Las partículas elementales según Wigner: aspectos clásicos y cuánticos

Joseph C. Várilly

Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica

Summer Research Institute, Villa de Leyva, julio de 2019

En 1939, Wigner clasificó las representaciones unitarias irreducibles del grupo de Poincaré; desde entonces, tales representaciones se identifican con partículas con simetría relativista. Se conocen las representaciones masivas, con o sin espín, y las representaciones sin masa de helicidad fija. Pero hay otras dos familias (sin masa) que han recibido menos atención: las llamadas representaciones de espín continua, con la excusa de que nunca han sido observadas.

Hoy en día, por diversas razones, hay un renovado interés en esas representaciones. Revisaremos un panorama de su teoría moderna. Un estudio semiclásico, con el método de las órbitas coadjuntas, revela una interesante cinemática de esas últimas partículas de Wigner. Para ellas, entre otras cosas, resulta que la helicidad no es un invariante relativista. En las ecuaciones de onda propias a esas partículas entra la variable angular, dual a la helicidad, que motiva el concepto espurio de espín continua.

1 Aspectos clásicos del grupo de Poincaré

1.1 Introducción

¿Qué cosa es una *partícula elemental*?

Esa pregunta se plantea desde los inicios de la teoría atómica de la materia hace dos siglos, con mayor insistencia desde los comienzos de la teoría cuántica que ha revelado el zoológico interno del átomo. En algunos épocas, la palabra *partícula* ha sido sustituida por frases más largas como *constituyente fundamental de la materia*; pero eso desplaza el problema sin resolverlo.

Desde el trabajo pionero de Eugene Wigner hace ochenta años [1], el concepto se identifica frecuentemente con una representación unitaria irreducible del grupo inhomogéneo de Lorentz, mejor conocido como el *grupo de Poincaré*. Aunque esa identificación no es del todo exacta en el caso de partículas sin masa (como el fotón, por ejemplo), es oportuno comenzar con esas representaciones.

De modo más general, se puede partir de un grupo de simetría G y determinar las representaciones irreducibles (unitarias, tal vez proyectivas) de G. Tales representaciones pueden llamarse **sistemas elementales cuánticas**.

► En lo sucesivo, $\mathbb{M}^4$ denotará el espacio de Minkowski, cuyos elementos son cuadrivectores $x = (x^0, \boldsymbol{x})$ o bien cuadrimomentos $p = (p^0, \boldsymbol{p})$. La métrica de $\mathbb{M}^4$ se denotará con paréntesis:

$$\underline{(xy)} \equiv x^\mu y_\mu := x^0 y^0 - \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}.$$

Wigner clasificó las representaciones unitarias irreducibles (unirreps) del grupo $\mathcal{P}_+^\uparrow := \mathbb{R}^4 \rtimes \mathcal{L}_+^\uparrow$ que combina las traslaciones con el grupo propio ortócrono de Lorentz,[1] según los estados propios del operador de cuadrimomento P_μ (de la representación infinitesimal). El grupo de Lie posee dos *Casimires*, que conmutan con todos los operadores de la representación. El primero de ellos es bien conocido: $C_1 := (PP) \equiv P_\mu P^\mu$, viene del subgrupo de traslaciones. Si $J_{\mu\nu}$ denota los generadores del grupo de Lorentz, el segundo es

$$C_2 := (WW) \equiv W^\mu W_\mu \quad \text{donde} \quad \underline{W^\mu} := \tfrac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} P_\nu J_{\rho\sigma} \tag{1.1}$$

es *el pseudovector de Pauli y Lubański*. Por la antisimetría del tensor $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$, es evidente que $(PW) \equiv P_\mu W^\mu = 0$. En consecuencia, $(PP) \geqslant 0$ implica $(WW) \leqslant 0$.

Los valores de $C_1 = (PP)$ corresponden a las órbitas de $p \in \mathbb{M}^4$ bajo el grupo de Lorentz $\mathcal{L}_+^\uparrow$. En la Tabla 1, aparece un punto de base de cada órbita de $\mathcal{L}_+^\uparrow$ y el **grupo pequeño** que deja fijo ese punto de base.

Tabla 1: Órbitas de $\mathcal{L}_+^\uparrow$ y sus grupos pequeños

$(pp) = m^2 > 0$	$(\pm m, 0, 0, 0)$	SO(3)
$(pp) = 0, p \neq 0$	$(\pm 1, 0, 0, 1)$	E(2)
$(pp) = -m^2 < 0$	$(0, 0, 0, m)$	SO(2, 1)
$p = 0$	$(0, 0, 0, 0)$	$\mathcal{L}_+^\uparrow$

En breve, tenemos: (a) partículas masivas (con o son espín); (b) partículas sin masa; (c) taquiones; y (d) una representación trivial.

[1] Aquí dejamos de lado las simetrías discretas de paridad e inversión temporal.

Al desechar las últimas dos opciones, surgen tres posibilidades al tomar en cuenta el segundo Casimir:

- $(PP) = m^2 > 0$, $(WW) = -m^2 j(j+1)$: para partículas masivas de *espín* j;
- $(PP) = 0$, $(WW) = 0$: para partículas sin masa "ordinarias";
- $(PP) = 0$, $(WW) = -\kappa^2 < 0$: una "última" especie de partículas. Ellas forma dos familias de representaciones, parametrizadas por $\kappa > 0$; hay versiones *bosónicas* y *fermiónicas* [2], introducidas por Bargmann y Wigner en 1948.

Aquí esa última especie serán llamadas **partículas de Wigner** (WP), un tanto impropiamente. En muchos textos de la teoría de campos cuánticos, tales partículas son despreciados porque "no han sido observadas". En años recientes, algunos observadores astutos han abogado por revisar esa opinión.

1.2 Sistemas elementales clásicos

Una posible aproximación al problema de cuantización es el estudio de un sistema clásico en un *espacio de fases* (M, ω) – esta es una variedad diferencial M dotado de una *forma simpléctica*, es decir, una 2-forma cerrada $\omega \in \mathcal{A}^2(M)$, $d\omega = 0$. Localmente se puede escribir $\omega = dq^j \wedge dp_j$ por un teorema de Darboux, usando "coordenadas generalizadas" $(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$. Lo que nos interesa es el caso en donde (M, ω) es un espacio homogéneo bajo una acción transitiva de un grupo de simetría G.

Podemos dar vuelta a la moneda, empezando con el grupo de simetría y tratando de construir variedades simplécticas G-homogéneas. Resulta que un tal objeto es una órbita coadjunta de G, o bien un espacio recubridor de una órbita coadjunta [3].

Una teoría llamada *cuantización geométrica* estudia esas órbitas coadjuntas, identifica ciertas que cumplen una condición de integralidad que permite construir un espacio de Hilbert que admite una unirrep de G de una manera algorítmica.

► Sea G un grupo de Lie, con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$; y sea $\mathfrak{g}^*$ el espacio $\mathbb{R}$-vectorial dual de $\mathfrak{g}$. Una base $\{X_1, \dots, X_n\}$ de $\mathfrak{g}$ da lugar a un juego de *coordenadas lineales* $\{x^1, \dots, x^n\}$ de $\mathfrak{g}^*$ por la dualidad obvia:

$$\langle x^i, X_j \rangle := \delta^i_j \,.$$

La acción adjunta de G sobre $\mathfrak{g}$ se define por la regla:

$$\exp[t\, \underline{\mathrm{Ad}\, g}(X)] = g(\exp tX)g^{-1} \quad \text{para} \quad t \in \mathbb{R},\ g \in G,\ X \in \mathfrak{g}.$$

Hay una acción contragrediente de G sobre $\mathfrak{g}^*$, dada por

$$\langle \underline{g \triangleright u}, X\rangle := \langle u, \mathrm{Ad}(g^{-1})X\rangle \quad \text{para} \quad u \in \mathfrak{g}^*. \tag{1.2}$$

Esta es la *acción coadjunta* de G. Las órbitas de esta acción son las **órbitas coadjuntas** de G. (Es obvio que la acción no es transitiva: la órbita del origen $0 \in \mathfrak{g}^*$ es el singulete $\{0\}$.)

El corchete de Lie de $\mathfrak{g}$ define un **corchete de Lie–Poisson** para polinomios sobre $\mathfrak{g}^*$. Como la regla de Leibniz

$$\{f, gh\} = \{f, g\}\, h + g\, \{f, h\}$$

es válida para cualquier corchete de Poisson, este está determinada por su acción sobre coordenadas lineales. La definición es, entonces:

$$[X_i, X_j] = c_{ij}^k X_k \implies \underline{\{x_i, x_j\}} := c_{ij}^k\, x_k\,. \tag{1.3}$$

Esta estructura de Poisson es G-equivariante y su restricción a cada órbita coadjunta $M \subset \mathfrak{g}^*$ coincide con la estructura *simpléctica* de Kirillov sobre la órbita [4]. Esta se define como sigue. Cada $X \in \mathfrak{g}$ genera un campo vectorial $\widetilde{X}$ sobre M. La 2-forma de Kirillov $\omega \in \mathcal{A}^2(M)$ está dada por la receta $\omega_u(\widetilde{X}_u, \widetilde{Y}_u) := \langle u, [X, Y]\rangle$. Sin embargo, es más sencillo trabajar directamente con las corchetes de Poisson para obtener unas fórmulas concretas para ω.

