УДК 519.21 https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/2.10

І. В. Самойленко[1], *д.ф.-м.н., доцент*
Т. А. Самойленко[2], *к.ф.-м.н.*
Б. В. Довгай[3], *к.ф.-м.н., доцент*

Випадкові еволюції в схемі пуассонової апроксимації

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т. Глушкова 4г,
e-mail: isamoil@i.ua
[2] Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського", 03056, м. Київ, пр-т Перемоги, 37,
e-mail: tsamoil@i.ua
[3] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т. Глушкова 4г,
e-mail: bogdov@gmail.com

I. V. Samoilenko[1], *PhD, Habil.*
T. A. Samoilenko[2], *PhD*
B. V. Dovgai[3], *PhD*

Random evolutions in Poisson approximation scheme

[1]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 83000, Kyiv, 4g Glushkova str.,
e-mail: isamoil@i.ua
[2]National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", 03056, Kyiv, 37 Prosp. Peremohy,
e-mail: tsamoil@i.ua
[3]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 83000, Kyiv, 4g Glushkova str.,
e-mail: bogdov@gmail.com

Операторний підхід при дослідженні випадкових еволюцій дозволяє отримувати наступні результати у схемі пуассонової апроксимації: функціональні граничні теореми на зростаючих інтерваліах часу та розв'язок проблеми великих відхилень. Ми зосередимось на останній задачі.

Специфіка асимптотичного аналізу у схемі пуассонової апроксимації обумовлена тим, що значення стрибків стохастичної системи поділяються на дві частини: малі стрибки, що відбуваються з імовірностями, близькими до одиниці, і великі стрибки, що відбуваються з імовірностями які прагнуть до нуля разом з малим параметром серії $\varepsilon \to 0$.

Результати дослідження доповідались на Міжнародній науковій конференції "Modern Stochastics: Theory and Applications. V" (MSTA-V).

Ключові слова: Випадкові еволюції, пуассонівська апроксимація, проблема великих відхилень.

The operator approach in the study of random evolutions allows us to obtain the following results in the Poisson approximation scheme: functional limit theorems at increasing time intervals and the solution of the large deviations problem. We will focus on the last task.

To solve the problem, asymptotic analysis of nonlinear generators of random evolutions with Markov switching should be conducted in the series scheme. The specifics of asymptotic analysis is conditioned by the fact that the jump values of the stochastic system are split into two parts: a small jump taking values with probabilities close to one and a big jump taken values with probabilities tending to zero together with the series parameter $\varepsilon \to 0$. *So, in the Poisson approximation principle the probabilities (or intensities) of jumps are normalized by the series parameter* $\varepsilon > 0$.

Having the limit nonlinear generator, we are able to construct the rate functional to solve the large deviations problem.

Key Words: Random evolutions, Poisson approximation scheme, large deviations problem.

Під терміном *пуассонова апроксимація* треба розуміти схему, подібну до схеми усереднення чи дифузійної апроксимації, яка дозволяє вивчати граничну поведінку випадкових процесів на зростаючих інтервалах часу. Таким чином, це не є класична задача наближення випадкового процесу за допомогою пуассонових процесів.

Основна ідея пуассонової апроксимації (див. [5]) полягає у тому, що малим параметром серії нормуються імовірності (або інтенсивності) цих стрибків. Таким чином, стрибки розділені на два типи: малі стрибки з імовірностями, близькими до одиниці, та великі стрибки, які відбуваються з імовірністю, що прямує до 0 разом з малим параметром серії $\varepsilon \to 0$.

Приклад 1. Наведемо простий приклад випадкової величини з подібними властивостями. Нехай для α:

$$P\{\alpha = b\} = \varepsilon^2 p,$$

$$P\{\alpha = \varepsilon a_1 + \varepsilon^2 b_1\} = 1 - \varepsilon^2 p.$$

Тоді маємо:

$$\mathbf{E}\alpha = \varepsilon a_1 + \varepsilon^2(bp + b_1) + o(\varepsilon^2),$$

$$\mathbf{E}\alpha^2 = \varepsilon^2(b^2 p + a_1^2) + o(\varepsilon^2).$$

Ці моментні умови характеризують апроксимацію Леві.

У випадку коли $a_1 = 0$, матимемо

$$\mathbf{E}\alpha = \varepsilon^2(bp + b_1) + o(\varepsilon^2),$$

$$\mathbf{E}\alpha^2 = \varepsilon^2 b^2 p + o(\varepsilon^2),$$

і тому, поклавши $\widetilde{\varepsilon} = \varepsilon^2$ отримаємо моментні умови, що характеризують пуассонову апроксимацію, яку і розглянемо далі задля спрощення викладок:

$$\mathbf{E}\alpha = \widetilde{\varepsilon}(bp + b_1) + o(\widetilde{\varepsilon}),$$

$$\mathbf{E}\alpha^2 = \widetilde{\varepsilon} b^2 p + o(\widetilde{\varepsilon}).$$

При дослідженні процесів з незалежними приростами моментні умови накладаються на відповідне ядро інтенсивності, нормоване малим параметром серії.

Нехай $C_3(\mathbf{R}^d)$ є класом функцій, що визначає міру та включає в себе дійснозначні обмежені функції, такі що $g(u)/|u|^2 \to 0$, при $|u| \to 0$ якщо $g \in C_3(\mathbf{R}^d)$ ([4, 5]).

