto w = 1/z$ es conforme.) \diamond

Las transformaciones homográficas de \mathbb{C}_∞ forman un *grupo*,⁴

$$\begin{aligned} PSL(2, \mathbb{C}) &:= \left\{ z \mapsto s(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} : \alpha\delta - \beta\gamma = 1 \right\} \\ &\longleftrightarrow \left\{ A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) : \det A = 1 \right\} / \left\{ \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned} \quad (4.4)$$

que *actúa transitivamente sobre los círculos* en \mathbb{C}_∞ . En efecto, por el Lema 1.25, este grupo actúa transitivamente sobre triples (z_1, z_2, z_3) de puntos distintos; y cada triple determina un círculo:

$$\{z \in \mathbb{C}_\infty : [z, z_1; z_2, z_3] \in \mathbb{R}\} \mapsto \{s(z) \in \mathbb{C}_\infty : [s(z), s(z_1); s(z_2), s(z_3)] \in \mathbb{R}\},$$

donde $[z, z_1; z_2, z_3] = [s(z), s(z_1); s(z_2), s(z_3)]$ es la razón doble de la Definición 1.26.

Ejemplo 4.10. Sea $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ un *automorfismo conforme*. Como corolarios del Lema de Schwarz, ya se sabe lo siguiente.

- (a) Las *rotaciones* del plano $z \mapsto e^{i\theta} z$, para $e^{i\theta} \in \mathbb{T}$, son las únicas biyecciones holomorfas $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ tales que $f(0) = 0$. [Lema 2.73.]
- (b) Las fracciones lineales $s_\alpha(z) := \frac{\alpha - z}{1 - \bar{\alpha}z}$, para $\alpha \in \mathbb{D}$, son biyecciones holomorfas de \mathbb{D} que cumplen $s_\alpha(0) = \alpha$ y $s_\alpha(\alpha) = 0$. [Fórmula (2.35).]
- (c) Cualquier biyección holomorfa $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ tiene la forma $f(z) = e^{i\theta} s_\alpha(z)$ para algún $e^{i\theta} \in \mathbb{T}$ y algún $\alpha \in \mathbb{D}$. [Proposición 2.75.]

En resumen: los automorfismos conformes de \mathbb{D} forman un *grupo*, parametrizado por el conjunto $\mathbb{T} \times \mathbb{D}$. \diamond

Ejemplo 4.11. Sea $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ un *automorfismo conforme* del plano complejo \mathbb{C} . Entonces f es una función entera univalente.

⁴La correspondencia $A \mapsto s$ de (4.4) es un homomorfismo de grupos. El grupo de matrices complejas de determinante 1 se denota $SL(2, \mathbb{C})$. Como las matrices A y $-A$ corresponden a la misma s , el homomorfismo es dos-a-uno; el grupo cociente $SL(2, \mathbb{C})/\{\pm 1\}$ se denota $PSL(2, \mathbb{C})$, el **grupo proyectivo especial lineal** del espacio vectorial \mathbb{C}^2 .

Colóquese $g(z) := f(1/z)$ para $z \neq 0$. Entonces g posee una singularidad aislada en 0, la cual no es removible: si g fuera acotada cerca de 0, entonces f sería acotada en todo \mathbb{C} y por ende constante, lo cual es imposible.

La singularidad de g en 0 tampoco es esencial: como g es uno-a-uno en \mathbb{C}^\times , resulta

$$\{g(z) : 0 < |z| < 1\} \cap \{g(z) : 1 < |z| < \infty\} = \emptyset.$$

Por el teorema de la aplicación abierta, estos dos conjuntos son abiertos en \mathbb{C} ; en consecuencia, el conjunto $\{g(z) : 0 < |z| < 1\}$ no es denso en \mathbb{C} . Pero el Teorema 2.45, de Casorati y Weierstrass, asegura que un vecindario (perforado) de una singularidad esencial debe ser denso en \mathbb{C} .

Por lo tanto, g tiene un *polo* en 0; es decir, f tiene un polo en ∞ , así que f es un *polinomio* de orden $n \geq 1$. Si fuera $n > 1$, entonces cada polinomio $z \mapsto f(z) - w$ tendría n raíces —contadas con multiplicidad— y por ende f no sería inyectiva. Luego $n = 1$. En síntesis, se ha obtenido que

$$f(z) = \alpha z + \beta \quad \text{con} \quad \alpha \in \mathbb{C}^\times, \beta \in \mathbb{C}. \quad (4.5)$$

Cada **transformación afín** (4.5) es evidentemente un isomorfismo conforme de \mathbb{C} , cuyo inverso $w \mapsto (w - \beta)/\alpha = \alpha^{-1}w - \beta\alpha^{-1}$ es también afín. Los automorfismos conformes de \mathbb{D} forman el **grupo afín**, parametrizado por el conjunto $\mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}$. \diamond

Ejemplo 4.12. La **función de Zhukovsky** se define por⁵

$$w = f(z) := \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \quad \text{para} \quad z \neq 0.$$

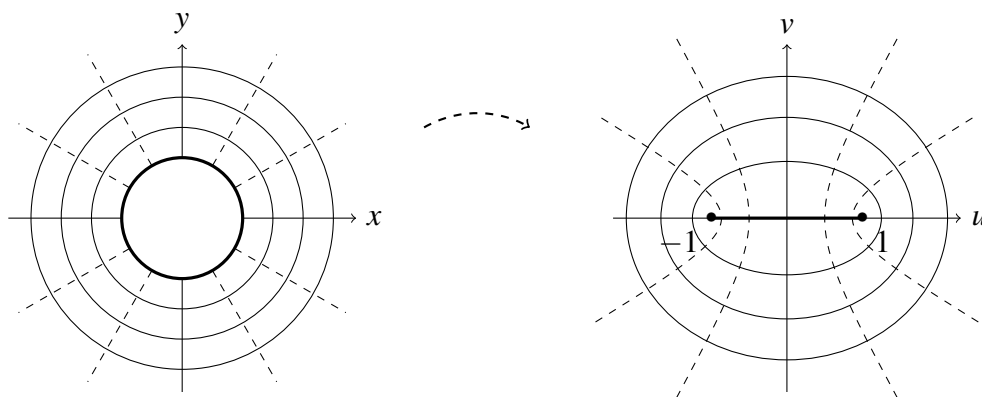
Su derivada es $f'(z) = (z^2 - 1)/2z^2$, la cual se anula en 1 y -1 . Por ser $f(1/z) = f(z)$, f es inyectiva en cualquier región $U \subset \mathbb{C}_\infty \setminus \{-1, 1\}$ tal que $z \in U \implies z^{-1} \notin U$.

Al tomar en cuenta que $z \mapsto w$ es dos-a-uno en $\mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1\}$, se puede resolver la ecuación $z^2 - 2wz + 1 = 0$ por la fórmula

$$z = w \pm \sqrt{w^2 - 1}.$$

Para analizar esta fórmula, hay que elegir una rama de la raíz cuadrada —por ejemplo, la rama determinada por $\sqrt{1} = +1$ definida en el plano cortado $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. En vista de que $(w + \sqrt{w^2 - 1})(w - \sqrt{w^2 - 1}) = 1$, es posible elegir el signo de modo consistente en U .

⁵Bajo esta aplicación, la imagen de ciertos círculos dan el *perfil alar* (sección transversal de un ala) usado por el ingeniero ruso Nikolai Zhukovsky en sus estudios pioneros del principio de la sustentación aerodinámica. Su apellido cirílico también está transliterado por Zhukovskiy o Joukowski, entre muchas otras variantes.


