Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones 2000 **7**(1-2) : 165–174
cimpa – ucr – ccss issn: 1409-2433

ALGUNOS ASPECTOS TEÓRICOS DE LAS FUNCIONES CASI PERIÓDICAS N-DIMENSIONALES

Vernor Arguedas*– Edwin Castro*

Recibido: 20 Setiembre 1999

Resumen

Presentamos una definición de función casi periódica en $\mathbb{R}^N$, la cual generaliza la definición usal en $\mathbb{R}$. A partir de esa definición demostramos algunas propiedades topológicas para esta clase de funciones. Al final del artículo, demostramos algunas propiedades algebraicas usando el teorema de estructura que se incluye en el apéndice.

Palabras clave: Funciones casi periódicas, funciones *-periódicas, teorema de estructura, transformada de Fourier, transformada de Radon.

Abstract

We give a definition of Almost Periodic Functions on $\mathbb{R}^N$. Following that definition we show some topological properties for this functions. At the end of this paper we proof some algebraic properties by using the structure theorem. We give the proof of this result (structure theorem) in the appendix.

Keywords: Almost periodic functions, *-periodic functions, structure theorem, Fourier transform, Radon transform.

Mathematics Subject Classification: 27C, 19C, 113C

1. Introducción

En esta serie de artículos, vamos a presentar una definición de función casi periódica y propiedades importantes asosiadas a este concepto, estas propiedades generalizan algunas de las correspondientes al caso de las funciones casi periódicas de una variable

*CIMPA, Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica, 2060 San José, Costa Rica. E-Mail: vargueda@cariari.ucr.ac.cr

([Ca],[Co],[Cor],[Fis]). En el artículo anterior [Ca] discutimos las propiedades más importantes referentes al caso de una variable.

La presentación de los tópicos referentes la caso de funciones casi periódicas N-dimensionales no ha sido hallada por los autores en las fuentes bibliográficas consultadas.

En le trabajo [Ca] mencionamos la función:

$$f(t) = \cos t + \cos \sqrt{2}t, \quad t \in \mathbb{R} \tag{1}$$

la cual no es periódica pero es cuasiperiódica, ella aparece como solución de una ecuación diferencial.

La función (1) se puede generalizar al caso de N variables de la forma siguiente: sea $x = (x_1, \ldots, x_N)^t$ un vector N-dimensional y consideremos la aplicación $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \prod_{i=1}^{N} \cos x_i + \prod_{i=1}^{N} \cos \sqrt{2}x_i \tag{2}$$

La aplicación dada por (2) es una generalización de (1). Se ve que esta aplicación no es *-periódica [CA1].

Definición 1 *Sea $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ una aplicación continua; decimos que f es casi periódica (c.p.) si para todo $\varepsilon > 0$ existe $U = (u_1, \ldots, u_N)^t, U \in \mathbb{R}^N, u_i > 0, i = \overline{1,N}$. (Escribiremos en adelante $U > 0$) tal que para todo $X = (x_1, \ldots, x_N)^t \in \mathbb{R}^N$ existe $T \in \prod_{i=1}^{N}[x_i,\, x_i + u_i]$ tal que:*

$$|f(y+T) - f(y)| < \varepsilon, \forall y \in \mathbb{R}^N \tag{3}$$

En el caso de $N = 1$ la denominación **casi periódica** es equivalente a **cuasiperiódica**.

Observación 1. La definición anterior se puede extender a aplicaciones de $\mathbb{R}^N$ en un espacio normado V sustituyendo en (3) el valor absoluto por la norma respectiva. El caso de funciones de $\mathbb{R}$ con valores en un espacio normado (para algunos desarrollos se requiere que sea un espacio de Banach) está ampliamente tratado en la literatura, p.ej. en [Cor],[Be],[Bl],[Bo2].

El caso de funciones de $\mathbb{C}^N$ en V puede tratarse poniendo:

$$\begin{aligned}
U &= \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix}; \quad u_i > 0, \quad v_i > 0, \quad i = \overline{1,N} \\
X &= \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_N \end{pmatrix}; \quad T \in \prod_{i=1}^{N}[x_i, x_i + u_i]
\end{aligned}$$

$$T' \in \prod_{i=1}^{N}[z_i, z_i + v_i]$$

$$\left\| f(z+T+iT') - f(z) \right\| < \varepsilon, \forall z \in \mathbb{C}^N$$

.

