SP–1322: ANÁLISIS REAL II

Joseph C. Várilly

Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica

II Ciclo Lectivo del 2012

Introducción

Hace unas décadas, surgió la costumbre de usar el nombre *análisis funcional* para denotar la parte del análisis matemático con base en propiedades algebraicas o topológicas generales de espacios de funciones o transformaciones, y no de la estructura detallada de una función o transformación particular. El texto de Rudin (1973) lo expresa así: "el análisis funcional es el estudio de ciertas estructuras topológico-algebraicas y de los métodos por los que el conocimiento de estas estructuras puede aplicarse a problemas analíticos".

Las estructuras algebraicas relevantes son espacios vectoriales, álgebras o grupos, cuyos miembros son funciones o transformaciones de determinados tipos. El punto de partida es la idea de considerar las funciones o transformaciones como elementos o "puntos" de un espacio vectorial. Este espacio vectorial generalmente tiene dimensión infinita y su topología no está determinada enteramente por su estructura algebraica; es necesario emplear una (o varias) normas o seminormas. En un problema particular de aplicación el objeto de interés es un *funcional*, que lleva funciones en números reales o complejos. De esta manera, se llega al estudio de los espacios normados y sus funcionales lineales, el cual fue emprendido por Stefan Banach y sus colegas a partir de 1920.

Inicialmente se estudiaba espacios de funciones —continuas, diferenciables, holomorfas, integrables, etc.— y los funcionales sobre funciones, tales como diferenciación, integración, evaluación en un punto, etcétera. La introducción axiomática de un *espacio de Hilbert* se debe a John von Neumann en 1930, en un estudio de los fundamentos de la mecánica cuántica (fruto de una colaboración con David Hilbert). Un tema fundamental desde entonces ha sido la estructura de operadores sobre espacios de Hilbert. Otros temas importantes han sido las álgebras de Banach y las C^*-álgebras introducidos por Israel Guelfand y otros (1941–43); las representaciones unitarias de grupos, impulsados por Hermann Weyl (1925–27); y la teoría de las distribuciones de Laurent Schwartz (1949).

Este estudio de funcionales y operadores no es sólo abstracción, sino que también requiere *análisis*. Es indispensable desarrollar un buen manejo concreto de los objetos de estudio: las sucesiones, funciones y núcleos integrables, cotas de estimación, cálculos matriciales, etc., que forman el pan diario del análisis matemático.

El primer capítulo introduce diversos ejemplos de espacios vectoriales de sucesiones y funciones; y repasa la estructura de los espacios de Hilbert. El segundo capítulo introduce los teoremas fundamentales sobre funcionales y operadores lineales en dichos espacios. y luego explora el concepto de dualidad entre espacios de Banach. El tercer capítulo está dedicado a las distribuciones de Schwartz y la transformación de Fourier. El cuarto capítulo introduce las álgebras de Banach y su mayor aplicación: la teoría espectral de los operadores lineales sobre espacios de Hilbert.

Los siguientes libros amplifican y profundizan los tópicos del curso.

Bibliografía

[1] J. A. Dieudonné, *Eléments d'Analyse*, tomos 1–2, Gauthier–Villars, Paris, 1969.

[2] W. F. Donoghue, *Distributions and Fourier Transforms*, Academic Press, London, 1969.

[3] Y. Eidelman, V. Milman y A. Tsolomitis, *Functional Analysis: An Introduction*, Graduate Studies in Mathematics **66**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.

[4] R. Estrada y R. P. Kanwal, *A Distributional Approach to Asymptotics: Theory and Applications*, Birkhäuser, Boston, 2002.

[5] H. G. Heuser, *Functional Analysis*, Wiley, New York, 1982.

[6] R. V. Kadison y J. R. Ringrose, *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras*, tomo 1, Academic Press, Orlando, FL, 1983.

[7] A. A. Kirillov y A. D. Gvishiani, *Theorems and Problems in Functional Analysis*, Springer, Berlin, 1982.

[8] A. N. Kolmogorov y S. V. Fomin, *Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional*, 3ª edición, Mir, Moscú, 1978.

[9] P. D. Lax, *Functional Analysis*, Wiley, New York, 2002.

[10] G. J. Murphy, *C^*-Algebras and Operator Theory*, Academic Press, Orlando, FL, 1990.

[11] G. K. Pedersen, *Analysis Now*, Springer, Berlin, 1989.

[12] M. Reed y B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics I: Functional Analysis*, 2ª edición, Academic Press, Orlando, FL, 1980.

[13] W. Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1973.

[14] L. Schwartz, *Théorie des Distributions*, Hermann, Paris, 1966.

[15] G. F. Simmons, *Introduction to Topology and Modern Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1963.

[16] K. Yosida, *Functional Analysis*, 4ª edición, Springer, Berlin, 1976.

[17] N. Young, *An Introduction to Hilbert Space*, Cambridge University Press, Cambridge, 1988.

1 Los Espacios del Análisis Lineal

En este curso, los objetos principales de interés son ciertos *espacios vectoriales infinitodimensionales* y sus *transformaciones lineales*. Su estructura puramente algebraica es insuficiente para los propósitos del análisis: hay que agregar algún concepto métrico que sea compatible con las operaciones algebraicas. La métrica apropiada se obtiene de una o varias normas o seminormas; en el caso más importante, la norma proviene de un producto escalar. Además, hay ejemplos importantes de espacios vectoriales topológicos que no son metrizables, pero cuya topología siempre se describe mediante una familia de seminormas.

1.1 Espacios de sucesiones y de funciones

El cuerpo de base para todos los espacios vectoriales aquí discutidos es $\mathbb{R}$, el cuerpo de los *números reales*, o bien $\mathbb{C}$, el cuerpo de los *números complejos*. Para no referirse siempre a los dos casos, se usará escalares complejos en las definiciones, dejando al lector la formulación del caso análogo con escalares reales. En las ocasiones que lo ameritan, se comentará acerca de la variante real.

Definición 1.1. Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Un **producto escalar**[1] en E es una *forma hermítica definida positiva* sobre E, es decir, una función $E \times E \to \mathbb{C} : (x, y) \mapsto \langle x \mid y \rangle$ tal que:

(a) $\langle z \mid \alpha x + \beta y \rangle = \alpha \langle z \mid x \rangle + \beta \langle z \mid y \rangle$, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $x, y, z \in E$;

[1] Otro término común es **producto interno**.

(b) $\langle x \mid y \rangle = \overline{\langle y \mid x \rangle}$ para todo $x, y \in E$;

(c) $\langle x \mid x \rangle \geq 0$, con igualdad sólo si $x = 0$ en E.

Un espacio vectorial dotado de un producto escalar se llama un *espacio prehilbertiano*.

Observación. Obsérvese que el producto escalar es lineal en la *segunda* variable, pero sólo semilineal en la *primera* variable. Esta es el *convenio de Dirac*: sin embargo, es frecuente encontrar libros que piden linealidad en la primera variable y semilinealidad en la segunda; hay que averiguar, libro por libro, cuál convenio está en uso, e intercambiar los factores si fuere necesario.

Las propiedades (a) y (b) en conjunto muestran que $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ es una *forma sesquilineal*.[2] En el caso de escalares reales, la condición (b) dice que $\langle x \mid y \rangle = \langle y \mid x \rangle$ para todo x, y, así que un producto escalar *real* es una forma bilineal simétrica.

Definición 1.2. Una **norma** en un espacio vectorial E es una función $E \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto \|x\|$ tal que:

(a) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$ para todo $\alpha \in \mathbb{C}$, $x \in E$;

(b) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para todo $x, y \in E$;

(c) $\|x\| \geq 0$ con igualdad sólo si $x = 0$ en E.

Si E posee un producto escalar, entonces $\|x\| := \sqrt{\langle x \mid x \rangle}$ define una norma en E (debido a la desigualdad de Schwarz).

Una **seminorma** en E es una función $p \colon E \to \mathbb{R}^+$ que cumple (a) y (b) pero no necesariamente (c), es decir:

$$p(\alpha x) = |\alpha| \, p(x), \quad p(x + y) \leq p(x) + p(y), \quad \text{para todo} \quad \alpha \in \mathbb{C}, \ x, y \in E.$$

Una familia de seminormas $(p_\alpha)_{\alpha \in J}$ es **separante** para E si $p_\alpha(x) = 0$ para todo $\alpha \in J$ implica $x = 0$ en E. (Este es el caso si algún p_β es una norma.)

Definición 1.3. La métrica usual sobre un espacio normado E es

$$d(x, y) := \|x - y\|. \tag{1.1a}$$

Otra métrica equivalente es

$$d'(x, y) := \frac{\|x - y\|}{1 + \|x - y\|}, \tag{1.1b}$$

[2] El prefijo *sesqui-*, del latín, significa $3/2$.

que además cumple $0 \leq d'(x,y) \leq 1$. Las dos métricas son *invariantes bajo traslaciones*, es decir, $d(x-z, y-z) = d(x,y)$ para $z \in E$. Si (x_n) es una sucesión de elementos de E, entonces

$$x_n \to x \iff d(x_n, x) \to 0 \iff d'(x_n, x) \to 0 \iff \|x_n - x\| \to 0.$$

Vale la pena observar que la norma de un espacio normado E es una *función continua* sobre E. De hecho, si $x_n \to x$ en E, la desigualdad triangular implica que

$$\big| \|x_n\| - \|x\| \big| \leq \|x_n - x\|,$$

así que $x_n \to x$ en E implica $\|x_n\| \to \|x\|$ en $[0, \infty)$.

Si E no es un espacio normado, pero posee una *familia numerable y separante* de seminormas $\{ p_k : k \in \mathbb{N} \}$, entonces se define la siguiente métrica sobre E:

$$d(x,y) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} \frac{p_k(x-y)}{1 + p_k(x-y)}\,. \tag{1.2}$$

En ese caso $x_n \to x$, es decir, $d(x_n, x) \to 0$, si y sólo si $p_k(x_n - x) \to 0$ para cada k.

Definición 1.4. Sea E un espacio vectorial (sobre $\mathbb{C}$) con una familia numerable y separante de seminormas. Si E es **completo** con respecto a la métrica (1.2), dícese que E es un **espacio de Fréchet**.

En particular, si E es normado y completo respecto de la métrica (1.1a), E se llama un **espacio de Banach**.

Si además la norma de E es inducida por un producto escalar y si E es completo, dícese que E es un **espacio de Hilbert**.

Ejemplo 1.5. Si $n \in \mathbb{N}^*$, el espacio $\mathbb{C}^n$ es un espacio de Hilbert,[3] dotado del producto escalar usual $\langle w \mid z \rangle := \bar{w}_1 z_1 + \bar{w}_2 z_2 + \cdots + \bar{w}_n z_n$. ◊

► Lo que sigue es un catálogo de espacios vectoriales de dimensión infinita, algunos normados y otros dotados con una familia numerable de seminormas. Conviene empezar con espacios formados por *sucesiones*.

Ejemplo 1.6. Denótese por $\mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$ el espacio de *sucesiones* en $\mathbb{C}$ con *un número finito de términos no nulos*. Escríbase $\boldsymbol{x} := (x_k)$ para denotar la sucesión $(x_0, x_1, x_2, \dots)$. Entonces $p_n(\boldsymbol{x}) := |x_n|$ define una familia separante de seminormas sobre $\mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$. ◊

[3] Bajo el *convenio francés*, se escribe $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,\dots\}$ pero $\mathbb{N}^* = \{1,2,3,\dots\}$.

Es posible definir varias *normas* directamente sobre $\mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$. Si $1 < p < \infty$, colóquese:

$$\|\boldsymbol{x}\|_1 := \sum_{k=0}^{\infty} |x_k|; \qquad \|\boldsymbol{x}\|_p := \biggl(\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^p\biggr)^{1/p}; \qquad \|\boldsymbol{x}\|_\infty := \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k|. \tag{1.3}$$

El espacio $\mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$ es incompleto respecto de cada una de estas normas. (Si $1 < p < \infty$, no es evidente que $\|\cdot\|_p$ obedece la desigualdad triangular; esto es una consecuencia de la *desigualdad de Minkowski*: véase la Proposición 1.25, más abajo.)

Ejemplo 1.7. Denótese por $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ el espacio de *todas las sucesiones* en $\mathbb{C}$. Las seminormas $p_n(\boldsymbol{x}) := |x_n|$ son una familia numerable y separante, y $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ es completo en la métrica correspondiente. Luego $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ es un espacio de Fréchet. El espacio vectorial $\mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$ es un subespacio denso de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. ◊

Ejemplo 1.8. Hay otras espacios de sucesiones intermedios entre $\mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$ y $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Al formar la compleción de $\mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$ en cualquiera de las normas (1.3), se obtiene un espacio de Banach. Estos espacios de Banach se denotan por:

$$\begin{aligned}
&\underline{\ell}^1 := \{\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \|\boldsymbol{x}\|_1 < +\infty \,\}; \\
&\underline{\ell}^p := \{\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \|\boldsymbol{x}\|_p < +\infty \,\} \quad \text{para cada} \quad 1 < p < \infty; \\
&\underline{c}_0 := \{\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : x_k \to 0 \text{ cuando } k \to +\infty \,\}.
\end{aligned}$$

En el caso $p = 2$, $\underline{\ell}^2$ es además un *espacio de Hilbert*, con producto escalar

$$\langle \boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{x} \rangle := \sum_{k=0}^{\infty} \bar{y}_k x_k.$$

Es inmediato que $\langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \rangle = \|\boldsymbol{x}\|_2^2$. ◊

Ejemplo 1.9. El espacio vectorial de las *sucesiones acotadas* es

$$\underline{\ell}^\infty := \{\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \|\boldsymbol{x}\|_\infty < +\infty \,\},$$

Este espacio es completo en la norma $\|\cdot\|_\infty$; es un espacio de Banach que incluye $\underline{c}_0$ como subespacio cerrado. ◊

Ejemplo 1.10. Un elemento $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ es una **sucesión rápidamente decreciente** si la sucesión asociada $(n^k x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada, para cualquier $k \in \mathbb{N}$. Esto da lugar a una familia de seminormas

$$q_k(\boldsymbol{x}) := \sup_{n\in\mathbb{N}} |n^k x_n|, \quad \text{para cada} \quad k \in \mathbb{N}^*. \tag{1.4}$$

Está claro que $q_k(\boldsymbol{x}) \leq q_{k+1}(\boldsymbol{x})$ en cada caso; que la condición $q_{k+1}(\boldsymbol{x}) < \infty$ implica que $n^k x_n \to 0$ cuando $n \to \infty$; y que la condición $q_{k+2}(\boldsymbol{x}) < \infty$ implica que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} n^k x_n$ es absolutamente convergente.

El espacio vectorial $\underline{s}$ de sucesiones rápidamente decrecientes, dotado con las seminormas $\{ q_k : k \in \mathbb{N}^* \}$, es un espacio de Fréchet. $\Diamond$

► Una segunda clase de espacio vectorial, con una topología determinado por una norma o varias seminormas, está formada por las *funciones continuas*.

Ejemplo 1.11. Sea K un espacio topológico *compacto* (y de Hausdorff).[4] Denótese por $C(K)$ el espacio vectorial de funciones *continuas* $f : K \to \mathbb{C}$. Se define una norma sobre $C(K)$ por

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in K} |f(x)|.$$

Si una sucesión (f_n) en $C(K)$ es de Cauchy en esta norma, entonces $(f_n(x))$ es de Cauchy en $\mathbb{C}$ para todo $x \in K$. Si se define $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, es fácil mostrar con un "argumento de $\varepsilon/3$" que f es continua y que $\|f_n - f\|_\infty \to 0$. El espacio normado $C(K)$ entonces es completo en la norma $\|\cdot\|_\infty$, es decir, es un espacio de Banach. $\Diamond$

Ejemplo 1.12. Si X es un espacio topológico *localmente compacto* (y de Hausdorff) pero no necesariamente compacto, dícese que una función continua $f : X \to \mathbb{C}$ **se anula en el infinito** si, dado $\varepsilon > 0$, hay un compacto $K_\varepsilon \subset X$ tal que $|f(x)| < \varepsilon$ para $x \notin K_\varepsilon$. Denótese por $C_0(X)$ el espacio vectorial de todas estas funciones. Está claro que cada $f \in C_0(X)$ está acotada y que la receta $\|f\|_\infty := \sup_{x\in X} |f(x)|$ determina una norma sobre $C_0(X)$. No es difícil comprobar que $C_0(X)$ es completo en esta norma.

La *compactificación de un punto* del espacio localmente compacto X es el espacio compacto $X^+ := X \uplus \{\infty\}$, obtenido al agregar[5] el punto suplementario ∞ a X, declarando que los vecindarios abiertos de ∞ son todas las partes $(X \setminus K) \uplus \{\infty\}$ donde $K \subseteq X$ es compacto. Fíjese que ∞ es un punto aislado en X^+ si y sólo si X es compacto. Es fácil verificar que $C_0(X) \simeq \{ f \in C(X^+) : f(\infty) = 0 \}$, donde $\simeq$ denota una *isometría*, es decir, un isomorfismo algebraico que preserva las normas. $\Diamond$

Ejemplo 1.13. Si X es un espacio topológico localmente compacto y además **σ-compacto**, es decir, si $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ donde cada K_n es compacto y $K_n \subseteq K_{n+1}^\circ$ para todo n, la familia

[4] En este curso, todos los espacios **compactos** serán también de Hausdorff, salvo indicación expresa de lo contrario.

[5] El símbolo $\uplus$ denota la **unión disjunta** de dos conjuntos que no tienen intersección.

numerable de seminormas[6]

$$p_n(f) := \sup\{\, |f(x)| : x \in K_n \,\}, \quad \text{para} \quad f : X \to \mathbb{C} \text{ continua}, \tag{1.5}$$

define una topología sobre $C(X)$, el espacio de funciones continuas de X en $\mathbb{C}$. Resulta que $f \in C(X)$ si y sólo si la restricción $f|_{K_n}$ está en $C(K_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces el espacio vectorial $C(X)$, dotado con la métrica (1.2), es completa, así que $C(X)$ es un espacio de Fréchet.

La topología de $C(X)$ definido por las seminormas (1.5), a través de la métrica (1.2), se llama la topología de *convergencia uniforme sobre compactos*. $\Diamond$

Ejemplo 1.14. En particular, si U es una región de $\mathbb{C}$ (una parte abierta y conexa), se puede tomar

$$K_n := \{\, z \in U : |z| \leq n;\ d(z, \mathbb{C} \setminus U) \geq 1/n \,\}. \tag{1.6}$$

Si se denota por $H(U)$ el espacio de *funciones holomorfas* $f : U \to \mathbb{C}$, esta es un subespacio de $C(U)$ con la topología de convergencia uniforme sobre compactos. Un teorema de Weierstrass garantiza que el límite, en esa topología, de una sucesión de funciones holomorfas es holomorfa; en consecuencia, $H(U)$ es un *subespacio cerrado* de $C(U)$, y por ende $H(U)$ es también un espacio de Fréchet. $\Diamond$

Ejemplo 1.15. Sea $U \subseteq \mathbb{R}^m$ un conjunto abierto, no vacío. La fórmula (1.6), con $\mathbb{C} \setminus U$ reemplazado por $\mathbb{R}^m \setminus U$, sirve para definir una familia de compactos K_n, con $K_n \subseteq K_{n+1}^\circ$ para cada n, tales que $U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$. Si $\alpha \in \mathbb{N}^m$ es un *multiíndice*, escríbase

$$|\alpha| := \sum_{j=1}^m \alpha_j, \qquad \partial^\alpha := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\, \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_m^{\alpha_m}}\,.$$

El espacio vectorial $C^\infty(U)$ de funciones suaves $f : U \to \mathbb{C}$ admite una familia numerable de seminormas

$$r_n(f) := \sup\{\, |\partial^\alpha f(x)| : |\alpha| \leq n,\ x \in K_n \,\}. \tag{1.7}$$

Obsérvese que $r_n(f) \leq r_{n+1}(f)$ para cada n, y que la familia (r_n) es separante. Cualquier sucesión de Cauchy $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ en la métrica correspondiente es una sucesión de Cauchy en $C(U)$; y para cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$ la sucesión $(\partial^\alpha f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ también es de Cauchy en $C(U)$. Luego hay funciones $f^\alpha \in C(U)$ para cada α, tales que $\partial^\alpha f_k \to f^\alpha$ en $C(U)$ cuando $k \to +\infty$. Si $f := f^0$, no es difícil verificar que $\partial^\alpha f = f^\alpha$ para todo α, así que $f_k \to f$ en $C^\infty(U)$ con respecto a la métrica determinada por (1.7); $C^\infty(U)$ es un espacio de Fréchet. $\Diamond$

[6] Si $A \subseteq X$, la notación A° denota el **interior** topológico de A.

Ejemplo 1.16. Una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ es una **función rápidamente decreciente** si

$$\lim_{|x|\to\infty} p(x) f(x) = 0 \quad \text{para todo polinomio } p \text{ sobre } \mathbb{R}^n.$$

Se dice que f es una **función declinante**[7] si (a) f es suave; y (b) f y sus derivadas parciales de cualquier orden son rápidamente decrecientes. Sea $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ el espacio vectorial de las funciones declinantes sobre $\mathbb{R}^n$, comúnmente llamado el **espacio de Schwartz**. La función gaussiana $x \mapsto \exp(-\frac{1}{2}\|x\|^2)$ es un ejemplo de una función declinante. Si p es un polinomio, hay constantes $C > 0$, $R > 0$ y $N \in \mathbb{N}$, dependientes de p, tales que

$$p(x) \leq C(1 + \|x\|^2)^N \quad \text{para} \quad \|x\| \geq R. \tag{1.8}$$

Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, entonces, para cada N y α, las funciones $x \mapsto (1 + \|x\|^2)^N \partial^\alpha f(x)$ están acotadas. Las siguientes seminormas $\{ s_m : M \in \mathbb{N} \}$ definen la topología de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:

$$s_m(f) := \sup\{ \left|(1 + \|x\|^2)^m \partial^\alpha f(x)\right| : |\alpha| \leq m,\ x \in \mathbb{R}^n \}. \tag{1.9}$$

Resulta que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ es completa en la métrica inducida por estas seminormas, así que es otro espacio de Fréchet. $\Diamond$

► Otro tipo de espacio vectorial infinitodimensional está dado por espacios de *funciones medibles o integrables*. Para dejar de lado algunos casos esotéricos, todas las medidas considerados en este curso serán σ-finitas.

Ejemplo 1.17. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un *espacio de medida σ-finita*: $\mathcal{F}$ denota la σ-álgebra de las partes medibles del conjunto X, y $\mu\colon \mathcal{F} \to [0, +\infty]$ es la medida dada sobre X. Sea $\mathcal{L}^1(X, \mu)$ el espacio vectorial de las *funciones integrables* con respecto a μ, dotado con la seminorma

$$\|f\|_1 := \int_X |f(x)|\, d\mu(x). \tag{1.10}$$

Obsérvese que $\|f\|_1 = 0$ si y sólo si $f \in \mathcal{N}$, donde $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{L}^1(X, \mu)$ es el subespacio de funciones *nulas casi por doquier*. Al identificar funciones que coinciden casi por doquier (respecto de μ), se obtiene el espacio vectorial cociente

$$L^1(X, \mu) := \mathcal{L}^1(X, \mu)/\mathcal{N}.$$

La fórmula (1.10) induce una *norma* sobre este espacio, que también se denota por $\|\cdot\|_1$. Por un abuso de lenguaje, es común referirse a los elementos de $L^1(X, \mu)$ como "funciones integrables". El teorema de Riesz y Fischer dice que $L^1(X, \mu)$ es *completo* en esta norma, así que es un espacio de Banach. $\Diamond$

[7] Esta terminología se debe a Bourbaki; no es muy ilustrativo, pero responde al requisito bourbachique de caracterizar una propiedad matemática con una sola palabra.

Ejemplo 1.18. Si $1 < p < +\infty$, defínase

$$\|f\|_p := \left(\int_X |f(x)|^p \, d\mu(x) \right)^{1/p} \tag{1.11}$$

y denótese por $\mathcal{L}^p(X,\mu)$ el espacio vectorial de las funciones μ-medibles $f : X \to \mathbb{C}$ tales que $\|f\|_p < \infty$. En breve se comprobará que $\|\cdot\|_p$ es una seminorma sobre este espacio. Además, es evidente que $\|f\|_p = 0$ si y sólo si $f \in \mathcal{N}$, así que $\|\cdot\|_p$ induce una norma sobre el espacio vectorial cociente $L^p(X,\mu) := \mathcal{L}^p(X,\mu)/\mathcal{N}$. Hay una versión del teorema de Riesz y Fischer que garantiza que $L^p(X,\mu)$ es un espacio de Banach. $\Diamond$

Ejemplo 1.19. En el subcaso $p = 2$, $L^2(X,\mu)$ es además un *espacio de Hilbert*: su producto interno está dado por

$$\langle g \mid f \rangle := \int_X \overline{g(x)}\, f(x) \, d\mu(x).$$

Se ve inmediatamente que $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f \mid f \rangle}$. $\Diamond$

Ejemplo 1.20. Si $f : X \to \mathbb{C}$ es una función μ-medible, su *supremo esencial*,

$$\|f\|_\infty := \operatorname*{es\,sup}_{x \in X} |f(x)|,$$

denota el ínfimo de las constantes $M > 0$ tales que $\mu\big(\{\, x \in X : |f(x)| > M \,\}\big) = 0$. Sea $\mathcal{L}^\infty(X,\mu)$ el espacio vectorial de las **funciones esencialmente acotadas** (con respecto a μ), es decir, las funciones medibles f con $\|f\|_\infty$ finito. Es fácil comprobar que $\|f\|_\infty = 0$ si y sólo si $f \in \mathcal{N}$, así que $\|\cdot\|_\infty$ induce una *norma* sobre el espacio vectorial cociente $L^\infty(X,\mu) := \mathcal{L}^\infty(X,\mu)/\mathcal{N}$. Resulta que $L^\infty(X,\mu)$ es completo en esta norma. $\Diamond$

Ejemplo 1.21. Denótese por $\mathcal{F}(\mathbb{C})$ el espacio de *funciones holomorfas enteras* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tales que

$$\|f\|^2 := \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 \, e^{-|z|^2} \, dy \, dx < \infty.$$

Con esta norma, $\mathcal{F}(\mathbb{C})$ es un espacio de Hilbert, cuyo producto interno está dado por

$$\langle g \mid f \rangle := \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \overline{g(z)}\, f(z) \, e^{-|z|^2} \, dy \, dx.$$

En efecto, $\mathcal{F}(\mathbb{C})$ es un subespacio cerrado de $L^2(\mathbb{C},\mu)$, donde μ denota la *medida gaussiana* sobre $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$:

$$d\mu(z) := \frac{1}{\pi} e^{-x^2-y^2} \, dy \, dx = \frac{1}{\pi} r e^{-r^2} \, dr \, d\theta.$$

Este espacio $\mathcal{F}(\mathbb{C})$ se llama el **espacio de Bargmann y Segal**.[8] $\Diamond$

► Para completar este catálogo (parcial!) de espacios vectoriales con normas y seminormas, es necesario verificar algunas afirmaciones en los ejemplos. En primer lugar, hace falta comprobar que la notación $\|\cdot\|_p$ introducida en (1.3) y generalizada en (1.11) es efectivamente una norma: hace falta verificar la desigualdad triangular.

Fíjese que $\underline{\ell}^p$ es un caso particular de la familia de espacio vectoriales $L^p(X,\mu)$. En efecto, al tomar $X = \mathbb{N}$; $\mathcal{F} = \mathcal{P}(N)$, porque todas las partes de $\mathbb{N}$ son medibles; y $\mu(A) := \#(A)$, el número de elementos de $A \subset \mathbb{N}$; entonces el espacio $\mathcal{L}^p(X,\mu)$ correspondiente es $\underline{\ell}^p$. Además, la medida del conteo es puramente atómica: la única parte de $\mathbb{N}$ de medida nula es el vacío $\emptyset$, así que $\mathcal{N} = \{0\}$ y $L^p(X,\mu) = \mathcal{L}^p(X,\mu) = \underline{\ell}^p$. La integral respecto de esta medida es simplemente la sumatoria de series.

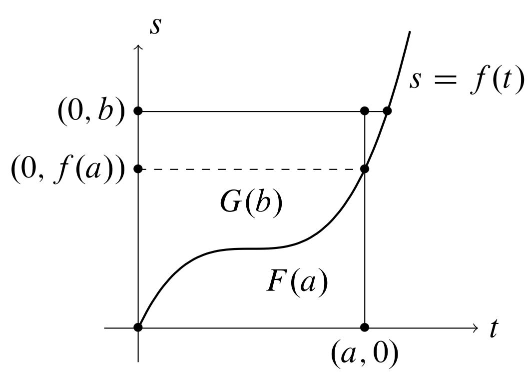

Figura 1.1: La desigualdad de Young

Proposición 1.22 (Desigualdad de Young). *Sea $f\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ una función diferenciable y estrictamente creciente con $f(0) = 0$ y $\lim_{t\to\infty} f(t) = +\infty$; sea $g\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ su función inversa. Sean F y G las primitivas respectivas de f y g, determinadas por la condición $F(0) = G(0) = 0$. Entonces, para todo $a \geq 0$ y $b \geq 0$, se cumple la desigualdad:*

$$ab \leq F(a) + G(b),$$

con igualdad si y sólo si $b = f(a)$.

[8] El espacio $\mathcal{F}(\mathbb{C})$ fue introducido Valentin Bargmann en el artículo: V. Bargmann, *On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform*, Communications in Pure and Applied Mathematics **14** (1961), 187–214. Sin embargo, este enfoque, basado en la mecánica cuántica, fue anticipado por Irving Segal en una conferencia en Boulder, en 1960.

Demostración. Las dos primitivas del enunciado son

$$F(x) := \int_0^x f(t)\,dt, \qquad G(y) := \int_0^y g(s)\,ds.$$

Las condiciones $f(0) = 0$ y $\lim_{t\to\infty} f(t) = +\infty$ implican que $f\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ es sobreyectiva; y es inyectiva por ser estrictamente creciente. Entonces, para cada $s > 0$, hay un único $t > 0$ con $s = f(t)$; luego $t = g(s)$. La función inversa g también es estrictamente creciente, con $g(0) = 0$ y $\lim_{s\to\infty} g(s) = +\infty$.

Considérese la función

$$h(x) := \int_0^x f(t)\,dt + \int_0^{f(x)} g(s)\,ds = F(x) + G(f(x)).$$

La función h es diferenciable, con $h'(x) = f(x) + g(f(x))\,f'(x) = f(x) + xf'(x)$; además, vale $h(0) = 0$. Entonces

$$F(x) + G(f(x)) = h(x) = \int_0^x h'(t)\,dt = xf(x), \quad \text{para todo} \quad x > 0.$$

Ahora, si $b > f(a)$ —véase la Figura 1.1— entonces

$$\begin{aligned} F(a) + G(b) - ab &= G(b) - ab + af(a) - G(f(a)) \\ &= G(b) - G(f(a)) - a(b - f(a)) \\ &= \int_{f(a)}^{b} (g(s) - a)\,ds > 0, \end{aligned}$$

porque $g(s) > a$ para $s > f(a)$.

Si $b < f(a)$, entonces $a > g(b)$; al intercambiar los papeles de f y g, que cumplen hipótesis similares, se obtiene también $G(b) + F(a) - ba > 0$.

Finalmente, si $b = f(a)$, entonces $F(a) + G(b) = h(a) = af(a) = ab$. ☐

Corolario 1.23. *Si $1 < p < \infty$ y si $q := \dfrac{p}{p-1}$, entonces para $a \geq 0$, $b \geq 0$, vale*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \qquad \textit{con igualdad sólo si} \quad b^q = a^p. \tag{1.12}$$

Demostración. Tómese $f(t) := t^{p-1}$; su función inversa es $g(s) = s^{1/(p-1)} = s^{q/p}$. Las primitivas son

$$F(a) = \int_0^a t^{p-1}\,dt = \frac{a^p}{p}, \qquad G(b) = \int_0^b s^{q/p}\,ds = \frac{b^{(q+p)/p}}{(q+p)/p} = \frac{b^q}{q},$$

ya que $q = p/(p-1) \implies q + p = pq$. Obsérvese que en este caso $b = f(a)$ si y sólo si $g(b) = a$ si y sólo si $b^{q/p} = a$ si y sólo si $b^q = a^p$. ☐

Fíjese que $q = p/(p-1)$ si y sólo si $p = q/(q-1)$. Por esta simetría $p \leftrightarrow q$, visible en (1.12), dícese que p y q son **exponentes conjugados**. En el caso $p = q = 2$, la fórmula (1.12) se reduce a $2ab \leq a^2+b^2$, la clásica *desigualdad de Cauchy*. Además, vale $1 < p < 2$ si y sólo si $2 < q < \infty$ y viceversa.

Las dos desigualdades que siguen juegan un papel crítico en la teoría de las funciones integrables.

Proposición 1.24 (Desigualdad de Hölder)**.** *Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida σ-finita. Para $p \in (1, \infty)$ y $q := p/(p-1)$, tómese $f \in \mathcal{L}^p(X, \mu)$ y $h \in \mathcal{L}^q(X, \mu)$. Entonces vale*

$$\int_X |f(x)\, h(x)|\, d\mu(x) \leq \|f\|_p\, \|h\|_q\,, \tag{1.13}$$

con igualdad sólo si las funciones $x \mapsto |f(x)|^p$, $x \mapsto |h(x)|^q$ son proporcionales casi por doquier.

Demostración. Si una de las funciones f, h se anula casi por doquier, los dos lados de (1.13) son iguales a cero. Supóngase, entonces, que $\|f\|_p \neq 0$, $\|h\|_q \neq 0$. Esto permite considerar las funciones "normalizadas" $f_1(x) := f(x)/\|f\|_p$ y $h_1(x) := h(x)/\|h\|_q$.

Para cada $x \in X$ fijo, aplíquese el Corolario 1.23 con $a := |f_1(x)|$, $b := |h_1(x)|$, para obtener

$$|f_1(x)h_1(x)| \leq \frac{|f_1(x)|^p}{p} + \frac{|h_1(x)|^q}{q} = \frac{|f(x)|^p}{p\|f\|_p^p} + \frac{|h(x)|^q}{q\|h\|_q^q} \tag{1.14a}$$

y al integrar sobre X, se obtiene

$$\int_X |f_1(x)h_1(x)|\, d\mu(x) \leq \frac{\int_X |f(x)|^p\, d\mu(x)}{p\|f\|_p^p} + \frac{\int_X |h(x)|^q\, d\mu(x)}{q\|h\|_q^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{1.14b}$$

Al multiplicar los dos lados por $\|f\|_p\|h\|_q$, sale la desigualdad (1.13).

Hay igualdad en (1.14a) sólo si $|f_1(x)|^p = |h_1(x)|^q$. Al integrar respecto de x, hay igualdad en (1.14b) sólo si $|f_1|^p = |h_1|^q$ casi por doquier; sólo si $|f|^p$ y $|h|^q$ son proporcionales casi por doquier. □

La **desigualdad de Minkowski**, que sigue, generaliza la desigualdad triangular.

Proposición 1.25 (Desigualdad de Minkowski)**.** *Sean $f, g \in \mathcal{L}^p(X, \mu)$ con $1 < p < \infty$. Entonces vale:*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p\,, \tag{1.15}$$

con igualdad sólo si f ó g es una función nula, o bien si hay $C > 0$ tal que $f(x) = Cg(x)$ casi por doquier.

Demostración. Al aplicar la desigualdad triangular en $\mathbb{C}$ y la desigualdad de Hölder con $q = p/(p-1)$, se obtiene

$$
\begin{aligned}
\|f+g\|_p^p &= \int_X |f(x)+g(x)|^p \, d\mu(x) \\
&\leq \int_X |f(x)+g(x)|^{p-1}|f(x)| \, d\mu(x) + \int_X |f(x)+g(x)|^{p-1}|g(x)| \, d\mu(x) \qquad (1.16a) \\
&\leq \biggl(\int_X |f(x)+g(x)|^{q(p-1)} \, d\mu(x) \biggr)^{1/q} \bigl(\|f\|_p + \|g\|_p \bigr) \qquad (1.16b) \\
&= \biggl(\int_X |f(x)+g(x)|^{p} \, d\mu(x) \biggr)^{1/q} \bigl(\|f\|_p + \|g\|_p \bigr) \\
&= \|f+g\|_p^{p/q} \bigl(\|f\|_p + \|g\|_p \bigr).
\end{aligned}
$$

Como $p - (p/q) = 1$, se concluye que

$$
\|f+g\|_p = \frac{\|f+g\|_p^p}{\|f+g\|_p^{p/q}} \leq \|f\|_p + \|g\|_p.
$$

Para que haya igualdad en (1.15), debe haber igualdad casi por doquier en la aplicación de las desigualdades triangular (1.16a) y de Hölder (1.16b). Esto requiere (i) que los números complejos $f(x)$ y $g(x)$ tengan el mismo argumento $e^{i\theta(x)}$; y (ii) que $|f+g|^p$, $|f|^p$ y $|g|^p$ sean proporcionales (casi por doquier). Esto ocurre si y sólo si f y g son proporcionales (casi por doquier) con una constante de proporcionalidad no negativa. □

Como $\|\alpha f\|_p = |\alpha| \, \|f\|_p$ por un cálculo sencillo, la desigualdad de Minkowski muestra que $\|\cdot\|_p$ es una seminorma sobre $\mathcal{L}^p(X,\mu)$ e induce una *norma* sobre $L^p(X,\mu)$, para cada $p > 1$.

1.2 La estructura de los espacios de Hilbert

Proposición 1.26 (Desigualdad de Schwarz)**.** *Sea E un espacio prehilbertiano. Cada par de vectores $x, y \in E$ satisfacen la desigualdad:*

$$
\bigl|\langle x \mid y\rangle\bigr| \leq \|x\| \, \|y\|, \qquad (1.17)
$$

con igualdad sólo si x, y son proporcionales.

Demostración. Para todo número *real* $t \in \mathbb{R}$, la cantidad siguiente es no negativa:

$$
\begin{aligned}
0 \leq \bigl\|x + t\langle y \mid x\rangle y\bigr\|^2 &= \bigl\langle x + t\langle y \mid x\rangle y \bigm| x + t\langle y \mid x\rangle y \bigr\rangle \\
&= \langle x \mid x\rangle + 2t\,|\langle x \mid y\rangle|^2 + t^2\,|\langle x \mid y\rangle|^2\,\langle y \mid y\rangle\,.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, la forma cuadrática real $t \mapsto \|x + t\langle y \mid x\rangle y\|^2 = At^2 + Bt + C$ toma valores no negativos solamente, así que $B^2 - 4AC \leq 0$, esto es,

$$4|\langle x \mid y\rangle|^4 \leq 4|\langle x \mid y\rangle|^2 \langle x \mid x\rangle \langle y \mid y\rangle .$$

Por lo tanto —en el caso de que $\langle y \mid x\rangle = 0$ también— se concluye que

$$\bigl|\langle x \mid y\rangle\bigr|^2 \leq \langle x \mid x\rangle \langle y \mid y\rangle ,$$

lo cual es equivalente a (1.17).

El caso de igualdad ocurre si y sólo si $x = -t_0\langle y \mid x\rangle y$ para algún $t_0 \in \mathbb{R}$, si y sólo si los vectores x, y son proporcionales. (El factor de proporcionalidad $-t_0\langle y \mid x\rangle$ no es necesariamente real.) □

La función $x \mapsto \sqrt{\langle x \mid x\rangle}$ cumple la desigualdad triangular, y por ende define una norma en E, en virtud de la desigualdad de Schwarz. Es cuestión de notar que

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \|x\|^2 + 2\,\Re\langle x \mid y\rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\bigl|\langle x \mid y\rangle\bigr| + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 = \bigl(\|x\| + \|y\|\bigr)^2. \end{aligned}$$

La desigualdad de Schwarz implica que el producto escalar sobre E es una *función continua* $E \times E \to \mathbb{C}$. En efecto, si $x_n \to x$ y $y_n \to y$ en E, entonces

$$\bigl|\langle y \mid x_n - x\rangle\bigr| \leq \|y\|\,\|x_n - x\| \to 0 \quad \text{cuando } n \to \infty,$$

así que $\langle y \mid x_n\rangle \to \langle y \mid x\rangle$. De modo similar, se obtiene y también $\langle x_n \mid y\rangle \to \langle x \mid y\rangle$. Luego,

$$\bigl|\langle y_n - y \mid x_n - x\rangle\bigr| \leq \|y_n - y\|\,\|x_n - x\| \to 0 \quad \text{cuando } n \to \infty,$$

así que

$$\lim_{n\to\infty} \langle y_n \mid x_n\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle y_n \mid x\rangle + \lim_{n\to\infty} \langle y \mid x_n\rangle - \langle y \mid x\rangle = \langle y \mid x\rangle.$$

Ejemplo 1.27. En el caso $E = \underline{\ell}^2$, la desigualdad de Schwarz dice que

$$\biggl|\sum_{k=0}^{\infty} \bar{x}_k y_k\biggr|^2 \leq \sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^2 \sum_{k=0}^{\infty} |y_k|^2,$$

cuando las dos sumatorias a la derecha convergen; es decir, cuando $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \underline{\ell}^2$.

Más generalmente, cuando $E = L^2(X, \mu)$, la desigualdad de Schwarz tiene la forma concreta:

$$\biggl|\int_X \overline{f(x)} g(x)\, d\mu(x)\biggr|^2 \leq \int_X |f(x)|^2\, d\mu(x) \int_X |g(x)|^2\, d\mu(x). \qquad \Diamond$$

Proposición 1.28 (Ley del Paralelogramo)**.** *La norma de un espacio prehilbertiano cumple la siguiente igualdad:*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2. \tag{1.18}$$

Demostración. Esta "ley" es una consecuencia directa del cálculo:

$$\|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 \pm \langle x \mid y\rangle \pm \langle y \mid x\rangle + \|y\|^2. \qquad \square$$

La ley del paralelogramo *caracteriza* los espacios normados que admiten un producto escalar.[9] Es decir, si una norma sobre un espacio vectorial E cumple (1.18), entonces hay un producto escalar en E tal que $\langle x \mid x\rangle = \|x\|^2$ para todo $x \in E$. Cuando se cumple esta condición necesaria, el producto escalar está dada por la siguiente fórmula, cuya demostración es inmediata.

Lema 1.29 (Fórmula de Polarización)**.** *El producto escalar en un espacio prehilbertiano queda determinado por la norma, como sigue:*

$$4\,\langle y \mid x\rangle = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\,\|x + iy\|^2 - i\,\|x - iy\|^2. \qquad \boxminus$$

Bases ortonormales

Definición 1.30. Sea E un espacio prehilbertiano. Dos vectores $x, y \in E$ son **ortogonales** si $\langle x \mid y\rangle = 0$, en cuyo caso se escribe $x \perp y$.

Sea H un **espacio de Hilbert**, es decir, un espacio prehilbertiano que es *completo* en la norma. Si $M \subseteq H$, su **complemento ortogonal** es el subespacio cerrado

$$M^\perp := \{\, y \in H : \langle y \mid x\rangle = 0 \text{ para todo } x \in M \,\}. \tag{1.19}$$

Obsérvese que $H^\perp = \{0\}$ y que $\{0\}^\perp = H$.

Una familia de vectores $\{\, u_k : k \in A \,\} \subset H$ es **ortonormal** si[10]

$$\langle u_j \mid u_k\rangle = [\![j = k]\!] := \begin{cases} 1 & \text{si } j = k; \\ 0 & \text{si } j \neq k. \end{cases}$$

[9] Se omite la demostración. El lector interesado puede resolver los problemas (5.5.1) y (6.2.2) del libro de Dieudonné [1].

[10] La *delta de Kronecker* δ_{jk} se escribe $[\![j = k]\!]$ en la **notación de Iverson**. En general, si $R(x)$ es alguna proposición lógica, que depende de una variable x, la función booleana $[\![R(x)]\!]$ vale 1 cuando $R(x)$ es cierta, y vale 0 cuando $R(x)$ es falsa. Véase el artículo expositivo: Donald E. Knuth, *Two notes on notation*, American Mathematical Monthly **99** (1992), 403–422.

Una familia ortonormal es **total** si

$$\langle u_k \mid x \rangle = 0 \quad \text{para todo} \quad k \in A \implies x = 0, \tag{1.20}$$

es decir, si $\{ u_k : k \in A \}^\perp = \{0\}$.

Si los vectores $x_1, \dots, x_r$ son ortogonales entre sí, entonces

$$\|x_1 + \cdots + x_r\|^2 = \|x_1\|^2 + \cdots + \|x_r\|^2$$

por un cálculo directo. Una fórmula pitagórica más precisa es la siguiente.

Lema 1.31 (Fórmula de Pitágoras)**.** *Dada una familia ortonormal finita $\{u_1, \dots, u_r\}$ en un espacio prehilbertiano E, cada vector $x \in E$ satisface:*

$$\|x\|^2 = \sum_{j=1}^{r} |\langle u_j \mid x \rangle|^2 + \Bigl\| x - \sum_{j=1}^{r} \langle u_j \mid x \rangle \, u_j \Bigr\|^2. \tag{1.21}$$

Demostración. Colóquese $y := \sum_{j=1}^{r} \langle u_j \mid x \rangle \, u_j$ y también $z := x - y$. Para cada k, vale

$$\langle u_k \mid z \rangle = \langle u_k \mid x \rangle - \sum_{j=1}^{r} \langle u_j \mid x \rangle \, \langle u_k \mid u_j \rangle = \langle u_k \mid x \rangle - \sum_{j=1}^{r} \langle u_j \mid x \rangle \, [\![k{=}j]\!] = 0.$$

Como y es una combinación lineal de los u_k, se obtiene $\langle y \mid z \rangle = 0$; entonces,

$$\|x\|^2 = \|y + z\|^2 = \langle y \mid y \rangle + \langle y \mid z \rangle + \langle z \mid y \rangle + \langle z \mid z \rangle = \|y\|^2 + \|z\|^2.$$

La fórmula (1.21) sigue porque $\|y\|^2 = \sum_{j=1}^{r} |\langle u_j \mid x \rangle|^2$ por un cálculo directo. $\square$

Para familias ortonormales no necesariamente finitas (ni numerables), la generalización de la fórmula (1.21) no es automática; pero al menos se obtiene la *desigualdad* siguiente.

Proposición 1.32 (Desigualdad de Bessel)**.** *Si $\{ u_k : k \in A \}$ es una familia ortonormal en un espacio prehilbertiano E, entonces, para todo $x \in E$, vale*

$$\sum_{k \in A} |\langle u_k \mid x \rangle|^2 \leq \|x\|^2. \tag{1.22}$$

Demostración. Obsérvese que el conjunto índice A no es necesariamente numerable. Si $\{ u_{k_1}, \dots, u_{k_n} \}$ es una parte finita de $\{ u_k : k \in A \}$, la fórmula (1.21) implica que

$$\sum_{j=1}^{n} |\langle u_{k_j} \mid x \rangle|^2 \leq \|x\|^2. \tag{1.23}$$

En consecuencia, el conjunto $A_n := \{\, k \in A : |\langle u_k \mid x\rangle|^2 \geq \frac{1}{n}\|x\|^2 \,\}$ no posee más de n elementos; entonces $\{\, k \in A : \langle u_k \mid x\rangle \neq 0 \,\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ es un conjunto numerable, y la sumatoria en (1.22) es una serie con una cantidad numerable de términos no nulos.

Dado un vector $x \neq 0$, entonces, es posible ordenar el conjunto $\{\, k \in A : \langle u_k \mid x\rangle \neq 0 \,\}$ como $\{\, k_1, k_2, k_3, \dots \}$. La ecuación (1.23) implica que

$$\sum_{k \in A} |\langle u_k \mid x\rangle|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\langle u_{k_j} \mid x\rangle|^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} |\langle u_{k_j} \mid x\rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

(La suma existe en $\mathbb{R}$, por ser el supremo de una sucesión creciente acotada de sumas parciales.) □

Para obtener igualdad en la desigualdad de Bessel, es necesario suponer que la familia ortonormal es *total* y que el espacio prehilbertiano es *completo*, es decir, es un espacio de Hilbert.

Teorema 1.33. *Sea H un espacio de Hilbert y sea $\{\, u_k : k \in A \,\}$ una familia ortonormal en H. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(a) La familia ortonormal $\{\, u_k : k \in A \,\}$ es maximal.

(b) La familia ortonormal $\{\, u_k : k \in A \,\}$ es total.[11]

*(c) Cada vector $x \in H$ admite un **desarrollo de Fourier** convergente en H,*

$$x = \sum_{j \in A} \langle u_j \mid x\rangle \, u_j \,. \tag{1.24}$$

*(d) Cada par de vectores $x, y \in H$ satisface la **relación de completitud***

$$\langle y \mid x\rangle = \sum_{j \in A} \langle y \mid u_j\rangle \, \langle u_j \mid x\rangle \,. \tag{1.25}$$

*(e) Cada vector $x \in H$ satisface la **igualdad de Parseval**:*

$$\|x\|^2 = \sum_{j \in A} |\langle u_j \mid x\rangle|^2 \,. \tag{1.26}$$

*Si se cumple una (luego, todas) de estas condiciones, dícese que $\{\, u_k : k \in A \,\}$ es una **base ortonormal** de H.*

[11] Algunos autores dicen *familia ortonormal completa* como sinónimo de familia ortonormal total.

Demostración. Para no complicar la notación,[12] se demostrará esta equivalencia en el caso $A = \mathbb{N}$, dejando al lector los casos en donde A es finito o bien no numerable.

Ad (a) $\Longrightarrow$ (b): Si hubiera $z \neq 0$ en H con $\langle z \mid u_k \rangle = 0$ para todo k, sea $v := z/\|z\|$. Entonces v sería un vector de norma 1 ortogonal a cada u_k, así que $\{v, u_0, u_1, u_2, \dots\}$ sería una familia ortonormal que incluye $\{\, u_k : k \in \mathbb{N} \,\}$ estrictamente, contradiciendo su maximalidad. Por tanto, $\{\, u_k : k \in \mathbb{N} \,\}^\perp = \{0\}$.

Ad (b) $\Longrightarrow$ (c): Dado $x \in H$ y $r \in \mathbb{N}$, sea $x_r := \sum_{j=1}^r \langle u_j \mid x \rangle\, u_j$. La desigualdad de Bessel muestra que $\|x_r\|^2 = \sum_{j=1}^r |\langle u_j \mid x \rangle|^2 \leq \|x\|^2$ para todo r. Si $r < s$, entonces

$$\|x_r - x_s\|^2 = \sum_{j=r+1}^{s} |\langle u_j \mid x \rangle|^2,$$

y la convergencia de la serie $\sum_{j=1}^\infty |\langle u_j \mid x \rangle|^2$, con suma $\leq \|x\|^2$, muestra que (x_r) es una *sucesión de Cauchy* en H. Luego hay un único punto límite $y := \lim_{r\to\infty} x_r$ en H. Entonces $y = \sum_{j=1}^\infty \langle u_j \mid x \rangle\, u_j$ como suma convergente en H.

La continuidad del producto escalar muestra que $\langle u_k \mid y \rangle = \lim_{r\to\infty} \langle u_k \mid x_r \rangle = \langle u_k \mid x \rangle$ para todo k. Luego $\langle u_k \mid x - y \rangle = 0$ para todo k. Como la familia $\{\, u_k : k \in \mathbb{N} \,\}$ es total, se concluye que $y = x$.

Ad (c) $\Longrightarrow$ (d): Dados $x, y \in H$, hay dos desarrollos de Fourier convergentes:

$$x = \sum_{j=1}^\infty \langle u_j \mid x \rangle\, u_j, \qquad y = \sum_{k=1}^\infty \langle u_k \mid y \rangle\, u_k.$$

De la continuidad del producto escalar, se obtiene la suma convergente en $\mathbb{C}$:

$$\langle y \mid x \rangle = \sum_{j,k=1}^\infty \overline{\langle u_k \mid y \rangle}\, \langle u_j \mid x \rangle\, \langle u_k \mid u_j \rangle = \sum_{j=1}^\infty \langle y \mid u_j \rangle\, \langle u_j \mid x \rangle\,.$$

Ad (d) $\Longrightarrow$ (e): Es cuestión de tomar $y = x$ en (1.25).

Ad (e) $\Longrightarrow$ (a): Si $\{\, u_k : k \in \mathbb{N} \,\}$ no fuera maximal, habría un vector $v \in H$ de norma 1 con $\{v, u_0, u_1, u_2, \dots\}$ ortonormal. La igualdad de Parseval (1.26) entonces implicaría que $1 = \|v\|^2 = \sum_{j=1}^\infty |\langle u_j \mid v \rangle|^2 = 0$, absurdo! Luego $\{\, u_k : k \in \mathbb{N} \,\}$ sí es maximal. $\square$

Un espacio de Hilbert H es **separable**, como espacio topológico —es decir, posee un conjunto numerable denso en H— si y sólo si posee una base ortonormal numerable. La numerabilidad de la base es obviamente necesaria; y los desarrollos de Fourier (1.24) con

[12]La frase atribuida a William de Ockham dice: *Entia non sunt multiplicanda praeter necessitatem.*

coeficientes racionales forman una parte densa en H, así que esta condición es también suficiente. En el caso de un espacio de Hilbert no separable, no es difícil comprobar que las cinco condiciones análogas del Teorema 1.33 siguen equivalentes, con leves ajustes de la notación.[13] Además, las fórmulas (1.24), (1.25) y (1.26) mantienen su validez.

Definición 1.34. Una **isometría** entre dos espacios de Hilbert H y K es una aplicación lineal $V : H \to K$ es que satisface $\langle Vx \mid Vy\rangle = \langle x \mid y\rangle$ para todo $x, y \in H$.

Al poner $y = x$, se ve que $\|Vx\| = \|x\|$ para todo $x \in H$, así que V preserva normas, lo cual justifica la palabra *isometría*.

Un **isomorfismo** entre H y K es una *isometría biyectiva* $U : H \to K$, si existe. Una isometría biyectiva también se llama un **operador unitario** de H en K.

Proposición 1.35. *Dos espacios de Hilbert con bases ortonormales respectivos* $\{u_k : k \in A\}$ *y* $\{v_r : r \in B\}$ *son isomorfos si y sólo si los conjuntos índice* A *y* B *tienen igual cardinalidad.*

Demostración. Decir que A y B tienen la misma cardinalidad, $\#(A) = \#(B)$, es afirmar que hay una biyección $\sigma : A \to B$. Si tal σ existe, se define una aplicación lineal $U : H \to K$ por la receta:

$$U\Bigl(\sum_{k\in A} \alpha_k u_k\Bigr) := \sum_{k\in A} \alpha_k v_{\sigma(k)} \quad \text{para} \quad \alpha_k \in \mathbb{C} \text{ con } \sum_{k\in A} |\alpha_k|^2 < \infty.$$

En efecto, por (1.26) y (1.24), cada vector $x \in H$ tiene un desarrollo $x = \sum_{k\in A} \alpha_k u_k$ con $\sum_{k\in A} |\alpha_k|^2 = \|x\|^2 < \infty$; y el Teorema 1.33 muestra que cada serie $\sum_{k\in A} \alpha_k v_{\sigma(k)}$ con $\sum_{k\in A} |\alpha_k|^2 < \infty$ define un vector en K. Es evidente por la igualdad de Parseval (1.26) que U es una isometría.

Por otro lado, si $U : H \to K$ es una isometría biyectiva, colóquese $w_k := U(u_k) \in K$. Entonces $\{ w_k : k \in A \}$ es una familia ortonormal en K, porque

$$\langle w_j \mid w_k\rangle = \langle U(u_j) \mid U(u_k)\rangle = \langle u_j \mid u_k\rangle = [\![j = k]\!].$$

Además, si $y \in K$, hay $x \in H$ con $y = U(x)$ porque U es sobreyectivo. Si $\langle w_k \mid y\rangle = \langle w_k \mid Ux\rangle = 0$ para todo $k \in A$, entonces $\langle u_k \mid x\rangle = 0$ para todo k, así que $x = 0$ y por ende $y = 0$; luego, $\{ w_k : k \in A \}$ es total en K.

Si $\#(A) = n$ es finito, la ecuación (1.24) dice que $\{ u_k : k \in A \}$ es una base ordinaria del espacio vectorial H (un conjunto maximal de vectores linealmente independientes), luego

[13] Por la demostración de la Proposición 1.32, cualquier suma de números no negativos sobre un conjunto índice no numerable se reduce a una serie ordinaria.

$\dim H = n$; como $U : H \to K$ es lineal y biyectivo, se ve que $\#(B) = \dim K = n$ también. Entonces está claro que hay una biyección $\sigma : A \to B$.

Si $\#(A)$ es una cardinalidad infinita, sea $B_k := \{ r \in B : \langle w_k \mid v_r \rangle \neq 0 \}$; este B_k es numerable, para todo $k \in A$, así que $\#\bigl(\bigcup_{k \in A} B_k\bigr) = \aleph_0 \, \#(A) = \#(A)$.

Si fuera $\#(B) > \#(A)$, existiría $r \in B$ con $v_r \neq 0$ en K pero cada $\langle w_k \mid v_r \rangle = 0$, lo cual es inadmisible ya que $\{ w_k : k \in A \}$ es total en K. Se concluye que $\#(B) \leq \#(A)$. Al reemplazar U por la biyección $U^{-1} : K \to H$, se prueba de igual modo que $\#(A) \leq \#(B)$. El teorema de Schröder y Bernstein, de la teoría de conjuntos, ahora garantiza que $\#(A) = \#(B)$, es decir, que existe una biyección $\sigma : A \to B$. $\square$

El Teorema 1.33 también demuestra que todo espacio de Hilbert de dimensión finita n es isomorfo al espacio euclidiano $\mathbb{C}^n$ (con la base ortonormal estándar).

► Los ejemplos concretos de bases ortonormales se construyen muchas veces por el **algoritmo de Gram y Schmidt**. Dado un espacio de Hilbert separable H, se obtiene primero —por cualquier procedimiento— un conjunto de vectores $\{ x_0, x_1, x_2, \dots \}$ *linealmente independientes* que forman un *conjunto total* en H: si $\langle x_n \mid y \rangle = 0$ para todo n, entonces $y = 0$. Defínase $u_0 := x_0 / \|x_0\|$ (para que $\|u_0\| = 1$); defínase $y_1, u_1, y_2, u_2, \dots$ inductivamente por:

$$y_n := x_n - \sum_{k=0}^{n-1} \langle u_k \mid x_n \rangle u_k, \qquad u_n := \frac{y_n}{\|y_n\|}.$$

En cada paso, se resta de x_n sus componentes en las direcciones de los u_k previamente construidos, y luego se normaliza el residuo y_n para obtener un vector u_n de norma 1.

La independencia lineal de los x_n garantiza que cada $y_n \neq 0$. Como $\{ x_0, x_1, x_2, \dots \}$ es total, se obtiene la condición de totalidad (1.20) para los u_n, es decir, que la familia ortonormal de los u_n es también total.

Ejemplo 1.36. En $\mathbb{C}^n$ o en $\underline{\ell}^2$, sea $\boldsymbol{e}_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ la sucesión con 1 en el k-ésimo lugar y 0 en los demás lugares. Estas forman una familia ortonormal. Como $\langle \boldsymbol{e}_k \mid \boldsymbol{x} \rangle = x_k$ es el k-ésimo componente de la sucesión $\boldsymbol{x}$, se verifica (1.20). Entonces $\{ \boldsymbol{e}_k : k = 1, \dots, n \}$ es una base ortonormal para $\mathbb{C}^n$; y $\{ \boldsymbol{e}_k : k \in \mathbb{N} \}$ es una base ortonormal para $\underline{\ell}^2$. $\lozenge$

Ejemplo 1.37. Si $H = L^2[-1, 1]$, el conjunto de "monomios" $\{ 1, t, t^2, t^3, \dots \}$ es linealmente independiente y total: si $\int_{-1}^{1} \overline{p(t)} f(t) \, dt = 0$ para todo polinomio p, entonces $f = 0$. El algoritmo de Gram y Schmidt entonces produce un juego de polinomios ortonormales, los **polinomios de Legendre**. $\lozenge$

Ejemplo 1.38. Si $H = L^2[-\pi, \pi]$, las funciones $u_n(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int}$, para $n \in \mathbb{Z}$, forman una familia ortonormal, porque

$$\langle u_m \mid u_n \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)t} \, dt = [\![m{=}n]\!].$$

Es menos evidente, pero cierto, que esta familia es total en $L^2[-\pi, \pi]$. En general, la demostración de totalidad de una familia ortonormal requiere un ejercicio no trivial de análisis. El desarrollo (1.24) en este caso es la **serie de Fourier** de una función en $L^2[-\pi, \pi]$. (Los elementos de $L^2[-\pi, \pi]$ pueden considerarse como funciones periódicas sobre $\mathbb{R}$, de período 2π.)

Para reducir el mínimo las instancias de la constante 2π, se puede optar por la "notación francesa": en el espacio de Hilbert $H = L^2[0, 1]$, las funciones $v_n(t) := e^{2\pi i n t}$, con $n \in \mathbb{Z}$, forman una familia ortonormal total. El desarrollo (1.24) da la serie de Fourier de una función periódica con período 1. $\Diamond$

Ejemplo 1.39. Si $H = \mathcal{F}(\mathbb{C})$ es el espacio de Segal y Bargmann, hay una familia ortonormal de monomios, dados por $u_n(z) := z^n/\sqrt{n!}$ para $n \in \mathbb{N}$. Un elemento de $\mathcal{F}(\mathbb{C})$ es una función holomorfa entera y posee una serie de Taylor centrada en 0. Al ajustar sus coeficientes por factores de $\sqrt{n!}$, esta serie de Taylor se convierte en el desarrollo de Fourier (1.24) para este espacio de Hilbert. El Teorema 1.33 entonces garantiza que $\{ u_n : n \in \mathbb{N} \}$ es una base ortonormal de $\mathcal{F}(\mathbb{C})$. $\Diamond$

La geometría de los espacios de Hilbert

En un espacio normado de dimensión finita, la *distancia* hacia un subespacio M desde un punto externo $x \notin M$ se define como $\inf\{ \|x - y\| : y \in M \}$. Este ínfimo es de hecho un *mínimo*: la distancia está dada por $\|x - z\|$ para algún $z \in M$. Como M es cerrado, por su dimensionalidad finita, es fácil comprobar la existencia del punto z más cercano a M. Por otro lado, para algunas normas la unicidad de z no está garantizada.

En un espacio de Hilbert, de dimensión cualquiera, esta *propiedad de distancia mínima* sigue válida, con unicidad, en un contexto levemente más general. Recuérdese que en un espacio vectorial E (real o complejo), una parte $C \subseteq E$ es **convexa** si

$$x, y \in C, \ 0 \le t \le 1 \implies (1-t)x + ty \in C.$$

Proposición 1.40. *Sea H un espacio de Hilbert y sea $C \subseteq H$ una parte* convexa y cerrada. *Si $x \in H$, hay un único punto $z \in C$ tal que*

$$\|x - z\| = \inf_{y \in C} \|x - y\|. \tag{1.27}$$

Demostración. Si $x \in C$, el punto $z = x$ es obviamente la solución única al problema propuesto. Supóngase, entonces, que $x \notin C$. Sea $d = d(x, C) := \inf\{\, \|x - y\| : y \in C \,\}$ la *distancia* de x a C. Nótese que $d > 0$ porque C es cerrado y $x \notin C$.

