Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones 2(1): 69–81 (1995)

DE LA FÓRMULA DE SUMACIÓN DE POISSON A LOS TEOREMAS DE MUESTREO Y RECONSTRUCCIÓN

William J. Ugalde G.[1]

Introducción

Los radioastrónomos miden la visibilidad de una fuente luminosa para determinar la cantidad de luz emitida y su distribución, bajo el principio que esta es la transformada de Fourier de la visibilidad. En la teoría de la información se reconstruyen señales continuas a partir de mediciones uniformemente espaciadas. En la Tomografía Computada se pretende la reconstrucción de un "objeto" conociendo sus integrales de línea. Estas ideas se apoyan en los teoremas de muestreo, en los cuales se estudian funciones de tipo banda limitada, esto es, funciones cuya transformada de Fourier tiene soporte compacto. La idea es expresar una función en su expansión de Fourier, a partir de allí deducir una fórmula de sumación para relacionar f con $\widehat{f}$, y de ella, obtener un teorema de muestreo, en el cual se recupera f mediante una sumatoria de valores de la función original y una función reconstructora. Si la función estudiada no es de banda limitada pero su transformada de Fourier es pequeña en algún sentido fuera de un compacto, es posible acotar la diferencia entre la función y su posible aproximación. En este trabajo se pretende explorar las técnicas que permiten concluir los teoremas de muestreo a partir de las fórmulas de sumación, presentar los diferentes tipos de "series reconstructoras" (llamadas aquí *series cardenales*) y dar un aporte sobre la aproximación de estas series por sus sumas parciales en el caso n-dimensional.

1 Fórmula de Sumación de Poisson

Para $f \in L^1(I\!R^n)$ se define su transformada de Fourier y su transformada inversa de Fourier por las expresiones

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}f)(x) = \widehat{f}(x) &:= (2\pi)^{-n/2} \int_{I\!R}^{n} e^{-ix\cdot y} f(y)\, dy \\ (\mathcal{F}^{-1}f)(y) = \widetilde{f}(y) &:= (2\pi)^{-n/2} \int_{I\!R}^{n} e^{iy\cdot x} f(x)\, dx.\end{aligned}$$

[1]Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica

La transformada de Fourier de un elemento de $L^1(I\!R^n) \cap L^2(I\!R^n)$ está en $L^2(I\!R^n)$; así el teorema de Plancherel extiende la transformada de Fourier a un isomorfismo de $L^2(I\!R^n)$ en sí mismo que además satisface $\|f\|_{L^2(I\!R^n)} = \|\widehat{f}\|_{L^2(I\!R^n)}$.

Para f en el **espacio de Schwartz**, el espacio lineal de funciones $C^\infty(I\!R^n)$ tales que

$$\|f\|_{k,l} := \sup_{x \in I\!R^n,\, |\alpha| \leq l} |x^k D^\alpha f(x)|, \quad \alpha \in I\!N^n,$$

sea finito para todo $k \in I\!N^n$ y para todo $l \in I\!N$ (aquí $x^k = x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ para $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ y D^α representa el operador $\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n}$); se satisfacen las relaciones $\widetilde{\widehat{f}} = \widehat{\widetilde{f}} = f$ y $\widehat{\widehat{f}}(x) \equiv f(-x)$.

Es importante notar que $\mathcal{F}$ lleva $\mathcal{S}(I\!R^n)$ en $\mathcal{S}(I\!R^n)$, y que la aplicación $\mathcal{F}\colon \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ es un isomorfismo lineal topológico (ver [2]). Si se considera f en $L^2([-a\pi, a\pi]^n)$ con $a > 0$; la familia ortonormal completa $u_k(x) := (2a\pi)^{-n/2} e^{i/ak \cdot x/a}$ para $k \in Z\!\!Z^n$, se obtiene por la identidad de Parseval, para $f \in L^2([-a\pi, a\pi]^n)$:

$$f = \sum_{k \in Z\!\!Z^n} \langle f, u_k \rangle \, u_k = \sum_{k \in Z\!\!Z^n} \widehat{f}_k \, e^{i/ax \cdot k}$$

donde

$$\widehat{f}_k = (2a\pi)^{-n} \int_{[-a\pi, a\pi]^n} f(y) e^{-iy \cdot k/a} \, dy$$

y la convergencia es en el sentido de $L^2([-a\pi, a\pi]^n)$. Es así como el siguiente resultado es válido.