Розглянемо сім'ю нормованих марковських процесів з траєкторіями в $D_{\mathbf{R}}[0, \infty)$ та незалежними приростами в схемі серій з малим параметром серії $\varepsilon \to 0, \varepsilon > 0$:

$$\eta_\varepsilon(t) = \eta(t/\varepsilon), t \geqslant 0,$$

що визначаються генераторами

$$\widetilde{\mathbf{\Gamma}}^\varepsilon \varphi(u) = \varepsilon^{-1} \int_{\mathbf{R}} [\varphi(u+v) - \varphi(u)] \widetilde{\Gamma}^\varepsilon(dv).$$

Нехай виконуються умови пуассонової апроксимації:

C1: *Пуассонова апроксимація.*

PA1 Апроксимация середніх:

$$b_\varepsilon = \int_{\mathbf{R}} v \widetilde{\Gamma}^\varepsilon(dv) = \varepsilon[b + \theta_b^\varepsilon],$$

та

$$c_\varepsilon = \int_{\mathbf{R}} v^2 \widetilde{\Gamma}^\varepsilon(dv) = \varepsilon[c + \theta_c^\varepsilon],$$

де

$$b < +\infty, c < +\infty.$$

PA2 Для ядра інтенсивностей має місце асимптотичне представлення

$$\widetilde{\Gamma}_g^\varepsilon = \int_{\mathbf{R}} g(v) \widetilde{\Gamma}^\varepsilon(dv) = \varepsilon[\widetilde{\Gamma}_g + \theta_g^\varepsilon]$$

для всіх $g \in C_3(\mathbf{R})$ - класу функцій, що визначає міру (див. [4]).
Ядро $\widetilde{\Gamma}^0(dv)$ задано на класі функцій, що визначає міру $C_3(\mathbf{R})$ співвідношенням

$$\widetilde{\Gamma}_g = \int_{\mathbf{R}} g(v) \widetilde{\Gamma}^0(dv), \quad g \in C_3(\mathbf{R}).$$

Знехтувально малі доданки $\theta_b^\varepsilon, \theta_c^\varepsilon, \theta_g^\varepsilon$ задовольняють умову

$$|\theta_\cdot^\varepsilon| \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

PA3 Має місце співвідношення

$$c := \int_{\mathbf{R}} v^2 \widetilde{\Gamma}^0(dv),$$

що зумовлює відсутність дифузійної складової в граничному генераторі.

C2: *Рівномірна квадратична інтегровність*:

$$\lim_{c \to \infty} \int_{|v|>c} v^2 \widetilde{\Gamma}^0(dv) = 0.$$

Лема 1. *Генератор процесу з незалежними приростами*

$$\widetilde{\mathbf{\Gamma}}^\varepsilon \varphi(u) = \varepsilon^{-1} \int_{\mathbf{R}} [\varphi(u+v) - \varphi(u)] \widetilde{\Gamma}^\varepsilon(dv)$$

в схемі пуассонової апроксимації має наступне асимптотичне представлення:

$$\widetilde{\mathbf{\Gamma}}^\varepsilon \varphi(u) = b\varphi'(u) + \int_{\mathbf{R}} [\varphi(u+v) - \varphi(u) - v\varphi'(u)] \widetilde{\Gamma}^0(dv)$$

$$+\theta^\varepsilon \varphi,$$

де $|\theta^\varepsilon \varphi| \to 0, \varepsilon \to 0, \varepsilon > 0.$

Доведення. Перепишемо вираз для генератора наступним чином:

$$\widetilde{\mathbf{\Gamma}}^{\varepsilon}\varphi(u)=\varepsilon^{-1}\int_{\mathbf{R}}[\varphi(u+v)-\varphi(u)-v\varphi'(u)$$

$$-\frac{v^2}{2}\varphi''(u)]\widetilde{\Gamma}^{\varepsilon}(dv)+\varepsilon^{-1}\int_{\mathbf{R}}v\varphi'(u)\widetilde{\Gamma}^{\varepsilon}(dv)$$

$$+\frac{\varepsilon^{-1}}{2}\int_{\mathbf{R}}v^2\varphi'(u)\widetilde{\Gamma}^{\varepsilon}(dv).$$

Легко бачити, що функція $\psi_u(v)=\varphi(u+v)-\varphi(u)-v\varphi'(u)-\frac{v^2}{2}\varphi''(u)$ належить класу $C_3(\mathbf{R})$. Дійсно,

$$\psi_u(v)/v^2\to 0, v\to 0$$

рівномірно по u за умови обмеженості похідних функції $\varphi(u)$ на компакті. Крім того, ця функція неперервна і обмежена для $\varphi(u)\in C_0^2(\mathbf{R})$ за умови **PA1**.

Таким чином, з умов **PA1,PA2** маємо:

$$\widetilde{\mathbf{\Gamma}}^{\varepsilon}\varphi(u)=\int_{\mathbf{R}}[\varphi(u+v)-\varphi(u)-v\varphi'(u)$$

$$-\frac{v^2}{2}\varphi''(u)]\widetilde{\Gamma}^{0}(dv)+b\varphi'(u)+\frac{c}{2}\varphi''(u)+\theta_b^{\varepsilon}\varphi$$

$$+\theta_c^{\varepsilon}\varphi+\theta_{\psi}^{\varepsilon}\varphi.$$

Застосовуючи умову **PA3** остаточно отримаємо асимптотичне представлення:

$$\widetilde{\mathbf{\Gamma}}^{\varepsilon}\varphi(u)=b\varphi'(u)+\int_{\mathbf{R}}[\varphi(u+v)$$

$$-\varphi(u)-v\varphi'(u)]\widetilde{\Gamma}^{0}(dv)+\theta^{\varepsilon}\varphi.$$

Лему доведено.

