WYKŁADY Z ANALIZY MATEMATYCZNEJ 2

Marek Galewski

75 LAT PŁ

Politechnika Łódzka
2021

Wykłady z analizy matematycznej 2

Marek Galewski

Recenzenci:
dr Witold Majdak
dr hab. Włodzimierz Fechner, prof. PŁ

Projekt okładki:
Michał Bełdziński
Marek Galewski

Korekta:
Tomasz Krakowiak

Skład i łamanie:
Michał Bełdziński
Marek Galewski

Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej
90-924 Łódź, ul. Wólczańska 223
Tel. 42-631-20-87, 42-631-29-52
E-mail: zamowienia@info.p.lodz.pl
www.wydawnictwo.p.lodz.pl

https://doi.org/10.34658/9788366287679

DOI: 10.34658/9788366287679

http://hdl.handle.net/11652/3262

ISBN 978-83-66287-67-9

Podręczniki i Skrypty Politechniki Łódzkiej, Nr 2333
Wydanie pierwsze
Publikacja elektroniczna

Spis treści

Wstęp

Przedkładany Czytelnikowi podręcznik w jakiejś mierze stanowi odzwierciedlenie wykładów z przedmiotu analiza matematyczna 2 dla studentów pierwszego stopnia matematyki stosowanej. Notatki do wykładów istniały już wcześniej w różnej postaci i postanowiłem je połączyć w pewną całość. Mam świadomość, iż wprowadzane przeze mnie podejście nie jest w żadnej mierze nowatorskie, ale tak zredagowany podręcznik może być przydatny dla studentów Politechniki Łódzkiej.

Wymagamy od Czytelnika wiadomości zwartych w kursie analiza matematyczna 1 oraz elementów logiki matematycznej. Czytelnik zechce skorzystać z załączonego spisu bibliograficznego, na którym się wzorowałem pisząc ten tekst, również po to, by uzupełnić pominięte dowody niektórych twierdzeń.

Zapis słowny różni się znacznie od żywej mowy. Pisząc starałem się zachować pewne intuicyjne podejście wykładu, ale jednocześnie musiałem pamiętać o konieczności zachowania matematycznego formalizmu. Ponieważ podręcznik jest zapisem wykładu, stąd nie wszystie twierdzenia, jak już wspomniano, są dowodzone. Zamieściłem tylko te dowody, które udawało mi się prezentować w sali wykładowej w czasie jednosemestralnego wykładu wspomaganego ćwiczeniami. Pandemia Covid-19 skłoniła mnie do spisania swoich notatek w taki sposób, aby studenci słuchając wykładu on-line mieli jego, mam nadzieję, jak najlepszy zapis.

Podręcznik powstał w oparciu o źródła bibliograficzne, z których czerpałem z różną intensywnością, korzystając zarówno z idei, naprowadzeń jak i z pojęć, twierdzeń i dowodów. Na koniec przedkładam Czytelnikowi listę pozycji bibliograficznych, z których korzystałem. Zarówno układ tekstu, jak i propozycje prezentacji pochodzą z wykładów Profesora Bogdana Przeradzkiego prowadzonych na Politechnice Łódzkiej. Zostały jednak one odpowiednio zmodyfikowane na miarę uaktualniania kolejnych programów nauczania na PŁ.

Chciałbym podziękować recenzentom: Prof. Włodzimierzowi Fechnerowi i Drowi Witoldowi Majdakowi za cenne uwagi, które pozwoliły mi ulepszyć ostateczną wersję tekstu. W składaniu tekstu do druku otrzymałem, jak zwykle, wsparcie od Michała Bełdzińskiego.

ROZDZIAŁ 1

Całka niewłaściwa pierwszego rodzaju

Przypomnijmy, iż pojęcie całki Riemanna jest definiowane dla funkcji ograniczonych i określonych na przedziałach domkniętych i ograniczonych. Zajmiemy się przeniesieniem pojęcia całkowalności w sensie Riemanna na przypadek przedziałów nieograniczonych typu:

$$[a, +\infty), (-\infty, b], (-\infty, +\infty),$$

jak i funkcji nieograniczonych na zbiorach ograniczonych. Rozważanie dziedziny nieograniczonej prowadzi do definicji całki niewłaściwej I rodzaju, z kolei rozważanie funkcji nieograniczonej na zbiorze ograniczonym prowadzi do całki II rodzaju.

1.1. Wprowadzenie i definicja

Dla ustalenia uwagi zajmiemy się przypadkiem $[a, +\infty)$ dla pewnego $a \in \mathbb{R}$, a później sprowadzimy do niego pozostałe przypadki.

Definicja 1.1. Niech dana będzie taka funkcja $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$, że dla dowolnego $c \geq a$ jest ona całkowalna od a do c, lub – innymi słowy –

jest całkowalna w sensie Riemanna na przedziale $[a, c]$. Funkcję f nazywamy lokalnie całkowalną na $[a, +\infty)$ i piszemy $f \in \Re_{loc}\left([a, +\infty)\right)$.

Funkcja $f \in \Re_{loc}\left([a, +\infty)\right)$ jest całkowalna w sensie Riemanna na dowolnym domkniętym przedziale zawartym w $[a, +\infty)$. Każda funkcja ciągła na $[a, +\infty)$ (ogólniej – mająca skończoną ilość punktów nieciągłości), a także każda funkcja monotoniczna na $[a, +\infty)$ jest lokalnie całkowalna na $[a, +\infty)$.