 Figura 4.5: Curvas de imagen para $w = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$

Al escribir $w = u + iv = \frac{1}{2}(re^{i\theta} + r^{-1}e^{-i\theta})$, se obtiene

$$u = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right) \cos \theta, \quad v = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right) \operatorname{sen} \theta. \quad (4.6)$$

Para $r = 1$, se obtiene $u = \cos \theta$, $v = 0$. Luego la imagen del círculo de radio 1 en el plano z es el intervalo real $[-1, 1]$ en el plano w , es decir, $f(\mathbb{T}) = [-1, 1]$.

En consecuencia, f define un isomorfismo conforme entre el disco unitario \mathbb{D} y la región $\mathbb{C}_\infty \setminus [-1, 1]$. Es evidente que $z \in \mathbb{D} \implies 1/z \notin \mathbb{D}$ y que $f'(z) \neq 0$ en \mathbb{D} . Para comprobar que $f|_{\mathbb{D}}$ es inyectiva, sea $a := \frac{1}{2}(r_0^{-1} + r_0)$, $b := \frac{1}{2}(r_0^{-1} - r_0)$ con $0 < r_0 < 1$. Entonces (véase la Figura 4.5) la imagen del círculo $r = r_0$ es la elipse

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1, \quad (4.7)$$

parametrizada por $\theta \mapsto (a \cos \theta, b \operatorname{sen} \theta)$. Los *focos* de esta elipse son los puntos 1 y -1 . Como $r_0 \mapsto a$ establece una biyección —decreciente— entre $(0, 1)$ y $(1, \infty)$, se concluye que f define un isomorfismo conforme entre $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ y $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$. Además, $f(0) = \infty$ en la esfera de Riemann. La función inversa está dada por $z = w - \sqrt{w^2 - 1}$ en este caso.

De igual manera, los círculos $r = r_0^{-1}$, fuera de \mathbb{D} , se transforman en la misma familia (4.7) de elipses confocales. Luego f define un isomorfismo conforme entre $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ y $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$, cuya función inversa está dada por $z = w + \sqrt{w^2 - 1}$.

Para cada θ fijo, las fórmulas (4.6) establecen una biyección de la semirrecta $\theta = \theta_0$, $r > 1$ con la hipérbola $u^2/\cos^2 \theta_0 - v^2/\operatorname{sen}^2 \theta_0 = 1$. Estas hipérbolas también tiene focos en 1 y -1 , y son ortogonales a las elipses (4.7), porque las semirrectas $\theta = \theta_0$ son ortogonales a los círculos $r = r_0^{-1}$ y la transformación $z \mapsto w$ es conforme. \diamond

Ejercicios

1.1 Ejercicios sobre el plano complejo

Ejercicio 1.1. (a) Expresar $\sin 3\theta$, $\cos 3\theta$, $\sin 4\theta$, $\cos 4\theta$, $\sin 5\theta$, $\cos 5\theta$ en términos de $\sin \theta$ y $\cos \theta$.

(b) Simplificar la suma finita $1 + e^{i\theta} + e^{2i\theta} + \dots + e^{ni\theta}$. En seguida, simplificar

$$\sin \theta + \sin 2\theta + \dots + \sin n\theta \quad \text{y} \quad \frac{1}{2} + \cos \theta + \cos 2\theta + \dots + \cos n\theta.$$

Ejercicio 1.2. Expresar, en la forma $a + ib$ con a, b reales:

(a) la fracción $\frac{1 - 2i}{3 + 4i}$;

(b) las dos raíces cuadradas $\sqrt{-8 + 6i}$ [el símbolo $\sqrt{\quad}$ es ambiguo, en \mathbb{C}];

(c) el número complejo $(1 - i\sqrt{3})^{49}$, expandido;

(d) las seis soluciones distintas de la ecuación $z^6 = 1$.

Ejercicio 1.3. Verificar la llamada *ley del paralelogramo*: si $z, w \in \mathbb{C}$, entonces

$$|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2.$$

En términos del paralelogramo con vértices $0, z, z + w, w$, ¿qué dice esta fórmula?

Ejercicio 1.4. Identifique las partes del plano \mathbb{C} representadas por las siguientes ecuaciones y desigualdades:

$$\frac{1}{z} = \bar{z}, \quad \left| \frac{z-1}{z+1} \right| = 1, \quad |z-i| + |z-1| = 2,$$

$$|z-i| \leq 1, \quad |z-2| > |z-3|, \quad \Im z > \Re z.$$

En cada caso, dibujar la curva o región del plano correspondiente.

Ejercicio 1.5. (a) Demostrar que dos rectas en el plano complejo

$$\bar{\lambda}z + \lambda\bar{z} + c = 0 \quad \text{y} \quad \bar{\mu}z + \mu\bar{z} + d = 0$$

son paralelas o iguales si y sólo si $\lambda = s\mu$ para algún $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; pero son perpendiculares si y sólo si $\lambda = it\mu$ para algún $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(b) Mostrar que la ecuación de la recta que pasa por dos puntos distintos $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ es

$$(\bar{\alpha} - \bar{\beta})(z - \alpha) - (\alpha - \beta)(\bar{z} - \bar{\alpha}) = 0.$$

Ejercicio 1.6. Si $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ y si $k > 0$, demostrar que la ecuación

$$|z - \alpha| = k|z - \beta|$$

representa un círculo en el plano complejo si $k \neq 1$, pero representa una recta si $k = 1$. En el primer caso, calcular el radio del círculo y hallar los extremos del diámetro que, al prolongarse en línea recta, pasa por los puntos α y β .

Ejercicio 1.7. Si $|z| < 1$ y $|w| < 1$, comprobar que $\left| \frac{z-w}{1-\bar{w}z} \right| < 1$.

Ejercicio 1.8. Si $|z_1| = |z_2| = |z_3|$ y si $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, demostrar que los tres puntos $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ son vértices de un triángulo equilátero.

Ejercicio 1.9. Sean z_1, z_2, z_3 tres puntos distintos y no colineales del plano \mathbb{C} .

- Hallar la ecuación de la recta que biseca perpendicularmente el segmento $[z_1, z_2]$. (Esta recta se llama la **mediatriz** del segmento $[z_1, z_2]$).
- Encontrar el **circuncentro** del triángulo con vértices z_1, z_2, z_3 : esta es la intersección de las tres mediatrices de los lados (las cuales son tres rectas concurrentes, como la prueba indicará).
- Una **altura** del triángulo es una recta que pasa por un vértice, perpendicular al lado opuesto. Las tres alturas son concurrentes en el **ortocentro** del triángulo. En el caso de que el circuncentro resulta ser el origen 0, verificar que el ortocentro es el punto $z_1 + z_2 + z_3$.

Ejercicio 1.10. Si $z, w \in \mathbb{C}$, sean Z, W los puntos correspondientes (bajo la proyección estereográfica) en la esfera unitaria \mathbb{S}^2 .

- Demstrar que Z y W son antípodas uno del otro (es decir, que el segmento $[Z, W]$ es un diámetro de \mathbb{S}^2) si y sólo si $z\bar{w} = -1$.
- Si $w = 1/z$, hallar la relación correspondiente entre las coordenadas cartesianas de Z y W . Concluir que la transformación $z \mapsto 1/z$ del plano extendido \mathbb{C}_∞ corresponde con una *mediavuelta* (rotación por un ángulo π) de \mathbb{S}^2 alrededor de uno de sus diámetros (¿cuál diámetro?).
- Comprobar que la distancia euclidiana entre Z y W es igual a

$$d(z, w) := \frac{2|z - w|}{\sqrt{1 + |z|^2} \sqrt{1 + |w|^2}}.$$

1.2 Ejercicios sobre series de potencias

Ejercicio 1.11. Determinar el radio de convergencia R para cada una de las siguientes series de potencias:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2} z^n \quad \text{si } |q| < 1.$$

Ejercicio 1.12. Determinar el radio de convergencia R para cada una de las siguientes series de potencias:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n}}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{2^n}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} 2^k z^{2^k} + 3^{k+1} z^{2^{k+1}}.$$

Ejercicio 1.13. Demostrar que la convergencia de la serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ no es uniforme en todo el disco abierto $D(0;1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Ejercicio 1.14. Demostrar que el radio de convergencia R de la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - \alpha)^n$ obedece la fórmula

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

toda vez que este límite existe.