Proposición 1.1. *Si $f \in L^2(I\!R^n)$ con su soporte contenido en $[-a\pi, a\pi]^n$, se tiene*

$$f(x) = a^{-n} (2\pi)^{-n/2} \sum_{k \in Z\!\!Z^n} \widehat{f}(a^{-1}k) e^{ix \cdot k/a}, \tag{1.1}$$

que, al tomar $a = 1$, da la expansión de Fourier para $f \in L^2$ con $\operatorname{sop} f \subset [-\pi, \pi]^n$ en la forma

$$f(x) = (2\pi)^{-n/2} \sum_{k \in Z\!\!Z^n} \widehat{f}(k) e^{ix \cdot k}.$$

Dicha convergencia no solo vale en L^2 sino tambien que es uniforme como se verá en la sección 2. Para una función en $\mathcal{S}(I\!R^n)$ de soporte compacto se verifica, a partir de (1.1)

$$\sum_{k \in Z\!\!Z^n} f(x + k) = (2\pi)^{n/2} \sum_{k \in Z\!\!Z^n} \widehat{f}(2\pi k) e^{2\pi i k \cdot x}, \tag{1.2}$$

gracias a la periodicidad de $\sum_{k \in Z\!\!Z^n} f(x + k)$. Mediante la “regularización” (aproximación de una función por funciones de soporte compacto) y la continuidad de la distribución $\Sigma := \sum_{k \in Z\!\!Z^n} \delta_k$ se extiende (1.2) al resultado

Proposición 1.2. *Para f en $\mathcal{S}(I\!R^n)$ se tiene*

$$\sum_{k \in Z\!\!Z^n} f(x + k) = (2\pi)^{n/2} \sum_{k \in Z\!\!Z^n} \widehat{f}(2\pi k) e^{2\pi i k \cdot x}. \tag{1.3}$$

En el caso particular $x = 0$ se expresa (1.3) como la conocida Fórmula de Sumación de Poisson:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(k) = (2\pi)^{n/2} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \widehat{f}(2\pi k). \tag{1.4}$$

2 Teorema de Muestreo de Shannon y Convergencia Uniforme

La función **seno cardenal** dada por

$$\operatorname{senc}(x) := \prod_{x_j\neq 0} \frac{\operatorname{sen} x_j}{x_j}$$

y $\operatorname{senc} 0 := 1$ pertenece a $L^2(\mathbb{R}^n)$ y tiene por transformada de Fourier

$$\mathcal{F}(\operatorname{senc} x) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n/2} \chi_{[-1,1]^n}.$$

Donde χ_A representa la función indicadora para $A \subset \mathbb{R}^n$.

Definición 2.1. *Para f en $L^2(\mathbb{R}^n)$ se define su* **serie cardenal**, *de longitud de paso $h > 0$, mediante la expresión formal*

$$S_h f(x) := \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(hk) \operatorname{senc}\left(\tfrac{\pi}{h}(x - hk)\right). \tag{2.1}$$

Si se considera $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que $\widehat{f}$ restricta al complemento del cubo $[-\pi/h, \pi/h]^n$ sea idénticamente cero, para cualquier $h > 0$ se tiene, gracias a (1.1):

$$\widehat{f}(x) = h^n (2\pi)^{-n/2} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(hk) e^{-ihk\cdot x}. \tag{2.2}$$

Esta serie no es otra cosa que la expansión de Fourier de $\widehat{f}$, la cual converge en $L^2(\mathbb{R}^n)$. La idea del teorema de marras, presentado aquí como Teorema 2.1., es multiplicar ambos lados de la expresión (2.2) por una función fija g; luego aplicar $\mathcal{F}^{-1}$ a ambos lados, usando en el miembro de la izquierda las propiedades de la convolución. En general, se tendrían ecuaciones de la forma

$$\begin{aligned} g(x)\widehat{f}(x) &= h^n (2\pi)^{-n/2} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(hk) g(x) e^{-ihk\cdot x}, \\ \mathcal{F}^{-1}(g(x)\widehat{f}(x)) &= h^n (2\pi)^{-n/2} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(hk) \mathcal{F}^{-1}(g(x) e^{-ihk\cdot x}), \\ (\widetilde{g} * f)(x) &= h^n (2\pi)^{-n/2} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(hk) \mathcal{F}^{-1}(g(x) e^{-ihk\cdot x}). \end{aligned}$$

La importancia de esta expresión radica en el siguiente concepto: si se identifica la expresión $\mathcal{F}^{-1}(g(x)e^{-ihk\cdot x})$, la cual es independiente de f, se obtiene una función re- constructora para $\widetilde{g} * f$.

En el caso particular en que se toma $g = \chi_{[-\pi/h,\pi/h]^n}$ se obtiene

$$\widehat{f}(x) = h^n(2\pi)^{-n/2} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(hk)\chi_{\pi/h}(x)e^{-ihk\cdot x}$$

y luego

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(hk)\mathcal{F}^{-1}(h^n(2\pi)^{-n/2}\chi_{\pi/h}(x)e^{-ihk\cdot x}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(hk) \operatorname{senc}\left(\frac{\pi}{h}(x-hk)\right). \tag{2.3}$$

Definición 2.2. *Una función f en $\mathbb{R}^n$ se llama* **de banda limitada** *con longitud de banda b, o simplemente* **b-banda limitada**, *si su transformada de Fourier $\widehat{f}$ es localmente integrable e igual a cero fuera de la bola de radio b.*

Con base en esta definición, se puede reformular el desarrollo (2.3) en el siguiente teorema, debido originalmente a Shannon [6].

Teorema 2.1. *Si f es una función b-banda limitada y si $h \leq \pi/b$, se tiene*

$$\widehat{f}(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(hk)e^{-ihx\cdot k},$$

y, en consecuencia,

$$f(x) = S_hf(x) \equiv \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(hk) \operatorname{senc}\left(\tfrac{\pi}{h}(x-hk)\right),$$

con convergencia tanto en el sentido de L^2 como uniforme sobre $\mathbb{R}^n$.