Ejemplo 1.1. El grupo de Heisenberg $H_n = \mathbb{R}^{2n} \rtimes \mathbb{R}$ tiene álgebra de Lie $\mathfrak{h}_n$ generado por $\{Q_1, \dots, Q_n, P_1, \dots, P_n, Z\}$ con corchetes no nulos $[Q_i, P_j] = \delta_{ij} Z$. (El elemento Z es central.) Entonces $\mathfrak{h}_n^* \simeq \mathbb{R}^{2n+1}$. Si $\hbar \neq 0$, la órbita de $(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \hbar)$ es el hiperplano $z = \hbar$; su forma simpléctica es:

$$\omega = dq^j \wedge dp_j.$$

Este es el ejemplo original de la tesis de Kirillov [5].

También hay órbitas puntuales $\{(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, 0)\}$. Por ser variedades simplécticas, todas las órbitas tienen dimensión par. ◊

Ejemplo 1.2. Los grupos semisimples SU(2) y SO(3) tiene álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2) = \mathfrak{so}(3) = \mathrm{lin}\langle X_1, X_2, X_3\rangle$ con corchetes $[X_i, X_j] = \varepsilon_{ij}^k X_k$ donde $\varepsilon_{12}^3 = +1 = -\varepsilon_{21}^3$. El grupo SU(2) actúa sobre $\mathfrak{su}(2) \simeq \mathbb{R}^3$ por rotaciones. Aparte del origen, las órbitas son esferas concéntricas $r = r_0$. Se debe notar que $\mathbb{S}^2$, la órbita $r = 1$, tiene forma simpléctica:

$$\omega = \sin\theta\, d\theta \wedge d\phi = d\phi \wedge d(\cos\theta). \qquad ◊$$

Ejemplo 1.3. El grupo semisimple SU(3) tiene dimensión 8. Su álgebra de Lie está generada por ocho “matrices de Gell-Mann” 3×3, entre ellos las matrices diagonales:

$$\lambda_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_8 = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ellas generan el subgrupo diagonal $\mathbb{T}^2 \leqslant \mathrm{SU}(3)$, un “toro maximal”. Una de las órbitas coadjuntas, de dimensión 6, es el cociente $\mathrm{SU}(3)/\mathbb{T}^2$, llamada *variedad de bandera*. Una fórmula explícita para su forma simpléctica ω fue calculada por Picken [6]. ◊

1.3 Acción coadjunta del grupo de Poincaré

El álgebra de Lie $\mathfrak{p}$ del grupo de Poincaré $\mathcal{P}_+^\uparrow$ tiene diez generadores $H = P_0, P_a, L_a, K_a$ con $a = 1, 2, 3$: las generadores de traslacional temporal H, traslaciones espaciales P_a, rotaciones L_a y empujones (“boosts”) K_a. En vez de enumerar sus corchetes de Lie no nulos, vamos a listar directamente los corchetes de Lie–Poisson no nulos de las coordenadas lineales h, p^a, l^a, k^a sobre $\mathfrak{p}^*$:

$$\begin{aligned} &\{l^a, l^b\} = \varepsilon^{ab}{}_c\, l^c, \qquad &&\{l^a, k^b\} = \varepsilon^{ab}{}_c\, k^c, \qquad &&\{k^a, k^b\} = -\varepsilon^{ab}{}_c\, l^c, \\ &\{l^a, p^b\} = \varepsilon^{ab}{}_c\, p^c, \qquad &&\{p^b, k^a\} = \delta^{ab} h, \qquad &&\{h, k^a\} = p^a. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Un *rotación* $R \in \mathrm{SO}(3) \leqslant \mathcal{L}_+^\uparrow$ tiene eje $\boldsymbol{m}$ (un vector unitario en $\mathbb{R}^3$) y ángulo de rotación α y se expresa como $\underline{R_{\alpha\boldsymbol{m}}} := \exp(\alpha\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{L})$. Debido a la relación $\{l^a, h\} = 0$, esa rotación deja fijo a la coordenada h. Debido a las relaciones $\{l^a, p^b\} = \varepsilon^{ab}{}_c\, p^c$, el efecto sobre el trivector $\boldsymbol{p} := (p^1, p^2, p^3)$ es la fórmula estándar de rotación:

$$R_{\alpha\boldsymbol{m}} \triangleright \boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}\cos\alpha + \boldsymbol{m}\times\boldsymbol{p}\sin\alpha + (\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{p})\boldsymbol{m}(1-\cos\alpha). \tag{1.5}$$

La misma rotación gira los trivectores $\boldsymbol{l}$ y $\boldsymbol{k}$ de manera idéntica.

Un *empujón* puro en $\mathcal{L}_+^\uparrow$ tiene un eje $\boldsymbol{n}$ (otro vector unitario y parámetro de magnitud $\zeta \in \mathbb{R}$; se expresa como $\underline{K_{\zeta\boldsymbol{n}}} := \exp(\zeta\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{K})$. La acción coadjunta de los empujones sobre las coordenadas de $\mathfrak{p}^*$ está dada por las fórmulas siguientes:

$$\begin{aligned} K_{\zeta\boldsymbol{n}} \triangleright h &= h' \equiv h\cosh\zeta + \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{p}\sinh\zeta, \\ K_{\zeta\boldsymbol{n}} \triangleright \boldsymbol{p} &= \boldsymbol{p}' \equiv \boldsymbol{p} + h\,\boldsymbol{n}\sinh\zeta + (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{p})\boldsymbol{n}(\cosh\zeta - 1), \\ K_{\zeta\boldsymbol{n}} \triangleright \boldsymbol{l} &= \boldsymbol{l}\cosh\zeta + \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{k}\sinh\zeta - (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{l})\boldsymbol{n}(\cosh\zeta - 1), \\ K_{\zeta\boldsymbol{n}} \triangleright \boldsymbol{k} &= \boldsymbol{k}\cosh\zeta - \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{l}\sinh\zeta - (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{k})\boldsymbol{n}(\cosh\zeta - 1). \end{aligned} \tag{1.6}$$

Consideremos la primera línea de (1.6) en más detalle. La *acción adjunta* de $K_{\zeta\boldsymbol{n}}$ sobre el generador H de $\mathfrak{p}$ viene del cálculo directo:

$$\begin{aligned}\operatorname{Ad}(K_{\zeta\boldsymbol{n}})H &= \operatorname{Ad}(\exp(\zeta\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{K}))H \\ &= H + \zeta[\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{K}, H] + \frac{\zeta^2}{2!}[\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{K},[\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{K},H]] + \frac{\zeta^3}{3!}[\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{K},[\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{K},[\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{K},H]]] + \cdots \\ &= H - \zeta\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{P} + \frac{\zeta^2}{2!}H - \frac{\zeta^3}{3!}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{P} + \cdots = H\cosh\zeta - \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{P}\sinh\zeta.\end{aligned}$$

Unos cálculos similares dan el efecto de $\operatorname{Ad}(K_{\zeta\boldsymbol{n}})$ sobre $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{K}$. La transpuesta del inverso $\operatorname{Ad}(K_{-\zeta\boldsymbol{n}})$ resulta ser equivalente a la operación de *cambiar el signo* $\zeta \mapsto -\zeta$ y *reemplazar generadores* en mayúsculas *por coordenadas* en minúsculas [7].

► El 4-vector de Pauli y Lubański $W = (W^0, \boldsymbol{W})$ fue introducido en (1.1). Conviene emplear una notación de 3-vectores, donde $w = (w^0, \boldsymbol{w})$ se define por los siguientes *polinomios cuadráticos* sobre $\mathfrak{p}^*$:

$$w^0 := \boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{p}, \qquad \boldsymbol{w} := \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{p} + h\,\boldsymbol{l}. \tag{1.7}$$

Fíjese que $(pw) = hw^0 - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{w} = 0$. Ahora ocurre un pequeño milagro: resulta que $(w^0, \boldsymbol{w})$ *se transforma como* $(h, \boldsymbol{p})$ *bajo la acción coadjunta*. Por ejemplo, $K_{\zeta\boldsymbol{n}} \triangleright w^0 = (K_{\zeta\boldsymbol{n}} \triangleright \boldsymbol{l})\cdot(K_{\zeta\boldsymbol{n}} \triangleright \boldsymbol{p})$; de las fórmulas (1.6) se puede calcular que:

$$\begin{aligned}K_{\zeta\boldsymbol{n}} \triangleright w^0 &= w^0\cosh\zeta + \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{w}\sinh\zeta, \\ K_{\zeta\boldsymbol{n}} \triangleright \boldsymbol{w} &= \boldsymbol{w} + w^0\,\boldsymbol{n}\sinh\zeta + (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{w})\boldsymbol{n}(\cosh\zeta - 1),\end{aligned}$$

en concordancia estricta con las primeras dos líneas de (1.6).