Observación 2. Se prueba sin dificultad que la aplicación definida por (2) es casi periódica.

2. Algunas propiedades

Para explotar las propiedades de las funciones c.p. N-dimensionales necesitamos el resultado siguiente.

Teorema 2.1 *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ continua entonces f es c.p. si y solo si sus funciones componentes son casi periódicas.*

DEMOSTRACIÓN: Utilizaremos la norma supremun en $\mathbb{R}^N$ que denotaremos con $\|\cdot\|_\infty$. Como f es c.p. dado $\varepsilon > 0$ existe $u > 0$ tal que $\forall y \in \mathbb{R}$ existe $T \in [y, y+u]$ tal que:

$$\|f(z+T) - f(z)\|_\infty = \left\| (f_1(z+T) - f_1(z), \ldots,\ f_N(z+T) - f_N(z))^t \right\|_\infty < \varepsilon, \forall z \in \mathbb{R}$$

con lo que $|f_i(z+T) - f_i(z)| < \varepsilon$, $\forall z \in \mathbb{R}$; por lo tanto f_i es c.p.
Para lo anterior hemos denotado con f , a $f := (f_1, \ldots, f_N)^t$ ■

Observación: Sean $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, i = \overline{1, N}$ funciones c.p., uno de los resultados más significativos en el caso de una variable es el siguiente:
Dado $\varepsilon > 0$ **existe** $l > 0$ **tal que para todo** $a \in \mathbb{R}$ **existe** $T \in [a, a+l]$ **tal que**:

$$|f_i(z+T) - f_i(z)| < \varepsilon, \quad \forall z \in \mathbb{R}, \quad i = \overline{1, N}$$

La prueba del resultado anterior puede hallarse en [Cor],[Mu],[Ca].

Aplicando la observación anterior se deduce fácilmente la otra parte del teorema.

Uno de los más importantes resultados en el desarrollo de la teoría de las funciones casi periódicas es el Teorema de Estructura, aquí lo enunciaremos en varias variables, una demostración detallada se encuentra en el apéndice.

El caso de una variable ha sido bien estudiado en la literatura.

Teorema de estructura Sea $f_1, \ldots, f_p$ una familia finita de funciones c.p. con $f_i : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}, i = \overline{1, P}$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe $a = (a_1, \ldots, a_N)^t > 0$ tal que para todo $y = (y_1, \ldots, y_N)^t \in \mathbb{R}^N$ existe $T \in \prod_{i=1}^N [y_i, y_i + a_i]$ tal que

$$|f_i(x+T) - f_i(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Es decir todo conjunto finito de funciones casi periódicas es uniformemente casi periódico. Este teorema será probado en el apéndice.

Teorema 2.2 *Sea $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ c.p. entonces f es acotada.*

Demostración: Sea $\varepsilon = 1$ existe $a \in \mathbb{R}^N$, $a = (a_1, \dots, a_N)^t > 0$, tal que $\forall y \in \mathbb{R}^N$, $y = (y_1, \dots, y_N)^t$ existe $T \in \prod_{i=1}^N [y_i, y_i + a_i]$ tal que

$$|f(x+T) - f(x)| < 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N. \tag{4}$$

Sea $M = \sup\{|f(x)|, x \in \prod_{i=1}^N [0, a_i]\}$. Sea $z \in \mathbb{R}^N$ arbitrario pero fijo, $z = (z_1, \dots, z_N)^t$. Sea $y = -z$ entonces existe $T_0 \in \prod_{i=1}^N [-z_i, z_i + a_i]$, que satisface (4). Sea $s = z + T_0$, entonces se tiene que $s \in \prod_{i=1}^N [0, a_i]$, de donde
$|f(z)| \leq |f(z) - f(z+T_0)| + |f(z+T_0)| \leq 1 + M$. ■

Teorema 2.3 *Sea $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ una función c.p. entonces f es uniformemente continua.*