Tómese una sucesión $(y_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset C$ tal que

$$\|x - y_k\|^2 < d^2 + \frac{1}{k+1} \quad \text{para cada} \quad k \in \mathbb{N}. \tag{1.28}$$

Esta es una sucesión de Cauchy en H. En efecto, la ley del paralelogramo implica que

$$\begin{aligned}
\|y_j - y_k\|^2 &= \|(y_j - x) - (y_k - x)\|^2 \\
&= 2\|y_j - x\|^2 + 2\|y_k - x\|^2 - \|(y_j - x) + (y_k - x)\|^2 \\
&= 2\|y_j - x\|^2 + 2\|y_k - x\|^2 - 4\|x - \tfrac{1}{2}(y_j + y_k)\|^2 \\
&\leq 2\|y_j - x\|^2 + 2\|y_k - x\|^2 - 4d^2 < 2\biggl(\frac{1}{j+1} + \frac{1}{k+1}\biggr),
\end{aligned}$$

porque $\frac{1}{2}(y_j + y_k) \in C$ por convexidad. Como H es completo, hay un (único) punto $z \in H$ tal que $y_k \to z$. Nótese que $z \in C$ ya que C es cerrado en H. Esto implica que $\|x - z\| \geq d$; y de (1.28) se ve que $\|x - z\| = \lim_{k\to\infty} \|x - y_k\| \leq d$. Por lo tanto, vale $\|x - z\| = d$.

Para obtener la unicidad del punto z que cumple (1.27), sea $w \in C$ cualquier punto tal que $\|x - w\| = d$. Entonces $\frac{1}{2}(z + w) \in C$ por convexidad, y la ley del paralelogramo ahora dice que

$$\|z - w\|^2 = 2\|x - z\|^2 + 2\|x - w\|^2 - 4\|x - \tfrac{1}{2}(z + w)\|^2 \leq 2d^2 + 2d^2 - 4d^2 = 0,$$

así que $\|z - w\| = 0$ y por ende $w = z$. $\square$

Definición 1.41. Sean H, K dos espacios de Hilbert. La **suma directa** $H \oplus K$ de los espacios vectoriales H y K incluye H y K como subespacios vectoriales[14] de manera que $H \cap K = \{0\}$. Al dotarla del producto escalar

$$\langle x_1 + y_1 \mid x_2 + y_2 \rangle := \langle x_1 \mid x_2 \rangle + \langle y_1 \mid y_2 \rangle, \quad \text{para} \quad x_1, x_2 \in H;\ y_1, y_2 \in K,$$

$H \oplus K$ es un espacio de Hilbert, en donde $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$, para $x \in H$, $y \in K$.

Si H y K tienen respectivas bases ortonormales $\{\, u_k : k \in A \,\}$ y $\{\, v_r : r \in B \,\}$, su unión disjunta $\{\, u_k : k \in A \,\} \uplus \{\, v_r : r \in B \,\}$ es una base ortonormal para $H \oplus K$.

Proposición 1.42. *Sea M un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert H. Su complemento ortogonal $M^\perp$ es otro subespacio cerrado tal que $(M^\perp)^\perp = M$. Hay un isomorfismo de espacios de Hilbert $H \simeq M \oplus M^\perp$.*

[14] Se puede definir $H \oplus K$ como el producto cartesiano $H \times K$ con las operaciones vectoriales obvias. Las identificaciones $x \mapsto (x, 0)$ y $y \mapsto (0, y)$ definen las inclusiones respectivas $H \hookrightarrow H \oplus K$ y $K \hookrightarrow H \oplus K$.

Demostración. De la definición (1.19) de complemento ortogonal, se ve que $y \in M^\perp$ si y sólo si $\langle y \mid x\rangle = 0$ para todo $x \in M$. Queda claro que $M \subseteq (M^\perp)^\perp$ y que $M \cap M^\perp = \{0\}$.

Dado $x \in H$, la Proposición 1.40 muestra que hay un único $z \in M$ tal que $\|x - z\| = d(x, M)$. Sea $w := x - z$. Para $y \in M$, $t \in \mathbb{R}$, vale

$$d(x, M)^2 \leq \|x - (z + ty)\|^2 = \|w - ty\|^2 = d(x, M)^2 - 2t\,\Re\langle w \mid y\rangle + t^2\|y\|^2,$$

así que $t^2\|y\|^2 - 2t\,\Re\langle w \mid y\rangle \geq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, lo cual implica $\langle w \mid y\rangle = 0$. Como $y \in M$ es arbitrario, se concluye que $w \in M^\perp$. Entonces cada $x \in H$ es una suma

$$x = z + w, \quad \text{con} \quad z \in M,\ w \in M^\perp.$$

La unicidad de $z \in M$ conlleva la unicidad de $w = x - z \in M^\perp$, así que esta descomposición es única.

Esto dice que $H = M \oplus M^\perp$ como espacios vectoriales. Además, sus productos escalares coinciden, porque

$$\|x\|^2 = \langle z + w \mid z + w\rangle = \langle z \mid z\rangle + 2\Re\langle w \mid z\rangle + \langle w \mid w\rangle = \|z\|^2 + \|w\|^2.$$

Si $\{\, u_k : k \in A \,\}$ y $\{\, v_r : r \in B \,\}$ son bases ortonormales respectivas para M y $M^\perp$, hay un desarrollo de Fourier de x, dado por (1.24):

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle u_k \mid x\rangle\, u_k + \sum_{r=1}^{\infty} \langle v_r \mid x\rangle\, v_r = \sum_{k=1}^{\infty} \langle u_k \mid z\rangle\, u_k + \sum_{r=1}^{\infty} \langle v_r \mid w\rangle\, v_r.$$

Cada $y \in (M^\perp)^\perp$ cumple $\langle v_r \mid y\rangle = 0$ para todo r, luego obedece $y = \sum_{k=1}^{\infty} \langle u_k \mid z\rangle\, u_k$. Como M es cerrado en H y por ende es un espacio de Hilbert bajo la restricción a M del producto escalar en H, se concluye que $(M^\perp)^\perp = M$. □

1.3 Espacios localmente convexos

Los espacios de Hilbert forman una generalización natural del espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$, en donde las bases ortonormales permiten imitar los procesos del álgebra lineal finitodimensional. En espacios normados cuya norma no proviene de un producto escalar, ya no es posible continuar con tales procedimientos. Es necesario adoptar un enfoque más abstracto. En esta sección conviene mirar el otro extremo, al considerar una clase muy amplia de espacios vectoriales en donde sea posible combinar el álgebra lineal con el análisis.

Definición 1.43. Un **espacio vectorial topológico** es un espacio vectorial complejo E dotado con una topología tal que las operaciones de suma $(x, y) \mapsto x + y : E \times E \to E$ y multiplicación por escalares $(\lambda, x) \mapsto \lambda x : \mathbb{C} \times E \to E$ sean continuas.[15] En un espacio vectorial topológico, las *traslaciones* $\tau_x : E \to E : y \mapsto y - x$ y las *homotecias* $h_\lambda : E \to E : y \mapsto \lambda y$ (con $\lambda \neq 0$) son homeomorfismos de E, con inversos respectivos τ_{-x} y $h_{1/\lambda}$.

Un espacio vectorial topológico no necesariamente es de Hausdorff. Recuérdese que un espacio topológico es *de Hausdorff* si cada dos puntos distintos poseen vecindarios disjuntos. Por ejemplo, dado un espacio de medida $(X, \mathcal{F}, \mu)$ no atómico, los espacios vectoriales $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{F}, \mu)$ contienen "funciones nulas" distintas de la función constante 0, que no pueden ser separadas de este modo. Para evitar la consideración de tales ejemplos, de poca utilidad para el análisis, la definición siguiente incluye una condición que implica la propiedad de Hausdorff.[16]

Definición 1.44. Un **espacio localmente convexo** es un espacio vectorial complejo E, dotado con una familia separante de *seminormas* $\{ p_\alpha : \alpha \in A \}$, no necesariamente numerable. Su topología se define así: si $x \in E$, cada vecindario básico $V_{x,F,\varepsilon}$ de x depende de una parte finita $F = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\} \subset A$ y un juego de números positivos $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r > 0$; y está dado por

$$V_{x,F,\varepsilon} := \{ y \in E : p_{\alpha_k}(y - x) < \varepsilon_k;\ k = 1, \dots, r \}. \tag{1.29}$$

No es difícil comprobar que las operaciones vectoriales son continuas para esta topología, así que E es un espacio vectorial topológico.

Si $x \neq y$ en un espacio localmente convexo E, entonces $p_\alpha(x - y) = r > 0$ para algún $\alpha \in A$, así que $V_{x,\{\alpha\},r/2} \cap V_{y,\{\alpha\},r/2} = \emptyset$: de ahí se ve que E es de Hausdorff.

Definición 1.45. Si A, B, C son partes de un espacio localmente convexo E, dícese que:

(a) A es **equilibrado** si $\lambda A \subseteq A$ para $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| \leq 1$;

(b) B es **absorbente** si $x \in E \implies rx \in B$ para algún $r > 0$;

(c) C es **convexo** si $x, y \in C \implies (1 - t)x + ty \in C$ para $0 \leq t \leq 1$.

Proposición 1.46. *Un espacio vectorial topológico es localmente convexo si y sólo si posee una base de vecindarios de* 0 *que son equilibrados, absorbentes y convexos.*

[15] Hay una definición análoga de espacio vectorial topológico sobre $\mathbb{R}$. Se deja al lector la tarea de formular las definiciones apropiadas para el caso de escalares reales.

[16] Bourbaki abogó por incluir esta propiedad en la definición de los espacios localmente convexos; otros autores, como Yosida y Rudin, adoptaron la misma costumbre. De hecho, Rudin demuestra que un espacio vectorial topológico que cumple el axioma T_1 de separación (cada punto es un conjunto cerrado) también cumple T_2, la propiedad de Hausdorff.

Demostración. Ad $(\Rightarrow)$: Si E es un espacio localmente convexo, sea $\{ p_\alpha : \alpha \in A \}$ una familia de seminormas que define su topología. Para un conjunto finito de índices $F = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\} \subset A$ y para $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r > 0$, sea $V = V_{0,F,\varepsilon}$ el vecindario básico de 0 definido por (1.29). Cada seminorma p_α cumple

$$\begin{aligned} p_\alpha(\lambda x) = |\lambda|\, p_\alpha(x) \leq p_\alpha(x) \quad &\text{para} \quad |\lambda| \leq 1, \\ p_\alpha((1-t)x + ty) \leq (1-t)p_\alpha(x) + tp_\alpha(y) \quad &\text{para} \quad 0 \leq t \leq 1, \end{aligned}$$

así que V es equilibrado y convexo. Si $z \in E$, existe $r > 0$ tal que $r < \varepsilon_k / p_{\alpha_k}(z)$ toda vez que $p_{\alpha_k}(z) > 0$; entonces $p_{\alpha_j}(rz) = r\, p_{\alpha_j}(z) < \varepsilon_j$ para $j = 1, \dots, n$, luego $rz \in V$. Por lo tanto, V es absorbente.

Ad $(\Leftarrow)$: Por otro lado, si E es un espacio vectorial topológico y si U es un abierto equilibrado, absorbente y convexo en E, entonces el **funcional de Minkowski**:

$$q_U(x) := \inf\{ r > 0 : r^{-1}x \in U \} = \inf\{ r > 0 : x \in rU \}$$

es una *seminorma continua* en E. En efecto, es evidente que $q_U(x) < \infty$ para cada $x \in E$, porque U es absorbente; además, $q_U(\lambda x) = q_U(|\lambda| x) = |\lambda|\, q_U(x)$ porque U es equilibrado. Para comprobar la desigualdad triangular para q_U, es cuestión de notar que

$$(r+s)^{-1}(x+y) = \frac{r}{r+s}(r^{-1}x) + \frac{s}{r+s}(s^{-1}y) \quad \text{si} \quad r, s > 0,$$

así que las condiciones $q_U(x) < r$, $q_U(y) < s$ implican $q_U(x+y) < r+s$ por la convexidad de U; en consecuencia, vale $q_U(x+y) \leq q_U(x) + q_U(y)$. La continuidad de q_U sigue de

$$q_U^{-1}\big([0,\varepsilon)\big) = \{ x \in E : q_U(x) < \varepsilon \} = \varepsilon U = h_\varepsilon(U),$$

porque $h_\varepsilon(U)$ es abierto en E para todo $\varepsilon > 0$. En vista de que $U = \{ x \in E : q_U(x) < 1 \}$, se concluye que la topología de E está determinada por las seminormas q_U, donde U recorre una base de vecindarios abiertos de 0 que son equilibrados, absorbentes y convexos. □

Definición 1.47. Sea E un espacio localmente convexo, cuya topología está determinada por la familia de seminormas $\{ p_\alpha : \alpha \in A \}$. Un conjunto $A \subset E$ está **acotado** si $p_\alpha(A)$ está acotado en $[0, \infty)$ para todo $\alpha \in A$.

En particular, una parte *compacta* $K \subset E$ está acotada, porque cada conjunto imagen $p_\alpha(K)$ está acotado en $[0, \infty)$ por la continuidad de la seminorma p_α.

En un espacio *normado* E, la norma $\|\cdot\|$ por sí sola constituye una familia de seminormas que determina la topología. Entonces $A \subset E$ es una parte acotada si y sólo si hay $R > 0$ tal que $\|x\| \leq R$ para todo $x \in A$.

Proposición 1.48. *Un espacio localmente convexo es* normable *si y sólo si posee un vecindario acotado de* 0*.*

Demostración. Si E es un espacio normado, entonces $V = \{ x \in E : \|x\| < 1 \}$ es un vecindario acotado de 0.

Por otro lado, si E es un espacio localmente convexo cuya topología está determinada por una familia separante de seminormas $\{ p_\alpha : \alpha \in A \}$, sea $V = V_{x,F,\varepsilon}$ un vecindario básico cualquiera de 0, dado por (1.29). Defínase $q(x) := \max\{p_{\alpha_1}(x)/\varepsilon_1, \dots, p_{\alpha_r}(x)/\varepsilon_r\}$. Entonces q es una seminorma continua sobre E tal que $V = \{ x \in E : q(x) < 1 \}$.

Ahora bien, si V es acotado, colóquese $m_\alpha := 1 + \sup_{x \in V} p_\alpha(x)$ para $\alpha \in A$. El vecindario básico de 0 dado por $\{ y \in E : p_\beta(y) < \delta \}$ incluye $(\delta/m_\alpha)V$. De este modo se ve que $\{ (1/n)V : n \in \mathbb{N}^* \}$ es una base de vecindarios de 0. Esto significa que la sola seminorma q genera la topología de E. Como esta topología es de Hausdorff, q debe ser una norma. En resumen: E es normable con la norma q. $\square$

En consecuencia, un espacio localmente convexo que no es normable necesita una infinitud de seminormas para definir su topología.

1.4 Ejercicios sobre espacios normados y localmente convexos

Ejercicio 1.1. Demostrar que las métricas d y d' dadas por (1.1a) y (1.1b) de la Definición 1.3 son *equivalentes*, es decir, que cada bola abierta $B_d(x; r) := \{ y : d(x, y) < r \}$ incluye una bola abierta $B_{d'}(x; s)$, y viceversa.

Ejercicio 1.2. Si d denota la métrica (1.2), comprobar que $d(x_n, x) \to 0$ cuando $n \to \infty$ si y sólo si $p_k(x_n - x) \to 0$ cuando $n \to \infty$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Verificar, además, que una sucesión $\{y_n\}$ es de Cauchy en la métrica d si y sólo si es de Cauchy en cada seminorma p_k por aparte.[17]

Ejercicio 1.3. Demostrar que $\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$ para todo $x \in \mathbb{C}^n$.

Ejercicio 1.4. (a) Comprobar que $\underline{\ell}^p \subsetneq \underline{\ell}^r$ si $1 \leq p < r < +\infty$.

(b) Demostrar que $\mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$ es denso en $\underline{c}_0$ y en $\underline{\ell}^p$ si $1 \leq p < +\infty$.

(c) Concluir que $\underline{\ell}^p$ es denso en $\underline{\ell}^r$ si $1 \leq p < r < +\infty$.

(d) Demostrar, además, que $\mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$ *no es* denso en $\underline{\ell}^\infty$.

[17] En consecuencia, para verificar la completitud de un espacio con una familia numerable de seminormas, basta hallar límites (que deben coincidir) para sucesiones de Cauchy respecto de cada seminorma individual.

Ejercicio 1.5. (a) Verificar la completitud del espacio normado de funciones continuas $C(K)$, donde K es un espacio topológico compacto (y de Hausdorff).

(b) Si X es un espacio topológico localmente compacto (y de Hausdorff), pero no compacto, demostrar que $C_0(X)$ es también completo.

Ejercicio 1.6. Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto. Verificar la completitud del espacio $C^\infty(U)$ en la topología dada por las seminormas (1.7). ⟦ Indicación: Usar el Ejercicio 1.2. ⟧

Ejercicio 1.7. Si $p\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ es un polinomio, demostrar que hay constantes $C > 0$, $R > 0$ y $N \in \mathbb{N}$, dependientes de p, tales que la desigualdad (1.8) sea válida para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Ejercicio 1.8. (a) Sea $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ el espacio de Schwartz del Ejemplo 1.16 dotado con las seminormas s_m dadas por (1.9). Para $m, n \in \mathbb{N}$ y $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, defínase

$$p_{mn}(f) := \sup_{t\in\mathbb{R}} |t^m\, \partial^n f(t)|, \quad \text{con} \quad \partial \equiv \frac{d}{dt}\,.$$

Demostrar que $p_{mn}(f) \leq s_M(f)$ si $M = \max\{m, n\}$; y que $s_m(f) \leq C \sum_{k=0}^{2m} p_{km}(f)$ para alguna constante C. Concluir que el sistema de seminormas $\{\, p_{mn} : m, n \in \mathbb{N}\,\}$ define la misma topología sobre $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ que $\{\, s_m : m \in \mathbb{N}\,\}$.

(b) Defínase otra familia de seminormas q_{mn} sobre $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ por

$$q_{mn}(f)^2 := \int_{\mathbb{R}} t^{2m} |\partial^n f(t)|^2\, dt.$$

Verificar que la función $h\colon t \mapsto (1+t^2)^{-1/2}$ queda en $L^2(\mathbb{R})$. Usar la desigualdad de Schwarz para mostrar que

$$q_{mn}(f) \leq C'(p_{mn}(f) + p_{m+2,n}(f))$$

para alguna constante C' independiente de $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

(c) Demostrar que hay otra constante $C'' \geq 0$ tal que

$$p_{mn}(f) \leq C''\bigl(m q_{m-1,n}(f) + m q_{m+1,n}(f) + q_{m,n+1}(f) + q_{m+2,n+1}(f)\bigr)$$

para todo $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Concluir que las seminormas q_{mn} también definen la topología de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Ejercicio 1.9. Si $[a, b] \subset \mathbb{R}$ es un intervalo compacto y si $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ es una función, la *variación total* de f es

$$V(f) := \sup\biggl\{ \sum_{j=1}^{n} |f(t_j) - f(t_{j-1})| : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b \biggr\}.$$

Sea $BV[a, b] := \{\, f : [a, b] \to \mathbb{C} : V(f) < +\infty \,\}$ el espacio de las **funciones de variación acotada** sobre $[a, b]$. Obsérvese que $V(f) = 0$ si y sólo si f es constante en $[a, b]$. Demostrar que $\|f\| := |f(a)| + V(f)$ define una norma en $BV[a, b]$.

Ejercicio 1.10. ¿Para cuáles $a \in \mathbb{R}$ y $p \in [1, \infty]$ es la función $f_a(t) := t^a e^{-t}$ un elemento de $L^p[0, \infty)$? Calcular las normas $\| f_a \|_p$ cuando éstas son finitas.

Ejercicio 1.11. Las **funciones de Rademacher** $r_n \colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, para $n \in \mathbb{N}$, se definen como sigue. La función r_0 es constante: $r_0(t) \equiv 1$. Si $n \in \mathbb{N}^*$ y $0 \leq t \leq 1$, sea $k := \lfloor 2^n t \rfloor$ el mayor entero que no excede $2^n t$; colóquese

$$r_n(t) := \begin{cases} 0, & \text{si } k = 2^n t, \\ (-1)^k, & \text{si } k < 2^n t < k + 1. \end{cases}$$

Demostrar que $\{ r_n : n \in \mathbb{N} \}$ es una familia ortonormal en $L^2[0, 1]$, pero que la función $g(t) := \cos(2\pi t)$ es ortogonal a cada r_n.[18]

Ejercicio 1.12. Los monomios $f_n \colon t \mapsto t^n$, para $n \in \mathbb{N}$, forman un conjunto total[19] en el espacio de Hilbert $H = L^2[-1, 1]$. El algoritmo de Gram y Schmidt produce una base ortonormal $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de polinomios sobre $[-1, 1]$. Al escribir $P_n := \sqrt{2/(2n + 1)}\, p_n$, se obtienen los **polinomios de Legendre** P_n. He aquí una definición directa de esos polinomios:

$$P_n(t) := \frac{1}{2^n\, n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n \quad \text{con} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Demostrar que las funciones P_n son mutuamente ortogonales en $L^2[-1, 1]$, y además que $\| P_n \|_2^2 = 2/(2n + 1)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 1.13. Si $f(t) := t^3$ para $-1 \leq t \leq 1$, calcular $\langle P_0 \mid f \rangle$, $\langle P_1 \mid f \rangle$, $\langle P_2 \mid f \rangle$, donde P_0, P_1, P_2 son los primeros tres polinomios de Legendre. En seguida, calcular

$$\inf_{a,b,c \in \mathbb{C}} \int_{-1}^{1} |t^3 - at^2 - bt - c|^2 \, dt.$$

Ejercicio 1.14. Las funciones $f_n \colon t \mapsto t^n e^{-t/2}$, para $n \in \mathbb{N}$, forman un conjunto total en $H = L^2[0, \infty)$. Con el algoritmo de Gram y Schmidt se produce una base ortonormal $\{l_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de funciones $l_n(t) =: e^{-t/2} L_n(t)$, donde los L_n son los **polinomios de Laguerre**. Una definición directa es:

$$L_n(t) := \frac{e^t}{n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^n e^{-t}) \quad \text{con} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Demostrar que las funciones $t \mapsto e^{-t/2} L_n(t)$ forman una familia ortonormal en $L^2[0, \infty)$.

[18] Este es un ejemplo de una familia ortonormal que no es total.

[19] En la construcción de bases ortonormales, el paso clave es la demostración de que cierto conjunto de elementos es *total*. De la teoría de integración, se sabe que $C([-1, 1])$ es un subespacio denso de $L^2[-1, 1]$; y por un teorema clásico de Weierstrass, los polinomios son densos en $C([-1, 1])$. Sin embargo, las normas de $C([-1, 1])$ y $L^2[-1, 1]$ no coinciden: se requiere un argumento extra, pero fácil, para concluir que los polinomios son densos en $L^2[-1, 1]$.

Ejercicio 1.15. Las funciones $f_n : t \mapsto t^n e^{-t^2/2}$, para $n \in \mathbb{N}$, forman un conjunto total en $H = L^2(\mathbb{R})$. Con el algoritmo de Gram y Schmidt se produce una base ortonormal $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de la forma $h_n(t) = (2^n\, n!\sqrt{\pi}\,)^{-1/2} e^{-t^2/2} H_n(t)$, donde los H_n son los **polinomios de Hermite**. Una definición directa es:

$$H_n(t) := (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n}\, e^{-t^2} \quad \text{con} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Demostrar que las funciones $g_n(t) := e^{-t^2/2} H_n(t)$ son mutuamente ortogonales en $L^2(\mathbb{R})$, con $\|g_n\|_2^2 = 2^n\, n!\sqrt{\pi}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 1.16. Si U es una parte abierta de $\mathbb{C}$, sea $L^2(U, \lambda)$ el espacio de Hilbert de funciones de cuadrado integrable en U, con respecto a la medida de Lebesgue $d\lambda(z) = dx\, dy$. Sea $A^2(U) := H(U) \cap L^2(U, \lambda)$ el subespacio vectorial formado por los elementos de $L^2(U, \lambda)$ que son holomorfos en U. Dado un disco cerrado $\overline{D}(z_0; r) \subset U$, de centro z_0 y radio r, verificar que

$$f(z_0) = \frac{1}{\pi r^2} \int_{|z-z_0|\le r} f(z)\, d\lambda(z) \quad \text{para} \quad f \in A^2(D),$$

a partir del desarrollo de Taylor de f. Mostrar también que

$$|f(z_0)| \le \frac{1}{\sqrt{\pi}\, r} \biggl(\int_{|z-z_0|\le r} |f(z)|^2\, d\lambda(z) \biggr)^{1/2}.$$

Comprobar que la convergencia en la norma de $L^2(U, \lambda)$ implica la convergencia uniforme sobre compactos en U para elementos de $A^2(U)$, y concluir que $A^2(U)$ es un subespacio *cerrado* de $L^2(U, \lambda)$.

Ejercicio 1.17. Demostrar que los monomios

$$u_n(z) := \frac{z^n}{\sqrt{n!}}, \quad \text{para} \quad n \in \mathbb{N},$$

forman una base ortonormal para el espacio $\mathcal{F}(\mathbb{C})$ de Segal y Bargmann. ⟦ Indicación: Usar la serie de Taylor de un elemento de $\mathcal{F}(\mathbb{C})$ para comprobar la igualdad de Parseval. ⟧

Ejercicio 1.18. Sea $\mathbb{D} := \{ z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \}$ el disco unitario complejo. Sea $A^2(\mathbb{D})$ el espacio de Hilbert definido en el Ejercicio 1.16. Demostrar que la familia de los monomios $q_n(z) := \sqrt{(n+1)/\pi}\, z^n$, para $n \in \mathbb{N}$, es una base ortonormal para $A^2(\mathbb{D})$.

Ejercicio 1.19. En un espacio de Banach E, se define una **serie** $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ como el límite, en la norma de E, de sus sumas parciales, si tal límite existe. Esta serie es **absolutamente convergente** si la serie positiva $\sum_{k=0}^{\infty} \|x_k\|$ converge en $\mathbb{R}$. Demostrar que una serie absolutamente convergente es convergente en la norma de E; y que se verifica la desigualdad

$$\left\| \sum_{k=0}^{\infty} x_k \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|x_k\|.$$

Ejercicio 1.20. Un **álgebra de Banach** es un espacio de Banach que posee una multiplicación asociativa tal que

$$\|xy\| \leq \|x\| \, \|y\| \quad \text{para todo} \quad x, y \in E.$$

En un álgebra de Banach con unidad multiplicativa $\mathbf{1}$, demostrar que la **serie geométrica** $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ [con $x^0 := \mathbf{1}$] converge absolutamente si $\|x\| < 1$, y que se verifica

$$(\mathbf{1} - x) \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} x^k (\mathbf{1} - x) = \mathbf{1}.$$

Ejercicio 1.21. Si E es un espacio vectorial topológico (no necesariamente localmente convexo), dícese que una parte $A \subset E$ está **acotada** si puede ser absorbida por cada vecindario V de 0, es decir, si siempre hay $r = r_V > 0$ tal que $A \subseteq rV$. Verificar que este concepto de acotación coincide con el de la Definición 1.47 para E localmente convexo.

Ejercicio 1.22. Un **tonel** en un espacio localmente convexo E es un conjunto $B \subset E$ que es equilibrado, absorbente, convexo y cerrado. Dícese que E es un **espacio tonelado** si cada tonel en E es un vecindario de 0. Demostrar que cada espacio de Fréchet es un espacio tonelado. ⟦ Indicación: Usar el teorema de Baire. ⟧

Ejercicio 1.23. Si $\rho \in \mathbb{R}$, denótese por $\mathcal{F}^\rho$ el espacio de Hilbert cuyos elementos son las funciones holomorfas enteras $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tales que

$$\|f\|_\rho^2 := \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 \, d\mu^\rho(z) < \infty,$$

donde

$$d\mu^\rho(z) := (1 + |z|^2)^\rho \, d\mu(z) = \frac{1}{\pi} r(1 + r^2)^\rho e^{-r^2} \, dr \, d\theta.$$

Mostrar que $\|f\|_\rho \leq \|f\|_\sigma$ si $\rho < \sigma$; y que $\mathcal{F}^\sigma \subseteq \mathcal{F}^\rho$. Concluir que $\mathcal{E} := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{F}^k$ es un espacio de Fréchet, con la topología dada por todas las normas $\| \cdot \|_k$ para $k \in \mathbb{N}$.

Comprobar la validez de la fórmula $\langle g \mid f \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle g \mid u_n \rangle \, \langle u_n \mid f \rangle$ para $f \in \mathcal{E}$ y $g \in \mathcal{E}^* := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{F}^{-k}$, donde $\langle \cdot | \cdot \rangle$ es la integral que define el producto escalar en $\mathcal{F}^0 = \mathcal{F}(\mathbb{C})$.

2 Los Teoremas Fundamentales y la Dualidad

El análisis funcional es la teoría general de aplicaciones lineales continuas entre espacios localmente convexos, en particular, entre espacios de Hilbert, de Banach, o de Fréchet. En este capítulo conviene investigar ciertas propiedades topológicas de estas aplicaciones lineales continuas, que enriquecen el álgebra lineal en dimensiones infinitas.

2.1 Aplicaciones lineales continuas

La continuidad de una aplicación lineal se refleja en unas desigualdades entre normas o seminormas de vectores. Esto reduce muchas cuestiones de continuidad a unos cálculos algebraicos sencillos.

Definición 2.1. Sean E, F dos espacios localmente convexos; un **operador** de E en F es una **aplicación lineal y continua** $T : E \to F$. Si $F = \mathbb{C}$, el operador T se llama un **funcional lineal** o una **forma lineal** sobre E.

El el espacio vectorial de todos los operadores $T : E \to F$ se denota por $\mathcal{L}(E, F)$. En el caso $F = \mathbb{C}$, el **espacio dual** de E es el espacio $E^* := \mathcal{L}(E, \mathbb{C})$ de todos los funcionales lineales continuos sobre E.

Proposición 2.2. *Sean E y F espacios localmente convexos, y sea $T : E \to F$ una aplicación lineal. Son equivalentes los siguientes:*

(a) T es continua en todo punto de E;

(b) T es continua en el origen $0 \in E$;

(c) Para cada seminorma continua q sobre F, hay una seminorma continua p sobre E y una constante $M > 0$ tales que

$$q(Tx) \leq M\, p(x), \quad \textit{para todo} \quad x \in E.$$

Demostración. Ad (a) $\iff$ (b): Si τ_x es la traslación $y \mapsto y - x$, está claro que[1]

$$(\tau_{-Tx} \circ T \circ \tau_x)(y) = (\tau_{-Tx} \circ T)(y - x) = \tau_{-Tx}(Ty - Tx) = Ty \quad \text{si} \quad y \in E,$$

así que $\tau_{-Tx} \circ T \circ \tau_x = T$ para cada $x \in E$. Como estas traslaciones son homeomorfismos de E y de F, se ve que T es continua en x si y sólo si T es continua en 0.

[1] Aquí se adopta la costumbre, común en el álgebra lineal, de escribir $Tx \equiv T(x)$ cuando T es lineal.

Ad (b) $\implies$ (c): Si q es una seminorma continua sobre F, $V_{q,1} := \{\, y \in F : q(y) < 1 \,\}$ es un vecindario de 0 en F. Por lo tanto, $T^{-1}(V_{q,1})$ es un vecindario de 0 en E, luego incluye un vecindario básico de 0 de la forma $U_{p,\delta} := \{\, x \in E : p(x) < \delta \,\}$, para alguna seminorma continua p sobre E y algún número $\delta > 0$. Luego $p(x) < \delta \implies q(Tx) < 1$.

En consecuencia, para cada $z \in E$,

$$p(z) < r \implies p\Big(\frac{\delta}{r}z\Big) < \delta \implies q\Big(T\Big(\frac{\delta}{r}z\Big)\Big) < 1 \implies q(Tz) < \frac{r}{\delta},$$

así que $q(Tz) \leq p(z)/\delta$. Luego $M := 1/\delta$ cumple (c).

Ad (c) $\implies$ (b): Cada vecindario V de 0 en F incluye un vecindario básico de 0 de la forma $V_{q,\varepsilon} := \{\, y \in F : q(y) < \varepsilon \,\}$ donde q es una seminorma continua sobre F y $\varepsilon > 0$. Por hipótesis, se obtiene $\{\, x \in E : p(x) < \varepsilon/M \,\} \subseteq T^{-1}(V)$, así que $T^{-1}(V)$ es un vecindario de 0 en E. Por tanto, T es continua en 0. ☐

Corolario 2.3. *Si E, F son espacios* normados*, una aplicación lineal $T : E \to F$ es continua si y sólo si hay una constante $M > 0$ tal que*

$$\|Tx\|_F \leq M\|x\|_E, \quad \textit{para todo} \quad x \in E. \qquad ⊟$$

Definición 2.4. Si E, F son espacios normados, se define una norma en $\mathcal{L}(E, F)$ por cualquiera de estas tres expresiones equivalentes:

$$\begin{aligned} \|T\| &:= \inf\{\, M > 0 : \|Tx\|_F \leq M\|x\|_E, \text{ para todo } x \in E \,\}, && \text{(2.1a)} \\ &= \sup\{\, \|Tx\|_F/\|x\|_E : x \in E,\ x \neq 0 \,\} \\ &= \sup\{\, \|Tx\|_F : \|x\|_E \leq 1 \,\}. && \text{(2.1b)} \end{aligned}$$

En particular, en el lado derecho de (2.1a) se puede tomar $M = \|T\|$, para concluir que

$$\|Tx\|_F \leq \|T\|\,\|x\|_E, \quad \text{para todo} \quad x \in E. \tag{2.1c}$$

⟦ De ahora en adelante, se omitirá el subíndice de la norma, porque el contexto indicará si se trata de la norma de un vector o de un operador. ⟧

Proposición 2.5. *Si E, F son espacios normados y si F es un espacio de Banach, entonces $\mathcal{L}(E, F)$ es un espacio de Banach.*

Demostración. Si F es de Banach, sea $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}(E, F)$. La desigualdad (2.1c) implica que

$$\|T_m x - T_n x\| = \|(T_m - T_n)x\| \leq \|T_m - T_n\|\|x\|, \quad \text{para} \quad x \in E.$$

Luego, cada sucesión de vectores $(T_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en F. Sea $Tx := \lim_{n\to\infty} T_n x$ en F. Es fácil comprobar que la aplicación $T : E \to F$ es lineal. Además,

$$\|Tx\| = \lim_{n\to\infty} \|T_n x\| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n x\| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| \, \|x\|.$$

La desigualdad triangular $\big|\|T_m\| - \|T_n\|\big| \leq \|T_m - T_n\|$ muestra que la sucesión numérica $(\|T_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$; y por ende está acotada, así que $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| < \infty$. Por el Corolario 2.3, la aplicación lineal T es continua, con $\|T\| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\|$.

Dado $\varepsilon > 0$, hay $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > N(\varepsilon) \implies \|T_n - T_m\| < \varepsilon$. Entonces

$$\begin{aligned} n > N(\varepsilon) \implies \|T_n - T\| &= \sup\{\, \|T_n x - Tx\| : \|x\| \leq 1 \,\} \\ &\leq \sup\{\, \|T_n x - T_m x\| : \|x\| \leq 1,\ m > N(\varepsilon) \,\} \\ &\leq \sup_{n\in\mathbb{N}}\{\, \varepsilon\|x\| : \|x\| \leq 1 \,\} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Se concluye que $T_n \to T$ en el espacio normado $\mathcal{L}(E, F)$. □

Corolario 2.6. *Si E es un espacio normado, entonces E^* es un espacio de Banach.* ⊟

2.2 El teorema de extensión de Hahn y Banach

Si M es un subespacio de un espacio vectorial E y si $T : M \to F$ es una aplicación lineal, es posible extender T a una aplicación lineal $\widetilde{T} : E \to F$ de muchas maneras; es cuestión de rellenar una base vectorial de M para obtener una base de E y de asignar las imágenes bajo $\widetilde{T}$ de los nuevos vectores básicas de modo arbitrario. Sin embargo, si $T : M \to F$ es una aplicación lineal *continua*, no es evidente cómo asignar estos vectores en F de modo que garantice la continuidad de la aplicación lineal extendida. Un teorema de Hahn y Banach muestra que una extensión lineal continua siempre existe.[2]

Si E es un espacio vectorial *real*, una aplicación $p : E \to \mathbb{R}$ es **sublineal** si

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y), \qquad p(tx) = t\, p(x) \quad \text{para} \quad x, y \in E;\ t \geq 0 \text{ en } \mathbb{R}.$$

Una *seminorma* es evidentemente sublineal.

Lema 2.7 (Hahn y Banach)**.** *Sean E un espacio vectorial real, M un subespacio de E, y $p : E \to \mathbb{R}$ una aplicación sublineal. Si $f : M \to \mathbb{R}$ es una aplicación lineal tal que $f(y) \leq p(y)$ para todo $y \in M$, entonces hay una aplicación lineal $\tilde{f} : E \to \mathbb{R}$ tal que $\tilde{f}\big|_M = f$ y además $\tilde{f}(x) \leq p(x)$ para todo $x \in E$.*

[2] El teorema fue demostrado independientemente, en el caso real, en: Hans Hahn, *Über linearer Gleichungssysteme in linearer Räumen*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **157** (1927), 214–229; y en: Stefan Banach, *Sur les fonctionelles linéaires*, Studia Mathematica **1** (1929), 211–216.

Demostración. Si $M \neq E$, hay un vector $z \in E \setminus M$. Es necesario extender f al subespacio $M + \mathbb{R}z := \{ y + \alpha z : y \in M, \ \alpha \in \mathbb{R} \}$. Se requiere elegir $\tilde{f}(z) \in \mathbb{R}$ tal que

$$\tilde{f}(y + tz) := f(y) + \alpha \, \tilde{f}(z) \leq p(y + \alpha z), \quad \text{para todo} \quad y \in M, \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Por la homogeneidad positiva $p(tx) = t \, p(x)$, basta obtener esta condición para los casos $\alpha = \pm 1$. Entonces, hay que elegir $\tilde{f}(z)$ tal que, para todo $y, y' \in M$, se verifique:

$$f(y) + \tilde{f}(z) \leq p(y + z), \qquad f(y') - \tilde{f}(z) \leq p(y' - z).$$

Entonces, es necesario y suficiente que se cumplan, para todo $y, y' \in M$, las desigualdades

$$f(y') - p(y' - z) \leq \tilde{f}(z) \leq p(y + z) - f(y). \tag{2.2}$$

Es evidentemente necesario que valga

$$f(y') - p(y' - z) \leq p(y + z) - f(y), \quad \text{para todo} \quad y, y' \in M;$$

lo cual es equivalente a la condición

$$f(y) + f(y') \leq p(y + z) + p(y' - z), \quad \text{para} \quad y, y' \in M.$$

Afortunadamente, esto está garantizada por la linealidad de f y la subaditividad de p:

$$f(y) + f(y') = f(y + y') \leq p(y + y') \leq p(y + z) + p(y' - z).$$

Entonces sí es posible elegir $\tilde{f}(z)$ satisfaciendo (2.2), porque el supremo del lado izquierdo es menor o igual al ínfimo del lado derecho.

Si $M + \mathbb{R}z = E$, no hay más que hacer. En el caso contrario, hay que seguir extendiendo f, una dimensión a la vez. Para extender a todo E en general, hay que apelar al Lema de Zorn. Sea $\mathcal{E}_f$ el conjunto de todos los pares (N, g) formado por un subespacio real N tal que $M \subseteq N \subseteq E$ y una aplicación lineal $g \colon N \to \mathbb{R}$ tal que $g|_M = f$ y $g(x) \leq p(x)$ para todo $x \in N$. En $\mathcal{E}_f$ defínase un orden parcial por:

$$(N, g) \preceq (N', g') \quad \text{si} \quad N \subseteq N', \quad g'|_N = g.$$

Cada cadena en $\mathcal{E}_f$ posee una cota superior (la unión creciente de sus subespacios N, con una g bien definida en esa unión). El Lema de Zorn garantiza que $\mathcal{E}_f$ tenga un elemento maximal $(F, \tilde{f})$. Está claro que $F = E$; porque si no, se podría hallar un miembro mayor $(F + \mathbb{R}z, \hat{f})$ al tomar $z \in E \setminus F$ y al extender $\tilde{f}$ como antes. Este elemento maximal $(E, \tilde{f})$ es la extensión buscada. $\square$

Teorema 2.8 (Hahn y Banach)**.** *Sea E es un espacio vectorial real o complejo, sea $M \subseteq E$ un subespacio; y sea $p\colon E \to [0,\infty)$ una seminorma. Si f es un funcional lineal sobre M que cumple $|f(y)| \leq p(y)$ para $y \in M$, entonces hay un funcional lineal $\tilde{f}$ sobre E tal que $\tilde{f}|_M = f$ y además $|\tilde{f}(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in E$.*

Demostración. Para el *caso real*, basta con observar que la seminorma p es sublineal y además cumple $p(-x) = p(x)$; porque la extensión lineal $\tilde{f}\colon E \to \mathbb{R}$ producida por el Lema 2.7 satisface

$$\tilde{f}(x) \leq p(x), \qquad -\tilde{f}(x) = \tilde{f}(-x) \leq p(-x) = p(x),$$

así que $|\tilde{f}(x)| \leq p(x)$, para todo $x \in E$.

En el *caso complejo*, dado un funcional $\mathbb{C}$-lineal $f : M \to \mathbb{C}$, su parte real $\Re f : M \to \mathbb{R}$ es $\mathbb{R}$-lineal y se verifica $f(y) = \Re f(y) - i\,\Re f(iy)$ para $y \in M$.

Sea $\tilde{g}\colon E \to \mathbb{R}$ una extensión $\mathbb{R}$-lineal del funcional real $\Re f$ sobre M. Defínase $\tilde{f}\colon E \to \mathbb{C}$ por $\tilde{f}(x) := \tilde{g}(x) - i\tilde{g}(ix)$. Se verifica fácilmente que $\tilde{f}$ es $\mathbb{C}$-lineal y está claro que $\tilde{f}|_M = f$.

Para ver que $\tilde{f}$ está dominado por la seminorma p, tómese $x \in E$ y escríbase $\tilde{f}(x) =: e^{i\theta(x)}|\tilde{f}(x)|$ con $\theta(x) \in \mathbb{R}$. Entonces $\tilde{f}(e^{-i\theta(x)}x) = e^{-i\theta(x)}\tilde{f}(x) = |\tilde{f}(x)|$ es real y positivo. Por lo tanto, vale

$$|\tilde{f}(x)| = \tilde{g}(e^{-i\theta(x)}x) \leq p(e^{-i\theta(x)}x) = p(x), \quad \text{para todo} \quad x \in E. \qquad \square$$

Corolario 2.9. *Sea E es un espacio localmente convexo. Si M es un subespacio de E, cada funcional lineal continuo $f \in M^*$ puede extenderse a un funcional lineal continuo $\tilde{f} \in E^*$.*

Demostración. La topología de M, como subespacio de E, se define[3] por las restricciones a M de las seminormas continuas sobre E. Si $f \in M^*$, la Proposición 2.2 dice que hay una seminorma continua p sobre E tal que $|f(m)| \leq p(m)$ para $m \in M$. El Teorema 2.8 muestra que f posee una extensión $\tilde{f}\colon E \to \mathbb{C}$, tal que $|f(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in E$. La continuidad de $\tilde{f}$ también sigue de la Proposición 2.2. $\square$

Corolario 2.10. *Sea E un espacio normado. Si M es un subespacio de E, cada funcional lineal continuo $f \in M^*$ se extiende a un funcional lineal continuo $\tilde{f} \in E^*$ tal que $\|\tilde{f}\| = \|f\|$.*

Demostración. La norma de f en M^* es $\|f\| = \sup\{\,|f(m)| : m \in M,\ \|m\| \leq 1\,\}$ por la fórmula (2.1b). Tómese $p(x) := \|f\|\,\|x\|$ para $x \in E$. Entonces hay una extensión $\tilde{f}$ de f en E^* que cumple $|\tilde{f}(x)| \leq \|f\|\,\|x\|$ para todo $x \in E$; esto dice que $\|\tilde{f}\| \leq \|f\|$.

La desigualdad contraria sigue de $\|\tilde{f}\| \geq \sup\{\,|\tilde{f}(m)| : m \in M, \|m\| \leq 1\,\} = \|f\|$. $\square$

[3]Dicha de otra manera: M adquiere la *topología relativa* como parte de E.

Dos corolarios notables del teorema de Hahn y Banach se obtienen al extender ciertos funcionales desde subespacios *unidimensionales*. El primero dice que E^* separa puntos de E (lo cual significa que hay una abundancia de funcionales lineales continuos), si E es localmente convexo. El segundo resultado es la base de una *dualidad* entre E y E^*, en el caso de espacios normados.

Corolario 2.11. *Si E es un espacio localmente convexo, el espacio dual E^* es una colección de funciones continuas que* separa puntos *de E.*

Demostración. Si $x, y \in E$ con $x \neq y$, sea $M := \mathbb{C}(x-y)$; luego, $\dim M = 1$. Defínase un funcional lineal, obviamente continuo, sobre M por $f_{x,y}(t(x-y)) := t$. Entonces hay $\tilde{f}_{x,y} \in E^*$ con $\tilde{f}_{x,y}(x-y) = f_{x,y}(x-y) = 1$, así que $\tilde{f}_{x,y}(x) \neq \tilde{f}_{x,y}(y)$. □

Corolario 2.12. *Si E es un espacio normado, entonces la norma de cualquier vector $x \in E$ está dada por*

$$\|x\| = \sup\{\, |f(x)| : f \in E^*,\ \|f\| \leq 1 \,\}.$$

Demostración. Elíjase $x \in E$. Para $f \in E^*$ con $\|f\| \leq 1$, vale $|f(x)| \leq \|f\|\,\|x\| \leq \|x\|$.

Por otro lado, la aplicación lineal $h_x \colon \lambda x \mapsto \lambda\|x\| : \mathbb{C}x \to \mathbb{C}$ es obviamente continua. Debido a la propiedad $|\lambda|\,\|x\| = \|\lambda x\|$ de la norma, el Teorema 2.8 al tomar $M = \mathbb{C}x$, $p = \|\cdot\|$. La norma de h_x en $(\mathbb{C}x)^*$ es 1. Sea $\tilde{h}_x \in E^*$ una extensión de h_x a E, con $\|\tilde{h}\| = 1$. Entonces $\sup\{\, |f(x)| : \|f\| \leq 1 \,\} \geq |\tilde{h}_x(x)| = |h_x(x)| = \|x\|$. □

De la demostración del Corolario 2.12, vale la pena notar que para todo vector $z \neq 0$ en un espacio normado E, hay un funcional $h_z \in E^*$ tal que $\|h_z\| = 1$ y $h_z(z) = \|z\|$. Es cuestión de extender la forma lineal (continua) $\lambda z \mapsto \lambda\|z\|$ de $\mathbb{C}z$ a todo E.

Corolario 2.13. *Sea E un espacio normado. Si M es un subespacio cerrado de E y si $z \in E \setminus M$, entonces hay un funcional lineal continuo $g_z \in E^*$ tal que $g_z|_M = 0$, $\|g_z\| = 1$ y además $g_z(z) = \inf_{m \in M} \|z - m\| > 0$.*

Demostración. Si $d := \inf\{\, \|z - m\| : m \in M \,\}$ la distancia de z al subespacio M. Fíjese que $d > 0$ porque M es cerrado y $z \notin M$.

El funcional $f_z \colon M + \mathbb{C}z \to \mathbb{C} : m + \lambda z \mapsto \lambda d$ es lineal y continuo, de norma 1, porque $|\lambda d| \leq C\|\lambda z + m\|$ para todo $m \in M$, $\lambda \in \mathbb{C}$ si y sólo si $C \geq 1$.

Sea $g_z \colon E \to \mathbb{C}$ una extensión de f_z, de norma 1. Entonces $g_z(z) = f_z(z) = d$. □

2.3 El teorema de Banach y Steinhaus

Los espacios de Banach y Fréchet son espacios métricos completos. Esta completitud juega un papel importante en la estructura de sus aplicaciones lineales continuas, debido al teorema de Baire, que dice que un espacio métrico *completo* no es magro (es decir, no es "de primera categoría" en la clasificación de Baire).[4] Banach derivó las consecuencias de este teorema, en el contexto de espacios vectoriales que a la vez son espacios métricos completos.

Definición 2.14. Si X es un espacio topológico, una parte $A \subseteq X$ es un conjunto **nunca denso** en X si su clausura tiene interior vacío: $(\overline{A})^\circ = \emptyset$. Una parte $B \subseteq X$ es un conjunto **magro** en X (o *de primera categoría* en X) si es una unión numerable $B = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$ de conjuntos nunca densos.[5]

Proposición 2.15 (Baire)**.** *Si (X,ρ) es un espacio métrico completo no vacío de la forma $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, entonces al menos uno de las clausuras $\overline{A}_n$ tiene interior no vacío.*

Demostración. Supóngase, por el contrario, que $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ donde cada A_n es nunca denso en X. Se construirá una sucesión de Cauchy cuyo punto límite no pertenezca a A_n alguna.

Como $\overline{A}_0$ tiene interior vacío, se ve que $\overline{A}_0 \neq X$; tómese $x_0 \notin \overline{A}_0$. Entonces hay una bola abierta $B_0 := B_\rho(x_0; r_0) := \{\, x \in X : \rho(x, x_0) < r_0 \,\}$ de radio $r_0 < 1$ tal que $B_0 \cap A_0 = \emptyset$.

Como A_1 es nunca denso, hay un punto $x_1 \in B_0 \setminus \overline{A}_1$. Luego, hay una bola abierta $B_1 := B_\rho(x_1; r_1)$ de radio $r_1 < \frac{1}{2}$ con $\overline{B}_1 \subset B_0$ y $B_1 \cap A_1 = \emptyset$.

Por inducción, se construye una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y un juego de bolas abiertas $B_n := B(x_n; r_n)$ de radios $r_n < 2^{-n}$ tales que $\overline{B}_n \subset B_{n-1}$ y $B_n \cap A_n = \emptyset$. La sucesión (x_n) es de Cauchy en X, porque

$$m, n \geq N \implies x_m, x_n \in B_N \implies \rho(x_m, x_n) < 2^{1-N}.$$

Como (X,ρ) es completo, esta sucesión posee un límite $x := \lim_{n\to\infty} x_n \in X$. Como $x_n \in B_N$ para $n \geq N$, se obtiene $x \in \overline{B}_N \subset B_{N-1}$ y por ende $x \notin A_{N-1}$, para todo $N \geq 1$. Esto contradice la hipótesis de que $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. □

[4]El artículo original es: René-Louis Baire, *Sur les fonctions de variables réeles*, Annali di Matematica **3** (1899), 1–123. En este trabajo (su tesis doctoral), Baire clasificó las partes de la recta real $\mathbb{R}$ es dos *categorías*: en la primera, las uniones numerables de conjuntos nunca densos; en la segunda, todas las demás. Mostró que $\mathbb{R}$ mismo es de segunda categoría. En 1914, Felix Hausdorff observó que los argumentos de Baire son válidos en cualquier espacio métrico completo.

[5]La escuela de Bourbaki propuso el término *magro* para denotar un conjunto de la "primera categoría" en el lenguaje de Baire. El nombre sugiere que tales conjuntos serían diminutos, en un sentido topológico. Otra noción de conjunto pequeño en $\mathbb{R}$ es la del conjunto *nulo*, cuya medida de Lebesgue es 0. Sin embargo, es posible expresar la recta real como unión disjunta de dos conjuntos, $\mathbb{R} = A \uplus B$, donde A es magro y B es nulo. Véase el primer capítulo del libro: John C. Oxtoby, *Measure and Category*, Springer, Berlin, 1971.

Corolario 2.16. *Si* (X, ρ) *es un espacio métrico completo y si* $\{ U_n : n \in \mathbb{N} \}$ *es una familia numerable de abiertos densos en* X*, su intersección* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ *es denso en* X*.*

Demostración. Sea $F_n := X \setminus U_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces F_n es cerrado en X con interior vacío (porque si fuera $F_n^\circ \neq \emptyset$, sería $F_n^\circ \cap U_n \neq \emptyset$ ya que U_n es denso en X). Entonces cada F_n es nunca denso en X.

Si $B = \overline{B}_\rho(x; r) := \{ y \in X : \rho(y, x) \leq r \}$ es una bola cerrada de radio $r > 0$, entonces $(B, \rho|_B)$ es también un espacio métrico completo. Si $A_n = B \cap F_n$, entonces A_n es cerrado y nunca denso en B. Por la Proposición 2.15, hay un punto $y \in B \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Luego $y \in B$ pero $y \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$, así que $y \in Y := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$. Se concluye que cada bola cerrada B tiene un punto en Y, así que Y es denso en X. □

La primera aplicación de este teorema topológico es un teorema de Banach y Steinhaus (1927) que se conoce como el **principio de acotación uniforme**.[6]

Teorema 2.17 (Banach y Steinhaus)**.** *Sea* $\mathcal{T} \subset \mathcal{L}(E, F)$ *una familia de aplicaciones lineales continuas de un espacio de Banach* E *en un espacio normado* F*. Si para cada* $x \in E$*, hay un número* $M_x > 0$ *tal que* $\|Tx\| \leq M_x$ *para todo* $T \in \mathcal{T}$*, entonces hay* $M > 0$ *tal que* $\|Tx\| \leq M\|x\|$ *para todo* $T \in \mathcal{T}$*,* $x \in E$*.*

Demostración. Defínase $A_n := \{ x \in E : \|Tx\| \leq n \text{ para todo } T \in \mathcal{T} \}$. La hipótesis dice que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = E$. Fíjese que cada $A_n = \bigcap_{T\in\mathcal{T}} T^{-1}\big(\{ y \in F : \|y\| \leq n \}\big)$ es una parte cerrada de E. Luego, por la Proposición 2.15, hay al menos un $m \in \mathbb{N}$ tal que $(A_m)^\circ \neq \emptyset$.

Por tanto, hay $z \in A_m$, $\delta > 0$ tales que $\|x - z\| < \delta \implies x \in A_m$. Si $T \in \mathcal{T}$, entonces

$$\|y\| < \delta \implies \|Ty\| \leq \|T(y + z)\| + \|T(-z)\| \leq m + \|Tz\| \leq m + M_z.$$

Por la linealidad de T, se obtiene $\|Tx\| \leq M\|x\|$ para $x \in E$, donde la constante $M := (m + M_z)/\delta$ es independiente de $T \in \mathcal{T}$. □

En el teorema anterior, la completitud del dominio E es esencial para poder invocar el teorema de Baire; pero no es necesario que E sea un espacio normado. Si E y F son espacios localmente convexos, una familia de operadores $\mathcal{T} \subset \mathcal{L}(E, F)$ se llama **equicontinua** si, para cada vecindario del origen $V \subset F$, hay un vecindario del origen $U \subset E$ tal que $T(U) \subseteq V$ para todo $T \in \mathcal{T}$. Una versión más general del Teorema 2.17 (con una demostración similar) es la siguiente: *Sea* $\mathcal{T} \subset \mathcal{L}(E, F)$ *una familia de aplicaciones lineales continuas de un*

[6] En 1922, Hahn mostró un caso particular de este teorema usando un argumento por inducción llamado "método de deslizar la joroba" para negar la existencia de un contraejemplo. La innovación de Banach y de Steinhaus fue el empleo del teorema de Baire. El artículo original es: Stefan Banach y Hugo Steinhaus, *Sur le principe de condensation des singularités*, Fundamenta Mathematica **9** (1927), 50–61.

espacio de Fréchet E en un espacio localmente convexo F. Si para cada $x \in E$, el conjunto $\{\, Tx : T \in \mathcal{T} \,\}$ es una parte acotada de F, entonces $\mathcal{T}$ es equicontinua en $\mathcal{L}(E, F)$.

Corolario 2.18. *Si E es un espacio de Banach y si F es un espacio normado, y si $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $\mathcal{L}(E, F)$ tal que el **límite puntual** $Tx := \lim_{n\to\infty} T_n x$ existe para todo $x \in E$, entonces la aplicación lineal T es continua, es decir, $T \in \mathcal{L}(E, F)$.*

Demostración. Está claro que T es lineal, como límite puntual de aplicaciones lineales. Ahora cada sucesión convergente $(T_n x)_n \subset F$ está acotada: hay constantes $M_x > 0$ un para cada $x \in E$, tales que $\|T_n x\| \le M_x$ para $n \in \mathbb{N}$. Al aplicar el Teorema 2.17 a la familia de aplicaciones lineales $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, se obtiene una constante $M > 0$ tal que $\|T_n x\| \le M\|x\|$ para todo $x \in E$, $n \in \mathbb{N}$.

Luego $\|Tx\| \le \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n x\| \le M\|x\|$ para todo $x \in E$; así que T es continua, con $\|T\| \le M$. □

Corolario 2.19. *Si E y F son espacios de Banach y si $B : E \times F \to \mathbb{C}$ es una forma bilineal separadamente continua, entonces B es conjuntamente continua.*

Demostración. La continuidad separada de B significa que $x \mapsto B(x, y)$ queda en E^* para todo $y \in F$ y que $y \mapsto B(x, y)$ queda en F^* para todo $x \in E$. La continuidad conjunta afirma que $x_n \to x$, $y_n \to y$ implican $B(x_n, y_n) \to B(x, y)$. Es fácil mostrar, como en la Proposición 2.2, que B es conjuntamente continua en $E \times F$ si y sólo si es conjuntamente continua en el origen $(0, 0)$.

Tómese dos sucesiones $\{x_n\} \subset E$, $\{y_n\} \subset F$, tales que $x_n \to 0$, $y_n \to 0$. Para $n \in \mathbb{N}$, defínase $T_n \in F^*$ por $T_n(z) := B(x_n, z)$. Ahora $x_n \to 0$ conlleva $B(x_n, z) \to 0$ para cada z fijo, así que hay constantes $M_z > 0$ tales que $|T_n z| \le M_z$ para $n \in \mathbb{N}$, $z \in F$. El Teorema 2.17 muestra que hay $M > 0$ tal que $|T_n z| \le M\|z\|$ para todo $z \in F$. Se concluye que $|B(x_n, y_n)| \le M\|y_n\| \to 0$ cuando $n \to \infty$, así que B es conjuntamente continua en $(0, 0)$. □

2.4 El teorema de la aplicación abierta

Otra consecuencia de la completitud de los espacios de Banach y Fréchet es un teorema sorprendente, debido a Banach,[7] que muestra que una aplicación lineal continua *sobreyectiva*

[7] Este es el Teorema III.3 del libro de Banach, *op. cit.* Es notable que la versión original del teorema antecede la definición de espacio normado (en el capítulo IV): si $T \in \mathcal{L}(E, F)$, la hipótesis es que E es un espacio de Fréchet y la conclusión es que $T(E)$ es magro en F o bien $T(E) = F$; si $T(E)$ no es magro, la demostración establece que T es una aplicación abierta. En lugar de una norma, Banach usó la cantidad $|x| := d(0, x)$ donde d es la métrica que define la topología de E. Para una exposición más moderna, véase el Teorema 2.11 del libro de Rudin [13].

entre dos espacios de Banach (o, más generalmente, de Fréchet) es una *aplicación abierta*. En este caso, tanto el codominio como el dominio deben ser completos.

Teorema 2.20. *Si $T \in \mathcal{L}(E, F)$ es un operador* sobreyectivo *entre dos espacios de Banach E y F, entonces la imagen $T(U)$ de cualquier abierto $U \subseteq E$ es un abierto en F.*

Demostración. Hay que recordar que un parte de un espacio topológico es abierta si y sólo si es un vecindario de cada uno de sus puntos. Entonces, si U es un vecindario de $x \in E$, hay que comprobar que $T(U)$ es un vecindario de $Tx \in F$. Como τ_x y τ_{Tx} son homeomorfismos de E y F respectivamente, es suficiente considerar el caso de $x = 0$.

Sea $B_r \equiv B(0;r) := \{\, x \in E : \|x\| < r \,\}$ la bola abierta en E centrado en el origen y de radio r. Como $U \supseteq B_r$ para algún $r > 0$; y como $T(B_r) = r\,T(B_1)$ por la linealidad de T, basta tomar $U = B_r$ y luego mostrar que $T(B_r)$ es un vecindario de 0 en F; es decir, que hay una bola abierta $B'_s := \{\, y \in F : \|y\| < s \,\}$ con $s > 0$ tal que $T(B_r) \supseteq B'_s$.

La sobreyectividad de T implica que

$$F = T(E) = \bigcup_{n=1}^{\infty} T(B_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{T(B_n)}.$$

Como F es un espacio de Banach, la Proposición 2.15 dice que $\bigl(\overline{T(B_m)}\bigr)^\circ \neq \emptyset$ para algún $m \geq 1$. Entonces $\bigl(\overline{T(B_{r/4})}\bigr)^\circ = (r/4m)\bigl(\overline{T(B_m)}\bigr)^\circ \neq \emptyset$. Hay un punto $z \in F$ y $s > 0$ tal que $\{\, w \in F : \|w - z\| < \frac{1}{2}s \,\} \subseteq \overline{T(B_{r/4})}$. Ahora si $v \in F$ con $\|v\| < s$, entonces

$$v = (z + \tfrac{1}{2}v) - (z + \tfrac{1}{2}v) \in \overline{T(B_{r/4})} + \overline{T(B_{r/4})} \subseteq \overline{T(B_{r/2})}.$$

En consecuencia, hay $s > 0$ tal que $B'_s \subseteq \overline{T(B_{r/2})}$.

Si $y \in \overline{T(B_{r/2})}$, elíjase $x_1 \in B_{r/2}$ tal que $\|y - Tx_1\| < s/2$. Entonces $y - Tx_1 \in \overline{T(B_{r/4})}$. Elíjase $x_2 \in B_{r/4}$ tal que $\|(y - Tx_1) - Tx_2\| < s/4$; y así sucesivamente. Por inducción, es posible elegir $x_n \in B_{r/2^n}$ tal que

$$\left\| y - \sum_{j=1}^{n-1} Tx_j - Tx_n \right\| < \frac{s}{2^n}\,.$$

Los elementos $u_n := \sum_{j=1}^{n} x_j$ forma una sucesión de Cauchy en E, ya que

$$m > n \implies \|u_m - u_n\| \leq \sum_{j=n+1}^{m} \|x_j\| < \frac{r}{2^n}\,.$$

Como E es completo, esta sucesión tiene un límite $x = \lim_{n\to\infty} u_n = \sum_{j=1}^{\infty} x_j$ en E. Además,

$$\|y - Tx\| = \lim_{n\to\infty} \left\| y - \sum_{j=1}^{n} Tx_j \right\| \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{s}{2^n} = 0,$$

así que $y = Tx$. Nótese que

$$\|x\| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\| < \sum_{j=1}^{\infty} \frac{r}{2^j} = r,$$

de manera que $x \in B_r$. Entonces $\overline{T(B_{r/2})} \subset T(B_r)$ y por lo tanto $T(B_r) \supseteq B'_s$, como se quiso demostrar. □

Corolario 2.21. *Una biyección lineal y continua entre dos espacios de Banach es un homeomorfismo.*

Demostración. El inverso de una aplicación abierta biyectiva es continuo. □

Corolario 2.22. *Si E y F son espacios de Banach y si $T \in \mathcal{L}(E, F)$ es biyectivo, hay dos constantes $m > 0$, $M > 0$ tales que $m\|x\|_E \leq \|T(x)\|_F \leq M\|x\|_E$ para todo $x \in E$.*

Demostración. Tómese $M := \|T\|$ y $m := 1/\|T^{-1}\|$. □

► Un corolario importante del teorema de la aplicación abierta dice que se puede determinar la continuidad de una aplicación lineal entre dos espacios de Banach en términos de su *grafo*.

Definición 2.23. Sean E, F dos espacios vectoriales, y sea $T : E \to F$ una aplicación lineal. El **grafo** de T es el subespacio vectorial del producto cartesiano,

$$\mathcal{G}(T) := \{ (x, y) \in E \times F : y = Tx \}.$$

Si E y F son espacios normados, $\mathcal{G}(T)$ es un espacio normado con la **norma del grafo**

$$\|(x, Tx)\| := \|x\|_E + \|Tx\|_F.$$

Esto es simplemente la restricción a $\mathcal{G}(T)$ de la norma $\|(x, y)\| := \|x\|_E + \|y\|_F$ sobre el producto cartesiano $E \times F$.