La regla de Leibniz permite los corchetes de Poisson que involucran las funciones w^μ. Por ejemplo, se ve que $\{h, w^\mu\} = 0$, $\{p^a, w^\mu\} = 0$ y $\{l^a, w^0\} = 0$. Otros corchetes notables son:

$$\{l^a, w^b\} = \varepsilon^{ab}{}_c w^c, \qquad \{k^a, w^0\} = -w^a, \qquad \{k^a, w^b\} = -\delta^{ab}w^0.$$

Entre las componentes de w, hay corchetes no nulos:

$$\{w^0, w^a\} = (\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{p})^a, \qquad \{w^a, w^b\} = \varepsilon^{ab}{}_c(hw^c - w^0p^c).$$

Con estas fórmulas, es un ejercicio [8] verificar que las dos **funciones de Casimir**:

$$C_1 := (pp) = h^2 - |\boldsymbol{p}|^2, \qquad C_2 := (ww) = (\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{p})^2 - |\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{p} + h\,\boldsymbol{l}|^2 \tag{1.8}$$

son *elementos centrales* del álgebra de Poisson de polinomios sobre $\mathfrak{p}^*$. Esto tiene la siguiente consecuencia.

Proposición 1.4. *Las órbitas coadjuntas maximales del grupo de Poincaré, de dimensión* 8, *son "superficies de nivel" de las dos funciones* C_1 *y* C_2.

1.4 Órbitas masivas: coordenadas de posición

La siguiente tarea es la de describir las órbitas como variedades simplécticas: luego de asignar valores fijos a las funciones de Casimir C_1 y C_2, se debe dar fórmulas explícitas para la 2-forma simpléctica ω.

Por su definición, $\boldsymbol{p} = (p^1, p^2, p^3)$ representa tres coordenadas de momento. Hace falta *encontrar variables conjugadas* $\boldsymbol{q} = (q^1, q^2, q^3)$ tales que $\{q^a, p^b\} = \delta^{ab}$, que pueden ser consideradas como "coordenadas de posición". Además, en los casos de órbitas de dimensión maximal 8, es necesario producir dos coordenadas más para completar el cuadro.

► Consideremos primero el caso "masivo" de que $C_1 = m^2$ con $m > 0$. Entonces $h^2 = m^2 + |\boldsymbol{p}|^2$. Se puede elegir $h > 0$ o bien $h < 0$: estas alternativas dan familias de órbitas disjuntas. Fijemos $h > 0$ – energía positiva.

Entonces se toma $h = +\sqrt{m^2 + |\boldsymbol{p}|^2}$. Esta ecuación determina el "hiperboloide de masa" $H_m^+ \subset \mathbb{M}^4$, con un "punto de base" $(m, \boldsymbol{0}) \in H_m^+$. El subgrupo de $\mathcal{L}_+^\uparrow$ que lo deja fija es el grupo de rotaciones espaciales SO(3).

Dado $p = (h, \boldsymbol{p}) \in H_m^+$, hay un *empujón* $\underline{B_p} := K_{\zeta\boldsymbol{n}}$ con $B_p(m, \boldsymbol{0}) = p$. Como $(pw) = 0$, se ve que $K_{-\zeta\boldsymbol{n}} w = B_p^{-1} w = (0, m\boldsymbol{s})$ para algún $\boldsymbol{s} \in \mathbb{R}^3$, llamado **vector de espín**, con $|\boldsymbol{s}| \geqslant 0$ fijo. Convencionalmente, se escribe $|\boldsymbol{s}|^2 = s(s+1)$; de este modo, se obtiene $C_2 = -m^2|\boldsymbol{s}|^2 = -m^2 s(s+1)$ con $s \geqslant 0$.

La prescripción para las *coordenadas canónicas de posición* q^a, en términos de las coordenadas de $\mathfrak{p}^*$, es la siguiente [7]:[2]

$$\boldsymbol{q} := -\frac{\boldsymbol{k}}{h} + \frac{\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{w}}{mh(m+h)} = -\frac{\boldsymbol{k}}{h} + \frac{\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{s}}{h(m+h)}\,. \tag{1.9}$$

Ahora es un ejercicio determinar los corchetes de Poisson de las variables $(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{s})$:

$$\{q^a, p^b\} = \delta^{ab}, \qquad \{s^a, s^b\} = \varepsilon^{ab}{}_c\, s^c,$$

y además $\{s^a, q^b\} = 0 = \{s^a, p^b\}$. La fórmula $\{s^a, s^b\} = \varepsilon^{ab}{}_c\, s^c$ es la que corresponde a la estructura simpléctica de la esfera $\mathbb{S}^2$. Se distinguen dos casos:

- ◇ Si $C_1 = m^2$, $C_2 = 0$ (así que $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{0}$), la órbita $\underline{\mathcal{O}_{m0+}}$ es $\mathbb{R}^6$ con coordenadas conjugadas $(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$. Este es el caso de *masa m y espín* 0.
- ◇ Si $C_1 = m^2$, $C_2 < 0$, la órbita $\underline{\mathcal{O}_{ms+}}$ es homeomorfa a $\mathbb{R}^6 \times \mathbb{S}^2$ y también isomorfa a ella como variedad simpléctica. Así son las órbitas masivas con espín $s > 0$.

[2] Los signos de algunos de nuestros fórmulas difieren de los de [7], pues en esa referencia se usó el convenio $(xy) = -x^0 y^0 + \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$.

Esta *presentación clásica* de los partículas con espín se remonta al viejo libro de Sudarshan y Mukunda [9].

► Para despejar $\boldsymbol{s}$ en términos de las coordenadas originales, se debe usar la fórmula explícita para el B_p que lleva $(m, 0)$ a $\boldsymbol{p}$:

$$B_p a = \left(\frac{h a^0 + \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{a}}{m}, \boldsymbol{a} + \frac{a^0}{m} \boldsymbol{p} + \frac{\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{a}}{m(m+h)} \boldsymbol{p} \right). \tag{1.10}$$

De ahí, al ser $(0, m\boldsymbol{s}) = B_{(h,-\boldsymbol{p})} w$, se obtiene:

$$\boldsymbol{s} = \frac{\boldsymbol{w}}{m} - \frac{w^0}{m(m+h)} \boldsymbol{p}.$$

Vale la pena notar el siguiente límite cuando $m \downarrow 0$ y $|\boldsymbol{s}| \uparrow \infty$, pero con $m|\boldsymbol{s}|$ fijo.

$$m\boldsymbol{s} = \boldsymbol{w} - \frac{w^0}{m+h} \boldsymbol{p} \longrightarrow \boldsymbol{w} - \frac{w^0}{h} \boldsymbol{p} \quad \text{cuando } \; m \to 0 \text{ con } m|\boldsymbol{s}| \text{ fijo.} \tag{1.11}$$

► Se ha determinado la topología y la estructura simpléctica de las órbitas masivas con el uso de las coordenadas canónicas $(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{s})$. ¿Cómo se comportan estas órbitas como espacios homogéneos bajo el grupo de Poincaré? Es fácil comprobar, a partir de la acción coadjunta sobre $\mathfrak{p}^*$, los efectos de las traslaciones y rotaciones sobre las coordenadas de $\mathcal{O}_{ms+}$:

$$\begin{aligned} \exp(-a^0 H) \triangleright (\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{s}) &= (\boldsymbol{q} - a^0 \boldsymbol{p}/h, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{s}), \\ \exp(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{P}) \triangleright (\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{s}) &= (\boldsymbol{q} + \boldsymbol{a}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{s}), \\ \exp(\alpha \boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{L}) \triangleright (\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{s}) &= (R_{\alpha \boldsymbol{m}} \boldsymbol{q}, R_{\alpha \boldsymbol{m}} \boldsymbol{p}, R_{\alpha \boldsymbol{m}} \boldsymbol{s}). \end{aligned} \tag{1.12}$$

El efecto del empujón $K = K_{\zeta \boldsymbol{n}} = \exp(\zeta \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{K})$ sobre $\boldsymbol{p}$ ya aparece en (1.6); esta es $K \triangleright \boldsymbol{p} = \boldsymbol{p} + h\, \boldsymbol{n} \sinh \zeta + (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{p}) \boldsymbol{n} (\cosh \zeta - 1)$. Si $\boldsymbol{n} \parallel \boldsymbol{p}$, se estira $\boldsymbol{p}$ en la misma dirección, de lo contrario hace un desvío.

En cambio, K actúa sobre el vector de espín $\boldsymbol{s}$ *por una rotación*: si $\boldsymbol{s} \mapsto \boldsymbol{s}'$, $w \mapsto w'$ bajo la acción de K, entonces

$$(0, m\boldsymbol{s}') = B_{Kp}^{-1} w' = B_{Kp}^{-1} K w = B_{Kp}^{-1} K B_p (0, m\boldsymbol{s}) \equiv R\boldsymbol{s},$$

donde $\underline{R} := B_{Kp}^{-1} K B_p$ es la llamada **rotación de Wigner** asociada a K y p.