Розв'язок проблеми великих відхилень із використанням нелінійного експоненційного генератора, як правило, реалізується в 4 етапи [3]:

(1) *Обчислення граничного експоненційного (нелінійного) генератора* $\mathbf{H}$*, що визначає великі відхилення.*

(2) *Визначення експоненційної компактності сім'ї допграничних процесів.*

(3) *Визначення принципу порівняння для граничного генератора.*

(4) *Обчислення варіаційного представлення функціоналу дії.*

На третьому етапі даної програми доводиться єдиність розв'язку рівняння

$$(I-\alpha\mathbf{H})f=h,\alpha>0$$

для достатньо широкого класу функцій h. Наслідком цього факту є збіжність нелінійних напівгруп H_t^{ε}, що зумовлює принцип великих відхилень для скінченновимірних розподілів допграничних процесів, а за умови експоненційної компактності сім'ї допграничних процесів і принцип великих відхилень у просторі $D_E[0,\infty)$.

Етапи (2) – (4) для експоненційного генератора, що відповідають процесам які описано в статті, реалізовано в монографії [3]. А саме, питання експоненційної компактності для процесів з незалежними приростами розглянуто в Прикладах 1.5, 4.23 та в пп. 10.1.2 та 10.3.2; перевірка принципу порівняння для граничного експоненційного генератора вигляду $\widehat{\mathbf{H}}^0\varphi(u)=\mathbf{H}^0(\varphi'(u))$ проведена в пп. 10.1.3 із застосуванням Леми 9.15; варіаційне представлення граничного експоненційного генератора проведено в пп. 10.1.5 на с.200 із застосуванням Теореми 8.14.

Зауважимо також, що інтерпретація нелінійної напівгрупи як напівгрупи Нісіо та її зв'язок із задачею керування дозволяє будувати функціонал дії у найбільш зручному для дослідження вигляді (див. Приклад 2 нижче).

Розглянемо марковський процес $x(t),t\geqslant 0$, на стандартному фазовому просторі $(E,\mathcal{E})$. Нехай відповідний генератор $\mathbf{L}$ має щільну область визначення $\mathcal{D}(\mathbf{L})\subseteq\mathcal{B}_E$, яка містить неперервні разом зі своїми похідними функції. Тут $\mathcal{B}_E$ - банахів простір дійснозначних обмежених тест-функцій $\varphi(x)\in E$, з нормою: $\|\varphi\|:=\sup_{x\in E}|\varphi(x)|$.

Позначимо також через $C_b(E)$ простір неперервних функцій, що належать $\mathcal{B}_E$. Класична лінійна напівгрупа процесу $x(t),t\geqslant 0$ задається як

$$L_t\varphi(u):=E[\varphi(x(t))|x(0)=u],$$

а нелінійна напівгрупа:

$$H_t\varphi(u):=\ln E[e^{\varphi(x(t))}|x(0)=u],$$

або

$$H_t\varphi(u)=\ln L_t e^{\varphi(u)}. \tag{1}$$

Це дійсно напівгрупа, бо маємо:

$$H_{t+s}\varphi(u)=\ln L_{t+s}e^{\varphi(u)}=\ln L_tL_se^{\varphi(u)}$$

$$=\ln L_te^{\ln L_se^{\varphi(u)}}=\ln L_te^{H_s\varphi(u)}=H_tH_s\varphi(u).$$

Доведемо наступний результат, який використовується без доведення, зокрема в [3].

Лема 2. *Нелінійний експоненційний генератор, що відповідає напівгрупі (1) має вигляд:*

$$\mathbf{H}\varphi(u) = e^{-\varphi(u)}\mathbf{L}e^{\varphi(u)}, e^{\varphi(u)} \in \mathcal{D}(\mathbf{L}).$$

Доведення: З урахуванням співвідношення

$$L_t - 1 = t\mathbf{L} + o(t), t \to 0,$$

маємо:

$$\mathbf{H}\varphi(u) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(H_t - I)\varphi(u) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(H_t\varphi(u)$$

$$-\varphi(u)) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(\ln L_t e^{\varphi(u)} - \ln e^{\varphi(u)})$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\ln e^{-\varphi(u)}L_t e^{\varphi(u)} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\ln\{1$$

$$+[e^{-\varphi(u)}L_t e^{\varphi(u)} - 1]\} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\ln\{1 + e^{-\varphi(u)}[L_t e^{\varphi(u)}$$

$$-e^{\varphi(u)}]\} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\ln\{1 + e^{-\varphi(u)}[t\mathbf{L}e^{\varphi(u)} + o(t)]\}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}e^{-\varphi(u)}t\mathbf{L}e^{\varphi(u)} = e^{-\varphi(u)}\mathbf{L}e^{\varphi(u)}.$$

Лему доведено.

Використання нелінійного експоненційного генератора при дослідженні проблеми великих відхилень для марковських процесів вмотивоване наявністю зв'язку між нелінійною напівгрупою, що відповідає генератору та функціоналом дії. Наведемо наступні міркування, що демонструють такий зв'язок.

Проблема великих відхилень для марковського процесу $x^\varepsilon(t), t \geqslant 0$ в схемі серій з малим параметром $\varepsilon \to 0 (\varepsilon > 0)$ полягає у відшуканні функціоналу дії $I(x)$. Одне з можливих означень $I(x)$ наступне [3]:

Означення 0.1.

$$-I(x) = \lim_{\delta\to 0}\liminf_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\ln P\{x^\varepsilon(t) \in B_\delta(x)\}$$

$$= \lim_{\delta\to 0}\limsup_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\ln P\{x^\varepsilon(t) \in \overline{B}_\delta(x)\},$$

де $B_\delta(x) := \{y \in E : r(x, y) < \delta\}$.

Має місце наступне твердження(Формула Брика [2])доведення якого можна знайти в [3], Твердження 3.8.