Teorema 2.24 (Teorema del grafo cerrado)**.** *Sean E y F dos espacios de Banach y sea $T : E \to F$ una aplicación lineal. Entonces T es continua si y sólo si $\mathcal{G}(T)$ es cerrado en $E \times F$.*

Demostración. Si T es continua, entonces $\|x_n - x\|_E \to 0 \implies \|Tx_n - Tx\|_F \to 0$ y en consecuencia $(x_n, Tx_n) - (x, Tx) \to (0, 0)$ en $E \times F$. Luego, el grafo $\mathcal{G}(T)$ es cerrado.

Por otro lado, si $\mathcal{G}(T)$ es un subespacio cerrado del espacio de Banach $E \times F$, entonces $\mathcal{G}(T)$ es también de Banach (con la norma del grafo). Está claro que $(x, Tx) \mapsto x$ es una biyección lineal y continua de $\mathcal{G}(T)$ en E. Por el Corolario 2.21, su inverso $x \mapsto (x, Tx)$ es también continuo. Luego T, la composición de este inverso con la aplicación continua $(x, Tx) \mapsto Tx : \mathcal{G}(T) \to F$, es también continua. □

En la práctica, para averiguar si $\mathcal{G}(T)$ está cerrado, se ejecuta el procedimiento siguiente: *dada una sucesión* $(x_n) \subset E$ *tal que* $x_n \to x$ *en* E & $Tx_n \to y$ *en* F*, hay que determinar si* $y = Tx$. Nótese que una prueba directa de la continuidad de T exigiría mostrar (a) que $x_n \to x$ implica que la sucesión (Tx_n) es convergente; y (b) que además su límite coincide con Tx. La ventaja del teorema del grafo cerrado es que la convergencia de (Tx_n) en F puede tomarse como hipótesis.

Lema 2.25 (Hellinger y Toeplitz)**.** *Si* $T : H \to H$ *es una aplicación lineal sobre un espacio de Hilbert separable* H*, tal que* $\langle y \mid Tx \rangle = \langle Ty \mid x \rangle$ *para todo* $x, y \in H$*, entonces* T *es continua.*

Demostración. Basta mostrar que $\mathcal{G}(T)$ es cerrado en $H \times H$. Tómese una sucesión (x_n) en H tal que $x_n \to x$ y $Tx_n \to y$ en H. Para cada $z \in H$, se verifica

$$\langle z \mid y \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle z \mid Tx_n \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle Tz \mid x_n \rangle = \langle Tz \mid x \rangle = \langle z \mid Tx \rangle,$$

así que $(y - Tx) \in H^{\perp} = \{0\}$. Por lo tanto $y = Tx$, así que $(x, y) = (x, Tx) \in \mathcal{G}(T)$; luego, $\mathcal{G}(T)$ es cerrado. Por el Teorema 2.24, T es continua. $\square$

La importancia del último corolario reside en sus implicaciones para la mecánica cuántica. Un *observable* de un sistema cuántico es un operador T sobre un espacio de Hilbert que cumple la condición $\langle y \mid Tx \rangle = \langle Ty \mid x \rangle$ en su dominio. El Lema de Hellinger y Toeplitz dice que este operador es necesariamente acotado (por ser continuo), si su dominio es todo H. Pero muchas observables de la teoría cuántica son autoadjuntos pero no acotados! La conclusión es que su dominio no puede ser todo H, sino solamente un subespacio denso de H. Un subespacio propio que es denso en H es *incompleto*, de modo que el Teorema 2.24 no está directamente aplicable al caso.

2.5 El teorema de Banach y Alaoglu

Si E es un espacio normado de dimensión finita, el teorema de Heine y Borel garantiza que *la bola unitaria cerrada* $\overline{B}_1(E) := \{\, x \in E : \|x\| \leq 1 \,\}$ es compacta. Pero si E es un espacio normado de dimensión infinita, sucede lo contrario: la bola unitaria cerrada $\overline{B}_1(E)$ no es compacta. Sin embargo, cuando E coincide con el espacio dual F^* de otro espacio normado F, resulta que hay una topología localmente convexa sobre E, más débil que la topología de la norma, en la cual $\overline{B}_1(E)$ sí es compacta.

Proposición 2.26. *Sea* E *un espacio normado de* dimensión finita *n, y sea* $T : \mathbb{C}^n \to E$ *una aplicación lineal biyectiva. Entonces* T *es un homeomorfismo.*

Demostración. Para los efectos de esta demostración, hay que fijar una norma sobre $\mathbb{C}^n$. Conviene usar la norma $\|\alpha\|_1 := \sum_{j=1}^n |\alpha^j|$, para $\alpha = (\alpha^1, \dots, \alpha^n) \in \mathbb{C}^n$. Si $\{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ denota base estándar de $\mathbb{C}^n$, sea $u_j := T(\boldsymbol{e}_j) \in E$ para $j = 1, \dots, n$. Como T es lineal y biyectiva, $\{u_1, \dots, u_n\}$ es una base de E, y el desarrollo del vector $x := T(\alpha)$ con respecto a esta base es $x = \alpha^1 u_1 + \cdots + \alpha^n u_n$.

Sea $m := \inf\{\, \|x\| : \|\alpha\|_1 = 1 \,\}$. Sea $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{C}^n$ donde cada $\|\alpha_k\|_1 = 1$ y los vectores $x_k := T(\alpha_k) \in E$ cumplen $\|x_k\| \to m$. Por la compacidad de la bola unitaria cerrada en $\mathbb{C}^n$, hay una subsucesión convergente $(\alpha_{k_r})_{r\in\mathbb{N}}$ con $\alpha_{k_r} \to \beta$ en $\overline{B}_1(\mathbb{C}^n)$. Si $\beta = (\beta^1, \dots, \beta^n)$, esto dice que $\beta^j = \lim_{r\to\infty} \alpha_{k_r}^j$ para $j = 1, \dots, n$. Ahora $\|\beta\|_1 = \lim_{r\to\infty} \|\alpha_{k_r}\|_1 = 1$, así que $T(\beta) \neq 0 \in E$. Además,

$$\|T(\beta)\| = \left\| \sum_{j=1}^n \beta^j u_j \right\| = \lim_{r\to\infty} \left\| \sum_{j=1}^n \alpha_{k_r}^j u_j \right\| = \lim_{r\to\infty} \|x_{k_r}\| = m,$$

así que $m > 0$. Luego $\|x\| \geq m$ cuando $\|\alpha\|_1 = 1$. Como $\alpha \mapsto T(\alpha) = x$ es lineal, se concluye que $\|T(\alpha)\| \geq m\|\alpha\|_1$, para todo $x \in E$.

Por otro lado, si $x = T(\alpha)$, entonces

$$\|x\| = \left\| \sum_{j=1}^n \alpha^j u_j \right\| \leq \sum_{j=1}^n |\alpha^j|\, \|u_j\| \leq M\|\alpha\|_1$$

donde $M := \max_{1\leq j\leq n} \|u_j\|$.

Las estimaciones $\|T(\alpha)\| \leq M\|\alpha\|_1$ y $\|T^{-1}(x)\|_1 \leq m^{-1}\|x\|$ muestra T y T^{-1} son continuas. □

En particular, al tomar $E = \mathbb{C}^n$, $T = 1_{\mathbb{C}^n}$, cualquier norma sobre $\mathbb{C}^n$ es equivalente a la norma $\|\cdot\|_1$, con estimaciones de la forma $m\|\alpha\|_1 \leq \|\alpha\| \leq M\|\alpha\|_1$ dadas por la demostración anterior. En fin, *todas las normas sobre $\mathbb{C}^n$ son equivalentes*. En un espacio normado E de dimensión finita, la bola unitaria cerrada es entonces homeomorfa a una parte acotada y cerrada de $\mathbb{C}^{\dim E}$, y por ende es compacta.

Nótese también que *un subespacio finitodimensional* de un espacio normado E es automáticamente *completo*, pues es homeomorfo a algún $\mathbb{C}^m$, y por ende es cerrado en E.

Lema 2.27 (Riesz)**.** *Sea E un espacio normado y sea M un subespacio no denso de E. Entonces, para cada $t \in \mathbb{R}$ con $0 < t < 1$, hay un vector $x_t \in E$ tal que $\|x_t\| = 1$ y $d(x_t, M) \geq t$.*

Demostración. Como M no es denso en E, hay un vector $x \in E \setminus M$ a una distancia positiva de M, es decir, $d := d(x, M) = \inf\{\, \|x - m\| : m \in M \,\} > 0$.

Elíjase $m_t \in M$ con $\|x - m_t\| = d/t$. Sea $x_t := (t/d)(x - m_t)$; fíjese que $\|x_t\| = 1$. Si $z \in M$, entonces $(d/t)z + m_t \in M$ también; por lo tanto,

$$\|x_t - z\| = \left\| \frac{t}{d}(x - m_t) - z \right\| = \frac{t}{d} \left\| x - \Bigl(m_t + \frac{d}{t} z\Bigr) \right\| \geq \frac{t}{d}(d) = t. \qquad \square$$

Este último lema de Riesz toma el lugar de la propiedad del punto más cercano de los espacios de Hilbert (la Proposición 1.40). En un espacio de Banach general E, aun cuando M sea un subespacio cerrado de E, no hay garantía de que exista un elemento x_1 de la esfera unitaria de E con $d(x_1, M) = 1$; mientras en un espacio de Hilbert, basta encontrar un elemento de norma 1 en el complemento ortogonal $M^\perp$. El Lema 2.27 dice que hay al menos un juego de elementos x_t de norma 1 que son "casi ortogonales" a M cuando $t \uparrow 1$.

Corolario 2.28. *Si E es un espacio normado infinitodimensional, la bola unitaria cerrada de E no es compacta.*

Demostración. Tómese $x_1 \in E$ con $\|x_1\| = 1$ y luego $x_2 \in E$ con $\|x_2\| = 1$, $\|x_2 - x_1\| \geq \frac{1}{2}$.

En seguida, se puede construir una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ por inducción, como sigue. Sea $M_n := \operatorname{lin}\langle x_1, x_2, \dots, x_n\rangle$ el subespacio generado por los vectores ya elegidos. Como $\dim E = \infty$, el subespacio propio M_n es cerrado (porque es finitodimensional) y por ende no es denso en E. Por el Lema 2.27, existe $x_{n+1} \in E$ con $\|x_{n+1}\| = 1$ y $d(x_{n+1}, M) \geq \frac{1}{2}$.

Esta sucesión $(x_n) \subset \overline{B}_1(E)$ cumple $\|x_m - x_n\| \geq \frac{1}{2}$ si $m \neq n$, así que no puede tener una subsucesión convergente (ni siquiera de Cauchy). Luego $\overline{B}_1(E)$ no es compacto. $\square$

El Corolario 2.28 muestra la dificultad esencial del análisis en dimensión infinita: un espacio normado infinitodimensional *no es localmente compacto*. (Un vecindario compacto de un punto $x \in E$ contendría una bola cerrada $\overline{B}(x;\delta)$ que sería también compacta; por traslación y dilatación, la bola unitaria de E sería compacta.) De hecho, ningún espacio vectorial topológico infinitodimensional es localmente compacto: véase el Teorema 1.22 del libro de Rudin [13].

► No obstante, en muchos casos es posible rescatar la compacidad de la bola unitaria de E, al cambiar la topología para que esta bola no sea un vecindario de 0 en la nueva topología. Esto exige que la nueva topología tenga menos vecindarios de 0 que la topología original, y también menos conjuntos abiertos: es decir, se trata de una topología *más débil* que la original.

Definición 2.29. Sea E un espacio localmente convexo, con espacio dual E^*. La **topología débil** $\sigma(E, E^*)$ es la topología más débil sobre E tal que cada forma lineal $f \in E^*$ sea continua. Esta topología está dada por la colección de seminormas $\{\, x \mapsto |f(x)| : f \in E^* \,\}$, que es una familia separante en vista del Corolario 2.11. Denótese por E_σ el espacio vectorial E dotado con la topología $\sigma(E, E^*)$; este es un espacio localmente convexo, y la aplicación identidad $1_E \colon E \to E_\sigma$ es continua.[8]

Sobre el espacio dual E^* se puede definir la **topología débil estelar** $\sigma(E^*, E)$ como la topología más débil tal que cada evaluación $f \mapsto f(x)$ sea continua. Una colección de seminormas (obviamente separante) que define esta topología es $\{\, f \mapsto |f(x)| : x \in E \,\}$. Denótese por E^*_σ el espacio vectorial E^* dotado con la topología $\sigma(E^*, E)$; este es un espacio localmente convexo, y la aplicación identidad $1_{E^*} \colon E^* \to E^*_\sigma$ es continua.[9]

Teorema 2.30 (Banach y Alaoglu)**.** *Si E es un espacio normado, la bola unitaria cerrada $\overline{B}_1(E^*) := \{\, f \in E^* : \|f\| \leq 1 \,\}$ del espacio dual E^* es compacta en la topología débil estelar $\sigma(E^*, E)$.*

Demostración. Sea $\overline{D}(0; r) := \{\, \alpha \in \mathbb{C} : |\alpha| \leq r \,\}$ el disco cerrado en $\mathbb{C}$ centrado en el origen, de radio r. Entonces

$$f \in \overline{B}_1(E^*) \implies |f(x)| \leq \|x\| \implies f(x) \in \overline{D}(0; \|x\|) \quad \text{para todo} \quad x \in E.$$

Si $G := \prod_{x \in E} \overline{D}(0; \|x\|)$ es el producto cartesiano de todos estos discos cerrados, entonces hay una inclusión $\iota : \overline{B}_1(E^*) \hookrightarrow G$ definida por $\iota(f) := (f(x))_{x \in E}$.

El *teorema de Tijonov* de la topología general dice que un producto cartesiano de compactos es compacto. En particular, G es compacto en la topología del producto cartesiano. Esta es la topología más débil tal que todas las proyecciones coordenadas $g \mapsto g(x) : G \to \overline{D}(0; \|x\|)$ sean continuas. Luego $\iota \colon \overline{B}_1(E^*) \to G$ es un homeomorfismo[10] si $\overline{B}_1(E^*)$ tiene la topología $\sigma(E^*, E)$. Basta mostrar, entonces, que $\iota(\overline{B}_1(E^*))$ es cerrado en G.

Si $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ es una red en $\overline{B}_1(E^*)$ con $\iota(f_\lambda) \to g \in G$, entonces $f_\lambda(x) \to g(x)$ para todo $x \in E$. La función $x \mapsto g(x)$ es lineal: para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, vale

$$g(\alpha x + \beta y) = \lim_\lambda f_\lambda(\alpha x + \beta y) = \lim_\lambda \alpha\, f_\lambda(x) + \beta\, f_\lambda(y) = \alpha\, g(x) + \beta\, g(y).$$

Además,

$$|g(x)| = \lim_\lambda |f_\lambda(x)| \leq \sup_{\lambda \in \Lambda} |f_\lambda(x)| \leq \|x\|,$$

[8] En general, una familia de funciones $f_\alpha \colon X \to X_\alpha$ cuyo dominio común es un conjunto X y cuyos codominios son espacios topológicos X_α define una *topología débil* sobre X, al declarar que una base para esta topología es la colección de intersecciones finitas de preimágenes $f_\alpha^{-1}(U_\alpha)$, donde cada U_α es un abierto en X_α. Si X posee una topología original para la cual las funciones f_α son continuas, la nueva topología es más débil que la original. En consecuencia, la identidad $1_X : X \to X$ es continua si el dominio tiene la topología original y el codominio tiene la topología débil.

[9] Hay una leve ambigüedad en esta notación. Si E^{**} denota el espacio dual de E^*, la notación E^*_σ podría referirse a la topología $\sigma(E^*, E)$ o bien a $\sigma(E^*, E^{**})$. Como se verá luego, estas topologías coinciden en algunos casos pero no en todos. Oportunamente se volverá sobre este asunto.

[10] La aplicación ι es inyectiva pero no sobreyectiva; es un homeomorfismo entre su dominio y su imagen.

así que g es continua con $\|g\| \leq 1$; se concluye que $g \in \iota(\overline{B}_1(E^*))$. Por lo tanto, $\iota(\overline{B}_1(E^*))$ es cerrado en G.

En resumen: $\iota(\overline{B}_1(E^*))$ es compacto; en consecuencia, $\overline{B}_1(E^*)$ es compacto en E^*_σ. □

La demostración del teorema de Banach y Alaoglu es sencilla, una vez que se dispone del teorema topológico de Tijonov. La compacidad de un producto cartesiano finito o numerable de compactos se demuestra usando argumentos ordinarios de inducción. Lo novedoso del teorema de Tijonov es el uso de productos cartesianos con un conjunto índice cualquiera (cuya existencia depende del axioma de elección).[11]

2.6 Dualidad en espacios de Banach

Si E es un espacio de Banach, su espacio dual E^* es otro espacio de Banach. Las normas de estos espacios exhiben una cierta reciprocidad, en vista de la Definición 2.4 y el Corolario 2.12:

$$\begin{aligned} \text{Para } f \in E^*, \quad \|f\| &= \sup\{\, |f(x)| : x \in E,\ \|x\| \leq 1 \,\}, \\ \text{para } x \in E, \quad \|x\| &= \sup\{\, |f(x)| : f \in E^*,\ \|f\| \leq 1 \,\}. \end{aligned}$$

Conviene, entonces, estudiar los de espacios de Banach en pares (E, E^*). En general, estos dos espacios no son isomorfos, con una excepción muy importante: un espacio de Hilbert es isomorfo a su propio espacio dual. (Un detalle notable es que este isomorfismo no es $\mathbb{C}$-lineal, sino *semilineal* solamente.)

Teorema 2.31 (Riesz)**.** *Si H es un espacio de Hilbert, su espacio dual H^* es isomorfo a H como espacio de Banach, mediante la aplicación semilineal que lleva $y \in H$ en el funcional lineal $x \mapsto \langle y \mid x \rangle$.*

Demostración. Defínase $V : H \to H^*$ por $Vy(x) := \langle y \,|\, x \rangle$. Está claro que V es semilineal: $V(\alpha y_1 + \beta y_2) = \bar\alpha V y_1 + \bar\beta V y_2$ para $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $y_1, y_2 \in H$. En vista del Corolario 2.3, que también es válido para aplicaciones semilineales), la continuidad de V es consecuencia de

$$\begin{aligned} \|V\| &= \sup\{\, \|Vy\| : \|y\| \leq 1 \,\} \\ &= \sup\{\, \big|\langle y \mid x \rangle\big| : \|y\| \leq 1, \|x\| \leq 1 \,\} \\ &\leq \sup\{\, \|y\|\,\|x\| : \|y\| \leq 1, \|x\| \leq 1 \,\} = 1, \end{aligned}$$

mediante la desigualdad de Schwarz.

[11] En su libro, Banach demostró el Teorema 2.30 (*op. cit*, Teorema XI.13) para el caso en donde E es un espacio de Banach *separable*. El matemático canadiense Alaoglu usó el teorema de Tijonov para mostrar el caso general, en: Leonidas Alaoglu, *Weak topologies of normed linear spaces*, Annals of Mathematics **41** (1940), 252–267.

Además, para todo $y \neq 0$, vale

$$\|Vy\| = \sup\{\, \big|\langle y \mid x\rangle\big| : \|x\| \leq 1 \,\} \geq \left|\left\langle y \;\middle|\; \frac{y}{\|y\|}\right\rangle\right| = \frac{\|y\|^2}{\|y\|} = \|y\|,$$

así que $\|Vy\| = \|y\|$ para todo $y \in H$. Entonces V es isométrica y en particular, es inyectiva.

Falta mostrar que V es sobreyectiva. Si $f \in H^*$ con $f \neq 0$, el subespacio propio $M := \ker f \leq H$ es cerrado. Entonces existe $z \in M^\perp$ con $\|z\| = 1$. Fíjese que $f(z) \neq 0$.

Si $y \in M^\perp$, sea $\alpha := f(y)/f(z)$; entonces

$$y - \alpha z \in M^\perp \quad \text{con} \quad f(y - \alpha z) = f(y) - \alpha f(z) = 0,$$

así que $y - \alpha z \in M \cap M^\perp = \{0\}$ y por ende $y = \alpha z$. Se ve entonces que $M^\perp = \mathbb{C}z$. Luego, cada $x \in H$ es de la forma $x = m + \beta z$ con $m \in M$, $\beta \in \mathbb{C}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(m + \beta z) = \beta f(z) = \beta f(z)\|z\|^2 \\ &= \langle \overline{f(z)}\, z \mid \beta z\rangle = \langle \overline{f(z)}\, z \mid m + \beta z\rangle = \langle w \mid x\rangle, \end{aligned}$$

donde $w := \overline{f(z)}\, z$. Esto dice que $f = Vw$, así que V es sobreyectivo.

Ahora V es una biyección isométrica, de modo que V^{-1} es también una isometría. $\square$

El espacio normado H^* admite un producto escalar, definido por la fórmula

$$\langle Vy \mid Vz\rangle := \langle z \mid y\rangle \quad \text{para todo} \quad y, z \in H, \tag{2.3}$$

porque $H^* = \{\, Vy : y \in H \,\}$. La aplicación V entrelaza los productos internos de H y H^*. El cambio de orden de los dos vectores y, z en el producto se debe a la semilinealidad: $V(\alpha y) = \bar{\alpha} Vy$ para $y \in H$.

Una biyección semilineal entre dos espacios de Hilbert cualesquiera que cumple una ecuación de la forma (2.3), se llama un **operador semiunitario** (o bien *antiunitario*).

Definición 2.32. Sea E un espacio de Banach y sea E^* su espacio dual. El espacio dual de E^* se llama el **dual doble** de E, denotado por E^{**}. Si $x \in E$, $y \in E^*$, $z \in E^{**}$, se suele escribir

$$\langle y, x\rangle := y(x); \quad \text{pero también} \quad \langle y, z\rangle := z(y). \tag{2.4}$$

En los dos casos, los corchetes angulares $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denotan una forma *bilineal* (no sesquilineal) sobre el producto cartesiano de un espacio de Banach con su espacio dual. Dícese que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un **apareamiento de dualidad**, o simplemente una **dualidad**, entre los dos espacios de marras.

► A continuación, se exhiben diversos ejemplos de dualidades entre pares de espacios de Banach no necesariamente isomorfos. Los primeros ejemplos son espacios de sucesiones.

Definición 2.33. Sean E y F dos espacios de Banach de sucesiones, es decir, subespacios algebraicos de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. En el caso de que

$$\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle := \sum_{k=0}^{\infty} y_k x_k \quad \text{converge absolutamente,} \quad \text{para todo } \boldsymbol{x} \in E,\ \boldsymbol{y} \in F, \tag{2.5}$$

se puede afirmar que $F \subseteq E^*$, al identificar $\boldsymbol{y} \in F$ con el funcional $\boldsymbol{x} \mapsto \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle$; igualmente, se puede afirmar que $E \subseteq F^*$, al identificar $\boldsymbol{x} \in E$ con el funcional $\boldsymbol{y} \mapsto \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle$.

Estas identificaciones *a veces* dan lugar a isomorfismos isométricos $F \simeq E^*$ y $E \simeq F^*$. Sin embargo, hace falta *un análisis caso por caso* para determinar si cada elemento de E^* pertenece al subespacio F, o bien si cada elemento de F^* pertenece al subespacio E; además, hay que comprobar la coincidencia de las normas.

Proposición 2.34. *El espacio dual de $\underline{c}_0$ es isométricamente isomorfa a $\underline{\ell}^1$.*

Demostración. Para $\boldsymbol{x} \in \underline{c}_0$, $\boldsymbol{y} \in \underline{\ell}^1$, se verifica

$$\sum_{k=0}^{\infty} |x_k y_k| = \sum_{k=0}^{\infty} |x_k||y_k| \leq \|\boldsymbol{x}\|_\infty \sum_{k=0}^{\infty} |y_k| = \|\boldsymbol{x}\|_\infty \|\boldsymbol{y}\|_1, \tag{2.6}$$

así que el funcional lineal $\boldsymbol{x} \mapsto \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle$ es continuo, con norma (en $\underline{c}_0^*$) menor o igual a $\|\boldsymbol{y}\|_1$.

Los vectores básicos $\boldsymbol{e}_k \in \mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$ introducidos en el Ejemplo 1.36 permiten simplificar los cálculos. En primer lugar, fíjese que los desarrollos $\boldsymbol{x} = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \boldsymbol{e}_k$ y $\boldsymbol{y} = \sum_{k=0}^{\infty} y_k \boldsymbol{e}_k$ son convergentes en $\underline{c}_0$ y en $\underline{\ell}^1$ respectivamente:

$$\begin{aligned} \Big\| \boldsymbol{x} - \sum_{k=0}^{n} x_k \boldsymbol{e}_k \Big\|_\infty &= \Big\| \sum_{k=n+1}^{\infty} x_k \boldsymbol{e}_k \Big\|_\infty \leq \sup_{k \geq n+1} |x_k| \to 0 \quad \text{cuando} \quad n \to \infty, \\ \Big\| \boldsymbol{y} - \sum_{k=0}^{n} y_k \boldsymbol{e}_k \Big\|_1 &= \Big\| \sum_{k=n+1}^{\infty} y_k \boldsymbol{e}_k \Big\|_1 \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |y_k| \to 0 \quad \text{cuando} \quad n \to \infty. \end{aligned}$$

Tómese $f \in \underline{c}_0^*$ y defínase $y_k := f(\boldsymbol{e}_k)$ para $k \in \mathbb{N}$. La continuidad de f garantiza que

$$f(\boldsymbol{x}) = f\Big(\sum_{k=0}^{\infty} x_k \boldsymbol{e}_k \Big) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k f(\boldsymbol{e}_k) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k y_k = \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle. \tag{2.7}$$

Como $|f(\boldsymbol{x})| = |\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle| \leq \|\boldsymbol{x}\|_\infty \|\boldsymbol{y}\|_1$ por (2.6), se concluye que $\|f\| \leq \|\boldsymbol{y}\|_1$.

Para comprobar la igualdad $\|f\| = \|\boldsymbol{y}\|_1$, basta hallar una sucesión $(\boldsymbol{z}^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ de vectores de norma 1 en $\underline{c}_0$ tal que $\lim_{n\to\infty} |f(\boldsymbol{z}^{(n)})| = \|\boldsymbol{y}\|_1$. Se puede suponer que $f \neq 0$, así que $\boldsymbol{y} \neq 0$ en $\underline{\ell}_1$. Defínase[12]

$$z_k^{(n)} := \operatorname{signo} y_k \, [\![k \leq n]\!].$$

Fíjese que $|z_k^{(n)}| = 1$ cuando $y_k \neq 0$, así que $\|\boldsymbol{z}^{(n)}\|_\infty = 1$. Además, está claro que $|f(\boldsymbol{z}^{(n)})| = f(\boldsymbol{z}^{(n)}) = \sum_{k=0}^n |y_k| \to \|\boldsymbol{y}\|_1$ cuando $n \to \infty$. Por lo tanto,

$$\|\boldsymbol{y}\|_1 = \lim_{n\to\infty} |f(\boldsymbol{z}^{(n)})| \leq \limsup_{n\to\infty} \|f\| \, \|\boldsymbol{z}^{(n)}\|_\infty = \|f\|.$$

Esto muestra que $\boldsymbol{y} \in \underline{\ell}^1$ y además que $\|f\| = \|\boldsymbol{y}\|_1$.

Se concluye que la correspondencia $f \mapsto \boldsymbol{y}$ es una isometría biyectiva entre $\underline{c}_0^*$ y $\underline{\ell}^1$. □

Proposición 2.35. *El espacio dual de $\underline{\ell}^1$ es isométricamente isomorfa a $\underline{\ell}^\infty$.*

Demostración. Si $\boldsymbol{y} \in \underline{\ell}^1$, $\boldsymbol{z} \in \underline{\ell}^\infty$, el estimado (2.6) garantiza que $|\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\rangle| \leq \|\boldsymbol{y}\|_1 \|\boldsymbol{z}\|_\infty$. El funcional lineal $\boldsymbol{y} \mapsto \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\rangle$ es continuo sobre $\underline{\ell}^1$, con norma $\leq \|\boldsymbol{z}\|_\infty$.

Tómese $g \in (\underline{\ell}^1)^*$ y defínase $z_k := g(\boldsymbol{e}_k)$ para $k \in \mathbb{N}$. La continuidad de g muestra que

$$g(\boldsymbol{y}) = g\biggl(\sum_{k=0}^\infty y_k \boldsymbol{e}_k\biggr) = \sum_{k=0}^\infty y_k g(\boldsymbol{e}_k) = \sum_{k=0}^\infty y_k z_k = \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\rangle.$$

Como $|g(\boldsymbol{y})| = |\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\rangle| \leq \|\boldsymbol{y}\|_1 \|\boldsymbol{z}\|_\infty$ por (2.6), se concluye que $\|g\| \leq \|\boldsymbol{z}\|_\infty$.

Además, $|z_k| = |g(\boldsymbol{e}_k)| \leq \|g\| \, \|\boldsymbol{e}_k\|_1 = \|g\|$ para todo $k \in \mathbb{N}$, así que $\boldsymbol{z} \in \underline{\ell}^\infty$ con $\|\boldsymbol{z}\|_\infty \leq \|g\|$. Entonces $\|g\| = \|\boldsymbol{z}\|_\infty$, así que la correspondencia $g \mapsto \boldsymbol{z}$ es una isometría biyectiva entre $(\underline{\ell}^1)^*$ y $\underline{\ell}^\infty$. □

Corolario 2.36. *El dual doble de $\underline{c}_0$ es isométricamente isomorfa a $\underline{\ell}^\infty$.* ⊟

Proposición 2.37. *Si $1 < p < \infty$ y $q = p/(p-1)$, el espacio dual de $\underline{\ell}^p$ es isométricamente isomorfa a $\underline{\ell}^q$.*

Demostración. Si $\boldsymbol{x} \in \underline{\ell}^p$, $\boldsymbol{y} \in \underline{\ell}^q$, la desigualdad de Hölder (1.13) implica que

$$\sum_{k=0}^\infty |x_k y_k| \leq \|\boldsymbol{x}\|_p \|\boldsymbol{y}\|_q, \tag{2.8}$$

así que el funcional lineal $\boldsymbol{x} \mapsto \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}\rangle$ es continuo, con norma en $(\underline{\ell}^p)^*$ no mayor que $\|\boldsymbol{y}\|_q$.

[12]Conviene recordar que $\operatorname{signo} 0 = 0$ y que $\operatorname{signo} \lambda := |\lambda|/\lambda$ si $\lambda \neq 0$ en $\mathbb{C}$, de modo que $\lambda \operatorname{signo} \lambda = |\lambda|$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$.

Tómese $f \in (\underline{\ell}^p)^*$ y defínase $y_k := f(\boldsymbol{e}_k)$ para $k \in \mathbb{N}$. El desarrollo $\boldsymbol{x} = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \boldsymbol{e}_k$ converge en la norma de $\underline{\ell}^p$. El cálculo (2.7) demuestra que $f(\boldsymbol{x}) = \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle$ y por ende $|f(\boldsymbol{x})| = |\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle| \leq \|\boldsymbol{x}\|_p \|\boldsymbol{y}\|_q$ en vista de (2.8), así que $\|f\| \leq \|\boldsymbol{y}\|_q$.

Ahora defínase $\boldsymbol{z}^{(n)} \in \underline{\ell}^p$ por

$$z_k^{(n)} := |y_k|^{q-1} \operatorname{signo} y_k \, [\![k \leq n]\!].$$

En este caso, se obtiene

$$\|\boldsymbol{z}^{(n)}\|_p^p = \sum_{k=0}^{n} |y_k|^{(q-1)p} = \sum_{k=0}^{n} |y_k|^q = f(\boldsymbol{z}^{(n)}).$$

En consecuencia, vale

$$f\left(\frac{\boldsymbol{z}^{(n)}}{\|\boldsymbol{z}^{(n)}\|_p}\right) = \left(\sum_{k=0}^{n} |y_k|^q\right)^{1-1/p} = \left(\sum_{k=0}^{n} |y_k|^q\right)^{1/q}.$$

Entonces

$$\|\boldsymbol{y}\|_q = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{k=0}^{n} |y_k|^q\right)^{1/q} \leq \sup\{\, |f(\boldsymbol{x})| : \|\boldsymbol{x}\|_p \leq 1 \,\} = \|f\|.$$

Esto muestra que $\boldsymbol{y} \in \underline{\ell}^q$ y además que $\|f\| = \|\boldsymbol{y}\|_q$. Se concluye que la correspondencia $f \mapsto \boldsymbol{y}$ es una isometría biyectiva entre $(\underline{\ell}^p)^*$ y $\underline{\ell}^q$. □

Corolario 2.38. *Si $1 < p < \infty$, el dual doble de $\underline{\ell}^p$ coincide con el propio $\underline{\ell}^p$.*

Demostración. La Proposición anterior muestra que $(\underline{\ell}^p)^*$ es la totalidad de funcionales lineales $\boldsymbol{x} \mapsto \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle$ con $\boldsymbol{y} \in \underline{\ell}^q$. Como $q = p/(p-1)$ es equivalente a $p = q/(q-1)$, al cambiar los índices $p \leftrightarrow q$, la misma Proposición muestra que $(\underline{\ell}^q)^*$ es la totalidad de funcionales lineales $\boldsymbol{y} \mapsto \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle$ con $\boldsymbol{z} \in \underline{\ell}^p$.

A la luz de (2.4), esto dice que cada elemento de $(\underline{\ell}^p)^{**} \simeq (\underline{\ell}^q)^*$ es una evaluación de funcionales $f \mapsto f(\boldsymbol{z})$, para $f \in (\underline{\ell}^p)^*$, en algún vector $\boldsymbol{z} \in \underline{\ell}^p$. Dicho de otra manera, la identificación como subespacio del bidual $\underline{\ell}^p \hookrightarrow (\underline{\ell}^p)^{**}$ es sobreyectiva. □

► En espacios de funciones integrables, la correspondencia de dualidad es, desde luego, la integral del producto de dos funciones. Es necesario averiguar, en cada caso particular, si la identificación de un espacio concreto con el dual de otro espacio es una isometría biyectiva.

Definición 2.39. Sean E y F dos espacios de Banach de funciones medibles sobre un espacio de medida σ-finita $(X, \mathcal{F}, \mu)$. Si, para cada $f \in E$ y $h \in F$, la integral

$$\langle h, f \rangle := \int_X h(x) f(x) \, d\mu(x) \tag{2.9}$$

converge absolutamente, entonces $F \subseteq E^*$ al identificar $h \in F$ con el funcional $f \mapsto \langle h, f \rangle$ en E^*; de igual manera $E \subseteq F^*$, al identificar $f \in E$ con el funcional $h \mapsto \langle h, f \rangle$ en F^*.

Proposición 2.40. *Si $1 < p < \infty$ y si $q = p/(p-1)$, el espacio dual de $L^p(X, \mu)$ es isométricamente isomorfa a $L^q(X, \mu)$.*

Demostración. Considérese primero el caso en que $\mu(X)$ *es finito.*

Si $f \in L^p(X, \mu)$ y $h \in L^q(X, \mu)$, la desigualdad de Hölder (1.13) implica que

$$\int_X |h(x) f(x)| \, d\mu(x) \leq \|f\|_p \|h\|_q, \tag{2.10}$$

así que el funcional lineal $f \mapsto \langle h, f \rangle$ es continuo, con norma no mayor que $\|h\|_q$.

Ahora sea $T \in L^p(X, \mu)^*$ un funcional lineal continuo. Si $\mathbf{1}_A$ denota la *función indicatriz*[13] de $A \in \mathcal{F}$, definida como $\mathbf{1}_A(x) := [\![x \in A]\!]$, la fórmula $\nu_T(A) := T(\mathbf{1}_A)$ define, por la linealidad de T, una medida *finitamente aditiva* sobre $\mathcal{F}$.

Si $A = \biguplus_{k \in \mathbb{N}} A_k$ es una unión disjunta de conjuntos en $\mathcal{F}$), entonces la serie positiva $\sum_{k=0}^{\infty} \mu(A_k) = \mu(A) \leq \mu(X)$ es convergente, así que

$$\left\| \mathbf{1}_A - \sum_{k=0}^{n} \mathbf{1}_{A_k} \right\|_p = \left(\sum_{k>n} \mu(A_k) \right)^{1/p} \to 0 \quad \text{cuando } n \to \infty.$$

La continuidad de T implica entonces que $\nu_T(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \nu_T(A_k)$. Luego ν_T es una medida *σ-aditiva* sobre $\mathcal{F}$.

Si $\mu(A) = 0$, entonces $\mathbf{1}_A = 0$ en $L^p(X, \mu)$, así que $\nu_T(A) = T(\mathbf{1}_A) = 0$. Esto dice que $\nu_T \ll \mu$ (la medida ν_T es absolutamente continua con respecto a μ). Por el teorema de Radon y Nikodým, hay un único elemento $h \in L^1(X, \mu)$ tal que

$$T(\mathbf{1}_A) = \nu_T(A) = \int_A h(x) \, d\mu(x) = \int_X h(x) \mathbf{1}_A(x) \, d\mu(x) = \langle h, \mathbf{1}_A \rangle.$$

Por linealidad, se obtiene $T(f) = \langle h, f \rangle$ para toda *función simple* f. Como las funciones simples forman un subespacio denso de $L^p(X, \mu)$, la continuidad de T implica $T(f) = \langle h, f \rangle$ para todo $f \in L^p(X, \mu)$.

[13] Otro término usado es *función característica*, con la notación $\chi_A(x)$. Es preferible reservar este término para otro uso: en la teoría de probabilidad, una "función característica" es la transformada de Fourier de una distribución de probabilidad.

Defínase una sucesión $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $L^p(X,\mu)$ por

$$k_n(x) := |h(x)|^{q-1}\,\mathrm{signo}(h(x))\,[\![|h(x)| \leq n]\!].$$

El cálculo

$$\|k_n\|_p^p = \int_{|h(x)|\leq n} |h(x)|^{(q-1)p}\,d\mu(x) = \int_{|h(x)|\leq n} |h(x)|^q\,d\mu(x) \leq n^q \mu(X) < \infty$$

comprueba que $k_n \in L^p(X,\mu)$ para cada n. Luego

$$T\biggl(\frac{k_n}{\|k_n\|_p}\biggr) = \frac{\langle h, k_n\rangle}{\|k_n\|_p} = \biggl(\int_{|h(x)|\leq n} |h(x)|^q\,d\mu(x)\biggr)^{1/q},$$

así que

$$\|h\|_q = \lim_{n\to\infty}\biggl(\int_{|h(x)|\leq n} |h(x)|^q\,d\mu(x)\biggr)^{1/q} \leq \sup\{\,|T(f)| : \|f\|_p \leq 1\,\} = \|T\|.$$

Esto muestra que $h \in L^q(X,\mu)$ y además que $\|T\| \geq \|h\|_q$. Por otro lado, el estimado (2.10) implica que $|T(f)| = |\langle h, f\rangle| \leq \|f\|_p\|h\|_q$, así que $\|T\| = \|h\|_q$. Se concluye que la correspondencia $T \mapsto h$ es una isometría biyectiva entre $L^p(X,\mu)^*$ y $L^q(X,\mu)$, en el caso de que $\mu(X) < \infty$.

En el caso general, sea $X = \uparrow\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ (unión creciente) con $\mu(X_n) < \infty$ para cada n. Si $f \in L^p(X,\mu)$, el teorema de convergencia dominada muestra que $f = \lim_{n\to\infty}(f\mathbf{1}_{X_n})$ en la norma de $L^p(X,\mu)$. Si $T \in L^p(X,\mu)^*$, entonces $T(f) = \lim_{n\to\infty} T(f\mathbf{1}_{X_n})$.

Los argumentos del caso finito muestran que $f\big|_{X_n} \mapsto T(f\mathbf{1}_{X_n})$ es un funcional lineal y continuo sobre $L^p(X_n,\mu)$, y por ende

$$T(f\mathbf{1}_{X_n}) = \int_{X_n} h_n(x) f(x)\,d\mu(x) \quad \text{para algún} \quad h_n \in L^q(X_n,\mu).$$

Como $X_n \subseteq X_{n+1}$, está claro que $h_{n+1}\mathbf{1}_{X_n} = h_n$ casi por doquier. Sin perder generalidad, se puede suponer (por inducción) que $h_{n+1}(x) = h_n(x)$ para todo $x \in X_n$. Entonces hay una función $h\colon X \to \mathbb{C}$ bien definida por $h(x) := h_n(x)$ si $x \in X_n$.

El teorema de convergencia dominada muestra que

$$\|h\|_q = \lim_{n\to\infty} \|h_n\|_q \leq \|T\|,$$

así que $h \in L^q(X,\mu)$ y además $h_n \to h$ en la norma $\|\cdot\|_q$. Entonces

$$T(f) = \lim_{n\to\infty} T(f\mathbf{1}_{X_n}) = \lim_{n\to\infty}\langle h_n, f\rangle = \langle h, f\rangle \quad \text{para todo} \quad f \in L^p(X,\mu).$$

Finalmente, obsérvese que

$$\|T\| \leq \limsup_{n\to\infty}\bigl\|T\big|_{L^p(X_n,\mu)}\bigr\| = \lim_{n\to\infty}\|h_n\|_q = \|h\|_q\,. \qquad \square$$

Definición 2.41. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ una función de variación acotada. Dícese que f está *normalizada* si $f(a) = 0$ y si f es continua desde la derecha: $\lim_{\varepsilon\downarrow 0} f(x + \varepsilon) = f(x)$ para $a \leq x < b$. El subespacio de $BV[a, b]$ de funciones normalizadas en esta forma se denota por $BVN[a, b]$. La norma de $f \in BVN[a, b]$ es $V(f)$, su *variación total*.

Proposición 2.42. *El espacio dual de $C[a, b]$ es isométricamente isomorfa a $BVN[a, b]$.*

Demostración. Cualquier función $g \in BVN[a, b]$ define una **integral de Stieltjes** sobre el intervalo $[a, b]$. Dada una función $f : [a, b] \to \mathbb{C}$, se define

$$\int_a^b f(t)\, dg(t) := \lim_{\mathcal{P}} \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)\big(g(t_j) - g(t_{j-1})\big),$$

para $\mathcal{P} := (t_0, t_1, \dots, t_n)$ una partición de $[a, b]$, con $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$; los puntos $\xi_1, \dots, \xi_n$ cumplen $t_{j-1} \leq \xi_j \leq t_j$ para cada j; y se postula que las sumas a la derecha convergen en $\mathbb{C}$ para particiones $\mathcal{P}$ cada vez más finas.[14] Este postulado se verifica en el caso de que f sea continua. La receta $T_g(f) := \int_a^b f(t)\, dg(t)$ define un funcional lineal T_g sobre $C[a, b]$. En vista de la estimación

$$\begin{aligned} |T_g(f)| &\leq \limsup_{\mathcal{P}} \sum_{j=1}^{n} \big| f(\xi_j)\big(g(t_j) - g(t_{j-1})\big)\big| \\ &\leq \|f\|_\infty \limsup_{\mathcal{P}} \sum_{j=1}^{n} \big|g(t_j) - g(t_{j-1})\big| =: \|f\|_\infty V(g), \end{aligned}$$

el funcional T_g es continuo con $\|T_g\| \leq V(g)$.

Por otro lado, sea $T \in C[a, b]^*$ un funcional lineal y continuo cualquiera. Si $f \in C[a, b]$ y si $\mathcal{P}$ es una partición de $[a, b]$, defínase la *función escalonada* $f_{\mathcal{P}}$ por

$$f_{\mathcal{P}}(t) := \begin{cases} f(a) & \text{si } a \leq t \leq t_1, \\ f(t_{j-1}) & \text{si } t_{j-1} < t \leq t_j \text{ con } j \geq 2. \end{cases}$$

Como f es *uniformemente continua* en $[a, b]$, para cada $\varepsilon > 0$ hay un $\delta > 0$ tal que

$$|\mathcal{P}| := \max_{1\leq j\leq n} (t_j - t_{j-1}) < \delta \implies \sup_{a\leq t\leq b} |f(t) - f_{\mathcal{P}}(t)| < \varepsilon. \tag{2.11}$$

Las funciones $f_{\mathcal{P}}$ no son continuas, pero pertenecen al espacio $B[a, b]$ de funciones acotadas sobre $[a, b]$, con la norma $\|\cdot\|_\infty$. Este espacio normado incluye $C[a, b]$ como subespacio.

[14]Las particiones forman una *red*, dirigido por el orden parcial de refinamiento de particiones.

Por el teorema de Hahn y Banach, el funcional $T \in C[a,b]^*$ se extiende a $\widetilde{T} \in B[a,b]^*$ tal que $\|\widetilde{T}\| = \|T\|$. Defínase $g(x) := \widetilde{T}(\mathbf{1}_{[a,x]})$ para $a < x \leq b$, y sea $g(a) := 0$.

Por la linealidad del funcional $\widetilde{T}$, se obtiene

$$\widetilde{T}(f_{\mathcal{P}}) = \widetilde{T}\biggl(f(a)\mathbf{1}_{[a,t_1]} + \sum_{j=2}^{n} f(t_{j-1})\mathbf{1}_{(t_{j-1},t_j]}\biggr) = \sum_{j=1}^{n} f(t_{j-1})\bigl[g(t_j) - g(t_{j-1})\bigr]. \quad (2.12)$$

Al escribir $e^{i\theta_j} := \operatorname{signo}\bigl(g(t_j) - g(t_{j-1})\bigr)$, se obtiene la estimación

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}\bigl|g(t_j) - g(t_{j-1})\bigr| &= \sum_{j=1}^{n} e^{i\theta_j}\widetilde{T}(\mathbf{1}_{(t_{j-1},t_j]}) = \widetilde{T}\biggl(\sum_{j=1}^{n} e^{i\theta_j}\mathbf{1}_{(t_{j-1},t_j]}\biggr) \\ &\leq \|\widetilde{T}\|\biggl\|\sum_{j=1}^{n} e^{i\theta_j}\mathbf{1}_{(t_{j-1},t_j]}\biggr\|_\infty = \|\widetilde{T}\| = \|T\|.\end{aligned}$$

Se concluye que g es una función de variación acotada, con $V(g) \leq \|T\|$.

Si $(\mathcal{P}_n)$ es una sucesión de particiones con $\mathcal{P}_{n+1} \supseteq \mathcal{P}_n$ para cada n y $|\mathcal{P}_n| \to 0$, la desigualdad (2.11) implica que $f_{\mathcal{P}_n} \to f$ uniformemente sobre $[a,b]$; es decir, $f_{\mathcal{P}_n} \to f$ en la norma de $B[a,b]$. Entonces

$$T(f) = \lim_{n\to\infty} \widetilde{T}(f_{\mathcal{P}_n}) = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_{\mathcal{P}_n}(t)\,dg(t) = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_{\mathcal{P}_n}(t)\,dg(t) = \int_a^b f(t)\,dg(t),$$

debido a (2.12) y la convergencia uniforme de $f_{\mathcal{P}_n}$ a f.

La función $g \in BV[a,b]$ no está determinada de manera única por T; sin embargo, se puede mostrar que entre las funciones $h \in BV[a,b]$ tales que $h(a) = 0$, hay exactamente una que cumple $\int_a^b f(t)\,dh(t) = \int_a^b f(t)\,dg(t)$ para todo $f \in C[a,b]$ y que sea además continua desde la derecha. Se puede entonces suponer que g es continua desde la derecha, en cuyo caso $T \mapsto g : C[a,b]^* \to BVN[a,b]$ es una biyección isométrica. $\square$

En el caso de los espacios de Banach $E = C[a,b]$, $E^* = BVN[a,b]$, nótese que el apareamiento de dualidad se escribe como $\langle g, f\rangle := \int_a^b f(t)\,dg(t)$.

2.7 Dualidad y reflexividad

Definición 2.43. Sean E un espacio de Banach y E^{**} su dual doble. El **encaje natural** de E en E^{**} es la aplicación lineal $J\colon E \to E^{**}$ definido por

$$\langle y, Jx\rangle := \langle y, x\rangle, \quad \text{es decir,} \quad Jx\colon y \mapsto y(x), \quad \text{para todo } x \in E,\ y \in E^*. \qquad (2.13)$$

Obsérvese que J es una isometría lineal.

En efecto, J es una isometría (y por ende es inyectivo), porque

$$\begin{aligned}\|Jx\| &= \sup\{\,|\langle y, Jx\rangle| : y \in E^*,\ \|y\| \leq 1\,\} \\ &= \sup\{\,|\langle y, x\rangle| : y \in E^*,\ \|y\| \leq 1\,\} = \|x\|.\end{aligned}$$

La primera igualdad es la definición de la norma de Jx en E^{**}; la última igualdad es un corolario al teorema de Hahn y Banach.

Dícese que que E es un espacio **reflexivo** si la isometría $J : E \to E^{**}$ es *sobreyectiva*; es decir, si $J(E) = E^{**}$.

Ejemplo 2.44. Sea H un espacio de Hilbert. El Teorema 2.31 muestra que $H \simeq H^*$ mediante la biyección semilineal $V : H \to H^*$ definida por $\langle Vy, x\rangle := \langle y \mid x\rangle$. Como ya se notó en (2.3), H^* es también un espacio de Hilbert con producto escalar $\langle Vx \,|\, Vy\rangle := \langle y \,|\, x\rangle$. Luego hay otra isometría semilineal biyectiva $W : H^* \to H^{**}$ definida, a su vez, por $\langle Vy, W(Vz)\rangle := \langle Vx \mid Vy\rangle$. Entonces

$$\langle Vy, W(Vx)\rangle = \langle y \mid x\rangle = \langle Vy, x\rangle,$$

así que la composición $J = WV : H \to H^{**}$ coincide con la isometría lineal (2.13). En particular, J es biyectivo. Por lo tanto, cualquier espacio de Hilbert es reflexivo. $\lozenge$

Ejemplo 2.45. La Proposición 2.37 y su Corolario 2.38 muestran que el espacio $\underline{\ell}^p$ es reflexivo, para $1 < p < \infty$. Sea $q := p/(p-1)$. Al usar la fórmula de dualidad (2.5) para sucesiones en las identificaciones $(\underline{\ell}^p)^* \simeq \underline{\ell}^q$ y $(\underline{\ell}^q)^* \simeq \underline{\ell}^p$, se ve que J se identifica con el operador de identidad $I \in \mathcal{L}(\underline{\ell}^p)$. $\lozenge$

Ejemplo 2.46. De igual manera, la Proposición 2.40 demuestra que $L^p(X, \mu)$ es reflexivo, para $1 < p < \infty$; de nuevo, se puede identificar J con el operador de identidad sobre $L^p(X, \mu)$, al usar la receta de dualidad (2.9). $\lozenge$

Ejemplo 2.47. Del Corolario 2.36, se ve que $(\underline{c}_0)^{**} \simeq \underline{\ell}^\infty$. En este caso, el uso de (2.5) para las dos identificaciones $(\underline{c}_0)^* \simeq \underline{\ell}^1$ y $(\underline{\ell}^1)^* \simeq \underline{\ell}^\infty$ hace evidente que J se identifica con la *inclusión* $\underline{c}_0 \hookrightarrow \underline{\ell}^\infty$. En este caso, J es una isometría inyectiva (se usa la misma norma sobre los dos espacios) pero no es sobreyectiva. Por lo tanto, $\underline{c}_0$ *no es reflexivo*. $\lozenge$

► El concepto de dualidad se extiende a los *operadores* entre espacios normados mediante el concepto clave de **transposición** de operadores.

Definición 2.48. Sean E y F dos espacios normados y sea $A \in \mathcal{L}(E, F)$. El **operador transpuesto** de A es la aplicación lineal $A^\mathsf{T} : F^* \to E^*$ definida por $A^\mathsf{T} w := w \circ A$. Así,

$$\langle A^\mathsf{T} w, x\rangle := \langle w, Ax\rangle, \quad \text{para todo} \quad x \in E,\ w \in F^*.$$

Sean H y K dos espacios de Hilbert y sea $B \in \mathcal{L}(H, K)$. El **operador adjunto** de B es la aplicación lineal $B^* \colon K \to H$ definida como $B^* := V_H^{-1} B^\top V_K$, donde $V_H \colon H \to H^*$ y $V_K \colon K \to K^*$ son las identificaciones dadas por el Teorema 2.31. De esta manera,

$$\langle B^* y \mid x \rangle = \langle y \mid Bx \rangle \quad \text{para todo} \quad x \in H,\ y \in K.$$

Obsérvese que la correspondencia $A \mapsto A^\top$ es *lineal* pero que $B \mapsto B^*$ es *semilineal*.

Proposición 2.49. (a) *Si E y F son dos espacios normados y si $A \in \mathcal{L}(E, F)$, entonces su transpuesto es continua: $A^\top \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$ con $\|A^\top\| = \|A\|$.*

(b) *Si H y K son dos espacios de Hilbert y si $B \in \mathcal{L}(H, K)$, entonces su adjunto es continuo: $B^* \in \mathcal{L}(K, H)$ con $\|B^*\| = \|B\|$.*

Demostración. Ad (a): El Corolario 2.12 del teorema de Hahn y Banach implica que

$$\begin{aligned} \|A^\top\| &= \sup\{\, \|A^\top w\| : w \in F^*,\ \|w\| \le 1 \,\} \\ &= \sup\{\, |\langle A^\top w, x \rangle| : \|w\| \le 1,\ \|x\| \le 1 \,\} \\ &= \sup\{\, |\langle w, Ax \rangle| : \|x\| \le 1,\ \|w\| \le 1 \,\} \\ &= \sup\{\, \|Ax\| : x \in E,\ \|x\| \le 1 \,\} = \|A\|. \end{aligned}$$

Ad (b): En un espacio de Hilbert, vale $\|x\| = \sup\{\, |\langle z \mid x \rangle| : \|z\| \le 1 \,\}$, por la desigualdad de Schwarz. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \|B^*\| &= \sup\{\, \|B^* y\| : y \in K,\ \|y\| \le 1 \,\} \\ &= \sup\{\, |\langle B^* y \mid x \rangle| : \|y\| \le 1,\ \|x\| \le 1 \,\} \\ &= \sup\{\, |\langle y \mid Bx \rangle| : \|x\| \le 1,\ \|y\| \le 1 \,\} \\ &= \sup\{\, \|Bx\| : x \in H,\ \|x\| \le 1 \,\} = \|B\|. \end{aligned} \qquad \square$$

De la última demostración, se obtiene una fórmula útil para la norma de un operador B entre dos espacios de Hilbert:

$$\|B\| = \sup\{\, |\langle y \mid Bx \rangle| : \|x\| \le 1,\ \|y\| \le 1 \,\}. \tag{2.14}$$

► La dualidad entre espacios de Banach (o de Hilbert) también conlleva correspondencias entre subespacios de un lado y espacios cocientes del otro lado. En dimensión finita, estas correspondencias forman un tema conocido del álgebra lineal.

Definición 2.50. Dado un espacio normado E, sea M un subespacio de E y sea N un subespacio del dual E^*. Los **anuladores** respectivos de M y de N son los subespacios $M^\perp \subseteq E^*$ y ${}^\perp N \subseteq E$, respectivamente, definidos por

$$M^\perp := \{\, y \in E^* : \langle y, x\rangle = 0 \text{ para todo } x \in M \,\} = \bigcap_{x\in M} \ker Jx\,;$$
$${}^\perp N := \{\, x \in E : \langle y, x\rangle = 0 \text{ para todo } y \in N \,\} = \bigcap_{y\in N} \ker y.$$

Fíjese[15] que ${}^\perp N$ es un *subespacio cerrado* de E. También, $M^\perp$ es un subespacio cerrado de E^*_σ —es decir, $M^\perp$ es *cerrado en la topología débil estelar* $\sigma(E^*, E)$ generado por las evaluaciones $\{\, Jx : x \in E \,\}$. (Como consecuencia, $M^\perp$ es también cerrado en la topología de la norma de E^*.)

Notación. Si $B \subseteq E^*$, la notación $\overline{B}^\sigma$ denotará la clausura de B en E^*_σ; está claro que su clausura $\overline{B}$ en la norma de E^* cumple $\overline{B} \subseteq \overline{B}^\sigma$, ya que $\sigma(E^*, E)$ es más débil que la topología de la norma y por tanto cada conjunto cerrado en E^*_σ es también cerrado en la norma de E^*; pero no al revés.

Lema 2.51. *Si E es un espacio normado, el dual de E^*_σ es el subespacio $J(E)$ de E^{**}.*

Demostración. Si $f : E^* \to \mathbb{C}$ es una aplicación lineal no nula, entonces f es continua para la topología $\sigma(E^*, E)$ sobre E si y sólo si hay $x \neq 0$ en E tal que $|f(y)| \leq |\langle y, x\rangle|$ para todo $y \in E^*$.

Entonces los hiperplanos $\ker f$ y $(\mathbb{C}x)^\perp$ de E^* coinciden, así que $f = \alpha Jx = J(\alpha x)$ para alguna constante $\alpha \in \mathbb{C}$. Por lo tanto, $(E^*_\sigma)^* = J(E)$. □

Proposición 2.52. *Sea E un espacio normado; tómese subespacios $M \subseteq E$ y $N \subseteq E^*$. Entonces ${}^\perp(M^\perp) = \overline{M} \subseteq E$, mientras $({}^\perp N)^\perp = \overline{N}^\sigma \subseteq E^*$.*

Demostración. Está claro que $M \subseteq {}^\perp(M^\perp)$ y $N \subseteq ({}^\perp N)^\perp$. Como ${}^\perp(M^\perp)$ y $({}^\perp N)^\perp$ son subespacios cerrados de E y de E^*_σ respectivamente, se ve que $\overline{M} \subseteq {}^\perp(M^\perp)$ y $\overline{N}^\sigma \subseteq ({}^\perp N)^\perp$.

Si $z \notin \overline{M}$, el Corolario 2.13 proporciona un elemento $g_z \in M^\perp$ tal que $\langle g_z, z\rangle > 0$; entonces $z \notin {}^\perp(M^\perp)$. Se concluye que $\overline{M} = {}^\perp(M^\perp)$.

Si $w \notin \overline{N}^\sigma$, hay un funcional lineal $h \in (E^*_\sigma)^*$ tal que $h|_N = 0$ pero $h(w) \neq 0$, por el Corolario 2.9; es cuestión de extender el funcional lineal $N + \mathbb{C}w \to \mathbb{C} : n + \lambda w \mapsto \lambda$, el cual es continuo para la topología $\sigma(E^*, E)$ porque N es cerrado, a todo el espacio E^*_σ.

[15] El núcleo de un funcional lineal continuo es cerrado; y la intersección de una familia de cerrados es también cerrada.

Por el Lema 2.51, hay un vector $x_h \in E$ tal que $h = Jx_h$. Por construcción, $Jx_h \in N^\perp$, así que $x_h \in {}^\perp N$. Por otro lado, vale $\langle w, x_h \rangle = \langle w, Jx_h \rangle = h(w) \neq 0$, así que $w \notin ({}^\perp N)^\perp$. Se concluye que $\overline{N}^\sigma = ({}^\perp N)^\perp$. ☐

Proposición 2.53. *Sea E un espacio de Banach. Si E^* es reflexivo, entonces E es reflexivo.*

Demostración. Sean $J : E \to E^{**}$ y $J_1 : E^* \to E^{***}$ los encajes naturales. Decir que E^* es reflexivo es afirmar que J_1 es sobreyectivo.

Está claro que $J^\top J_1 \in \mathcal{L}(E^*, E^*)$. Para $y \in E^*$, $x \in E$, se verifica

$$\langle J^\top J_1 y, x \rangle = \langle J_1 y, Jx \rangle = \langle y, Jx \rangle = \langle y, x \rangle,$$

así que $J^\top J_1 = 1_{E^*}$ (el operador de identidad sobre E^*). La sobreyectividad de J_1 entonces implica la inyectividad de $J^\top$.

Si $w \in J(E)^\perp \subseteq E^{***}$, entonces $\langle J^\top w, x \rangle = \langle w, Jx \rangle = 0$ para todo $x \in E$, así que $J^\top w = 0$ en E^*, lo cual implica que $w = 0$ en E^{***}. En resumen, $J(E)^\perp = \{0\}$. La completitud de E conlleva la completitud de $J(E)$ —porque J, por ser una isometría, manda sucesiones de Cauchy en E a sucesiones de Cauchy en $J(E)$— así que $J(E)$ es un subespacio *cerrado* de E^{**}. La reflexividad de E sigue por las igualdades

$$J(E) = \overline{J(E)} = {}^\perp(J(E)^\perp) = {}^\perp\{0\} = E^{**}.$$ ☐

Corolario 2.54. *Los espacios de Banach $\underline{\ell}^1$ y $\underline{\ell}^\infty$* no son *reflexivos.* ⊟

Definición 2.55. Si $A \in \mathcal{L}(E, F)$, denótese su **imagen**[16] por $\operatorname{Ran} A := A(E) \subseteq F$. En contraste con el núcleo $\ker A$, el cual es un subespacio cerrado de E (debido a la continuidad de A), la imagen $\operatorname{Ran} A$ no es necesariamente cerrada en F.

Proposición 2.56. *Sean E y F dos espacios de Banach, y sea $A \in \mathcal{L}(E, F)$. Entonces:*

(a) $\ker A^\top = (\operatorname{Ran} A)^\perp \subseteq F^*$; $\ker A = {}^\perp(\operatorname{Ran} A^\top) \subseteq E$;

(b) $A^\top$ *es uno-a-uno si y sólo si* $\operatorname{Ran} A$ *es denso en* F*;*

(c) A *es uno-a-uno si y sólo si* $\operatorname{Ran} A^\top$ *es denso en* E^*_σ.

[16] La notación Ran es evidentemente un anglicismo, al igual que la notación ker para un núcleo. La abreviatura Im es inaceptable, por su uso frecuente para denotar la parte imaginaria de un número complejo. El vocablo español *rango* tampoco debe usarse para referirse al espacio imagen, porque más bien denota la dimensión de este espacio; este es otra fuente de confusión lingüística, porque en inglés las dos palabras *range* (la imagen) y *rank* (la dimensión de la imagen) se traducen como *rango* en castellano.

Demostración. Ad (a): Es suficiente notar las equivalencias:

$$
\begin{aligned}
w \in \ker A^\top &\iff \langle A^\top w, x\rangle = 0 \text{ para todo } x \in E \\
&\iff \langle w, Ax\rangle = 0 \text{ para todo } x \in E \qquad \iff w \in (\operatorname{Ran} A)^\perp , \\
x \in \ker A &\iff \langle w, Ax\rangle = 0 \text{ para todo } w \in F^* \\
&\iff \langle A^\top w, x\rangle = 0 \text{ para todo } w \in F^* \quad \iff x \in {}^\perp(\operatorname{Ran} A^\top).
\end{aligned}
$$

Ad (b, c): Basta comprobar estas equivalencias:

$$
\begin{aligned}
\ker A^\top = \{0\} &\iff (\operatorname{Ran} A)^\perp = \{0\} \quad \iff \overline{\operatorname{Ran} A} = {}^\perp((\operatorname{Ran} A)^\perp) = F\,; \\
\ker A = \{0\} &\iff {}^\perp(\operatorname{Ran} A^\top) = \{0\} \quad \iff \overline{\operatorname{Ran} A^\top}^{\sigma} = ({}^\perp(\operatorname{Ran} A^\top))^\perp = E^*.
\end{aligned}
$$

□

► El estudio abstracto de espacios normados en dualidad posee otro aspecto de importancia: las correspondencias entre los subespacios de un lado y los espacios cocientes del orto lado.

Definición 2.57. Sea E un espacio normado y sea M un subespacio *cerrado* de E. En el espacio vectorial cociente E/M se define una **norma cociente** por

$$\|x + M\| := \inf_{m \in M} \|x + m\|.$$

Es fácil comprobar que esta es una norma sobre el espacio vectorial cociente E/M. Si E es de Banach, el espacio cociente E/M es completo en esta norma.