Demostración: Sea $\varepsilon > 0$, existe $a = (a_1, \dots, a_N)^t > 0$, $a \in \mathbb{R}^N$ tal que para todo $y = (y_1, \dots, y_N)^t \in \mathbb{R}^N$ existe $T \in \prod_{i=1}^N [y_i, y_i + a_i]$ tal que $|f(x+T) - f(x)| < \varepsilon/3$, $\forall x \in \mathbb{R}^N$.
Consideremos el compacto $K = \prod_{i=1}^N [-1, 1 + a_i]$, entonces se tiene que la función f restringida a K es uniformemente continua de donde para ese $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cualquier $x, x' \in K$ con $\|x - x'\|_\infty < \delta$ se tiene que $|f(x) - f(x')| < \varepsilon/3$.
Sean $y', y'' \in \mathbb{R}^N$ con $\|y' - y''\|_\infty < \delta$, entonces se tiene que existe $T_1 \in \prod_{i=1}^N [-y'_i, -y'_i + a_i]$ tal que: $|f(z+T_1) - f(z)| < \varepsilon$, $\forall z \in \mathbb{R}^N$; hemos utilizado la notación: $y' = (y'_1, \dots, y'_N)^t$.
Como $y' + T_1 \in K$ entonces $y'' + T_1 \in K$ se tiene que:

$$\left| f(y' + T_1) - f(y'' + T_1) \right| < \varepsilon/3.$$

De lo anterior se sigue que:

$$|f(y') - f(y'')| \leq |f(y') - f(y' + T_1)| + |f(y' + T_1) - f(y'' + T_1)| + |f(y'' + T_1) - f(y'')| < \varepsilon. \ ■$$

Teorema 2.4 *Sea $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ una función c.p.; sea $s \in \mathbb{R}^N$ arbitrario entonces la aplicación $f_s : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ definida por: $f_s(x) = f(x+s)$, $\forall x \in \mathbb{R}^N$ es c.p.*

Demostración: Se tiene que f_s es continua por ser composición de funciones continuas. Sea $\varepsilon > 0$ entonces existe $a = (a_1, \dots, a_N)^t > 0$, tal que para todo $y \in \mathbb{R}^N$, $y = (y_1, \dots, y_N)^t$ existe $T \in \prod_{i=1}^N [y_i, y_i + a_i]$ tal que $|f(x+T) - f(x)| < \varepsilon$, $\forall x \in \mathbb{R}^N$; se tiene de aquí que $|f_s(x+T) - f_s(x)| < \varepsilon$, $\forall x \in \mathbb{R}^N$. ■

Teorema 2.5 *Sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones c.p. de $\mathbb{R}^N$ en $\mathbb{R}$ tal que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a una función g, entonces g es c.p.*

Demostración: Claramente g es continua.
Sea ahora $\varepsilon > 0$ entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|g(x) - f_{n_0}(x)| < \varepsilon/3, \forall x \in \mathbb{R}^N$.
Como f_{n_0} es c.p. existe $a = (a_1, \dots, a_N)^t > 0$ tal que para todo $y = (y_1, \dots, y_N)^t \in \mathbb{R}^N$ existe $T \in \prod_{i=1}^N [y_i, y_i + a_i]$ tal que $|f_{n_0}(x+T) - f_{n_0}(x)| < \varepsilon/3$, $\forall x \in \mathbb{R}^N$. Se tiene entonces que:

$$\begin{aligned}
|g(x+T) - g(x)| &\leq |g(x+T) - f_{n_0}(x+T)| + |f_{n_0}(x+T) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - g(x)| \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\
&= \varepsilon, \forall x \in \mathbb{R}^N. \ ■
\end{aligned}$$

Teorema 2.6 *Sea $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ continua y *-periódica entonces f es c.p.*

Demostración: Sea $\varepsilon > 0$, $(T_1, \ldots, T_N)$ un *-periódico de f, i.e. $(n_1T_1, \ldots, n_NT_N)^t$ es un periodo de f para todo $(n_1, \ldots, n_N)^t \in \mathbb{Z}^N$.
Sea $y \in \mathbb{R}^N$ arbitrario pero fijo, entonces existe $\tau \in \prod_{i=1}^N [y_i, y_i + T]$ donde $T = (T_1, \ldots, T_N)^t$, con $\tau = (n_1T_1, \ldots, n_NT_N)^t$, $n_1, n_2, \ldots, n_N \in \mathbb{Z}$.
Se tiene entonces que $|f(x+\tau) - f(x)| = 0 < \varepsilon$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$. ∎

Observación: el límite uniforme de funciones *-periódicas es casi periódico.