Твердження 1. *Нехай марковський процес $x^\varepsilon(t), t \geqslant 0$, $\varepsilon \to 0$ $(\varepsilon > 0)$ є експоненційно компактним в $D_E[0, \infty)$ та існує границя*

$$\Lambda(\varphi) = \lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\ln E[e^{\varphi(x^\varepsilon(t))/\varepsilon}]$$

для всіх $\varphi \in C_b(E)$.

Тоді $x^\varepsilon(t)$ задовольняє принципу великих відхилень з функціоналом дії

$$I(x) = \sup_{\varphi\in C_b(E)}\{\varphi(x) - \Lambda(\varphi)\}.$$

Таким чином, дослідження проблеми великих відхилень дійсно пов'язано з граничною поведінкою нелінійної напівгрупи

$$H_t^\varepsilon\varphi(u) := \varepsilon\ln Ee^{\varphi(x^\varepsilon(t))/\varepsilon}. \tag{2}$$

Наведемо наступний результат, який також використовується в [3] без належного доведення.

Лема 3. *Нелінійний експоненційний генератор, що відповідає напівгрупі (2) має вигляд:*

$$\mathbf{H}^\varepsilon\varphi(u) = e^{-\varphi(u)/\varepsilon}\varepsilon\mathbf{L}^\varepsilon e^{\varphi(u)/\varepsilon}, e^{\varphi(u)/\varepsilon} \in \mathcal{D}(\mathbf{L}^\varepsilon).$$

Доведення: З урахуванням співвідношення

$$L_t^\varepsilon - 1 = t\mathbf{L}^\varepsilon + o(t), t \to 0,$$

маємо:

$$\mathbf{H}^\varepsilon\varphi(u) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(H_t^\varepsilon - I)\varphi(u) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(H_t^\varepsilon\varphi(u)$$

$$-\varphi(u)) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(\varepsilon\ln L_t^\varepsilon e^{\varphi(u)/\varepsilon} - \varepsilon\ln e^{\varphi(u)/\varepsilon})$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{\varepsilon}{t}\ln e^{-\varphi(u)/\varepsilon}L_t^\varepsilon e^{\varphi(u)/\varepsilon} = \lim_{t\to 0}\frac{\varepsilon}{t}\ln\{1 + e^{-\varphi(u)/\varepsilon}$$

$$\times[L_t^\varepsilon e^{\varphi(u)/\varepsilon} - e^{\varphi(u)/\varepsilon}]\} = \lim_{t\to 0}\frac{\varepsilon}{t}e^{-\varphi(u)/\varepsilon}t\mathbf{L}^\varepsilon e^{\varphi(u)/\varepsilon}$$

$$= e^{-\varphi(u)/\varepsilon}\varepsilon\mathbf{L}^\varepsilon e^{\varphi(u)/\varepsilon}.$$

Лему доведено.

Отже, граничну поведінку нелінійної напівгрупи можна визначати за рахунок асимптотичного аналізу відповідного нелінійного оператора.

Розглянемо випадок процесів з незалежними приростами, а саме сім'ю нормованих (тут $\varepsilon, \delta \to 0$ так що $\delta^{-1}\varepsilon \to 1$) марковських процесів з траєкторіями в $D_{\mathbf{R}}[0, \infty)$ та незалежними приростами

$$\eta_\varepsilon^\delta(t) = \varepsilon\eta^\varepsilon(t/\delta^2), t \geqslant 0,$$

що визначаються генераторами

$$\widetilde{\mathbf{\Gamma}}_\varepsilon^\delta\varphi(u) = \delta^{-2}\int_{\mathbf{R}}[\varphi(u + \delta v) - \varphi(u)]\widetilde{\Gamma}^\varepsilon(dv). \tag{3}$$

Нехай виконуються умови пуассонової апроксимації **PA1-PA3**.

Розв'язок проблеми великих відхилень для процесів з незалежними приростами в схемі пуассонової апроксимації визначається за допомогою нелінійного експоненційного генератора:

$$\mathbf{H}_{\Gamma}^{\varepsilon,\delta}\varphi^{\delta}(u) = e^{-\varphi/\delta}\delta\mathbf{\Gamma}_{\varepsilon}^{\delta}e^{\varphi/\delta}. \qquad (4)$$

Лема 4. *Експоненційний генератор (4) в схемі пуассонової апроксимації має наступне асимптотичне представлення*

$$\mathbf{H}_{\Gamma}^{\varepsilon,\delta}\varphi(u) = \mathbf{H}_{\Gamma}\varphi(u) + \theta_{\Gamma}^{\varepsilon,\delta}\varphi, \qquad (5)$$

де функції $\varphi(u) \in C_c^3(\mathbf{R})$, *і* $|\theta_{\Gamma}^{\varepsilon,\delta}\varphi| \to 0, \varepsilon, \delta \to 0$,

$$\mathbf{H}_{\Gamma}\varphi(u) = b\varphi'(u) + \int_{\mathbf{R}}[e^{v\varphi'(u)} - 1 - v\varphi'(u)]\widetilde{\Gamma}^0(dv). \qquad (6)$$

Доведення: Враховуючи вигляд генератора (3), маємо для генератора (5):

$$\mathbf{H}_{\Gamma}^{\varepsilon,\delta}\varphi(u) = \delta^{-1}\int_{\mathbf{R}}[e^{\Delta_{delta}\varphi(u)} - 1]\widetilde{\Gamma}^{\varepsilon}(dv),$$

де

$$\Delta_{\varepsilon}\varphi(u) := \delta^{-1}[\varphi(u+\delta v) - \varphi(u)].$$