El efecto de K sobre la coordenada $\boldsymbol{q}$ es una fórmula complicada. Hay un artificio que simplifica el cálculo: se puede reemplazar $\boldsymbol{q}$ por una coordenada de posición alternativa $\boldsymbol{x}$, al precio de perder la propiedad canónica [7]:

$$\boldsymbol{x} := -\frac{\boldsymbol{k}}{h} + \frac{\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{s}}{mh} = \boldsymbol{q} + \frac{\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{s}}{m(m+h)}. \tag{1.13}$$

El efecto del empujón sobre $\boldsymbol{x}$ es

$$K_{\zeta \boldsymbol{n}} \triangleright \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} - \frac{\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{x}}{h'} \, \boldsymbol{p} \sinh \zeta - \frac{h(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{x})}{h'} \, \boldsymbol{n}(\cosh \zeta - 1).$$

Cuando se trata de "cuantizar" las órbitas mediante procedimientos geométricos (como en [7], por ejemplo), resulta más cómodo usar la coordenada "covariante" $\boldsymbol{x}$ en vez de la coordenada "canónica" $\boldsymbol{q}$. Esto refleja la circunstancia que el concepto de posición es menos natural que el de momento en contextos relativistas.

1.5 Órbitas para las partículas de Wigner

Un análisis similar es factible para las órbitas "no masivas", donde $C_1 = 0$. En este caso $h^2 = |\boldsymbol{p}|^2$, así que $h = \pm|\boldsymbol{p}|$. En el espacio de Minkowski, esto determina dos "embudos" $H_0^\pm$ del cono de luz, excluyendo el origen. Para el punto de base en H_0^+, se suele tomar $(1, 0, 0, 1)$. El subgrupo de $\mathcal{L}_+^\uparrow$ que lo deja fija está formado por las rotaciones alrededor del eje z y unas "rotaciones nulas" en la terminología de Penrose [10]: es isomorfo al grupo euclidiano $\mathrm{E}(2) := \mathbb{R}^2 \rtimes \mathrm{SO}(2)$.

Si $C_2 = 0$ también, se puede construir representaciones de $\mathcal{P}_+^\uparrow$ por inducción de unas representaciones del *grupo pequeño* $\mathrm{E}(2)$. (El método fue introducido por Wigner [1] siguiendo las técnicas de Frobenius para grupos finitos.) Convencionalmente, esto describe partículas como fotones y neutrinos sin masa (antes de 1998!) que no poseen espín sino un grado de libertad llamado **helicidad** $\underline{\lambda} := w^0/h$, donde el 3-vector $\boldsymbol{w} = \lambda \boldsymbol{p}$ es paralelo a la dirección del momento $\boldsymbol{p}$.

El caso restante $C_1 = 0$, $C_2 = -\kappa^2 < 0$ suele mencionarse en buenos textos de la teoría cuántica de campos (por ejemplo, el de Weinberg [11]) pero en seguida se descarta "por no haber sido observado nunca". Este prejuicio empezó a cambiar hace unos años con los estudios de Schuster y Toro [12] que señalaron sus posibles implicaciones cosmológicas – aunque siguen sin observación. Aquí llamamos **partícula de Wigner** – abreviado como WP – a este especie de partícula, por el interés del propio Wigner en estudiarla a través de sus ecuaciones de onda [2, 13].

► Una tarea inicial es la descripción de la órbita coadjunta $\underline{\mathcal{O}_{0\kappa}}$ para el caso $C_1 = 0$, $C_2 = -\kappa^2$, con $\kappa > 0$ fijo. De (1.8), estas condiciones son:

$$h^2 = |\boldsymbol{p}|^2, \qquad -(ww) = |\boldsymbol{w}|^2 - (w^0)^2 = |\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{p} + h\, \boldsymbol{l}|^2 - (\boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{p})^2 = \kappa^2,$$

así que κ tiene las dimensiones de energía (o de masa, ya que se ha tomado $c = 1$, implícitamente).

La clave para describir la topología de la órbita $\mathcal{O}_{0\kappa}$ es la identificación de una buena coordenada de posición. Aquí se puede sacar provecho de una sugerencia de Schwinger [14], partiendo del buen comportamiento del límite de $m\boldsymbol{s}$ observado en (1.11):

$$m\boldsymbol{s} \longrightarrow \boldsymbol{w} - (w^0/h)\,\boldsymbol{p} =: \underline{\boldsymbol{t}}. \tag{1.14}$$

Obsérvese que $\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{p} = \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{p} - w^0h = 0$; y $|\boldsymbol{t}|^2 = |\boldsymbol{w}|^2 - (w^0)^2 = \kappa^2$. Esto dice que *el 3-vector* $\boldsymbol{t}$ *queda en el círculo* de radio κ en el plano $\perp$ a $\boldsymbol{p}$.

Por otro lado, la fórmula (1.9) es singular en este límite, debido al denominador $mh(m+h)$. Lo que Schwinger sugiere es reemplazar este denominador por $h^2(m+h)$; esto es,

$$\boldsymbol{q} := -\frac{\boldsymbol{k}}{h} + \frac{\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{w}}{mh(m+h)} \longrightarrow -\frac{\boldsymbol{k}}{h} + \frac{\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{w}}{h^2(m+h)}$$

y en el límite cuando $m \downarrow 0$, $|\boldsymbol{s}| \uparrow \infty$ con $m|\boldsymbol{s}|$ fijo, $\boldsymbol{q}$ queda reemplazada por

$$\underline{\boldsymbol{r}} := -\frac{\boldsymbol{k}}{h} + \frac{\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{w}}{h^3} = -\frac{\boldsymbol{k}}{h} + \frac{\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{t}}{h^3}\,.$$

Ahora se observa que $\{r^a, p^b\} = -\{k^a, p^b\}/h = \delta^{ab}$, el cual es el primer requisito de unas coordenadas de posición. Además, la **helicidad** $\underline{\lambda} := w^0/h$ cumple

$$\{\lambda, p^a\} = 0, \qquad \{\lambda, r^a\} = 0. \tag{1.15}$$

Esto dice que λ podría ser una sétima coordenada para la órbita; solo falta uno. Sin embargo, hay una nota bemol: las coordenadas r^a no conmutan entre sí, porque [8]:

$$\{r^a, r^b\} = -\varepsilon^{ab}{}_c\,\lambda p^c/h^3 \neq 0. \tag{1.16}$$

Como veremos, esto no es un obstáculo; más bien, es compatible con la topología de la órbita $\mathcal{O}_{0\kappa}$.

► El 3-vector $\boldsymbol{t}$ de (1.14) es característica de las órbitas de la WP – fíjese que $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{0}$ para las partículas sin masa "ordinarias". Es necesario parametrizar el círculo donde vive $\boldsymbol{t}$ con una variable angular. Elíjase un 3-vector $\boldsymbol{t}_1(\boldsymbol{p})$ en el círculo $\perp$ a $\boldsymbol{p}$, de tal manera[3] que $\boldsymbol{t}_1(\Lambda\boldsymbol{p}) = \Lambda\boldsymbol{t}_1(\boldsymbol{p})$ para una familia transitiva de elementos $\Lambda \in \mathcal{L}^{\uparrow}_{+}$. Defínase $\boldsymbol{t}_2(\boldsymbol{p}) := \boldsymbol{p}/h \times \boldsymbol{t}_1(\boldsymbol{p})$. Entonces se puede escribir

$$\boldsymbol{t} = \boldsymbol{t}_1(\boldsymbol{p})\cos\theta + \boldsymbol{t}_2(\boldsymbol{p})\sin\theta \quad \text{con} \quad \theta \in \mathbb{S}^1.$$

[3] Para ver que eso es factible, tómese algún 3-vector $\bar{\boldsymbol{p}}$ de referencia y elíjase $\boldsymbol{t}_1(\bar{\boldsymbol{p}})$ ortogonal a $\bar{\boldsymbol{p}}$ y de longitud κ. Sea B_p una transformación de Lorentz tal que $\boldsymbol{p} = B_p\bar{\boldsymbol{p}}$ – entiéndase esto como notación abreviada para $(h, \boldsymbol{p}) = B_p(\bar{h}, \bar{\boldsymbol{p}})$ – y defínase $\boldsymbol{t}_1(\boldsymbol{p}) := B_p\boldsymbol{t}_1(\bar{\boldsymbol{p}})$.

Aunque hay cierto grado de ambigüedad en la definición de θ, la diferencial $d\theta$ está bien definida. Nótese que $\{\boldsymbol{p}, \boldsymbol{t}_1, \boldsymbol{t}_2\}$ es un *triedro móvil ortogonal* en $\mathbb{R}^3$.

Ahora $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}, \lambda, \theta)$ proporciona un juego de coordenadas para esta órbita de dimensión 8. Las variables $\boldsymbol{r}$ y λ no tienen restricciones, pero $\boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{0}$, y $\theta \in \mathbb{S}^1$. Por lo tanto, la órbita $\mathcal{O}_{0,\kappa}$ es al menos *homeomorfa* a $\mathbb{R}^3 \times (\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2) \times \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$.