Proposición 2.58. *Si E es un espacio de Banach y M un subespacio cerrado de E, hay dos isomorfismos isométricos:*

$$M^* \simeq E^*/M^\perp \quad y \quad (E/M)^* \simeq M^\perp.$$

Demostración. Ad (a): Sea $I : M \to E$ el operador de inclusión. Para $f \in M^*$, hay $y \in E^*$ tal que $y|_M = f$ y $\|y\| = \|f\|$, por el Corolario 2.10. Como $\langle I^\top y, m\rangle = \langle y, Im\rangle = \langle f, m\rangle$ para $m \in M$, se ve que $I^\top y = f$. Se concluye que $I^\top \colon E^* \to M^*$ es sobreyectivo.

La Proposición 2.56 muestra que $\ker I^\top = (\operatorname{Ran} I)^\perp = M^\perp$, así que $I^\top$ induce una biyección $V \colon E^*/M^\perp \to M^* : y + M^\perp \mapsto I^\top y$. Fíjese que, para cada $w \in M^\perp$,

$$\|V(y + M^\perp)\| = \|I^\top y\| = \sup\{\, |\langle y + w, m\rangle| : m \in M,\ \|m\| \le 1 \,\} \le \|y + w\|,$$

así que $\|V(y + M^\perp)\| \le \|y + M^\perp\|$ para todo $y \in E^*$.

Por otro lado, al tomar $f \in M^*$, $y \in E^*$ tales que $y|_M = f$, $\|y\| = \|f\|$, se obtiene $\|y + M^\perp\| \le \|y\| = \|f\| = \|I^\top y\| = \|V(y + M^\perp)\|$. Se concluye que V es una isometría. Como $\operatorname{Ran} V = \operatorname{Ran} I^\top = M^*$, se ve que V es biyectiva.

Ad (b): Sea $\eta\colon E \to E/M$ la aplicación cociente. Se ve que $\|\eta x\| \leq \|x\|$ para $x \in E$, por la definición de la norma cociente. Si $y \in (E/M)^*$, $m \in M$, entonces $\langle \eta^\mathsf{T} y, m\rangle = \langle y, \eta m\rangle = \langle y, M\rangle = 0$ (la coclase M es el cero de E/M), así que $\operatorname{Ran} \eta^\mathsf{T} \subseteq M^\perp$.

Si $w \in M^\perp$, la aplicación lineal $h\colon x + M \mapsto \langle w, x\rangle$ está bien definida y continua; de modo que $h \in (E/M)^*$. Además, vale $\langle w, x\rangle = \langle h, \eta x\rangle = \langle \eta^\mathsf{T} h, x\rangle$ para $x \in E$, así que $\eta^\mathsf{T} h = w$. De esta manera, se ha comprobado que $\operatorname{Ran} \eta^\mathsf{T} = M^\perp$. Por la Proposición 2.56, la sobreyectividad de η muestra que η^T es uno-a-uno. Por lo tanto, η^T es una *biyección lineal* entre $(E/M)^*$ y $M^\perp$.

Si $y \in (E/M)^*$, entonces

$$|\langle \eta^\mathsf{T} y, x\rangle| = |\langle y, \eta x\rangle| \leq \|y\|\,\|\eta x\| \leq \|y\|\,\|x\| \quad \text{para todo} \quad x \in E.$$

Luego $\|\eta^\mathsf{T} y\| \leq \|y\|$. Por otro lado, tómese cualquier $x \in E$ tal que $\|x + M\| \leq 1$. Para cada $\varepsilon > 0$, hay $z \in (x + M)$ tal que $\|z\| < 1 + \varepsilon$. Por lo tanto,

$$|\langle y, x + M\rangle| = |\langle y, \eta x\rangle| = |\langle y, \eta z\rangle| = |\langle \eta^\mathsf{T} y, z\rangle| \leq \|\eta^\mathsf{T} y\|\,\|z\| < (1 + \varepsilon)\|\eta^\mathsf{T} y\|.$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, se concluye que $\|y\| \leq \|\eta^\mathsf{T} y\|$, para cada $y \in (E/M)^*$. Se ha comprobado que $\eta^\mathsf{T}\colon (E/M)^* \to M^\perp$ es una isometría biyectiva. $\square$

Proposición 2.59. *Sea E un espacio de Banach reflexivo y sea M un subespacio cerrado de E. Entonces M también es un espacio de Banach reflexivo.*

Demostración. Obsérvese que $M^{**} \simeq (E^*/M^\perp)^* \simeq M^{\perp\perp} \subseteq E^{**}$, aprovechando los dos isomorfismos isométricos de la Proposición 2.58. En adelante, se identificará M^{**} con el subespacio $M^{\perp\perp}$ de E^{**}.

Tómese $h \in M^{**}$. Hay que mostrar que $h \in J(M)$, donde $J : E \to E^{**}$ es el encaje natural; nótese que $J(M) \subseteq M^{\perp\perp}$. Si $I : M \to E$ denota la inclusión, el funcional hI^T es un elemento de E^{**}. Como $E^{**} = J(E)$ por hipótesis, se concluye que $hI^\mathsf{T} = Jx$ para algún $x \in E$.

De hecho, x pertenece a M; porque si no, habría un elemento $w \in M^\perp$ con $\langle w, x\rangle \neq 0$, por el Corolario 2.13. Entonces $I^\mathsf{T} w = 0$ en M^* porque $w \in M^\perp$, y por ende $\langle w, x\rangle = \langle w, Jx\rangle = h(I^\mathsf{T} w) = 0$. Esta inconsistencia muestra que tal w no existe: se concluye que $x \in M$.

La demostración de la Proposición anterior comprueba que $\operatorname{Ran} I^\mathsf{T} = M^*$. Por lo tanto, la relación deseada $h = Jx$ —como elementos de M^{**}— emerge de las igualdades:

$$\langle I^\mathsf{T} y, h\rangle = \langle y, Jx\rangle = \langle y, x\rangle = \langle y, Ix\rangle = \langle I^\mathsf{T} y, x\rangle = \langle I^\mathsf{T} y, Jx\rangle \quad \text{si} \quad y \in E^*. \qquad \square$$

2.8 Ejercicios sobre operadores lineales y espacios duales

Ejercicio 2.1. Si E, F son espacios normados y $T \in \mathcal{L}(E, F)$, verificar que las tres expresiones de (2.1) para $\|T\|$ son equivalentes. Concluir que $T \mapsto \|T\|$ es una norma sobre $\mathcal{L}(E, F)$.

Ejercicio 2.2. Si E, F, G son espacios normados, si $T \in \mathcal{L}(E, F)$ y $S \in \mathcal{L}(F, G)$, demostrar que $ST \in \mathcal{L}(E, G)$ y que $\|ST\| \leq \|S\| \, \|T\|$.

Ejercicio 2.3. Si $[a, b] \subset \mathbb{R}$ es un intervalo compacto, sea $C[a, b]$ el espacio vectorial de funciones continuas $f : [a, b] \to \mathbb{C}$. Si $a \leq t \leq b$, demostrar que la **evaluación** $\varepsilon_t : C[a, b] \to \mathbb{C}$ definida por $\varepsilon_t(f) := f(t)$ es una forma lineal y continua sobre $C[a, b]$ con su norma usual $\|\cdot\|_\infty$; pero que ε_t no es continua sobre $C[a, b]$ dotado con la norma $\|\cdot\|_2$.

Ejercicio 2.4. Si E, F son espacios localmente convexos, y si $m = \dim E$ es finita, demostrar que cada aplicación lineal $T : E \to F$ es automáticamente continua. Concluir que cualquier biyección lineal de E en $\mathbb{C}^m$ es un homeomorfismo. En particular, comprobar que dos normas cualesquiera sobre $\mathbb{C}^m$ son equivalentes.

Ejercicio 2.5. Si $f \in \mathcal{F}(\mathbb{C})$, el espacio de Bargmann y Segal, con serie de Taylor $f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n$, mostrar que $\|f\|^2 = \sum_{n=0}^\infty n! \, |a_n|^2$ y que

$$|f(z)| \leq \|f\| \, e^{|z|^2} \quad \text{para todo} \quad z \in \mathbb{C}.$$

⟦ Indicación: Desigualdad de Schwarz. ⟧ Concluir que la evaluación $\varepsilon_w : f \mapsto f(w)$ es una forma lineal continua sobre $\mathcal{F}(\mathbb{C})$.

Sea $e_w(z) := e^{\bar{w} z}$ para $z, w \in \mathbb{C}$. Verificar que $e_w \in \mathcal{F}(\mathbb{C})$ y que $\langle e_w \mid f \rangle = f(w)$ para todo $w \in \mathbb{C}$.

Ejercicio 2.6. Sea E un espacio de Banach y sea $\mathcal{L}(E) \equiv \mathcal{L}(E, E)$ el espacio de operadores lineales continuos sobre E. Sean $A, B \in \mathcal{L}(E)$ y defínase $T_{A,B} : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E) : X \mapsto AXB$. Demostrar que $T_{A,B} \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$, con $\|T_{A,B}\| \leq \|A\| \, \|B\|$.

Ejercicio 2.7. La fórmula

$$Tf(x) := \int_0^x f(t) \, dt$$

define una aplicación lineal $T : C[0, 1] \to C[0, 1]$. Demostrar que T es continua y que $\|T\| = 1$. Demostrar por inducción que

$$T^n f(x) = \int_0^x \frac{1}{(n-1)!} (x - t)^{n-1} f(t) \, dt$$

y concluir que $\|T^n\| \leq 1/n!$ para $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 2.8. Defínase un par de *operadores de corrimiento* $U, V \in \mathcal{L}(\underline{\ell}^p)$ por las fórmulas $(U\boldsymbol{x})_n := x_{n+1}$ y $(V\boldsymbol{x})_n := x_{n-1}$ $[\![n > 0]\!]$; en otras palabras,

$$\begin{aligned} U &: (x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \mapsto (x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n+1}, \dots), \\ V &: (x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \mapsto (0, x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, \dots). \end{aligned}$$

Calcular las normas[17] $\|U\|_{p\to p}$ y $\|V\|_{p\to p}$, para cualquier p con $1 \leq p \leq \infty$.

Ejercicio 2.9. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $k\colon X \times X \to \mathbb{C}$ una función medible tal que

$$\sup_{x\in X} \int_X |k(x,y)|\, d\mu(y) \leq C, \qquad \sup_{y\in X} \int_X |k(x,y)|\, d\mu(x) \leq C, \quad \text{para algún} \quad C > 0.$$

Defínase

$$Kf(x) := \int_X k(x,y) f(y)\, d\mu(y)$$

cuando esta integral converge absolutamente.

Demostrar que $Kf \in \mathcal{L}^p(X, \mu)$ para todo $f \in \mathcal{L}^p(X, \mu)$, con $\|Kf\|_p \leq C\|f\|_p$, así que $\|K\|_{p\to p} \leq C$, para cualquier $1 \leq p \leq +\infty$.

$[\![$ Indicación: En el caso $1 < p < +\infty$, aplicar la desigualdad de Hölder a la función $y \mapsto |k(x,y) f(y)| = |k(x,y)|^{1/p} |f(y)| |k(x,y)|^{1/q}$. $]\!]$

Ejercicio 2.10. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida σ-finita y sea $g\colon X \to \mathbb{C}$ una función medible acotada. Si $1 \leq p \leq \infty$, sea $M_g\colon L^p(X,\mu) \to L^p(X,\mu)$ el *operador de multiplicación* $f \mapsto fg$. Demostrar que M_g es continuo y calcular su norma en $\mathcal{L}(L^p(X,\mu))$.

Ejercicio 2.11. Calcular la norma de la aplicación identidad $I\colon L^p[0,1] \to L^r[0,1]$, en el caso $1 \leq r \leq p \leq \infty$. ¿Qué ocurre si $r > p$?

Ejercicio 2.12. Sea M un subespacio cerrado de un espacio normado E. Defínase

$$\|x + M\| := \inf\{\, \|x + m\| : m \in M \,\}, \quad \text{para } x \in E.$$

Verificar que esta es una norma sobre el espacio vectorial cociente E/M, y que la aplicación cociente $\eta\colon E \to E/M : x \mapsto x + M$ es continua.

Si E es un espacio de Banach, comprobar que E/M también es un espacio de Banach.

[17] La notación $\|\cdot\|_{p\to r}$ denota la norma de operadores continuas en $\mathcal{L}(\underline{\ell}^p, \underline{\ell}^r)$.

Ejercicio 2.13. Si E es un espacio normado, si $\{x_1, \dots, x_n\} \subset E$ y si $\{\beta_1, \dots, \beta_n\} \subset \mathbb{C}$, demostrar que hay un funcional lineal $f \in E^*$ con $\|f\| \leq 1$ tal que $f(x_j) = \beta_j$ para $j = 1, \dots, n$, si y sólo si

$$|\alpha_1\beta_1 + \cdots + \alpha_n\beta_n| \leq \|\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n\|, \quad \text{para todo } (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n.$$

Ejercicio 2.14 (Límites de Banach)**.** Sea $E = \underline{\ell}^\infty_{\mathbb{R}}$ el espacio de Banach *real* de sucesiones reales acotadas, y sea E^* el espacio de funcionales $\mathbb{R}$-lineales continuos sobre E. Sea $U\colon E \to E$ el operador de corrimiento $(U\boldsymbol{x})_n := x_{n+1}$. Demostrar que hay un elemento $L \in E^*$ tal que:

(a) $L(U\boldsymbol{x}) = L(\boldsymbol{x})$, para todo $\boldsymbol{x} \in E$,

(b) $\liminf_n x_n \leq L(\boldsymbol{x}) \leq \limsup_n x_n$, para todo $\boldsymbol{x} \in E$.

⟦ Indicación: Sea $\mu_n(\boldsymbol{x}) := (x_0 + x_1 + \cdots + x_n)/(n+1)$ y sea M el subespacio de sucesiones acotadas $\boldsymbol{x}$ tales que $\lim_n \mu_n(\boldsymbol{x})$ existe. Demostrar que $p(\boldsymbol{x}) := \limsup_n x_n$ es una función sublineal sobre E. ⟧

Ejercicio 2.15. Sea $\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ una sucesión tal que $\sum_{k=0}^\infty x_k y_k$ converge para todo $\boldsymbol{x} \in \underline{\ell}^1$. Demostrar que $\boldsymbol{y} \in \underline{\ell}^\infty$. ⟦ Indicación: Considérese la familia de funcionales $f_n\colon \underline{\ell}^1 \to \mathbb{C} : \boldsymbol{x} \mapsto \sum_{k=0}^n x_k y_k$, para $n \in \mathbb{N}$. ⟧

Ejercicio 2.16. Considérese $\mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$ como espacio normado con la norma $\|\cdot\|_\infty$. Defínase una aplicación lineal $T\colon \mathbb{C}^{(\mathbb{N})} \to \mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$ por

$$T\colon (x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \mapsto (x_0, 2x_1, 3x_2, \dots, nx_{n-1}, \dots).$$

Demostrar que T no es continua, pero que hay una sucesión de aplicaciones lineales continuas $T_n\colon \mathbb{C}^{(\mathbb{N})} \to \mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$, para $n \in \mathbb{N}$, tal que $T\boldsymbol{x} = \lim_{n\to\infty} T_n\boldsymbol{x}$ para todo $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$.

Ejercicio 2.17. Sea E el espacio normado de todos los *polinomios* complejos $p\colon [0,1] \to \mathbb{C}$, con la norma $\|p\|_1 := \int_0^1 |p(t)|\,dt$. Demostrar que la forma bilineal $B\colon E \times E \to \mathbb{C}$ dada por $B(p,q) := \int_0^1 p(t)q(t)\,dt$ es separadamente continua pero no es continua.

Ejercicio 2.18. Defínase $f_s \in C[0,1]$ para $0 < s < 1$ por $f_s(t) := 2st/(1 - s^2t^2)$. Calcular $\|f_s\|_\infty$ y $\|f_s\|_1$. Concluir que las normas $\|\cdot\|_\infty$ y $\|\cdot\|_1$ no son equivalentes sobre el espacio vectorial $C[0,1]$.

Ejercicio 2.19. Sea E un espacio de Banach y sean M, N dos subespacios de E tales que $M \cap N = \{0\}$ y $M + N = E$; en cuyo caso se escribe $M \oplus N = E$. Defínase $P\colon E \to E$ por $P(x+y) := x$ si $x \in M$, $y \in N$. Demostrar que $P^2 = P$; y que P es *continua* si y sólo si M y N son subespacios *cerrados* de E.

Ejercicio 2.20. Sean E y F dos espacios de Banach. Su suma directa algebraica $E \oplus F = \{ (x, y) : x \in E,\ y \in F \}$ admite dos normas distintas,

$$\|(x, y)\| := \|x\|_E + \|y\|_F, \qquad |||(x, y)||| := \max\{\|x\|_E, \|y\|_F\}.$$

Verificar que estas dos normas sobre $E \oplus F$ son equivalentes.

Ejercicio 2.21. Sean E, F dos espacios de Banach, y sea $T \in \mathcal{L}(E, F)$ un operador tal que haya $m > 0$ con $\|Tx\| \geq m\|x\|$ para todo $x \in E$. Demostrar que $\operatorname{Ran} T := \{ Tx : x \in E \}$ es un subespacio *cerrado* de F. Demostrar además que T^{-1} existe y que $T^{-1} \in \mathcal{L}(\operatorname{Ran} T, E)$.

Ejercicio 2.22. Sea $C^1[a, b]$ el espacio vectorial de funciones continuamente diferenciables $f : [a, b] \to \mathbb{C}$; donde los derivadas en los extremos son unilaterales:

$$f'(a) := \lim_{h\downarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}, \qquad f'(b) := \lim_{h\downarrow 0} \frac{f(b) - f(b - h)}{h}.$$

Demostrar que $C^1[a, b]$ es un subespacio denso de $C[a, b]$; este subespacio denso es el dominio del operador de derivación $D : f \mapsto f'$ sobre $C[a, b]$.

Verificar que D tiene grafo cerrado en $C[a, b] \times C[a, b]$, pero que D no se extiende a un operador continuo en $C[a, b]$. ¿Por qué esto no contradice el teorema del grafo cerrado?

Ejercicio 2.23. Considérese la ecuación diferencial lineal ordinaria de primer orden

$$x'(t) + f(t)x(t) = g(t), \qquad x(a) = z,$$

donde $f \in C[a, b]$. Se sabe que esta ecuación tiene solución única $x \in C^1[a, b]$ si $g \in C[a, b]$, $z \in \mathbb{C}$. Demostrar que esta solución depende continuamente de los datos g, z. Es decir: dada una sucesión de funciones $g_n \in C[a, b]$ tales que $g_n(t) \to g(t)$ uniformemente sobre $[a, b]$, y una sucesión $(z_n) \subset \mathbb{C}$ tal que $z_n \to z$, verificar que las soluciones correspondientes x_n cumplen $x_n(t) \to x(t)$ y $x_n'(t) \to x'(t)$ uniformemente sobre $[a, b]$.

⟦ Indicación: Usar la norma $|||x||| := \|x\|_\infty + \|x'\|_\infty$ sobre $C^1[a, b]$, para comprobar que el operador $x \mapsto (x' + fx, x(a))$ entre espacios apropiados tiene inverso continuo. ⟧

Ejercicio 2.24. El espacio $E := \{ f \in C[-\pi, \pi] : f(-\pi) = f(\pi) \}$ de funciones periódicas continuas, con la norma $\|\cdot\|_\infty$, es un espacio de Banach estudiada en la teoría de series de Fourier. Si

$$c_k(f) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} f(t)\, dt, \quad \text{para} \quad k \in \mathbb{Z},$$

son los coeficientes de Fourier de $f \in E$, demostrar que las sumas parciales

$$T_n f(t) := \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\, e^{ikt}$$

no siempre convergen uniformemente en $C[-\pi, \pi]$, así que hay funciones continuas cuyos desarrollos de Fourier no convergen uniformemente.

⟦ Indicación: Considerar la *convolución* de funciones $T_n f := D_n * f$, donde

$$D_n(x) := \frac{\operatorname{sen}((n + \frac{1}{2})x)}{\operatorname{sen}(\frac{1}{2}x)}$$

es el llamado *núcleo de Dirichlet*. Comprobar que $\|T_n\| = \|D_n\|_1 > (4/\pi)(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n})$, y concluir que la sucesión $\{T_n f\}$ es divergente para algún f. ⟧

Ejercicio 2.25. Si $E = C[0, 1]$, defínase $f \in E^*$ por $f(x) := \int_0^1 t\, x(t)\, dt$. Encontrar un elemento $x_0 \in E$ tal que $\|x_0\| = 1$ y $f(x_0) = \|f\|$.

Sea $g := f|_M$ donde $M := \{\, x \in E : x(1) = 0 \,\}$. Demostrar que $\|g\| = \|f\|$, de modo que $g \in M^*$, pero que g no alcanza su norma sobre elemento alguna de la bola unitaria $\overline{B}_1(M)$.

Ejercicio 2.26. Sea E un espacio normado y denótese por E^*_σ el espacio localmente convexo E^* con la topología débil estelar $\sigma(E^*, E)$. Demostrar que E^*_σ es metrizable si y sólo si el espacio vectorial E posee una base numerable.

Usar el teorema de Baire para demostrar que un espacio de Banach no puede tener una base vectorial infinita pero numerable $\{\, x_1, x_2, x_3, \dots \}$. ⟦ Indicación: Tómese $A_n := \operatorname{lin}\langle x_1, \dots, x_n\rangle$. ⟧ Concluir que E^*_σ no es metrizable cuando E es un espacio de Banach infinitodimensional.

Ejercicio 2.27. Sea $\underline{c}$ el espacio de Banach de *sucesiones convergentes*, con la norma del supremo $\|\boldsymbol{x}\|_\infty := \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k|$. Usando las notaciones $x_\infty := \lim_{n\to\infty} x_n$ para $x \in \underline{c}$ y $\mathbf{1} := (1, 1, \dots, 1, \dots)$, verificar que $\boldsymbol{x} = x_\infty \mathbf{1} + \sum_{k=0}^\infty (x_k - x_\infty)\boldsymbol{e}_k$ como desarrollo convergente en la norma de $\underline{c}$. Hallar un apareamiento de dualidad entre $\underline{c}$ y $\underline{\ell}^1$. Con esta apareamiento, demostrar que $\underline{c}^*$ es isométricamente isomorfa a $\underline{\ell}^1$.

Ejercicio 2.28. Sea $\operatorname{Mfa}(\mathbb{N})$ el espacio normado de **medidas acotadas finitamente aditivas** sobre $\mathbb{N}$; sus elementos son las funciones $\mu\colon \mathbf{2}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{C}$ tales que

$$\mu(\emptyset) = 0; \quad \mu(A \uplus B) = \mu(A) + \mu(B); \quad \|\mu\| := \sup\Biggl\{ \sum_{j=1}^n |\mu(A_j)| : \mathbb{N} = \biguplus_{j=1}^n A_j \Biggr\} < \infty.$$

Si $T \in (\underline{\ell}^\infty)^*$, comprobar que $A \mapsto T(\mathbf{1}_A)$ es un elemento de $\operatorname{Mfa}(\mathbb{N})$. Demostrar que esta correspondencia es una isometría biyectiva entre $(\underline{\ell}^\infty)^*$ y $\operatorname{Mfa}(\mathbb{N})$. Verificar también que $\mu \in J(\underline{\ell}^1)$ si y sólo si μ es contablemente aditiva.

Ejercicio 2.29. El espacio $\underline{s}$ de sucesiones rápidamente decrecientes (Ejemplo 1.10) es un espacio de Fréchet. Su topología está dada por las seminormas $\{ r_n : n \in \mathbb{N} \}$ dadas por

$$(r_n(\boldsymbol{x}))^2 := \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^{2n} |x_k|^2.$$

Sea $\underline{t}$ el espacio de **sucesiones lentamente crecientes** $\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tales que $r_{-m}(\boldsymbol{y}) < \infty$ para algún $m \in \mathbb{N}$. Demostrar que el apareamiento de dualidad (2.5) está definido para $\boldsymbol{x} \in \underline{s}$, $\boldsymbol{y} \in \underline{t}$, y que este apareamiento define una biyección lineal entre $\underline{t}$ y $\underline{s}^*$.

Ejercicio 2.30. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida con $\mu(X) < \infty$. Mostrar que el espacio dual de $L^1(X,\mu)^*$ es isométricamente isomorfa a $L^\infty(X,\mu)$.

⟦ Indicación: Si $T \in L^1(X,\mu)^*$ es de la forma $Tf = \int_X f g_T \, d\mu$, y si $r > \|T\|$, demostrar que $\{ x \in X : |g_T(x)| > r \}$ es de medida nula. ⟧

Ejercicio 2.31. Demostrar que $L^1[a,b]$ es isométricamente isomorfa a un subespacio propio de $L^\infty[a,b]^*$. En detalle: comprobar que la evaluación $f \mapsto f(b)$ es un funcional lineal y continuo de norma 1 sobre $C[a,b]$, que se extiende (por el teorema de Hahn y Banach) a un elemento de $L^\infty[a,b]^*$; concluir que la imagen de $L^1[a,b]$ no es todo $L^\infty[a,b]^*$. De ahí, concluir que los espacios $L^1[a,b]$ y $L^\infty[a,b]$ no son reflexivos.

Ejercicio 2.32. Si $S \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$ posee la matriz $A = [a_{jk}]$ respecto de las bases usuales de $\mathbb{C}^n$ y $\mathbb{C}^m$, verificar que la matriz del operador $S^\top$ es la transpuesta matricial $A^\top = [a_{kj}]$.

Ejercicio 2.33. Si $1 \le p < \infty$, calcular en forma explícita la transpuesta $U^\top$ del operador de corrimiento $U \in \mathcal{L}(\underline{\ell}^p)$ dado por $U(x_0, x_1, \dots) := (x_1, x_2, \dots)$. En el caso $p = 2$, calcular también el operador adjunto U^*.

Ejercicio 2.34. (a) Si $g \in C[a,b]$, el **operador de multiplicación** $M_g \in \mathcal{L}(L^2[a,b])$ se define por $M_g h(t) := g(t)\, h(t)$ para $h \in L^2[a,b]$. Obtener las formas explícitas de la transpuesta $M_g^\top$ y del adjunto M_g^*.

(b) Si $k \in C([a,b] \times [a,b])$, defínase un **operador integral** $K \in \mathcal{L}(L^2[a,b])$ por $Kh(s) := \int_a^b k(s,t)\, h(t)\, dt$ para $h \in L^2[a,b]$. Obtener las formas explícitas de la transpuesta $K^\top$ y del adjunto K^*.

Ejercicio 2.35. Si E es un espacio de Banach y si $A \in \mathcal{L}(E)$, demostrar que A es invertible en $\mathcal{L}(E)$ si y sólo si $A^\top$ es invertible en $\mathcal{L}(E^*)$; en cuyo caso $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$.

Ejercicio 2.36. Si H es un espacio de Hilbert, $x, y \in H$, el símbolo $|x\rangle\langle y|$ denota el operador de rango uno $z \mapsto x\langle y \mid z\rangle = \langle y \mid z\rangle x$. ¿Cuál es el adjunto de este operador en $\mathcal{L}(H)$?

Ejercicio 2.37. Si E y F son espacios de Banach, y si $S\colon E \to F$, $T\colon F^* \to E^*$ son aplicaciones lineales que cumplen $\langle w, Sx\rangle = \langle Tw, x\rangle$ para todo $x \in E$, $w \in F^*$, demostrar que S y T son continuas y que $T = S^{\mathsf{T}}$. ⟦ Indicación: Usar el teorema del grafo cerrado. ⟧

Ejercicio 2.38. (a) Si Q es el operador de multiplicación $Qf(t) := tf(t)$ en $\mathcal{L}(L^2[0,1])$, demostrar que Ran Q es denso en $L^2[0,1]$ pero no contiene la función constante 1.

(b) Si $R\colon \underline{c}_0 \to \underline{c}_0$ se define por $(R\boldsymbol{x})_k := x_k/(k+1)$, demostrar que Ran R es denso en $\underline{c}_0$ pero que R no es sobreyectivo.

Ejercicio 2.39. (a) Sea E un espacio normado con espacio dual separable E^*. Demostrar que E también es separable. ⟦ Indicación: Si $\{y_n\}$ es una sucesión densa en E^*, elíjase puntos $x_n \in E$ para $n \in \mathbb{N}$ tales que $|\langle y_n, x_n\rangle| \geq \frac{1}{2}\|y_n\|\,\|x_n\|$. Verificar que el subespacio vectorial generado por los x_n es denso en E. ⟧

(b) Concluir que un espacio de Banach reflexivo E es separable si y sólo si su espacio dual E^* es separable. Dar un ejemplo de un espacio de Banach no reflexivo con espacio dual separable.

Ejercicio 2.40. Si $\boldsymbol{x} \in \underline{c}_0$, sea $f_{\boldsymbol{x}} \in C[0,1]$ la función continua dada por

$$f_{\boldsymbol{x}}(0) := 0, \quad f_{\boldsymbol{x}}\biggl(\frac{1-t}{k} + \frac{t}{k+1}\biggr) := (1-t)x_{k-1} + tx_k, \quad \text{para} \quad k \geq 1,\ 0 \leq t \leq 1.$$

Demostrar que $\boldsymbol{x} \mapsto f_{\boldsymbol{x}}$ es una isometría (no sobreyectiva) de $\underline{c}_0$ en $C[0,1]$. Concluir que el espacio de Banach $C[0,1]$ no es reflexivo.

Ejercicio 2.41. Si E es un espacio de Banach reflexivo, mostrar que E^* es también reflexivo.

Ejercicio 2.42. Si E es un espacio de Banach y M es un subespacio cerrado de E, demostrar que la reflexividad de E implica la reflexividad de M y de E/M. Si, por el contrario, tanto M como E/M son reflexivos, ¿puede afirmarse que E es reflexivo?

Ejercicio 2.43. (a) Sean $f, g_1, \dots, g_m$ funcionales lineales sobre un espacio vectorial complejo E. Comprobar que $f = \alpha_1 g_1 + \cdots + \alpha_m g_m$ para algunos coeficientes $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{C}$ si y sólo si $\bigcap_{j=1}^m \ker g_j \subseteq \ker f$.

(b) Si E es un espacio localmente convexo, demostrar que un funcional lineal $f\colon E \to \mathbb{C}$ es continua si y sólo si $\ker f$ es un subespacio cerrado de E.

(c) Si E es un espacio localmente convexo, sea E_σ el espacio vectorial E dotado con la topología débil $\sigma(E, E^*)$; demostrar que $(E_\sigma)^* = E^*$.

Ejercicio 2.44. Sea E un espacio de Banach. Un operador $P \in \mathcal{L}(E)$ se llama **idempotente** si $P^2 = P$.

(a) Demostrar que un subespacio cerrado $M \leq E$ es la imagen de un operador idempotente sobre E si y sólo si M posee un *complemento* en E: esto, si existe, es un subespacio cerrado $N \leq E$ con $M \cap N = \{0\}$, tal que $E \simeq M \oplus N$ como espacios de Banach. (La norma sobre la suma directa $M \oplus N$ está dada por $|||m + n||| := \|m\| + \|n\|$.)

(b) Verificar que $\|P\| \geq 1$ excepto si $P = 0$. Dar un ejemplo de un operador idempotente con $\|P\| > 1$.

(c) Si $J : E \to E^{**}$ y $J_1 : E^* \to E^{***}$ son los encajes naturales, demostrar que $P := J_1 J^\top$ es un idempotente de norma 1 en $\mathcal{L}(E^{***})$.

3 Introducción a la Teoría de Distribuciones

Durante la primera mitad del siglo XX, diversos problemas del análisis matemático (en particular, la teoría de las ecuaciones diferenciales parciales) indicaron la necesidad de calcular derivadas de funciones continuas. La definición clásica de derivada como límite de cocientes de diferencias finitas no es adecuada para tal propósito: es necesario extender, de alguna forma, el concepto de derivación de funciones. A la vez, la mera definición de una función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como una prescripción que ofrece un valor $f(t)$ para cada $t \in \mathbb{R}$ es también problemática, porque implica la presentación simultánea de un juego no numerable de tales valores. La venida de la mecánica cuántica complicó el panorama, al mostrar que es físicamente imposible determinar ciertos pares de variables (q_j, p_j) con total precisión. En vez de "evaluar una función f en un punto t", es necesario, pero también suficiente, obtener los *valores promedios* de f en vecindarios pequeños de t.

Un promedio (ponderado) de f es el resultado de calcular la integral

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\, \varphi(t)\, dt,$$

donde la "ventana" φ es una función no negativa tal que $\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\, dt = 1$. Es importante señalar que tales promedios corresponden a procesos realistas de medición. Si el soporte de la función φ queda en un vecindario de t_0 y si f en continua en t_0, esta integral es una aproximación el valor $f(t_0)$. La colección de tales integrales $\langle f, \varphi\rangle$ sustituye la colección de valores $f(t)$ como descripción completa de la función f.

Si f y φ son diferenciables (en el sentido ordinario) y si el soporte de φ queda en un intervalo compacto $[-R, R]$, se puede considerar la *fórmula de integración por partes*:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\, \varphi(t)\, dt = -\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \varphi'(t)\, dt. \tag{3.1}$$

La idea fundamental de la teoría de distribuciones es que el lado derecho de esta fórmula sirve para definir una derivada de la función f, aun cuando f no sea diferenciable en el sentido clásico.

Al abreviar la fórmula (3.1) como $\langle f', \varphi\rangle := -\langle f, \varphi'\rangle$, se puede observar que expresa una *dualidad* entre dos espacios de funciones. Este es el punto de partida de la *teoría de funciones generalizadas* introducida por Sergei Lvovich Sobolev (1936) y refinado por Laurent Schwartz (1949), quien la llamó la *théorie des distributions*.[1]

[1] Sobolev introdujo sus funciones generalizadas como *soluciones débiles* de ciertas ecuaciones en derivadas parciales. Schwartz presentó su teoría, basado en la dualidad entre espacios vectoriales topológicos, en el libro [14] que sigue siendo un clásico de la literatura matemática.

3.1 Funciones de prueba y distribuciones

Si $f : X \to E$ es una función definida en un espacio topológico X con valores en un espacio vectorial E, el **soporte** de f es la *clausura* de $\{ x \in X : f(x) \neq 0 \}$:

$$\operatorname{sop} f := \overline{f^{-1}(E \setminus \{0\})}.$$

Una manera alternativa, pero indirecta, de definir el soporte es la siguiente: el complemento $X \setminus \operatorname{sop}(f)$ es la parte abierta más grande en donde f se anula; la cual, a su vez, es la unión de todos los abiertos básicos en donde f se anula.

En el caso de funciones de una variable, se toma $E = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$. En este capítulo, el dominio X será siempre un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^m$ para algún n. Las funciones continuas $f : U \to \mathbb{C}$ forman un espacio de Fréchet $C(U)$: véase el Ejemplo 1.13. El subespacio $\mathcal{K}(U)$ de *funciones continuas de soporte compacto* $\operatorname{sop} f \subset U$ es un subespacio denso de $C(U)$.

El Lema de Urysohn de la topología general garantiza que hay una cantidad abundante de funciones continuas de soporte compacto en $C(U)$: si $x \in K^\circ \subset K \subset L^\circ \subset L \subset U$, donde K y L son compactos,[2] entonces hay una función continua $f : U \to [0, 1]$ tal que $f(y) = 1$ si $y \in K$ pero $f(x) = 0$ si $x \notin L$. En tal caso, $\operatorname{sop} f$ es una parte cerrada de L y por ende es compacto.

Es menos evidente, pero también es cierto, que hay funciones *suaves* $\psi : U \to [0, 1]$ con propiedades similares: $\psi(x) \neq 0$ y $\operatorname{sop} \psi$ compacto en U. Se puede fabricar dicha función ψ con modificaciones apropiadas del siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.1. Si $a > 0$ y si $r := \|x\|$ denota la norma euclidiana de $x \in \mathbb{R}^m$, la función

$$\varphi_a(x) := C_a\, e^{a^2/(a^2-r^2)}\, [\![r < a]\!], \quad \text{con} \quad C_a > 0, \tag{3.2}$$

es una función suave de soporte compacto. Se puede tomar la constante de normalización C_a para que $\int_{\mathbb{R}^m} \varphi_a(x)\, d^m x = 1$.

Como $\varphi_a(x) = 0$ para $r > a$ y $\varphi_a(x) \neq 0$ para $r < a$, se ve que $\operatorname{sop} \varphi_a = \overline{B}(0; a) = \{ y \in \mathbb{R}^m : \|y\| \leq a \}$. Está claro que φ_a es una función suave para $r < a$ y trivialmente también para $r > a$. En dimensión $n = 1$, un cálculo directo muestra que $d^k \varphi_a / dt^k(a) = 0$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Se concluye, para $n \geq 1$, que todas las derivadas parciales de la función radial φ_a se anulan en la esfera $r = a$. Luego φ_a es suave en todo $\mathbb{R}^m$.

Obsérvese que esta función suave *no es analítica*: su serie de Taylor en cualquier punto de la esfera $r = a$ es idénticamente nula, pero φ_a es positiva en la región interior de esta esfera. $\Diamond$

[2]La condición $x \in K^\circ \subset K$ dice que K es un vecindario compacto de x en U; esto es posible porque U es localmente compacto.

Definición 3.2. Sea $U \subseteq \mathbb{R}^m$ una parte abierta no vacía del espacio euclidiano $\mathbb{R}^m$. El espacio vectorial $\mathcal{D}(U)$ de **funciones de prueba** en U es la totalidad de funciones suaves sobre U con soporte compacto en U. Un elemento de $\mathcal{D}(U)$ es una función suave $\varphi\colon U \to \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{sop}\varphi \Subset U$ es compacto.[3]

Si $\overline{B}(x_0;\varepsilon) \subset U$, la función $\psi(x) := \varphi_\varepsilon(x - x_0)$ dada por una traslación de la fórmula (3.2) pertenece a $\mathcal{D}(U)$ y satisface $\psi(x_0) \neq 0$. Si $\{x_1,\dots,x_n\}$ es una parte finita de U, es evidente que hay funciones $\psi_j \in \mathcal{D}(U)$ tales que $\psi_j(x_j) \neq 0$ pero $\psi_j(x_k) = 0$ para $j \neq k$; estas funciones $\{\psi_1,\dots,\psi_n\}$ son linealmente independientes. Por lo tanto, $\mathcal{D}(U)$ es un espacio vectorial infinitodimensional.

Definición 3.3. Sea U una parte abierta no vacía de $\mathbb{R}^m$. Para cada compacto $K \Subset U$, denótese por $\mathcal{D}_K$ el subespacio de $\mathcal{D}(U)$ de funciones suaves con soporte en K:

$$\mathcal{D}(U) = \bigcup_{K \Subset U} \mathcal{D}_K, \qquad \mathcal{D}_K := \{\, \varphi \in \mathcal{D}(U) : \operatorname{sop}\varphi \subseteq K \,\}.$$

Si V es otro abierto en $\mathbb{R}^m$ con $K \Subset V$, entonces $K \Subset U \cap V$ y $\mathcal{D}_K \subset \mathcal{D}(U) \cap \mathcal{D}(V) = \mathcal{D}(U \cap V)$.

Una derivación parcial no agranda el soporte de una función suave: si $\varphi \in \mathcal{D}_K$, entonces $\partial^\alpha\varphi \in \mathcal{D}_K$ para todo multiíndice $\alpha \in \mathbb{N}^m$; véase el Ejemplo 1.15. Cuando $K \Subset U$, el espacio vectorial $\mathcal{D}_K$ es un *subespacio cerrado* de $C^\infty(U)$. Con la topología heredada de $C^\infty(U)$, este $\mathcal{D}_K$ es entonces un *espacio de Fréchet*: $\varphi_k \to \varphi$ en $\mathcal{D}_K$ si $\operatorname{sop}\varphi_k \subseteq K$ para cada k y si $\partial^\alpha\varphi_k \to \partial^\alpha\varphi$ uniformemente, para cada $\alpha \in \mathbb{N}^m$.

La unión $\mathcal{D}(U) = \bigcup_{K \Subset U} \mathcal{D}_K$ es un espacio localmente convexo (¡no metrizable!) bajo la topología localmente convexo más fuerte tal que todas las inclusiones $\mathcal{D}_K \hookrightarrow \mathcal{D}(U)$ sean continuas.

Un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^m$ es σ-compacto (Ejemplo 1.13): $U = \uparrow\bigcup_n K_n$ con $K_n \subset K_{n+1}^\circ$ para cada n. En tal caso, la inclusión $\mathcal{D}_{K_n} \hookrightarrow \mathcal{D}_{K_{n+1}}$ es un *encaje*: la topología relativa de $\mathcal{D}_{K_n}$ como subespacio de $\mathcal{D}_{K_{n+1}}$ coincide con su topología original.

Una familia (no numerable) de seminormas que define la topología del espacio localmente convexo $\mathcal{D}(U)$ es la siguiente. Para cada compacto $K \Subset U$ y cada $n \in \mathbb{N}$, sea

$$p_{K,n}(\varphi) := \sup\{\, |\partial^\alpha\varphi(x)| : x \in K,\ |\alpha| \le n \,\}. \tag{3.3}$$

Para manejar esta topología en la práctica, basta usar la siguiente descripción de convergencia a cero. *Una red $(\varphi_k)_{k\in A}$ converge a* 0 en $\mathcal{D}(U)$ si y sólo si hay un compacto $K \Subset U$ tal que $\operatorname{sop}\varphi_k \subseteq K$ *para cada* k; y además, $\partial^\alpha\varphi_k \to 0$ uniformemente en U, para cada $\alpha \in \mathbb{N}^m$.

[3]La notación $K \Subset U$ indica que K es una **parte compacta** de U.

Definición 3.4. Sea U un abierto en $\mathbb{R}^m$. Una **distribución** en U es un funcional lineal y continua sobre $\mathcal{D}(U)$. Se denota por $\mathcal{D}'(U) := \mathcal{D}(U)^*$ la totalidad de estas distribuciones, es decir, el espacio dual de $\mathcal{D}(U)$.

Si $T \in \mathcal{D}'(U)$, $\varphi \in \mathcal{D}(U)$, la notación $\langle T, \varphi \rangle := T(\varphi)$ será usada para el aparejamiento de dualidad entre distribuciones y funciones de prueba.

Por la definición de la topología de $\mathcal{D}(U)$, un funcional lineal $T : \mathcal{D}(U) \to \mathbb{C}$ es continua si y sólo si su restricción a cada subespacio $\mathcal{D}_K$ es continua. Entonces $T \in \mathcal{D}'(U)$ si y sólo si, para cada compacto $K \Subset U$, hay $n \in \mathbb{N}$ y $C > 0$ tales que

$$|T(\varphi)| \leq C\, p_{K,n}(\varphi) \quad \text{para cada} \quad \varphi \in \mathcal{D}_K. \tag{3.4}$$

La topología apropiada sobre $\mathcal{D}'(U)$ es la *topología débil estelar*[4] como espacio dual de $\mathcal{D}(U)$, es decir, la topología de *convergencia simple* sobre funciones de prueba. Entonces $T_j \to T$ en $\mathcal{D}'(U)$ si y sólo si $\langle T_j, \varphi \rangle \to \langle T, \varphi \rangle$ para cada $\varphi \in \mathcal{D}(U)$.

Ejemplo 3.5. Una función $f : U \to \mathbb{C}$ es **localmente integrable** si

$$\int_K |f(x)|\, d^m x < \infty \quad \text{para cada} \quad K \Subset U,$$

es decir, si $f|_K \in \mathcal{L}^1(K)$ con respecto a la medida de Lebesgue,[5] para cada compacto $K \subset U$. Cualquier función localmente integrable define una distribución sobre U, por la fórmula

$$\langle f, \varphi \rangle := \int_U f(x)\, \varphi(x)\, d^m x. \tag{3.5}$$

Tales distribuciones se llaman **regulares**; las distribuciones que no provienen de funciones localmente integrables se llaman **singulares**. ◊

Notación. Los practicantes de la teoría de distribuciones[6] suelen denotar el lado derecho de (3.5) por $\langle f(x), \varphi(x) \rangle$ en vez de $\langle f, \varphi \rangle$, incorporando una *variable de integración* en el aparejamiento de dualidad. Esto simplifica los procedimientos de "cambio de variable".

[4] Si E es un espacio localmente convexo, la **topología fuerte** $\beta(E^*, E)$ sobre su espacio dual E^* es la topología de *convergencia uniforme sobre partes acotadas* de E. Cuando E es un espacio normado, esta es la topología de la norma sobre E^*. Las topologías débil estelar y fuerte sobre E no coinciden: hay redes que convergen para $\sigma(E^*, E)$ pero no para $\beta(E^*, E)$. Sin embargo, en el caso $E = \mathcal{D}(U)$, resulta que cualquier *sucesión* (T_n) de distribuciones que converge débilmente también converge en la topología fuerte. Véase la Proposición 4.1.2 del libro: John Horváth, *Topological Vector Spaces and Distributions*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1966.

[5] En este capítulo, todas las integrales se toman con respecto a la medida de Lebesgue, salvo indicación explícita de lo contrario. Para $U \subseteq \mathbb{R}^m$, esta medida se denota por la "cola de integración" $d^m x$.

[6] Véase, por ejemplo, el libro de Estrada y Kanwal [4]. Esta costumbre fue establecida por Israel Moiseevich Guelfand en un tratado de 5 tomos (edición rusa, 1958); véase: I. M. Guelfand y G. E. Shilov, *Generalized Functions 1*, Academic Press, New York, 1964.

Ejemplo 3.6. Un caso importante de una distribución regular es la **función de Heaviside** θ, definido en la recta real por

$$\theta(x) := [\![x \geq 0]\!] = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases} \tag{3.6}$$

(En muchos libros, se escribe $H(x)$ en vez de $\theta(x)$ para denotar la función de Heaviside.) Esta función es discontinua en $x = 0$. Su valor en $x = 0$ no es importante: dos funciones iguales casi por doquier definen la misma distribución regular. Fíjese que $\theta = \mathbf{1}_{[0,\infty)} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$. Para $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, se ve que $\langle \theta, \varphi \rangle = \int_0^\infty \varphi(x)\,dx$. $\diamondsuit$

Ejemplo 3.7. La **delta de Dirac** es la distribución singular $\delta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ definida por la evaluación en $x = 0$:

$$\langle \delta, \varphi \rangle \equiv \langle \delta(x), \varphi(x) \rangle := \varphi(0). \tag{3.7}$$

Dirac originalmente escribió:[7] $\int_{\mathbb{R}} \delta(x)\,\varphi(x)\,dx = \varphi(0)$. Pero es evidente que una función $\delta(x)$ con esta propiedad debe cumplir $\delta(x) = 0$ para $x \neq 0$, a la vez que $\int_{\mathbb{R}} \delta(x)\,dx = 1$; tal función no existe. Sin embargo, la fórmula de Dirac es perfectamente correcta, una vez que se interpreta su "integral" como una versión de la expresión (3.7).

Fíjese que $|\varphi(0)| \leq p_{K,0}(\varphi)\,[\![0 \in K]\!]$ para todo $K \Subset \mathbb{R}$, así que la evaluación $\varphi \mapsto \varphi(0)$ es una distribución sobre $\mathbb{R}$.

Más generalmente, si U es un abierto en $\mathbb{R}^m$ con $y \in U$, defínase $\delta_y \in \mathcal{D}'(U)$ por

$$\langle \delta_y, \varphi \rangle \equiv \langle \delta(x - y), \varphi(x) \rangle := \varphi(y).$$

Dirac escribía: $\int_U \delta(x - y)\,\varphi(x)\,d^m x = \varphi(y)$. $\diamondsuit$

Ejemplo 3.8. La función $1/x$ no es localmente integrable en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ porque la integral $\int_a^b dx/x$ diverge toda vez que $a < 0 < b$. Sin embargo, es posible construir una distribución a partir de la función $1/x$, al usar el **valor principal de Cauchy** en $x = 0$ de las integrales. Defínase

$$\langle \mathrm{Pf}(1/x), \varphi(x) \rangle := \mathrm{P}\!\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx.$$

Como φ es una función suave, hay otra función suave ψ tal que

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x\,\psi(x) \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}.$$

[7] En su libro *Principles of Quantum Mechanics* (Clarendon Press, Oxford, 1930), Paul Adrien Maurice Dirac introdujo la "función" $\delta(x - y)$ como una "notación conveniente" para una versión continua de la delta de Kronecker δ_{jk}. La teoría de distribuciones de Sobolev y Schwartz confirmó que su intuición era correcta.

Esto sigue del teorema de Taylor de orden 0, en el origen. De hecho, el teorema de valor medio muestra que $\psi(x) = \varphi'(tx)$ para algún $t \in (0,1)$ que podría depender de x. Si además $\operatorname{sop}\varphi \subset [-R, R]$, entonces

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int_{\varepsilon\leq|x|\leq R} \biggl(\frac{\varphi(0)}{x} + \psi(x)\biggr)\,dx = \int_{-R}^{R} \psi(x)\,dx.$$

La continuidad de este funcional lineal de φ sigue del estimado

$$|\langle \mathrm{Pf}(1/x), \varphi(x)\rangle| \leq 2R\,\|\psi\|_\infty \leq 2R\,\|\varphi'\|_\infty \leq 2R p_{[-R,R],1}(\varphi).$$

Dícese que la distribución singular $\mathrm{Pf}(1/x)$ definida de este modo es una **pseudofunción** determinada por $1/x$. ◊

► Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ es una función diferenciable (por tanto, continua y localmente integrable), la *fórmula de integración por partes* dice que

$$\int_{\mathbb{R}} f'(x)\,\varphi(x)\,dx = -\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\varphi'(x)\,dx \quad \text{para todo} \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Obsérvese que el producto $f(x)\,\varphi(x)$ se anula en $\pm\infty$ porque φ tiene soporte compacto. Para funciones no necesariamente diferenciables, el lado derecho de esta fórmula sirve para definir la llamada *derivada débil* de la función f. De hecho, esta fórmula también permite definir la derivada de una distribución singular sobre $\mathbb{R}$.

En dimensión $m > 1$, hay fórmulas similares de integración por partes para mover las derivadas parciales de una función a otra en integrales. Conviene abreviar $\partial_j f := \partial f/\partial x_j$ si $f : U \to \mathbb{C}$ es diferenciable.

Definición 3.9. Si $T \in \mathcal{D}'(U)$, donde U es un abierto en $\mathbb{R}^m$, la **derivada parcial** $\partial_j T$ se define como sigue:

$$\langle \partial_j T, \varphi\rangle := -\langle T, \partial_j\varphi\rangle \quad \text{para todo} \quad \varphi \in \mathcal{D}(U). \tag{3.8}$$

Si $\alpha \in \mathbb{N}^m$ es un multiíndice, es inmediato que

$$\langle \partial^\alpha T, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, \partial^\alpha\varphi\rangle.$$

En un variable (caso $m = 1$), se escribe $\langle T', \varphi\rangle := -\langle T, \varphi'\rangle$.

Ejemplo 3.10. La derivada distribucional de la función de Heaviside es la delta de Dirac:

$$\langle \theta', \varphi\rangle = -\langle \theta, \varphi'\rangle = -\int_0^\infty \varphi'(x)\,dx = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi\rangle \quad \text{para} \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Fíjese que θ es una distribución regular pero su derivada es singular. ◊

Ejemplo 3.11. La función $a(x) := |x|$ es continua sobre $\mathbb{R}$ pero no es diferenciable (en el sentido ordinario) en $x = 0$. Su derivada distribucional se calcula como sigue:

$$\begin{aligned}\langle a', \varphi\rangle &= -\langle a, \varphi'\rangle = -\int_{\mathbb{R}} |x|\, \varphi'(x)\, dx = \int_{-\infty}^{0} x\, \varphi'(x)\, dx - \int_{0}^{\infty} x\, \varphi'(x)\, dx \\ &= -\int_{-\infty}^{0} \varphi(x)\, dx + \int_{0}^{\infty} \varphi(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} (\operatorname{signo} x)\, \varphi(x)\, dx,\end{aligned}$$

después de una integración por partes, al notar que $x\, \varphi(x)$ se anula en ∞, 0, ∞. Luego $a' = \operatorname{signo}$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

La segunda derivada de $x \mapsto |x|$ es singular:

$$\langle a'', \varphi\rangle = -\langle a', \varphi'\rangle = -\int_{\mathbb{R}} (\operatorname{signo} x)\, \varphi'(x)\, dx = \int_{-\infty}^{0} \varphi'(x)\, dx - \int_{0}^{\infty} \varphi'(x)\, dx = 2\, \varphi(0),$$

así que $a'' = 2\delta$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. $\Diamond$

Ejemplo 3.12. La derivada distribucional de δ está dada por

$$\langle \delta', \varphi\rangle = -\varphi'(0).$$

Más generalmente, si $y \in U \subseteq \mathbb{R}^m$, las derivadas de orden superior de δ_y están dadas por $\langle \partial^\alpha \delta_y, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha} \partial^\alpha \varphi(y)$. $\Diamond$

Definición 3.13. El **orden** de una distribución $T \in \mathcal{D}'(U)$ se define como sigue. Para cada $K \Subset U$, se sabe que hay $n \in \mathbb{N}$ y $C > 0$, ambos dependientes de K, tales que $|\langle T, \varphi\rangle| \leq C\ P_{K,n}(\varphi)$ para $\varphi \in \mathcal{D}_K$. Si es posible elegir n independiente de K, el mínimo de tales n es el orden de T; si eso no es posible, dícese que T *tiene orden infinito*.

Si $f \in L^1(U)$, la distribución regular definida por f es de orden 0, ya que

$$|\langle f, \varphi\rangle| \leq \|f\|_1 \|\varphi\|_\infty = \|f\|_1\, p_{\operatorname{sop}\varphi,0}(\varphi).$$

La delta de Dirac es una distribución de orden 0; su derivada δ' es de orden 1. La suma $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \partial^k \delta_k$ es un elemento de orden infinito en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

► Las fórmulas conocidas del cálculo integral establecen ciertas relaciones entre distribuciones regulares, las cuales se extienden a las distribuciones singulares como *definiciones*. Por ejemplo, la invariancia de la medida de Lebesgue bajo traslaciones establece que, para $b \in \mathbb{R}^m$ fijo:

$$\int_{\mathbb{R}^m} f(x-b)\, \varphi(x)\, d^m x = \int_{\mathbb{R}^m} f(x)\, \varphi(x+b)\, d^m x,$$

para $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ y $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^m)$. En términos del operador de traslación τ_b sobre funciones en $\mathbb{R}^m$, esta fórmula se escribe como

$$\langle \tau_b f, \varphi \rangle = \langle f, \tau_{-b}\varphi \rangle,$$

es decir, τ_b actúa como la transpuesta de τ_{-b} sobre $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$. Entonces se *define* la **traslación** por b sobre $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ como τ_{-b}^{T}, es decir,

$$\langle \tau_b T, \varphi \rangle := \langle T, \tau_{-b}\varphi \rangle \quad \text{para} \quad T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m),\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m). \tag{3.9}$$

En la notación extendida, con una variable muda x, esta fórmula se escribe como

$$\langle T(x-b), \varphi(x) \rangle := \langle T(x), \varphi(x+b) \rangle.$$

Considérese también un cambio de variable lineal, dada por alguna matriz no singular $A \in M_m(\mathbb{R})$, la función $x \mapsto f(Ax)$ se escribe como $f \circ A$, o bien $A^{\mathsf{T}} f$. La fórmula clásica de cambio de variable es

$$\int_{\mathbb{R}^m} f(Ax)\,\varphi(x)\,d^m x = \frac{1}{|\det A|} \int_{\mathbb{R}^m} f(y)\,\varphi(A^{-1}y)\,d^m y,$$

para $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ y $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^m)$. A veces esta fórmula se expresa de forma breve como $y = Ax$ con la regla de cambio $d^m y = |\det A|\, d^m x$. (En efecto, <u>det A</u> es el *jacobiano* de la transformación lineal $x \mapsto Ax$.)

Definición 3.14. Si $A\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ es una aplicación lineal invertible, actúa sobre distribuciones por transposición. Para $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$, defínase $A^{\mathsf{T}} T \equiv T \circ A \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ por

$$\langle T \circ A, \varphi \rangle := \frac{1}{|\det A|} \langle T, \varphi \circ A^{-1} \rangle, \quad \text{o bien} \tag{3.10a}$$

$$\langle T(Ax), \varphi(x) \rangle := \frac{1}{|\det A|} \langle T(x), \varphi(A^{-1}x) \rangle. \tag{3.10b}$$

Si R es una transformación *ortogonal*, es decir, $R^{-1} = R^{\mathsf{T}} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$, entonces $\det R = \pm 1$ y la fórmula (3.10b) se simplifica en $\langle T(Rx), \varphi(x) \rangle = \langle T(x), \varphi(R^{\mathsf{T}}x) \rangle$.

Un caso importante es una **dilatación** o *cambio de escala* donde $A = \lambda\, 1_m$ con $\lambda > 0$ en $\mathbb{R}$. El efecto de la dilatación sobre distribuciones está dado por

$$\langle T(\lambda x), \varphi(x) \rangle := \lambda^{-m}\, \langle T(x), \varphi(x/\lambda) \rangle. \tag{3.11}$$

► La *multiplicación* de distribuciones presenta un problema: $\mathcal{D}'(U)$ no es un álgebra, porque hay pares de distribuciones que no admiten un producto. Sin embargo, siempre es posible multiplicar una distribución por una función suave.

Definición 3.15. Sea $T \in \mathcal{D}'(U)$ y $u \in C^\infty(U)$. El producto $uT = Tu$ es el elemento de $\mathcal{D}'(U)$ dado por

$$\langle uT, \varphi \rangle := \langle T, u\varphi \rangle \quad \text{para todo} \quad \varphi \in \mathcal{D}(U). \tag{3.12}$$

Fíjese que el producto $u\varphi(x) \equiv u(x)\,\varphi(x)$ es una función suave, con $\operatorname{sop}(u\varphi) \subseteq \operatorname{sop}\varphi$. Entonces $u\varphi \in \mathcal{D}(U)$ y el lado derecho está bien definido. La regla de Leibniz para derivadas múltiples,[8]

$$\partial^\alpha(u\varphi) = \sum_{\beta \leq \alpha} \frac{\alpha!}{\beta!\,(\alpha-\beta)!}\,\partial^\beta u\,\partial^{\alpha-\beta}\varphi, \tag{3.13}$$

muestra que $p_{K,n}(u\varphi) \leq B\;p_{K,n}(\varphi)$ para $\varphi \in \mathcal{D}_K$ al tomar $B := p_{K,n}(u)$. Esto establece que el operador $\varphi \mapsto u\varphi$ es continua en $\mathcal{L}(\mathcal{D}(U))$; en consecuencia, el funcional lineal $\varphi \mapsto \langle T, u\varphi \rangle$ es también continua: el lado derecho de (3.12) define una distribución sobre U.

La fórmula (3.12) también dice que el operador $T \mapsto uT$ sobre $\mathcal{D}'(U)$ es la *transpuesta* del operador continuo $\varphi \mapsto u\varphi$ sobre $\mathcal{D}(U)$. Es fácil verificar que $T \mapsto uT$ es también continuo.

En resumen: los espacios localmente convexos $\mathcal{D}(U)$ y $\mathcal{D}'(U)$ son *módulos* para el álgebra $C^\infty(U)$ y las operaciones de módulo son bilineales y (separadamente) continuas.

Lema 3.16. *La regla de Leibniz es válida cuando se aplica una derivación parcial al producto de distribuciones por funciones suaves:*

$$\partial_j(uT) = (\partial_j u)\,T + u\,\partial_j T \quad \textit{para} \quad T \in \mathcal{D}'(U),\ u \in C^\infty(U). \tag{3.14}$$

Demostración. Por transposición: si $\varphi \in \mathcal{D}(U)$, entonces

$$\begin{aligned}\langle \partial_j(uT), \varphi \rangle &= -\langle uT, \partial_j\varphi \rangle = -\langle T, u\partial_j\varphi \rangle = -\langle T, \partial_j(u\varphi) \rangle + \langle T, (\partial_j u)\varphi \rangle \\ &= \langle \partial_j T, u\varphi \rangle + \langle (\partial_j u)T, \varphi \rangle = \langle u\,\partial_j T, u\varphi \rangle + \langle (\partial_j u)T, \varphi \rangle. \qquad \square\end{aligned}$$

Ejemplo 3.17. Si $a < 0 < b$ en $\mathbb{R}$ y si $u \in C^\infty(a,b)$, entonces $u\,\delta = u(0)\,\delta$. En efecto, para $\varphi \in \mathcal{D}(a,b)$:

$$\langle u\,\delta, \varphi \rangle = \langle \delta, u\varphi \rangle = u(0)\,\varphi(0) = u(0)\,\langle \delta, \varphi \rangle.$$

En particular, si $u(0) = 0$, entonces $u\delta = 0$ en $\mathcal{D}'(a,b)$. ◊

Ejemplo 3.18. El producto de la pseudofunción $\operatorname{Pf}(1/x)$ y la función x es la función constante 1 en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. En efecto:

$$\langle x\ \operatorname{Pf}(1/x), \varphi(x) \rangle = \langle \operatorname{Pf}(1/x), x\varphi(x) \rangle = \mathrm{P}\!\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx = \langle 1, \varphi \rangle,$$

[8] Si $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ se define $\alpha! := \alpha_1!\,\alpha_2!\cdots\alpha_m!$.

porque el valor principal de Cauchy de la integral de una función integrable coincide con la integral ordinaria.

Este ejemplo y el anterior son suficientes para exhibir una *falta de asociatividad* del producto:

$$(\delta\, x)\ \mathrm{Pf}(1/x) = 0\ \mathrm{Pf}(1/x) = 0, \quad \text{mientras} \quad \delta(x\ \mathrm{Pf}(1/x)) = \delta\, 1 = \delta \neq 0.$$

Esto es parcialmente explicable al notar que productos de tipo $(Tu)S$ ó $T(uS)$ no están "autorizadas" por la definición de un *módulo* sobre $C^\infty(U)$, aun cuando $T, S \in \mathcal{D}'(U)$ y $u \in C^\infty(U)$ satisfagan $Tu, uS \in C^\infty(U)$. $\lozenge$

► El *soporte de una función* f puede definirse de dos maneras equivalentes: (a) la clausura del conjunto en donde f no se anula; o bien (b) el complemento del mayor abierto en donde f sí se anula. Para distribuciones en general, la primera opción no está disponible, porque no siempre es posible evaluar una distribución en un punto. En cambio, se puede dar sentido a la noción de que una distribución se anule sobre un abierto; la segunda opción permite definir el soporte de una distribución.

Definición 3.19. Sean V y U abiertos de $\mathbb{R}^m$, con $V \subseteq U$. Una función de prueba $\varphi \in \mathcal{D}(V)$ tiene una **extensión por cero** a una función $\tilde{\varphi} \in \mathcal{D}(U)$, al definir $\tilde{\varphi}(x) := \varphi(x)$ para $x \in V$ pero $\tilde{\varphi}(y) := 0$ para $y \in U \setminus V$. Entonces $\operatorname{sop} \tilde{\varphi} = \operatorname{sop} \varphi$, así que $\tilde{\varphi} \in \mathcal{D}'(U)$. De este modo, se define un *encaje* $I_{V,U} \colon \mathcal{D}(V) \to \mathcal{D}(U) : \varphi \mapsto \tilde{\varphi}$ que es un homeomorfismo lineal de $\mathcal{D}(V)$ en su imagen. Generalmente, se escribe φ en vez de $\tilde{\varphi}$ en $\mathcal{D}(U)$ y se identifica $\mathcal{D}(V)$ con su imagen como subespacio de $\mathcal{D}(U)$.