Aquí la primera igualdad es simplemente la expansión de Fourier de $\widehat{f}$ y la segunda se obtiene de la primera por el razonamiento expuesto. Dicho razonamiento establece la convergencia en el sentido de L^2. Para la convergencia uniforme se tiene la siguiente proposición (en [9] se desarrolla el caso unidimensional).

Proposición 2.2. *Para el espacio de funciones $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ tales que $\widehat{f}(z) = 0$ para todo z fuera de $[-\pi,\pi]^n$, la función $\sigma(x,y)$ definida por*

$$\sigma(x,y) := \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \operatorname{senc}\pi(x-k)\operatorname{senc}\pi(y-k)$$

es un núcleo reproductor, es decir

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}}^n \sigma(x,y)f(y)\,dy.$$

Este hecho se establece con la siguiente deducción:

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n\cap[-m,m]^n} \operatorname{senc}\pi(x-k)\operatorname{senc}\pi(y-k)f(y)\,dy \\
&= \pi^{-n}\Big(\frac{\pi}{2}\Big)^{n/2} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n\cap[-m,m]^n} \operatorname{senc}\pi(x-k)\int_{[-1,1]^n} \mathcal{F}(f(\pi^{-1}(\cdot)+k))(v)\,dv \\
&= \pi^{-n}\Big(\frac{\pi}{2}\Big)^{n/2} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n\cap[-m,m]^n} \operatorname{senc}\pi(x-k)\int_{[-\pi,\pi]^n} e^{iw\cdot k}\widehat{f}(w)\,dw \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n\cap[-m,m]^n} \operatorname{senc}\pi(x-k)f(k) \longrightarrow S_1 f(x) = f(x).
\end{aligned}$$

El intercambio de serie e integral de la primera a la segunda línea se justifica gracias a que la suma es finita. Si se escribe

$$\sigma_m(x,y) := \sum_{k\in\mathbb{Z}^n\cap[-m,m]^n} \operatorname{senc}\pi(x-k)\operatorname{senc}\pi(y-k),$$

se ha mostrado que la sucesión $\{\sigma_m(x,y)\}_{m\in\mathbb{N}}$ es una sucesión delta, o lo que es lo mismo,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \sigma_m(x,y)f(y)\,dy \to f(x)$$

conforme $m\to\infty$, con convergencia en el sentido de $L^2(\mathbb{R}^n)$. El resultado de la Proposición 2.2 sigue a partir de la desigualdad de Schwarz:

$$\int_{\mathbb{R}}^n |(\sigma(x,y)-\sigma_m(x,y))f(y)|\,dy \le \|f\|_2\|\sigma(x,\cdot)-\sigma_m(x,\cdot)\|_2.$$

Con K un conjunto acotado, al tomar como sumas parciales

$$S_K f(x) := \sum_{k\in K\cap\mathbb{Z}^n} f(k)\operatorname{senc}\pi(x-k),$$

se tiene la acotación

$$|f(x)-S_K f(x)| \le \Big(\int_{\mathbb{R}}^n |\sigma(x,y)|^2\,dy\Big)^{1/2}\|f-S_K f\|_2,$$

y se obtiene la convergencia uniforme por ser

$$\int_{\mathbb{R}}^n |\sigma(x,y)|^2\,dy = \sigma(x,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \operatorname{senc}^2\pi(x-k)$$

periódica y uniformemente acotada.

Corolario 2.3. *Para el espacio de funciones $f\in L^2(\mathbb{R}^n)$ tales que $\widehat{f}(z)=0$ para todo z fuera de $[-\pi,\pi]^n$*

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}}^n \operatorname{senc}\pi(x-y)f(y)\,dy.$$

Este hecho se concluye a partir de la Proposición 2.2. y de (2.3).

3 Acotación del Error y Aproximación de la Serie Cardenal

La llamada **condición de Nyquist**, a saber, $h \leq \pi/b$, es la que garantiza la validez de la representación de f en la forma presentada en el Teorema 2.1. Para tratar de extender este resulatado basta notar que no es necesario que $\widehat{f}$ se anule fuera de un conjunto, sino que basta con que fuera de él sea pequeña en algún sentido, para tratar de aproximar la función a partir de su serie cardenal. Es así como se considera la siguiente definición.