Ejercicio 1.15. Comprobar que las siguientes tres series de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} n z^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

tienen radio de convergencia $R = 1$. En el círculo unitario $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, demostrar que una de estas series diverge para todo $z \in \mathbb{T}$; otra converge para todo $z \in \mathbb{T}$; y la tercera diverge en un solo punto de \mathbb{T} .

[[Indicación: Una serie de números complejos converge si y sólo si sus partes real e imaginaria convergen en \mathbb{R} .]]

Ejercicio 1.16. Identificar el conjunto de todos los $z \in \mathbb{C}$ para los cuales esta serie converge:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{1+z} \right)^n.$$

Ejercicio 1.17. Si $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$, comprobar que $|e^z| = e^x$. En seguida, hallar todas las soluciones de la ecuación $e^z = 1$.

Ejercicio 1.18. Defínase $\cosh z := \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$ y $\sinh z := \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Hallar las series de potencias (centrados en 0) que representan estas dos funciones; y expresarlos en términos de $\cos iz$ y $\sin iz$.

Demostrar las siguientes identidades, válidas para todo $z, w \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}\sinh(z+w) &= \sinh z \cosh w + \cosh z \sinh w, \\ \cosh(z+w) &= \cosh z \cosh w + \sinh z \sinh w;\end{aligned}$$

y las siguientes identidades, válidas para todo $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\sin(x+iy) &= \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y, \\ |\cos(x+iy)|^2 &= \sinh^2 y + \cos^2 x = \cosh^2 y - \sin^2 x.\end{aligned}$$

Ejercicio 1.19. Si las dos series de potencias

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - \alpha)^n \quad \text{y} \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - \alpha)^n$$

son convergentes en el disco abierto $D(\alpha; r)$, demostrar que la serie de potencias

$$h(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - \alpha)^n, \quad \text{donde} \quad c_n := \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}$$

es también convergente para $z \in D(\alpha; r)$. Concluir que $h(z) = f(z)g(z)$ para $|z - \alpha| < r$.¹

Ejercicio 1.20. Obtener la serie de potencias, centrado en 0, de la función

$$h(z) = \frac{e^z}{1-z}$$

al multiplicar las series de potencias de e^z y $(1-z)^{-1}$.

Demostrar que la serie de potencias así obtenida tiene radio de convergencia 1.

Ejercicio 1.21. Si la serie de potencias $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - \alpha)^n$ tiene radio de convergencia $R > 0$, demostrar que la serie de potencias

$$F(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (z - \alpha)^n$$

también tiene radio de convergencia R ; y que $F'(z) \equiv f(z)$.

¹Cuando dos series $\sum_{n \geq 0} s_n$ y $\sum_{n \geq 0} t_n$, de números reales o complejos, son *absolutamente* convergentes, se sabe que el “producto de Cauchy” $\sum_{n \geq 0} (\sum_{k+l=n} s_k t_l)$ es también absolutamente convergente y su suma es el producto de las sumas de las dos series anteriores.

1.3 Ejercicios sobre funciones holomorfas

Ejercicio 1.22. Una función $f: U \rightarrow \mathbb{C}$, definida en un vecindario abierto U de $z_0 \in \mathbb{C}$, es **diferenciable en z_0** si y sólo si existe $\beta =: f'(z_0) \in \mathbb{C}$ y $\delta > 0$ tales que

$$f(z) - f(z_0) = f'(z_0)(z - z_0) + o(z - z_0) \quad \text{para } |z - z_0| < \delta,$$

donde $o(h)/h \rightarrow 0$ cuando $h \rightarrow 0$. A partir de esta definición de diferenciabilidad, verificar las reglas usuales de derivación:

$$\begin{aligned} (\lambda f)'(z_0) &= \lambda f'(z_0) \quad \text{si } \lambda \in \mathbb{C}, \\ (f + g)'(z_0) &= f'(z_0) + g'(z_0), \\ (fg)'(z_0) &= f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0), \\ (1/f)'(z_0) &= -\frac{f'(z_0)}{f(z_0)^2} \quad \text{si } f(z_0) \neq 0. \end{aligned}$$

Ejercicio 1.23. Si f es una función diferenciable en z_0 , y si g es una función diferenciable en $w_0 = f(z_0)$, demostrar que la función compuesta $g \circ f: z \mapsto g(f(z))$ es diferenciable en z_0 . Usar la definición de diferenciabilidad del problema anterior para comprobar la **regla de la cadena**:

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0).$$

Ejercicio 1.24. La **doble conjugada** de una función compleja f es la función g definida por

$$g(z) := \overline{f(\bar{z})}.$$

Si $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa en un abierto $U \subseteq \mathbb{C}$ y si $V = \{\bar{z} : z \in U\}$, comprobar que g es holomorfa en V . Si f es analítica en un disco $D(\alpha; R)$, mostrar que g es analítica en el disco $D(\bar{\alpha}; R)$ y hallar la correspondencia entre las series de potencias para f y g .

Ejercicio 1.25. Demostrar que las fracciones lineales *forman un grupo*² bajo composición de funciones, al calcular $s_1 \circ s_2(z)$ donde

$$s_1(z) := \frac{\alpha_1 z + \beta_1}{\gamma_1 z + \delta_1}, \quad s_2(z) := \frac{\alpha_2 z + \beta_2}{\gamma_2 z + \delta_2}.$$

Concluir que que una única fracción lineal que lleva un triple ordenado de puntos distintos $(z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{C}_\infty^3$ en otro triple ordenado dado $(w_2, w_3, w_4) \in \mathbb{C}_\infty^3$.

²El nombre común de este grupo es $PSL(2, \mathbb{C})$.

Ejercicio 1.26. Hallar la fracción lineal s que cumple $s(-1) = 1$, $s(0) = i$, $s(1) = -1$. Describir las imágenes de las curvas $s(C_k) \subset \mathbb{C}_\infty$ en cada uno de los siguientes casos:

- (a) $C_1 = \mathbb{R}_\infty = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ es la recta real extendida;
- (b) $C_2 = i\mathbb{R}_\infty = i\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ es la recta imaginaria extendida;
- (c) $C_3 = \mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ es el círculo unitario;
- (d) $C_4 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = \frac{1}{2}\}$ es otro círculo centrado en 0.

Ejercicio 1.27. Hallar todas las fracciones lineales que dejan invariante el círculo unitario $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, aunque posiblemente permutan sus puntos.

Ejercicio 1.28. Una **rotación** de la esfera unitaria $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ deja fijos dos puntos antipodales de la esfera (por donde pasa el eje de la rotación) y lleva cada par de antípodas en un par de antípodas. Obtener la forma general de la fracción lineal que, como aplicación biyectiva sobre \mathbb{C}_∞ , corresponde con una rotación de \mathbb{S}^2 bajo proyección estereográfica.

[[Indicación: Usar el Ejercicio 1.10.]]

Ejercicio 1.29. Sean $z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}_\infty$ tres puntos distintos, y sea C el círculo (o recta extendida) que pasa por estos tres puntos. Dícese que dos puntos z y z^* son **simétricos respecto de C** si (y sólo si)

$$[z^*, z_2; z_3, z_4] = \overline{[z, z_2; z_3, z_4]}.$$

Es evidente que la transformación $z \mapsto z^*$ es involutiva (es decir, coincide con su transformación inversa). Demostrar que $z^* = z$ si y sólo si $z \in C$. Además, identificar z^* como función de z en los siguientes casos:

- (a) $C = \mathbb{R}_\infty$ es la recta real extendida;
- (b) $C = i\mathbb{R}_\infty$ es la recta imaginaria extendida;
- (c) $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = k\}$ es un círculo centrado en 0.