Перепишемо вираз для генератора наступним чином:

$$\mathbf{H}_{\Gamma}^{\varepsilon,\delta}\varphi(u) = \delta^{-1}\int_{\mathbf{R}}[e^{\Delta_{\delta}\varphi(u)} - 1 - \Delta_{\delta}\varphi(u)$$
$$-\frac{1}{2}(\Delta_{\delta}\varphi(u))^2]\widetilde{\Gamma}^{\varepsilon}(dv) + \delta^{-1}\int_{\mathbf{R}}[\Delta_{\delta}\varphi(u)$$
$$+\frac{1}{2}(\Delta_{\delta}\varphi(u))^2]\widetilde{\Gamma}^{\varepsilon}(dv).$$

Легко бачити, що функція $\psi_u^{\delta}(v) = e^{\Delta_{\delta}\varphi(u)} - 1 - \Delta_{\delta}\varphi(u) - \frac{1}{2}(\Delta_{\delta}\varphi(u))^2$ належить класу $C_3(\mathbf{R})$. Дійсно,

$$\psi_u^{\delta}(v)/v^2 \to 0, v \to 0.$$

Крім того, ця функція неперервна і обмежена для кожного δ за умови обмеженості функції $\varphi(u)$. Більше того, обмеженість функції $\psi_u^{\delta}(v)$ є рівномірною по u за умови **C2** та обмеженості похідної $\varphi'(u)$.

Таким чином, з умов **PA1,PA2** маємо:

$$\mathbf{H}_{\Gamma}^{\varepsilon,\delta}\varphi(u) = \delta^{-1}\varepsilon\int_{\mathbf{R}}[e^{\Delta_{\delta}\varphi(u)} - 1 - \Delta_{\delta}\varphi(u) - \frac{1}{2}$$
$$\times(\Delta_{\delta}\varphi(u))^2]\widetilde{\Gamma}^0(dv) + \delta^{-1}\int_{\mathbf{R}}[\Delta_{\delta}\varphi(u) - v\varphi'(u) - \delta\frac{v^2}{2}$$
$$\times\varphi''(u)]\widetilde{\Gamma}^{\varepsilon}(dv) + \delta^{-1}\varepsilon b\varphi'(u) + \frac{1}{2}\varepsilon c\varphi''(u) + \delta^{-1}$$
$$\times\int_{\mathbf{R}}[\frac{1}{2}(\Delta_{\delta}\varphi(u))^2 - \frac{v^2}{2}(\varphi'(u))^2]\widetilde{\Gamma}^{\varepsilon}(dv)$$
$$+\delta^{-1}\varepsilon\frac{1}{2}c(\varphi'(u))^2.$$

Застосовуючи формулу Тейлора до тест-функцій $\varphi(u) \in C_c^3(\mathbf{R})$, та умову **PA2** отримаємо:

$$\mathbf{H}_{\Gamma}^{\varepsilon,\delta}\varphi(u) = \delta^{-1}\varepsilon\int_{\mathbf{R}}[e^{v\varphi'(u)} - 1 - v\varphi'(u)$$
$$-\frac{v^2}{2}(\varphi'(u))^2]\widetilde{\Gamma}^0(dv) + \delta^{-1}\varepsilon\int_{\mathbf{R}}(e^{v\varphi'(u)}\delta\frac{v^2}{2}\varphi''(\widetilde{u})$$
$$-\delta\frac{v^2}{2}\varphi''(\widetilde{u}) - \delta^2\frac{v^4}{8}(\varphi''(\widetilde{u}))^2)\widetilde{\Gamma}^0(dv)$$
$$+\delta^{-1}\varepsilon\int_{\mathbf{R}}\delta^2\frac{v^3}{3!}\varphi'''(\widetilde{u})\widetilde{\Gamma}^0(dv) + \delta^{-1}\varepsilon b\varphi'(u) + \frac{1}{2}\delta c\varphi''(u)$$
$$+\delta^{-1}\varepsilon\int_{\mathbf{R}}\delta^2\frac{v^4}{4}(\varphi''(\widetilde{u}))^2\widetilde{\Gamma}^0(dv) + \delta^{-1}\varepsilon\frac{1}{2}c(\varphi'(u))^2.$$

Враховуючи **PA3** та граничну умову $\delta^{-1}\varepsilon \to 1$, остаточно маємо:

$$\mathbf{H}_{\Gamma}^{\varepsilon,\delta}(x)\varphi(u) = \mathbf{H}_{\Gamma}(x)\varphi(u) + \theta_{\Gamma}^{\varepsilon,\delta}\varphi,$$

де $|\theta_{\Gamma}^{\varepsilon,\delta}\varphi| \to 0, \varepsilon, \delta \to 0$.

Лему доведено.

Залишається відкритим питання побудови варіаційного представлення функціоналу дії на основі граничного нелінійного оператора, тобто реалізація пункту 4) програми розв'язання проблеми великих відхилень [3]. Ця конструкція випливає з формули Брика та тісно пов'язана з мартингальною задачею керування.

Продемонстуємо як саме пов'язані між собою нелінійна напівгрупа (1), відповідний нелінійний оператор та мартингальна задача керування. Для цього спочатку встановимо зв'язок між нелінійною напівгрупою (1) та напівгрупою Нісіо [7, 8].