► Es necesario identificar la forma simpléctica $\omega \in \mathcal{A}^2(\mathcal{O}_{0,\kappa})$ en términos de estas coordenadas. Como $\{\lambda, \boldsymbol{p}\} = \boldsymbol{0}$, se puede pedir $\{\lambda, \boldsymbol{t}_1(\boldsymbol{p})\} = 0$ y $\{\lambda, \boldsymbol{t}_1(\boldsymbol{p})\} = 0$. Resulta que [8]:

$$\{\lambda, \boldsymbol{t}\} = -\boldsymbol{p}/h \times \boldsymbol{t} = -\boldsymbol{t}_2(\boldsymbol{p}) \cos\theta + \boldsymbol{t}_1(\boldsymbol{p}) \operatorname{sen}\theta,$$

y por ende $\{\lambda, \cos\theta\} = \operatorname{sen}\theta$, $\{\lambda, \sin\theta\} = -\cos\theta$. Esto dice que λ y θ son variables conjugadas. Tomando en cuenta las relaciones (1.15) y (1.16), se obtiene la siguiente receta para la forma simpléctica:

$$\omega = dr^a \wedge dp_a - \varepsilon_{ab}{}^c \, \lambda p_c h^{-3} \, dr^a \wedge dr^b + d\lambda \wedge d\theta. \tag{1.17}$$

El segundo indica que la helicidad λ juega un papel análogo a la carga de un monopolo magnético; pero la analogía no es exacta. Es un ejercicio verificar que la relación $d\omega = 0$ depende de la igualdad $|\boldsymbol{p}|^2 = h^2$: esta forma no sería simpléctica sobre una órbita masiva.

► ¿Cómo se comporta la órbita $\mathcal{O}_{0,\kappa}$ cómo espacio homogéneo? En otras palabras, ¿cuál es el efecto de la acción adjunta sobre las nuevas coordenadas? Para contestar esa pregunta, es conveniente reemplazar la coordenada θ por el 3-vector $\boldsymbol{t}$, aceptando la redundancia que eso implica. No es difícil verificar las acciones análogas a las del caso masivo (1.12) para los subgrupos de traslaciones y rotaciones:

$$\begin{aligned}
\exp(-a^0 H) \triangleright (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{t}, \lambda) &= (\boldsymbol{r} - a^0 \boldsymbol{p}/h, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{t}, \lambda), \\
\exp(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{P}) \triangleright (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{t}, \lambda) &= (\boldsymbol{r} + \boldsymbol{a}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{t}, \lambda), \\
\exp(\alpha \boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{L}) \triangleright (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{t}, \lambda) &= (R_{\alpha \boldsymbol{m}} \boldsymbol{r}, R_{\alpha \boldsymbol{m}} \boldsymbol{p}, R_{\alpha \boldsymbol{m}} \boldsymbol{t}, \lambda).
\end{aligned}$$

Ya sabemos el efecto del empujón $K_{\zeta \boldsymbol{n}} = \exp(\zeta \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{K})$ sobre $\boldsymbol{p}$. Como en el caso masivo, $K_{\zeta \boldsymbol{n}} \triangleright \boldsymbol{r}$ está dado por una fórmula complicada. Más interesante es su efecto sobre la helicidad:

$$K_{\zeta \boldsymbol{n}} \triangleright \lambda = \frac{(w^0)'}{h'} = \frac{w^0 \cosh\zeta + \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{w} \sinh\zeta}{h \cosh\zeta + \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{p} \sinh\zeta} = \lambda + \frac{\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{t} \tanh\zeta}{h + \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{p} \tanh\zeta}\,. \tag{1.18}$$

Este cálculo muestra que en las órbitas de la WP, con $\boldsymbol{t} \neq 0$, *la helicidad no es un invariante para el grupo de Lorentz*. Esto marca un contraste notable con el fotón y con el "neutrino no masivo".[4]

Si $\boldsymbol{p}' = K_{\zeta\boldsymbol{n}} \triangleright \boldsymbol{p}$, $h' = K_{\zeta\boldsymbol{n}} \triangleright h$, la transformación $\boldsymbol{p}/h \mapsto \boldsymbol{p}'/h'$ entre dos 3-vectores de longitud 1 corresponde a una *rotación* $R_{\delta\boldsymbol{m}}$ (que depende de ζ, $\boldsymbol{n}$, h y $\boldsymbol{p}$): el eje es $\boldsymbol{m} := (\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{n})/|\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{n}|$ y el ángulo δ está dado por

$$\sin\delta = \frac{h \sinh\zeta + (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{p})(\cosh\zeta - 1)}{hh'} \, |\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{n}| \,, \quad \cos\delta = 1 - \frac{|\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{n}|^2}{hh'} (\cosh\zeta - 1).$$

Un resultado un poco sorprendente [8] es que la transformación $\boldsymbol{t} \mapsto \boldsymbol{t}'$ entre dos 3-vectores de la misma longitud κ está dada *por la misma rotación* $R_{\delta\boldsymbol{m}}$. Lo mismo sucede con $\boldsymbol{p}/h \times \boldsymbol{t} \mapsto \boldsymbol{p}'/h' \times \boldsymbol{t}'$. En otras palabras, el triedro ortogonal $(\boldsymbol{p}/h, \boldsymbol{t}, \boldsymbol{p}/h \times \boldsymbol{t})$ cambia rígidamente por la rotación $R_{\delta\boldsymbol{m}}$ bayo el empujón $K_{\zeta\boldsymbol{n}}$. Este *giroscopio escondido* es quizás la característica más sobresaliente de las órbitas coadjuntas de la WP.

2 Representaciones y ecuaciones de onda para la WP

2.1 El método del grupo pequeño

En los años veinte del siglo pasado, se descubrió que los observables de la mecánica cuántica podrían ser realizadas como operadores sobre un espacio de Hilbert. Un colaborador posdoctoral del propio Hilbert, John von Neumann, se dió cuenta de que el espacio de Hilbert era indispensable para obtener el espectro correcto de autovalores reales de un observable: ningún otro espacio de Banach servía para ese propósito. Un estado puro se identificaba con un vector ψ (salvo factores de fase) en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$.

Una *simetría* $\psi \mapsto g\psi$ debe conservar las probabilidades de transición $|\langle\phi \mid \psi\rangle|^2$ y por eso debe ser representado por un operador $U(g)$ sobre $\mathcal{H}$ que es bien unitario o bien antiunitario – por un teorema de Wigner mismo (1931). Para un grupo de simetrías conexo, los representantes son unitarios. Por eso, es necesario estudiar representaciones unitarias de grupos sobre espacios de Hilbert. Un **sistema elemental cuántico** está dado por una representación unitaria irreducible del grupo de simetría.

Los elementos del grupo de Poincaré $\mathcal{P}$ son productos de los del grupo conexo $\mathcal{P}_+^\uparrow$ y dos simetrías discretas: la reversión temporal T (representado por un operador

[4] El fenómeno llamado "oscilación de neutrinos" solo se explica si entre las tres estados de masa de los neutrinos, al menos dos tienen una masa (muy) pequeña. Aunque no es muy probable, no se ha excluido experimentalmente (hasta hoy) que el tercero tenga masa nula.

antiunitario) y la inversión espacial I (paridad). Aquí dejamos de lado las simetrías discretas: el grupo de interés es $\mathcal{P}_+^\uparrow$.

► El grupo $\mathcal{P}_+^\uparrow$ es un producto semidirecto $\mathbb{R}^4 \rtimes \mathcal{L}_+^\uparrow$, cuyos elementos son (a, Λ) con $a \in \mathbb{R}^4$, $\Lambda \in \mathcal{L}_+^\uparrow$. En primer lugar, el grupo abeliano $\mathbb{R}^4$ tiene unirreps unidimensionales: cada unirrep de $\mathbb{R}^4$ es de la forma $a \mapsto e^{i(ap)}$ para algún $p \in \mathbb{M}^4$. En el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ de un unirrep U de $\mathcal{P}_+^\uparrow$, el subgrupo de traslaciones se representa por $(a, 0) \mapsto e^{i(aP)} = e^{ia^0P_0 - i\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{P}}$ donde los generadores P_0, P_1, P_2, P_3 son operadores autoadjuntos sobre $\mathcal{H}$ que conmutan entre sí.

Además $(PP) = P_0^2 - \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{P}$ conmuta con cada $U(a, \Lambda)$. Por el lema de Schur, la irreducibilidad de U muestra que (PP) es un operador escalar de valor C_1, el primer Casimir de $\mathcal{P}_+^\uparrow$. Entonces las unirreps se clasifican en familias según el valor de C_1.

El próximo paso, según el artículo original de Wigner [1], considera $\mathcal{H}$ como un espacio de **funciones de onda** $\varphi(p, \xi)$, donde $p \in \mathbb{M}^4$ con $(pp) = C_1$ y ξ denota otros parámetros pertinentes. Entonces las traslaciones se representan por

$$U(a, 0)\, \varphi(p, \xi) = e^{i(ap)} \varphi(p, \xi). \tag{2.1}$$

Considérese la acción "regular" del group de Lorentz, dado por los siguientes operadores $P(\lambda)$, para $\Lambda \in \mathcal{L}_+^\uparrow$:

$$P(\Lambda)\, \varphi(p, \xi) := \varphi(\Lambda^{-1}p, \xi).$$

Entonces un cálculo fácil muestra que

$$P(\Lambda)\, U(a, 1) = U(\Lambda a, 1)\, P(\Lambda).$$

Por ser $\mathcal{P}_+^\uparrow$ un producto semidirecto, sus dos subgrupos obedecen la misma fórmula:

$$U(0, \Lambda)\, U(a, 1) = U(\Lambda a, 1)\, U(0, \Lambda).$$

Entonces $U(0, \Lambda)P(\Lambda)^{-1}$ conmuta con todos los $U(a, 1)$ y por ende con cualquier operador de multiplicación $f(p)$. Entonces se puede escribir

$$U(0, \Lambda)P(\Lambda)^{-1}\varphi(p, \xi) = \sum\nolimits_\eta Q(p, \Lambda)_{\xi\eta}\, \varphi(p, \eta) \tag{2.2}$$

donde $Q(p, \Lambda)$ es una matriz unitaria u operador unitario en el espacio de las variables ξ solamente.