Si C es un círculo *cualquiera* en \mathbb{C} , comprobar que la transformación $z \mapsto z^*$ intercambia el interior con el exterior del círculo.

Ejercicio 1.30. Si $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$ son cuatro puntos finitos distintos, ¿cómo debería definirse las razones dobles

$$[\infty, z_2; z_3, z_4], \quad [z_1, \infty; z_3, z_4], \quad [z_1, z_2; \infty, z_4], \quad [z_1, z_2; z_3, \infty]$$

para que la expresión $[z_1, z_2; z_3, z_4]$ sea una función continua de sus 4 variables en \mathbb{C}_∞ ?

2.1 Ejercicios sobre integrales de línea

En los ejercicios que siguen, $R = [a, b] \times [c, d]$ es un rectángulo en $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$; y ∂R denota el borde de R recorrido una vez contrario a reloj.

Ejercicio 2.1. Sea $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ una función diferenciable definida en un abierto $U \subseteq \mathbb{C}$ y sea $z: (a, b) \rightarrow U$ una función diferenciable de una variable real. Usar la definición de la derivada para comprobar *la regla de la cadena*: si $g(t) \equiv f(z(t))$, entonces

$$g'(t) = f'(z(t))z'(t) \quad \text{para todo } t \in (a, b).$$

Ejercicio 2.2. (a) [Teorema de Green] Sean $u, v: U \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones continuamente diferenciables en un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^2$ tal que $R \subset U$. Demostrar que

$$\oint_{\partial R} u(x, y) dx + v(x, y) dy = \iint_R \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dy dx.$$

(b) Si $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ es una función holomorfa (es decir, *continuamente* diferenciable de una variable compleja), usar el teorema de Green para dar una demostración alternativa del teorema de Cauchy para el rectángulo R :

$$\oint_{\partial R} f(z) dz = 0.$$

[[Indicación: Si $u = \Re f$, $v = \Im f$, comprobar que $\oint_{\partial R} f(z) dz = \oint_{\partial R} (u + iv)(dx + i dy)$.]]

Ejercicio 2.3. (a) [Regla de Leibniz] Si $R \subset U$ donde U es un abierto de \mathbb{R}^2 , y si $g: U \rightarrow \mathbb{C}$ es una función continuamente diferenciable de dos variables reales, defínase

$$h(t) := \int_a^b g(s, t) ds.$$

Demostrar que h es continuamente diferenciable en un vecindario de $[c, d]$ y que

$$h'(t) = \int_a^b \frac{\partial g}{\partial t}(s, t) ds.$$

(b) Usar la regla de Leibniz para comprobar que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{is}}{e^{is} - z} ds = 1 \quad \text{cuando } |z| < 1.$$

[[Indicación: Tómesese $g(s, t) := e^{is}/(e^{is} - tz)$.]]

Ejercicio 2.4. Si C es el círculo $|z - \alpha| = 1$, recorrido una vez contrario a reloj, evaluar, para todo $m \in \mathbb{Z}$, las integrales

$$I_m = \frac{1}{2\pi i} \oint_C (z - \alpha)^m dz.$$

Ejercicio 2.5. Si $a + ib \neq 0$, hallar $\int_{[0, a+ib]} e^z dz$. En seguida, calcular las integrales reales (sin integrar por partes):

$$\int_0^1 e^{at} \cos bt dt \quad \text{y} \quad \int_0^1 e^{at} \sen bt dt.$$

Ejercicio 2.6. Si $0 < r < R$, hallar la integral de línea sobre el círculo $|z| = r$ de la función racional

$$\frac{R+z}{(R-z)z} = \frac{1}{z} + \frac{2}{R-z}.$$

Deducir la identidad siguiente:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{R^2 - 2Rr \cos \theta + r^2} = \frac{1}{R^2 - r^2}.$$

Ejercicio 2.7. Si U es una región de \mathbb{C} y si $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ es una función holomorfa tal que $|f(z) - 1| < 1$ para todo $z \in U$, demostrar que

$$\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0$$

para toda curva cerrada $C \subset U$.

Ejercicio 2.8. Si $a > 0$ y $b > 0$, comprobar que la integral de Riemann impropia

$$\int_{-a}^b \frac{dx}{x^2} \quad \text{no existe.}$$

Sin embargo, si C es una curva suave en \mathbb{C} con punto inicial $-a$ y punto final b , mostrar que la integral

$$\int_C \frac{dz}{z^2}$$

existe y es independiente de C , toda vez que la curva C no pasa por el origen 0.

¿Cuál es el valor de la segunda integral?

2.2 Ejercicios sobre funciones holomorfas

En los ejercicios que siguen, \oint_C denota la integral sobre un círculo C , recorrido una vez contrario a reloj.

Ejercicio 2.9. Si C es el círculo $|z| = 3$, calcular las integrales

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^{2z}}{(z+1)^4} dz \quad \text{y} \quad \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^{tz}}{(z^2+1)^2} dz \quad \text{para } t > 0.$$

Ejercicio 2.10. Si C es el círculo $|z| = 1$, calcular las integrales

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{\operatorname{sen}^6 z}{(z - \pi/6)} dz \quad \text{y} \quad \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{\operatorname{sen}^6 z}{(z - \pi/6)^3} dz.$$

Ejercicio 2.11. Si $t > 0$ y si C es el círculo $|z+1| = r$ para algún $r > 0$, comprobar que

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{z e^{tz}}{(z+1)^3} dz = (t - \frac{1}{2}t^2) e^{-t}.$$

Ejercicio 2.12. Si $a > 0$ y si C es el círculo $|z| = r$ para algún $r > a$, calcular las integrales

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^z}{z^2 + a^2} dz \quad \text{y} \quad \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{z e^z}{(z-a)^3} dz.$$

Ejercicio 2.13. Si C es el círculo $|z| = 1$, calcular las integrales

$$\oint_C \frac{\operatorname{sen} z}{z} dz, \quad \oint_C \frac{1}{(2z-1)^3} dz, \quad \oint_C e^{z^2} \left(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} \right) dz.$$

Ejercicio 2.14. Si C es el círculo $|z| = 1$ y si $n \in \mathbb{N}$, evaluar la integral

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \left(z + \frac{1}{z} \right)^{2n} \frac{dz}{z}$$

y de ahí obtener la fórmula integral

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2n} \theta d\theta = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}.$$

Ejercicio 2.15 (Teorema del valor medio). Si $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ es una función holomorfa cuyo dominio incluye el disco cerrado $\bar{D}(\alpha; r)$, demostrar que

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha + r e^{i\theta}) d\theta$$

como consecuencia de la fórmula integral de Cauchy. Además, obtener expresiones similares para las derivadas $f^{(n)}(\alpha)$ como integrales sobre $\theta \in [-\pi, \pi]$.

Ejercicio 2.16. Si $r > 0$ con $r \neq 1$, calcular la integral

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{1 - 2r \cos \theta + r^2}$$

a partir de la integral $\oint_C dz/(z-r)(z-r^{-1})$ sobre el círculo $|z| = 1$.

Ejercicio 2.17. Si f es una función holomorfa entera y si $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, calcular

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{(w-\alpha)(w-\beta)} dw$$

sobre un círculo $|z| = R$ con $R > \max\{|\alpha|, |\beta|\}$. Si f es una función entera acotada, estimar el límite cuando $R \rightarrow \infty$ de esta integral, para así obtener una demostración alternativa del teorema de Liouville.

Ejercicio 2.18. Si f es una función holomorfa entera tal que

$$|f(z)| \leq a + b|z|^m \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}$$

para algunas constantes positivas $a, b, m > 0$, demostrar que f es un polinomio.