3. Un análogo al teorema de Liusternik

El célebre teorema de Liusternik para el caso de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ fue establecido en 1936 (ver [Be],[Bo],[Mu]).

Sea CP el conjunto de funciones casi periódicas de $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$. Sea $X \subset CP$, decimos que X es **uniformemente casi periódico** si para todo $\varepsilon > 0$ existe $a = (a_1, \ldots, a_N)^t > 0$ tal que para todo $y = (y_1, \ldots, y_N)^t \in \mathbb{R}^N$ existe $T \in \prod_{i=1}^N [y_i, y_i + a_i]$ tal que:

$$|f(x+T) - f(x)| < \varepsilon, \forall f \in X, \forall x \in \mathbb{R}^N$$

Sea $B(\mathbb{R}^N)$ el conjunto de funciones de $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ acotadas con la norma supremun:

$$\|f\|_\infty = \sup\{f(x) : x \in \mathbb{R}^N\}, f \in B(\mathbb{R}^N).$$

Sabemos que $X \subset (B(\mathbb{R}^N), \| \ \|_\infty)$ es relativamente compacto si y solo si X es equicontinuo y uniformemente acotado.

En el caso de las funciones casi periódicas obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.1 *Sea $X \subset CP$ entonces X es relativamente compacto en $(B(\mathbb{R}^N), \| \ \|_\infty)$ si y solo si X es equicontinuo, uniformemente acotado y uniformemente periódico.*

Demostración: $(\Rightarrow)$ Supóngase que X es relativamente compacto en $(B(\mathbb{R}^N), \| \ \|_\infty)$, entonces existe $M > 0$ tal que $\|f\|_\infty < M$, $\forall f \in X$, es decir X es uniformemente acotado.
Sea $\varepsilon > 0$ y $x_0 = (x_1^0, \ldots, x_N^0)^t \in \mathbb{R}^N$, entonces existe $Z \subset X$, Z finito tal que $X \subset Z + B(0, \varepsilon/3)$ esto por ser X totalmente acotado.
Sea $g \in Z$, entonces g es continua en x_0. Como Z es finito, existe $\delta > 0$ tal que para todo $y \in \mathbb{R}^N$, $\|y - x_0\| < \delta$ entonces $|g(y) - g(x_0)| < \varepsilon/3$, $\forall g \in Z$.
Sea $f \in X$ entonces existe $g \in Z$ tal que $f \in g + B\ (0, \varepsilon/3)$.
Sea ahora $y \in \mathbb{R}^N$ arbitrario tal que $\|y - x_0\|_\infty < \delta$, entonces:
$|f(y) - f(x)| \leq |f(y) - g(y)| + |g(y) - g(x_0)| + |g(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$ de donde X es equicontinuo.
Por el teorema de estructura (véase apéndice), si $\varepsilon > 0$ existe $a = (a_1, \ldots, a_N)^t > 0$ tal que para todo $y = (y_1, \ldots, y_N)^t \in \mathbb{R}^N$, existe $T \in \prod_{i=1}^N [y_i, y_i + a_i]$ tal que $|g(x+T) - g(x)| < \varepsilon \forall x \in \mathbb{R}^N$, $\forall g \in Z$ (Z finito).

Se obtiene entonces que si $f \in X$ entonces existe $g \in Z$ tal que $f \in \{g\} + B(0, \varepsilon/3)$ entonces:

$$|f(x+T) - f(x)| \leq |f(x+T) - g(x+T)| + |g(x+T) - g(x)| + |g(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

De donde f es uniformemente casi periódico.

($\Leftarrow$) Basta probar que X es totalmente acotado.
Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario pero fijo existe $a = (a_1, \ldots, a_N)^t > 0$ tal que para todo $n = (n_1, \ldots, n_N)^t \in \mathbb{Z}^N$ existe $T_n \in \prod_{i=1}^N [n_i a_i, (n_i+1)a_i]$ tal que:

$$|f(x + T_n) - f(x)| < \varepsilon/2, \forall x \in X, \forall f \in X.$$

Se tiene que $T_n \in \prod_{i=1}^N [n_i a_i, (n_i+1)a_i] \subset \mathbb{R}^N, n \in \mathbb{Z}^N$.
Además esas cajas constituyen un cubrimiento numerable de $\mathbb{R}^N$. Sea $Y = \{y^f : f \in X\}$ donde $y^f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ se define por:

$$y^f(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \prod_{i=1}^N [-a_i, a_i] \\ f(x - T_n) & \text{si } x \in \prod_{i=1}^N [n_i a_i, (n_i+1)a_i] \end{cases}$$

donde $n = (n_1, \ldots, n_N)^t \in \mathbb{Z}^N$.
Sea $Y_a = \{f/\prod_{i=1}^N [-a_i, a_i] : f \in X\}$. Se tiene que $Y_a \subset (C(\prod_{i=1}^N [-a_i, a_i]), \| \|_\infty)$.
Además, Y_a es equiacotado y equicontinuo en ese espacio; por el teorema de Arzelà-Ascoli Y_a es relativamente compacto de donde se sigue que es totalmente acotado, entonces existe Z finito $Z \subset Y_a$ tal que:

$$Y_a \subset Z + B(0, \varepsilon/2).$$

Extendiendo las funciones $g \in Z$ a las correspondientes funciones en Y se obtiene que $X \subset Z + B(0, \varepsilon)$, lo cual demuestra el teorema. ■

4. Algunas aplicaciones del teorema de estructura

En forma análoga al caso de una variable ([Cor],[Be],[Mu]) vamos a investigar la estructura del espacio $(CP, \| \|_\infty)$. En CP definimos las operaciones usuales de la suma, producto de funciones y producto por un escalar.

Para $f, g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}$ escribimos:

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x) + g(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \\ (f \cdot g)(x) &= f(x)g(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \\ (\lambda f)(x) &= \lambda f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^N. \end{aligned}$$

Proposition 4.1 *El conjunto CP con las operaciones definidas anteriormente y con la norma $\| \|_\infty$ constituye una álgebra de Banach.*

Demostración: La demostración utiliza el teorema de estructura para dos funciones f y g , es decir dado $\varepsilon > 0$ existe $a \in \mathbb{R}^N$ $a > 0$ tal que para todo $y \in \mathbb{R}^N$ existe $T \in \prod_{i=1}^N [y_i, y_i + a_i]$ tal que:

$$|f(x+T) - f(x)| < \varepsilon, \; |g(x+T) - g(x)| < \varepsilon \; \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

El resto de la prueba para la suma, el producto y la multiplicación por un escalar no ofrece dificultad alguna y es completamente análoga a la presentada en ([Ca]). ■

Por el Teorema 2.5 de la sección 2 se tiene que el límite de funciones c.p. es c.p. de donde $(CP, \| \|_\infty)$ es una álgebra de Banach.

Como aplicación de los resultados anteriores presentaremos el resultado siguiente:

Proposition 4.2 *Sean $f_1, \ldots, f_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones casi periódicas y $b_1, \ldots, b_p \in \mathbb{R}$. Consideremos las aplicaciones definidas por:*

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{p} b_i f_i(x_i)$$

$$g\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{p} b_i f_i(x_i)$$

entonces f y g son funciones c.p.

DEMOSTRACIÓN: Realizaremos la prueba de que f es c.p. Para g la prueba no ofrece dificultad alguna.

Sea $L = |b_1| + \cdots + |b_p|$, si $L = 0$ el resultado es trivial. Supóngase ahora que $L > 0$. Sea $\varepsilon > 0$ entonces existe $a' \in \mathbb{R}$ tal que para todo $y \in \mathbb{R}$ existe $T \in [y, y + a']$ tal que:

$$|f_i(x+T) - f_i(x)| < \frac{\varepsilon}{2pL}, \forall x \in \mathbb{R},\ j = \overline{1,p}$$

Sea $y \in \mathbb{R}^p$, $y = (y_1, \ldots, y_p)^t$, $a' = (a_1, \ldots, a_p)^t \in \mathbb{R}^p, T = (Ty_1, \ldots, Ty_p)^t$.

Se tiene que

$$T \in \prod_{i=1}^{p} [y_i, y_i + a_i]$$

y que

$$|f(x+T) - f(x)| = |\sum_{i=1}^{p} b_i f_i(x_i + Ty_i) - \sum_{i=1}^{p} b_i f_i(x_i)| < \varepsilon, \forall x \in \mathbb{R}^p.$$

Se deduce que la función definida por (2) es c.p. ■

Observación: Una función $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ es c.p. si y solo si todas sus componentes lo son. El resultado se generaliza sin dificultad a funciones de $\mathbb{C}^n$ en $\mathbb{C}^m$.