La ley de grupo para los $U(0, \Lambda)$ y los $P(\Lambda)$ dan reglas para los $Q(p, \Lambda)$:

$$Q(p, \Lambda\Lambda') = Q(p, \Lambda)\, Q(\Lambda^{-1}p, \Lambda'), \qquad Q(p, \Lambda)^{-1} = Q(\Lambda^{-1}p, \Lambda^{-1}). \tag{2.3}$$

► Para determinar los posibles $Q(p,\Lambda)$, Wigner reduce el análisis al *grupo pequeño* – "little group" – por un procedimiento debido a Frobenius [16], hoy en día conocido como la *inducción de representaciones*.

Para cada *órbita del grupo de Lorentz* $\mathcal{L}_+^\uparrow$ en $\mathbb{M}^4$, elíjase un representante $\bar{p}$; supóngase que existe, para cada p en esa órbita, una transformación de Lorentz B_p tal que $B_p(\bar{p}) = p$ y que $p \mapsto B_p$ sea continua.[5] Dado $\Lambda \in \mathcal{L}_+^\uparrow$, defínase $R = R_{\Lambda,p}$ por

$$R := B_p^{-1}\,\Lambda\,B_{\Lambda^{-1}p}\,. \tag{2.4}$$

Entonces $R\bar{p} = \bar{p}$, por la cadena de transformaciones:

$$\bar{p} \longmapsto \Lambda^{-1}p \longmapsto p \longmapsto \bar{p}.$$

Esto es: R pertenece al *grupo de isotropía* $\mathcal{L}_{\bar{p}}$ de $\bar{p}$, bautizado **grupo pequeño** por Wigner. Los grupos de isotropía de diversos puntos de la misma órbita son conjugados, así que el grupo pequeño, hasta isomorfía, solo depende de la órbita.

En la Tabla 1 de la sección 1.1 se exhiben grupos pequeños para órbitas típicas. Para $C_1 = m^2 > 0$, tómese $\bar{p} := (\pm m, 0, 0, 0)$; la órbita es un *hiperboloide* y el grupo de isotropía $\mathcal{L}_{\bar{p}}$ es el **grupo de rotaciones** $\underline{\mathrm{SO}(3)}$.

Para $C_1 = 0$, fuera del origen, tómese $\bar{p} := (\pm 1, 0, 0, 1)$; la órbita es el semicono "a futuro" del *cono de luz* $(pp) = 0$ y el grupo de isotropía $\mathcal{L}_{\bar{p}}$ es el **grupo euclidiano** $\underline{\mathrm{E}(2)} \simeq \mathbb{R}^2 \rtimes \mathrm{SO}(2)$, mencionado al inicio de la sección 1.5.

La transformación (2.4) se llama, por costumbre, la **rotación de Wigner** asociado al par (Λ, p) – a pesar de que en el caso $\mathcal{L}_{\bar{p}} = \mathrm{E}(2)$, R generalmente no es una rotación.

► Cuando $P = \bar{p}$ y $R, R' \in \mathcal{L}_{\bar{p}}$, las reglas (2.3) se simplifican:

$$Q(\bar{p}, RR') = Q(\bar{p}, R)\,Q(\bar{p}, R'), \qquad Q(\bar{p}, R)^{-1} = Q(\bar{p}, R^{-1}).$$

Es evidente, entonces, que $R \mapsto Q(\bar{p}, R)$ *es una representación unitaria del grupo pequeño* $\mathcal{L}_{\bar{p}}$. Conviene abreviar $Q(R) \equiv Q(\bar{p}, R)$, al fijar $\bar{p}$; un cambio de $\bar{p}$ en la misma órbita produce una representación equivalente del grupo pequeño.

Se puede comprobar que esta representación de $\mathcal{L}_{\bar{p}}$ es irreducible si y solo si la representación de $\mathcal{P}_+^\uparrow$ dada por

$$U(a,\Lambda)\,\varphi(p,\xi) := e^{i(ap)}Q(B_p^{-1}\,\Lambda\,B_{\Lambda^{-1}p})\,\varphi(\Lambda^{-1}p, \xi) \tag{2.5a}$$

es a su vez irreducible [1, 15].

[5] Esto es ciertamente factible, aunque la elección de B_p no es única. (Para el hiperboloide $(pp) = m^2$, $p^0 > 0$, se puede usar la fórmula (1.10) anterior.) Resulta que las representaciones construidos con otras elecciones de $\bar{p}$ y de B_p son equivalentes a la que vamos a exhibir [1].

En resumen: se puede obtener cada unirrep de $\mathcal{P}_+^\uparrow$ por la receta (2.5) a partir de una unirrep del subgrupo pequeño. Dícese que U es la **representación inducida** a partir de la representación Q del subgrupo $\mathcal{L}_{\bar{p}}$.

La construcción anterior de representaciones inducidas por Wigner en 1939 es históricamente la primera instancia de una inducción para grupos de Lie (siguiendo la receta de Frobenius [16] para grupos finitos). Años más tarde [17], Mackey lo generalizó al procedimiento de inducción que aparece en los textos modernos.

► En la exposición anterior, se omitió un detalle importante: se admiten representaciones *proyectivas* $U(a,\Lambda)$, donde la ley de grupo es válida hasta factores de fase $e^{i\theta} \in \mathrm{U}(1)$. Estos se obtienen, por la misma inducción, de representaciones proyectivas del grupo pequeño. En el caso de SO(3), estas son representaciones ordinarias del grupo recubridor doble $\mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$, con factores de fase ± 1. También, $\mathcal{L}_+^\uparrow \simeq \mathrm{SO}(1,3)$ tiene un doble recubridor $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{SO}(1,3)$. Dado $A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ tal que $\pm A \mapsto \Lambda \in \mathcal{L}_+^\uparrow$, la fórmula correspondiente es

$$U(a,A)\,\varphi(p,\xi) := e^{i(ap)} Q(B_p^{-1}\,A\,B_{\Lambda^{-1}p})\,\varphi(\Lambda^{-1}p,\xi). \tag{2.5b}$$

Estas "representaciones de valores dobles" de $\mathcal{P}_+^\uparrow$ corresponden a partículas masivas de espín semientero (fermiones). El mismo fenónemo se presenta con la WP: hay representaciones simples (bosónicas) y dobles (fermiónicas) correspondientes a las órbitas coadjuntas $\mathcal{O}_{0\kappa}$.

2.2 Representaciones inducidas de $\mathcal{P}_+^\uparrow$

Para las órbitas masivas y de la WP, el problema se reduce a la clasificación de las unirreps de los grupos pequeños SO(3) y E(2) – o de sus recubridores dobles. Las representaciones de SO(3) y SU(2) son conocidas: para cada $j \in \frac{1}{2}\mathbb{N} = \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots\}$ hay una única unirrep de SU(2) – hasta equivalencia – de dimensión $2j+1$. Esta es una representación simple o doble de SO(3) según sea $j \in \mathbb{N}$ o no. Entonces la variable ξ en (2.1) y (2.5) toma valores discretos $\xi \in \{-j, -j+1, \dots, j-1, j\}$ y cada $Q(R)$ es una matriz en $M_{2j+1}(\mathbb{C})$.

► En vez dar una descripción completa de tales representaciones, optamos por catalogar representantes de los generadores del subgrupo de los $U(0,\Lambda)$. Las órbitas coadjuntas $\mathcal{O}_{ms\pm}$ correspondientes están dadas por $s = j \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$; para otras $s > 0$, se trata de órbitas "no integrales". En vez de $\varphi(p,\xi)$ conviene usar la notación $\varphi(\boldsymbol{p},m)$ donde se elimina p^0 por la relación

$$p^0 = \pm\omega_p \quad \text{donde} \quad \omega_p := \sqrt{m^2 + |\boldsymbol{p}|^2}.$$

Los generadores de los subgrupos uniparamétricos $t \mapsto U(0, \exp(itL^a))$ se denotan, con un abuso de notación, por $\mathbb{L}^a$, para $a = 1, 2, 3$; y similarmente se escribe $\mathbb{K}^b$ para el generador de $t \mapsto U(0, \exp(itK^b))$. Estos son operadores diferenciales de primer orden, con las relaciones de conmutación:

$$[\mathbb{L}^a, \mathbb{L}^b] = i\varepsilon^{ab}{}_c\, \mathbb{L}^c, \qquad [\mathbb{L}^a, \mathbb{K}^b] = i\varepsilon^{ab}{}_c\, \mathbb{K}^c, \qquad [\mathbb{K}^a, \mathbb{K}^b] = -i\varepsilon^{ab}{}_c\, \mathbb{L}^c. \tag{2.6}$$

Estos seis operadores $\vec{\mathbb{L}}$ y $\vec{\mathbb{K}}$ se obtienen de un cálculo largo pero directo; véase, por ejemplo, [15, § 5.1]. El resultado es:

$$\vec{\mathbb{L}} = -i\boldsymbol{p} \times \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}} + \vec{\mathbb{S}}, \qquad \vec{\mathbb{K}} = ip^0 \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}} + \frac{p^0}{\omega_p(m + \omega_p)}\, \boldsymbol{p} \times \vec{\mathbb{S}}, \tag{2.7}$$

donde $\vec{\mathbb{S}} = (\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^2, \mathbb{S}^3)$ son matrices en $M_{2j+1}(\mathbb{C})$ que cumplen $[\mathbb{S}^a, \mathbb{S}^b] = i\varepsilon^{ab}{}_c\, \mathbb{S}^c$. Fíjese que la primera fórmula expresa $\vec{\mathbb{L}}$ como la suma del *momento angular orbital* y del *espín*.