Ejercicio 2.19 (Polinomio interpolante de Lagrange). Sea

$$p(z) = (z - \alpha_0)(z - \alpha_1) \dots (z - \alpha_n)$$

el polinomio mónico con $n + 1$ raíces distintas $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ y sea C un círculo cuyo interior contiene todas estas raíces. Si $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ es una función holomorfa tal que $C \cup I(C) \subset U$, demostrar que la integral

$$q(z) := \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{p(w)} \frac{p(w) - p(z)}{w - z} dw$$

es un *polinomio* de grado n tal que $q(\alpha_j) = f(\alpha_j)$ para $j = 0, 1, \dots, n$.

Ejercicio 2.20. Una parte $E \subseteq \mathbb{C}$ es simplemente conexa si cualquier curva cerrada con traza en E es homotópica (en E) a una “curva” constante, parametrizada por $w(t) := \alpha$ para $a \leq t \leq b$. Una región U es una **región estelar** si hay un punto $\alpha \in U$ tal que el segmento $[\alpha, z] \subset U$ para cada $z \in U$. Verificar que una región estelar es simplemente conexa. [Indicación: Construir una homotopía de la forma $F(s, t) := (1-s)\alpha + sz(t)$.]

Ejercicio 2.21. Hallar las series de Taylor centradas en $\alpha = 0$ de las siguientes funciones, indicando sus radios de convergencia:

$$\frac{1}{1-z^2}, \quad \frac{z}{1+z^2}, \quad \frac{1-\cos z}{z^2}, \quad \frac{z-\operatorname{sen} z}{z^3}, \quad \operatorname{arctg} z.$$

[[Indicación: Hallar primero la serie de Taylor de la derivada de $\operatorname{arctg} z$.]]

Ejercicio 2.22. Los números de Bernoulli $B_n \in \mathbb{Q}$ se definen como coeficientes de la serie de Taylor

$$\frac{z}{e^z - 1} =: \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n.$$

Comprobar que $B_0 = 1$ y que para cada $n \in \mathbb{N}^*$ hay una identidad

$$\binom{n+1}{0} B_0 + \binom{n+1}{1} B_1 + \cdots + \binom{n+1}{n} B_n = 0.$$

Calcular B_1, \dots, B_6 . Mostrar también que $B_{2m+1} = 0$ para $m \geq 1$. [[Indicación: Verificar la identidad $z/(e^z - 1) + z/(e^{-z} - 1) = -z$.]]

Ejercicio 2.23. Obtener las series de Laurent que representan la función

$$f(z) = \frac{z}{(z-2)(z+i)}$$

en las regiones: (a) $|z| < 1$; (b) $1 < |z| < 2$; (c) $|z| > 2$; (d) $0 < |z-2| < \sqrt{5}$.

Ejercicio 2.24. Comprobar que la serie de Laurent que representa $\operatorname{ctg} z$, en la región $0 < |z| < \pi$, es

$$\operatorname{ctg} z = z^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n B_{2n}}{(2n)!} z^{2n-1}$$

donde los B_{2n} son los números de Bernoulli de índice par.

Ejercicio 2.25. Sean f y g dos funciones holomorfas en un anillo $R < |z - \alpha| < S$, con los respectivos desarrollos de Laurent:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - \alpha)^n, \quad g(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z - \alpha)^n.$$

Si C_t es el círculo $|z - \alpha| = t$, donde $R < t < S$, defínase

$$c_n := \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_t} \frac{f(w)g(w)}{(w - \alpha)^{n+1}} dw \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

Comprobar que las series para $f(z)$ y $g(z)$ convergen uniformemente para $z \in C_t$. Concluir que las series numéricas

$$c_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k b_{n-k} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_{n-j} b_j$$

convergen para cada n ; y que la serie de Laurent para el producto fg en $R < |z - \alpha| < S$ está dada por

$$f(z)g(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - \alpha)^n.$$

Ejercicio 2.26. Para $w \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, la fórmula

$$e^{\frac{1}{2}w(z-1/z)} =: \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(w) z^n,$$

define las funciones $w \mapsto J_n(w)$ como los coeficientes de la serie de Laurent de la función $\exp(\frac{1}{2}w(z - z^{-1}))$ en la región $0 < |z| < \infty$. Usar el ejercicio anterior para hallar el desarrollo de cada $J_n(w)$ en potencias de w . Concluir que las **funciones de Bessel** J_n son funciones analíticas enteras.

Comprobar que los $J_{-n}(w) \equiv (-1)^n J_n(w)$. Además, obtener las fórmulas integrales

$$J_n(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(w \operatorname{sen} \theta - n\theta)} d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(w \operatorname{sen} \theta - n\theta) d\theta.$$

Ejercicio 2.27. Obtener la parte principal de la serie de Laurent en 0 de la función

$$f(z) = \frac{z+1}{z \operatorname{sen} z}$$

y así comprobar que f tiene un polo doble en 0.

Ejercicio 2.28. Hallar todas las singularidades de la función

$$\operatorname{tg} z := \frac{\operatorname{sen} z}{\operatorname{cos} z}$$

en el plano complejo; y comprobar que cada uno es un polo simple.

2.3 Ejercicios sobre integrales de contorno

En los ejercicios que siguen, evaluar las integrales propuestas mediante la integración de alguna función de variable compleja sobre un contorno apropiado.

Ejercicio 2.29. Si $-1 < a < 1$, demostrar la identidad:

$$I_a := \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{1 - 2a \cos \theta + a^2} = \frac{2\pi}{1 - a^2}.$$

Hallar la relación entre I_a e $I_{1/a}$. ¿Sería posible evaluar $I_{1/a}$ con el mismo contorno?

Ejercicio 2.30. Calcular las integrales:

$$I_1 := \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 \theta d\theta}{5 + 3 \sin \theta}; \quad I_2 := \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos 2\theta d\theta}{5 - 3 \cos \theta}.$$

Ejercicio 2.31. Comprobar la identidad:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{\cos^4 \theta + \sin^4 \theta} = 2\pi\sqrt{2}.$$

Ejercicio 2.32. Si C es el círculo $|z| = 2$, recorrido una vez contrario a reloj, calcular las integrales:

$$I_1 := \oint_C \frac{z+2}{z(z+1)} dz; \quad I_2 := \oint_C \frac{3z+1}{z(z-1)^3} dz.$$

Ejercicio 2.33. Si C es el círculo $|z| = 1$, recorrido una vez contrario a reloj, calcular las integrales:

$$I_1 := \oint_C z e^{1/z} dz; \quad I_2 := \oint_C \frac{\cosh(1/z)}{z} dz;$$

donde $\cosh w := (e^w + e^{-w})/2$.

Ejercicio 2.34. Calcular las integrales impropias

$$I_1 := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2 + 3) dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)}; \quad I_2 := \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 6x^2 + 8}.$$

Ejercicio 2.35. Calcular las integrales impropias

$$I_1 := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 1}; \quad I_2 := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^6 + 1}; \quad I_3 := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^6 + 1}.$$

Ejercicio 2.36. Si $a > 0$, demostrar la identidad:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{a e^a}.$$

Ejercicio 2.37. Calcular las integrales:

$$I_1 := \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{2 + \sin^2 \theta}; \quad I_2 := \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 + x^2 + 1}.$$

Ejercicio 2.38. Si $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$ y $t > 0$, evaluar la integral:

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos tx}{(x+b)^2 + a^2} dx.$$

Ejercicio 2.39. Usar el lema de Jordan para calcular la integral:

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x \operatorname{sen} sx \cos tx}{x^2 + a^2} dx,$$

donde $a > 0$ y $s, t \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 2.40. Si $a > 0$, usar una integral sobre un contorno rectangular para demostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+ia)^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

Esta integral impropia vale $\sqrt{\pi}$. Deducir que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos 2ax dx = \sqrt{\pi} e^{-a^2}.$$

Ejercicio 2.41. Para $n \in \mathbb{N}$, demostrar la siguiente identidad:

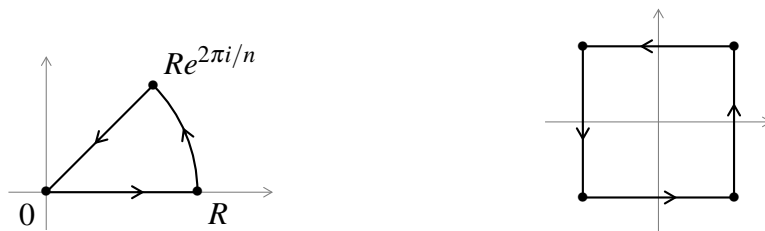
$$I_n := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}.$$

[[Indicación: No es aconsejable usar inducción sobre n .]]