Надалі для імовірнісної міри P, що задана на просторі E позначатимемо

$$E^P f(x) := \int_E f(x)dP(x).$$

Якщо для імовірнісної міри Q, абсолютно неперервної відносно іншої імовірнісної міри P виконується співвідношення

$$\frac{dQ}{dP} = e^{\varphi(u)}/C, C = E^P e^{\varphi(u)},$$

то маємо

$$\ln \frac{dQ}{dP} = \varphi(u) - \ln E^P e^{\varphi(u)},$$

звідки отримаємо тотожність

$$\ln E^P e^{\varphi(u)} = \varphi(u) - \ln \frac{dQ}{dP}.$$

Розглянемо нелінійну напівгрупу (1), побудовану по марковському процесу $x(t)$:

$$H_t\varphi(u) = \ln E^P[e^{\varphi(x(t))}|x(0) = u].$$

Застосуємо наступний результат ([1], Твердження 1.4.2):

Твердження 2. *Нехай E-вимірний простір, $P(E)$ - сім'я імовірнісних мір на просторі E, $\varphi(x)$-обмежена вимірна функція $\varphi : E \to \mathbf{R}$.*

Тоді має місце варіаційна формула

$$\ln E^P e^{\varphi(x(t))} = \sup_{Q\in P(E)} E^Q \left\{\varphi(x(t)) - \ln \frac{dQ}{dP}(x(\cdot))\right\}. \quad (7)$$

Інфімум досягається на імовірнісній мірі Q, яка є абсолютно неперервною відносно міри P і задовольняє умові

$$\frac{dQ}{dP}(x) = e^{\varphi(x)} \frac{1}{\int_E e^{\varphi(x)}dP}.$$

Праву частину рівності (7) можна інтерпретувати як нелінійну напівгрупу Нісіо. Ця напівгрупа використовується при розв'язанні мартингальні задачі керування в роботі [7]. Для побудови відповідного мартингала з керуванням скористаємось наступною лемою, яка випливає з більш загального результату - перетворення Гірсанова (див. лему 5.8 в [3]).

Лема 5. *Нехай $x(t) \in E$ є розв'язком мартингальної задачі для генератора*

$$\mathbf{L}\varphi(x) = q(x) \int_E (\varphi(y) - \varphi(x))P(x, dy)$$

з розподілом $P \in \mathcal{P}(D_E[0,\infty))$, та нехай $\mathbf{H}g(x) = e^{-g(x)}\mathbf{L}e^{g(x)}$.

Для будь-якого $T > 0$ означимо міру $Q \in \mathcal{P}(D_E[0,\infty))$ через

$$\frac{dQ}{dP}(x(\cdot)) = \exp\left\{g(x(t)) - g(x(0)) - \int_0^T \mathbf{H}g(x(s))ds\right\}. \quad (8)$$

Тоді по мірі Q марковський процес $\{x(t), 0 \leqslant t \leqslant T\}$ є розв'язком мартингальної задачі для $\mathbf{L}^g$, де

$$\mathbf{L}^g f(x) = e^{-g(x)}\mathbf{L}(\varphi(x)e^{g(x)}) - e^{-g(x)}\varphi(x)\mathbf{L}e^{g(x)}$$

$$= q(x) \int_E e^{g(y)-g(x)}(\varphi(y) - \varphi(x))P(x, dy). \quad (9)$$

З останньої леми випливає, що за мірою Q марковський процес $\{x(t), 0 \leqslant t \leqslant T\}$ є розв'язком мартингальної задачі для $\mathbf{L}^g$, а саме

$$\varphi(x(t)) - \varphi(x(0)) - \int_0^t \mathbf{L}^g\varphi(x(s))ds \quad (10)$$

є мартингалом з керуванням $g(x)$ відносно міри $Q \in \mathcal{P}(D_E[0,\infty))$.

Тепер покажемо, що нелінійній напівгрупі Нісіо дійсно відповідає нелінійний оператор, пов'язаний з задачею керування.

Згідно Теореми 3.1 [6] існує імовірнісний розподіл $Q_{t,x}$ на $\mathcal{P}(D_E[0,\infty))$ такий що напівгрупа Нісіо (7) має вигляд

$$H_t\varphi(x) = E^{Q_{t,x}} \left\{\varphi(x(t)) - \ln \frac{dQ_{t,x}}{dP}(x(\cdot))\right\}.$$

Взявши в Лемі 5 в якості міри Q розподіл $Q_{t,x}$ отримаємо (з урахуванням того, що (10) є мартингалом)

$$H_t\varphi(x) = E^{Q_{t,x}} \left\{\int_0^t \mathbf{L}^g\varphi(x(s))ds - \ln \frac{dQ_{t,x}}{dP}(x(\cdot))\right\} + \varphi(x(0)). \quad (11)$$

Підберемо функцію $A^g(x)$ так, щоб в правій частині (8)

$$g(x(t)) - g(x(0)) - \int_0^t \mathbf{H}g(x(s))ds =: \int_0^t A^g(x(s))ds. \quad (12)$$

Тут $\int_0^t A^g(x(s))ds$ - це саме той функціонал, щодо якого розв'язується проблема мінімізації в [6].

Нехай $R_{x,g}$ – розподіл розв'язку мартингальної задачі з керуванням при $g(x) = g, x(0) = x$, тоді з нерівностей

$$E^{Q_{t,x}} \left\{\int_0^t \inf_g (\mathbf{L}^g\varphi(x(s)) - A^g(x(s))ds)\right\} \leqslant H_t\varphi(x) - \varphi(x(0))$$

$$\leqslant \inf_g E^{R_{x,g}} \left\{ \int_0^t \mathbf{L}^g \varphi(x(s)) - A^g(x(s))ds \right\}$$

можемо стверджувати рівномірну на E збіжність

$$\lim_{t\to 0} t^{-1}(H_t - I)\varphi(x) = \mathbf{H}\varphi(x)$$
$$= \inf_g(\mathbf{L}^g\varphi(x) - A^g(x)) \qquad (13)$$

за умов (i-vii) статті [6].

Умови (i-vii) гарантують збіжність нелінійних напівгруп до граничного нелінійного генератора $\mathbf{H}$. У разі, якщо вдасться відшукати генератор з керуванням $\mathbf{L}^g\varphi(x)$ та функцію з керуванням $A^g(x)$, які задовольняють умови (i-vii), можливо побудувати функціонал дії виходячи з наступних міркувань (див. Теореми 5.15 та 8.14 з [6]).