Definición 3.1. *Una función f en $\mathbb{R}^n$ se llama* **esencialmente de banda limitada** *si su transformada de Fourier $\widehat{f}$ es localmente integrable y satisface la condición: para $\varepsilon > 0$ existe un conjunto compacto K en $\mathbb{R}^n$ tal que $\int_{\mathbb{R}^n \setminus K} |\widehat{f}(x)|\, dx \leq \varepsilon$.*

Considérese, f en $L^2(\mathbb{R}^n)$, tal que la expresión

$$g(x) := (2\pi)^{-n/2} h^n \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(hk) e^{-ihk\cdot x}, \tag{3.1}$$

a saber, el lado derecho de la fórmula de sumación de Poisson (2.2), sea convergente en $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Al calcular la transformada de Fourier de $S_h f$, se tiene

$$\mathcal{F}(S_h f)(x) = \chi_{[-\pi/h,\pi/h]^n}(x) g(x) \ = \chi_{\pi/h}(x)\, g(x);$$

por lo cual

$$\mathcal{F}(S_h f)(x) - \widehat{f}(x) = (\chi_{\pi/h}(x) - 1)\widehat{f}(x) + \chi_{\pi/h}(x) \sum_{k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} \widehat{f}(x - 2k\pi/h),$$

y así, mediante la transformada inversa de Fourier

$$\begin{aligned} S_h f(x) - f(x) \quad = \quad & (2\pi)^{-n/2} \textstyle\int_{\mathbb{R}^n \setminus [-\pi/h,\pi/h]^n} -\widehat{f}(y) e^{-ix\cdot y}\, dy \\ & + (2\pi)^{-n/2} \textstyle\int_{[-\pi/h,\pi/h]^n} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} \widehat{f}(y - 2k\pi/h) e^{-ix\cdot y}\, dy. \end{aligned} \tag{3.2}$$

La segunda integral puede escribirse en la forma (ver [5])

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus [-\pi/h,\pi/h]^n} K(x,u) \widehat{f}(u)\, du,$$

donde $K(x,u) := \exp(-ix \cdot (u + 2k\pi/h))$ si $u \in [-\pi/h, \pi/h]^n - 2k\pi/h$. Como $|K(x,u)| \leq 1$, se tiene que

$$\left| (2\pi)^{-n/2} \int_{[-\pi/h,\pi/h]^n} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} \widehat{f}(y - 2k\pi/h) e^{-ix\cdot y}\, dy \right| \leq (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n \setminus [-\pi/h,\pi/h]^n} |\widehat{f}(x)|\, dx.$$

Evidentemente, la primera integral de la expresión (3.2) satisface la misma cota. Se ha obtenido así el siguiente resultado.

Teorema 3.1 Para f en $L^2(\mathbb{R}^n)$, vale

$$|S_h f - f| \leq 2(2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n \setminus [-\pi/h, \pi/h]^n} |\widehat{f}(x)|\, dx.$$

Es importante notar que la condición $h \leq \pi/b$ no fue requerida; así pues, se tiene abierto el portillo para estudiar el caso $h > \pi/b$. La importancia de este análisis radica en la siguiente observación: siempre que

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus [-\pi/h, \pi/h]^n} |\widehat{f}(x)|\, dx \leq \varepsilon, \quad \text{se tiene} \quad |S_h f - f| \leq 2(2\pi)^{-n/2}\varepsilon.$$

Hasta este punto se ha concluido que la serie cardenal recupera la función si es de banda limitada, o bien, se ha acotado el error que se comete al aproximar la función en el caso de ser esencialmente de banda limitada. Por lo cual, lo realmente interesante aquí es aproximar $S_h f$ mediante una suma finita. En este sentido va el proximo aporte.

Definición 3.2. *Sea K una parte de $\mathbb{R}^n$. Se considera para f la suma*

$$S_{h,K} f(x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}^n \cap K} f(hk) \operatorname{senc}\left(\tfrac{\pi}{h}(x - hk)\right).$$

Evidentemente, si $\operatorname{sop} f \subset hK$ se tiene que $S_{h,K} f = S_h f$. Es importante notar que una función de soporte compacto no puede ser de banda limitada sin ser cero en todo $\mathbb{R}^n$, por los teoremas de Paley y Wiener (ver [7] para algunas de sus versiones). En caso contrario, $S_{h,K} f + S_{h,K^c} f = S_h f$; esto no representa un reordenamiento que altere la convergencia de la serie pues una de las sumas es finita siempre que K o su complemento K^c sea acotado.

Aquí

$$|S_{h,K^c} f(x)| = \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}^n \setminus K} f(hk) \operatorname{senc}\left(\tfrac{\pi}{h}(x - hk)\right) \right|,$$

$$|S_h f(x) - S_{h,K} f(x)| \leq \left(\frac{h}{\pi}\right)^n \sum_{k \in \mathbb{Z}^n \setminus K} |f(hk)| \frac{1}{|x - hk|^n}, \tag{3.3}$$

donde $|x - hk|^n := |(x_1 - hk_1) \ldots (x_n - hk_n)|$. Por ejemplo, para $n = 1$ se tiene, con $K \subset \mathbb{Z}$,

$$|S_h f(t) - S_{h,K} f(t)| \leq \frac{h}{\pi} \sum_{k \notin K} \frac{|f(hk)|}{|t - hk|}.$$

Es necesario exigir una condición sobre f que garantice la convergencia de esta última serie. Se obtiene el siguiente resultado (ver [8]).

Teorema 3.2. *Sea f una función definida en $\mathbb{R}^n$ tal que la serie*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \frac{|f(hk)|}{|x - hk|^n}$$

sea uniformemente convergente. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$, existe K_ε compacto en $\mathbb{R}^n$ que satisface, para todo $x \in \mathbb{R}^n$,

$$|S_h f(x) - S_{h,K_\varepsilon} f(x)| < \varepsilon.$$

La demostración es inmediata de la convergencia uniforme y de (3.3).