Ejercicio 2.42. Calcular los valores principales de los siguientes integrales:

$$I_1 := \text{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(2-x)(x^2+4)}; \quad I_2 := \text{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^3+4x+5}.$$

2.4 Ejercicios diversos sobre funciones complejas



Ejercicio 2.43. Si $n \in \mathbb{N}$ con $n > 2$, demostrar la identidad:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^n} = \frac{\pi/n}{\operatorname{sen}(\pi/n)}$$

mediante la integral de $1/(1+z^n)$ en el primer contorno indicado, con un ángulo sectorial de $2\pi/n$.

Ejercicio 2.44. Verificar las **integrales de Fresnel**:

$$\int_0^\infty \cos(x^2) dx = \int_0^\infty \operatorname{sen}(x^2) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$$

mediante la integral de e^{-z^2} en el primer contorno indicado, con un ángulo sectorial de $\pi/4$. [Indicación: Recordar que $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.]

Ejercicio 2.45. (a) Si $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, comprobar la sumación

$$\sum_{n=-\infty}^\infty \frac{1}{(n+a)^2} = \frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2 \pi a}$$

mediante el cálculo de la integral de contorno

$$I_n := \oint_{\partial R_n} \frac{\pi \operatorname{ctg} \pi z}{(z+a)^2} dz$$

sobre el borde del cuadrado R_n con vértices $(n + \frac{1}{2})(\pm 1 \pm i)$, dibujado arriba. [Indicación: Verificar que $|\operatorname{ctg} \pi z| < 2$ para $z \in \partial R_n$.]

(b) Deducir las siguientes fórmulas:

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}, \quad \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Ejercicio 2.46. Mediante la integral de contorno

$$I_{n,k} := \oint_{\partial R_n} \frac{\pi \operatorname{ctg} \pi z}{z^{2k}} dz$$

en el mismo contorno ∂R_n del Ejercicio 2.45, donde $k = 1, 2, 3, \dots$, junto con el resultado del Ejercicio 2.24, demostrar la fórmula general

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \frac{2(-4)^{k-1} \pi^{2k}}{(2k)!} B_{2k}$$

donde los B_{2k} son los números de Bernoulli del Ejercicio 2.22. Verificar los casos particulares:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$

Ejercicio 2.47. Comprobar la siguiente **transformada de Fourier** de la función real $(1+x^2)^{-2}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i t x}}{(1+x^2)^2} dx = \frac{\pi}{2} (1+2\pi|t|) e^{-2\pi|t|} \quad \text{para cada } t \in \mathbb{R}.$$

Ejercicio 2.48. Demostrar que $e^z \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

Ejercicio 2.49. Calcular el orden del cero en $z = 0$ de cada una de estas funciones:

$$\operatorname{sen} z - \operatorname{sen} z \cos^2 z; \quad 6 \operatorname{sen}(z^3) + z^3(z^6 - 6); \quad e^{\operatorname{tg} z} - e^{\operatorname{sen} z}.$$

Ejercicio 2.50. Una función $f: \mathbb{C}_{\infty} \rightarrow \mathbb{C}_{\infty}$ es **meromorfa en \mathbb{C}_{∞}** si todas sus singularidades, inclusive en el punto ∞ , son polos o removibles (y si f es holomorfa en el complemento de dichas singularidades). Demostrar que f posee a lo sumo un número finito de polos, y concluir que una función meromorfa en \mathbb{C}_{∞} es una función *racional*.

Ejercicio 2.51. Demostrar la siguiente generalización del principio del argumento. Si $f: U \rightarrow \mathbb{C}_{\infty}$ una función meromorfa no constante en una región U y si $h: U \rightarrow \mathbb{C}_{\infty}$ es otra función holomorfa en U ; si C es una curva cerrada simple con $C \cup I(C) \subset U$ que no atraviesa los ceros ni los polos de f ; y si α_j, β_k denotan los ceros y polos dentro de C , con órdenes respectivos m_j, n_k ; entonces:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} h(z) dz = \sum_j m_j h(\alpha_j) - \sum_k n_k h(\beta_k).$$

Ejercicio 2.52. Si $f: U \rightarrow V$ es una función holomorfa univalente, con función inversa $g: V \rightarrow U$, y si C es una curva simple cerrada con $C \cup I(C) \subset U$, demostrar que

$$g(w) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{zf'(z)}{f(z) - w} dz \quad \text{para todo } w \in f(I(C)).$$

[[Indicación: Usar el Ejercicio 2.51 con $h(z) \equiv z$.]]

Ejercicio 2.53. Usar el teorema de Rouché para dar una demostración alternativa del *teorema fundamental del álgebra*: si $p(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$ es un polinomio de grado $n > 0$, entonces p tiene exactamente n ceros en \mathbb{C} , contados con multiplicidad.

Ejercicio 2.54. (a) Demostrar que todos los ceros del polinomio $z^7 - 5z^3 + 12 = 0$ quedan en el anillo $1 < |z| < 2$.

(b) Refinar este análisis al mostrar que tres ceros están en el anillo $1.1 < |z| < 1.2$ y los otros cuatro en el anillo $1.2 < |z| < 1.7$.

Ejercicio 2.55. Hallar el número de ceros (a) en el disco $|z| < 1$; y (b) en el anillo $1 < |z| < 2$, para cada uno de los siguientes polinomios:

$$2z^5 - z^3 + 3z^2 - z + 8; \quad z^7 - 5z^4 + z^2 - 2; \quad z^4 - 7z + 9.$$

Ejercicio 2.56. Si $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ es una función holomorfa en una región acotada $U \subset \mathbb{C}$, y si V es una subregión con $\bar{V} \subset U$ tal que $z \mapsto |f(z)|$ es constante en la frontera $\bar{V} \setminus V$, demostrar que $f(\alpha) = 0$ para algún $\alpha \in V$. [[Indicación: Considerar $z \mapsto 1/f(z)$.]]

Ejercicio 2.57. (a) Si $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa en una región tal que $\bar{D}(0; R) \subset U$ y si $f(0) = 0$, sea $A_R := \sup\{\Re f(z) : |z| = R\}$. Demostrar la **desigualdad de Caratheodory**:

$$|f(z)| \leq \frac{2A_R |z|}{R - |z|} \quad \text{cuando } |z| < R.$$

[[Indicación: Aplicar el lema de Schwarz a la función $g(z) := f(z)/(2A_R - f(z))$.]]

(b) Si $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es una función entera tal que la función $\Re f$ sea acotada superiormente, demostrar que f es constante.

Ejercicio 2.58. Si $f: D(0; 1) \rightarrow D(0; 1)$ es una función holomorfa tal que $f(\alpha) = \alpha$ y $f(\beta) = \beta$ para $\alpha \neq \beta$ en $D(0; 1)$, demostrar que $f(z) \equiv z$ para $|z| < 1$.