Отже, нехай існує границя для напівгруп Нісіо, що відповідають дограничним процесам, в схемі серій при $\varepsilon \to 0$

$$H_t^\varepsilon \varphi(u) := \varepsilon \ln E e^{\varphi(x^\varepsilon(t))/\varepsilon}$$

і вона дорівнює H_t.

Будуємо мартингальну задачу з керуванням

$$\int_{[0,t]} |\mathbf{L}^g\varphi(x(s))|ds < \infty, \forall g,$$

$$\varphi(x(t)) - \varphi(x(0)) - \int_{[0,t]} \mathbf{L}^g\varphi(x(s))ds = 0, \quad (14)$$

якій відповідає напівгрупа Нісіо H_t, означена в (11). Згідно (7) її також можна представити у вигляді

$$H_t\varphi(u) = \ln E^P e^{\varphi(x(t))}$$

як границю $H_t^\varepsilon\varphi(u)$.

Наступне твердження одразу випливає з Твердження 1 та співвідношень (7), (8) та (12):

Твердження 3. *Функціонал дії для дограничного процесу $x^\varepsilon(t)$ має вигляд*

$$I(x) = I_0(x(0)) + \inf_{g:(x,g)\in\mathcal{T}} \int_{[0,\infty)} A^g(x(s))ds,$$

де $\mathcal{T}$ - множина розв'язків мартингальної задачі (14).

При застосуванні цього методу дослідження маємо справу не з напівгрупами, а з граничними нелінійними експоненційними генераторами $\mathbf{H}^\varepsilon\varphi(u)$, які відповідають марковському процесу $x^\varepsilon(t)$. Тому знайшовши граничний генератор $\mathbf{H}\varphi(x)$ можемо використати генератор з керуванням $\mathbf{L}^g\varphi(x)$ та співвідношення (13) для пошуку функції $A^g(x)$, а потім використати її для побудови функціоналу дії. Зрозуміло, що при цьому підході виникають питання про збіжність напівгруп саме до напівгрупи граничного генератора і про експоненційну компактність дограничного процесу. Саме на ці питання відповідають етапи 2) – 3), описані на початку статті та досліджені для випадку процесів з незалежними приростами в монографії [3].

Приклад 2. Повернемося до нормованих марковських процесів з незалежними приростами

$$\eta_\varepsilon^\delta(t) = \delta\eta^\varepsilon(t/\delta^2), t \geqslant 0.$$

Ми довели, що в умовах пуассонової апроксимації розв'язок проблеми великих відхилень для таких процесів визначається за допомогою нелінійного експоненційного генератора (6).

Обчислимо генератор процесу з незалежними приростами та керуванням g за формулою (9):

$$\mathbf{\Gamma}_g^{\varepsilon,\delta}\varphi(u) = e^{-g/\delta}\mathbf{\Gamma}_\varepsilon^\delta\varphi e^{g/\delta} - e^{-g/\delta}\varphi\mathbf{\Gamma}_\varepsilon^\delta e^{g/\delta}$$

$$= e^{-g/\delta}\delta^{-2}\int_{\mathbf{R}}[\varphi(u+\delta v)e^{g(u+\delta v)/\delta} - \varphi(u)e^{g(u)/\delta}$$
$$-\varphi(u)e^{g(u+\delta v)/\delta} + \varphi(u)e^{g(u)/\delta}]\widetilde{\Gamma}^\varepsilon(dv)$$
$$= \delta^{-2}\int_{\mathbf{R}} e^{\frac{g(u+\delta v)-g(u)}{\delta}}[\varphi(u+\delta v) - \varphi(u)]\widetilde{\Gamma}^\varepsilon(dv)$$
$$= \delta^{-2}\int_{\mathbf{R}} e^{\frac{g(u+\delta v)-g(u)}{\delta}}[\varphi(u+\delta v) - \varphi(u)$$
$$-\delta v\varphi'(u) - \delta^2\frac{v^2}{2}\varphi''(u)]\widetilde{\Gamma}^\varepsilon(dv)$$
$$+\delta^{-2}\int_{\mathbf{R}} e^{\frac{g(u+\delta v)-g(u)}{\delta}}[\delta v\varphi'(u) + \delta^2\frac{v^2}{2}\varphi''(u)]\widetilde{\Gamma}^\varepsilon(dv).$$

Оскільки підінтегральна функція у першому інтегралі належить класу $C_3(\mathbf{R})$, можемо застосувати умову пуассонової апроксимації **PA2**:

$$\mathbf{\Gamma}_g^{\varepsilon,\delta}\varphi(u) = \delta^{-2}\varepsilon\int_{\mathbf{R}} e^{\frac{g(u+\delta v)-g(u)}{\delta}}[\varphi(u+\delta v) - \varphi(u)$$
$$-\delta v\varphi'(u) - \delta^2\frac{v^2}{2}\varphi''(u)]\widetilde{\Gamma}^0(dv) + \delta^{-2}\int_{\mathbf{R}}[e^{vg'(u)}$$
$$+\delta e^{vg'(u)}\frac{v^2}{2}g''(\theta)][\delta v\varphi'(u) + \delta^2\frac{v^2}{2}\varphi''(u)]\widetilde{\Gamma}^\varepsilon(dv).$$

Підінтегральна функція у першому інтегралі має порядок δ^3, тому при $\varepsilon, \delta \to 0, \delta^{-1}\varepsilon \to$