Si $S \in \mathcal{D}'(U)$, entonces $I_{V,U}^{\top} S \equiv S \circ I_{V,U}$ queda en $\mathcal{D}'(V)$: esta es la **restricción** de S a V, escrito $S|_V := S \circ I_{V,U}$. Dícese que S **se anula sobre** V si $S|_V = 0$. En otras palabras, S se anula sobre V si y sólo si $\langle S, \varphi\rangle = 0$ para todo $\varphi \in \mathcal{D}(V)$.

El **soporte de una distribución** $S \in \mathcal{D}'(U)$ es el complemento $U \setminus V$ del mayor abierto V en donde S se anula. ⟦ Nótese que si S se anula sobre V_1 y V_2, entonces S se anula sobre $V_1 \cup V_2$, porque cada $\varphi \in \mathcal{D}(V_1 \cup V_2)$ puede expresarse como $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ donde $\varphi_j \in \mathcal{D}(V_j)$ para $j = 1, 2$. ⟧

Ejemplo 3.20. El soporte de una distribución regular dada por una función $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(U)$ es el *soporte esencial* de f, es decir, el complemento del mayor abierto en donde f se anula casi por doquier.

Si $x \in U$, se sabe que $u\,\delta_x = u(x)\,\delta_x$ para todo $u \in C^\infty(U)$. Si $K \Subset U \setminus \{x\}$, entonces $\langle \delta_x, \varphi\rangle = \varphi(0) = 0$ para todo $\varphi \in \mathcal{D}_K$; luego, δ_x se anula sobre $U \setminus \{x\}$ pero no se anula sobre U. Por lo tanto, $U \setminus \{x\}$ es la mayor parte abierta de U en donde δ_x se anula. Se concluye que $\operatorname{sop} \delta_x = \{x\}$. $\lozenge$

Lema 3.21. *Sea $T \in \mathcal{D}'(U)$ donde U es un abierto en $\mathbb{R}^m$.*

(a) Si $\alpha \in \mathbb{N}^m$, entonces $\operatorname{sop}(\partial^\alpha T) \subseteq \operatorname{sop} T$.

(b) Si $u \in C^\infty(U)$, entonces $\operatorname{sop}(uT) \subseteq (\operatorname{sop} u) \cap (\operatorname{sop} T)$.

(c) Si $v \in C^\infty(U)$ es tal que $v(x) \equiv 1$ en un vecindario de $\operatorname{sop} T$*, entonces $vT = T$.*

Demostración. Ad (a): Si $V \subseteq U$ es un abierto tal que $T|_V = 0$ y si $\varphi \in \mathcal{D}(V)$, entonces $\partial^\alpha\varphi \in \mathcal{D}(V)$ también. Luego $\langle \partial^\alpha T, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, \partial^\alpha\varphi\rangle = 0$. Entonces $\operatorname{sop}(\partial^\alpha T) \subseteq U \setminus V$. Como $\operatorname{sop} T$ es la intersección de todos estos $U \setminus V$, se concluye que $\operatorname{sop}(\partial^\alpha T) \subseteq \operatorname{sop} T$.

Ad (b): La definición del soporte de T implica que $\langle T, \varphi\rangle = 0$ cuando $\operatorname{sop}\varphi$ y $\operatorname{sop} T$ son disjuntos. Si $\varphi \in \mathcal{D}(U)$ es tal que $\operatorname{sop}\varphi \cap \operatorname{sop} u \cap \operatorname{sop} T = \emptyset$, entonces que $\operatorname{sop}(\varphi u) \cap \operatorname{sop} T = \emptyset$ también, así que $\langle uT, \varphi\rangle = \langle T, u\varphi\rangle = 0$. Luego uT se anula sobre $U \setminus (\operatorname{sop} u \cap \operatorname{sop} T)$.

Ad (c): Sea V un abierto tal que $\operatorname{sop} T \subset V \subseteq U$ y $v(x) = 1$ para todo $x \in V$. Para $\varphi \in \mathcal{D}(U)$, está claro que $v\varphi \in \mathcal{D}(U)$ y $\operatorname{sop}(v\varphi - \varphi) \subseteq U \setminus V$, por tanto $\langle T, v\varphi - \varphi\rangle = 0$. Se concluye que $\langle vT, \varphi\rangle = \langle T, v\varphi\rangle = \langle T, \varphi\rangle$ para todo $\varphi \in \mathcal{D}(U)$. □

Proposición 3.22. *Sea U un abierto de $\mathbb{R}^m$ y sea $T \in \mathcal{D}'(U)$ una distribución* cuyo soporte es compacto. *Entonces T es de orden finito y se extiende a un funcional lineal y continuo sobre $C^\infty(U)$.*

Demostración. Sea $V \subseteq U$ un abierto con $\operatorname{sop} T \Subset V$ y $\overline{V} \Subset U$. (Esto es posible porque $\operatorname{sop} T$ es compacto y U es localmente compacto). Elíjase $\psi \in \mathcal{D}(U)$ tal que $\psi(x) = 1$ para $x \in V$. Entonces $\psi T = T$, por el Lema 3.21(c).

Por la continuidad de T sobre $\mathcal{D}(U)$, hay $C_1 > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que

$$|\langle T, \varphi\rangle| = |\langle \psi T, \varphi\rangle| = |\langle T, \psi\varphi\rangle| \leq C_1\, p_{\operatorname{sop}\psi,n}(\psi\varphi) \quad \text{para} \quad \varphi \in \mathcal{D}(U).$$

De la regla de Leibniz (3.13) se obtiene $p_{\operatorname{sop}\psi,n}(\psi\varphi) \leq p_{\operatorname{sop}\psi,n}(\psi)\, p_{\operatorname{sop}\varphi,n}(\varphi)$, así que

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leq C_2\, p_{\operatorname{sop}\varphi,n}(\varphi) \quad \text{donde} \quad C_2 = C_1\, p_{\operatorname{sop}\psi,n}(\psi).$$

En la última estimación, n no depende de φ (sino solamente de $\operatorname{sop}\psi$), así que T es de orden finito no mayor que n.

Si $u \in C^\infty(U)$, defínase

$$\langle T, u\rangle := \langle T, \psi u\rangle, \tag{3.15}$$

donde al lado derecho se usa el aparejamiento de $\mathcal{D}'(U)$ y $\mathcal{D}(U)$. Si por casualidad $u \in \mathcal{D}(U)$, es decir, si $\operatorname{sop} u$ es compacto, esta fórmula es consecuencia de la igualdad $uT = T$. Luego, la fórmula define una *extensión* de T a un funcional lineal sobre $C^\infty(U)$.

Si $u_k \to 0$ en el espacio de Fréchet $C^\infty(U)$, entonces $\partial^\alpha u_k \to 0$ uniformemente sobre compactos en U para todo $\alpha \in \mathbb{N}^m$. Por la regla de Leibniz, cada $\partial^\alpha(\psi u_k) \to 0$ uniformemente sobre $\operatorname{sop}\psi$, así que $\psi u_k \to 0$ en $\mathcal{D}_{\operatorname{sop}\psi}$ y por ende en $\mathcal{D}(U)$. Luego $\langle T, u_k\rangle \to 0$ cuando $k \to \infty$. En resumen: T es un funcional lineal *continuo* sobre $C^\infty(U)$. □

Notación. Escríbase $\mathcal{E}(U) \equiv C^\infty(U)$. Su espacio dual se denota por $\mathcal{E}'(U) := \mathcal{E}(U)^*$.

Lema 3.23. *Hay una correspondencia biunívoca entre elementos de $\mathcal{E}'(U)$ y distribuciones de soporte compacto sobre U.*

Demostración. La Proposición 3.22 dice que cualquier distribución $T \in \mathcal{D}'(U)$ con soporte compacto se extiende a un elemento de $\mathcal{E}'(U)$. Esta extensión, también denotado por T, es *única*, por dos razones. Primero: el lado derecho de la fórmula (3.15) no depende de ψ. En efecto, si $\chi \in \mathcal{D}(U)$ es otra función de prueba tal que $\chi \equiv 1$ en un vecindario de $\operatorname{sop} T$, entonces $\psi - \chi = 0$ en un vecindario de $\operatorname{sop} T$, así que $\langle T, (\psi - \chi)u\rangle = 0$ para todo $u \in \mathcal{E}(U)$, y por tanto $\langle T, \psi u\rangle = \langle T, \chi u\rangle$.

Segundo: $\mathcal{D}(U)$ es un *subespacio denso* de $\mathcal{E}(U)$. De hecho, al escribir $U = \uparrow\bigcup_n K_n$ con cada $K_n \subset K_{n+1}^\circ$, cualquier $u \in \mathcal{E}(U)$ es un límite, en la topología de $\mathcal{E}(U)$, de una sucesión $u\varphi_n$, donde $\varphi_n = 1$ sobre K_n y $\operatorname{sop}\varphi_n \Subset K_{n+1}^\circ$. En consecuencia, cual funcional lineal continuo sobre $\mathcal{E}(U)$ está determinado por su restricción al subespacio denso $\mathcal{D}(U)$.

Inversamente, cualquier elemento $S \in \mathcal{E}'(U)$ es un funcional lineal sobre $\mathcal{E}(U)$ que cumple la condición de continuidad siguiente: hay $L \Subset U$, $n \in \mathbb{N}$ y $C > 0$ tales que

$$|S(u)| \leq C\, p_{L,n}(u) \quad \text{para todo} \quad u \in \mathcal{E}(U).$$

En particular $|S(\varphi)| \leq C\, p_{L,n}(\varphi)$ para $\varphi \in \mathcal{D}(U)$, así que $\varphi \mapsto S(\varphi)$ es una distribución en U. Si $\varphi \in \mathcal{D}(U \setminus L)$, entonces φ se anula en un vecindario abierto de L y todas sus derivadas $\partial^\alpha\varphi$ se anulan allí también. Esto implica que $p_{L,n}(\varphi) = 0$ y por ende $S(\varphi) = 0$ para tales φ. Luego, el soporte de la distribución $\varphi \mapsto S(\varphi)$ cumple $\operatorname{sop} S \subseteq L$. □

De la demostración anterior, se obtiene dos aplicaciones lineales inyectivas:

$$\mathcal{D}(U) \hookrightarrow \mathcal{E}(U) \quad \text{y} \quad \mathcal{E}'(U) \hookrightarrow \mathcal{D}'(U). \tag{3.16}$$

La primera es la inclusión, porque $\mathcal{D}(U) \subset \mathcal{E}(U)$. La otra está dada por la restricción de $S \in \mathcal{E}'(U)$ a un funcional lineal continuo sobre el subespacio denso $\mathcal{D}(U)$. Para cada $K \Subset U$, la inclusión $\mathcal{D}_K \hookrightarrow \mathcal{E}(U)$ es continua; por tanto, la inclusión $\mathcal{D}(U) \hookrightarrow \mathcal{E}(U)$ también es continua. La segunda inyección en (3.16) es la *transpuesta* de la primera.

Definición 3.24. En vista de (3.16), se puede considerar el espacio localmente convexo $\mathcal{E}'(U)$ como un subespacio vectorial de $\mathcal{D}'(U)$. Dícese, entonces, que $\mathcal{E}'(U)$ es **el espacio de distribuciones de soporte compacto** sobre U.

3.2 La convolución de funciones y distribuciones

En esta sección, el papel de las traslaciones será fundamental. En vez de un abierto arbitrario $U \subset \mathbb{R}^m$, se estudiará funciones y distribuciones sobre todo $\mathbb{R}^m$ solamente. Las integrales $\int(\cdot)\, d^m x$ se toman sobre todo $\mathbb{R}^m$, salvo mención explícita de lo contrario.

Definición 3.25. Si $f, g \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ son dos *funciones continuas*, su **convolución** es la función $f * g \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ definida por la fórmula

$$f * g(x) := \int f(x-y)\, g(y)\, d^m y = \int f(z)\, g(x-z)\, d^m z \tag{3.17}$$

toda vez que estas integrales existen para todo $x \in \mathbb{R}^m$. Las dos integrales son iguales porque la medida de Lebesgue es invariante bajo el cambio de variable $z = x - y$ para cada x fijo. La simetría de la fórmula indica que $f * g = g * f$ si al menos una de las dos existe.[9]

Si f y g son funciones continuas y una de ellas tiene soporte compacto, entonces las integrales existen y definen una función continua $f * g$ sobre $\mathbb{R}^m$.

En cambio, no es posible convolver dos funciones constantes. Por ejemplo, si $f = g = 1$, el lado derecho de (3.17) sería $x \mapsto \int 1\, d^m x = +\infty$ con una integral divergente.

Si $f * g(x) \neq 0$, entonces hay al menos un punto $y \in \mathbb{R}^m$ tal que $f(x-y) \neq 0$ y $g(y) \neq 0$, así que $x = (x-y) + y \in (\operatorname{sop} f) + (\operatorname{sop} g)$. En consecuencia,[10]

$$\operatorname{sop}(f * g) \subseteq (\operatorname{sop} f) + (\operatorname{sop} g) \quad \text{si } f * g \text{ existe.} \tag{3.18}$$

Notación. Si $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ es una función, la fórmula $\check{f}(y) := f(-y)$ define su **reflexión** $\check{f}$ en el origen. Si $\tau_x f(y) := f(y-x)$ es la *traslación* por $x \in \mathbb{R}^m$, escríbase $\check{\tau}_x f := \tau_x \check{f}$, es decir, $\check{\tau}_x f(y) := \check{f}(y-x) \equiv f(x-y)$. Entonces la definición (3.17) puede escribirse en la forma abreviada:

$$f * g(x) := \langle \check{\tau}_x f, g \rangle = \langle f, \check{\tau}_x g \rangle.$$

Lema 3.26. *Sean $f, g, h \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^m)$. Si uno de f, g tiene soporte compacto, entonces*

(a) $\tau_z(f * g) = \tau_z f * g = f * \tau_z g$ para todo $z \in \mathbb{R}^m$;

(b) $f * g \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^m)$ con $\partial^\alpha(f * g) = \partial^\alpha f * g = f * \partial^\alpha g$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}^m$.

Si dos *de las funciones f, g, h tienen soportes compactos, entonces*

[9] La fórmula (3.17) también define la convolución de otras clases de funciones. Por ejemplo, si $f \in L^1(\mathbb{R}^m)$ y $g \in L^\infty(\mathbb{R}^m)$, entonces la segunda integral define una función $f * g \in L^\infty(\mathbb{R}^m)$, que satisface la desigualdad $\|f * g\|_\infty \le \|f\|_1 \|g\|_\infty$.

[10] Si A, B son dos partes de un espacio vectorial, su **suma** es el conjunto $A + B := \{\, x + y : x \in A,\ y \in B \,\}$.

(c) la siguiente fórmula integral es válida:

$$\langle f * g, h \rangle = \iint f(x)\, g(y)\, h(x+y)\, d^m x\, d^m y; \tag{3.19}$$

(d) la convolución es asociativa*:* $f * (g * h) = (f * g) * h$.

Demostración. Ad (a): Este es un cálculo inmediato.

Ad (b): Para $j = 1, \dots, m$, la fórmula $\partial_j (f * g) = \partial_j f * g$ se obtiene por derivación debajo del signo integral. Si $\operatorname{sop} g$ es compacto, la primera integral en (3.17) es una integral sobre $\operatorname{sop} g$; en ese dominio, la función $y \mapsto f(x-y)\, g(y)$ es uniformemente continua y diferenciable con respecto a la variable x. Si $\operatorname{sop} f$ es compacto, la misma función es uniformemente continua en el dominio compacto $\check{\tau}_x(\operatorname{sop} f) + \overline{B}(0;\delta)$, para cualquier $\delta > 0$.

Las mismas consideraciones para la segunda integral en (3.17) establecen la fórmula $\partial_j (f * g) = f * \partial_j g$. El caso general sigue por inducción sobre el orden de derivación.

Ad (c): Un cálculo formal indica que

$$\begin{aligned} \langle f * g, h \rangle &= \int f * g(x)\, h(x)\, d^m x = \iint f(x-y)\, g(y)\, h(x)\, d^m y\, d^m x \\ &= \iint f(x-y)\, g(y)\, h(x)\, d^m x\, d^m y = \iint f(x)\, g(y)\, h(x+y)\, d^m x\, d^m y. \end{aligned}$$

Para justificar este cálculo, basta notar que la función $L(x,y) := f(x-y)\, g(y)\, h(x)$ tiene soporte compacto en $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$; entonces se puede usar la continuidad uniforme de este integrando, o bien el teorema de Fubini, para cambiar del orden de integración.

Ad (d): La asociatividad sigue por un cálculo directo: se requiere la compacidad de al menos dos soportes para obtener la *existencia* de las convoluciones $f * (g * h)$ y $(f * g) * h$. Alternativamente, basta observar que, para todo $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$, estas dos funciones aparejadas con φ dan el mismo resultado:

$$\langle f * g * h, \varphi \rangle = \iiint f(x)\, g(y)\, h(z)\, \varphi(x+y+z)\, d^m x\, d^m y\, d^m z.$$

Dicho de otro modo: la asociatividad de la convolución de funciones es consecuencia de la asociatividad de la suma en $\mathbb{R}^m$. $\square$

El lema anterior muestra que la convolución establece dos operaciones bilineales $\mathcal{E}(\mathbb{R}^m) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^m) \to \mathcal{E}(\mathbb{R}^m)$ y $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m) \times \mathcal{E}(\mathbb{R}^m) \to \mathcal{E}(\mathbb{R}^m)$. De la relación (3.18), también define una operación $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^m) \to \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$, la cual es conjuntamente continua.

► A continuación, se extenderá la convolución a una operación entre dos distribuciones (toda vez que sean convolvibles), por dualidad. Hay una etapa intermedia, donde primero se convuelve una distribución con una función de prueba.

Definición 3.27. Si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ y $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$, su **convolución** $T * \varphi$ es la función en $\mathcal{E}(\mathbb{R}^m)$ definido por la fórmula[11]

$$T * \varphi(x) := \langle T, \check{\tau}_x\varphi\rangle = \langle T(y), \varphi(x-y)\rangle. \tag{3.20}$$

En (3.9), la traslación $\tau_b T$ fue definido por transposición, $\langle \tau_b T, \varphi\rangle := \langle T, \tau_{-b}\varphi\rangle$. De igual manera, se puede definir:

$$\langle \check{T}, \varphi\rangle := \langle T, \check{\varphi}\rangle, \qquad \langle \check{\tau}_b T, \varphi\rangle := \langle T, \check{\tau}_b\varphi\rangle.$$

Fíjese que $\check{\tau}_b T = \tau_b \check{T}$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$, porque

$$\langle \check{\tau}_b T, \varphi\rangle = \langle T, \tau_b\check{\varphi}\rangle = \langle T, (\tau_{-b}\varphi)\check{}\,\rangle = \langle \check{T}, \tau_{-b}\varphi\rangle = \langle \tau_b\check{T}, \varphi\rangle.$$

Proposición 3.28. *Si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ y si $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$, entonces*

(a) $\tau_z(T * \varphi) = \tau_z T * \varphi = T * \tau_z\varphi$ *para todo* $z \in \mathbb{R}^m$*;*

(b) $T * \varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^m)$ *con* $\partial^\alpha(T * \varphi) = \partial^\alpha T * \varphi = T * \partial^\alpha\varphi$ *para todo* $\alpha \in \mathbb{N}^m$*;*

(c) $\operatorname{sop}(T * \varphi) \subseteq (\operatorname{sop} T) + (\operatorname{sop}\varphi)$*; y*

(d) $T * (\varphi * \psi) = (T * \varphi) * \psi$.

Demostración. Ad (a): Esta identidad sigue por cálculo directo:

$$\begin{aligned}[\tau_z(T * \varphi)](x) &= T * \varphi(x-z) = \langle T, \check{\tau}_{x-z}\varphi\rangle = \langle T, \tau_{x-z}\check{\varphi}\rangle \\ &= \langle T, \tau_{-z}\tau_x\check{\varphi}\rangle = \langle \tau_z T, \check{\tau}_x\varphi\rangle = \tau_z T * \varphi(x) \\ &= \langle T, \tau_x\tau_{-z}\check{\varphi}\rangle = \langle T, \tau_x(\tau_z\varphi)\check{}\,\rangle = \langle T, \check{\tau}_x(\tau_z\varphi)\rangle = T * \tau_z\varphi(x).\end{aligned}$$

Ad (b): Para $j = 1, \dots, m$, la regla de la cadena muestra que

$$\partial_j(\check{\tau}_x\varphi)(y) = \partial_j\big(y \mapsto \varphi(x-y)\big) = -\partial_j\varphi(x-y) = -\check{\tau}_x(\partial_j\varphi)(y) \quad \text{para} \quad y \in \mathbb{R}^m,$$

[11] Anticipando la eventual conmutatividad de la convolución de distribuciones, se podría definir $\varphi * T$ por $\varphi * T(x) := \langle \check{\tau}_x T, \varphi\rangle$, lo cual coincide con $T * \varphi(x)$. Sin embargo, para enfatizar la aplicación lineal $\varphi \mapsto T * \varphi$, de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ en $\mathcal{E}(\mathbb{R}^m)$, en las fórmulas se colocará la distribución a la izquierda de la función de prueba.

así que

$$T * \partial_j\varphi(x) = \langle T, \check{\tau}_x(\partial_j\varphi)\rangle = -\langle T, \partial_j(\check{\tau}_x\varphi)\rangle = \langle \partial_j T, \check{\tau}_x\varphi\rangle = \partial_j T * \varphi(x).$$

Si $\{e_1, \dots, e_m\}$ es la base estándar para $\mathbb{R}^m$, se calcula

$$\frac{T * \varphi(x + he_j) - T * \varphi(x)}{h} = \frac{\langle T, \check{\tau}_{x+he_j}\varphi - \check{\tau}_x\varphi\rangle}{h} = \left\langle T, \frac{\check{\tau}_{x+he_j}\varphi - \check{\tau}_x\varphi}{h}\right\rangle. \tag{3.21}$$

La función de prueba al lado derecho del corchete es $y \mapsto (\varphi(x + he_j - y) - \varphi(x - y))/h$, la cual converge a $y \mapsto \partial_j\varphi(x - y)$, es decir, a $\check{\tau}_x(\partial_j\varphi)$, cuando $h \to 0$. Si K es un compacto en $\mathbb{R}^m$ con $\operatorname{sop}\varphi \subseteq K$, esta convergencia es uniforme para $y \in \{x\} - K$. Por tanto, $(\check{\tau}_{x+he_j}\varphi - \check{\tau}_x\varphi)/h \to \check{\tau}_x(\partial_j\varphi)$ en $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ cuando $h \to 0$. La continuidad de T sobre $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ entonces implica que la fracción (3.21) tiende a $\langle T, \check{\tau}_x(\partial_j\varphi)\rangle = T * \partial_j\varphi(x)$ cuando $h \to 0$, para cada $x \in \mathbb{R}^m$.

Un argumento similar (y más sencillo) establece que la función $T * \psi$ es continua, para cada $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$. Se concluye que la función $T*\varphi$ es continuamente diferenciable sobre $\mathbb{R}^m$, con $\partial_j(T * \varphi) = T * \partial_j\varphi$ para cada j. Por inducción sobre el orden de derivación, se obtiene la suavidad de $T * \varphi$ y las fórmulas del enunciado, parte (b).

Ad (c): La suma puntual $(\operatorname{sop} T) + (\operatorname{sop}\varphi)$ es cerrado en $\mathbb{R}^m$, porque $\operatorname{sop} T$ es cerrado y $\operatorname{sop}\varphi$ es compacto.[12] Para que $T * \varphi(x) \neq 0$, es decir, $\langle T, \check{\tau}_x\varphi\rangle \neq 0$, es necesario que $(\operatorname{sop} T) \cap (\operatorname{sop}\check{\tau}_x\varphi) = (\operatorname{sop} T) \cap (\{x\} - \operatorname{sop}\varphi) \neq \emptyset$; luego hay $y \in \operatorname{sop} T$ tal que $x - y \in \operatorname{sop}\varphi$, así que $x = y + (x - y) \in (\operatorname{sop} T) + (\operatorname{sop}\varphi)$. Por lo tanto,

$$\{\, x : T * \varphi(x) \neq 0 \,\} \subseteq (\operatorname{sop} T) + (\operatorname{sop}\varphi).$$

Como el lado derecho es un conjunto cerrado, también incluye la clausura del lado izquierdo, el cual es $\operatorname{sop}(T * \varphi)$.

Ad (d): El conjunto $K := (\operatorname{sop}\varphi) + (\operatorname{sop}\psi)$ es compacto, por ser la imagen del producto cartesiano de dos compactos $(\operatorname{sop}\varphi) \times (\operatorname{sop}\psi)$ bajo la función continua $(x, y) \mapsto x + y$ de $\mathbb{R}^{2m}$ en $\mathbb{R}^m$. Entonces, para $\varepsilon > 0$, la suma

$$S_\varepsilon(\varphi, \psi)(y) := \sum_{u \in \mathbb{Z}^m} \varphi(y - \varepsilon u)\, \varepsilon^m \psi(\varepsilon u)$$

se anula para $y \notin (\operatorname{sop}\varphi) + (\operatorname{sop}\psi)$ y por ende es una suma *finita*. Esta $S_\varepsilon(\varphi, \psi)$ es una suma de Riemann que converge, uniformemente sobre compactos, a la función $\varphi * \psi$ cuando

[12] Para comprobar esta propiedad topológica de la suma puntual, sean A un cerrado y K un compacto en $\mathbb{R}^m$. Si $z \in \overline{A + K}$, hay sucesiones $(x_n) \subseteq A$ y $(y_n) \subseteq K$ tales que $x_n + y_n \to z$. Por compacidad, hay una subsucesión (y_{n_k}) de (y_n) tal que $y_{n_k} \to y$ con $y \in K$. Entonces $x_{n_k} \to z - y$; como límite de una sucesión en A, se ve que $z - y \in A$, así que $z = (z - y) + y \in A + K$. Se concluye que $A + K$ es cerrado en $\mathbb{R}^m$.

$\varepsilon \to 0$. De hecho, como $\partial^\alpha(\varphi * \psi) = \partial^\alpha\varphi * \psi$ para $\alpha \in \mathbb{N}^m$, estas sumas de Riemann convergen a $\varphi * \psi$ en la topología de $\mathcal{D}_K$. Por lo tanto, para $x \in \mathbb{R}^m$ se obtiene

$$\begin{aligned} [T * (\varphi * \psi)](x) &= \langle T, \check{\tau}_x(\varphi * \psi)\rangle = \langle T, \check{\tau}_x\varphi * \psi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\langle T, \check{\tau}_x S_\varepsilon(\varphi, \psi)\rangle \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\Big\langle T, \sum_{u\in\mathbb{Z}^m} \check{\tau}_{x-\varepsilon u}\varphi\, \varepsilon^m \psi(\varepsilon u)\Big\rangle \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{u\in\mathbb{Z}^m} T * \varphi(x - \varepsilon u)\, \varepsilon^m \psi(\varepsilon u) = \int T * \varphi(x-y)\, \psi(y)\, d^m y \\ &= [(T * \varphi) * \psi](x). \end{aligned}$$ ☐

Corolario 3.29. *Si $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^m)$ y $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$, entonces $S * \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$.*

Demostración. Por la Proposición 3.28, se sabe que $S * \varphi \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^m)$ y que $\operatorname{sop}(S * \varphi) \subseteq (\operatorname{sop} S) + (\operatorname{sop}\varphi)$. Como $\operatorname{sop} S$ es compacto, esta suma puntual es compacto y su parte cerrada $\operatorname{sop}(S * \varphi)$ también es compacta. ☐

La fórmula (3.20) también sirve para definir la convolución de una distribución de soporte compacto con una función suave cualquiera. Si $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^m)$ y $u \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^m)$, defínase

$$S * u(x) := \langle S, \check{\tau}_x u\rangle = \langle S(y), u(x-y)\rangle \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}^m.$$

La demostración de la Proposición 3.28, *mutatis mutandis*, muestra que $S * u$ es un función suave con $\operatorname{sop}(S * u) \subseteq (\operatorname{sop} S) + (\operatorname{sop} u)$. Además, si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$, entonces $S * (u * \varphi) = (S * u) * \varphi$.

► La convolvabilidad de una distribución y una función suave, si al menos uno de los soportes es compacto, permite emplear esta operación para *suavizar* una distribución.

Lema 3.30. *Sea $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\int \psi(x)\, d^m x = 1$. Defínase $\psi_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-m}\psi(x/\varepsilon)$ para $\varepsilon > 0$. Si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$, entonces $T * \psi_\varepsilon \to T$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ cuando $\varepsilon \downarrow 0$.*

Demostración. Si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$, fíjese que $T * \varphi(0) = \langle T, \check{\varphi}\rangle$ por la Definición 3.27. Al cambiar $\varphi \leftrightarrow \check{\varphi}$, se obtiene la fórmula útil $\langle T, \varphi\rangle = T * \check{\varphi}(0)$. Entonces

$$\langle T * \psi_\varepsilon, \check{\varphi}\rangle = [T * \psi_\varepsilon * \varphi](0) = \langle T, (\psi_\varepsilon * \varphi)\check{}\,\rangle.$$

Basta entonces comprobar que $\psi_\varepsilon * \varphi \to \varphi$ en $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ cuando $\varepsilon \downarrow 0$, para cada $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$.

Hay $R > 0$ tal que $\operatorname{sop}\psi \subseteq \overline{B}(0; R)$ y por ende $\operatorname{sop}\psi_\varepsilon \subseteq \overline{B}(0; \varepsilon R)$. Entonces

$$|\psi_\varepsilon * \varphi(x) - \varphi(x)| = \left|\int \psi_\varepsilon(y)\,(\varphi(x-y) - \varphi(x))\, d^m y\right| \le \|\psi\|_1 \sup_{\|y\|\le\varepsilon R} |\varphi(x-y) - \varphi(x)|$$

para $x \in \mathbb{R}^m$. Como φ es uniformemente continua, esta estimación muestra que $\psi_\varepsilon * \varphi \to \varphi$ uniformemente sobre $\mathbb{R}^m$. Al reemplazar φ por cualquier $\partial^\alpha\varphi$, se ve que $\partial^\alpha(\psi_\varepsilon * \varphi) = \psi_\varepsilon * \partial^\alpha\varphi \to \partial^\alpha\varphi$ uniformemente. Para $0 < \varepsilon \leq 1$, se obtiene que $\psi_\varepsilon * \varphi \to \varphi$ en $\mathcal{D}_K$ donde $K = \operatorname{sop}\varphi + \overline{B}(0; R)$. Esto implica que $\psi_\varepsilon * \varphi \to \varphi$ en $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$. □

Corolario 3.31. $\mathcal{E}(\mathbb{R}^m)$ *es denso en* $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$. ⊟

Una modificación del resultado anterior permite demostrar que, para $U \subseteq \mathbb{R}^m$ un abierto cualquiera, *cada* $T \in \mathcal{D}'(U)$ *es el límite de una sucesión en* $\mathcal{D}(U)$. Como U es σ-compacto, se puede hallar una sucesión creciente de funciones no negativas $\chi_k \in \mathcal{D}(U)$, como en la demostración de la Proposición 3.22, tales que $\chi_k T \to T$ en $\mathcal{D}'(U)$. También hay números positivos $\varepsilon_k \to 0$ tales que $(\operatorname{sop}\chi_k) + (\operatorname{sop}\psi_{\varepsilon_k}) \subset U$. Como $\chi_k T$ es una distribución de soporte compacto en U, puede ser considerado como un elemento de $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^m)$. Entonces la función $\varphi_k := \chi_k T * \psi_{\varepsilon_k}$ queda en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$. No es difícil verificar que $\varphi_k|_U \to T$ en $\mathcal{D}'(U)$ cuando $k \to \infty$.

En síntesis, hay una cadena de inclusiones:

$$\mathcal{D}(U) \hookrightarrow \mathcal{E}(U) \hookrightarrow \mathcal{E}'(U) \hookrightarrow \mathcal{D}'(U),$$

donde cada flecha es una aplicación lineal continua e inyectiva con imagen densa.

► La Proposición 3.28(a) dice que la aplicación lineal $\varphi \mapsto T * \varphi$ conmuta con todas las traslaciones por vectores en $\mathbb{R}^m$. Además, como se verá a continuación, esta operación es *continua*. Un resultado importante, para no decir sorprendente, dice que cualquier operador que conmuta con traslaciones es la convolución por alguna distribución.

Proposición 3.32. *(a) Si* $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$*, la correspondencia* $\varphi \mapsto T * \varphi$ *es una aplicación lineal continua de* $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ *en* $\mathcal{E}(\mathbb{R}^m)$.

(b) Inversamente, si $L \in \mathcal{L}(\mathcal{D}(\mathbb{R}^m), \mathcal{E}(\mathbb{R}^m))$ *conmuta con las traslaciones,* $\tau_z L = L\tau_z$ *para todo* $z \in \mathbb{R}^m$*, entonces hay una única* $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ *tal que* $L(\varphi) = T * \varphi$ *para todo* $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$.

Demostración. Ad (a): La linealidad de $\varphi \mapsto T * \varphi$ es evidente. Para comprobar su continuidad, hay que mostrar que su restricción a cualquier $\mathcal{D}_K$ es continua como aplicación lineal entre los espacios de Fréchet $\mathcal{D}_K$ y $\mathcal{E}(\mathbb{R}^m)$. En ese contexto, basta verificar que dicha aplicación tiene grafo cerrado, por el Teorema 2.24 (que también es válido cuando el dominio y el codominio son espacios de Fréchet.)

Supóngase, entonces, que $\varphi_k \to \varphi$ en $\mathcal{D}_K$ y que $T * \varphi_k \to u \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^m)$. Si $x \in \mathbb{R}^m$, entonces $\check{\tau}_x\varphi_k \to \check{\tau}_x\varphi$ en $\mathcal{D}_{\{x\}-K}$, así que $\check{\tau}_x\varphi_k \to \check{\tau}_x\varphi$ en $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$. Por lo tanto, vale

$$u(x) = \lim_{k\to\infty} T * \varphi_k(x) = \lim_{k\to\infty} \langle T, \check{\tau}_x\varphi_k\rangle = \langle T, \lim_{k\to\infty} \check{\tau}_x\varphi_k\rangle = \langle T, \check{\tau}_x\varphi\rangle = T * \varphi(x).$$

Entonces $u = T * \varphi$. Se concluye que $\varphi \mapsto T * \varphi$ tiene grafo cerrado, para $\varphi \in \mathcal{D}_K$.

Ad (b): Defínase $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ por $\langle T, \varphi\rangle := L(\check\varphi)(0)$. El lado derecho es la composición de tres operaciones continuas, $\varphi \mapsto \check\varphi$ en $\mathcal{L}(\mathcal{D}(\mathbb{R}^m))$, L mismo, y $u \mapsto u(0)$ en $\mathcal{E}(\mathbb{R}^m)^*$; por tanto, define una distribución T.

Como L conmuta con traslaciones, cada $x \in \mathbb{R}^m$ cumple

$$L(\varphi)(x) = \tau_{-x}L(\varphi)(0) = L(\tau_{-x}\varphi)(0) = \langle T, \tau_x\check\varphi\rangle = \langle T, \check\tau_x\varphi\rangle = T * \varphi(x).$$

Luego $L(\varphi) = T * \varphi$ en $\mathcal{E}(\mathbb{R}^m)$. La unicidad de T está clara: si $L(\varphi) = T_1 * \varphi$ para todo φ, entonces $(T - T_1) * \varphi = 0$ para todo φ. Al evaluar en 0, se obtiene $\langle T - T_1, \varphi\rangle = [(T - T_1) * \check\varphi](0) = 0$ para todo φ, así que $T - T_1 = 0$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$. □

► Por último, hay que considerar *la convolución de dos distribuciones*. Desde luego, la existencia de dicha convolución requiere alguna condición sobre los soportes. Si una de las dos distribuciones tiene soporte compacto, la convolución debe existir. Considérese primero el caso de tres funciones suaves $f, g, h \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^m)$, donde al menos dos de ellas tienen soporte compacto. Entonces la fórmula (3.19) implica que

$$\begin{aligned}\langle f * g, h\rangle &= \iint f(x)\,g(y)\,h(x+y)\,d^mx\,d^my \\ &= \iint f(w+z)\,g(-w)\,h(z)\,d^mw\,d^mz = \langle f, \check g * h\rangle.\end{aligned}$$

Informalmente: el operador $f \mapsto f * g$ es la transpuesta del operador $h \mapsto \check g * h$.

Definición 3.33. Sean $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ y $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^m)$ dos distribuciones, donde S tiene soporte compacto. Las convoluciones $S * T$ y $T * S$ son las distribuciones definidas por[13]

$$\begin{aligned}\langle S * T, \varphi\rangle &:= \langle S, \check T * \varphi\rangle, \\ \langle T * S, \varphi\rangle &:= \langle T, \check S * \varphi\rangle,\end{aligned} \qquad \text{para} \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m). \tag{3.22}$$

Obsérvese que $\check T * \varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^m)$ y $\check S * \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$, así que los lados derechos de estas dos asignaciones están bien definidos. Además, la aplicación lineal $\varphi \mapsto \check T * \varphi$ es continua, por la Proposición 3.32; cuya demostración también muestra que $\varphi \mapsto \check S * \varphi$, para $\varphi \in \mathcal{D}_K$, tiene grafo cerrado como aplicación lineal de $\mathcal{D}_K$ en $\mathcal{D}_{K-(\operatorname{sop} S)}$. En consecuencia, $\varphi \mapsto \check S * \varphi$ queda en $\mathcal{L}(\mathcal{D}(\mathbb{R}^m))$. Por lo tanto, los dos lados derechos de (3.22) definen distribuciones sobre $\mathbb{R}^m$.

[13]Hay una definición alternativa de $S * T$, basada en la fórmula (3.19), a reescribir esa fórmula como $\langle f * g, h\rangle = \langle f \otimes g, h^\Delta\rangle$. Aquí $f \otimes g(x, y) := f(x)g(y)$ mientras $h^\Delta(x, y) := h(x + y)$. Entonces una definición posible de la convolución de dos distribuciones es $\langle S * T, \varphi\rangle := \langle S \otimes T, \varphi^\Delta\rangle$. Sin embargo, si $0 \neq \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$, entonces $\varphi^\Delta \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^{2m})$ pero el soporte de φ^Δ no es compacto. Para un enfoque que logra superar esta dificultad, véase el libro de Horváth, *op, cit.*, sección 4.9.

El caso especial $S = \delta$ merece espacial atención. Para todo $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$, las igualdades $\delta * \varphi(x) = \check{\tau}_x\varphi(0) = \varphi(x)$ implican que $\delta * \varphi = \varphi$. Además, si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$, entonces

$$\begin{aligned} \langle \delta * T, \varphi \rangle &= \langle \delta, \check{T} * \varphi \rangle = \check{T} * \varphi(0) = \langle \check{T}, \check{\varphi} \rangle = \langle T, \varphi \rangle, \\ \langle T * \delta, \varphi \rangle &= \langle T, \check{\delta} * \varphi \rangle = \langle T, \delta * \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle, \end{aligned} \tag{3.23}$$

así que $\delta * T = T * \delta = T$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$. En otras palabras, la delta de Dirac sirve como elemento unidad para la operación de convolución.

Proposición 3.34. *Sean $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ y $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^m)$ dos distribuciones, donde S tiene soporte compacto. Entonces:*

(a) las dos distribuciones definidos por (3.22) *coinciden; es decir, $S * T = T * S$;*

(b) $\operatorname{sop}(S * T) \subseteq (\operatorname{sop} S) + (\operatorname{sop} T)$*;*

(c) si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$, entonces $(S * T) * \varphi = S * (T * \varphi)$;

(d) si $R \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^m)$, entonces $R * (S * T) = (R * S) * T$;

(e) $\partial^\alpha T = \partial^\alpha \delta * T$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}^m$;

(f) $\partial^\alpha (S * T) = \partial^\alpha S * T = S * \partial^\alpha T$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}^m$.

Demostración. Ad (a): La demostración del Lema 3.30 implica que $\varphi * \psi_\varepsilon \to \varphi$ en $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ para $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$. Entonces las distribuciones de la forma $\varphi * \psi$ generan un *subespacio denso* de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$. Para comprobar que $S * T = T * S$, basta entonces mostrar que $\langle S * T, \varphi * \psi \rangle = \langle T * S, \varphi * \psi \rangle$ para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$. Esta igualdad sigue del cálculo siguiente:

$$\begin{aligned} \langle S * T, \varphi * \psi \rangle &= \langle S, \check{T} * (\varphi * \psi) \rangle = \langle S, (\check{T} * \varphi) * \psi \rangle = \langle S, \psi * (\check{T} * \varphi) \rangle \\ &= \langle S * \check{\psi}, \check{T} * \varphi \rangle = \langle \check{T} * \varphi, S * \check{\psi} \rangle = \langle \check{T}, \check{\varphi} * (S * \check{\psi}) \rangle \\ &= \langle T, \varphi * (\check{S} * \psi) \rangle = \langle T, (\check{S} * \psi) * \varphi \rangle = \langle T, \check{S} * (\psi * \varphi) \rangle \\ &= \langle T, \check{S} * (\varphi * \psi) \rangle = \langle T * S, \varphi * \psi \rangle. \end{aligned}$$

Ad (b): Fíjese que $(\operatorname{sop} S) + (\operatorname{sop} T)$ es cerrado en $\mathbb{R}^m$, porque $\operatorname{sop} T$ es cerrado y $\operatorname{sop} S$ es compacto. Si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ cumple $(\operatorname{sop} \varphi) \cap ((\operatorname{sop} S) + (\operatorname{sop} T)) = \emptyset$, entonces

$$(\operatorname{sop}\ T) \cap ((\operatorname{sop} \varphi) - (\operatorname{sop} S)) = (\operatorname{sop} T) \cap ((\operatorname{sop} \varphi) + (\operatorname{sop} \check{S})) = \emptyset$$

y por ende $(\operatorname{sop} T) \cap \operatorname{sop}(\check{S} * \varphi) = \emptyset$, lo cual implica que $\langle S * T, \varphi \rangle = \langle T, \check{S} * \varphi \rangle = 0$. Esto a su vez implica que $(\operatorname{sop} \varphi) \cap \operatorname{sop}(S * T) = \emptyset$.

Para cualquier abierto $V \subset \mathbb{R}^m$, hay $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ con $\operatorname{sop}\varphi \subset V$. El argumento anterior implica que si $V \cap ((\operatorname{sop} S) + (\operatorname{sop} T)) = \emptyset$, entonces $V \cap \operatorname{sop}(S * T) = \emptyset$. Se concluye que $\operatorname{sop}(S * T) \subseteq (\operatorname{sop} S) + (\operatorname{sop} T)$.

Ad (c): Si $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$, la Proposición 3.28(d) implica que

$$\begin{aligned}\langle (S * T) * \varphi, \psi\rangle &= \langle S * T, \check{\varphi} * \psi)\rangle = \langle S, \check{T} * (\check{\varphi} * \psi)\rangle \\ &= \langle S, (\check{T} * \check{\varphi}) * \psi\rangle = \langle S * (T * \varphi), \psi\rangle.\end{aligned}$$

Ad (d): Si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$, la parte (c) implica que

$$\begin{aligned}\langle R * (S * T), \varphi\rangle &= \langle R, (\check{S} * \check{T}) * \varphi\rangle = \langle R, \check{S} * (\check{T} * \varphi)\rangle \\ &= \langle R * S, \check{T} * \varphi\rangle = \langle (R * S) * T, \varphi\rangle.\end{aligned}$$

Ad (e): En vista de las propiedades $\delta * \psi = \psi$ para $\psi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^m)$; $\delta * T = T$ de (3.23); y la Proposición 3.28(b); se obtiene, para cada $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$:

$$\begin{aligned}\langle \partial^\alpha T, \varphi\rangle &= (-1)^{|\alpha|}\langle T, \partial^\alpha \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, \delta * \partial^\alpha \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, \partial^\alpha \delta * \varphi\rangle \\ &= \langle T, (\partial^\alpha \delta)^\vee * \varphi\rangle = \langle T * \partial^\alpha \delta, \varphi\rangle = \langle \partial^\alpha \delta * T, \varphi\rangle.\end{aligned}$$

Ad (f): Al combinar las partes (a), (d) y (e), se obtiene

$$\begin{aligned}\partial^\alpha(S * T) &= \partial^\alpha \delta * (S * T) = (\partial^\alpha \delta * S) * T = \partial^\alpha S * T \\ &= \partial^\alpha \delta * (T * S) = (\partial^\alpha \delta * T) * S = \partial^\alpha T * S = S * \partial^\alpha T.\end{aligned}$$ □

Corolario 3.35. *El espacio de Fréchet $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^m)$ es un álgebra conmutativa y asociativa bajo convolución.* ⊟

La convolución sobre $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^m)$ es una aplicación bilineal, $(R, S) \mapsto R * S$. La demostración de la Proposición 3.32 puede adaptarse para comprobar que $R \mapsto R * S$ y $S \mapsto R * S$ son continuas; es decir, la convolución es *separadamente continua*. En vista del Corolario 2.19, que también es válido para espacios de Fréchet, la convolución es *conjuntamente continua*. Este "producto" continuo hace de $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^m)$ un **álgebra topológica**.[14]

[14] La aplicación bilineal $(T, S) \mapsto T * S : \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m) \times \mathcal{E}'(\mathbb{R}^m) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ *no* es conjuntamente continua. Para formular esta afirmación con precisión, hay que especificar la topología sobre $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ en ambos lados: en vez de la topología de convergencia simple usada en este capítulo, se podría usar la llamada topología fuerte, la de convergencia uniforme sobre partes acotadas de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$. Para una descripción detallada de la continuidad de la convolución y la multiplicación entre diversos espacios de funciones de prueba y distribuciones, véase: Julian Larcher, "Multiplications and convolutions in L. Schwartz' spaces of test functions and distributions and their continuity", `arXiv:1209.4174`, Innsbruck, 2012.

3.3 Distribuciones temperadas y transformadas de Fourier

Una función en $L^2[-\pi,\pi]$ posee un desarrollo en una serie de Fourier, con respecto a la base ortonormal de funciones trigonométricas $u_n(x) := (2\pi)^{-1/2}\, e^{inx}$, para $n \in \mathbb{Z}$. (Véase el Ejemplo 1.38.) Estas funciones trigonométricas están definidas para $t \in \mathbb{R}$, como *funciones periódicas* de período 2π. Una serie de Fourier $f(x) \leftrightarrow \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\, u_n(x)$ representa una función periódica sobre $\mathbb{R}$; hay que estudiar su convergencia y su coincidencia (o no) con la función f cuyos coeficientes $a_n := \langle u_n \mid f\rangle$ determinan la serie de Fourier.

Muchas *funciones no periódicas* sobre $\mathbb{R}$ pueden expresarse como una superposición de las funciones $u_t(x) := (2\pi)^{-1/2}\, e^{itx}$, cuyo parámetro t no es necesariamente entero. Es necesario reemplazar la serie por una integral $f(x) \leftrightarrow \int_{\mathbb{R}} a(t)\, u_t(x)\, dt$, con las consideraciones apropiadas sobre su convergencia. Este proceso define un *operador integral* $a \mapsto f$ entre dos clases de funciones sobre $\mathbb{R}$.

Este operador, desafortunadamente, no conserva la propiedad de soporte compacto. Será prudente, entonces, reemplazar el espacio $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ de las funciones de prueba por un espacio de funciones más amplio. El **espacio de Schwartz** $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ de *funciones declinantes*, del Ejemplo 1.16, resulta ser apropiado para el propósito.

Lema 3.36. *Las dos inclusiones* $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m) \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^m) \hookrightarrow \mathcal{E}(\mathbb{R}^m)$ *son continuas con imágenes densas.*

Demostración. La topología del espacio de Fréchet $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ está definida por las seminormas s_n introducidas en (1.9):

$$s_n(\varphi) := \sup\bigl\{ \bigl|(1+\|x\|^2)^n \partial^\alpha\varphi(x)\bigr| : |\alpha| \le n,\ x \in \mathbb{R}^m \bigr\}.$$

Si K es un compacto en $\mathbb{R}^m$ y si $\varphi \in \mathcal{D}_K$, es evidente que $s_n(\varphi) \le C\, p_{K,n}(\varphi)$ donde $C := \sup\{ (1+\|x\|^2)^n : x \in K \}$. Luego $\mathcal{D}_K \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ con una inclusión continua. Luego $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ y la restricción de esta inclusión a cada $\mathcal{D}_K$ es continua: por lo tanto, la inclusión $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m) \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ es también continua.

Si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, tómese $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ tal que $\psi(x) = 1$ para $\|x\| \le 1$. El producto $\varphi_\varepsilon(x) := \varphi(x)\,\psi(\varepsilon x)$ queda en $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$. La regla de Leibniz implica que

$$\partial^\alpha(\varphi-\varphi_\varepsilon)(x) = \sum_{\beta\le\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \varepsilon^{|\beta|}\, \partial^{\alpha-\beta}\varphi(x)\, \partial^\beta(1-\psi(\varepsilon x)),$$

donde el término $\partial^\beta(1-\psi(\varepsilon x)) = 0$ para todo β si $\|x\| \le 1/\varepsilon$. Luego se puede comprobar que $s_n(\varphi-\varphi_\varepsilon) \le C_{n,\varepsilon} s_n(\varphi)$, donde $C_{n,\varepsilon} \to 0$ cuando $\varepsilon \to 0$. Esto implica que $\varphi_\varepsilon \to \varphi$ en la topología de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$. Se concluye que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ es denso en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$.

Está claro que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m) \subset \mathcal{E}(\mathbb{R}^m)$, por la definición de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$. Un argumento similar al del párrafo anterior muestra que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ es denso en $\mathcal{E}(\mathbb{R}^m)$; luego, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ también es denso en $\mathcal{E}(\mathbb{R}^m)$. Para la continuidad de esta inclusión, es suficiente notar que si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, entonces $p_{K,n}(\varphi) \leq s_n(\varphi)$ para cada $K \Subset \mathbb{R}^m$ y cada $n \in \mathbb{N}$, porque las seminormas $p_{K,n}$ determinan la topología de $\mathcal{E}(\mathbb{R}^m)$. $\square$

Al transponer estas inclusiones, se obtiene un par de inyecciones continuas entre los espacios duales:

$$\mathcal{E}'(\mathbb{R}^m) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m),$$

donde se ha escrito $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m) := \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)^*$ para denotar el espacio dual de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$. En particular, cualquier funcional lineal continua sobre $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ es una distribución sobre $\mathbb{R}^m$, aunque no toda distribución es de este tipo.

Definición 3.37. Los elementos del espacio dual $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ del espacio de Schwartz se llaman **distribuciones temperadas**.

Una distribución $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ es temperada si y sólo si posee una extensión a un funcional lineal continua sobre $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$. [El teorema de Hahn y Banach no lo garantiza, porque la topología de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ es más fuerte que su topología relativa como subespacio de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$.]

Ejemplo 3.38. Un ejemplo de una función de Schwartz cuyo soporte no es compacto es la **función gaussiana**:

$$\varphi_0(x) := \exp(-\tfrac{1}{2}\|x\|^2) \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}^m. \tag{3.24}$$

Es evidente (por inducción sobre $|\alpha|$) que cada una de sus derivadas tiene la forma $\partial^\alpha \varphi_0(x) = P_\alpha(x)\,\varphi_0(x)$, donde P_α es un *polinomio* de grado no mayor que $|\alpha|$. Además, la función $(1 + \|x\|^2)^n P_\alpha(x)\,\varphi_0(x)$ es acotada y de hecho es rápidamente decreciente, así que φ_0 es una función declinante. Nótese que $\operatorname{sop} \varphi_0 = \mathbb{R}^m$. $\Diamond$

Ejemplo 3.39. La función suave $f(x) := \exp(+\tfrac{1}{2}\|x\|^2)$ es localmente integrable; como tal, define una distribución regular sobre $\mathbb{R}^m$. Sin embargo, la integral $\int_{\mathbb{R}^m} f(x)\,\varphi_0(x)\,d^m x$ diverge, así que esta distribución *no es* temperada. $\Diamond$

Definición 3.40. Una función $u\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ tiene **crecimiento lento** (en el infinito) si hay un polinomio p tal que $|u(x)| \leq |p(x)|$ para todo $x \in \mathbb{R}^m$. Sea $\mathcal{O}_M(\mathbb{R}^m)$ el espacio vectorial de funciones suaves f cuyas derivadas $\partial^\alpha u$ son todas de crecimiento lento. Fíjese que cualquier polinomio queda en $\mathcal{O}_M(\mathbb{R}^m)$ y que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m) \subset \mathcal{O}_M(\mathbb{R}^m)$.

Si $u \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R}^m)$ y $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, su producto cumple $u\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, por la regla de Leibniz: $\partial^\alpha(u\varphi) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta u\, \partial^{\alpha-\beta}\varphi$ implica que $s_n(u\varphi) < \infty$ para todo n.

Nótese, en particular, que $e_t(x) := e^{it\cdot x}$ es un elemento de $\mathcal{O}_M(\mathbb{R}^m)$.[15]

[15] Aquí $t \cdot x \equiv t_1 x_1 + \cdots + t_m x_m$ denota el producto escalar real (producto punto) en $\mathbb{R}^m$.

Definición 3.41. Si $h \in L^1(\mathbb{R}^m)$, su **transformada de Fourier** es la función $\hat{h}\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ definida por[16]

$$\mathcal{F}h(t) \equiv \hat{h}(t) := \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-it\cdot x} h(x)\, d^m x \quad \text{para todo} \quad t \in \mathbb{R}^m. \tag{3.25}$$

Lema 3.42 (Riemann y Lebesgue)**.** *Si $h \in L^1(\mathbb{R}^m)$, entonces $\hat{h} \in C_0(\mathbb{R}^m)$. La aplicación lineal $\mathcal{F}\colon h \mapsto \hat{h}$ de $L^1(\mathbb{R}^m)$ en $C_0(\mathbb{R}^m)$ es continua.*

Demostración. Si $t_k \to t$ en $\mathbb{R}^m$, entonces $\hat{h}(t_k) \to \hat{h}(t)$ por convergencia dominada, ya que $|e^{it_k\cdot x}h(x)| = |h(x)|$ para cada k. Luego $\hat{h}$ es una función continua sobre $\mathbb{R}^m$.

Esta función es continua y acotada, porque

$$|\hat{h}(t)| \leq (2\pi)^{-m/2} \int |e^{-it\cdot x}h(x)|\, d^m x = (2\pi)^{-m/2}\|h\|_1.$$

Como $e^{\pm\pi i} = -1$, al poner $b := \pi t/\|t\|^2$ se obtiene

$$\begin{aligned} \hat{h}(t) &= -\frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int e^{-it\cdot x} e^{-\pi i} h(x)\, d^m x = -\frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int e^{-it\cdot(x+b)} h(x)\, d^m x \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int e^{-it\cdot x} h(x-b)\, d^m x = -(\tau_b h)\hat{}\,. \end{aligned}$$

Luego $|\hat{h}(t)| \leq \frac{1}{2}(2\pi)^{-m/2}\|h - \tau_b h\|_1$. Fíjese que $b \to 0$ en $\mathbb{R}^m$ cuando $\|t\| \to \infty$. La condición $|\hat{h}(t)| \to 0$ entonces es una consecuencia de la convergencia $\tau_b h \to h$ en $L^1(\mathbb{R}^m)$ cuando $b \to 0$. Basta comprobar esa convergencia para h en el subespacio (de L^1) de funciones continuas con soporte compacto, en donde sigue por la continuidad uniforme de la función h.

En resumen: $h \in L^1(\mathbb{R}^m)$ implica que $\hat{h} \in C_0(\mathbb{R}^m)$, con $\|\hat{h}\|_\infty \leq (2\pi)^{-m/2}\|h\|_1$. Esta última desigualdad establece la continuidad de $h \mapsto \hat{h}$. □

Notación. Escríbase $e_t(x) := e^{it\cdot x}$ para $t, x \in \mathbb{R}^m$. Entonces la transformada de Fourier (3.25) toma la forma $\hat{h}(t) := (2\pi)^{-m/2}\langle e_{-t}, h\rangle$ donde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ denota la dualidad entre $L^1(\mathbb{R}^m)$ y $L^\infty(\mathbb{R}^m)$.

[16] No hay acuerdo universal sobre la normalización de esta integral. Hay tres convenios incompatibles de uso general. (a) El *convenio clásico* omite el factor $(2\pi)^{-m/2}$ delante de la integral, pero entonces la fórmula inversa tiene un factor de $(2\pi)^{-m}$. El *convenio francés* omite el factor de normalización, pero la función exponencial en la integral es $e^{2\pi it\cdot x}$. El *convenio moderno*, adoptado en (3.25), usa la medida de Lebesgue normalizada $(2\pi)^{-m/2}\, d^m x$ en todas las integrales sobre $\mathbb{R}^m$. En fórmulas que involucran $\hat{h}$, aparecen ciertas potencias de 2π que difieren de un convenio a otro.

Ejemplo 3.43. La función gaussiana φ_0 de (3.24) coincide con su transformada de Fourier.

En efecto, en el caso $m = 1$, se obtiene

$$\begin{aligned}\sqrt{2\pi}\,\hat{\varphi}_0(t) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-itx}\,e^{-x^2/2}\,dx = e^{-t^2/2}\int_{\mathbb{R}} e^{-(x+it)^2/2}\,dx = e^{-t^2/2}\int_{\Im z=t} e^{-z^2/2}\,dz \\ &= e^{-t^2/2}\int_{\Im z=0} e^{-z^2/2}\,dz = e^{-t^2/2}\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2}\,dx = \sqrt{2\pi}\,\varphi_0(t).\end{aligned}$$

Las integrales tercera y cuarta coinciden, porque su diferencia es el límite, cuando $R \to \infty$, de unas integrales de contorno de esta función sobre un contorno rectangular con vértices $\pm R$ y $(\pm R + it)$; pero estas integrales se anulan por el teorema de Cauchy, ya que $z \mapsto e^{-z^2/2}$ es una función holomorfa entera.

En el caso $m > 1$, la integral (3.25) para $\varphi_0(x) = \prod_{j=1}^m e^{x_j^2/2}$ factoriza en un producto de m integrales unidimensionales. En resumen: $\mathcal{F}\varphi_0 = \varphi_0$ en cualquier dimensión. $\Diamond$

Notación. Si $\lambda > 0$, la **dilatación** de una función $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ por el *factor de escala* λ se denota por $\rho_\lambda f(x) := f(\lambda x)$.

Lema 3.44. *Si $g, h \in L^1(\mathbb{R}^m)$, $s \in \mathbb{R}^m$ y $\lambda > 0$, entonces:*

(a) $\mathcal{F}(e_s h) = \tau_s \hat{h}$ *y* $\mathcal{F}(\tau_s h) = e_{-s}\hat{h}$*;*

(b) $\mathcal{F}(\rho_\lambda h) = \lambda^{-m}\rho_{1/\lambda}\hat{h}$*;*

(c) $\mathcal{F}(g * h) = (2\pi)^{m/2}\,\hat{g}\,\hat{h}$ *en* $C_0(\mathbb{R}^m)$.[17]

Demostración. Ad (a): Se ve que $\mathcal{F}(e_s h)(t) = (2\pi)^{-m/2}\int e^{-i(t-s)\cdot x}h(x)\,d^m x = \hat{h}(t-s)$. Además,

$$\mathcal{F}(\tau_s h)(t) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}}\int e^{-it\cdot x}h(x-s)\,d^m x = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}}\int e^{-it\cdot(y+s)}h(y)\,d^m y = e^{-is\cdot t}\hat{h}(t).$$

Ad (b): Con el cambio de variable $y := \lambda x$, se obtiene

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\rho_\lambda h)(t) &= \frac{1}{(2\pi)^{m/2}}\int e^{-it\cdot x}h(\lambda x)\,d^m x \\ &= \frac{1}{\lambda^m}\frac{1}{(2\pi)^{m/2}}\int e^{-it\cdot y/\lambda}h(y)\,d^m y = \frac{1}{\lambda^m}\,\hat{h}(t/\lambda).\end{aligned}$$

Ad (c): Obsérvese que $g * h \in L^1(\mathbb{R}^m)$, con $\|g * h\|_1 \leq \|g\|_1\|h\|_1$, directamente de la Definición 3.25.

[17] Bajo el convenio clásico o el convenio francés, esta constante $(2\pi)^{m/2}$ queda reemplazada por 1, así que $\mathcal{F}$ es un *homomorfismo* que convierte convolución en multiplicación.

Entonces el siguiente cálculo es válido, por el teorema de Fubini:

$$\begin{aligned}(2\pi)^{m/2}\mathcal{F}(g*h)(t) &= \int e^{-it\cdot x}(g*h)(x)\,d^m x = \iint e^{-it\cdot(x+y)}g(x)\,h(y)\,d^m x\,d^m y \\ &= \int e^{-it\cdot x}g(x)\,d^m x \int e^{-it\cdot y}h(y)\,d^m y = (2\pi)^m\hat{g}(t)\,\hat{h}(t). \qquad \square\end{aligned}$$

Lema 3.45. *Si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, entonces $\hat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ también. Para cada $j = 1,\dots,m$, vale*

$$\mathcal{F}(\partial_j\varphi) = i t_j\hat{\varphi} \quad \text{y} \quad \mathcal{F}(x_j\varphi) = i\,\partial_j\hat{\varphi} \quad \text{para todo} \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m).$$

*La **transformación de Fourier** $\mathcal{F}$ es un operador lineal y continuo sobre $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$.*

Demostración. Una integración por partes da la primera fórmula:

$$\mathcal{F}(\partial_j\varphi) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}}\int e^{-it\cdot x}\partial_j\varphi(x)\,d^m x = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}}\int it_j e^{-it\cdot x}\varphi(x)\,d^m x = it_j\hat{\varphi}(t),$$

porque $e^{-it\cdot x}\varphi(x) \to 0$ para cada t cuando $\|x\| \to \infty$. La segunda fórmula se obtiene por derivación bajo el signo integral:

$$i\,\partial_j\hat{\varphi}(t) = \frac{i}{(2\pi)^{m/2}}\frac{\partial}{\partial t_j}\int e^{-it\cdot x}\varphi(x)\,d^m x = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}}\int e^{-it\cdot x}x_j\varphi(x)\,d^m x.$$

Al combinar las dos fórmulas, se obtiene, para $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^m$:

$$t^\beta\,\partial^\alpha\hat{\varphi} = (-i)^{|\alpha|+|\beta|}\mathcal{F}(\partial^\beta(x^\alpha\varphi)) = (-i)^{|\alpha|+|\beta|}\sum_{\gamma\le\beta}\binom{\beta}{\gamma}\mathcal{F}((\partial^{\beta-\gamma}x^\alpha)\,\partial^\gamma\varphi).$$

Por el Lema 3.42, el lado derecho es una función acotada sobre $\mathbb{R}^m$ para cada α y β. Por lo tanto, $\hat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ también.

La topología de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ está determinada por la familia numerable de seminormas

$$q_{k,n}(\varphi) := \max_{|\beta|\le k}\max_{|\alpha|\le n}\sup_{x\in\mathbb{R}^m}|x^\beta\,\partial^\alpha\varphi(x)|.$$

El último cálculo y la desigualdad $\|\hat{h}\|_\infty \le (2\pi)^{m/2}\|h\|_1$ muestran que hay una constante $C_{k,n} > 0$ tal que $q_{k,n}(\mathcal{F}\varphi) = q_{k,n}(\hat{\varphi}) \le C_{k,n}\,q_{n,k}(\varphi)$. Esto establece la continuidad de $\mathcal{F}\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^m) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$. $\square$

► La proposición siguiente se conoce como el **teorema de inversión** del análisis de Fourier. Ese teorema es válido cuando tanto h como $\hat{h}$ son elementos de $L^1(\mathbb{R}^m)$ y establece un método de *reconstruir* la función original h a partir de su transformada $\hat{h}$. Sin embargo, no es fácil caracterizar las funciones h tales que $\hat{h} \in L^1(\mathbb{R}^m)$. En vista del Lema 3.45, vale la pena empezar con el caso fácil en donde $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, de manera que todas las integrales en la demostración convergen.