2.5 Otros ejercicios sobre integrales de contorno

Ejercicio 2.59. Demostrar la igualdad

$$\int_0^{\infty} \frac{\log x}{1+x^2} dx = 0,$$

donde, para x real y positivo, $\log x := \int_1^x t^{-1} dt$ denota la rama principal del logaritmo, restringido al eje x positivo.

Ejercicio 2.60. Verificar la siguiente integral:

$$\int_0^{\infty} \frac{\log(x^2+1)}{x^2+1} dx = \pi \log 2,$$

con el uso del contorno semicircular $C = [-R, R] \cup \{Re^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq \pi\}$.

[[Indicación: Tomar $f(z) := (\text{Log}(z+i))/(z^2+1)$.]]

Ejercicio 2.61. Demostrar las siguientes igualdades:

$$(a) \int_0^{\infty} \frac{\log x}{(1+x)^3} dx = -\frac{1}{2}, \quad (b) \int_0^{\infty} \frac{(\log x)^2}{(1+x)^2} dx = \frac{\pi^2}{3}.$$

Ejercicio 2.62. Verificar la siguiente integral:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{-1/3}}{x^2+1} dx = \frac{\pi\sqrt{3}}{3},$$

con el uso del contorno de cerradura con corte en el segmento $[0, R]$.

Ejercicio 2.63. Calcular la integral:

$$I_a := \int_0^{\infty} \frac{x^a}{x^2+1} dx, \quad \text{para } -1 < a < 1.$$

3.1 Diversos ejercicios sobre funciones holomorfas

Ejercicio 3.1. Si U es una región del plano complejo, si C es una curva simple cerrada con $C \cup I(C) \subset U$, y si $(f_n: U \rightarrow \mathbb{C})_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones holomorfas que convergen uniformemente sobre compactos a una función $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ que no se anula sobre C , demostrar que para $n \geq N$ con N suficientemente grande, las funciones f_n tienen el mismo número de ceros (contados con multiplicidad) en la región interior $I(C)$.

[[Indicación: Usar el teorema de Rouché con $g := f_n - f$.]]

Ejercicio 3.2. En la situación del Ejercicio anterior, demostrar que cada cero α de la función límite f , $f(\alpha) = 0$, es un límite $\alpha_k \rightarrow \alpha$ de ceros de la sucesión (f_n) de funciones: $f_{n_k}(\alpha_k) = 0$.

Ejercicio 3.3 (Teorema de Hurwitz). Si $(f_n: U \rightarrow \mathbb{C}^\times)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones holomorfas en una región U que no se anulan en U , y si $f_n \rightarrow f$ uniformemente sobre compactos en U , entonces o bien la función límite f no se anula en U , o bien f es idénticamente nula. [[Indicación: Usar el Ejercicio 3.2 anterior.]]

Ejercicio 3.4. (a) Demostrar que la serie

$$f(z) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2}$$

define una función meromorfa $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ con un polo doble en cada $n \in \mathbb{Z}$. (En particular, comprobar que una cola de la serie es holomorfa en la región $|z| < R$, para cualquier $R > 0$.) Demostrar que el residuo en cada polos es 0 y que f es periódica con período 1, es decir, $f(z+1) \equiv f(z)$ para $z \in \mathbb{C}$.

(b) Enseguida, demostrar que la función $g(z) := \pi^2 \csc^2 \pi z$ tiene las mismas propiedades: es meromorfa en \mathbb{C} , tiene polos dobles en cada $n \in \mathbb{Z}$ con residuo 0 en cada caso, y es periódica con período 1.

(c) Demostrar que $|f(x+iy)| \rightarrow 0$ y $|g(x+iy)| \rightarrow 0$ cuando $|y| \rightarrow \infty$, uniformemente para $x \in \mathbb{R}$. [[Indicación: Considerar primero el caso $0 \leq x \leq 1$; y usar la identidad $|\operatorname{sen}(x+iy)|^2 = \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2 y$.]]

(d) Demostrar que $f(z) \equiv g(z)$, al comprobar que la diferencia es una función entera idénticamente nula.

Ejercicio 3.5. Demostrar la identidad

$$\pi \operatorname{ctg} \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}$$

por el procedimiento siguiente: (a) si $f(z)$ denota la serie al lado derecho y si $g(z) := \pi \operatorname{ctg} \pi z$, se sabe que f y g son funciones meromorfas con polos simples de residuo 1 en cada $n \in \mathbb{Z}$, así que $g - f$ es una función entera; (b) justificar la derivación término por término de la serie para calcular la derivada $g'(z) - f'(z)$; (c) usar el Ejercicio 3.4 anterior para mostrar que la función $g - f$ es constante; y (d) evaluar esta constante.

Ejercicio 3.6. Si $0 < r < 1$, demostrar que el polinomio

$$p_n(z) := 1 + 2z + 3z^2 + \cdots + nz^{n-1}$$

no tiene raíces en el disco abierto $D(0; r)$, para n suficientemente grande.

[[Indicación: Usar el teorema de Hurwitz.]]

Ejercicio 3.7. Si $w \in \mathbb{C}$, tómesese $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $(n - \frac{1}{2})\pi > |w|$. Demostrar que en la franja vertical $|\Re z| \leq (n - \frac{1}{2})\pi$ la ecuación

$$z \operatorname{sen} z = w$$

tiene exactamente $2n$ soluciones (contadas con multiplicidad).³

[[Indicación: Usar el teorema de Rouché, con $f(z) := z \operatorname{sen} z$, $g(z) := -w$, en un rectángulo $|x| \leq (n - \frac{1}{2})\pi$, $|y| \leq M$ con M grande.]]

Ejercicio 3.8. Demostrar la convergencia absoluta de los siguientes productos; y en cada caso, evaluar el producto:

$$P_1 := \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right); \quad P_2 := \prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right); \quad P_3 := \prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1}.$$

[[Indicación: $n^2 + n + 1 = (n+1)^2 - (n+1) + 1$.]]

Ejercicio 3.9. Averiguar los dominios de convergencia de los siguientes productos:

$$f(z) := \prod_{n=0}^{\infty} (1 + z^n); \quad g(z) := \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{z^n}{n!}\right).$$

Ejercicio 3.10. Demostrar que el producto

$$h(z) := \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^4}{n^4}\right)$$

define una función entera con ceros en $\pm n$ y $\pm in$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

³Por ejemplo, la función $z \operatorname{sen} z$ tiene un *cero doble* en 0; se cuenta $z = 0$ como 2 soluciones de la ecuación $z \operatorname{sen} z = 0$.

3.2 Ejercicios sobre la función gamma

Ejercicio 3.11. Si una función entera $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times$ no se anula en \mathbb{C} , demostrar que hay otra función entera $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$f(z) = e^{g(z)} \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}.$$

Ejercicio 3.12. Si el producto infinito $f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n(z))$ converge uniformemente sobre compactos en \mathbb{C} , y si los términos $(1 + u_n)$ no se anulan en \mathbb{C} , demostrar que

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u'_n(z)}{1 + u_n(z)},$$

con convergencia uniforme de la serie sobre compactos.

Ejercicio 3.13. Demostrar la siguiente identidad para la *derivada logarítmica* de la función gamma, en $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$:

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} - \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = - \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z+k} - \frac{1}{k+1} \right).$$

Concluir que $\Gamma'(1) = -\gamma$.

Ejercicio 3.14. (a) Demostrar que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ y evaluar $\Gamma(n + \frac{1}{2})$ para $n \in \mathbb{N}$.