1 перший інтеграл є $o(\varepsilon,\delta)$, натомість у другому інтегралі маємо:

$$\mathbf{\Gamma}_g^{\varepsilon,\delta}\varphi(u)=\delta^{-1}\varphi'(u)\int_{\mathbf{R}} ve^{vg'(u)}\widetilde{\Gamma}^{\varepsilon}(dv)+\int_{\mathbf{R}}[\frac{v^2}{2}\varphi''(u)$$

$$+o(\delta)]\widetilde{\Gamma}^{\varepsilon}(dv)+o(\varepsilon,\delta).$$

Знову використавши умови пуассонової апроксимації **PA1,PA2** отримаємо:

$$\mathbf{\Gamma}_g^{\varepsilon,\delta}\varphi(u)=\delta^{-1}\varepsilon\varphi'(u)\int_{\mathbf{R}} ve^{vg'}\widetilde{\Gamma}^{0}(dv)+o(\varepsilon,\delta).$$

Отже, позначивши $z=g'$ та поклавши $\psi(z)=\int_{\mathbf{R}} e^{vz}\widetilde{\Gamma}^0(dv)$ маємо граничний генератор з керуванням z у вигляді:

$$\mathbf{\Gamma}_z\varphi(u)=\varphi'(u)\psi'(z).$$

Покладемо $\varphi'=p,\psi'=q$ та обчислимо функцію $L(q)$ за формулою ($A(p,q):=\mathbf{\Gamma}_z\varphi(u)$):

$$L(q)=\sup_p(A(p,q)-H(p))=\sup_p(qp-H(p)),$$

де $H(p)$ визначається з явного вигляду генератора (6):

$$H(p):=H_\Gamma(\varphi')=bp-\int_{\mathbf{R}}[e^{vp}-1-vp]\widetilde{\Gamma}^0(dv).$$

Маємо:

$$(qp-H(p))'_p=(qp-bp-\int_{\mathbf{R}}[e^{vp}-1-vp]\widetilde{\Gamma}^0(dv))'_p$$

$$=q-b-\int_{\mathbf{R}}[ve^{vp}-v]\widetilde{\Gamma}^0(dv)=0,$$

тобто p визначається із співвідношення

$$\int_{\mathbf{R}} ve^{vp}\widetilde{\Gamma}^0(dv)=q-(b-b_0)<\infty.$$

Явний вигляд функції $L(q)$ можна отримати, підставивши отримане значення $p(q)$ в формулу

$$L(q)=qp-H(p).$$

Функціонал дії матиме вигляд:

$$I(x)=I_0(x(0))+\int_0^\infty L(x'(s))ds.$$

Більш детальний огляд результатів та прикладів можна знайти в монографії [9].

Список використаних джерел

1. *Dupuis P.* A weak convergence approach to the theory of large deviations / P. Dupuis, R.S. Ellis. — New York:Wiley, 1997. — 504 p.

2. *Bryc W.* Large deviations by the asymptotic value method / W. Bryc // Diffusion processes and related problems in analysis. — Basel:Birkhauser, 1990. — P. 447-472.

3. *Feng J.* Large deviation for stochastic processes / J. Feng, T.G. Kurtz. — Mathematical Surveys and Monographs, 131. Providence, RI, American Mathematical Society, 2006. — 410 p.

4. *Jacod J.* Limit theorems for stochastic processes / J. Jacod, A.N. Shiryaev. — Berlin: Springer-Verlag, 2003. — 601 p.

5. *Koroliuk V.S.* Stochastic systems in merging phase space / V.S. Koroliuk, N. Limnios. — Singapore: World Scientific Publishing Company, 2005. — 348 p.

6. *Koroliouk D.* Random evolutionary systems: asymptotic properties and large deviations / D. Koroliouk, I. Samoilenko. — London: ISTE-John Wiley and Sons, 2021. — 280 p.

7. *Kurtz T.G.* Martingale problems for controlled processes / T.G. Kurtz // Lecture notes in control and information sciences. — Berlin:Springer, 1987. — Vol. 91. , P. 75-90.

8. *Nisio M.* On a non-linear semi-group attached to stochastic optimal control / M. Nisio // Publ. RIMS, Kyoto Univ. — 1976. — No.13. — P. 513-537.

9. *Nisio M.* On stochastic optimal controls and envelope of Markovian semi-groups / M. Nisio // Proc. Intern. Symp. SDE, Kyoto. — Kinokuniya, 1976. — P. 297-325.

References

1. DUPUIS, P., ELLIS, R.S. (1997) A weak convergence approach to the theory of large deviations. New York: Wiley.

2. BRYC, W. (1990) *Large deviations by the asymptotic value method*. Diffusion processes and related problems in analysis. Basel: Birkhauser. pp. 447-472.

3. FENG, J., KURTZ, T.G. (2006) *Large deviation for stochastic processes*. Mathematical Surveys and Monographs, 131. Providence, RI, American Mathematical Society.

4. JACOD, J., SHIRYAEV, A.N. (2003) *Limit theorems for stochastic processes*. Berlin: Springer-Verlag.

5. KOROLIUK, V.S., LIMNIOS N. (2005) *Stochastic systems in merging phase space*. Singapore: World Scientific Publishing Company.

6. KURTZ, T.G. (1987) *Martingale problems for controlled processes*. Lecture notes in control and information sciences. Berlin: Springer.Vol.91. pp. 75-90.

7. NISIO, M. (1976) *On a non-linear semi-group attached to stochastic optimal control*. Publ. RIMS, Kyoto Univ. No.13. pp. 513-537.

8. NISIO, M. (1976) *On stochastic optimal controls and envelope of Markovian semigroups*. Proc. Intern. Symp. SDE. Kyoto: Kinokuniya. pp.297-325.

9. KOROLIOUK, D., SAMOILENKO I. (2021) *Random evolutionary systems: asymptotic properties and large deviations*. London: ISTE-John Wiley and Sons.

Надійшла до редколегії 27.08.2021