4 Extensiones de la Fórmula de Sumación y de los Teoremas de Muestreo y Reconstrucción

Si se denota también por H la transformación lineal invertible asociada a la matriz $H(n\times n)$ en la base canónica de $\mathbb{R}^n$, y si se toma g en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, entonces la función $g\circ H$ pertenece a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y para esta función se tiene

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\mathcal{F}(g\circ H)(z-2k\pi)=(2\pi)^{-n/2}\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}g(Hk)e^{-ik\cdot z}.$$

Por otra parte,

$$\mathcal{F}(g\circ H)(x)=\frac{1}{|\det H|}\widehat{g}((H^{-1})^Tx).$$

Así se establece, mediante el cambio $H^Tx=z$, una versión más general de la Fórmula de sumación de Poisson.

Teorema 4.1. *Para H una matriz invertible $n\times n$ y para g en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, se tiene*

$$(2\pi)^{-n/2}|\det H|\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}g(Hk)e^{-iHk\cdot z}=\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\widehat{g}(z-2\pi(H^{-1})^Tk).$$

En Faridani [1], se propone el desarrollo del siguiente ejemplo: considérese f función de variable real con transformada de Fourier de soporte en $K=[-\pi,\pi)$. Para $h\neq 0$, los conjuntos $K+2\pi(h^{-1})k=K+2k\pi/h$, con $k\in\mathbb{Z}$, son mutuamente disjuntos para $|h|\leq 1$.

Al tomar $h=2$, los conjuntos $K\pm 2\pi/h=K\pm\pi$ tienen intersección con K, y lo descomponen en los intervalos $K_1=[-\pi,0)$ y $K_2=[0,\pi)$. Nótese que para todo x en $[-\pi,0)$ se tiene que $x-k\pi\in[-\pi,\pi)$ *si y solo si* $k\in\{0,-1\}$ y para x en $[0,\pi)$ se tiene que $x-k\pi\in[-\pi,\pi)$ *si y solamente si* $k\in\{0,1\}$.

Para α arbitrario en $(0,2)$, se resuelven las ecuaciones:

$$\beta_1^1+\beta_2^1=1;\quad \beta_1^1+\beta_2^1e^{i\pi\alpha}=0;\quad \beta_1^2+\beta_2^2=1;\quad \beta_1^2+\beta_2^2e^{-i\pi\alpha}=0,$$

para obtener

$$\beta_1^1=\beta_2^2=\bar{\beta}_1^2=\bar{\beta}_2^1=(1-e^{-i\pi\alpha})^{-1}=\frac{1}{2}\left(1-i\frac{\operatorname{sen}\pi\alpha}{1-\cos\pi\alpha}\right).$$

Así, al aplicar el Teorema 4.2 (que se expondrá a continuación) para el caso en que $m_1=m_2=m=L=2$, se tiene, para $\alpha_1=0$, $\alpha_2=\alpha$, $\{k_{11},k_{12}\}=\{0,-1\}$ y $\{k_{21},k_{22}\}=\{0,1\}$:

$$\begin{aligned}f(x)&=\sum_{r=1}^{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}f(\alpha_r+hk)g_r(x-\alpha_r-hk)\\&=\sum_{r=1}^{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{l=1}^{2}f(\alpha_r+hk)(2\pi)^{-1/2}|h|\beta_r^l\,\widehat{\chi}_{K_l}(-x+\alpha_r+hk)\end{aligned}$$

$$= \frac{|h|}{2}\sum_{r=1}^{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(\alpha_r+hk)\,\mathrm{senc}(\tfrac{\pi}{2}(-x+\alpha_r+hk))$$
$$\times\left(\cos(\tfrac{\pi}{2}(-x+\alpha_r+hk))+\mathrm{sen}(\tfrac{\pi}{2}(-x+\alpha_r+hk))\frac{\mathrm{sen}\,\pi\alpha_2}{1-\cos\pi\alpha_2}\right).$$

Gracias a la arbitrariedad de α, se permite cierto grado de libertad al elegir los puntos donde se muestrea la función f.

Se pretende producir un teorema de muestreo para una función cuya transformada de Fourier está soportada sobre una unión finita de compactos disjuntos $K=\cup_{l=1}^{L}K_l$. En el teorema de Petersen y Middleton sobre muestreo, se expresa una función f en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ con sop $\widehat{f}\subset K$ como

$$f(x)=(2\pi)^{-n/2}|\det H|\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\widehat{\chi}_K(-x+Hk)f(Hk), \tag{4.1}$$

donde H es un matriz invertible $n\times n$ tal que los conjuntos $K+2\pi(H^{-1})^T k$, con k en $\mathbb{Z}^n$, sean disjuntos. El lado derecho de (4.1) es una versión de la "serie cardenal" la cual tiene por función reconstructora $\widehat{\chi}_K$. Faridani presenta este resultado como un caso particular de:

Teorema 4.2. *Para $l=1,2,\dots,L$, sean $K_l\subset\mathbb{R}^n$ conjuntos acotados medibles y disjuntos, póngase $K:=\bigcup_{l=1}^{L}K_l$ y sea H una matriz invertible, real, $n\times n$ tal que para cada $l\in\{1,\dots,L\}$ existe $M_l\subset\mathbb{Z}^n$, $M_l=\{0=k_{l1},\dots,k_{lm_l}\}$ con $1\le m_l<\infty$ con la siguiente propiedad: para todo $z\in K_l$ y $k\in\mathbb{Z}^n$, $z-2\pi(H^{-1})^T k$ pertenece a K si y solo si $k\in M_l$.*

Sea $m:=\max\{m_1,\dots,m_L\}$ y sean $\alpha_1,\dots,\alpha_m$ en $\mathbb{R}^n$ tales que existen $\beta_r^l\in\mathcal{C}^n$ para $r=1,\dots,m$, $l=1,\dots,L$ que satisfacen las ecuaciones:

$$\sum_{r=1}^{m}\beta_r^l=1,$$

$$\sum_{r=1}^{m}\beta_r^l\,e^{-2\pi i(H^{-1}\alpha_r)\cdot k_{lj}}=0 \qquad \text{para}\quad j=2,\dots,m_l. \tag{4.2}$$

Para f en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ con $\mathrm{sop}(\widehat{f}\,)\subset K$, vale

$$f(x)=(2\pi)^{-n/2}|\det H|\sum_{r=1}^{m}\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}f(\alpha_r+Hk)\sum_{l=1}^{L}\beta_r^l\,\widehat{\chi}_{K_l}(-x+\alpha_r+Hk). \tag{4.3}$$

La expresión (4.3) es una versión de la "serie cardenal", la cual se utiliza para funciones con transformada de Fourier soportada en compactos $K_1,\cdots,K_L$ y tiene por función reconstructora $\sum_{l=1}^{L}\beta_r^l\,\widehat{\chi}_{K_l}(-x+\alpha_r+Hk)$. El núcleo de la prueba se encuentra en el cálculo de la transformada de Fourier de la expresión a la derecha de (4.3), dicha transformada se expresa como

$$\begin{aligned}
&\sum_{r=1}^{m}\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(\alpha_r+Hk)(2\pi)^{-n/2}|\det H|\sum_{l=1}^{L}\beta_r^l\,\chi_{k_l}(z)e^{-iz\cdot(\alpha_r+Hk)}\\
&=\sum_{r=1}^{m}\sum_{l=1}^{L}\beta_r^l\,\chi_{K_l}\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\widehat{f}(z-2\pi(H^{-1})^Tk)e^{-2i\pi k\cdot H^{-1}\alpha_r}\\
&=\sum_{r=1}^{m}\sum_{l=1}^{L}\beta_r^l\,\chi_{K_l}\sum_{j=1}^{m_l}\widehat{f}(z-2\pi(H^{-1})^Tk_{lj})e^{-2i\pi k_{lj}\cdot H^{-1}\alpha_r}\\
&=\sum_{l=1}^{L}\chi_{K_l}\widehat{f}(z)=\widehat{f}(z),
\end{aligned}$$

al usar las identidades (4.2).

Se pretende ahora estudiar la fórmula de sumación para funciones que son periódicas en algunas de sus variables, y a partir de allí obtener una versión del teorema de muestreo para cilindros toroidales $\mathcal{T}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2}$. En el presente apartado se consideran funciones sobre el grupo de Lie $\mathcal{T}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2}$ donde $\mathcal{T}$ es el grupo $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ (es decir, el círculo o toro unidimensional). Se asume $[-\pi,\pi)$ como un modelo para $\mathcal{T}$ y su medida de Lebesgue es la restricción de la medida de Lebesgue de $\mathbb{R}$ a $[-\pi,\pi)$.

Definición 4.1 *Se denota por $\mathcal{L}(n_1,n_2)$ el espacio de funciones de $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$ en $\mathcal{C}$, que pertenecen a $L^1(\mathbb{R}^{n_2})$ con los primeros n_1 argumentos fijos y a $C^\infty(\mathbb{R}^{n_1})$ y son 2π periódicas con los últimos n_2 argumentos fijos. Si $x\in\mathbb{R}^{n_1}$, $y\in\mathbb{R}^{n_2}$, se escribe $(x,y)\in\mathbb{R}^{n_1+n_2}$; entonces $f\in\mathcal{L}(n_1,n_2)$ si y solo si:*

(a) $f(x,\cdot)\in L^1(\mathbb{R}^{n_2})$ para cada $x\in\mathbb{R}^{n_1}$;

(b) $f(\cdot,y)\in C^\infty(\mathbb{R}^{n_1})$ para cada $y\in\mathbb{R}^{n_2}$;

(c) $f(x+2\pi k,y)=f(x,y)$ si $k\in\mathbb{Z}^{n_1}$.

Para este espacio la transformada de Fourier adquiere la forma

$$\widehat{f}(x,y):=(2\pi)^{-(n_1+n_2)/2}\int_{\mathbb{R}^{n_2}}\int_{\mathcal{T}^{n_1}} f(u,v)e^{-ix\cdot u}e^{-iy\cdot v}\,dv\,du$$

donde $(x,y)\in\mathbb{Z}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2}$ y $(u,v)\in\mathcal{T}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2}$.