(b) Usar la sustitución $t = u^2$ para verificar la integral gaussiana:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}.$$

Ejercicio 3.15. La **función beta** de Euler, de dos variables, se define por

$$B(x, y) := \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt, \quad \text{para } x > 0, y > 0.$$

Expresar $\Gamma(x)\Gamma(y)$ como una integral doble. Con un cambio de variable apropiado, demostrar que

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Concluir que $B(n + \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}) = \pi \binom{2n}{n} / 2^{4n}$.

Ejercicio 3.16. Comprobar que $\overline{\Gamma(z)} = \Gamma(\bar{z})$ para $-z \notin \mathbb{N}$. Concluir que

$$|\Gamma(\frac{1}{2} + iy)| = \sqrt{\frac{2\pi}{e^{\pi y} + e^{-\pi y}}} \quad \text{para } y \in \mathbb{R}.$$

3.3 Ejercicios sobre la función zeta

Ejercicio 3.17. Usar la fórmula de Euler para la función zeta para mostrar que la suma de los recíprocos de los números primos diverge: $\sum_{k \geq 1} 1/p_k = \infty$. Concluir que hay una infinitud de números primos en \mathbb{N} .

Ejercicio 3.18. Demostrar que las siguientes identidades son válidas:

$$\zeta(z)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^z} \quad \text{para } \Re z > 1; \quad \zeta(z) \zeta(z-1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma(n)}{n^z} \quad \text{para } \Re z > 2;$$

donde $\tau(n)$ es el número de divisores de n , $\sigma(n)$ es la suma de los divisores de n ; por ejemplo, $\tau(12) = 6$, $\sigma(12) = 28$. [[Indicación: Usar la fórmula de Euler.]]

Ejercicio 3.19. Comprobar la siguiente identidad para la $\Re z > 1$:

$$\frac{1}{\zeta(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^z},$$

donde la **función de Möbius** $\mu: \mathbb{N}^* \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ se define como sigue. Si n es divisible por p^2 para algún primo p , entonces $\mu(n) = 0$; si n posee exactamente k factores primos que son distintos, entonces $\mu(n) = (-1)^k$; además, $\mu(1) = 1$.

Ejercicio 3.20. Usar la igualdad $\int_1^{\infty} t^{-x} dt = 1/(x-1)$ para comprobar que

$$\lim_{z \rightarrow 1} \left(\zeta(z) - \frac{1}{z-1} \right) = \gamma.$$

Ejercicio 3.21. (a) Si f y g son funciones meromorfas, ambas con un polo simple en α con residuos respectivos a_{-1} y b_{-1} , demostrar que $\lim_{z \rightarrow \alpha} f(z)/g(z) = a_{-1}/b_{-1}$.

(b) Mediante un estudio de la función $\zeta(z)\Gamma(z)$ cerca de los números enteros negativos, comprobar que:⁴

$$\zeta(1-2m) = -\frac{B_{2m}}{2m}.$$

(c) Usar la ecuación funcional para la función zeta para concluir que

$$\zeta(2m) = \frac{(-1)^{m-1} 2^{2m-1} B_{2m}}{(2m)!} \pi^{2m}.$$

[[Comparar con el resultado del Ejercicio 2.46.]]

⁴En particular, valen $\zeta(-1) = -1/12$, $\zeta(-3) = 1/120$, $\zeta(-5) = -1/252$.

4.1 Ejercicios sobre aplicaciones conformes

En estos ejercicios, $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ es el disco abierto unitario, $\mathbb{C}_> = \{z : \Re z > 0\}$ es el semiplano derecho, $\mathbb{C}_+ = \{z : \Im z > 0\}$ es el semiplano superior.

Ejercicio 4.1. Si $w = \frac{z-i}{z+i}$, demostrar que $|w| < 1$ si y sólo si $\Im z > 0$. Concluir que la aplicación $z \mapsto w$ es un isomorfismo conforme entre \mathbb{C}_+ y \mathbb{D} .

Ejercicio 4.2. Encontrar la transformación de Möbius de la esfera de Riemann que lleva los puntos $-1, 0, 1$ en los puntos respectivos $1, i, -1$. ¿Cuál es la imagen del semiplano \mathbb{C}_+ bajo esta transformación?

Ejercicio 4.3. Encontrar todas las transformaciones de Möbius que establecen biyecciones entre el disco abierto $D(1;2)$ en el semiplano superior \mathbb{C}_+ tales que $1 \mapsto i$.

Ejercicio 4.4. Bajo la aplicación $z \mapsto w = \frac{2z-i}{2+iz}$, ¿cuál es la imagen del semidisco $\mathbb{D} \cap \mathbb{C}_+ = \{z : |z| < 1, \Im z > 0\}$?

Ejercicio 4.5. Encontrar todos los automorfismos conformes del semiplano superior \mathbb{C}_+ .

Ejercicio 4.6. Demostrar que la aplicación $z \mapsto w = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2$ lleva el semidisco $\mathbb{D} \cap \mathbb{C}_+$ en el semiplano superior \mathbb{C}_+ de manera conforme.

[[Indicación: Considerar el efecto de $z \mapsto (1+z)/(1-z)$ sobre el semidisco.]]

Ejercicio 4.7. Demostrar que la composición de las tres aplicaciones

$$z \mapsto u = \frac{1}{z}, \quad u \mapsto v = e^{\pi u}, \quad v \mapsto w = \frac{v-i}{v+i}$$

es un isomorfismo conforme entre la región $D(\frac{i}{2}, \frac{i}{2}) \setminus \overline{D}(\frac{i}{4}, \frac{i}{4})$ y el disco unitario \mathbb{D} . Identificar las dos regiones intermedias en la composición.

Ejercicio 4.8. Demostrar que la aplicación $z \mapsto w = \frac{2z}{1-z^2}$ es un isomorfismo conforme entre el lente $D(1, \sqrt{2}) \cap D(-1, \sqrt{2})$ y el disco unitario \mathbb{D} .

Ejercicio 4.9. Demostrar que la aplicación $z \mapsto w = \operatorname{sen} z$ establece un isomorfismo conforme entre la región $\{z = x + iy : -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, y > 0\}$ y el semiplano superior \mathbb{C}_+ .

[[Indicación: Colóquese $u := e^{iz}$; luego $v := -iu$; y después $w := \frac{1}{2}(v + v^{-1})$.]]

Índice General

Introducción	1
1 Funciones en el Plano Complejo	4
1.1 El cuerpo complejo \mathbb{C}	4
1.2 Series de potencias	12
1.3 Las ecuaciones de Cauchy y Riemann	24
1.4 Algunas funciones holomorfas	27
2 El Teorema de Cauchy y las Funciones Holomorfas	32
2.1 Integrales de línea en \mathbb{C}	32
2.2 Integrales en un contorno cerrado	39
2.3 La fórmula integral de Cauchy	46
2.4 Representación por series de Laurent	56
2.5 Las integrales de contorno	63
2.6 El principio del argumento y sus consecuencias	76
2.7 El logaritmo y las funciones ramificadas	85
3 Series y Productos de Funciones Holomorfas	92
3.1 Convergencia uniforme sobre compactos	92
3.2 Productos infinitos	99
3.3 La función gamma de Euler	105
3.4 La función zeta de Riemann	114
4 Aplicaciones Conformes	119
Ejercicios	
1.1 Ejercicios sobre el plano complejo	128
1.2 Ejercicios sobre series de potencias	130
1.3 Ejercicios sobre funciones holomorfas	132
2.1 Ejercicios sobre integrales de línea	134
2.2 Ejercicios sobre funciones holomorfas	136
2.3 Ejercicios sobre integrales de contorno	140
2.4 Ejercicios diversos sobre funciones complejas	142
2.5 Otros ejercicios sobre integrales de contorno	145
3.1 Diversos ejercicios sobre funciones holomorfas	146

3.2	Ejercicios sobre la función gamma	148
3.3	Ejercicios sobre la función zeta	149
4.1	Ejercicios sobre aplicaciones conformes	150
Índice General		151