► El método del grupo pequeño también es aplicable a las órbitas $\mathcal{O}_{0\kappa}$ de la WP (con $\kappa > 0$). Los generadores correspondientes aparecen por primera vez en un artículo corto [18] de Lomont y Moses (1962). Para su derivación detallada, véase [15, § 5.2]. El grupo pequeño es $\mathrm{E}(2) \simeq \mathbb{R}^2 \times \mathrm{SO}(2)$; el parámetro extra es un 3-vector $\boldsymbol{\xi} = (\xi^1, \xi^2, 0)$ en un círculo de radio κ, esto es, $(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 = \kappa^2$. Se puede identificar la *helicidad* λ con la variable conjugada al parámetro angular θ del círculo. Hay unirreps del grupo recubridor doble $\widetilde{\mathrm{E}}(2)$ si y solo si $\lambda \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$. En breve: la helicidad está discretizada, con valores semienteros para representaciones fermiónicas y valores enteros para representaciones bosónicas.

En un marcado contraste con el caso $C_1 = C_2 = 0$, los diversos valores de la helicidad no marcan unirreps inequivalentes. Se distinguen *solo cuatro unirreps* en el caso $C_1 = 0$, $C_2 = \kappa > 0$; dos bosónicas con helicidad entera y dos fermiónicas con helicidad semientera. En cada pareja, la distinción es el signo de $p^0 = \pm|\boldsymbol{p}|$. Esto es posible porque, como ya se vió en (1.18), para la WP *la helicidad no es un invariante de Lorentz*. En consecuencia, la partícula de Wigner – si existe – conlleva una *torre infinita de helicidades*, como ha sido enfatizado por Schuster y Toro [12].

Fíjese bien que la variable que se discretiza (al pasar de clásico a cuántico) es la helicidad λ. Su variable conjugada, el ángulo θ, permanece continua. Esto ha dado lugar a una confusión terminológica pues estas representaciones han sido bautizados de *continuous spin*, porque el análogo del espín es λ y no θ. (Lamentablemente, los culpables de este adefesio lingüístico son los propios Bargmann y Wigner [2].)

► Los generadores para la WP, según Lomont y Moses, son los siguientes, para la versión bosónica con $p^0 > 0$. Tómese $\bar{p} := (1, 0, 0, 1)$ y $\boldsymbol{n} := (0, 0, 1)$. Entonces se obtiene:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbb{L}} &= -i\boldsymbol{p} \times \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}} - i\frac{\boldsymbol{p} + |\boldsymbol{p}|\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{p}| + p^3}\left(\xi^1 \frac{\partial}{\partial \xi^2} - \xi^2 \frac{\partial}{\partial \xi^1}\right), \\ \vec{\mathbb{K}} &= i|\boldsymbol{p}|\,\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}} - \frac{\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{p}| + p^3}\left(\xi^1 \frac{\partial}{\partial \xi^2} - \xi^2 \frac{\partial}{\partial \xi^1}\right) + \frac{\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{p}|^2} \times \left(\frac{\boldsymbol{p} + |\boldsymbol{p}|\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{p}| + p^3} \times \boldsymbol{\xi}\right). \end{aligned} \tag{2.8}$$

Es un ejercicio comprobar que estos operadores cumplen las relaciones (2.6). La dependencia de la elección de $\bar{p}$ salta a la vista: esta presentación de la acción del grupo de Poincaré sobre vectores $\varphi(\boldsymbol{p}; \xi^1, \xi^2)$ no se destaca por su belleza.

2.3 Representaciones covariantes y ecuaciones de onda

Las representaciones irreducibles construidas por inducción desde representaciones del grupo pequeño no son bien adaptadas para el paso (eventual) a una teoría cuántica de campos, en donde se enfatiza la invariancia (o bien covariancia) bajo el grupo de Poincaré. Hay una formulación alternativa en donde $\mathcal{P}_+^\uparrow$ actúa sobre un espacio (de Hilbert) de funciones de valores vectoriales $\Psi(x)$, para 4-vectores $x \in M^4$; o dualmente, sobre funciones $\Phi(p)$ de 4-momentos p, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} T(a, A)\,\Psi(x) &:= \mathcal{D}(A)\,\Psi(\Lambda^{-1}(x - a)), \\ T(a, A)\,\Phi(p) &:= e^{i(ap)}\mathcal{D}(A)\,\Phi(\Lambda^{-1}p), \end{aligned} \tag{2.9}$$

donde $\pm A \mapsto \Lambda$ en el recubrimiento doble $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \to \mathcal{L}_+^\uparrow$. Aquí $A \mapsto \mathcal{D}(A)$ denota una representación *finitodimensional* de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ que no tiene que ser unitaria ni irreducible, *a priori*.

De hecho, todas las representaciones unitarias no triviales de $\mathcal{L}_+^\uparrow$ o de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ son infinitodimensionales. Sin embargo, resulta que solo es necesario que $\mathcal{D}(A)$ sea unitaria sobre el grupo pequeño: esto es, para $A \in \mathrm{SU}(2)$ o $A \in \widetilde{\mathrm{E}}(2)$, según el caso.

► Para obtener irreducibilidad a partir de las acciones covariantes (2.9), se debe *proyectar* estas acciones *en un subespacio apropiado* de los $\Psi(x)$ o los $\Phi(p)$. En el caso masivo de espín j, la restricción de $\mathcal{D}$ a $\mathrm{SU}(2)$ se descompone en una suma directa de irreducibles D^j; sea Q el proyector (esto es, $Q^2 = Q = Q^\dagger$) sobre un subespacio del componente D^j. Supóngase que $\Phi(\bar{p})$ queda en ese subespacio, o sea, $Q\Phi(\bar{p}) = \Phi(\bar{p})$. Al definir $Q(\Lambda^{-1}\bar{p}) := \mathcal{D}(A)^{-1}\,Q\,\mathcal{D}(A)$, se obtiene

$$Q(p)\,\Phi(p) = \Phi(p) \quad \text{para todo } p \text{ en la órbita de } \bar{p}. \tag{2.10}$$

Esta es una **ecuación de onda** para los elementos $\Phi(p)$ del subespacio buscado.

Como ejemplo de una ecuación de onda, tómese la representación de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ dado por $\mathcal{D} = D^{\frac{1}{2},0} \oplus D^{0,\frac{1}{2}}$, actuando sobre 4-espinores. Si $Q := \frac{1}{2}(1+\beta)$, empleando la matriz β de Dirac ($\beta^2 = 1$), se puede comprobar que $Q(p) = \frac{1}{2}(1+\gamma^\mu p_\mu/m) \in M_4(\mathbb{C})$; y la relación (2.10) es la *ecuación de Dirac*:

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)\,\Phi(p) = 0; \quad \text{o bien} \quad (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\,\Psi(x) = 0.$$

Para elucidar la relación biunívoca entre las representaciones inducidas (2.5) y las representaciones covariantes con proyección de espín (2.9) y (2.10), véase el par de artículos fundamentales [19] de Niederer y O'Raifeartaigh (1974).

► Para la WP bosónica, la ecuación covariante tiene *el aspecto de una partícula escalar*, es decir, la representación $\mathcal{D}$ del grupo de Lorentz es la trivial, y las funciones Ψ y Φ toman valores escalares. En cambio, es necesario incorporar condiciones tales que $(pw) = 0$ en las ecuaciones de onda. Para lograrlo, Wigner introdujo, en otro artículo fundamental [13] en 1948, una familia de ecuaciones de onda para funciones de dos variables $\Psi(x,w)$ o $\Phi(p,w)$, donde $w \in \mathbb{M}^4$ es un 4-vector auxiliar – denotado w por razones que luego serán obvias. En el espacio de momentos, las primeras tres ecuaciones son:

$$(pp)\,\Phi(p,w) = 0, \quad \big((ww) + \kappa^2\big)\,\Phi(p,w) = 0, \quad (pw)\,\Phi(p,w) = 0. \tag{2.11a}$$

Estos pueden ser escritos de otra manera en el espacio de configuraciones:

$$\Box_x \Psi(x,w) = 0; \quad \big((ww) + \kappa^2\big)\,\Psi(x,w) = 0; \quad (w\,\partial_x)\,\Psi(x,w) = 0,$$

al aplicar una transformación de Fourier para hacer el cambio de variable $p \mapsto x$ (solamente). La primera de ellas es la ecuación de Klein y Gordon para masa cero.