En [1] se aprecia la secuencia de pasar de una representación para f en términos de una versión de la “expansión de Fourier”, a una versión de la “fórmula de sumación” y de allí, a un “teorema de muestreo”. El primer paso es obtener el siguiente resultado:

Lema 4.3. *Si H es una matriz invertible $n\times n$ y si $g\in C(\mathbb{R}^n)$ cumple $g(x+Hk)\equiv g(x)$ para todo $k\in\mathbb{Z}^n$, se tiene que*

$$g(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\widehat{g}_k\,e^{2\pi ik\cdot H^{-1}x}$$

con

$$\widehat{g}_k = \int_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^n} g(Hx)e^{-2\pi ik\cdot x}\,dx = |\det H|^{-1}\int_{H([-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^n)} g(x)\,e^{-2\pi ik\cdot H^{-1}x}\,dx. \tag{4.4}$$

A partir de aquí, si se define

Definición 4.2. *Una matriz invertible H de orden $(n_1+n_2)\times(n_1+n_2)$ se llama una* **matriz factible** (n_1,n_2) *si existe otra matriz de enteros J de orden $(n_1+n_2)\times n_1$ tal que*

$$HJ = \begin{pmatrix} 2\pi I_{n_1} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Para $A(n_1,n_2) := \{k \in \mathbb{Z}^{n_1+n_2} : Hk \in \mathcal{T}^{n_1}\times \mathbb{R}^{n_2}\}$. Se tiene una versión de la fórmula de Sumación de Poisson para $\mathcal{T}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2}$ en la siguiente forma (ver Kruse [4]).

Teorema 4.4. *Sean H una matriz factible (n_1,n_2) y sea f en $\mathcal{L}(n_1,n_2)$ tal que las series*

$$g(x) := \sum_{k\in A(n_1,n_2)} f(x+Hk)$$

convergen absolutamente para todo x. Entonces

$$|\det H| \sum_{k\in A(n_1,n_2)} f(Hk) = (2\pi)^{(n_1+n_2)/2}\sum_{k\in\mathbb{Z}^{n_1+n_2}} \widehat{f}(2\pi(H^{-1})^T k). \tag{4.5}$$

Para ver la prueba primero deben notarse las siguientes identidades, con $n := n_1+n_2$ por comodidad.

$$g(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \widehat{g}_k\, e^{2\pi ik\cdot H^{-1}x},$$

donde

$$\begin{aligned}\widehat{g}_k &= |\det H|^{-1}\sum_{l\in A(n_1,n_2)}\int_{H([-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^n)-Hl} f(y)\,e^{-2\pi ik\cdot H^{-1}(y-Hl)}\,dy \\ &= |\det H|^{-1}\int_{\mathcal{T}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2}} f(x)\,e^{-2\pi i(H^{-1})^T k\cdot x}\,dx.\end{aligned}$$

Esta deducción establece la identidad:

$$|\det H| \sum_{k\in A(n_1,n_2)} f(x+Hk) = (2\pi)^{n/2}\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\widehat{f}(2\pi(H^{-1})^T k)e^{2\pi ik\cdot H^{-1}x}. \tag{4.6}$$

La fórmula de sumación (4.5) se obtiene al tomar $x=0$ en (4.6).

Con el fin de obtener un teorema de muestreo se considera:

Definición 4.3. *El espacio $\mathcal{S}(n_1,n_2)$ formado por las funciones C^∞ sobre $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$ que son 2π periódicas en los primeros n_2 argumentos y de clase de Schwartz en los últimos n_2 argumentos. Es decir, $f\in\mathcal{S}(n_1,n_2)$ si y solo si:*

(a) $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{n_1+n_2})$;

(b) $f(x,\cdot) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n_2})$ para cada $x \in \mathbb{R}^{n_1}$;

(c) $f(x+2\pi k, y) = f(x,y)$ si $k \in \mathbb{Z}^{n_1}$.

Nótese que $\mathcal{S}(n_1,n_2)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{L}(n_1,n_2)$; entonces cada f en $\mathcal{S}(n_1,n_2)$ tiene definida su transformada de Fourier $\widehat{f}\colon \mathbb{Z}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \to \mathcal{C}$.

La transformada inversa de Fourier es dada, en este caso, para una función $g\colon \mathbb{Z}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \to \mathcal{C}$ por

$$\widetilde{g}(u,v) := (2\pi)^{-(n_1+n_2)/2} \int_{\mathbb{R}^{n_2}} \sum_{x\in\mathbb{Z}^{n_1}} g(x,y)\, e^{ix\cdot u} e^{iy\cdot v}\, dy.$$

Obsérvese que la medida en $\mathbb{Z}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$ es la medida producto de la medida discreta en $\mathbb{Z}^{n_1}$ y la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^{n_2}$.