Referencias

[Ca] Castro, E. (1994) "Funciones periódicas, cuasi periódicas y clasificación de funciones", *Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones* **1**(1): 73–86.

[CA1] Castro, E.; Arguedas, V. (1998) "Funciones *-periódicas ", *Vl Encuentro Centroamericano de Investigadores Matemáticos*, Managua: 41–49.

[Co] Cooke, R. (1981) "Almost periodic functions", *Amer. Math. Monthly* **88**(7): 515–525.

[Cor] Corduneanu, C. (1989) *Almost Periodic Functions.* Chelsea Publishing Company, New York.

[Be] Besicovitch, A.S. (1954) *Almost Periodic Functions.* Dover Publications Inc, New York.

[Bo] Bohr, H. (1951) *Almost Periodic Functions.* Chelsea Publishing Company, New York.

[Fi] Fink, A.M. (1977) *Almost Periodic Diferential Ecuations.* Lecture Notes in Mathematics 377, Springer Verlag, New York.

[Mu] Muntean, I. (1990) "Analiza functionala: capitole speciale" , Universitatea Babes-Bolyai, Cluj-Napoca.

[CA2] Castro, E.; Arguedas, V. "Algunos aspectos teóricos de las funciones casi periódicas N-dimensionales-II", CIMPA, Universidad de Costa Rica, San José.

[Fis] Fischer, A. (1996) "Structure of Fourier exponents of almost periodic functionas and periodicity of almost periodic functions", *Mathematica Bohemia* **121**(3): 249–262.

[Bl] Blot, J. (1996) "Variational methods for the almost periodic lagrangian oscilations", *Cahiers Eco & Maths* C.E.R.M.S.E.M.**44**.

[Bo2] Bochner, S. (1992) *Collected Papers of Salomon Bochner, Part 2.* American Mathematical Society, providence RI.

Apéndice: Teorema de estructura para funciones casi periódicas

Sea $x \in \mathbb{R}^N$ tal que x_i denota la componente i-ésima de x. Escribimos $x > 0$ si $x_i > 0$, $i = 1, \ldots, N$.
Si $x \in \mathbb{R}^N, x > 0$, ponemos $[y, y + x] := [y_1, y_1 + x_1] \times \ldots \times [y_N, y_N + x_N]$. Sean $x, y \in \mathbb{R}^N$ escribimos $|x - y| = (|x_1 - y_1|, \ldots, |x_N - y_N|)^t$.

$C_b(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ denota el conjunto de funciones acotadas de $\mathbb{R}^N$ en $\mathbb{R}$ con la norma $(\| \|)_\infty$. $f(x_- + m)$ denota la función $x \mapsto f(x + m)$.

Teorema 4.1 (Teorema de estructura para funciones casi periódicas) *Sean $f, g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ dos funciones casi periódicas, entonces $\forall \varepsilon > 0$ existe $a = (a_1, \ldots, a_N)^t > 0$ tal que $\forall y \in \mathbb{R}^N$, existe $T \in [y, y+a]$ tal que $|f(x+T) - f(x)| < \varepsilon$ y $|g(x+T) - g(x)| < \varepsilon$, $\forall x \in \mathbb{R}^N$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\varepsilon > 0$, entonces existen $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^N, a_i > 0, i = 1, 2$ tales que $\forall y \in \mathbb{R}^N$ existen $T_1(y), T_2(y) \in \mathbb{R}^N$ tales que $T_i(y) \in [a_i, a_i + y], i = 1, 2$ con

$$|f(x + T_1(y)) - f(x)| < \varepsilon, \forall x \in \mathbb{R}^N, \qquad (A{,}1)$$

$$|g(x + T_2(y)) - g(x)| < \varepsilon, \forall x \in \mathbb{R}^N. \qquad (A{,}2)$$