Es evidente que las tres ecuaciones en (2.11a) son ligaduras propias de la naturaleza de la WP (bosónica)[6] determinadas por $(pp) = (pw) = 0$, $(ww) = -\kappa^2$ en $\mathbb{M}^4$.

Hace falta una cuarta ecuación, que efectúa la condición $C_2 = -\kappa^2$. Al recordar que $C_2 = W^\mu W_\mu$ donde $W^\mu = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} P_\nu J_{\rho\sigma}$, véase (1.1), se obtiene

$$(WW) = \tfrac{1}{4}\varepsilon^{\kappa\sigma\mu\tau} P_\sigma J_{\mu\tau}\, \varepsilon_{\kappa\rho\nu\eta} P^\rho J^{\nu\eta} = -\tfrac{1}{2} J_{\mu\tau} J^{\mu\tau} P_\sigma P^\sigma + J_{\rho\nu} J^{\sigma\nu} P_\sigma P^\rho\,.$$

[6] Para la versión fermiónica, se reemplaza la ecuación de Klein y Gordon por otra de tipo Dirac: $i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi(x) = 0$; las otras no se cambian.

El operador diferencial que corresponde a C_2 en un espacio de variables p donde $(PP) = P^\mu P_\mu$ se anula, es el siguiente:

$$\begin{aligned} C_2 \equiv (\mathbb{W}\mathbb{W}) &= \mathbb{J}_{\nu\rho}\mathbb{J}^{\nu\sigma}\mathbb{P}_\sigma\mathbb{P}^\rho \\ &= (w_\nu\, \partial^w_\rho - w_\rho\, \partial^w_\nu)(w^\nu\, \partial^\sigma_w - w^\sigma\, \partial^\nu_w)\, \partial^x_\sigma\, \partial^\rho_x = \cdots \\ &= \kappa^2(p\,\partial_w)^2 - (pw)^2\,\Box_w + 2(pw)(p\,\partial_w)(w\,\partial_w) = -\kappa^2. \end{aligned}$$

con algunos detalles del cálculo omitidos. Al incluir la condición $(pw) = 0$, esta se reduce a la cuarta ecuación de onda:

$$\big((p\,\partial_w)^2 + 1\big)\,\Phi(p, w) = 0. \tag{2.11b}$$

La partícula de Wigner bosónica debe cumplir las cuarto ecuaciones de onda (2.11a) y (2.11b). No hay más requisitos.[7]

► La última ecuación diferencial es de segundo orden, pero el operador diferencial se factoriza fácilmente:

$$(p\,\partial_w)^2 + 1 = ((p\,\partial_w) - i)((p\,\partial_w) + i),$$

dando dos alternativas equivalentes. Wigner entonces opta por "simplificar" la ecuación (2.11b), reemplazándola por

$$\big((p\,\partial_w) + i\big)\,\Phi(p, w) = 0. \tag{2.11c}$$

Esta ecuación se puede integrar en seguida:

$$\Phi(p, w - \gamma p) = e^{\pm i\gamma}\,\Phi(p, w). \tag{2.12}$$

donde entra un escalar γ como parámetro de tipo "gauge". Al recordar la identidad $\boldsymbol{w} - \lambda\boldsymbol{p} = \boldsymbol{t}$, se ve que γ es un marcador para la helicidad.

Desdichosamente, esta decisión de Wigner fue errónea. ☹

Porque es una consecuencia de (2.12) que la transformada de Fourier ordinaria $\Psi(x, w)$ no admite soluciones reales de las ecuaciones de onda, que a lo largo resultan indispensables para el análisis de partículas bosónicas.

► Sin embargo, al seguir con (2.11a) y (2.11c), se puede eliminar variables redundantes con $p^0 = |\boldsymbol{p}|$, $\gamma \mapsto w^0/p^0 = \lambda$, $\boldsymbol{w} = \lambda\boldsymbol{p} + \boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{t}_1\cos\theta + \boldsymbol{t}_2\sin\theta$, para

[7] Algunos autores prefieren hacer una transformación de Fourier en ambos variables: $(p, w) \mapsto (x, v)$. Sin embargo, se puede chequear que la transformación $\partial_w \mapsto iv$, $w \mapsto -i\partial_v$ conduce a la misma expresión para el operador C_2 con (p, v) en lugar de (p, w). Las ecuaciones de onda obtenidas son equivalentes a las nuestras.

reemplazar $\Phi(p, w)$ por $e^{\pm i\lambda}\, \Phi'(\boldsymbol{p}, \theta)$. Entonces $|\Phi(p, w)|^2$ solo depende de $\boldsymbol{p}$ y θ. Bargmann y Wigner [2] entonces sugirieron la siguiente norma $\mathcal{P}_+^\uparrow$-invariante:

$$\|\Phi(p, w)\|^2 := (\text{const.}) \int \frac{|\Phi(p, w)|^2}{|\boldsymbol{p}|}\, d^3\boldsymbol{p}\, d\theta.$$

Con ella, las soluciones de (2.11a) y (2.11c) forman un espacio de Hilbert (al completar en esa norma), en donde se puede definir una representación covariante de tipo escalar:

$$U(a, \Lambda)\, \Phi(p, w) := e^{i(ap)}\, \Phi(\Lambda^{-1}p, \Lambda^{-1}w).$$

Una transformada de Fourier conduce formalmente a la fórmula:

$$U(a, \Lambda)\, \Psi(x, w) := \Psi(\Lambda^{-1}(x - a), \Lambda^{-1}w).$$

Und da liegt der Hund begraben.[8] Al aplicar estos procedimientos a la parte de frecuencia positiva ($p^0 > 0$) solamente, se debe enfrentar el conocido conflicto entre localidad y positividad para partículas bosónicas sin masa [19]. (Es por eso que se dice que "el fotón no puede vivir en un espacio de Hilbert".) El problema radica en el uso inapropiado de la transformada de Fourier al pasar del espacio de momentos al espacio de configuraciones. Y este problema todavía no ha sido completamente resuelto. La historia continúa …

Bibliografía

[1] E. P. Wigner, "On unitary representations of the inhomogeneous Lorentz group", Ann. Math. **40** (1939), 149–204.

[2] V. Bargmann and E. P. Wigner, "Group theoretical discussion of relativistic wave equations", PNAS **34** (1948), 211–223.

[3] S. Sternberg, "Symplectic homogeneous spaces", Trans. Amer. Math. Soc. **212** (1975), 113–130.

[4] A. A. Kirillov, *Lectures on the Orbit Method*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.

[5] A. A. Kirillov, "Unitary representations of nilpotent Lie groups", Usp. Mat. Nauk **17** (1962), 57–110.

[8] "Y ahí está enterrado el perro muerto." Ahí está el meollo del asunto.

[6] R. F. Picken, “The Duistermaat–Heckman integration formula on flag manifolds”, J. Math. Phys. **31** (1990), 616–638.

[7] J. F. Cariñena, J. M. Gracia–Bondía and J. C. Várilly, “Relativistic quantum kinematics in the Moyal representation”, J. Phys. A **23** (1990), 901–933.

[8] J. M. Gracia–Bondía, F. Lizzi, J. C. Várilly and P. Vitale, “The Kirillov picture for the Wigner particle”, J. Phys. A **51** (2018), 255203.

[9] E. C. G. Sudarshan and N. Mukunda, *Classical Dynamics: A Modern Perspective*, Wiley, New York, 1974.

[10] R. Penrose and W. Rindler, *Spinors and Spacetime*, vol. 1, Cambridge University Press, Cambridge, 1984.

[11] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields I*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[12] Ph. Schuster and N. Toro, “On the theory of continuous spin particles. I: wavefunctions and soft-factor scattering amplitudes; II: helicity correspondence in radiation and forces”, JHEP **1309** (2013), 104 y 105.

[13] E. P. Wigner, “Relativistische Wellengleichungen”, Z. Physik **124** (1948), 665–684.

[14] J. Schwinger, *Particles, Sources and Fields*, vol. 1, Addison-Wesley, Reading, MA, 1970.

[15] Y. Ohnuki, *Unitary Representations of the Poincaré Group and Relativistic Wave Equations*, World Scientific, Singapore, 1988.

[16] G. F. Frobenius, “Über Relationen zwischen den Charakteren einer Gruppe und denen ihrer Untergruppen”, Sitz.-Ber. Preuss. Akad. Wiss. (1898), 501–515.

[17] G. W. Mackey, “On induced representations of groups”, Amer. J. Math. **73** (1951), 576–592.

[18] J. S. Lomont and H. E. Moses, “Simple realizations of the infinitesimal generators of the proper orthochronous inhomogeneous Lorentz group for mass zero”, J. Math. Phys. **3** (1962), 405–408.

[19] U. H. Niederer and L. O’Raifeartaigh, “Realizations of the unitary representations of the inhomogeneous space-time groups”, Fort. Phys. **22** (1974), 111–129 and 131–157.