Teorema 4.5. *Sea $K = \bigcup_{l=1}^{L} K_l \subset \mathbb{Z}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$, donde los conjuntos $K_1,\dots,K_L$ son disjuntos, acotados y medibles. Sea H una matriz factible (n_1,n_2) que cumple las hipótesis del Teorema 4.2., para $n = n_1+n_2$. Para $f \in \mathcal{S}(n_1,n_2)$, escríbase*

$$S_H f(x) := (2\pi)^{-n/2} |\det H| \sum_{r=1}^{m} \sum_{k\in A(n_1,n_2)} f(\alpha_r + Hk) \sum_{l=1}^{L} \beta_r^l\, \widetilde{\chi}_{K_l}(x-\alpha_r-Hk). \tag{4.7}$$

Entonces, si $f \in \mathcal{S}(n_1,n_2)$ con $\operatorname{sop}\widehat{f}$ contenido en K, se tiene

$$S_H f(x) = f(x). \tag{4.8}$$

La prueba del Teorema 4.5 sigue por repetir los pasos de la prueba del Teorema 4.2. Como una generalización del Teorema 4.3. se tiene el resultado siguiente.

Teorema 4.6 *Sean $K = \bigcup_{l=1}^{L} K_l$, y sea H una matriz factible (n_1,n_2) según las hipótesis del Teorema 4.5. Para $f \in \mathcal{S}(n_1,n_2)$, sea $S_H f$ la "serie cardenal" definido por (4.7). Entonces, si $n = n_1+n_2$, se tiene*

$$\begin{aligned} |S_H f(x) - f(x)| &\le (2\pi)^{-n/2} \textstyle\int_{\mathbb{Z}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2}} |\mathcal{F}(S_H f)(z) - \widehat{f}(z)|\, dz \\ &\le (2\pi)^{-n/2} (1+\beta) \textstyle\int_{\mathbb{Z}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2}\setminus K} |\widehat{f}(z)|\, dz, \end{aligned} \tag{4.9}$$

con $\beta := m \max_{1\le l\le L} \sum_{r=1}^{m} |\beta_r^l|$.

Este resultado es útil porque determina la proximidad de $S_H f$ a f para funciones que son de tipo *esencialmente de banda limitada* en este espacio.

Conclusión

Sea la función f de banda limitada o esencialmente de banda limitada, es posible, exigiendo que sean uniformemente convergentes las series

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \frac{|f(hk)|}{|x-hk|^n},$$

acotar la diferencia $|S_h f - S_{h,K_\varepsilon} f|$ y así, a partir de una suma finita aproximar, los valores de f tan solo con una cantidad finita de sus valores, a saber sus valores sobre $K_\varepsilon \cap h\mathbb{Z}^n$.

Además de esto se ha expuesto el camino a seguir para reconstruir funciones de tipo banda limitada en diferentes espacios, haciendo uso de las Fórmulas de Sumación de Poisson, y se ha acotado el error cometido al estudiar funciones de tipo esencialmente de banda limitada.

Como una especie de pequeño anexo, se llama la atención sobre el siguiente resultado. Si se define una función en $L^2(\mathbb{R}^n)$ como de tipo **casi** $b-$**banda limitada** si su transformada de Fourier es igual a cero c.p.d. fuera de la bola de radio b. Natterer, en [5], prueba que fuera de los conjuntos $K(\phi, b) := \{ (\nu, s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R} : |s| < b,\ |\nu| < \max(\phi^{-1}|s|, (\phi^{-1} - 1)b) \}$ una función f en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ satisface para $0 < \phi < 1$ y su transformada de Radon $\|\mathcal{R}f\|_\infty \leq \varepsilon$, donde ε es una constante sobre la que se tiene control. Al aplicar las técnicas expuestas se obtiene en [1] una versión del Teorema 4.6.

$$|S_H \mathcal{R}f(\theta, s) - \mathcal{R}f(\theta, s)| \leq \frac{1+\beta}{2\pi}\,\varepsilon.$$

Referencias

[1] Faridani, A. (1990) "An application of a multidimensional sampling theorem to computed tomography", *Contemp. Math.*, 113: 65–79.

[2] Shannon, C. E. (1949) "Communication in the presence of noise", *Proc. IRE*, 37: 10–21.

[3] Jerri, A. J. (1977) "The Shannon sampling theorem, its various extensions and applications: a tutorial review", *Proc. IEEE* 65: 1565–1597.

[4] Kruse, H. (1989) "Resolution of reconstruction methods in computerized tomography", *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 10: 447–474.

[5] Natterer, F. (1986) *The Mathematics of Computerized Tomography*, John Wiley & Sons, New York.

[6] Shannon, C. E. (1949) "Communication in the presence of noise" *Proc. IRE*, 37: 10–21.

[7] Smith, K. T.; Solmon, D. C.; Wagner, S. L. (1977) "Practical and mathematical aspects of the problem of reconstructing objects from radiographs", *Bull. Amer. Math. Soc.*, 83: 1227–1270.

[8] Ugalde, W. J. (1995) *La Fórmula de Sumación de Poisson y su Aplicación a los Teoremas de Muestreo y Reconstrucción*. Tesis de Licenciatura, Universidad Costa Rica.

[9] Walter, G. G. (1994) "Wavelets and other Orthogonal Systems with Applications", manuscrito en prensa.