Sea $a_0 = (sup(a_1^1, a_1^2), \ldots, sup(a_N^1, a_N^2))^t = (a_1^0, \ldots, a_N^0)^t$. Del hecho que f, g son funciones uniformemente continuas se sigue que existe $\delta \in \mathbb{R}^N, \delta > 0, \delta < a_0$ tal que para todo $x, x' \in \mathbb{R}^N$ con $|x - x'| < \delta$ with $|f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{4}, |g(x) - g(x')| < \frac{\varepsilon}{4}$.
Sea $y \in \mathbb{R}^N$ arbitrario pero fijo, a y se le asocia la familia de números reales que satisfacen (A.1) y (A.2) [condición casi periódica]. Asociemos a toda función casi periódica las familias $J_1(y), J_2(y)$:

$$J_1(y) = p_1\delta, J_2(y) = p_2\delta,$$

con $p_i \in \mathbb{R}^N, i = 1, 2$ tales que

$$|T_i(y) - p_i\delta| = \inf\{|T_i(y) - q_i\delta|\}$$

y

$$y_j \leq q_j < y_j + a_j^0, j = 1, \ldots, N;\ i = 1, 2.,\ q_j \in \mathbb{Z},\ j = 1, \ldots, N.$$

Denotemos $p_1\delta = \sigma_1(y); p_2\delta = \sigma_2\delta$.
Es claro que $\sigma_i(y)_j \in [y_j, y_j + a_j^0], j = 1, \ldots, N; i = 1, 2$ y $|T_i(y) - \sigma_i(y)| < \delta, i = 1, 2$.
Se sigue de la continuidad uniforme que $|f(y+\sigma_1(y))-f(y)| < \varepsilon$ y $|g(y+\sigma_2(y))-g(y)| < \varepsilon$.
Es más, existe $p \in \mathbb{N}$ con

$$|\sigma_1(y) - \sigma_2(y)| < p\delta < a_0$$

Definamos la relación de equivalencia $\sim$ sobre el conjunto de los $\sigma(y)$, que denotamos por C, de la siguiente forma:

$$(\sigma_1(y), \sigma_2(y)) \sim (\sigma_1(y'), \sigma_2(y'))$$

si

$$|\sigma_1(y) - \sigma_2(y)| = |\sigma_1(y') - \sigma_2(y')|.$$

Es claro que $\sim$ es una relación de equivalencia sobre C. Es más, el conjunto cociente $\overset{\vee}{C} = C/\sim$ es finito. Luego, podemos escribir $\overset{\vee}{C} = \{\overline{C}_1, \ldots, \overline{C}_{N_0}\}$.
Sea $(\sigma_1(y_k), \sigma_2(y_k))$ una clase de representación de $\overline{C}_k$.
Sea $l_1 \in \mathbb{R}^N$ tal que $l_1(p) = \sup_{k=1,\ldots,N_0}\{\sigma_i(y_k), i = 1, 2\}(p), \quad p = 1, \ldots, N$.
Sea $l_0 = a_0 + 2l_1$, es obvio que $l_0 > 0$ y para todo $y' \in \mathbb{R}^N$ existe $T \in [y', y' + l_0]$ tal que $|f(x + T) - f(x)| < \varepsilon$, y $|g(x + T) - g(x)| < \varepsilon,\ \forall x \in \mathbb{R}^N$.
En efecto, escribamos $y = y' + l_0; y' \in \mathbb{R}^N$ arbitrario pero fijo.
Sea $(\sigma_1(y'), \sigma_2(y'))$ una representación de $\overline{C}_k$, entonces:

$$(\sigma_1(y'), \sigma_2(y')) \sim (\sigma_1(y_k), \sigma_2(y_k)).$$

Sea $\eta = \text{sign}[\sigma_1(y_k) - \sigma_2(y_k)]\ \text{sign}(\sigma_1(y') - \sigma_2(y')) \in \mathbb{R}^N$ (sign se aplica componente a componente), entonces:

$$\sigma_i(y) - \eta \cdot \sigma_i(y_k) = \sigma_j(y) - \eta \cdot \sigma_j(y_k), i = 1, 2. j = 1, 2. \qquad (A{,}3).$$

Es claro que $\sigma_i(y) \in [y, y + a_i] \subset [y' + l_0, y' + l_0 + l_1]$, $i = 1, 2$.
Sea $T \in [y' + l_0, y' + l_0 + l_1]$ cualquier número que satisface (A.3), entonces:

$$|f(x+T) - f(x)| < 4\varepsilon, |g(x+T) - g(x)| < 4\varepsilon, \forall x \in \mathbb{R}^N$$

y queda probado el teorema. ∎