Proposición 3.46. *Si* $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$*, entonces* $\mathcal{F}(\mathcal{F}\varphi) = \check{\varphi}$*; es decir,*

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int_{\mathbb{R}^m} e^{+it\cdot x}\, \hat{\varphi}(t)\, d^m t \quad \textit{para todo} \quad x \in \mathbb{R}^m. \tag{3.26}$$

En consecuencia, $\mathcal{F} \in \mathcal{L}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m))$ *es biyectiva, con* $\mathcal{F}^4 = 1$*.*

Demostración. Si $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, el teorema de Fubini muestra que

$$\begin{aligned} \int \psi(t)\hat{\varphi}(t)\, d^m t &= \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int e^{-it\cdot s}\psi(t)\varphi(s)\, d^m s\, d^m t \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int e^{-it\cdot s}\psi(t)\varphi(s)\, d^m t\, d^m s \\ &= \int \hat{\psi}(s)\varphi(s)\, d^m s. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Para $\lambda > 0$, se puede sustituir $\psi \mapsto \rho_\lambda \psi$ y $\hat{\psi} \mapsto \lambda^{-m}\rho_{1/\lambda}\hat{\psi}$ en esta fórmula, en vista del Lema 3.44(b). De ahí se obtiene

$$\int \psi(\lambda t)\hat{\varphi}(t)\, d^m t = \lambda^{-m} \int \hat{\psi}(s/\lambda)\varphi(s)\, d^m s = \int \hat{\psi}(x)\varphi(\lambda x)\, d^m x.$$

La segunda igualdad es consecuencia del cambio de variable $s = \lambda x$. Por convergencia dominada, las integrales primera y tercera tienden, cuando $\lambda \to 0$, al resultado

$$\psi(0) \int \hat{\varphi}(t)\, d^m t = \varphi(0) \int \hat{\psi}(x)\, d^m x.$$

Ahora considérese el caso especial donde $\psi = \varphi_0$ es la función gaussiana de (3.24). Como esta función tiene integral $(2\pi)^{m/2}$ y $\hat{\psi} = \varphi_0$ por el Ejemplo 3.43, se obtiene

$$\varphi(0) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int \hat{\varphi}(t)\, d^m t.$$

Al sustituir $\varphi \mapsto \tau_{-x}\varphi$ y $\hat{\varphi} \mapsto e_x\hat{\varphi}$ en esta última fórmula, usando el Lema 3.44(a); y al notar que $\varphi(x) = \tau_{-x}\varphi(0)$, se obtiene (3.26).

Las primeras 4 potencias de $\mathcal{F}$, evaluadas en $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, son $\mathcal{F}\varphi = \hat{\varphi}$; $\mathcal{F}^2\varphi = \check{\varphi}$; $\mathcal{F}^3\varphi = (\check{\varphi})\hat{}$; y $\mathcal{F}^4\varphi = (\check{\varphi})\check{} = \varphi$. En particular, $\mathcal{F}(\mathcal{F}^3\varphi) = \varphi$, así que $\mathcal{F}$ es sobreyectiva; y $\mathcal{F}\varphi = \mathcal{F}\psi$ implica $\varphi = \psi$ (al aplicar $\mathcal{F}^3$), así que $\mathcal{F}$ es inyectiva. □

Corolario 3.47. *Si* $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$*, entonces*

$$\mathcal{F}(\varphi * \psi) = (2\pi)^{m/2}\, \hat{\varphi}\, \hat{\psi} \quad y \quad \mathcal{F}(\varphi\, \psi) = (2\pi)^{-m/2}\, \hat{\varphi} * \hat{\psi}. \qquad \boxminus$$

► Ya es hora de extender la transformación de Fourier a las distribuciones (temperadas). La fórmula (3.27), que dice que $\langle \psi, \hat{\varphi} \rangle = \langle \hat{\psi}, \varphi \rangle$ para $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, indica cómo se puede definir esta extensión, por transposición.

Definición 3.48. Si $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ es una distribución temperada, su **transformada de Fourier** $\mathcal{F}T \equiv \widehat{T}$ se define por

$$\langle \mathcal{F}T, \varphi \rangle := \langle T, \mathcal{F}\varphi \rangle \quad \text{para todo} \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m).$$

El lado derecho es continuo en φ por el Lema 3.45 y así define un elemento $\mathcal{F}T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$.

Como espacio localmente convexo, $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ tiene la topología de convergencia simple sobre elementos de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$; con esta topología, $\mathcal{F}$ es un operador lineal y continuo sobre $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$. Su cuadrado cumple

$$\langle \mathcal{F}^2 T, \varphi \rangle = \langle \mathcal{F}T, \mathcal{F}\varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}^2 \varphi \rangle = \langle T, \check{\varphi} \rangle,$$

así que $\mathcal{F}^2 T = \check{T}$. Entonces $\mathcal{F}^4 T = T$ para $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$; en particular, $\mathcal{F} \in \mathcal{L}(\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m))$ es biyectiva.

Las operaciones de *traslación*, *derivada parcial* y *multiplicación por funciones* suaves en $\mathcal{O}_M(\mathbb{R}^m)$ conservan el espacio de distribuciones temperadas. En particular, la multiplicación por $u \in \mathcal{O}_m(\mathbb{R}^m)$ se define por transposición: $\langle uT, \varphi \rangle := \langle T, u\varphi \rangle$ define $uT \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ porque $\varphi \mapsto u\varphi$ es un operador continuo sobre $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$.

La *dilatación* de una distribución (temperada o no) fue definida por transposición, en la fórmula (3.11): en forma abreviada, $\langle \rho_\lambda T, \varphi \rangle := \lambda^{-m} \langle T, \rho_{1/\lambda} \varphi \rangle$.

Proposición 3.49. *La transformación de Fourier $\mathcal{F}\colon \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ tiene las siguientes propiedades. Si $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$, entonces:*

(a) $\mathcal{F}(e_s T) = \tau_s \widehat{T}$ y $\mathcal{F}(\tau_s T) = e_{-s} \widehat{T}$ para todo $s \in \mathbb{R}^m$;

(b) $\mathcal{F}(\rho_\lambda T) = \lambda^{-m} \rho_{1/\lambda} \widehat{T}$ para todo $\lambda > 0$;

(c) $\mathcal{F}(\partial_j T) = i x_j \widehat{T}$ y $\mathcal{F}(x_j T) = i \partial_j \widehat{T}$ para $j = 1, \dots, m$.

Demostración. Para (a) y (b), es cuestión de transponer los resultados del Lema 3.44:

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{F}(e_s T), \varphi \rangle &= \langle e_s T, \mathcal{F}\varphi \rangle = \langle T, e_s \mathcal{F}\varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}(\tau_{-s}\varphi) \rangle = \langle \mathcal{F}T, \tau_{-s}\varphi \rangle = \langle \tau_s(\mathcal{F}T), \varphi \rangle; \\
\langle \mathcal{F}(\tau_s T), \varphi \rangle &= \langle \tau_s T, \mathcal{F}\varphi \rangle = \langle T, \tau_{-s}(\mathcal{F}\varphi) \rangle = \langle T, \mathcal{F}(e_{-s}\varphi) \rangle = \langle \mathcal{F}T, e_{-s}\varphi \rangle = \langle e_{-s}\mathcal{F}T, \varphi \rangle; \\
\langle \mathcal{F}(\rho_\lambda T), \varphi \rangle &= \langle \rho_\lambda T, \mathcal{F}\varphi \rangle = \lambda^{-m} \langle T, \rho_{1/\lambda}(\mathcal{F}\varphi) \rangle = \langle T, \mathcal{F}(\rho_\lambda \varphi) \rangle \\
&= \langle \mathcal{F}T, \rho_\lambda \varphi \rangle = \lambda^{-m} \langle \rho_\lambda(\mathcal{F}T), \varphi \rangle.
\end{aligned}$$

Para (c), hay que transponer los resultados del Lema 3.45:

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}(\partial_j T), \varphi\rangle = \langle \partial_j T, \mathcal{F}\varphi\rangle &= -\langle T, \partial_j(\mathcal{F}\varphi)\rangle = i\,\langle T, \mathcal{F}(x_j\varphi)\rangle \\ &= i\,\langle \mathcal{F}T, x_j\varphi\rangle = \langle i x_j \mathcal{F}T, \varphi\rangle; \\ \langle \mathcal{F}(x_j T), \varphi\rangle = \langle x_j T, \mathcal{F}\varphi\rangle &= \langle T, x_j\mathcal{F}\varphi\rangle = -i\,\langle T, \mathcal{F}(\partial_j\varphi)\rangle \\ &= -i\,\langle \mathcal{F}T, \partial_j\varphi\rangle = \langle i\,\partial_j(\mathcal{F}T), \varphi\rangle. \end{aligned}$$ $\square$

Ejemplo 3.50. La transformada de Fourier de la delta de Dirac es una *función constante*. En efecto,

$$\langle \mathcal{F}\delta, \varphi\rangle = \langle \delta, \mathcal{F}\varphi\rangle = \hat{\varphi}(0) = (2\pi)^{-m/2}\int \varphi(x)\,d^m x = (2\pi)^{-m/2}\langle 1, \varphi\rangle,$$

así que $\mathcal{F}\delta \equiv (2\pi)^{-m/2}$. $\lozenge$

Lema 3.51. *Si $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ y $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, la convolución $T * \psi$ está bien definida como función suave.*[18] *Hasta una normalización conveniente, la transformación de Fourier* entrelaza *convolución con multiplicación:*

$$\mathcal{F}(T * \psi) = (2\pi)^{m/2}\,\widehat{T}\,\hat{\psi} \quad y \quad \mathcal{F}(T\psi) = (2\pi)^{-m/2}\,\widehat{T} * \hat{\psi}.$$

Demostración. La fórmula (3.20) define $T * \psi(x) := \langle T, \check{\tau}_x\psi\rangle$ porque $\check{\tau}_x\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ para cada $x \in \mathbb{R}^m$ y $\psi \mapsto \check{\tau}_x\psi$ es continua para la topología de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$. Las afirmaciones de la Proposición 3.28 siguen válidos en este caso; en particular, se obtiene $T * \psi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^m)$.

La fórmula siguiente sigue válida para $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ y $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$:

$$\langle T * \psi, \varphi\rangle = \langle T, \check{\psi} * \varphi\rangle.$$

De hecho, esta fórmula serviría como definición alternativa de $T * \psi$.

El Corolario 3.47 y la relación $\mathcal{F}^2\psi = \check{\psi}$ ahora muestran que

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}(T * \psi), \varphi\rangle &= \langle T * \psi, \mathcal{F}\varphi\rangle = \langle T, \check{\psi} * \mathcal{F}\varphi\rangle = \langle T, \mathcal{F}\hat{\psi} * \mathcal{F}\varphi\rangle \\ &= (2\pi)^{m/2}\langle T, \mathcal{F}(\hat{\psi}\,\varphi)\rangle = (2\pi)^{m/2}\langle \widehat{T}, \hat{\psi}\,\varphi\rangle = (2\pi)^{m/2}\langle \widehat{T}\,\hat{\psi}, \varphi\rangle.\end{aligned}$$

De igual manera, se obtiene

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}(T\psi), \varphi\rangle &= \langle T\psi, \mathcal{F}\varphi\rangle = \langle T, \psi\,\mathcal{F}\varphi\rangle = \langle T, \mathcal{F}(\mathcal{F}^3\psi)\,\mathcal{F}\varphi\rangle \\ &= (2\pi)^{-m/2}\langle T, \mathcal{F}(\mathcal{F}^3\psi * \varphi)\rangle = (2\pi)^{-m/2}\langle \widehat{T}, \mathcal{F}^3\psi * \varphi\rangle \\ &= (2\pi)^{-m/2}\langle \widehat{T}, (\hat{\psi})^{\vee} * \varphi\rangle = (2\pi)^{-m/2}\langle \widehat{T} * \hat{\psi}, \varphi\rangle.\end{aligned}$$ $\square$

[18]Se puede comprobar que $T * \psi \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R}^m)$. De hecho, $T * \psi$ pertenece al subespacio $\mathcal{O}_C(\mathbb{R}^m)$ de funciones suaves cuyas derivadas crecen del mismo orden polinomial. Para la prueba de esta afirmación, véase la Proposición 4.11.7 del libro de Horváth, *op. cit.*

Hasta ahora, se ha definido *productos* de (algunas) distribuciones y funciones suaves y *convoluciones* de (algunas) distribuciones y funciones; pero también las convoluciones de ciertas pares de distribuciones. Es razonable suponer, o bien proponer, que sería posible definir por dualidad *productos de algunas pares de distribuciones*, de tal manera que $\mathcal{F}$ entrelace convoluciones con productos en un contexto más amplio.

Sería deseable, por ejemplo, definir δ^2, el "cuadrado" de la delta de Dirac; pero si eso fuera posible, de inmediato habría que admitir la relación $\mathcal{F}(\delta^2) = (2\pi)^{-3m/2}\, 1 * 1$. Sin embargo, se sabe que $1 * 1$ no existe: entonces δ^2 tampoco existe.

► La transformación de Fourier tiene otra propiedad de gran importancia: *respeta el producto escalar* de funciones sobre $\mathbb{R}^m$ y por ende define un operador unitario sobre funciones de cuadrado integrable. Este es el tópico del siguiente teorema.

Teorema 3.52 (Plancherel)**.** *La transformación de Fourier satisface*

$$\langle \mathcal{F}\psi \mid \mathcal{F}\varphi \rangle = \langle \psi \mid \varphi \rangle \quad \textit{para todo} \quad \varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m). \tag{3.28}$$

Por lo tanto, $\mathcal{F}$ define un operador unitario sobre $L^2(\mathbb{R}^m)$.

Demostración. Las fórmulas (3.25) y (3.26), que definen $\mathcal{F}\psi$ y su transformada inversa, muestran que el conjugado complejo de $\mathcal{F}\psi$ es

$$\overline{\mathcal{F}\psi} = \mathcal{F}^{-1}\bar{\psi} = \mathcal{F}^3\bar{\psi} = \mathcal{F}((\bar{\psi})\check{}\,).$$

Al sustituir $\psi \mapsto \mathcal{F}^{-1}\bar{\psi}$ en la fórmula (3.27), se obtiene, para $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$:

$$\langle \mathcal{F}\psi \mid \mathcal{F}\varphi \rangle = \langle \overline{\mathcal{F}\psi}, \mathcal{F}\varphi \rangle = \langle \mathcal{F}^{-1}\bar{\psi}, \hat{\varphi} \rangle = \langle \bar{\psi}, \varphi \rangle = \langle \psi \mid \varphi \rangle.$$

Es evidente que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m) \subset L^2(\mathbb{R}^m)$ porque cada $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ es de la forma $\varphi(x) =: (1 + \|x\|^2)^{-m/2} h(x)$ con $h \in C_0(\mathbb{R}^m)$. Cada función de Hermite sobre $\mathbb{R}^m$ es un producto de un polinomio por la gaussiana φ_0 y por tanto pertenece a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$; luego, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ es denso en $L^2(\mathbb{R}^m)$. La fórmula integral $\langle g \mid h \rangle = \langle \bar{g}, h \rangle$ identifica $L^2(\mathbb{R}^m)$ con su espacio dual, por el isomorfismo de Riesz (Teorema 2.31). Entonces la transpuesta de la inclusión continua y densa $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^m)$ es una inyección $L^2(\mathbb{R}^m) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$. En resumen: cada elemento de $L^2(\mathbb{R}^m)$ define una distribución temperada.[19]

Para definir $\mathcal{F}$ como operador sobre $L^2(\mathbb{R}^m)$, hay dos opciones. Es posible extender $\mathcal{F} \in \mathcal{L}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m))$ por continuidad a todo $L^2(\mathbb{R}^m)$; la continuidad viene de (3.28) y la extensión es única porque el dominio original de $\mathcal{F}$ es denso en $L^2(\mathbb{R}^m)$. La continuidad del producto

[19]Si $h \in L^2(\mathbb{R}^m) \cap L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^m)$ y $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, las dos definiciones de $\langle h, \varphi \rangle$ coinciden.

escalar implica que la relación (3.28) sigue válida en todo $L^2(\mathbb{R}^m)$, así que el operador extendido es unitario.

Alternativamente, se puede restringir el operador $\mathcal{F}$ sobre $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$, de la Definición 3.48, al subespacio $L^2(\mathbb{R}^m)$. Si $h \in L^2(\mathbb{R}^m)$ y $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, entonces

$$\langle \mathcal{F}h \mid \mathcal{F}\varphi \rangle = \langle \overline{\mathcal{F}h}, \mathcal{F}\varphi \rangle = \langle \mathcal{F}^{-1}\bar{h}, \mathcal{F}\varphi \rangle = \langle \bar{h}, \varphi \rangle = \langle h \mid \varphi \rangle,$$

esta vez por la Definición 3.48. En particular, $\langle \mathcal{F}^*\mathcal{F}h \mid \varphi \rangle = \langle h \mid \varphi \rangle$ para φ en un subespacio denso de $L^2(\mathbb{R}^m)$. Se concluye que $\mathcal{F}^*\mathcal{F} = 1$ sobre $L^2(\mathbb{R}^m)$, es decir, $\mathcal{F}$ es un isometría. Su imagen es denso y completo en $L^2(\mathbb{R}^m)$, así que $\mathcal{F}$ es una isometría sobreyectiva, esto es, un operador unitario. □

3.4 Distribuciones homogéneas

Definición 3.53. Una distribución $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ es **homogénea de grado** d si $\rho_\lambda T = \lambda^d T$ para todo $\lambda > 0$. Dicho de otro modo:

$$\lambda^d \langle T(x), \varphi(x) \rangle = \langle T(\lambda x), \varphi(x) \rangle = \lambda^{-m} \langle T(y), \varphi(y/\lambda) \rangle \quad \text{para} \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m).$$

Se define una distribución homogénea de grado d sobre $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ al pedir que esta fórmula se cumple para $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m \setminus \{0\})$.

Ejemplo 3.54. Si $x \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$, escríbase $x = r\omega$ donde $r := \|x\|$ y $\omega := x/r \in \mathbb{S}^{m=1}$. Una función suave $u \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^m \setminus \{0\})$ es homogénea de grado d, es decir, $u(\lambda x) \equiv \lambda^d u(x)$, si y sólo si[20]

$$u(x) = r^d\, v(\omega) \quad \text{para algún} \quad v \in \mathcal{E}(\mathbb{S}^{m-1}).$$

Si $d > 0$, esta función se extiende a todo $\mathbb{R}^m$ como función homogénea al definir $u(0) := 0$; pero la función extendida no es suave en el origen.

Si $-m < d \leq 0$, no es posible asignarle un valor $u(0)$ en el origen a esta función que conserva su homogeneidad; pero u al menos define una función localmente integrable. ◊

Ejemplo 3.55. La delta de Dirac es una distribución homogénea de grado $-m$. En efecto, si $\lambda > 0$ y $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$, entonces

$$\langle \rho_\lambda \delta, \varphi \rangle = \lambda^{-m} \langle \delta, \rho_{1/\lambda}\varphi \rangle = \lambda^{-m}\varphi(0/\lambda) = \lambda^{-m}\varphi(0) = \langle \lambda^{-m}\delta, \varphi \rangle. \qquad \Diamond$$

[20] La definición del espacio $\mathcal{E}(\mathbb{S}^{m-1}) = C^\infty(\mathbb{S}^{m-1})$ emerge de la estructura de la esfera $\mathbb{S}^{m-1}$ como variedad diferenciable. Sus elementos son funciones suaves de cualquier sistema de coordenadas esféricas.

Ejemplo 3.56. En dimensión $m = 1$, la función localmente integrable $x_+^d := x^d \theta(x)$ es homogénea de grado d, si $d > -1$:

$$\langle x_+^d, \varphi \rangle := \int_0^\infty x^d \varphi(x)\, dx.$$

Si $-2 < d < -1$, es posible definir x_+^d por una fórmula alternativa:

$$\langle x_+^d, \varphi \rangle := \int_0^1 x^d (\varphi(x) - \varphi(0))\, dx + \int_1^\infty x^d \varphi(x)\, dx + \frac{\varphi(0)}{d+1}.$$

Al considerar d como una *variable compleja*, la segunda fórmula define una función meromorfa[21] en el semiplano $\Re d > -2$, con un único polo en $d = 1$. Además, coincide con la función holomorfa en el semiplano $\Re d > -1$ definida por la primera fórmula.

Por inducción sobre $n \in \mathbb{N}$, se puede extender $\langle x_+^d, \varphi \rangle$ a una función meromorfa de d en el semiplano $\Re d > -n - 1$, con polos simples en $-1, -2, \dots, -n$ solamente, al sumar y restar un polinomio de Taylor de φ en el origen:

$$\langle x_+^d, \varphi \rangle := \int_0^1 x^d \biggl(\varphi(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}\, x^k \biggr) dx + \int_1^\infty x^d \varphi(x)\, dx + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!(d+k+1)}.$$

La fórmula $(\lambda x)_+^d = \lambda^d x_+^d$ es válido para $\Re d > -1$ y los dos lados son holomorfas en d donde están definidas. Luego su validez se conserva en el plano perforado $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N}^*)$, por continuación meromorfa. Entonces x_+^d es una distribución homogénea de grado d, toda vez que $d \notin \{-1, -2, -3, \dots\}$. $\Diamond$

Definición 3.57. Si U es un abierto en $\mathbb{R}^m$ y si $x_0 \in U$, sea $S \in \mathcal{D}'(U \setminus \{x_0\})$ una distribución. Dícese que una distribución $T \in \mathcal{D}'(U)$ es una **extensión** o una **regularización** de S si $T|_{U\setminus\{x_0\}} = S$. Es decir: T extiende S si $\langle T, \varphi \rangle = \langle S, \varphi \rangle$ toda vez que $\operatorname{sop} \varphi \subset U \setminus \{x_0\}$.

Un problema importante en algunas aplicaciones[22] es la extensión de una distribución homogénea sobre $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ a todo $\mathbb{R}^m$. Se presentan dos dificultades: la extensión generalmente no es única; tampoco es homogénea.

[21]Una función compleja es **meromorfa** si es holomorfa en una región abierta de $\mathbb{C}$, salvo por singularidades aisladas que son *polos* (no se admiten singularidades esenciales). Si $x > 0$, se define $x^d := \exp(d \log x)$; esta es una función holomorfa entera de d en los integrandos.

[22]En la teoría cuántica de campos, abundan los cálculos de ciertas integrales divergentes que dan lugar a resultados finitos después de restarles ciertos “contratérminos”. Un enfoque alternativo, llamado la *teoría de perturbación causal*, evita las divergencias mediante un algoritmo inductivo de extensión de distribuciones. Este enfoque fue propuesto en el artículo: Henri Epstein y Vladimir Glaser, “The role of locality in perturbation theory”, Annales de l'Institut Henri Poincaré A **19** (1973), 211–295.

Ejemplo 3.58. La función $x_+^{-1} := x^{-1}\theta(x)$ no es localmente integrable sobre $\mathbb{R}$, pero sí es localmente integrable sobre $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Fíjese que

$$\langle x_+^{-1}, \varphi\rangle = \int_0^\infty \frac{\varphi(x)}{x}\,dx \quad \text{si} \quad \operatorname{sop}\varphi \subset \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

pero esta integral sería divergente si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ con $\varphi(0) \neq 0$. Para aislar el comportamiento singular, escríbase $\varphi(x) = \varphi(0) + x\,\psi(x)$ donde $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$; entonces, si $0 < \varepsilon < 1$, vale

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^\infty \frac{\varphi(x)}{x}\,dx &= \int_\varepsilon^1 \biggl(\frac{\varphi(0)}{x} + \psi(x)\biggr)\,dx + \int_1^\infty \frac{\varphi(x)}{x}\,dx \\ &= -\varphi(0)\log\varepsilon + \int_\varepsilon^1 \psi(x)\,dx + \int_1^\infty \frac{\varphi(x)}{x}\,dx.\end{aligned}$$

Al dejar $\varepsilon \to 0$, el término $-\varphi(0)\log\varepsilon$ diverge, pero las dos integrales convergen. Su límite es la llamada **parte finita de Hadamard** de la integral divergente:

$$\operatorname{Fp}\int_0^\infty \frac{\varphi(x)}{x}\,dx := \int_0^1 \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx + \int_1^\infty \frac{\varphi(x)}{x}\,dx.$$

Una posible extensión de x_+^{-1} a $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ es la *pseudofunción* $\operatorname{Pf}(\theta(x)/x)$ definido por

$$\langle \operatorname{Pf}(\theta(x)/x), \varphi(x)\rangle := \operatorname{Fp}\int_0^\infty \frac{\varphi(x)}{x}\,dx.$$

Esta distribución *no es homogénea* de grado -1. En efecto, si $\lambda > 0$, entonces

$$\begin{aligned}\langle \rho_\lambda \operatorname{Pf}(\theta(x)/x), \varphi(x)\rangle &= \lambda^{-1}\langle \operatorname{Pf}(\theta(x)/x), \varphi(x/\lambda)\rangle = \frac{1}{\lambda}\operatorname{Fp}\int_0^\infty \frac{\varphi(y/\lambda)}{y}\,dy \\ &= \frac{1}{\lambda}\int_0^{1/\lambda} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx + \frac{1}{\lambda}\int_{1/\lambda}^\infty \frac{\varphi(x)}{x}\,dx \\ &= \frac{1}{\lambda}\operatorname{Fp}\int_0^\infty \frac{\varphi(x)}{x}\,dx - \frac{1}{\lambda}\int_1^{1/\lambda} \frac{\varphi(0)}{x}\,dx \\ &= \lambda^{-1}\langle \operatorname{Pf}(\theta(x)/x), \varphi(x)\rangle + \lambda^{-1}\log\lambda\,\varphi(0).\end{aligned}$$

Por lo tanto, vale

$$\rho_\lambda \operatorname{Pf}(\theta(x)/x) = \lambda^{-1}\operatorname{Pf}(\theta(x)/x) + \lambda^{-1}\log\lambda\,\delta. \tag{3.29}$$

Esto muestra la inhomogeneidad de $\operatorname{Pf}(\theta(x)/x)$, debido al “término extra” proporcional a $\lambda^{-1}\log\lambda$. $\Diamond$

Para regularizar $x_+^{-n} = x^{-n}\theta(x)$ con $n > 1$, es cuestión de remover la parte singular de la integral $\int_0^\infty x^{-n}\varphi(x)\,dx$, al restar de $\varphi(x)$ un polinomio de Taylor de grado $n-1$:

$$\langle \mathrm{Pf}(\theta(x)/x^n), \varphi\rangle := \mathrm{Fp}\int_0^\infty \frac{\varphi(x)}{x^n}\,dx := \int_0^1 \biggl(\varphi(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}\,x^k\biggr)\frac{dx}{x^n} + \int_1^\infty \frac{\varphi(x)}{x^n}\,dx.$$

Un procedimiento similar al cálculo del Ejemplo 3.58 muestra que

$$\rho_\lambda \,\mathrm{Pf}(\theta(x)/x^n) = \lambda^{-n}\,\mathrm{Pf}(\theta(x)/x^n) + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\,\lambda^{-n}\log\lambda\,\delta^{(n-1)}.$$

Ejemplo 3.59. En $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ con $m > 1$, la función radial r^d (es decir, $x \mapsto \|x\|^d$) es una función homogénea de grado d si $d > 0$, con una extensión trivial a $\mathbb{R}^m$. Si $-n < d \leq 0$, esta función es localmente integrable en $\mathbb{R}^m$ y así se extiende a una distribución regular homogénea de grado d.

Si σ denota la forma de volumen sobre la esfera $\mathbb{S}^{m-1}$, definida por el cambio de variable $x = r\omega$ mediante $d^m x =: r^{m-1}\,dr\,d\sigma(\omega)$, entonces a cada $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ se le asocia la función de una variable

$$\tilde\varphi(r) := \int_{\mathbb{S}^{m-1}} \varphi(r\omega)\,d\sigma(\omega).$$

Fíjese que $\tilde\varphi \in \mathcal{D}(0,\infty)$ cuando $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m \setminus \{0\})$. Entonces

$$\int_{\mathbb{R}^m} r^d\varphi(x)\,d^m x = \int_0^\infty r^{d+m-1}\tilde\varphi(r)\,dr,$$

así que esta fórmula permite extender r^d a todo $\mathbb{R}^m$ mediante $\langle r_+^d, \varphi\rangle := \langle x_+^{d+m-1}, \tilde\varphi\rangle$. Si $d = -m-k$ con $k \in \mathbb{N}$, el lado derecho se define como $\langle \mathrm{Pf}(\theta(x)/x^{k+1}), \tilde\varphi(x)\rangle$.

La distribución extendida r_+^{-m-k} no es homogénea, porque

$$\rho_\lambda r_+^{-m-k} = \lambda^{-m-k} r_+^{-m-k} + \frac{(-1)^k}{k!}\,\Omega_m\,\lambda^{-m-k}\log\lambda\,\frac{\partial^k\delta}{\partial r^k}\,,$$

donde $\Omega_m = \int_{\mathbb{S}^{m-1}} d\sigma(\omega) = 2\pi^{m/2}/\,\Gamma(m/2)$ es el volumen de la esfera $\mathbb{S}^{m-1}$. ◇

Definición 3.60. Una distribución $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ es **homogénea asociada** de *grado* d y de *orden* k si

$$(E-d)^{k+1}T = 0, \quad \text{donde} \quad E := \sum_{j=1}^m x_j\,\partial_j \quad \text{es el } \textbf{operador de Euler}.$$

Si $\varphi(x) = \psi(r)$ es una función radial, entonces $E\varphi(x) = r\,\partial\psi/\partial r$.

Es un ejercicio comprobar que r_+^{-m-k} es homogénea asociada de grado $-m$ y de orden k.

3.5 Ejercicios sobre distribuciones y transformadas de Fourier

Ejercicio 3.1. (a) Si $0 < r < s$, demostrar que hay una función de prueba $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ tal que $\varphi(x) \geq 0$ para todo x; $\varphi(x) = 1$ para $x \in \overline{B}(0;r)$; y $\varphi(y) = 0$ para $y \notin B(0;s)$.

⟦ Indicación: Hay un elemento $\chi \geq 0$ en $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ con soporte en $[r,s]$ y $\int_r^s \chi(t)\,dt = 1$. Colóquese $\eta(u) := \int_u^s \chi(t)\,dt$ y tómese $\varphi(x) := \eta(\|x\|)$. ⟧

(b) Si U es un abierto en $\mathbb{R}^m$ y si K es una parte compacta de U, demostrar que hay un abierto $V \subset U$ y una función de prueba $\psi \in \mathcal{D}(U)$ tales que $K \Subset V$, $\overline{V} \Subset U$, $\operatorname{sop}\psi \subseteq \overline{V}$ y $\psi(x) \equiv 1$ para $x \in K$.

⟦ Indicación: Por su compacidad, es posible cubrir K por un número finito de bolas de cierto radio $\varepsilon > 0$, cuya unión está incluida en U. ⟧

Ejercicio 3.2. (a) Demostrar que $(\log|x|)' = \operatorname{Pf}(1/x)$ como derivada distribucional de primer orden en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

(b) Calcular la segunda derivada distribucional T'' de las siguientes distribuciones regulares: $e^{-|x|}$, $\operatorname{sen}|x|$, $g(x)$; donde

$$g(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 1, \\ x & \text{si } -1 \leq x \leq 1, \\ -1 & \text{si } x \leq -1, \end{cases}$$

Ejercicio 3.3. (a) Sea $h \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m)$ una función tal que $h(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^m$ y $\int_{\mathbb{R}^m} h(x)\,dx = 1$. Defínase $h_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-m} h(x/\varepsilon)$ para $\varepsilon > 0$. Demostrar que $h_\varepsilon \to \delta$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ cuando $\varepsilon \to 0$. ⟦ Indicación: $\varphi(x) = \varphi(x) - \varphi(0) + \varphi(0)$, si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$. ⟧

(b) Demostrar la **fórmula de Breit y Wigner**:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} = \pi\,\delta \quad \text{en } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

(c) Demostrar las **fórmulas de Sokhotski y Plemelj**:[23]

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{1}{x \pm i\varepsilon} = \mp i\pi\,\delta + \operatorname{Pf}\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{en } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

⟦ Indicación: Considerar las partes real e imaginaria de $1/(x \pm i\varepsilon)$. Si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, sea $\varphi_1(x) := (\varphi(x) - \varphi(-x))/x$ para $x \neq 0$; verificar que $\varphi_1 \in L^1(\mathbb{R})$. ⟧

[23] En libros de física, estas fórmulas se escriben con el formato: $1/(x \pm i0) = \mp i\pi\,\delta + \operatorname{Pf}(1/x)$.

Ejercicio 3.4. (a) Comprobar que la suma infinita $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(x-n)$ converge en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. (Esta distribución es el **peine de Dirac**.)

(b) Demostrar que la serie $T := \sum_{n\in\mathbb{N}} \delta^{(n)}(x-n)$ también converge en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ y que T es una distribución de orden ∞.

Ejercicio 3.5. Si $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo abierto en la recta real y si $T \in \mathcal{D}'(a,b)$, demostrar que $(T - \tau_h T)/h \to T'$ en $\mathcal{D}'(a,b)$ cuando $h \to 0$.

Ejercicio 3.6. (a) Si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, demostrar que $\varphi = \psi'$ es la derivada de otra función de prueba $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ si y sólo si $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx = 0$.

(b) Si $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ cumple $S' = 0$, demostrar que S es la distribución regular dada por una función constante. ⟦Indicación: Tómese algún $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tal que $\int_{\mathbb{R}} \chi(x)\,dx = 1$ y evaluar $\langle T, \varphi - a\chi\rangle$ donde a es una constante apropiada.⟧

(c) Si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ cumple $T^{(n+1)} = 0$, demostrar que T es un polinomio de grado no mayor que n.

Ejercicio 3.7. Demostrar que cualquier distribución de soporte compacto tiene orden finito.

Ejercicio 3.8. Demostrar que las siguientes condiciones son equivalentes, para $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$:

(a) $x^{n+1}T = 0$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$;

(b) $T = \sum_{k=0}^{n} c_k\, \partial^{(k)}\delta$ para algunas constantes $c_0, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$.

⟦Indicación: Comprobar que en los dos casos $\operatorname{sop} T = \{0\}$. El teorema de Taylor expresa $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ en la forma

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}\, x^k + x^{n+1}\psi(x),$$

donde $\psi \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$.⟧

Ejercicio 3.9. (a) Si $f, g \in L^1(\mathbb{R}^m)$, demostrar $f * g \in L^1(\mathbb{R}^m)$ con $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.

(b) Si $f \in L^1(\mathbb{R}^m)$ y $g \in L^p(\mathbb{R}^m)$ con $1 < p \leq \infty$, demostrar $f * g \in L^p(\mathbb{R}^m)$ con $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$.

⟦Indicación: Considerar $\langle f * g, h\rangle$ para una función h conveniente.⟧

(c) Si $f \in L^p(\mathbb{R}^m)$ y $g \in L^q(\mathbb{R}^m)$ con $1 < p < \infty$, $q = p/(p-1)$, demostrar $f * g$ es uniformemente continua y acotada sobre $\mathbb{R}^m$, con $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

⟦Indicación: Se puede suponer que $\|\tau_b f - f\|_p \to 0$ cuando $b \mapsto 0$, por el argumento de la demostración del Lema 3.42.⟧

Ejercicio 3.10. (a) Demostrar que la reflexión $\varphi \mapsto \check{\varphi}$ y la traslación $\varphi \mapsto \tau_b\varphi$, para $b \in \mathbb{R}^m$ fijo, son operadores lineales continuas sobre $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$.

⟦ Indicación: Para cada $K \Subset \mathbb{R}^m$, mostrar su continuidad en $\mathcal{L}(\mathcal{D}_K, \mathcal{D}(\mathbb{R}^m))$. ⟧

(b) Demostrar que la reflexión $\varphi \mapsto \check{\varphi}$ y la traslación $\varphi \mapsto \tau_b\varphi$, para $b \in \mathbb{R}^m$ fijo, son operadores lineales continuas sobre $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$.

⟦ Indicación: Demostrar y usar la desigualdad $1 + \|x\|^2 \leq 2(1 + \|y\|^2)(1 + \|y - x\|^2)$, para $x, y \in \mathbb{R}^m$. ⟧

Ejercicio 3.11. Si $a \in \mathbb{R}^m$, comprobar que $\delta_a * \varphi = \tau_a\varphi$ y $\delta_a * T = \tau_a T$ para $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ y $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$.

Demostrar además que $\delta_a * \delta_b = \delta_{a+b}$ para $a, b \in \mathbb{R}^m$.

Ejercicio 3.12. Verificar que la función $x \mapsto (1 + \|x\|^2)^{-m}$ es integrable sobre $\mathbb{R}^m$. Concluir que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m) \subset L^1(\mathbb{R}^m)$. ¿Es cierto que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m) \subset L^p(\mathbb{R}^m)$ para todo $p > 1$?

Ejercicio 3.13. (a) Si $a > 0$, comprobar que la función $h(x) := e^{-a|x|}$ es integrable sobre $\mathbb{R}$. Verificar la fórmula

$$\hat{h}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2a}{a^2 + t^2}.$$

Verificar que $\hat{h} \in L^1(\mathbb{R})$ también. ¿Cuál es la transformada de Fourier de $\hat{h}$?

(b) Si $C := \|\hat{h}\|_1$, la función $C^{-1}\hat{h}$ es la **densidad de Cauchy** de la teoría de probabilidad. La *esperanza* $E(X) := C^{-1} \int_{\mathbb{R}} t\hat{h}(t)\, dt$ de una variable aleatoria X con esta densidad *no existe* (la fórmula es inválida, porque $t\hat{h}(t)$ no es integrable). ¿Cómo se puede comprobar esta propiedad, a la luz de la transformación de Fourier?

Ejercicio 3.14. Calcular $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)^2}$ mediante el teorema de Plancherel.

Ejercicio 3.15. (a) Sea $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. La **parte finita** (de Hadamard) de la integral divergente $\int_0^\infty x^{-3/2}\varphi(x)\, dx$ se define como el límite

$$\operatorname{Fp} \int_0^\infty \frac{\varphi(x)}{x^{3/2}}\, dx := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \biggl(-\frac{2\varphi(0)}{\sqrt{\varepsilon}} + \int_\varepsilon^\infty \frac{\varphi(x)}{x^{3/2}}\, dx \biggr).$$

La *pseudofunción* $\operatorname{Pf}(x^{-3/2}\theta(x))$ es la $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ dada por $\langle T, \varphi \rangle := \operatorname{Fp} \int_0^\infty x^{-3/2}\varphi(x)\, dx$.

Demostrar que la función $x^{-1/2}\theta(x)$ es localmente integrable sobre $\mathbb{R}$ y que la distribución regular $x_+^{-1/2}$ dada por esta función tiene derivada distribucional $-\frac{1}{2} \operatorname{Pf}(x^{-3/2}\theta(x))$.

(b) Sea $(\log x)_+$ la distribución regular definida por la función $\theta(x) \log x$. Comprobar que su derivada distribucional es $\operatorname{Pf}(\theta(x)/x)$.

Ejercicio 3.16. Si $d \in \mathbb{R}$ cumple $d > -n - 1$ pero $d \notin \{-1, -2, \dots, -n\}$, defínase la distribución $x_+^d \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ por sustracción de un polinomio de Taylor, mediante la fórmula:

$$\langle x_+^d, \varphi \rangle := \int_0^1 x^d \biggl(\varphi(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}\, x^k \biggr)\, dx + \int_1^\infty x^d \varphi(x)\, dx + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!(d+k+1)} \,.$$

Verificar que x_+^d es homogénea de grado d, es decir, que $\rho_\lambda(x_+^d) = \lambda^d x_+^d$ para todo $\lambda > 0$.

Ejercicio 3.17. (a) Sea $E := \sum_{j=1}^m x_j\, \partial_j$ el **operador de Euler** en $\mathbb{R}^m$. Demostrar que una función diferenciable $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ es homogénea de grado d si y sólo si $Ef = df$. ⟦ Indicación: Calcular $\partial/\partial t|_{t=0}$ de $f(e^t x)$. ⟧

(b) Demostrar que una distribución $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ es homogénea de grado d si y sólo si $(E - d)T = 0$. ⟦ Indicación: Calcular $\partial/\partial t|_{t=0}$ de $\langle \rho_{e^t} T, \varphi \rangle$. ⟧

Ejercicio 3.18. (a) Si $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ es una distribución temperada homogénea de grado d, demostrar que su transformada de Fourier $\mathcal{F}T$ es una distribución temperada homogénea de grado $-(m + d)$.

(b) Si $-m < d < -\frac{1}{2}m$, demostrar que

$$\mathcal{F}(r^d) = C_{m,d}\, r^{-m-d}$$

para alguna constante $C_{m,d}$. Comprobar la validez de esta fórmula para $-\frac{1}{2}m < d < 0$ también. ⟦ Indicación: inversión de Fourier ⟧. (También vale para $d = -\frac{1}{2}m$, como un caso límite.)

(c)* Calcular el valor de la constante $C_{m,d}$.

4 Operadores y Teoría Espectral

4.1 Algebras de Banach

Si H es un espacio de Hilbert, los operadores acotados forman un espacio de Banach $\mathcal{L}(H)$ que además es un álgebra: la composición usual de operadores es un producto asociativo que también es una aplicación bilineal continua. Este es un ejemplo típico de un *álgebra de Banach*. Los operadores acotados invertibles forman el conjunto de elementos invertibles en esta álgebra de Banach.

Por otra parte, el espacio $C(K)$ de funciones continuas sobre un conjunto compacto K es un álgebra de Banach conmutativa con el producto usual de funciones. Toda la información acerca del espacio topológico K puede extraerse del estudio de esta álgebra $C(K)$. Desde ese punto de vista, el álgebra no conmutativa $\mathcal{L}(H)$ puede considerarse como una especie de álgebra de coordenadas de un *espacio topológico no conmutativo*.[1]

Definición 4.1. Un **álgebra de Banach** es un espacio de Banach A que posee un **producto** bilineal y asociativo $A \times A \to A : (x, y) \mapsto xy$ tal que

$$\|xy\| \leq \|x\| \, \|y\| \quad \text{para todo} \quad x, y \in A. \tag{4.1}$$

Si A posee un *elemento unidad* 1 tal que $\|1\| = 1$, el álgebra de Banach A es **unital**.[2]

La relación (4.1) implica que el producto es una operación *continua* sobre A. En efecto, si $x_n \to x$ y $y_n \to y$ en A, entonces $\|y_n\| \to \|y\|$ y por tanto la sucesión positiva de las normas $\|y_n\|$ es acotada; en consecuencia, cuando $n \to \infty$,

$$\|x_n y_n - xy\| \leq \|x_n y_n - x y_n\| + \|x y_n - xy\| \leq \|x_n - x\| \, \|y_n\| + \|x\| \, \|y_n - y\| \to 0.$$

Ejemplo 4.2. Si H es un espacio de Hilbert, el espacio $\mathcal{L}(H)$ con la composición de operadores es un álgebra de Banach unital. Para verificar (4.1), es suficiente notar que

$$\|ST\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|STx\| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \|S\| \, \|Tx\| = \|S\| \, \|T\|. \qquad \Diamond$$

[1] La correspondencia $K \leftrightarrow C(K)$ da lugar a un *funtor* (contravariante) entre los espacios topológicos compactos (de Hausdorff) y ciertas álgebras de Banach conmutativas. Este es un resultado fundamental de Guelfand y Naĭmark, en un artículo que se considera un punto de partida de la llamada *geometría no conmutativa*: Israel M. Guelfand y Mark A. Naĭmark, "On the embedding of normed rings into the ring of operators in Hilbert space", Matematicheskii Sbornik **12** (1943), 197–213.

[2] El símbolo 1 denotará el elemento unidad de A y también la unidad numérica de $\mathbb{C}$: el contexto indicará cuál es cuál.

Ejemplo 4.3. Si K es un espacio topológico compacto, $C(K)$ con el producto puntual de funciones es un álgebra de Banach *conmutativa*, cuyo elemento unidad es la función constante de valor 1:

$$\|fg\|_\infty = \sup_{t\in K} |f(t)\,g(t)| \leq \sup_{s,t\in K} |f(s)\,g(t)| = \|f\|_\infty \|g\|_\infty. \qquad \lozenge$$

Ejemplo 4.4. Si X es un espacio topológico localmente compacto pero no compacto, $C_0(X)$ con el producto puntual de funciones es un álgebra conmutativa de Banach *no unital*. $\lozenge$

Ejemplo 4.5. El espacio de sucesiones $\underline{\ell}^1$ es un álgebra de Banach bajo el *producto de Cauchy* de sucesiones: $(\boldsymbol{x} * \boldsymbol{y})_n := \sum_{k=0}^n x_k y_{n-k}$. $\lozenge$

Ejemplo 4.6. El espacio $L^1(\mathbb{R}^m)$ es un álgebra de Banach bajo la **convolución** de funciones integrables, porque $\|f * h\|_1 \leq \|f\|_1 \|h\|_1$. Esta álgebra de Banach *no es unital*, porque la relación distribucional $\delta * f = f * \delta = f$ muestra que ningún elemento de $L^1(\mathbb{R}^m)$ puede ser la unidad. $\lozenge$

Lema 4.7. *Cualquier álgebra de Banach A es isomorfo a un ideal de codimensión uno en un álgebra de Banach unital.*

Demostración. Defínase $A^+ := A \times \mathbb{C}$, con producto y norma definidos por

$$(x,\lambda)(y,\mu) := (\mu x + \lambda y + xy, \lambda\mu), \qquad \|(x,\lambda)\| := \|x\| + |\lambda|.$$

Este producto es bilineal y asociativo, con elemento unidad $(1,0)$. Además, vale

$$\big\|(x,\lambda)(y,\mu)\big\| = \|\mu x + \lambda y + xy\| + |\lambda\mu| \leq \big(\|x\| + |\lambda|\big)\big(\|y\| + |\mu|\big),$$

así que A^+ es un álgebra de Banach. Está claro que $\{\,(x,0) : x \in A\,\}$ es un ideal en A^+ y que $x \mapsto (x,0)$ es una isometría lineal que preserva productos. $\square$

Si el álgebra de Banach A ya es unital, hay un isomorfismo de álgebras $A^+ \simeq A \oplus \mathbb{C}$ dada por $(x,\lambda) \mapsto (x - \lambda 1, \lambda)$.

Ejemplo 4.8. Si $A = C_0(X)$ con X localmente compacto pero no compacto, la *compactificación de un punto* de X es el compacto $X^+ := X \uplus \{\infty\}$. El isomorfismo usual entre $C_0(X)$ y $\{\, f \in C(X^+) : f(\infty) = 0\,\}$ entrelaza los productos puntuales; al identificar $\mathbb{C}$ con las funciones constantes sobre X^+, se ve que $A^+ \simeq C(X^+)$. $\lozenge$

Ejemplo 4.9. Sea $A = L^1(\mathbb{R}^m)$, un álgebra de Banach no unital. La delta de Dirac δ es la unidad para convolución. En este caso, $A^+ \simeq L^1(\mathbb{R}) \oplus \mathbb{C}\,\delta$; este es un isomorfismo lineal pero no multiplicativo. $\lozenge$

► En adelante, todas las álgebras de Banach que aparecen serán unitales. El *grupo de elementos invertibles* de A será denotado por $A^\times$. Desde luego, $1 \in A^\times$. A continuación, se verá que $A^\times$ incluye un vecindario de 1, debido a las propiedades de series geométricas en álgebras de Banach.

Proposición 4.10. *Sea A un álgebra de Banach unital. El grupo $A^\times$ de elementos invertibles es abierto en A e incluye la bola abierta $\{\, x \in A : \|1 - x\| < 1 \,\}$.*

Demostración. Si $y \in A$ con $\|y\| < 1$ y si $m \geq n$, la desigualdad triangular y la propiedad (4.1) implican que[3]

$$\biggl\| \sum_{k=n}^{m} y^k \biggr\| \leq \sum_{k=n}^{m} \|y^k\| \leq \sum_{k=n}^{m} \|y\|^k \leq \frac{\|y\|^n}{1 - \|y\|}\,.$$

Entonces, las sumas parciales de $\sum_{k=0}^{\infty} y^k$ forman una sucesión de Cauchy en A; esta serie geométrica converge en A.

Tómese $x \in A$ con $\|1 - x\| < 1$. La serie geométrica $\sum_{k=0}^{\infty}(1 - x)^k$ converge a algún $z \in A$. Con la notación $z_n := \sum_{k=0}^{n}(1 - x)^k$, se ve que $z_n \to z$ en A. Entonces

$$\begin{aligned} xz &= z - (1 - x)z = z - \lim_{n\to\infty} ((1 - x)z_n) = z - \lim_{n\to\infty} (z_{n+1} - 1) = 1, \\ zx &= z - z(1 - x) = z - \lim_{n\to\infty} (z_n(1 - x)) = z - \lim_{n\to\infty} (z_{n+1} - 1) = 1, \end{aligned}$$

así que $x \in A^\times$ con $x^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(1 - x)^k$.

Más generalmente, si $y \in A^\times$, tómese $x \in A$ con $\|x - y\| < 1/\|y^{-1}\|$. Entonces

$$\|xy^{-1} - 1\| \leq \|x - y\| \, \|y^{-1}\| < 1, \qquad \|y^{-1}x - 1\| \leq \|y^{-1}\| \, \|x - y\| < 1,$$

así que hay $u, v \in A$ con $xy^{-1}u = 1$ y $vy^{-1}x = 1$, por el párrafo anterior. Luego, x tiene una inversa a la derecha y una inversa a la izquierda, que necesariamente coinciden; es decir, x es invertible en A, con $y^{-1}u = vy^{-1} = x^{-1}$. Esto dice que $A^\times$ incluye la bola abierta $B\bigl(y; 1/\|y^{-1}\|\bigr)$ toda vez que $y \in A^\times$. Se concluye que $A^\times$ es abierto en A. □

En el grupo $A^\times$, la inversión $x \mapsto x^{-1}$ es continua. De hecho, un resultado más fuerte es válido: esta función es *diferenciable*.

Definición 4.11. Sean E y F dos espacios de Banach; sea U un abierto en E. Una función $f : U \to F$ es **diferenciable** (en el sentido de Fréchet)[4] en un punto $x \in U$, si existe

[3] Aquí se emplea el convenio $y^0 := 1$ si $y \neq 0$ en A.

[4] Hay otras definiciones posibles de diferenciabilidad en espacios normados. Dícese que f es diferenciable en x *en el sentido de Gâteaux* si para cada $u \in E$, la derivada direccional $\lim_{h\to 0}(f(x + hu) - f(x))/h$ existe. Si f es diferenciable en el sentido de Fréchet, este límite existe y depende lineal y continuamente de u.

$T \in \mathcal{L}(E, F)$ tal que, para todo $\varepsilon > 0$ hay $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ con $B(x;\delta) \subseteq U$ y

$$\|v\| < \delta \implies \|f(x+v) - f(x) - T(v)\| < \varepsilon\|v\|.$$

Se escribe $df(x) := T$. Si f es diferenciable en cada $x \in U$, la función $df : U \to \mathcal{L}(E, F)$ es su **derivada**.

Obsérvese que si $S \in \mathcal{L}(E, F)$ es lineal y continua, entonces S es automáticamente diferenciable en E, con $dS(x) \equiv S$ para todo $x \in E$.

Si f es diferenciable en x, $\|v\| < \delta(\varepsilon) \implies \|f(x+v) - f(x)\| < (\|T\| + \varepsilon)\|v\|$, así que f es *continua* en x: una función diferenciable es automáticamente continua.

Si V un abierto en F tal que $f(U) \subseteq V$, y si $g\colon V \to G$ es otra función diferenciable con valores en un espacio de Banach G, es fácil comprobar la **regla de la cadena** que dice que $d(g \circ f)(x) = dg(f(x)) \circ df(x)$. Fíjese que $df(x) \in \mathcal{L}(E, F)$, $dg(f(x)) \in \mathcal{L}(F, G)$, $d(g \circ f)(x) \in \mathcal{L}(E, G)$.

En el caso especial (importante) $E = \mathbb{C}$, el teorema de Cauchy y Goursat muestra que toda función diferenciable en U es una función *holomorfa*, con valores vectoriales en F. Los teoremas de la teoría de una variable compleja siguen válidos para tales funciones; es cuestión de reemplazar el valor absoluto en $\mathbb{C}$ por la norma de F en los lugares apropiados. En particular, las fórmulas integrales de Cauchy, el teorema de Liouville, los integrales de contorno y los desarrollos de Taylor y de Laurent conservan su validez, *mutatis mutandis*, para funciones holomorfas con valores vectoriales.

Proposición 4.12. *Sea A un álgebra de Banach unital. La inversión $h\colon A^\times \to A^\times : x \mapsto x^{-1}$ es diferenciable (y por ende continua), con $dh(x)\colon z \mapsto -x^{-1}zx^{-1}$ para $x \in A^\times$, $z \in A$.*

Demostración. En primer lugar, resulta que $dh(1) = -1 \in \mathcal{L}(A)$, porque

$$\|(1+v)^{-1} - 1 + v\| = \|(1+v)^{-1} - (1-v)\| = \left\|\sum_{k=2}^{\infty}(-v)^k\right\| \leq \sum_{k=2}^{\infty}\|v\|^k = \frac{\|v\|^2}{1 - \|v\|} < \varepsilon\|v\|$$

toda vez que $\|v\| < \delta := \varepsilon/(1+\varepsilon)$.

Si $x \in A^\times$, escríbase $y = x^{-1}$; defínase los operadores de multiplicación $L_y, R_y \in \mathcal{L}(A)$ por $L_y(z) := yz$, $R_y(z) := zy$. Fíjese que $L_y \circ h \circ R_y = h$, en vista de que $L_y(h(R_y(z))) = L_y(h(zx^{-1})) = L_y(xz^{-1}) = z^{-1}$. La regla de la cadena entonces muestra que

$$dh(x) = L_y \circ dh(R_y(x)) \circ R_y = L_y \circ (-1) \circ R_y = -L_y \circ R_y : z \mapsto -x^{-1}zx^{-1}. \qquad \square$$

► El concepto fundamental de la teoría de álgebras de Banach es el *espectro* de un elemento. (Este término tiene su origen en la física atómica, donde significa un conjunto de frecuencias de líneas de absorción en una banda de luz.)

Definición 4.13. Sea A un álgebra de Banach unital. El **espectro** $\mathrm{sp}(x) \subset \mathbb{C}$ de $x \in A$ se define como

$$\mathrm{sp}(x) := \{\, \lambda \in \mathbb{C} : (\lambda 1 - x)^{-1} \textbf{ no } \text{existe} \,\} = \{\, \lambda \in \mathbb{C} : (\lambda 1 - x) \notin A^{\times} \,\}.$$

En particular, si H es un espacio de Hilbert, el **espectro del operador** $T \in \mathcal{L}(H)$ es el conjunto de escalares $\lambda \in \mathbb{C}$ tales que $\lambda 1 - T$ no es invertible en $\mathcal{L}(H)$.

Ejemplo 4.14. Si $A = \mathbb{C}^{n \times n} \simeq \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ y $T \in A$, la matriz $\lambda 1 - T$ no es invertible si y sólo si $\det(\lambda 1 - T) = 0$. En este caso, $\mathrm{sp}(T)$ es el conjunto de los **autovalores** de T. $\Diamond$

Ejemplo 4.15. Si $A = C(K)$ con K compacto, entonces $g \in A^{\times}$ si y sólo si la función g no se anula en K, porque el inverso puntual de g es su *recíproco* $x \mapsto 1/g(x)$. Si $f \in C(K)$, la función $(\lambda 1 - f) \colon x \mapsto \lambda - f(x)$ no es invertible si y sólo si $\lambda = f(x)$ para algún $x \in K$. En este caso, $\mathrm{sp}(f)$ coincide con *la imagen* $f(K) \subset \mathbb{C}$.

Este ejemplo deja ver que *cualquier compacto* $K \Subset \mathbb{C}$ es un posible espectro: basta tomar $A = C(K)$ y $f(\lambda) \equiv \lambda$ en A, para que $\mathrm{sp}(f) = K$. $\Diamond$

Un teorema del álgebra lineal finitodimensional dice que cada matriz compleja posee al menos un autovalor complejo. (Obsérvese que el resultado es válido porque $\mathbb{C}$ es algebraicamente cerrado: hay matrices en $M_2(\mathbb{R})$ que no poseen autovalores reales.) Este teorema sigue válido para álgebras de Banach (complejas): el espectro de un elemento no puede ser vacío.

Proposición 4.16 (Guelfand)**.** *Sea A un álgebra de Banach unital. Si $x \in A$, entonces* $\mathrm{sp}(x)$ *es* compacto *en* $\mathbb{C}$ *y* no es vacío.

Demostración. Si $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| > \|x\|$, entonces $\|x/\lambda\| < 1$; por la Proposición 4.10, $(1 - x/\lambda)$ es invertible, y luego $(\lambda 1 - x) = \lambda(1 - x/\lambda) \in A^{\times}$. Esto muestra que

$$\mathrm{sp}(x) \subseteq \{\, \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \le \|x\| \,\}. \tag{4.2}$$

Defínase $f_x \colon \mathbb{C} \setminus \mathrm{sp}(x) \to A^{\times} : \lambda \mapsto (\lambda 1 - x)^{-1}$; esta f_x es continua, por ser la composición de las funciones continuas $\lambda \mapsto (\lambda 1 - x)$ y $z \mapsto z^{-1}$. Luego $\mathbb{C} \setminus \mathrm{sp}(x) = f_x^{-1}(A^{\times})$ es abierto en $\mathbb{C}$, así que $\mathrm{sp}(x)$ es cerrado. También es acotado por (4.2); por el teorema de Heine y Borel, $\mathrm{sp}(x)$ es compacto en $\mathbb{C}$.

La función f_x es diferenciable por la regla de la cadena, en vista de la Proposición 4.12. Luego f_x es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \mathrm{sp}(x)$. En la región $|\lambda| > \|x\|$ posee un desarrollo de Laurent:

$$f_x(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\Bigl(1 - \frac{x}{\lambda}\Bigr)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\lambda^{k+1}}\,.$$

Por lo tanto, para $|\lambda| > \|x\|$,

$$\|f_x(\lambda)\| \le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|x^k\|}{|\lambda|^{k+1}} \le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|x\|^k}{|\lambda|^{k+1}} = \frac{1}{|\lambda| - \|x\|} \to 0 \quad \text{cuando } \lambda \to \infty. \tag{4.3}$$

Si $\mathrm{sp}(x)$ fuera vacío, f_x sería una función holomorfa *entera* (con valores vectoriales), acotada en el disco $\{\, \lambda : |\lambda| \le \|x\| + 1 \,\}$ por su supremo allí, y acotada fuera de este disco por 1, debido a (4.3). Por el teorema de Liouville, f sería constante; pero, en vista de (4.3), este valor constante sería 0, el cual no pertenece a $A^\times$. Se concluye que $\mathrm{sp}(x) \neq \emptyset$. □

Corolario 4.17 (Guelfand y Mazur)**.** *Si el álgebra de Banach A es un álgebra de división (o un cuerpo), entonces $A \simeq \mathbb{C}$.*

Demostración. Si $x \in A$, hay un número complejo $\lambda \in \mathrm{sp}(x)$, porque $\mathrm{sp}(x) \neq \emptyset$. Entonces $\lambda 1 - x = 0$, porque el único elemento no invertible de A es 0. Por lo tanto, $A = \mathbb{C}\,1$. □

Definición 4.18. Sea A un álgebra de Banach unital. El **radio espectral** de $x \in A$ es

$$r(x) := \sup\{\, |\lambda| : \lambda \in \mathrm{sp}(x) \,\}.$$

La relación (4.2) muestra que $r(x) \le \|x\|$.

Proposición 4.19. *Sea A un álgebra de Banach unital. El radio espectral de $x \in A$ está dado por la fórmula*

$$r(x) = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n}.$$

Demostración. La serie de Laurent de $f_x(\lambda) := (\lambda 1 - x)^{-1}$, definida inicialmente en el anillo abierto $\{\, \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > \|x\| \,\}$, converge en el anillo $\{\, \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > r(x) \,\}$, donde f_x está definida y es holomorfa. Si R es el radio de convergencia de la serie de potencias $\zeta \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \|x^k\| \zeta^{k+1}$, entonces $\limsup_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n} = R^{-1} \le r(x)$.

Obsérvese que $\lambda \in \mathrm{sp}(x) \implies \lambda^n \in \mathrm{sp}(x^n)$ para $n \in \mathbb{N}^*$, en vista de la identidad

$$\lambda^n 1 - x^n = (\lambda 1 - x)(\lambda^{n-1} 1 + \lambda^{n-2} x + \cdots + \lambda x^{n-2} + x^{n-1}),$$

que muestra que $(\lambda 1 - x)$ tendría un inverso si $(\lambda^n 1 - x^n)$ fuera invertible. Entonces

$$\lambda \in \mathrm{sp}(x) \implies |\lambda^n| \le \|x^n\| \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \implies |\lambda| \le \liminf_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n}.$$

En resumen, vale $\limsup_n \|x^n\|^{1/n} \le r(x) \le \liminf_n \|x^n\|^{1/n}$. Por lo tanto, $\lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n}$ existe y coincide con $r(x)$. □

Ejemplo 4.20. En $A = M_2(\mathbb{C}) = \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$, la matriz $x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ cumple $\|x\| = 1$ pero $\operatorname{sp}(x) = \{0\}$, así que $r(x) = 0 < \|x\|$. Obviamente, vale $\|x^n\|^{1/n} = 0$ para $n \geq 2$. Más generalmente, vale $r(y) = 0$ si y es una matriz nilpotente.

En cambio, si $x \in M_n(\mathbb{C}) = \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ es una matriz *diagonal* con autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, entonces $r(x) = \|x\| = \max_j |\lambda_j|$. ◊

► Hay una clase de álgebras de Banach de particular importancia, debido al buen comportamiento de los espectros de sus elementos. Estas álgebras poseen una *involución* y sus normas cumplen una propiedad sencilla pero fundamental.

Definición 4.21. Una **involución isométrica** en un álgebra de Banach A es una aplicación $x \mapsto x^*$ de A en A que es:

- ◇ *semilineal*: $(\alpha x + \beta y)^* = \bar{\alpha} x^* + \bar{\beta} y^*$;
- ◇ *antihomomórfica*: $(xy)^* = y^* x^*$;
- ◇ *involutiva*: $(x^*)^* = x$;
- ◇ e *isométrica*: $\|x^*\| = \|x\|$.

Si A posee una involución isométrica, dícese que A es un álgebra de Banach **involutiva**.

Una **C^*-álgebra** es un álgebra de Banach involutiva que además satisface:

$$\|x^* x\| = \|x\|^2 \quad \text{para todo} \quad x \in A. \tag{4.4}$$

Un elemento x en una C^*-álgebra es **normal** si $x^* x = x x^*$; es **autoadjunto** si $x^* = x$.

Ejemplo 4.22. Si K es compacto, $C(K)$ es un álgebra de Banach involutiva bajo conjugación compleja, $f^*(x) := \overline{f(x)}$. Además, cada $f \in C(K)$ satisface

$$\|f^* f\|_\infty = \sup\{\, |\overline{f(x)}\, f(x)| : x \in K \,\} = \sup\{\, |f(x)|^2 : x \in K \,\} = \|f\|_\infty^2$$

así que $C(K)$ es *una C^*-álgebra unital y conmutativa*. ◊

Ejemplo 4.23. El álgebra de Banach $L^1(\mathbb{R}^m)$, bajo convolución, posee una involución isométrica dada por $h^*(x) := \overline{h(-x)}$. Esta álgebra de Banach involutiva es conmutativa pero no es una C^*-álgebra: aunque $\|h^* * h\|_1 \leq \|h\|_1^2$ en general, es fácil encontrar elementos $h \in L^1(\mathbb{R}^m)$ para los cuales esta desigualdad es estricta. ◊

Ejemplo 4.24. Si H es un espacio de Hilbert, la correspondencia $T \mapsto T^*$ es una involución isométrica sobre $\mathcal{L}(H)$. Esta es una C^*-álgebra, unital pero no conmutativa, por las igualdades:

$$\begin{aligned} \|T^*T\| &= \sup\{\, \big|\langle x \mid T^*Tx\rangle\big| : \|x\| \leq 1 \,\} = \sup\{\, \big|\langle Tx \mid Tx\rangle\big| : \|x\| \leq 1 \,\} \\ &= \sup\{\, \|Tx\|^2 : \|x\| \leq 1 \,\} = \|T\|^2. \end{aligned} \tag{4.5}$$

La siguiente Proposición justifica la primera de estas igualdades. $\Diamond$

Proposición 4.25. *Sea H un espacio de Hilbert y sea $T \in \mathcal{L}(H)$ un operador acotado autoadjunto, es decir, $T^* = T$. Su norma satisface la relación*

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \big|\langle x \mid Tx\rangle\big|.$$

Demostración. El **radio numérico** de un operador $T \in \mathcal{L}(H)$ se define como

$$\omega(T) := \sup\{\, |\langle x \mid Tx\rangle| : \|x\| \leq 1 \,\}.$$

La desigualdad de Schwarz muestra que

$$\omega(T) \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \|x\|\,\|Tx\| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \|T\|\,\|x\|^2 = \|T\|.$$

La fórmula (2.14) dice que

$$\|T\| = \sup\{\, |\langle y \mid Tx\rangle| : \|x\| \leq 1,\ \|y\| \leq 1 \,\}.$$

Ahora bien, si $T = T^*$ y si $x, y \in H$, entonces

$$\begin{aligned} \Re\,\langle y \mid Tx\rangle &= \tfrac{1}{2}\big(\langle y \mid Tx\rangle + \langle Tx \mid y\rangle\big) = \tfrac{1}{2}\big(\langle y \mid Tx\rangle + \langle x \mid Ty\rangle\big) \\ &= \tfrac{1}{4}\big(\langle x+y \mid T(x+y)\rangle - \langle x-y \mid T(x-y)\rangle\big) \\ &\leq \tfrac{1}{4}\omega(T)\big(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\big) = \tfrac{1}{2}\omega(T)\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big), \end{aligned}$$

por la ley del paralelogramo. Más generalmente, al escribir $\langle y \mid Tx\rangle = e^{i\theta}|\langle y \mid Tx\rangle|$, se obtiene

$$|\langle y \mid Tx\rangle| = e^{-i\theta}\langle y \mid Tx\rangle = \langle e^{i\theta}y \mid Tx\rangle \leq \tfrac{1}{2}\omega(T)\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big).$$

Al aplicar (2.14), se concluye que $\|T\| \leq \omega(T)$ cuando $T = T^*$. $\square$

Lema 4.26. *Si A es un álgebra de Banach involutiva, entonces* $\operatorname{sp}(x^*) = \{\, \bar\lambda : \lambda \in \operatorname{sp}(x) \,\}$ *para todo $x \in A$.*

Demostración. Nótese que $(y^*)^{-1} = (y^{-1})^*$ para todo $y \in A^\times$ (si $yz = zy = 1$, entonces $z^*y^* = y^*z^* = 1$). Luego, $(\bar{\lambda}1 - x^*) = (\lambda 1 - x)^*$ es invertible si y sólo si $(\lambda 1 - x)$ es invertible en A. En otras palabras, $\bar{\lambda} \in \mathrm{sp}(x^*)$ si y sólo si $\lambda \in \mathrm{sp}(x)$. □

Proposición 4.27. *Sea A una C^*-álgebra. Si $x \in A$, entonces:*

(a) si $xx^* = x^*x$, entonces $r(x) = \|x\|$;

(b) si $x = x^*$, entonces $\mathrm{sp}(x) \subset \mathbb{R}$.

Demostración. Ad (a): Al aplicar la propiedad (4.4) con $x = y^*y$, se obtiene

$$\|(y^*y)^2\| = \|(y^*y)^*(y^*y)\| = \|y^*y\|^2.$$

Por inducción, vale $\left\|(y^*y)^{2^k}\right\| = \|y^*y\|^{2^k}$ para $k \in \mathbb{N}$. Ahora, si $xx^* = x^*x$, entonces $(x^n)^*x^n = (x^*x)^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. La Proposición 4.19 entonces muestra que

$$\begin{aligned} r(x) &= \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n} = \lim_{k\to\infty} \left\|x^{2^k}\right\|^{2/2^{k+1}} = \lim_{k\to\infty} \left\|(x^{2^k})^*x^{2^k}\right\|^{1/2^{k+1}} \\ &= \lim_{k\to\infty} \left\|(x^*x)^{2^k}\right\|^{1/2^{k+1}} = \|x^*x\|^{1/2} = \|x\|. \end{aligned}$$

Ad (b): Si $x^* = x$, tómese $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathrm{sp}(x)$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Si $\gamma \in \mathbb{R}$, entonces $\alpha + i(\beta + \gamma) = \lambda + i\gamma \in \mathrm{sp}(x + i\gamma 1)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \alpha^2 + (\beta + \gamma)^2 &\le r(x + i\gamma 1)^2 \le \|x + i\gamma 1\|^2 = \|(x + i\gamma 1)^*(x + i\gamma 1)\| \\ &= \|(x - i\gamma 1)(x + i\gamma 1)\| = \|x^2 + \gamma^2 1\| \le \|x\|^2 + \gamma^2. \end{aligned}$$

En consecuencia, $\alpha^2 + \beta^2 + 2\beta\gamma \le \|x\|^2$ para todo $\gamma \in \mathbb{R}$. Esto sólo es posible si $\beta = 0$, es decir, $\lambda = \alpha \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, el espectro de x es real. □

Si $p(\zeta) \equiv \beta_0 + \beta_1\zeta + \cdots + \beta_n\zeta^n$ es un polinomio $p \in \mathbb{C}[X]$, dado un elemento $x \in A$ en un álgebra unital se define $p(x) := \beta_0 1 + \beta_1 x + \cdots + \beta_n x^n \in A$ por sustitución directa. La siguiente Proposición se conoce como el *teorema de la aplicación espectral*.

Proposición 4.28. *Si A un álgebra de Banach unital y si $p \in \mathbb{C}[X]$, entonces:*

(a) $\mathrm{sp}(p(x)) = p(\mathrm{sp}(x)) \equiv \{\, p(\lambda) : \lambda \in \mathrm{sp}(x) \,\}$;

(b) si A es una C^*-álgebra y si $x = x^*$, entonces $\|p(x)\| = \sup\{\, |p(\lambda)| : \lambda \in \mathrm{sp}(x) \,\}$.

Demostración. Ad (a): Tómese $\lambda \in \mathrm{sp}(x)$. Por el teorema del factor, hay otro polinomio $q \in \mathbb{C}[X]$ tal que $p(\lambda) - p(\zeta) \equiv (\lambda - \zeta)q(\zeta)$ para $\zeta \in \mathbb{C}$. Por sustitución directa, se obtiene $p(\lambda)1 - p(x) = (\lambda 1 - x)q(x)$ en A. Si $y \in A$ es un inverso para $p(\lambda)1 - p(x)$, entonces $q(x)y$ es un inverso para $\lambda 1 - x$. Por lo tanto, $p(\lambda) \in \mathrm{sp}(p(x))$.

Por otro lado, tómese $\mu \in \mathrm{sp}(p(x))$. El polinomio $\mu - p$ admite una factorización

$$\mu - p(\zeta) \equiv \alpha_0(\alpha_1 - \zeta)(\alpha_2 - \zeta) \cdots (\alpha_n - \zeta),$$

con $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$, $\alpha_0 \neq 0$. Entonces $\mu 1 - p(x) = \alpha_0(\alpha_1 1 - x) \cdots (\alpha_n 1 - x)$. Como este producto no es invertible en A, hay al menos un factor $(\alpha_k 1 - x)$ que no es invertible; luego $\alpha_k \in \mathrm{sp}(x)$. Por lo tanto, $\mu = p(\alpha_k) \in p(\mathrm{sp}(x))$.

Ad (b): Si $x = x^*$ y $p(\zeta) \equiv \beta_0 + \beta_1 \zeta + \cdots + \beta_n \zeta^n$, entonces

$$p(x)^* = \bar{\beta}_0 1 + \bar{\beta}_1 x + \cdots + \bar{\beta}_n x^n \quad \text{conmuta con} \quad p(x) = \beta_0 1 + \beta_1 x + \cdots + \beta_n x^n.$$

Esto dice que $p(x)$ es un elemento *normal* de A. De la Proposición 4.27(a) se obtiene la igualdad $\|p(x)\| = r(p(x)) = \sup\{\,|p(\lambda)| : \lambda \in \mathrm{sp}(x)\,\}$. □

► Si x es un elemento de un álgebra unital A cualquiera, la correspondencia $p \mapsto p(x)$ es un *homomorfismo de álgebras* de $\mathbb{C}[X]$ en A. Si A es un álgebra de Banach, es natural tratar de extenderlo en un homomorfismo $f \mapsto f(x)$ cuyo dominio es alguna compleción de $\mathbb{C}[X]$. Cualquier extensión de esta naturaleza se llama un **cálculo funcional** para el álgebra de Banach A.

Como se verá más adelante, si A es una C^*-álgebra es posible usar *funciones continuas* para este propósito. Para álgebras de Banach en general, es posible al menos reemplazar los polinomios a series de Taylor convergentes, es decir, por funciones holomorfas.

Definición 4.29. Sea A un álgebra de Banach y sea $U \subseteq \mathbb{C}$ un abierto. Si $x \in A$ es un elemento tal que $\mathrm{sp}(x) \subset U$, sea Γ un contorno cerrado en $\mathbb{C}$ que rodea $\mathrm{sp}(x)$ una vez positivamente.[5] Si $f : U \to \mathbb{C}$ es un función holomorfa en U, la integral de contorno

$$f(x) := \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma f(\lambda)\,(\lambda 1 - x)^{-1}\,d\lambda \tag{4.6}$$

define un elemento $f(x) \in A$. Es un ejercicio comprobar que $\mathcal{H}(U) \to A : f \mapsto f(x)$ es un homomorfismo que no depende de Γ, donde $\mathcal{H}(U)$ es el álgebra de funciones holomorfas en U. Este homomorfismo $f \mapsto f(x)$ se llama un **cálculo funcional holomorfo** para A.

[5]Este contorno cerrado Γ es una unión finita de curvas cerradas, suaves por trozos, en U. Si $K \Subset \mathbb{C}$ es un compacto, dícese que Γ **rodea** K **una vez positivamente** si $\Gamma \cap K = \emptyset$ y si el **número de vueltas** $n_\Gamma(\zeta) := (2\pi i)^{-1} \oint_\Gamma (\lambda - \zeta)^{-1}\,d\lambda$ cumple $n_\Gamma(\zeta) = 1$ para todo $\zeta \in K$.

4.2 Operadores sobre un espacio de Hilbert

Esta sección está dedicado al estudio de una C^*-álgebra especial: el álgebra involutiva $\mathcal{L}(H)$ de operadores acotados sobre un espacio de Hilbert H. Un operador $T \in \mathcal{L}(H)$ es **autoadjunto** si $T^* = T$; más generalmente, T es **normal** si $T^*T = TT^*$. En dimensión finita, los operadores normales son *diagonalizables* mediante un cambio de base ortonormal de H: hasta semejanza unitaria, T está caracterizado por sus *autovalores*, contados con multiplicidad. Cuando $\dim H = \infty$, emergen algunos fenómenos nuevos: en particular, muchos operadores no poseen autovalores. En lugar del conjunto de autovalores, hay que estudiar el *espectro* de T que, afortunadamente, por la Proposición 4.16, no es vacío. El tema de la multiplicidad del espectro requiere un análisis delicado; en lugar de abordarlo directamente, es preferible construir un cálculo funcional para el operador T.

Definición 4.30. En la C^*-álgebra $\mathcal{L}(H)$, se destacan las siguientes clases de operadores:

(a) V es una **isometría** si $V^*V = 1$;

(b) U es **unitario** si $U^*U = UU^* = 1$, es decir, U es invertible con $U^{-1} = U^*$;

(c) S es una **isometría parcial** si $SS^*S = S$;

(d) P es un **proyector** (ortogonal) si $P^2 = P = P^*$;

(e) A es **positivo** si $A = B^*B$ para algún $B \in \mathcal{L}(H)$;

(f) R es una **contracción** si $1 - R^*R$ es positivo.

Estas clases no son disjuntos: cada unitario es una isometría; cada isometría es una isometría parcial y también es una contracción; cada proyector es positivo.[6]

Hay otras formas de caracterizar estos operadores, en términos de su efecto sobre vectores (por ejemplo, V es una isometría si y sólo si $\|Vx\| = \|x\|$ para todo $x \in H$) o bien en términos de la posición de su espectro en el plano complejo. Las propiedades mencionados en la Definición 4.30, sin embargo, son *puramente algebraicos*: estos seis conceptos son aplicables a elementos de una C^*-álgebra cualquiera.

Definición 4.31. Si $T \in \mathcal{L}(H)$ es autoadjunto, los elementos $\{\, p(T) : p \in \mathbb{C}[X] \,\}$ forman una álgebra involutiva (es decir, una **$*$-álgebra**) de elementos normales de $\mathcal{L}(H)$. Esta es el

[6]Fíjese que el operador 0 es un proyector y por ende es positivo. Habría sido más lógico decir que un operador que cumple la condición (e) es *no negativo*; sin embargo, en la teoría de matrices este término está reservado para otro uso. Una matriz compleja de la forma B^*B se llama *semidefinido positivo*. En $\mathcal{L}(H)$, el adjetivo “semidefinido” queda implícito.

álgebra unital generado por T; sus elementos conmutan. Denótese por $C^*(T)$ su clausura en el espacio de Banach $\mathcal{L}(H)$, la cual es una C^*-álgebra conmutativa.

Más generalmente, si $T \in \mathcal{L}(H)$ es normal pero no necesariamente es autoadjunto, la $*$-álgebra unital generada por T es el conjunto de operadores de la forma $p(T, T^*)$, donde $p(\zeta, \bar{\zeta})$ es un polinomio en dos variables con coeficientes complejos. ⟦ El conjugado complejo del polinomio $p(\zeta, \bar{\zeta}) = \sum_{k,l} \alpha_k \beta_l \, \zeta^k \bar{\zeta}^l$ es $\bar{p}(\zeta, \bar{\zeta}) := \sum_{k,l} \bar{\beta}_l \bar{\alpha}_k \, \zeta^l \bar{\zeta}^k$; se ve que $p(T, T^*)^* = \bar{p}(T, T^*)$. ⟧ La clausura de esta álgebra en $\mathcal{L}(H)$, también denotado por $C^*(T)$, es la menor C^*-álgebra unital que contiene T; esta C^*-álgebra es *conmutativa* porque T es normal.

Ejemplo 4.32. En la C^*-álgebra *finitodimensional* $M_N(\mathbb{C}) \simeq \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$, la involución lleva una matriz $C = [c_{ij}]$ en $C^* = [\bar{c}_{ji}]$, su **conjugado hermítico**. Mediante un cambio de base ortonormal apropiado en $\mathbb{C}^n$, siempre es posible encontrar una matriz unitaria U tal que $A := UCU^{-1} = UCU^*$ sea una *matriz triangular superior*: $a_{ij} = 0$ si $i > j$. Su conjugado hermítico $A^* = (UCU^*)^* = UC^*U^*$ es triangular inferior. Si estas dos matrices triangulares son *diagonales*, entonces conmutan, $A^*A = AA^*$, lo cual implica $C^*C = CC^*$.

Por otro lado, si C y C^* conmutan, hay una matriz unitaria U que los trigonaliza simultáneamente, es decir, tanto UCU^* como UC^*U^* son matrices triangulares superiores, y por ende los dos son matrices diagonales. Estos resultados dicen que *una matriz C es normal si y sólo si es diagonalizable* mediante cambio de base ortonormal de $\mathbb{C}^n$.

En otros términos, un operador $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ es normal si y sólo si posee una matriz diagonal con respecto a alguna base ortonormal de $\mathbb{C}^n$. ◊

► Si $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ son los autovalores del operador normal $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$, la matriz diagonal de T en una base ortonormal apropiada es $A = \operatorname{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$. Si $p \in \mathbb{C}[X, Y]$ es un polinomio en dos variables, entonces

$$p(A, A^*) = \operatorname{diag}[p(\lambda_1, \bar{\lambda}_1), \dots, p(\lambda_n, \bar{\lambda}_n)]$$

es la matriz de $p(T, T^*)$ en esta base. En otras palabras, la matriz de una *función de T* con respecto a esta base ortonormal es la matriz diagonal de la función correspondiente de sus autovalores. Es posible generalizar esta observación a operadores sobre espacios de Hilbert de dimensión infinita, mediante un *cálculo funcional continuo*. Este cálculo depende de una generalización importante del teorema clásico de Weierstrass sobre la densidad del subespacio de los polinomios en el espacio de Banach $C[a, b]$.

Teorema 4.33 (Stone y Weierstrass)**.** *Sea B una $*$-subálgebra de $C(K)$, donde K es compacto. Si* $1 \in B$ *y si B* separa puntos *de K [es decir: si $x \neq y$ en K, existe $g \in B$ con $g(x) \neq g(y)$] entonces B es densa en $C(K)$.*

Demostración. Como $\Re f = \frac{1}{2}(f + \bar{f})$ y $\Im f = \frac{i}{2}(\bar{f} - f)$ para $f \in C(K)$, está claro que $B_{\mathbb{R}} := \{ g \in B : g(K) \subset \mathbb{R} \}$ es una subálgebra real de $C_{\mathbb{R}}(K)$ que contiene $\Re g$ e $\Im g$ para todo $g \in B$. Basta, entonces, demostrar la versión real del teorema: *si $B_{\mathbb{R}}$ es una subálgebra real de $C_{\mathbb{R}}(K)$ tal que $1 \in B_{\mathbb{R}}$ y si $B_{\mathbb{R}}$ separa puntos de K, entonces $B_{\mathbb{R}}$ es densa en $C_{\mathbb{R}}(K)$.*

El teorema de Weierstrass, en su versión real, dice que los polinomios reales forman un subespacio denso de $C_{\mathbb{R}}[a,b]$ cuando $[a,b]$ es un intervalo compacto de $\mathbb{R}$. En el caso $[a,b] = [0,1]$, por ejemplo, cada $f \in C_{\mathbb{R}}[0,1]$ es el límite uniforme de sus **polinomios de Bernstein**:[7]

$$b_n(t) := \sum_{k=0}^{n} f(k/n) \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}.$$

Si $g \in B_{\mathbb{R}}$ con $\|g\|_\infty = M$, aplíquese el teorema de Weierstrass para obtener una sucesión de polinomios reales $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tales que $p_n(t) \to |t|$ uniformemente en el intervalo $[-M, M]$. Entonces $p_n(g(x)) \to |g(x)|$ uniformemente sobre K. Fíjese que $p_n \circ g \in B_{\mathbb{R}}$; la propiedad $1 \in B_{\mathbb{R}}$ sirve para incorporar el término constante de p_n. Luego, $|g| \in \overline{B}_{\mathbb{R}}$. Al escribir

$$f \vee g := \max\{f,g\} = \tfrac{1}{2}(f+g) + \tfrac{1}{2}|f-g|, \quad f \wedge g := \min\{f,g\} = \tfrac{1}{2}(f+g) - \tfrac{1}{2}|f-g|,$$

se obtiene $f \vee g \in \overline{B}_{\mathbb{R}}$ y $f \wedge g \in \overline{B}_{\mathbb{R}}$ también, para todo $f, g \in B_{\mathbb{R}}$.

Sea $f \in C(X)$ y sean x, y dos puntos distintos en K. Tómese $g \in B_{\mathbb{R}}$ con $g(x) \neq g(y)$. Entonces es posible hallar $a, b \in \mathbb{R}$ tal que la función $h_{xy} := ag + b \in B_{\mathbb{R}}$ satisfaga $h_{xy}(x) = f(x)$ y $h_{xy}(y) = f(y)$.

Dado $\varepsilon > 0$, hay un vecindario abierto V_y de y en K tal que $h_{xy}(z) > f(z) - \varepsilon$ para $z \in V_y$. Esta es consecuencia de la continuidad de la función $h_{xy} - f$. Como K es compacto, hay puntos $y_1, \dots, y_m \in K$ tal que $K = V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_m}$. Defínase $f_x := h_{xy_1} \vee \cdots \vee h_{xy_m}$. Entonces $f_x \in \overline{B}_{\mathbb{R}}$, $f_x(x) = f(x)$ y $f_x(z) > f(z) - \varepsilon$ para todo $z \in K$.

Ahora hay un vecindario abierto U_x de x en K tal que $f_x(z) < f(z) + \varepsilon$ para $z \in U_x$. (Esto sigue por la continuidad de $f_x - f$.) Como K es compacto, hay puntos $x_1, \dots, x_n \in K$ tal que $K = U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_n}$. Defínase $g := f_{x_1} \wedge \cdots \wedge f_{x_n}$. Se concluye que $g \in \overline{B}_{\mathbb{R}}$ y que $f(z) - \varepsilon < g(z) < f(z) + \varepsilon$ para todo $z \in K$.

En resumen: para cada $f \in C_{\mathbb{R}}(K)$ y cada $\varepsilon > 0$, hay $g \in \overline{B}_{\mathbb{R}}$ tal que $\|f - g\|_\infty \leq \varepsilon$. Esto comprueba que $\overline{B}_{\mathbb{R}}$ es densa en $C_{\mathbb{R}}(K)$, y por ende $B_{\mathbb{R}}$ es densa en $C_{\mathbb{R}}(K)$. Entonces, también, B es densa en $C(K)$. □

Corolario 4.34. *Sea B una $*$-subálgebra unital de $C(K)$ que separa puntos de K. Si $x_0 \in K$, entonces $\{ g \in B : g(x_0) = 0 \}$ es denso en el ideal $\{ f \in C(K) : f(x_0) = 0 \}$ de $C(K)$.*

[7]Para la demostración, véase, por ejemplo, el capítulo inicial del libro de Yosida [16].

Demostración. Las operaciones $(f,g) \mapsto f \vee g$ y $(f,g) \mapsto f \wedge g$ conservan la condición $f(x_0) = 0$. La demostración anterior sigue válida en su presencia: dados $f \in C(K)$ con $f(x_0) = 0$ y $x \neq y$ en $K \setminus \{x_0\}$, se puede tomar las funciones $h_{xy} \in B_{\mathbb{R}}$ con $h_{xy}(x_0) = 0$. En seguida, las funciones $f_x \in \overline{B}_{\mathbb{R}}$ y $g \in \overline{B}_{\mathbb{R}}$ también satisfacen $f_x(x_0) = 0$ y $g(x_0) = 0$. $\square$

El teorema siguiente establece un *cálculo funcional continuo* para un operador acotado autoadjunto. Esta es una versión del teorema espectral para esta clase de operadores.

Teorema 4.35. *Sea $T \in \mathcal{L}(H)$ un operador acotado* autoadjunto. *Hay un $*$-isomorfismo isométrico $f \mapsto f(T)$ entre la C^*-álgebra $C(\mathrm{sp}(T))$ y la C^*-subálgebra $C^*(T)$ de $\mathcal{L}(H)$, con las siguientes propiedades.*

(a) La imagen de la función idéntica $\lambda \mapsto \lambda$ es el operador T.

(b) Si $f \geq 0$ en $C(\mathrm{sp}(T))$, entonces $f(T)$ es un operador positivo.

(c) Si $Tx = \lambda x$ para $x \in H$ y $\lambda \in \mathrm{sp}(T)$, entonces $f(T)x = f(\lambda)x$ para $f \in C(\mathrm{sp}(T))$.

(d) $\mathrm{sp}(f(T)) = f(\mathrm{sp}(T))$ *para todo* $f \in C(\mathrm{sp}(T))$.

Demostración. Ad (a): Defínase, en primer lugar, un homomorfismo de álgebras involutivas (dicho en forma breve: un **$*$-homomorfismo**) de $\mathbb{C}[X]$ en $\mathcal{L}(H)$ que lleva el polinomio $p\colon \lambda \mapsto \beta_0 + \beta_1\lambda + \cdots + \beta_n\lambda^n$ en el operador $p(T) := \beta_0 1 + \beta_1 T + \cdots + \beta_n T^n$, por sustitución directa. Es evidente que la imagen del polinomio de primer grado $\lambda \mapsto \lambda$ es el operador T mismo.

Ahora $\mathrm{sp}(T)$ es una parte compacta de $\mathbb{C}$ (de hecho, es un compacto en $\mathbb{R}$, por la Proposición 4.27). La restricción a $\mathrm{sp}(T)$ de un polinomio en $\mathbb{C}[X]$ es una función continua sobre $\mathrm{sp}(T)$; ellas forman una $*$-subálgebra $\mathbb{C}[X]|_{\mathrm{sp}(T)}$ de $C(\mathrm{sp}(T))$. Como esta $*$-subálgebra contiene la función constante 1 y obviamente separa puntos de $\mathrm{sp}(T)$, el Teorema 4.33 muestra que es densa en $C(\mathrm{sp}(T))$.

La Proposición 4.28(b) muestra que $\|p(T)\| = \|p\|_\infty$ donde el lado derecho es la norma del supremo de la función continua $p|_{\mathrm{sp}(T)}$. El $*$-homomorfismo ya construido se extiende por continuidad a una isometría $f \mapsto f(T)$ desde $C(\mathrm{sp}(T))$ a la *compleción* de la $*$-subálgebra $\{\, p(T) : p \in \mathbb{C}[X] \,\}$ en la norma de operadores: esta compleción coincide con su *clausura* $C^*(T)$ en $\mathcal{L}(H)$.

Si $f, g \in C(\mathrm{sp}(T))$, hay polinomios $p_n, q_n \in \mathbb{C}[X]$ tales que $p_n \to f$, $q_n \to g$ uniformemente sobre $\mathrm{sp}(T)$. Resulta entonces que

$$
\begin{aligned}
fg(T) &= \lim_{n\to\infty} p_n q_n(T) = \lim_{n\to\infty} p_n(T)\, q_n(T) = f(T)\, g(T), \\
f(T)^* &= \lim_{n\to\infty} p_n(T)^* = \lim_{n\to\infty} \bar{p}_n(T) = \bar{f}(T),
\end{aligned}
$$

así que $f \mapsto f(T) : C(\mathrm{sp}(T)) \to C^*(T)$ es un $*$-isomorfismo isométrico.

Ad (b): Si $f \geq 0$ en $C(\mathrm{sp}(T))$, es decir, $f(\lambda) \geq 0$ para $\lambda \in \mathrm{sp}(T)$, entonces $g(\lambda) := \sqrt{f(\lambda)}$ define una función continua $g \in C(\mathrm{sp}(T))$ que satisface $\bar{g} = g$ y $g^2 = f$. Entonces $f(T) = g(T)^2 = g(T)^* g(T)$ es un operador positivo.

Ad (c): Dada $f \in C(\mathrm{sp}(T))$, hay polinomios $p_n \in \mathbb{C}[X]$ tales que $\|p_n - f\|_\infty \to 0$. Si $Tx = \lambda x$, entonces

$$f(T)x = \lim_{n\to\infty} p_n(T)x = \lim_{n\to\infty} p_n(\lambda)x = f(\lambda)x.$$

Ad (d): Si $\mu \notin f(\mathrm{sp}(T))$, la fórmula $h(\lambda) := 1/(\mu - f(\lambda))$ define una función continua $h \in C(\mathrm{sp}(T))$. La relación $h(\lambda)(\mu - f(\lambda)) \equiv 1$ sobre $\mathrm{sp}(T)$ conlleva la igualdad de operadores $h(T)(\mu 1 - f(T)) = 1$ en $C^*(T)$. Entonces $\mu 1 - f(T)$ es invertible en $C^*(T)$ y por ende $\mu \notin \mathrm{sp}(f(T))$.

Por otro lado, si $\nu \in f(\mathrm{sp}(T))$, hay $\lambda_0 \in \mathrm{sp}(T)$ con $f(\lambda_0) = \nu$. Sea (r_n) una sucesión de polinomios tales que $r_n(\lambda) \to \nu - f(\lambda)$ uniformemente sobre $\mathrm{sp}(T)$; se puede suponer que $r_n(\lambda_0) = 0$ para todo n, por el Corolario 4.34. Por lo tanto, hay polinomios $q_n \in \mathbb{C}[X]$ con $q_n(\lambda_0) \neq 0$ tales que $r_n(\lambda) = (\lambda_0 - \lambda)^{k_n} q_n(\lambda)$ con $k_n \geq 1$ en $\mathbb{N}$. Como $(\lambda_0 1 - T)$ no es invertible en $\mathcal{L}(H)$, el producto $r_n(T) = (\lambda_0 1 - T)^{k_n} q_n(T)$ tampoco es invertible. Los elementos no invertibles forman un conjunto cerrado de $\mathcal{L}(H)$, por la Proposición 4.10. En consecuencia, $\nu 1 - f(T) = \lim_{n\to\infty} r_n(T)$ no es invertible en $\mathcal{L}(H)$, lo cual muestra que $\nu \in \mathrm{sp}(f(T))$. $\square$

Los resultados del Teorema 4.35 también son válidos para un operador *normal* $T \in \mathcal{L}(H)$, al extender el $*$-homomorfismo $p(\lambda, \bar{\lambda}) \mapsto p(T, T^*)$ de $\mathbb{C}[X, Y]$ en $C^*(T)$, que resulta ser isométrico, a un $*$-isomorfismo entre $C(\mathrm{sp}(T))$ y $C^*(T)$. Cada operador $p(T, T^*)$ es también normal, así que $\|p(T, T^*)\| = r(p(T, T^*))$. Sin embargo, la demostración de la Proposición 4.28 no es aplicable para poder concluir que $r(p(T, T^*)) = \|p\|_\infty$. En adelante se verá cómo vencer este obstáculo.

Ejemplo 4.36. Sea T un operador autoadjunto con $\mathrm{sp}(T) \subset [0, \infty)$. La función $f(\lambda) := \sqrt{\lambda}$ está en $C(\mathrm{sp}(T))$. Se escribe $T^{1/2} \equiv \sqrt{T} := f(T)$ en este caso. De $f(\lambda)^2 \equiv \lambda$ se obtiene $(\sqrt{T})^2 = T$. Esta f toma valores reales, así que $f = \bar{f}$ sobre $\mathrm{sp}(T)$; luego $(\sqrt{T})^* = \sqrt{T}$: esta **raíz cuadrada** de T es otro operador autoadjunto.

Obsérvese también que T es un *operador positivo*, ya que la función idéntica $\lambda \mapsto \lambda$ toma valores no negativos sobre $\mathrm{sp}(T)$. De hecho, se obtiene $T = R^* R$ al colocar $R := \sqrt{T}$. Como $f \geq 0$ sobre $\mathrm{sp}(T)$, el Teorema 4.35(b) muestra que la raíz cuadrada $\sqrt{T}$ es también un operador positivo. $\Diamond$

► Hay tres posibles definiciones de **operador positivo** sobre un espacio de Hilbert: la expresión *algebraica* de la Definición 4.30(e); una propiedad *vectorial* que generaliza la de una matriz (semi)definida positiva; y una caracterización *espectral*, la de ser autoadjunto cuyo espectro no negativo. La Proposición siguiente muestra que estas tres definiciones coinciden.

Proposición 4.37. *Sea $T \in \mathcal{L}(H)$ un operador acotado. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $T = S^*S$ *para algún* $S \in \mathcal{L}(H)$*;*

(b) $\langle x \mid Tx \rangle \geq 0$ *para todo* $x \in H$*;*

(c) $T^* = T$ *y* $\operatorname{sp}(T) \subset [0, \infty)$.

*Dícese que T es **positivo** si cumple una, luego todas, de estas condiciones.*

Además, si T es positivo, hay un único *operador positivo R tal que $R^2 = T$.*

Demostración. Ad (c) $\Longrightarrow$ (a): En el Ejemplo 4.36, puede tomarse $S := \sqrt{T}$.

Ad (a) $\Longrightarrow$ (b): Sigue de la relación $\langle x \mid S^*Sx \rangle = \langle Sx \mid Sx \rangle = \|Sx\|^2 \geq 0$.

Ad (b) $\Longrightarrow$ (c): Sea $V := i(T^* - T)$, que es un operador autoadjunto. De la Proposición 4.25, se obtiene

$$\|V\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \bigl|\langle x \mid Vx \rangle\bigr| = \sup_{\|x\| \leq 1} \bigl|\langle Tx \mid x \rangle - \langle x \mid Tx \rangle\bigr| = \sup_{\|x\| \leq 1} \bigl|\overline{\langle x \mid Tx \rangle} - \langle x \mid Tx \rangle\bigr| = 0,$$

así que $V = 0$ y por ende $T^* = T$.

Al reemplazar T por $\|T\|^{-1}T$ si fuera necesario, se puede suponer que $\|T\| \leq 1$. Entonces

$$\|1 - T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \bigl|\langle x \mid (1 - T)x \rangle\bigr| = \sup_{\|x\| \leq 1} \bigl(\|x\|^2 - \langle x \mid Tx \rangle\bigr) \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \|x\|^2 = 1. \tag{4.7}$$

El desarrollo binomial $(1 + t)^{1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/2}{k} t^k$ converge *absoluta y uniformemente* en el intervalo cerrado $[-1, 1]$. Para verificar esta afirmación, basta comprobar la convergencia absoluta de $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/2}{k}$. Los números $a_k := \bigl|\binom{1/2}{k}\bigr|$ satisfacen

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k - \frac{1}{2}}{k + 1} \quad \text{y} \quad \lim_{k \to \infty} (k + 1)a_{k+1} = \lim_{k \to \infty} 2^{-2k-1} \binom{2k}{k} = 0$$

(por la fórmula de Stirling), así que $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a_0 + 2 \sum_{k=0}^{\infty} [k a_k - (k + 1)a_{k+1}]$ converge como serie telescópica.

Ahora defínase $R := \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/2}{k}(T - 1)^k$. Esta serie converge absolutamente en el espacio de Banach $\mathcal{L}(H)$, con $\|R\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} a_k \|1 - T\|^k$, en vista de (4.7). Por cálculo funcional continuo, se obtiene $R^2 = 1 + (T - 1) = T$. Como T es autoadjunto y la serie tiene coeficientes reales, es evidente que $R^* = R$. Se concluye que $T = R^2 = R^* R$.

Por cálculo funcional continuo en $C(\mathrm{sp}(R))$, la fórmula $T = R^2$ implica $\mathrm{sp}(T) = (\mathrm{sp}(R))^2 \subset [0, \infty)$.

Falta comprobar la unicidad de la raíz cuadrada positiva. Si Q es otro operador positivo con $Q^2 = T$, entonces $QT = Q^3 = TQ$, así que $QR = RQ$ porque R es (por su construcción) un límite en $\mathcal{L}(H)$ de polinomios en T. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}&(Q - R)Q(Q - R) + (Q - R)R(Q - R)\\ &\qquad = (Q^2 - R^2)(Q - R) = (T - T)(Q - R) = 0.\end{aligned}$$

Si $x \in H$, escríbase $y := (Q - R)x$; entonces

$$0 = \langle x \mid (Q - R)Q(Q - R)x\rangle + \langle x \mid (Q - R)R(Q - R)x\rangle = \langle y \mid Qy\rangle + \langle y \mid Ry\rangle.$$

La positividad de Q y R implica que los dos sumandos al lado derecho se anulan. Por la Proposición 4.25, se concluye que $(Q - R)Q(Q - R) = (Q - R)R(Q - R) = 0$. Al restar estos dos operadores, se obtiene $(Q - R)^3 = 0$ y luego $(Q - R)^4 = 0$.

Como $Q - R$ es autoadjunto, la propiedad (4.5) de operadores en $\mathcal{L}(H)$ muestra que

$$0 = \|(Q - R)^4\| = \|(Q - R)^2\|^2 = \|Q - R\|^4,$$

así que $Q - R = 0$ y por ende $Q = R$. □

Definición 4.38. El **módulo** $|T|$ de un operador $T \in \mathcal{L}(H)$ es el operador positivo dado por

$$|T| := \sqrt{T^*T} \equiv (T^*T)^{1/2}.$$

Si T es un operador normal, entonces $|T| = (TT^*)^{1/2}$ también; pero en general $|T|$ y $(TT^*)^{1/2}$ son operadores positivos distintos.

Lema 4.39. *Sea $T \in \mathcal{L}(H)$ un operador acotado autoadjunto. Hay un par de operadores positivos T_+ y T_- tales que $T = T_+ - T_-$ y $T_+T_- = 0$.*

Demostración. Para $\lambda \in \mathrm{sp}(T)$, defínase $\lambda_+ := \frac{1}{2}(|\lambda| + \lambda)$ y $\lambda_- := \frac{1}{2}(|\lambda| - \lambda)$. Entonces $\lambda \mapsto \lambda_\pm$ son dos funciones no negativas en $C(\mathrm{sp}(T))$ que cumplen

$$\lambda_+ - \lambda_- = \lambda, \quad \lambda_+ + \lambda_- = |\lambda|, \quad \lambda_+\lambda_- = |\lambda|^2 - \lambda^2 = 0.$$

La existencia y la positividad de T_+ y T_- es entonces una consecuencia directa del Teorema 4.35. □

Este par de operadores T_+ y T_-, con las propiedades citadas, es *único*: se deja la unicidad como ejercicio.

Corolario 4.40. *Cualquier operador acotado $T \in \mathcal{L}(H)$ es una combinación lineal de cuatro operadores positivos T_j, en la forma $T = T_1 - T_2 + iT_3 - iT_4$.*

Demostración. Defínase $\Re T := \frac{1}{2}(T + T^*)$ e $\Im T := \frac{i}{2}(T^* - T)$. Entonces $\Re T$ e $\Im T$ son autoadjuntos, con $T = \Re T + i\Im T$.

Colóquese $T_1 := (\Re T)_+$, $T_2 := (\Re T)_-$, $T_3 := (\Im T)_+$, $T_4 := (\Im T)_-$. □

► La siguiente Proposición introduce una factorización importante de operadores, que generaliza la expresión polar de un número complejo: $z = re^{i\theta} = e^{i\theta}r$.

Proposición 4.41 (Descomposición Polar). *Si $T \in \mathcal{L}(H)$, hay una única isometría parcial $S = SS^*S$ con* $\ker S = \ker T$, *tal que $T = S|T|$.*

Si T es normal, *entonces $S|T| = |T|S$ y la descomposición polar de T^* es $T^* = S^*|T|$.*

Demostración. Escríbase $A := |T| = (T^*T)^{1/2}$, un operador positivo. Si $x \in H$, entonces

$$\|Ax\|^2 = \langle Ax \mid Ax\rangle = \langle x \mid A^2x\rangle = \langle x \mid T^*Tx\rangle = \langle Tx \mid Tx\rangle = \|Tx\|^2, \tag{4.8}$$

así que la aplicación lineal $Ax \mapsto Tx : \operatorname{Ran} A \to \operatorname{Ran} T$ está bien definida e isométrica. Por continuidad, esta aplicación se extiende a una isometría $S_0 : \overline{\operatorname{Ran} A} \to \overline{\operatorname{Ran} T}$. Como $H = \overline{\operatorname{Ran} A} \oplus (\operatorname{Ran} A)^\perp$, se puede definir $S \in \mathcal{L}(H)$ por $S(y + z) := y$ para $y \in \overline{\operatorname{Ran} A}$, $z \in (\operatorname{Ran} A)^\perp$. Es evidente que $SAx = Tx$ para $x \in H$.

Como $A^* = A$ y S_0 es isométrico, se ve que $(\operatorname{Ran} A)^\perp = \ker A^* = \ker A = \ker S$. De la igualdad (4.8), es evidente que $\ker A = \ker T$. Ahora

$$\langle Ax \mid S_0^*S_0Ax\rangle = \langle Tx \mid Tx\rangle = \langle Ax \mid Ax\rangle \quad \text{para todo} \quad x \in H,$$

así que $S_0^*S_0 = 1$ en $\mathcal{L}(\overline{\operatorname{Ran} A})$. De ahí se ve que $S^*S \in \mathcal{L}(H)$ es un proyector ortogonal, con imagen $\overline{\operatorname{Ran} A}$. Luego $SS^*S(y + z) = Sy = S(y + z)$ si $y \in \overline{\operatorname{Ran} A}$, $z \in \ker A$; esto muestra que $SS^*S = S$.

Sea $R \in \mathcal{L}(H)$ un operador con $RR^*R = R$, $\ker R = \ker T$ y $T = RA$. Entonces $(R^*R)^2 = R^*R$, así que R^*R es un proyector ortogonal; como $\ker(R^*R) = \ker R = \ker T = \ker A$, su imagen es $(\ker A)^\perp = \overline{\operatorname{Ran} A}$. Entonces $1 - R^*R$ es el proyector ortogonal con imagen $\ker A$. Si $z \in \ker A$, entonces $Rz = R(1 - R^*R)z = 0$; y si $Ax \in \operatorname{Ran} A$, entonces $R(Ax) = Tx = S(Ax)$; luego R y S coinciden sobre los dos subespacios complementarios $\overline{\operatorname{Ran} A}$ y $\ker A$, así que $R = S$.

Como S^*S es el proyector ortogonal con imagen $\overline{\operatorname{Ran} A}$, es evidente que $(S^*S)Ax = Ax$ para todo $x \in H$. Luego $S^*T = S^*SA = A$. Además, se obtiene $T^*S = AS^*S = A$.

Por consiguiente, la fórmula $T^* = (SA)^* = AS^* = S^*(SAS^*)$ muestra que la descomposición polar de T^* está dada por la isometría parcial S^* y el operador positivo SAS^*, cuyo cuadrado es $SAS^*SAS^* = SA^2S^* = (SA)(SA)^* = TT^*$. De hecho, las igualdades $S^*(SAS^*x) = AS^*x = T^*x$ y $\ker(SAS^*) = \ker T^*$ muestran que $\ker S^* = \ker T^*$.

Nótese que si T es *normal*, entonces $SAS^* = \sqrt{TT^*} = \sqrt{T^*T} = A$, así que la descomposición polar de T^* es $T^* = S^*A = S^*|T|$. Nótese que en caso de normalidad, también vale $SA = SAS^*S = AS$, es decir, $S|T| = |T|S$. □

4.3 Operadores compactos

El espectro de un operador incluye todos sus autovalores, pero en general el espectro es más que la totalidad de los autovalores. Por ejemplo, el operador $Q \in \mathcal{L}(L^2[0,1])$ definido por $Qf(t) := tf(t)$ no posee autovalor alguno, aunque $\operatorname{sp}(Q) = [0,1]$. Sin embargo, hay una clase muy importante de operadores (no invertibles) cuyos espectros, aparte del valor excepcional $\lambda = 0$, se componen de autovalores solamente; estos son los *operadores compactos*.

Definición 4.42. Sean E y F dos espacios de Banach. Una aplicación lineal $S\colon E \to F$ es un **operador compacto** si todo conjunto acotado $A \subset E$ tiene imagen $S(A)$ relativamente compacta[8] en F. Si $B := \{\, x \in E : \|x\| \leq 1 \,\}$ es la bola unitaria cerrada, S es un operador compacto si y sólo si $\overline{S(B)}$ es una parte compacta de F. Si $C := \sup\{\, \|y\| : y \in S(B) \,\}$, entonces $\|Sx\| \leq C$ para $\|x\| \leq 1$, así que S es continuo con $\|S\| \leq C$.

Obsérvese que $S \in \mathcal{L}(E,F)$ es compacto si y sólo si toda sucesión acotada (x_n) en E posee una subsucesión $(y_k) = (x_{n_k})$ tal que la sucesión (Sy_k) converge en F.

La totalidad de operadores compactos de E en F se denota por $\mathcal{K}(E,F)$; en el caso $E = F$, se escribe $\mathcal{K}(E) \equiv \mathcal{K}(E,E)$.

En el espacio de Banach $F = C(K)$ con K compacto, el *teorema de Ascoli y Arzelà* dice que una familia $\mathcal{F} \subset C(K)$ es relativamente compacta en $C(K)$ si y sólo si:[9]

(a) $\mathcal{F}$ es **uniformemente acotada**: hay $M > 0$ tal que $\|f\|_\infty \leq M$ para todo $f \in \mathcal{F}$;

(b) $\mathcal{F}$ es **equicontinua**: si $\varepsilon > 0$, cada $x \in K$ tiene un vecindario V tal que $y \in V$ implica $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ para todo $f \in \mathcal{F}$.

[8] Una parte $X \subset F$ es **relativamente compacta** si su clausura $\overline{X}$ es compacta.

[9] Para una demostración del teorema de Ascoli y Arzelà, véase, por ejemplo, el apartado II.7.4 del libro [8] de Kolmogorov y Fomin.

Ejemplo 4.43. Si $k\colon [a,b]\times[a,b]\to\mathbb{C}$ es una función continua de dos variables, se puede definir un **operador integral** $K\in\mathcal{L}(C[a,b])$ por

$$Kf(s) := \int_a^b k(s,t)\,f(t)\,dt, \tag{4.9}$$

Es fácil verificar que

$$|Kf(s_1)-Kf(s_2)| \le (b-a)\|f\|_\infty \sup_{a\le t\le b} |k(s_1,t)-k(s_2,t)|. \tag{4.10}$$

La función Kf es continua porque k es uniformemente continua. Si B es la bola unitaria cerrada de $C[a,b]$, la relación (4.10) implica que $K(B)$ es equicontinua. Además,

$$|Kf(s)| \le \int_a^b |k(s,t)\,f(t)|\,dt \le (b-a)\|k\|_\infty\|f\|_\infty,$$

de donde $\sup_{f\in B}\|Kf\|_\infty \le (b-a)\|k\|_\infty$, así que $K(B)$ es uniformemente acotada. Por el teorema de Ascoli y Arzelà, $K(B)$ es relativamente compacto; luego, $K\in\mathcal{K}(C[a,b])$. ◊

Ejemplo 4.44. Si E y F son espacios normados, un operador $S\in\mathcal{L}(E,F)$ es un **operador de rango finito** si $S(E)$ es un subespacio finitodimensional de F. En este caso, $\overline{S(B)}$ es una parte acotada y cerrada de $S(E)$; del teorema de Heine y Borel se concluye que S es un operador compacto. ◊

Definición 4.45. Si H es un espacio de Hilbert, $x,y\in H$, la aplicación lineal $z\mapsto\langle y\mid z\rangle\,x$ es un operador de rango uno. Denótese este operador por $|x\rangle\langle y|$. Un argumento sencillo de álgebra lineal muestra que cualquier operador $S\in\mathcal{L}(H)$ de rango finito es de la forma $S=\sum_{k=1}^n |x_k\rangle\langle y_k|$, donde $\{x_1,\dots,x_n\}$ es una base lineal de $S(H)$.

Ejemplo 4.46. Es importante señalar que el operador identidad $1\in\mathcal{L}(E)$ *no es compacto* si E es un espacio de Banach infinitodimensional; por cuanto la bola unitaria cerrada no es compacta en E, por el Corolario 2.28. ◊

Lema 4.47. *Si E, F son espacios de Banach, entonces $\mathcal{K}(E,F)$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{L}(E,F)$.*

Demostración. Es obvio que $\mathcal{K}(E,F)$ es un subespacio de $\mathcal{L}(E,F)$. Si (S_n) es una sucesión de operadores compactos en $\mathcal{K}(E,F)$, y si $S\in\mathcal{L}(E,F)$ satisface $\|S_n-S\|\to 0$, hay que comprobar que S también es compacto.

Sea $B := \{x \in E : \|x\| \le 1\}$. Si $\varepsilon > 0$, elíjase $m \in \mathbb{N}$ con $\|S_m - S\| < \varepsilon/3$. Ahora $S_m(B)$ es **totalmente acotado** (o *precompacto*) en F: hay un juego finito de puntos $x_1, \dots, x_n \in B$ con $\min_k \|S_m(x) - S_m(x_k)\| < \varepsilon/3$ para todo $x \in B$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\min_k \|S(x) - S(x_k)\| \\ &\le \|S(x) - S_m(x)\| + \min_k \|S_m(x) - S_m(x_k)\| + \max_k \|S_m(x_k) - S(x_k)\| \\ &< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon.\end{aligned}$$

Se concluye que $S(B)$ es totalmente acotado en F y por ende es relativamente compacto.[10] Se concluye que $S \in \mathcal{K}(E, F)$. □

Lema 4.48. *Si $S \in \mathcal{K}(E, F)$, entonces $S^\top \in \mathcal{K}(F^*, E^*)$.*

Demostración. Sean B y B' las bolas unitarias cerradas en E y F^* respectivamente. Sea (w_n) una sucesión en B'. Si $S \in \mathcal{K}(E, F)$, las evaluaciones $f_n : y \mapsto \langle w_n, y\rangle$ forman una sucesión de funciones continuas sobre el compacto $\overline{S(B)}$.

La desigualdad $|\langle w_n, y_1\rangle - \langle w_n, y_2\rangle| \le \|y_1 - y_2\|$ muestra que esta sucesión es equicontinua. También es uniformemente acotada, porque $|\langle w_n, y\rangle| \le \|y\|$ para cada $y \in F$. El teorema de Ascoli y Arzelà ahora dice que la sucesión (f_n) es relativamente compacta, y por ende posee una subsucesión convergente $(g_k) = (f_{n_k})$ en $C(\overline{S(B)})$. Fíjese que $g_k(y) = \langle v_k, y\rangle$ donde $v_k := w_{n_k}$. Las igualdades

$$\|S^\top v_k - S^\top v_l\| = \sup_{x \in B} |\langle S^\top v_k - S^\top v_l, x\rangle| = \sup_{x \in B} |\langle v_k, Sx\rangle - \langle v_l, Sx\rangle| = \|g_k - g_l\|_\infty$$

y la completitud de E^* garantizan que la sucesión $(S^\top v_k)$ converge en E^*. En resumen: cada sucesión en $S^\top(B')$ posee una subsucesión convergente; así que $S^\top$ es un operador compacto. □

Notación. En un espacio de Hilbert H, una sucesión (x_n) **converge débilmente** a $x \in H$ si $\langle y \mid x_n\rangle \to \langle y \mid x\rangle$ para todo $y \in H$. (Esta es una consecuencia del Teorema 2.31 de Riesz.) Esta convergencia emplea la notación $x_n \rightharpoonup x$, en contraste con la frase "$x_n \to x$" que significa convergencia en la norma, es decir, $\|x_n - x\| \to 0$. Es evidente que $x_n \to x$ implica $x_n \rightharpoonup x$, pero no al contrario.

Proposición 4.49 (Hilbert)**.** *Sean H y K dos espacios de Hilbert y sea $S \in \mathcal{L}(H, K)$. Entonces S es un operador compacto si y sólo si $x_n \rightharpoonup x$ en H implica $Sx_n \to Sx$ en K.*

[10] En un espacio métrico, un conjunto es compacto si y sólo si es totalmente acotado y completo. Como la *clausura* de una parte de un espacio métrico completo coincide con su *compleción*, una parte de un espacio de Banach es relativamente compacta si y sólo es totalmente acotada.

Demostración. Sea $S \in \mathcal{L}(H, K)$ un operador tal que $x_n \rightharpoonup x$ en H implica $Sx_n \to Sx$ en K. La bola unitaria cerrada $B := \{ x \in H : \|x\| \leq 1 \}$ es compacta en la topología débil estelar $\sigma(H^*, H)$, que coincide con la topología débil $\sigma(H, H^*)$ al identificar H con H^*. Cada sucesión en $S(B)$ es de la forma (Sx_n) donde cada $x_n \in B$; por la compacidad débil de B, hay una subsucesión $(z_k) = (x_{n_k})$ tal que $z_k \rightharpoonup z \in H$; luego $Sz_k \to Sz$. Por lo tanto, cada sucesión en $S(B)$ posee una subsucesión convergente (en norma), así que S es un operador compacto.

Inversamente, supóngase que $S \in \mathcal{K}(H, K)$ y que $x_n \rightharpoonup x$ en H. La sucesión (x_n) es acotada: en efecto, para cada $y \in H$, $\langle y \mid x_n \rangle \to \langle y \mid x \rangle$ en $\mathbb{C}$, así que $|\langle y \mid x_n \rangle| \leq M_y$ para algún $M_y > 0$. Luego, por el principio de acotación uniforme, hay una constante $M > 0$ tal que $\|x_n\| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Además,

$$\langle y \mid Sx_n \rangle = \langle S^* y \mid x_n \rangle \to \langle S^* y \mid x \rangle = \langle y \mid Sx \rangle \quad \text{para todo} \quad y \in H,$$

así que $Sx_n \rightharpoonup Sx$.

Si Sx_n no fuera convergente a Sx en la norma de K, habría $\varepsilon > 0$ y una subsucesión (Sz_k), con $z_k = x_{n_k}$, tal que $\|Sz_k - Sx\| \geq \varepsilon$ para todo k. A su vez, (Sz_k) tendría una subsucesión (Sy_r), con $y_r = z_{k_r}$, convergente en K, ya que cada $\|y_r\| \leq M$ y S es un operador compacto. Si $w := \lim_{r\to\infty} Sy_r$, sería $\|w - Sx\| \geq \varepsilon$ y por ende habría algún $v \in K$ con $\|v\| = 1$ tal que $|\langle v \mid w - Sx \rangle| \geq \varepsilon$; pero esta negaría la convergencia débil $Sy_r \rightharpoonup Sx$. Se concluye que $Sx_n \to Sx$. $\square$

Proposición 4.50. *Si H es un espacio de Hilbert, $\mathcal{K}(H)$ es un $*$-ideal cerrado en $\mathcal{L}(H)$.*

Demostración. Por el Lema 4.47, $\mathcal{K}(H)$ es un *subespacio cerrado* de $\mathcal{L}(H)$.

Cualquier operador $T \in \mathcal{L}(H)$ preserva la convergencia débil de sucesiones; es decir, $x_n \rightharpoonup x \implies Tx_n \rightharpoonup Tx$. En efecto,

$$\langle y \mid Tx_n \rangle = \langle T^* y \mid x_n \rangle \to \langle T^* y \mid x \rangle = \langle y \mid Tx \rangle \quad \text{para todo} \quad y \in H.$$

Si $S \in \mathcal{K}(H)$, $T \in \mathcal{L}(H)$, entonces

$$\begin{aligned} x_n \rightharpoonup x &\implies Tx_n \rightharpoonup Tx \implies STx_n \to STx, \\ x_n \rightharpoonup x &\implies Sx_n \to Sx \implies TSx_n \to TSx, \end{aligned}$$

así que ST y TS están en $\mathcal{K}(H)$. Luego, $\mathcal{K}(H)$ es un *ideal* en $\mathcal{L}(H)$.

Sea $V : H \to H^*$ la isometría biyectiva dado por el Teorema 2.31; si $S \in \mathcal{K}(H)$, entonces $S^* = V^{-1} S^\top V$ es compacto, ya que $S^\top \in \mathcal{K}(H^*)$ por el Lema 4.48. Por tanto, $S \in \mathcal{K}(H) \implies S^* \in \mathcal{K}(H)$: luego el ideal $\mathcal{K}(H)$ es *un ideal involutivo* en $\mathcal{L}(H)$. $\square$

El argumento de la demostración anterior también establece que la compacidad de la composición de un operador compacto y un operador acotado entre espacios de Hilbert distintos.

Proposición 4.51. *Si H es un espacio de Hilbert separable, cada $S \in \mathcal{K}(H)$ es un límite, en la norma de $\mathcal{L}(H)$, de operadores de rango finito.*

Demostración. Denótese por $\mathcal{F}(H) := \{ T \in \mathcal{L}(H) : \dim T(H) < \infty \}$ el espacio vectorial de los operadores de rango finito. Como $\mathcal{F}(H) \subseteq \mathcal{K}(H)$ —véase le Ejemplo 4.44— y $\mathcal{K}(H)$ es cerrado en $\mathcal{L}(H)$, un límite de operadores de rango finito es también compacto.

Sea $\{ u_m : m \in \mathbb{N} \}$ una base ortonormal de H y sea $M_n := \operatorname{lin}\langle u_0, u_1, \dots, u_n \rangle$ para $n \in \mathbb{N}$. Sea B la bola unitaria cerrada de H. Dado $S \in \mathcal{K}(H)$, colóquese

$$r_n := \sup\{ \|Sx\| : x \in B \cap M_n^\perp \} \quad \text{para} \quad n \in \mathbb{N}.$$

La sucesión (r_n) es decreciente; escríbase $r := \inf_n r_n$, de modo que $r_n \downarrow r \geq 0$. Elíjase una sucesión (x_n) en $B \cap M_n^\perp$ tal que $\|Sx_n\| \geq r/2$ para todo n.

Nótese que la condición $x_n \in M_n^\perp$ implica que $x_n \rightharpoonup 0$.

Hay una subsucesión $(z_k) = (x_{n_k})$ de (x_n) tal que $Sz_k \to y \in H$; fíjese que $\|y\| \geq r/2$ y que $z_k \rightharpoonup 0$. Luego

$$\langle w \mid y \rangle = \lim_{k\to\infty} \langle w \mid Sz_k \rangle = \lim_{k\to\infty} \langle S^* w \mid z_k \rangle = 0 \quad \text{para todo} \quad w \in H.$$

Esto muestra que $y = 0$, por ende $r = 0$. La conclusión de este argumento es que $r_n \downarrow 0$.

Defínase ahora una sucesión de operadores de rango finito por

$$S_n := \sum_{m=0}^{n} |Su_m\rangle\langle u_m|, \quad \text{es decir,} \quad S_n x := \sum_{m=0}^{n} \langle u_m \mid x \rangle \, Su_m.$$

Nótese que $\operatorname{Ran}(S_n) = S(M_n)$. Como $Sx = \sum_{m=0}^{\infty} |\langle u_m \mid x \rangle| \, Su_m$ por la continuidad de S y el desarrollo de Fourier (1.24), se obtiene

$$\|S - S_n\| \leq \sup_{\|x\|\leq 1} \sum_{m>n} |\langle u_m \mid x \rangle| \, \|Su_m\| = \sup\{ \|Sx\| : x \in B \cap M_n^\perp \} = r_n \to 0,$$

es decir, $S_n \to S$ en la norma de $\mathcal{L}(H)$. □

► Las últimas tres proposiciones ponen en evidencia la estructura más fina que poseen los operadores compactos sobre los espacios de Hilbert, en contraste con el caso general sobre espacios de Banach. Para los operadores integrales, tales como (4.9), es también ventajoso reemplazar el espacio de Banach $C[a,b]$ por el espacio de Hilbert $L^2[a,b]$: si el núcleo integral $k(s,t)$ es una función de cuadrado integrable, el operador K sobre $L^2[a,b]$ es compacto.

El estudio de tales operadores integrales en términos de bases ortonormales fue emprendido por Schmidt.[11]

Definición 4.52. Sean H y K dos espacios de Hilbert separables. Dícese que $S \in \mathcal{L}(H, K)$ es un **operador de Hilbert y Schmidt** si hay una base ortonormal $\{u_k\}$ de H tal que

$$\|S\|_2 := \biggl(\sum_{k=0}^{\infty} \|Su_k\|^2\biggr)^{1/2} < \infty.$$

Si $\{v_r\}$ es una base ortonormal de K, la igualdad de Parseval muestra que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|Su_k\|^2 = \sum_{k,r=0}^{\infty} \bigl|\langle v_r \mid Su_k\rangle\bigr|^2 = \sum_{k,r=0}^{\infty} \bigl|\langle S^* v_r \mid u_k\rangle\bigr|^2 = \sum_{r=0}^{\infty} \|S^* v_r\|^2. \tag{4.11}$$

En esta ecuación, la última sumatoria no depende de $\{u_k\}$, ni la primera sumatoria de $\{v_r\}$. Por lo tanto, la cantidad $\|S\|_2$ es *independiente de la base ortonormal* de H elegida. Además, la ecuación (4.11) también muestra que $S^* \in \mathcal{L}(K, H)$ es otro operador de Hilbert y Schmidt, con $\|S^*\|_2 = \|S\|_2$. Denótese la totalidad de operadores de Hilbert y Schmidt entre H y K por $\mathcal{L}^2(H, K)$.

Si $R, S \in \mathcal{L}(H, K)$, escríbase

$$\langle R \mid S\rangle_2 := \sum_{k=0}^{\infty} \langle Ru_k \mid Su_k\rangle.$$

Esta serie converge, por la desigualdad de Schwarz. Es fácil ver que $\langle\cdot \mid \cdot\rangle_2$ es una forma sesquilineal sobre $\mathcal{L}^2(H, K)$, que es definida positiva: $\langle S \mid S\rangle_2 = 0$ si y sólo si $S = 0$. Como $\langle S \mid S\rangle_2 = \|S\|_2^2$, el espacio $\mathcal{L}^2(H, K)$ es *prehilbertiano* y es un espacio normado con la norma $\|\cdot\|_2$. Además, si $x = \sum_{k=0}^{\infty} \langle u_k \mid x\rangle\, u_k \in H$, la desigualdad de Schwarz y la igualdad de Parseval muestran que

$$\|Sx\|^2 \le \biggl(\sum_{k=0}^{\infty} |\langle u_k \mid x\rangle|\, \|Su_k\|\biggr)^2 \le \sum_{k=0}^{\infty} |\langle u_k \mid x\rangle|^2 \sum_{k=0}^{\infty} \|Su_k\|^2 = \|x\|^2 \|S\|_2^2,$$

así que $\|S\| \le \|S\|_2$. En consecuencia, si (S_n) es una sucesión de Cauchy para la norma $\|\cdot\|_2$, también es una sucesión de Cauchy para la norma $\|\cdot\|$. Luego hay un operador acotado $S \in \mathcal{L}(H, K)$ tal que $\|S_n - S\| \to 0$. Hay un número $M > 0$ tal que $\|S_n\|_2 \le M$ para

[11] Erhard Schmidt fue un estudiante de David Hilbert e hizo varias contribuciones a la teoría de operadores integrales después de 1905. Los desarrollos en bases ortonormales fueron la clave de su obra: Erhard Schmidt, *Zur theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen*, Mathematische Annalen **43** (1907), 433–476.

cada n; si $m \in \mathbb{N}$, entonces $\sum_{k=0}^{m} \|S_n u_k\|^2 \leq M$ para cada $m, n \in \mathbb{N}$. Al dejar $n \to \infty$ se obtiene $\sum_{k=0}^{m} \|S u_k\|^2 \leq M$ para cada m; luego S también es de Hilbert y Schmidt. No es difícil comprobar que $\|S_n - S\|_2 \to 0$ también. En resumen: el espacio normado $\mathcal{L}^2(H, K)$ es *completo* en la norma $\|\cdot\|_2$, así que es un *espacio de Hilbert*.

En el caso $H = K$, $\mathcal{L}^2(H) \equiv \mathcal{L}^2(H, H)$ es un *álgebra de Banach involutiva*. Sin embargo, no es una C^*-álgebra si $\dim H = \infty$.

Lema 4.53. *Un operador de Hilbert y Schmidt es compacto.*

Demostración. Si $S \in \mathcal{L}^2(H, K)$ y si $n \in \mathbb{N}$, el operador $S_n := \sum_{k=0}^{n} |S u_k\rangle\langle u_k|$ tiene rango finito. Si $x \in H$, entonces

$$\begin{aligned} \|(S - S_n)x\|^2 &\leq \Bigl(\sum_{k>n} |\langle u_k \mid x\rangle| \, \|S u_k\|\Bigr)^2 \\ &\leq \sum_{k>n} |\langle u_k \mid x\rangle|^2 \sum_{k>n} \|S u_k\|^2 \leq \|x\|^2 \sum_{k>n} \|S u_k\|^2, \end{aligned}$$

así que $\|S - S_n\|^2 \leq \sum_{k>n} \|S u_k\|^2$. Luego, $\|S - S_n\| \to 0$ cuando $n \to \infty$. El Lema 4.47 ahora muestra que $S \in \mathcal{K}(H, K)$. $\square$

Proposición 4.54. *Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida σ-finita, y sea $k \in L^2(X \times X, \mu \times \mu)$. El operador $K \in \mathcal{L}(L^2(X, \mu))$ definido por*

$$Kf(x) := \int_X k(x, y) f(y) \, d\mu(y) \tag{4.12}$$

es un operador de Hilbert y Schmidt, con $\|K\|_2 = \|k\|_2$.

Demostración. Escríbase $k_x(y) \equiv k(x, y)$. La hipótesis $k \in L^2(X \times X, \mu \times \mu)$ y el teorema de Fubini muestran que $k_x \in L^2(X, \mu)$ para casi todo $x \in X$. Entonces la integral $Kf(x) = \int_X k_x(y) f(y) \, d\mu(y)$ converge para casi todo x y defina una función μ-medible Kf casi por doquier. Si $h \in L^2(X, \mu)$, entonces

$$\begin{aligned} &\Bigl(\iint_{X\times X} |\overline{h(x)} \, k(x, y) f(y)| \, d\mu(y) \, d\mu(x)\Bigr)^2 \\ &\qquad \leq \iint_{X\times X} |\overline{h(x)} f(y)|^2 \, d\mu(y) \, d\mu(x) \iint_{X\times X} |k(x, y)|^2 \, d\mu(y) \, d\mu(x) \\ &\qquad = \|h\|_2^2 \, \|f\|_2^2 \, \|k\|_2^2, \end{aligned} \tag{4.13}$$

por la desigualdad de Schwarz en $L^2(X \times X, \mu \times \mu)$. Luego hay un funcional semilineal continuo sobre $L^2(X, \mu)$ definido por $h \mapsto \int_X \overline{h(x)} \, Kf(x) \, d\mu(x)$. Por el Teorema 2.31, *mutatis mutandis*, este funcional está dado por $h \mapsto \langle h|g \rangle$ donde $g \in L^2(X,\mu)$. Obviamente, $g = Kf$ casi por doquier: se concluye que $Kf \in L^2(X,\mu)$.

Las igualdades

$$Kf(x) = \int_X k_x(y) f(y) \, d\mu(y) = \langle \bar{k}_x \mid f \rangle = \langle \bar{f} \mid k_x \rangle, \quad \text{para casi todo} \quad x \in X,$$

muestran que $\|Kf\|^2 = \int_X |\langle \bar{f} \mid k_x \rangle|^2 \, d\mu(x)$.

El cálculo (4.13) ahora dice que $|\langle h \mid Kf \rangle| \leq \|h\|_2 \, \|f\|_2 \, \|k\|_2$ para $h \in L^2(X,\mu)$. El Corolario 2.12 entonces muestra que $\|Kf\|_2 \leq \|f\|_2 \, \|k\|_2$, y por ende $\|K\| \leq \|k\|_2$. De ahí se ve que $K \in \mathcal{L}(L^2(X,\mu))$.

Si $\{u_n\}$ es una base ortonormal de $L^2(X,\mu)$, el teorema de convergencia monotónica y la igualdad de Parseval muestran que

$$\begin{aligned}\sum_n \|Ku_n\|^2 &= \sum_n \int_X |\langle \bar{u}_n \mid k_x \rangle|^2 \, d\mu(x) = \int_X \sum_n |\langle \bar{u}_n \mid k_x \rangle|^2 \, d\mu(x) \\ &= \int_X \|k_x\|^2 \, d\mu(x) = \int_X \int_X |k(x,y)|^2 \, d\mu(y) \, d\mu(x) =: \|k\|_2^2 .\end{aligned}$$

Se concluye que K es un operador de Hilbert y Schmidt, con $\|K\|_2 = \|k\|_2$. □

► Es hora de estudiar en detalle los espectros de operadores compactos. Si $T \in \mathcal{K}(H)$ es un operador compacto sobre un espacio de Hilbert separable, se verá que $\operatorname{sp}(T) \setminus \{0\}$ es una colección de autovalores de T, todos con multiplicidad finita. Al ordenar los autovalores tal que $|\lambda_k| \geq |\lambda_{k+1}|$ para $k \in \mathbb{N}$, se obtiene una sucesión en $\underline{c}_0$.

Conviene empezar con operadores compactos autoadjuntos.[12]

Lema 4.55. *Un operador compacto autoadjunto $T = T^* \in \mathcal{K}(H)$ posee un autovalor λ tal que $|\lambda| = \|T\|$.*

Demostración. Sea (x_n) una sucesión en $B = \{ x \in H : \|x\| \leq 1 \}$ que converge débilmente: $x_n \rightharpoonup x \in B$. Entonces $Tx_n \to Tx$ por la Proposición 4.49. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\big|\langle x_k \mid Tx_k \rangle - \langle x \mid Tx \rangle\big| &= \big|\langle x_k \mid Tx_k - Tx \rangle + \langle x_k - x \mid Tx \rangle\big| \\ &\leq \|Tx_k - Tx\| + |\langle x_k - x \mid Tx \rangle| \to 0.\end{aligned}$$

[12]El espectro de un operador compacto en $\mathcal{K}(E)$, donde E es un espacio de Banach pero no necesariamente de Hilbert, comparte estas propiedades: aparte de $0 \in \operatorname{sp}(T)$, es un juego de autovalores de multiplicidad finita. Sin embargo, al no disponer del concepto de operador autoadjunto, la demostración es distinta: requiere la llamada *teoría de Riesz y Schauder* para elucidar la forma del espectro. Para esa teoría más general, véase, por ejemplo, los libros de Dieudonné [1, cap. XI], Rudin [13, cap. 4] o Yosida [16, cap. X].

Luego, la función $x \mapsto |\langle x \mid Tx\rangle|$ es continua sobre B_σ, la bola cerrada B con la topología débil $\sigma(H, H^*)$. Por la identificación $H^* \simeq H$ y el Teorema 2.30 de Banach y Alaoglu, el espacio topológico B_σ es compacto: en consecuencia, esta función continua alcanza su máximo, el cual, por la Proposición 4.25, es igual a $\|T\|$. En otras palabras, hay un vector $z \in B$ tal que $|\langle z \mid Tz\rangle| = \|T\|$.

Por otro lado, la desigualdad de Schwarz implica que

$$\|T\| = |\langle z \mid Tz\rangle| \leq \|z\| \, \|Tz\| \leq \|T\|,$$

así que $|\langle z \mid Tz\rangle| = \|z\| \, \|Tz\|$ en este caso. La Proposición 1.26 entonces dice que $Tz = \lambda z$ para algún $\lambda \in \mathbb{C}$; y además, $|\lambda| \, \|z\|^2 = \|T\|$. Si $T = 0$, la conclusión del Lema es trivial; si $T \neq 0$, entonces z es un *autovector* para T con $\|z\| = 1$ y $|\lambda| = \|T\|$. El autovalor λ queda en $\operatorname{sp}(T)$ porque $z \in \ker(\lambda 1 - T)$, por lo cual $\lambda 1 - T$ no es invertible. □

Lema 4.56. *Si* $T = T^* \in \mathcal{K}(H)$ *y si* $\lambda \neq 0$ *es un autovalor de* T*, entonces* $\ker(\lambda 1 - T)$ *es finitodimensional.*

Si μ *es otro autovalor,* $\mu \neq \lambda$*, entonces* $\ker(\lambda 1 - T)$ *y* $\ker(\mu 1 - T)$ *son subespacios ortogonales de* H*.*

Demostración. Escríbase $F_\lambda := \ker(\lambda 1 - T)$. La hipótesis de que λ sea un autovalor implica que $F_\lambda \neq \{0\}$. Es evidente que $T(F_\lambda) = F_\lambda$ y que la restricción $T|_{F_\lambda}$ es un operador compacto sobre F_λ. Pero $\lambda^{-1} T|_{F_\lambda} = 1$, así que el operador $1 \in \mathcal{L}(F_\lambda)$ es compacto. A la luz del Ejemplo 4.46, esto muestra que $\dim F_\lambda$ es finita.

Si $x \in F_\lambda$ y $y \in F_\mu$, entonces

$$\langle y \mid x\rangle = \frac{1}{\lambda}\langle y \mid Tx\rangle = \frac{1}{\lambda}\langle Ty \mid x\rangle = \frac{1}{\lambda}\langle \mu y \mid x\rangle = \frac{\mu}{\lambda}\langle y \mid x\rangle,$$

porque $T^* = T$ y por ende $\bar{\mu} = \mu$. Luego $\langle y \mid x\rangle = 0$. Se concluye que $F_\lambda \perp F_\mu$. □

Teorema 4.57. *Si* $T = T^* \in \mathcal{K}(H)$ *es un operador compacto autoadjunto,* $\operatorname{sp}(T) \setminus \{0\}$ *coincide con la colección de autovalores no nulos de* T*, todos de multiplicidad finita.*[13]

Demostración. Si $\lambda \neq 0$ es un autovalor de T, entonces $\lambda \in \operatorname{sp}(T)$ y su multiplicidad $m_\lambda := \dim F_\lambda$ es finita, por el Lema 4.56.

Considérese la colección $\mathcal{U}$ de familias ortonormales en H cuyos elementos son autovectores de T. Esta colección no es vacía por el Lema 4.55, está parcialmente ordenada por inclusión, y la unión de cualquier cadena en $\mathcal{U}$ es otro elemento de $\mathcal{U}$. Por el Lema de Zorn,

[13]La **multiplicidad** de un autovalor λ es el número máximo de autovectores linealmente independientes para λ, el cual es $m_\lambda := \dim\ker(\lambda 1 - T)$.

$\mathcal{U}$ posee un elemento maximal $\{u_k\}$, es decir, una familia ortonormal maximal de autovectores de T. Sea M el subespacio cerrado de H generado por esta familia; esto es la totalidad de desarrollos de Fourier convergentes $\sum_k \alpha_k u_k$ con $\alpha \in \underline{\ell}^2$.

Está claro que $T(M) \subseteq M$, con $T\bigl(\sum_k \alpha_k u_k\bigr) = \sum_k \lambda_k \alpha_k u_k$. Si $x \in M$, $y \in M^\perp$, entonces $\langle Ty \mid x\rangle = \langle y \mid Tx\rangle = 0$ porque $T = T^*$ y $Tx \in M$. Por lo tanto, $T(M^\perp) \subseteq M^\perp$ también.

La restricción de T al subespacio $M^\perp$ es compacto (tanto por la Definición 4.42 como por la Proposición 4.49) y también autoadjunto. Si fuera $M^\perp \neq 0$, habría un autovector $z_0 \in M^\perp$ para T, lo cual contradiría la maximalidad de $\{u_k\}$. Luego $M^\perp = \{0\}$ y $M = H$; es decir, $\{u_k\}$ es una *base ortonormal* de H compuesto de autovectores para T.

Dado $\varepsilon > 0$, sea $C(\varepsilon) := \{\, k \in \mathbb{N} : |\lambda_k| > \varepsilon \,\}$.[14] Si $C(\varepsilon)$ fuera infinito, la sucesión $(u_k)_{k\in C(\varepsilon)}$ satisfaría $u_k \rightharpoonup 0$, porque $\langle x \mid u_k\rangle \to 0$ para cada $x \in H$ por la igualdad de Parseval, así que $Tu_k \to 0$ en H. Pero esto es imposible porque $\|Tu_k\| = \|\lambda_k u_k\| = |\lambda_k| > \varepsilon$ para $k \in C(\varepsilon)$.

En consecuencia, $C(\varepsilon)$ es *finito* para cada $\varepsilon > 0$. Sea $N(\varepsilon)$ el subespacio cerrado generado por los u_k con $k \notin C(\varepsilon)$. El operador compacto $T|_{N(\varepsilon)}$ cumple

$$\bigl\|T|_{N(\varepsilon)}x\bigr\|^2 = \Bigl\|\sum_{r\notin C(\varepsilon)} \lambda_k \langle u_k \mid x\rangle\Bigr\|^2 = \sum_{r\notin C(\varepsilon)} |\lambda_k|^2\, |\langle u_k \mid x\rangle|^2 \leq \varepsilon^2\, \|x\|^2,$$

así que $\bigl\|T|_{N(\varepsilon)}\bigr\| \leq \varepsilon$, a la vez que $T - T|_{N(\varepsilon)}$ tiene rango finito.

Si $\mu \in \mathrm{sp}(T)$ y si $0 < \varepsilon < |\mu|$, la restricción de $\mu 1 - T$ al subespacio invariante $N(\varepsilon)$ es invertible, así que $\mu 1 - T$ no tiene inverso en el subespacio invariante complementario $N(\varepsilon)^\perp$, que es finitodimensional. Luego μ es un autovalor de T, con $\mu = \lambda_k$ para algún $k \in C(\varepsilon)$. Se ha comprobado que $\mathrm{sp}(T) \setminus \{0\}$ consiste de autovalores únicamente. □

Si $T = T^* \in \mathcal{K}(H)$ y si H es separable, se puede ordenar los autovalores no nulos de T, contados con multiplicidad, de manera que $|\lambda_k| \geq |\lambda_{k+1}|$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Cuando $\dim H = \infty$, la desigualdad $\bigl\|T|_{N(\varepsilon)}\bigr\| \leq \varepsilon$ de la demostración anterior muestra que esta sucesión $\underline{\lambda}$ de autovalores no nulos cumple $\underline{\lambda} \in \underline{c}_0$. Como $\mathrm{sp}(T)$ es compacto, esto muestra que $0 \in \mathrm{sp}(T)$, aun cuando 0 no sea un autovalor.

Definición 4.58. Sea $T \in \mathcal{K}(H)$ un operador compacto sobre un espacio de Hilbert separable, con descomposición polar $T = S|T|$. El operador positivo $|T| = (T^*T)^{1/2}$ es compacto y autoadjunto; sus autovalores se llaman **valores singulares** del operador T. Aparte

[14] Esta parte de la demostración supone que H es separable. Sin embargo, no es difícil adaptarla, con leves cambios de notación, al caso general.

de 0, estos valores singulares μ_k son *positivos* y pueden ordenarse en forma *decreciente*: $\mu_0 \geq \mu_1 \geq \cdots \geq \mu_k \geq \cdots$, con $\mu_0 = \|T\|$ en vista del Lema 4.55 y la propiedad (4.4).

El Teorema 4.57 muestra que la sucesión $\underline{\mu} = (\mu_k)$ queda en $\underline{c}_0$. No es difícil comprobar que $T \in \mathcal{L}^2(H)$ si y sólo si $\underline{\mu} \in \underline{\ell}^2$.

Si $1 \leq p < \infty$, la **clase de Schatten** $\mathcal{L}^p(H)$ es la totalidad de operadores compactos $T \in \mathcal{K}(H)$ cuyos valores singulares forman una sucesión en $\underline{\ell}^p$. Resulta que cada $\mathcal{L}^p(H)$ es una $*$-ideal (no cerrado) de $\mathcal{L}(H)$. Fíjese que $\underline{\ell}^p \subset \underline{\ell}^r$ implica que $\mathcal{L}^p(H) \subset \mathcal{L}^r(H)$, para $1 \leq p < r < \infty$.

► Una matriz cuadrada $C \in M_n(\mathbb{C})$ es diagonalizable, por cambio de base ortonormal de $\mathbb{C}^n$, si y sólo si es normal: $C^*C = CC^*$. Para simplificar las matrices no normales, se dispone de una factorización $C = UAV$ llamada *descomposición según valores singulares*, donde U y V son matrices unitarias y A es una matriz positiva semidefinida. Esta descomposición también es válida para operadores compactos sobre un espacio de Hilbert separable infinitodimensional.

Proposición 4.59. *Sea $T \in \mathcal{K}(H)$ un operador compacto sobre un espacio de Hilbert separable H. Sea (μ_k) la sucesión de valores singulares de T, ordenadas en forma decreciente. Entonces hay dos familias ortonormales $\{u_k\}$, $\{v_k\}$ en H tales que*

$$T = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k |v_k\rangle\langle u_k|$$

con convergencia en la norma de $\mathcal{L}(H)$.

Demostración. El operador autoadjunto T^*T es compacto porque T es compacto, por la Proposición 4.50. Además, $|T| = \sqrt{T^*T}$ es compacto, como límite en norma de polinomios $p_n(T^*T)$. Los autovalores de $T^*T = |T|^2$ son los números positivos μ_k^2 (amén de 0, si $\ker T \neq 0$).

Por el Teorema 4.57, hay una base ortonormal $\{u_k\}$ de $(\ker T)^\perp$ cuyos elementos son autovectores[15] de T^*T, concretamente: $T^*Tu_k = \mu_k^2 u_k$ para cada k. Defínase también $v_k := \mu_k^{-1} T u_k$.

La familia $\{v_k\}$ es ortonormal, porque

$$\langle v_k \mid v_l \rangle = (\mu_k \mu_l)^{-1} \langle u_k \mid T^*T u_l \rangle = (\mu_l/\mu_k)\, [\![k = l]\!] = [\![k = l]\!].$$

[15]La base ortonormal de H, denominado $\{u_k\}$ en la demostración del Teorema 4.57, es la unión de esta familia ortonormal y otra base ortonormal para $\ker T$, en el caso de que $\ker T \neq \{0\}$.

Usando la desigualdad de Bessel (1.22), se obtiene

$$\begin{aligned}
\Bigl\| Tx - \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k \langle u_k \mid x\rangle v_k \Bigr\|^2 &= \Bigl\| Tx - \sum_{k=0}^{n-1} \langle u_k \mid x\rangle T u_k \Bigr\|^2 \\
&= \langle x \mid T^*Tx\rangle \\
&\qquad + \sum_{k=0}^{n-1} |\langle u_k \mid x\rangle|^2 \langle u_k \mid T^*Tu_k\rangle - \langle u_k \mid x\rangle\langle x \mid T^*Tu_k\rangle - \langle x \mid u_k\rangle\langle T^*Tu_k \mid x\rangle \\
&= \langle x \mid T^*Tx\rangle - \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k^2 |\langle u_k \mid x\rangle|^2 = \sum_{k\ge n} \mu_k^2 |\langle u_k \mid x\rangle|^2 \le \mu_n^2 \sum_{k\ge n} |\langle u_k \mid x\rangle|^2 \le \mu_n^2 \|x\|^2.
\end{aligned}$$

Luego, $\bigl\| T - \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k |v_k\rangle\langle u_k| \bigr\|^2 \le \mu_n$. Entonces la serie $\sum_{k\ge 0} \mu_k |v_k\rangle\langle u_k|$ o bien es finita o bien converge a T en norma. □

4.4 El teorema espectral

El Teorema 4.35 establece la posibilidad de definir "funciones continuas" de un operador autoadjunto sobre un espacio de Hilbert, es decir, de extender el homomorfismo algebraico $f \mapsto f(T)$ que lleva polinomios en operadores a las funciones continuas sobre $\operatorname{sp}(T)$. El Teorema 4.57 da lugar a una *versión matricial* del cálculo funcional para operadores compactos autoadjuntos, y que es posible definir $f(T)\,u_k := f(\lambda_k)\,u_k$ para cada autovector u_k correspondiente al autovalor $\lambda_k \in \operatorname{sp}(T)$. Estos dos teoremas también son válidos para operadores *normales*, aunque las demostraciones aquí dadas no extienden al caso normal.[16]

Ahora bien, el espectro de un operador compacto fuera del origen es discreto, así que para definir $f(T)$ sólo se requiere que f sea continua en 0. Esto sugiere la posibilidad de extender el cálculo funcional, para operadores autoadjuntos, a una clase de funciones mucho más amplio. En efecto, con un poco de teoría de medida, es posible definir $f(T)$ donde f es una *función boreliana* sobre el espectro de T. Si $A \subseteq \operatorname{sp}(T)$ es una parte medible del espectro, la *función indicatriz* 1_A es boreliana (pero continua sólo si A es una unión de componentes conexos del espectro) y cumple $1_A^2 = 1_A$: se trata de asociarle a la función 1_A un **proyector espectral** P_A y basar el cálculo funcional en esta familia de proyectores.

En esta sección, que forma una especie de apéndice al curso, se hará un breve bosquejo, sin demostraciones, del teorema espectral para operadores autoadjuntos acotados, con el afán de extender el cálculo funcional a funciones discontinuas pero borelianas.

[16] Para un enfoque que es directamente aplicable al caso de operadores normales, véase, por ejemplo, el libro de Pedersen [11].

Antes de abordar este teorema, hay que revisitar el teorema de representación de Riesz (la Proposición 2.42) que identifica el espacio dual de $C[a,b]$. Este teorema admite una generalización que identifica el espacio dual de $C(K)$, donde K es un compacto cualquiera (de Hausdorff, por supuesto). En vez de integrales de Stieltjes sobre $[a,b]$, los funcionales lineales sobre $C(K)$ son integrales con respecto a las *medidas borelianas regulares* sobre K.

Definición 4.60. Sea X un espacio topológico de Hausdorff, localmente compacto y separable; sea $\mathcal{B}$ la σ-álgebra generada por las *partes abiertas* de X; sus elementos son las **partes borelianas** de X. Una **medida boreliana** sobre X es una medida positiva ρ sobre $(X,\mathcal{B})$. La medida ρ es **regular** si $\rho(K) < \infty$ para cada $K \Subset X$ y si, para todo $A \in \mathcal{B}$, vale

$$\begin{aligned} \rho(A) &= \inf\{\, \rho(U) : U \subseteq X \text{ abierto},\ A \subseteq U \,\}, \\ &= \sup\{\, \rho(K) : K \subseteq X \text{ compacto},\ K \subseteq A \,\}. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Una *medida compleja* μ sobre $(X,\mathcal{B})$ tiene **variación total**

$$|\mu|(A) := \sup\biggl\{ \sum_{k=0}^{\infty} |\mu(A_k)| : A = \biguplus_{k=0}^{\infty} A_k \biggr\}.$$

Este $|\mu|$ es una medida positiva, con $\|\mu\| := |\mu|(X) < \infty$. Dícese que μ es *regular* si $|\mu|$ es regular. Las medidas complejas borelianas regulares forman un espacio de Banach $\mathcal{M}(X)$, con norma $\mu \mapsto \|\mu\|$.

Una dualidad entre $C_0(X)$ y $\mathcal{M}(X)$ está dada por la fórmula

$$\langle \mu, f \rangle := \int_X f(x)\, d\mu(x). \tag{4.15}$$

En vista de la desigualdad

$$|\langle \mu, f \rangle| \le \int_X |f(x)|\, d|\mu|(x) \le \|f\|_\infty\, |\mu|(X) = \|f\|_\infty\, \|\mu\|,$$

el funcional lineal $f \mapsto \int_X f(x)\, d\mu(x)$ es continuo, con norma no mayor que $\|\mu\|$; no es difícil comprobar que su norma es igual a $\|\mu\|$. De este modo, $\mathcal{M}(X)$ es isométricamente isomorfa a un subespacio de $C_0(X)^*$.

Para demostrar que esta copia de $\mathcal{M}(X)$ coincide con todo $C_0(X)^*$, se aprovecha la estructura de orden (parcial) en estos dos espacios de Banach. Se sabe, por la teoría de medida (la descomposición de Jordan) que una media compleja puede expresarse de manera canónica como combinación lineal de 4 medidas positivas: $\mu = \mu_1 - \mu_2 + i\mu_3 - i\mu_4$; los μ_j son regulares si y sólo si μ es regular. Por otro lado, un funcional lineal continuo $\ell \in C_0(X)^*$

puede expresarse en la forma $\ell = \ell_1 - \ell_2 + i\ell_3 - i\ell_4$, donde cada ℓ_j es un *funcional lineal positivo*, en el sentido siguiente.

Para simplificar la exposición, conviene limitarse al caso de un espacio *compacto* y separable. El caso general puede extraerse de la unitización $C_0(X)^+ \simeq C(X^+)$.

Definición 4.61. Un **funcional lineal** $\ell\colon C(K) \to \mathbb{C}$ es **positivo** si $\ell(f) \geq 0$ cuando $f \geq 0$ en $C(K)$. Si $0 \leq f \leq 1$ puntualmente en $C(K)$, entonces $0 \leq \ell(f) \leq \ell(1)$. Luego, no es difícil comprobar que $|\ell(h)| \leq \|h\|_\infty \ell(1)$ para cualquier $h \in C(K)$, así que un funcional lineal positivo ℓ es automáticamente continua, con $\|\ell\| = \ell(1)$.

Teorema 4.62 (Riesz y Markov)**.** *Sea K un espacio topológico compacto y separable. Cada funcional lineal positivo sobre $C(K)$ es de la forma $f \mapsto \int_X f\,d\rho$, para una única medida positiva boreliana regular $\rho \in \mathcal{M}(X)$.* ⊟

La teoría de la medida abarca dos enfoques alternativas. Usualmente se construye una integral a partir de una medida definida axiomáticamente sobre una σ-álgebra de conjuntos; en cambio, la llamada *integral de Daniell* define una integral como un funcional lineal positivo sobre funciones continuas y luego extrae una medida positiva regular sobre las partes de la σ-álgebra boreliana. El Teorema 4.62 establece la equivalencia de los dos enfoques.

Después de combinar las cuatro partes de un funcional lineal continuo o bien de una medida regular, con atención a los detalles de continuidad, se llega al teorema siguiente.[17]

Teorema 4.63 (Riesz y Kakutani)**.** *Sea K un espacio topológico compacto y separable; entonces el espacio dual $C(K)^*$ es isométricamente isomorfa a $\mathcal{M}(K)$.* ⊟

► Ahora se puede reconsiderar la tarea de extender el cálculo funcional continuo para un operador autoadjunto (o normal) $T \in \mathcal{L}(H)$. El Teorema 4.35 dice que $f \mapsto f(T)$ es una aplicación lineal isométrico $C(\mathrm{sp}(T)) \hookrightarrow \mathcal{L}(H)$. Para dos vectores $x, y \in H$ cualesquiera, la aplicación $f \mapsto \langle y \mid f(T)x\rangle$ es un funcional lineal continuo sobre $C(\mathrm{sp}(T))$, que cumple

$$\bigl|\langle y \mid f(T)x\rangle\bigr| \leq \|y\|\,\|f(T)\|\,\|x\|. \tag{4.16}$$

Además, como $\|f(T)\| = \|f\|_\infty$, el funcional lineal $f \mapsto \langle y \mid f(T)x\rangle$ es continuo, con norma no mayor que $\|y\|\,\|x\|$. El Teorema 4.63 ahora produce medidas complejas borelianas regulares $\mu_{x,y} \in \mathcal{M}(\mathrm{sp}(T))$ tales que

$$\langle y \mid f(T)x\rangle = \int_{\mathrm{sp}(T)} f(\lambda)\,d\mu_{x,y}(\lambda) \quad \text{para todo} \quad f \in C(\mathrm{sp}(T)). \tag{4.17}$$

[17] Para la demostración del Teorema 4.62, véase, por ejemplo, el capítulo 2 del libro: Walter Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1966. El teorema de Riesz y Kakutani es el Teorema 6.19 del mismo libro, que identifica ambos teoremas con el nombre "teorema de representación de Riesz".

Por la desigualdad (4.16), estas medidas cumplen la desigualdad $\|\mu_{x,y}\| \leq \|x\|\,\|y\|$ para todo $x, y \in H$. El paso siguiente es eliminar los vectores x, y de la ecuación (4.17), al introducir una medida generalizada sobre $\mathrm{sp}(T)$ con valores en $\mathcal{L}(H)$.

Definición 4.64. Sea K un espacio topológico compacto separable, sea $\mathcal{B}$ su σ-álgebra de partes borelianas y sea H un espacio de Hilbert. Una **medida espectral** sobre K con valores en $\mathcal{L}(H)$ es una función $E \colon \mathcal{B} \to \mathcal{L}(H)$ tal que:

(a) $E(A)^2 = E(A) = E(A)^*$ para todo $A \in \mathcal{B}$.

(b) $E(\emptyset) = 0$ y $E(X) = 1$.

(c) $E(A \cap B) = E(A)\,E(B)$ para todo $A, B \in \mathcal{B}$.

(d) Para todo $x, y \in H$, $E_{x,y} \colon A \mapsto \langle y \,|\, E(A)x \rangle$ es una medida boreliana regular compleja sobre K.

La condición (a) de esta definición dice que cada $E(A)$ es un proyector en $\mathcal{L}(H)$; su imagen $\mathrm{Ran}\, E(A)$ es un subespacio cerrado de H. Si $A \cap B = \emptyset$ en $\mathcal{B}$, entonces $E(A \uplus B) = E(A) + E(B)$, porque

$$(E(A) + E(B))^2 = E(A)^2 + E(B)^2 = E(A) + E(B) = (E(A) + E(B))^*,$$

así que $E(A) + E(B)$ es un proyector; además, para $x, y \in H$,

$$\langle y \mid E(A \uplus B)x \rangle = E_{x,y}(A \uplus B) = E_{x,y}(A) + E_{x,y}(B) = \langle y \mid (E(A) + E(B))x \rangle.$$

En particular, $E(K \setminus A) = 1 - E(A)$ es el proyector cuya imagen es $(\mathrm{Ran}\, E(A))^\perp$.

Si $\mathcal{P}(H) := \{\, P \in \mathcal{L}(H) : P^2 = P = P^* \,\}$, entonces $E \colon \mathcal{B} \to \mathcal{P}(H)$ es una función finitamente aditiva. La condición (d) dice que E es *numerablemente aditiva*: en efecto, si $\{A_k\} \subset \mathcal{B}$ es una familia numerable de borelianos disjuntos, los subespacios $\mathrm{Ran}\, E(A_k)$ son mutuamente ortogonales; si $\bigvee_k \mathrm{Ran}\, E(A_k))$ denota el subespacio cerrado generado por ellos, entonces $\mathrm{Ran}\, E\bigl(\biguplus_k A_k\bigr) = \bigvee_k \mathrm{Ran}(E(A_k))$, lo cual dice que $E\bigl(\biguplus_k A_k\bigr) = \sum_k E(A_k)$.

Definición 4.65. Si K es un espacio topológico compacto y separable, denótese por $B_\infty(K)$ el espacio vectorial de *funciones borelianas acotadas* $g \colon K \to \mathbb{C}$. Esta es una C^*-álgebra con la norma $\|\cdot\|_\infty$, que incluye $C(K)$ como subálgebra cerrada.

Sea $E \colon \mathcal{B} \to \mathcal{P}(H)$ una medida espectral. Si $A \in \mathcal{B}$, defínase

$$\int_A dE(\lambda) \equiv \int_K 1_A(\lambda)\, dE(\lambda) := E(A).$$

Esta integral se extiende por linealidad a las funciones simples: si $h = \sum_{j=1}^n c_j 1_{A_j}$, se define $\int_K h(\lambda)\,dE(\lambda) := \sum_{j=1}^n c_j E(A_j) \in \mathcal{L}(H)$.

Si $g \in B_\infty(K)$, hay una sucesión (h_n) de funciones simples tales que $h_n \to g$ uniformemente. Para $x \in H$, se cumple

$$\int_K |h_n(\lambda) - g(\lambda)|\,dE_{x,x}(\lambda) \leq \|h_n - g\|_\infty \,\langle x \mid E(K)x\rangle = \|h_n - g\|_\infty \|x\|^2,$$

y más generalmente, $\int_K |h_n(\lambda) - g(\lambda)|\,d|E_{xy}|(\lambda) \leq \|h_n - g\|_\infty \|x\|\,\|y\|$ para $x, y \in H$. Por convergencia dominada, se obtiene $\big\langle y \big| \int h_n(\lambda)\,dE(\lambda)x\big\rangle \to I(g; y, x) \in \mathbb{C}$ donde este límite no depende de la sucesión aproximante (h_n). Esta forma sesquilineal $(y, x) \mapsto I(g; y, x)$ cumple $I(g; y, x) \leq \|g\|_\infty \|x\|\,\|y\|$. Luego hay un operador acotado $S(g) \in \mathcal{L}(H)$ tal que $\langle y \mid S(g)x\rangle = I(g; y, x)$. Escríbase $\int_K g(\lambda)\,dE(\lambda) := S(g)$. En otras palabras, se ha definido un operador (único) que cumple

$$\left\langle y \,\middle|\, \int_K g(\lambda)\,dE(\lambda)\,x \right\rangle := \int_K g(\lambda)\,dE_{x,y}(\lambda) \quad \text{para todo} \quad x, y \in H.$$

Teorema 4.66 (El teorema espectral)**.** *Sea $T \in \mathcal{L}(H)$ un operador autoadjunto.*[18] *Hay una única medida espectral $E\colon \mathcal{B}(\mathrm{sp}(T)) \to \mathcal{P}(H)$ tal que $f(T) = \int_{\mathrm{sp}(T)} f(\lambda)\,dE(\lambda)$ para $f \in C(\mathrm{sp}(T))$. Los proyectores espectrales conmutan con T, es decir, $E(A)T = TE(A)$ para todo $A \in \mathcal{B}(\mathrm{sp}(T))$; y si $S \in \mathcal{L}(H)$, entonces $ST = TS$ si y sólo si $E(A)S = SE(A)$ para todo A.* ⊟

La idea de la demostración es la siguiente. Dado el operador T, la fórmula (4.17) puede verse como una *definición* de un juego de medidas borelianas $\{\, \mu_{xy} : x, y \in H \,\}$ sobre $\mathrm{sp}(T)$. Si $A \in \mathcal{B}(\mathrm{sp}(T))$, cada $(y, x) \mapsto \mu_{xy}(A)$ es una forma sesquilineal sobre H, que cumple $|\mu_{xy}(A)| \leq \|x\|\,\|y\|$. Luego, hay un operador $E(A) \in \mathcal{L}(H)$ con $\|E(A)\| \leq 1$ tal que $\mu_{xy}(A) = \langle y \mid E(A)x\rangle$ para $x, y \in H$. Luego se verifica que $A \mapsto E(A)$ es una medida espectral. Su unicidad viene de las igualdades $E_{x,y} = \mu_{x,y}$ para todo x, y.

Si $S \in \mathcal{L}(H)$ conmuta con T, entonces $S\,f(T) = f(T)\,S$ si f es un polinomio y por tanto si $f \in C(\mathrm{sp}(T))$. Luego, $\langle S^*y \mid f(T)x\rangle = \langle y \mid Sf(T)x\rangle = \langle y \mid f(T)Sx\rangle$ para todo x, y, así que $E_{x,S^*y} = E_{Sx,y}$ en $\mathcal{M}(\mathrm{sp}(T))$. Por lo tanto, vale

$$\langle y \mid SE(A)x\rangle = \langle S^*y \mid E(A)x\rangle = E_{x,S^*y}(A) = E_{Sx,y}(A) = \langle y \mid E(A)Sx\rangle.$$

Esto establece que $SE(A) = E(A)S$ para $A \in \mathcal{B}(\mathrm{sp}(T))$. Inversamente, si $SE(A) = E(A)S$ para todo A, entonces $E_{x,S^*y} = E_{Sx,y}$ para todo $x, y \in H$, lo cual implica que

$$\langle y \mid STx\rangle = \int_{\mathrm{sp}(T)} \lambda\,dE_{x,S^*y}(\lambda) = \int_{\mathrm{sp}(T)} \lambda\,dE_{Sx,y}(\lambda) = \langle y \mid TSx\rangle.$$

[18] Después de extender la validez del Teorema 4.35 a los operadores normales, se puede suponer que el operador T es *normal*.

Definición 4.67. Si $T = T^* \in \mathcal{L}(H)$, la medida espectral E del Teorema 4.66 se llama la **resolución de la unidad** para T.

La correspondencia $g \mapsto g(T) \equiv \int_{\mathrm{sp}(T)} g(\lambda)\, dE(\lambda)$ establecida por el Teorema 4.66 es un $*$-*homomorfismo* de $B_\infty(\mathrm{sp}(T))$ en $\mathcal{L}(H)$, que lleva la función constante 1 en el operador identidad 1, tal que $\|g(T)\| \leq \|g\|_\infty$. (El núcleo de este $*$-homomorfismo es el espacio vectorial de las funciones borelianas acotadas g tales que $g = 0$ casi por doquier con respecto de cada una de las medidas positivas $E_{x,x}$.)

Lema 4.68. *Sea $T = T^* \mathcal{L}(H)$ y sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función continua. Entonces $f \circ g(T) = f(g(T))$ para todo $g \in B_\infty(\mathrm{sp}(T))$.*

Demostración. Para un monomio $\lambda \mapsto \lambda^n$, se obtiene $g^n(T) := \int g(\lambda)^n\, dE(\lambda) = g(T)^n$ por la propiedad homomórfica de $g \mapsto g(T)$. Para la conjugación compleja $\lambda \mapsto \bar{\lambda}$, se puede comprobar que $\bar{g}(T) = g(T)^*$ a partir de la propiedad $E(A)^* = E(A)$. Entonces $p \circ g(T) = p(g(T))$ cuando p es un polinomio en $\mathbb{C}[X]$. El caso general sigue del teorema de Weierstrass, al aproximar f por tales polinomios, uniformemente en el disco compacto $\{\, \mu \in \mathbb{C} : |\mu| \leq \|g\|_\infty \,\}$. □

Proposición 4.69. *Sea U un operador unitario en $\mathcal{L}(H)$. Entonces hay un operador autoadjunto $T \in \mathcal{L}(H)$ con $\|T\| \leq 1$ tal que $U = \exp(2\pi i T)$.*

Demostración. Un operador unitario es normal, ya que $U^*U = UU^* = 1$. Con el uso del cálculo funcional continuo para operadores normales, no es difícil comprobar que $\mathrm{sp}(U) \subseteq \mathbb{T} \equiv \{\, \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1 \,\}$.

Defínase $e : [0,1) \to \mathbb{T} : t \mapsto e^{2\pi i t}$. Esta función e es una biyección continua, pero su inverso g no es continuo; el intervalo semiabierto $[0,1)$ no es homeomorfo al círculo $\mathbb{T}$. Sin embargo, g sí es una *función boreliana acotada* sobre $\mathbb{T}$ y, desde luego, sobre cualquier parte cerrada de $\mathbb{T}$. Colóquese $T := g(U)$.

De $g(\mathbb{T}) \subset \mathbb{R}$ resulta $g = \bar{g}$, así que $T = T^*$. Además, $\|T\| = \|g(U)\| \leq \|g\|_\infty \leq 1$.

Del Lema 4.68, se obtiene $\exp(2\pi i T) = f(T) = f(g(U)) = f \circ g(U) = U$. □

4.5 Ejercicios sobre álgebras de Banach y operadores acotados

Ejercicio 4.1. Sea A un álgebra de Banach unital. Si $x \in A$ y si hay dos elementos $y, z \in A$ tales que $\|xy - 1\| < 1$ y $\|zx - 1\| < 1$, demostrar que x es invertible y que

$$x^{-1} = y \sum_{k=0}^{\infty} (1 - xy)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (1 - zx)^k z.$$

Ejercicio 4.2. Sea J un *ideal cerrado* en un álgebra de Banach A, es decir, un subespacio cerrado tal que $xv \in J$, $vx \in J$ cuando $x \in A$, $v \in J$. Verificar que el espacio cociente A/J, con la norma $\|x + J\| := \inf_{v \in J} \|x + v\|$, es un álgebra de Banach.

Ejercicio 4.3. Si E es un espacio de Banach, el espacio de operadores $\mathcal{L}(E)$ es un álgebra de Banach. Un operador $T \in \mathcal{L}(E)$ es **cuasinilpotente** si $\operatorname{sp}(T) = 0$. Demostrar que los operadores $T \in \mathcal{L}(C[0,1])$ y $S \in \mathcal{L}(\underline{\ell}^p)$ [con $1 \leq p < \infty$] definidos por

$$Tf(x) := \int_0^x f(t)\,dt \qquad \text{y} \qquad (S\boldsymbol{x})_n := \frac{x_n}{n+1}$$

son cuasinilpotentes y que no poseen autovalor alguno.

Ejercicio 4.4. Sea x y y dos elementos de un álgebra de Banach unital A. Demostrar que

$$\operatorname{sp}(xy) \cup \{0\} = \operatorname{sp}(yx) \cup \{0\}.$$

Dar un ejemplo de un caso en donde $\operatorname{sp}(xy) \neq \operatorname{sp}(yx)$.

⟦ Indicación: Si $\lambda \notin \operatorname{sp}(xy) \cup \{0\}$, verificar que $\lambda^{-1}(1 + y(\lambda 1 - xy)^{-1}x)$ es un inverso para $\lambda 1 - yx$. ⟧

Ejercicio 4.5. Un problema básico de la mecánica cuántica es el de hallar un par de operadores autoadjuntos Q y P sobre un espacio de Hilbert H que satisfaga la **relación canónica de conmutación** $QP - PQ = i\hbar 1$, donde $\hbar$ es una constante real positiva.[19] Comprobar que este problema no posee solución alguna con $Q, P \in \mathcal{L}(H)$.

⟦ Indicación: Verificar la fórmula $\operatorname{sp}(\mu 1 + x) = \mu + \operatorname{sp}(x)$ para $\mu \in \mathbb{C}$; luego usar el Ejercicio 4.4. ⟧

Ejercicio 4.6. Sea A un álgebra de Banach involutiva. Si $u \in A$ es una unidad a la izquierda: $ux = x$ para todo $x \in A$, demostrar que $u = u^*$ y que u es una unidad (bilateral) para A.

Ejercicio 4.7. (a) Sean A y B dos C^*-álgebras unitales y $\pi : A \to B$ un $*$-homomorfismo.[20] Demostrar que $\operatorname{sp}(\pi(x)) \subseteq \operatorname{sp}(x)$ y concluir que $\|\pi(x)\| \leq \|x\|$ para $x \in A$: por lo tanto, un $*$-homomorfismo entre C^*-álgebras unitales *es automáticamente continua*.

(b) Concluir que un $*$-isomorfismo entre C^*-álgebras unitales es una isometría.

(c) Demostrar que *la norma*[21] de una C^*-álgebra unital *es única*: en otras palabras, si una $*$-álgebra unital A es una C^*-álgebra para dos normas $\|\cdot\|$ y $|||\cdot|||$ que verifican $\|x^*x\| = \|x\|^2$ y $|||x^*x||| = |||x|||^2$ para todo $x \in A$, comprobar que $\|x\| = |||x|||$ para todo $x \in A$.

[19] En un sistema cuántico con un solo grado de libertad, se interpreta Q como un operador de *posición* y P como un operador de *momento*. La cantidad $\hbar$ es la **constante de Planck**. Para resolver la dificultad de no haber una solución en operadores acotados, hay que representar Q y P por operadores autoadjuntos *no acotados*.

[20] Un $*$-**homomorfismo** es un homomorfismo π tal que $\pi(x^*) = \pi(x)^*$ para todo $x \in A$.

[21] Una norma sobre una $*$-álgebra que cumple (4.4) se llama una C^*-**norma**.

Ejercicio 4.8. Sea A una C^*-álgebra sin unidad, y sea $A^+ := A \times \mathbb{C}$ su **unitización**, definida por el Lema 4.7. Demostrar que hay una norma sobre A^+ tal que A^+ sea una C^*-álgebra unital. (Esta norma es única, por el Ejercicio 4.7.)

⟦ Indicación: Defínase $|||(x,\lambda)||| := \sup\{\, \|xz + \lambda z\|_A : \|z\|_A \leq 1 \,\}$. Verificar que esta es una seminorma submultiplicativa sobre A^+. Si fuera $|||(u,\lambda)||| = 0$ con $\lambda \neq 0$, comprobar que $-\lambda^{-1}u$ sería una unidad para A; concluir que $|||\cdot|||$ es una norma para A^+. Verificar que esta es una C^*-norma para la cual A^+ es completa. ⟧

Ejercicio 4.9. (a) Sea A una C^*-álgebra sin unidad. Un par de operadores (L,R) en $\mathcal{L}(A)$ es un **doble centralizador** para A si se verifica

$$L(xy) = L(x)y, \quad R(xy) = xR(y), \quad R(x)y = xL(y) \qquad \text{para todo} \quad x,y \in A.$$

Sea $\mathcal{M}(A)$ la totalidad de tales (L,R). Si $z \in A$, defínase $L_z(x) := zx$ y $R_z(x) := xz$; verificar que $(L_z, R_z) \in \mathcal{M}(A)$ y que $\|L_z\| = \|R_z\| = \|z\|$. Más generalmente, demostrar que $\|L\| = \|R\|$ para todo $(L,R) \in \mathcal{M}(A)$.

(b) Demostrar que $\mathcal{M}(A)$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{L}(A) \times \mathcal{L}(A)$. Defínase un producto y una involución en $\mathcal{M}(A)$ por $(L_1,R_1)(L_2,R_2) := (L_1L_2, R_2R_1)$ y

$$(L,R)^* := (R^\dagger, L^\dagger), \quad \text{donde} \quad T^\dagger(x) := T(x^*)^* \quad \text{para} \quad T \in \mathcal{L}(A).$$

Demostrar que $\mathcal{M}(A)$ una C^*-álgebra bajo este producto e involución,[22] con la norma dada por $\|(L,R)\| := \|L\| = \|R\|$. Demostrar que la aplicación $z \mapsto (L_z, R_z)$ es un $*$-isomorfismo isométrico que lleva A en un *ideal* de $\mathcal{M}(A)$.

Ejercicio 4.10. Sea H un espacio de Hilbert. Verificar la equivalencia de las siguientes pares de condiciones para operadores sobre H:

(a) *Operador autoadjunto*: $T^* = T$ si y sólo si $\langle x \mid Tx \rangle \in \mathbb{R}$ para todo $x \in H$.

(b) *Operador normal*: $TT^* = T^*T$ si y sólo si $\|T^*x\| = \|Tx\|$ para todo $x \in H$.

(c) *Contracción*: $I - R^*R$ es positivo si y sólo si $\|Rx\| \leq \|x\|$ para todo $x \in H$.

(d) *Isometría*: $V^*V = 1$ si y sólo si $\|Vx\| = \|x\|$ para todo $x \in H$.

(e) *Isometría parcial*: $SS^*S = S$ si y sólo si $\|Sx\| = \|x\|$ para todo $x \in (\ker S)^\perp$.

(f) *Proyector*: $P^2 = P = P^*$ si y sólo si $Px = x$ para todo $x \in (\ker P)^\perp$.

[22] La C^*-álgebra $\mathcal{M}(A)$ es el **álgebra de multiplicadores** de A. Si $A = C_0(X)$ con X localmente compacto, resulta que $\mathcal{M}(A) \simeq C_b(X)$, la C^*-álgebra de funciones continuas acotadas sobre X; se sabe que $C_b(X) \simeq C(\beta X)$, donde βX es la *compactificación de Stone y Čech* de X.

Ejercicio 4.11. (a) Si $P \in \mathcal{L}(H)$ es un *proyector* sobre un espacio de Hilbert H, demostrar que $\operatorname{Ran} P$ es un subespacio cerrado de H; que $H = \ker P \oplus \operatorname{Ran} P$ como suma directa ortogonal; y que $\|P\| = 1$ o bien $P = 0$.

(b) Si M es un subespacio cerrado cualquiera de H, demostrar que hay un único proyector $P_M \in \mathcal{L}(H)$ tal que $\operatorname{Ran} P_M = M$. ⟦Indicación: Usar la Proposición 1.42.⟧ Verificar que el proyector con imagen $M^\perp$ es $1 - P_M$.

(c) Si Q es otro proyector, demostrar que PQ es un proyector si y sólo si $PQ = QP$, en cuyo caso $P + Q - PQ$ es también un proyector. ¿Cúales son las relaciones entre las imágenes de estos cuatro proyectores?

Ejercicio 4.12. Si H es un espacio de Hilbert, demostrar que cada operador idempotente de norma 1 en $\mathcal{L}(H)$ es un proyector ortogonal.[23] En otras palabras, si $P \in \mathcal{L}(H)$ cumple $P^2 = P$ y $\|P\| = 1$, entonces $P^* = P$.

⟦Indicación: Si $x \in (\operatorname{Ran} P)^\perp$ y $t > 0$, comprobar que $\|(1+t)Px\|^2 \leq \|x + tPx\|^2 = \|x\|^2 + \|tPx\|^2$. Deducir que $(\operatorname{Ran} P)^\perp \subseteq \ker P$ y concluir que $\langle Py \mid z\rangle = \langle y \mid Pz\rangle$ para $y, z \in H$.⟧

Ejercicio 4.13. Si $T \in \mathcal{L}(H)$ es un operador autoadjunto con $\|T\| \leq 1$ y $\|1 - T\| \leq 1$, demostrar que T es positivo.

Inversamente, si $S \in \mathcal{L}(H)$ es positivo y si $\|S\| \leq 1$, demostrar que $\|1 - S\| \leq 1$.

Ejercicio 4.14. Una sucesión de operadores (T_n) **converge fuertemente** a T en $\mathcal{L}(H)$, y se escribe $T = \operatorname{s-lim}_{n\to\infty} T_n$, si $T_n x \to Tx$ en H para cada $x \in H$.[24]

Sean P, Q dos proyectores cualesquiera sobre H. Denótese por $P \wedge Q$ el proyector ortogonal cuya imagen es $\operatorname{Ran} P \cap \operatorname{Ran} Q$. Verificar que $\|PQx\| < \|x\|$ si $x \notin \operatorname{Ran} P \cap \operatorname{Ran} Q$. Si $y \in H$, demostrar que los números $\langle y \mid (QPQ)^{2n} y\rangle$ forman una sucesión decreciente; concluir que $((QPQ)^n y)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en H, y que $\operatorname{s-lim}_{n\to\infty}(PQ)^n = \operatorname{s-lim}_{n\to\infty} P(QPQ)^n$ existe en $\mathcal{L}(H)$. Usar el resultado del Ejercicio 4.12 para concluir que $P \wedge Q = \operatorname{s-lim}_{n\to\infty}(PQ)^n$.

Ejercicio 4.15. (a) Sea B una $*$-subálgebra cerrada de una C^*-álgebra A. Demostrar que $B \cap A^\times = B^\times$; es decir, si $x \in B$ posee un inverso $x^{-1} \in A$, entonces $x^{-1} \in B$. Concluir que $\operatorname{sp}_A(y) = \operatorname{sp}_B(y)$ para $y \in B$: los espectros de un elemento de B con respecto a las dos C^*-álgebras A y B coinciden. ⟦Indicación: Si $x^* = x$, usar cálculo funcional continuo; en general, verificar que $x^{-1} = (x^*x)^{-1}x^*$.⟧

[23] Este ejercicio es el producto de una conversación entre Arnaldo Nogueira y el autor (JCV) en 1977, cuando los dos eran estudiantes de posgrado.

[24] Dícese que (T_n) **converge uniformemente** a T si $\|T_n - T\| \to 0$. Es evidente que convergencia uniforme implica convergencia fuerte, pero no al contrario si $\dim H = \infty$.

(b) Si C es otra C^*-álgebra, y si $\pi : C \to A$ es un $*$-isomorfismo isométrico, verificar que $\mathrm{sp}(\pi(z)) = \mathrm{sp}(z)$ para todo $z \in C$.

(c) Sea $T \in \mathcal{L}(H)$ un operador *normal*.[25] Si $f \in C(\mathrm{sp}\, T)$ es un límite de polinomios, $p_n(\lambda, \bar{\lambda}) \to f(\lambda)$ uniformemente para $\lambda \in \mathrm{sp}(T)$, defínase $f(T) := \lim_{n\to\infty} p_n(T, T^*)$. Demostrar que $\mathrm{sp}(f(T)) = \{\, f(\lambda) : \lambda \in \mathrm{sp}(T) \,\}$.

Ejercicio 4.16. Sea $\mathbb{T} := \{\, \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1 \,\}$ el círculo unitario. Verificar que un operador normal $U \in \mathcal{L}(H)$ es *unitario* si y sólo si $\mathrm{sp}(U) \subseteq \mathbb{T}$. ⟦ Indicación: Usar el Ejercicio 4.15. ⟧

Ejercicio 4.17. Si $A \in \mathcal{L}(H)$ es un operador *positivo*, usar la existencia de $\sqrt{A}$ para comprobar la **desigualdad de Schwarz generalizada**:

$$\big|\langle y \mid Ax\rangle\big|^2 \leq \langle y \mid Ay\rangle\,\langle x \mid Ax\rangle \quad \text{para todo} \quad x, y \in H.$$

Ejercicio 4.18. (a) Si $A \in \mathcal{L}(H)$ es un operador positivo y si $T \in \mathcal{L}(H)$, demostrar que T^*AT es positivo. Si B es otro operador positivo, demostrar que $A + B$ es también positivo.

(b) Si A y B son operadores positivos tales que $AB = BA$, demostrar que AB es positivo. ⟦ Indicación: Comprobar que B conmuta con $A^{1/2}$. ⟧ Dar un ejemplo de un par de operadores positivos (que no conmutan) cuyo producto no es positivo.

Ejercicio 4.19. Sea H un espacio de Hilbert. Escríbase $A \geq B$ en $\mathcal{L}(H)$ si la diferencia $A - B$ es un operador positivo. Demostrar las siguientes propiedades de este orden parcial:

(a) si $A \geq 0$, entonces $\|A\|\, 1 \geq A$;

(b) si $A \geq B \geq 0$, entonces $\|A\| \geq \|B\|$;

(c) si $A \geq 0$, entonces $\|A\|\, A \geq A^2$;

(d) si $A \geq 1$, entonces A es invertible con $1 \geq A^{-1}$;

(e) si $A \geq B \geq 0$, entonces $T^*AT \geq T^*BT$ para todo $T \in \mathcal{L}(H)$;

(f) si $A \geq B \geq 0$ y si $t > 0$, entonces $(t1 + B)^{-1} \geq (t1 + A)^{-1}$;

(g) si $A \geq B \geq 0$, entonces $\sqrt{A} \geq \sqrt{B}$.

[25] Esta definición de $f(T)$ extiende el **cálculo funcional continuo** a *operadores normales*. La demostración del Teorema 4.35(a) se adapta fácilmente para probar que $f \mapsto f(T)$ es un $*$-isomorfismo isométrico entre $C(\mathrm{sp}(T))$ y $C^*(T)$.

⟦ Indicación: Para (a), (b) y (d), hallar intervalos en $\mathbb{R}$ que incluyen los espectros de estos operadores. Para (c), mostrar que $\operatorname{sp}\big((A - \frac{1}{2}\|A\|1)^2\big) \subseteq [0, \frac{1}{4}\|A\|^2]$. Para (f), aplicar (d) y (e) con $T = (t1 + B)^{-1/2}$. Para (g), verificar la siguiente fórmula integral:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left(1 - \frac{t}{t+\lambda}\right)\frac{dt}{\sqrt{t}} = \sqrt{\lambda}\,,$$

luego usar (f) y el cálculo funcional continuo. ⟧

Ejercicio 4.20. Sea $T \in \mathcal{L}(L^2[0,1])$ el operador dado por $Tf(t) := t\,f(t)$. Comprobar que T es autoadjunto pero no posee autovalor alguno. Demostrar que $\operatorname{sp}(T) = [0,1]$.

Ejercicio 4.21. Sea $f \in L^\infty(X,\mu)$, donde $(X,\mathcal{F},\mu)$ es un espacio de medida σ-finita. Defínase el **operador de multiplicación** $M_f \in \mathcal{L}(L^2(X,\mu))$ por $M_f h := fh$. ¿Cuál es la descomposición polar de M_f? Identificar el espectro $\operatorname{sp}(M_f)$.

Ejercicio 4.22. Sea $\mathcal{L}^2(H)$ el espacio de *operadores de Hilbert y Schmidt* sobre H. Si $S \in \mathcal{L}^2(H)$ y si $T \in \mathcal{L}(H)$ es un operador acotado, verificar que TS y ST pertenecen a $\mathcal{L}^2(H)$, con $\|TS\|_2 \leq \|T\|\,\|S\|_2$ y $\|ST\|_2 \leq \|S\|_2\,\|T\|$. Concluir que $\mathcal{L}^2(H)$ es un $*$-ideal *no cerrado* en $\mathcal{L}(H)$.

Ejercicio 4.23. Si $S = S^* \in \mathcal{K}(H)$ y si $\operatorname{sp}(S)\setminus\{0\} = \{\,\lambda_k : k \in \mathbb{N}\,\}$ con $|\lambda_k| \geq |\lambda_{k+1}|$ para todo k, demostrar que hay proyectores de rango finito $\{\,P_k : k \in \mathbb{N}\,\}$ con $P_kP_l = P_lP_k = 0$ para $k \neq l$, de manera que $S = \sum_{k=0}^\infty \lambda_k P_k$ con convergencia en la norma de $\mathcal{L}(H)$.

Ejercicio 4.24. Si $A \in \mathcal{K}(H)$ es compacto y positivo, sean $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sus autovalores no ceros, contados con multiplicidad, en orden decreciente: $\mu_k \geq \mu_{k+1}$. Sea $\{\,u_k : k \in \mathbb{N}\,\}$ una familia ortonormal de autovectores: $Au_k = \mu_k u_k$ para cada k. Demostrar que

$$\mu_n = \sup\{\,\langle x \mid Ax\rangle : \|x\| \leq 1,\ \langle u_j \mid x\rangle = 0 \text{ para } j < n\,\}.$$

En seguida, demostrar el **teorema minimax de Courant** que caracteriza los autovalores de A:

$$\mu_n = \inf_{\dim M_n = n} \sup\{\,\langle x \mid Ax\rangle : \|x\| \leq 1,\ x \in M_n^\perp\,\},$$

donde el ínfimo se toma sobre los subespacios $M_n \subset H$ de dimensión finita n.

Ejercicio 4.25. Sean $S, T \in \mathcal{L}^2(H)$ dos operadores de Hilbert y Schmidt. Si $\{u_k\}$ y $\{v_r\}$ son dos bases ortonormales de H, demostrar que las series $\sum_k \langle u_k \mid STu_k\rangle$ y $\sum_r \langle v_r \mid STv_r\rangle$ convergen a la misma suma. Denótese el valor de esta suma por $\operatorname{Tr}(ST)$; esta es la *traza* de ST. Comprobar, además, que $|\operatorname{Tr}(ST)| \leq \|S\|_2\|T\|_2$.

Ejercicio 4.26. (a) Comprobar esta *fórmula de polarización*, para $S, T \in \mathcal{L}(H)$:

$$S^*T = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3}(-i)^k(S + i^kT)^*(S + i^kT).$$

(b) Demostrar que $\operatorname{Tr}(ST) = \operatorname{Tr}(TS)$ si $S, T \in \mathcal{L}^2(H)$.

Ejercicio 4.27. Sea $A \in \mathcal{K}(H)$ un operador compacto positivo. Si $\sqrt{A} \in \mathcal{L}^2(H)$, la **traza** de A se define por $\operatorname{Tr} A := \sum_k \langle u_k \mid Au_k\rangle$. (Esta suma es finita e independiente de la base ortonormal, por el Ejercicio 4.25.) Verificar que la traza de operadores positivos satisface las siguientes propiedades:

(a) $\operatorname{Tr}(A + B) = \operatorname{Tr} A + \operatorname{Tr} B$, si $A \geq 0$, $B \geq 0$.

(b) $\operatorname{Tr}(tA) = t \operatorname{Tr} A$, si $A \geq 0$ y $t \geq 0$ en $\mathbb{C}$.

(c) $\operatorname{Tr}(A) \geq \operatorname{Tr}(B) \geq 0$, si $A \geq B \geq 0$.

(d) $\operatorname{Tr}(UAU^*) = \operatorname{Tr} A$, si $A \geq 0$ y si $U \in \mathcal{L}(H)$ es unitario.

Ejercicio 4.28. (a) Sea $T \in \mathcal{L}(H)$ y sea $T = SA$ su descomposición polar. Demostrar que T es de la forma $T = RS$ con $R, S \in \mathcal{L}^2(H)$ si y sólo si $\operatorname{Tr} A < \infty$.

⟦Indicación: Usar $T = SA^{1/2}A^{1/2}$. Verificar $(\operatorname{Tr}|RS|)^2 \leq \operatorname{Tr}(|RS|^2) \leq \|R\|^2\,\|S\|_2^2$.⟧

(b) Defínase el siguiente conjunto de **operadores trazables**:

$$\mathcal{L}^1(H) := \{\, T \in \mathcal{L}(H) : \operatorname{Tr}|T| < \infty \,\} = \{\, RS : R, S \in \mathcal{L}^2(H) \,\}.$$

Demostrar que $\mathcal{L}^1(H)$ es un $*$-ideal (no cerrado) en $\mathcal{L}(H)$ y que $\mathcal{L}^1(H) \subset \mathcal{L}^2(H)$.

(c) Si $S \in \mathcal{L}(H)$ y $T \in \mathcal{L}^1(H)$, demostrar que $\operatorname{Tr}(ST)$ existe y que cumple la desigualdad $|\operatorname{Tr}(ST)| \leq \|S\| \operatorname{Tr}|T|$. ⟦Indicación: Usar $T = SA^{1/2}A^{1/2}$.⟧

Ejercicio 4.29. (a) Escríbase $\|T\|_1 := \operatorname{Tr}|T|$ para $T \in \mathcal{L}^1(H)$. Mostrar que $\|\cdot\|_1$ es una *norma* sobre $\mathcal{L}^1(H)$; y que $\|T\|_2 \leq \|T\|_1$ para $T \in \mathcal{L}^1(H)$.

⟦Indicación: Para la desigualdad triangular, usar la descomposición polar $S + T = V|S + T|$, de modo que $\|S + T\|_1 = \operatorname{Tr}(V^*(S + T))$.⟧

(b) Comprobar que $\big\| |x\rangle\langle y| \big\|_1 = \|x\|\,\|y\|$ para $x, y \in H$.

(c) Si $T \in \mathcal{L}^1(H)$ y $S \in \mathcal{L}(H)$, demostrar las desigualdades $\|ST\|_1 \leq \|S\|\,\|T\|_1$ y $\|TS\|_1 \leq \|T\|_1\,\|S\|$.

Ejercicio 4.30. Demostrar que hay dos isomorfismos isométricos

$$\mathcal{K}(H)^* \simeq \mathcal{L}^1(H) \quad \text{y} \quad \mathcal{L}^1(H)^* \simeq \mathcal{L}(H),$$

donde el apareamiento de dualidad en ambos casos es $\langle T, S\rangle := \operatorname{Tr}(TS)$. ⟦ Aquí $T \in \mathcal{L}^1(H)$; y $S \in \mathcal{K}(H)$ o bien $S \in \mathcal{L}(H)$ según el caso. ⟧

Concluir que el *encaje natural* $J : \mathcal{K}(H) \to \mathcal{K}(H)^{**}$ puede identificarse con la *inclusión* $\mathcal{K}(H) \hookrightarrow \mathcal{L}(H)$; y que los espacios de Banach $\mathcal{K}(H)$, $\mathcal{L}^1(H)$ y $\mathcal{L}(H)$ *no son reflexivos*.[26]

⟦ Indicación: Si $f \in \mathcal{K}(H)^*$, mostrar que hay $T = SA \in \mathcal{L}(H)$ que cumple $\langle y \mid Tx\rangle = f\big(|x\rangle\langle y|\big)$ para $x, y \in H$. Verificar que $\sum_{j=1}^n \langle u_j \mid Au_j\rangle = f\big(\sum_{j=1}^n |u_j\rangle\langle Su_j|\big)$ y concluir que $T \in \mathcal{L}^1(H)$ con $\|T\|_1 \leq \|f\|$. Luego comprobar que $f(R) = \operatorname{Tr}(TR)$ para todo $R \in \mathcal{K}(H)$. ⟧

[26] Se puede dar por un hecho (que no es muy difícil de comprobar) que el espacio vectorial $\mathcal{L}^1(H)$ es completo en la norma $\|\cdot\|_1$.

Indíce General