Przykład 1.1. Nieciągłości, o których mowa w definicji, to nieciągłości usuwalne lub typu skokowego. Ponadto lokalna całkowalność funkcji zależy w sposób istotny od dziedziny, na której jest rozważana. Stąd funkcja

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x}, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ \frac{1}{x^2}, & x > 0, \end{cases}$$

nie jest lokalnie całkowalna na $[-1, +\infty)$ ze względu na to, iż jest nieograniczona w otoczeniu 0 będącym nieciągłością nieusuwalną. Niemniej jednak funkcja f jest lokalnie całkowalna na $[1, +\infty)$.

Przykład 1.2.

1. Przypominając związek całki Riemanna z polem pod wykresem funkcji dla funkcji nieujemnej i całkowalnej w sensie Riemanna, możemy zauważyć, co następuje. Weźmy funkcję

   $$f(x) = \frac{1}{x^2} \text{ na } [1, +\infty)$$

   i znajdźmy pole pod wykresem tej funkcji obciętej do przedziału $[1, c]$ dla $c > 1$. Otrzymujemy

   $$\int_1^c \frac{1}{x^2} dx = \int_1^c x^{-2} dx = -\frac{1}{x}\bigg|_{x=1}^{x=c} = 1 - \frac{1}{c}.$$

   Stąd widzimy, iż pole pod wykresem rozważanej funkcji rośnie do 1 wraz ze wzrostem c. (Pozostaje zatem skończone).

2. Biorąc na $[1,+\infty)$ funkcję $f(x) = \frac{1}{x}$ i powtarzając powyższe rozumowanie dostajemy

$$\int_1^c \frac{1}{x}dx = \ln x|_{x=1}^{x=c} = \ln c.$$

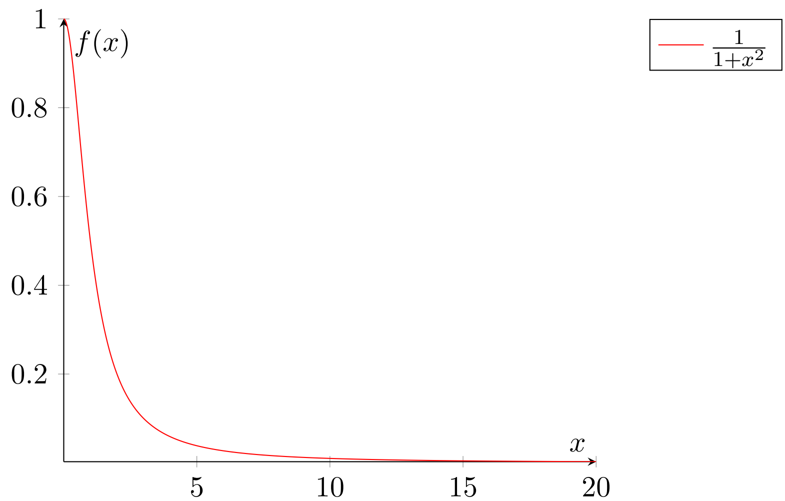
Tym razem pole rośnie nieograniczenie przy wzroście c.

Definicja 1.2. Dla funkcji $f \in \Re_{loc}([a,+\infty))$ definiujemy funkcję górnej granicy całkowania $F : [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ następującym wzorem:

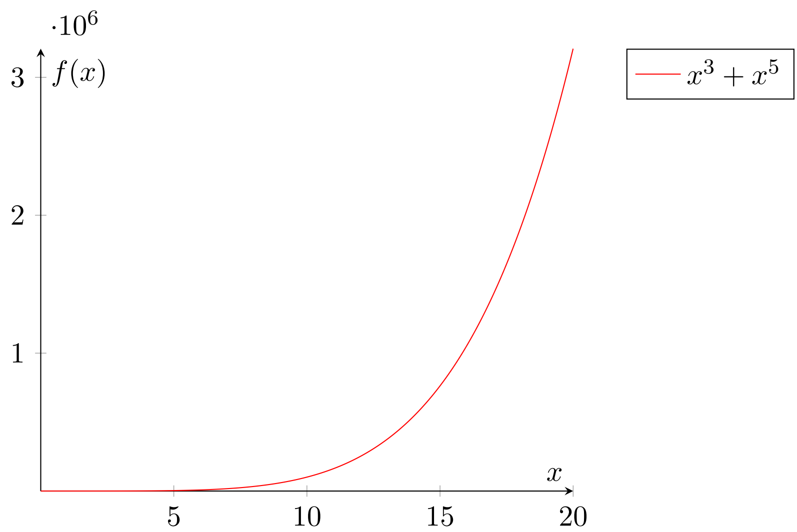
$$F(c) = \int_a^c f(x)\,dx.$$

Zauważmy, że definicja funkcji F jest dobrze postawiona, tzn. $F(c) \in \mathbb{R}$ dla dowolnego $c \geq a$ (co wynika z lokalnej całkowalności funkcji f). Ponadto funkcja F (jako funkcja górnej granicy całkowania z funkcji całkowalnej w sensie Riemanna) jest ciągła. Przy tym jednak (biorąc dla ustalenia uwagi $a = 0$) zachodzą poniższe własności.

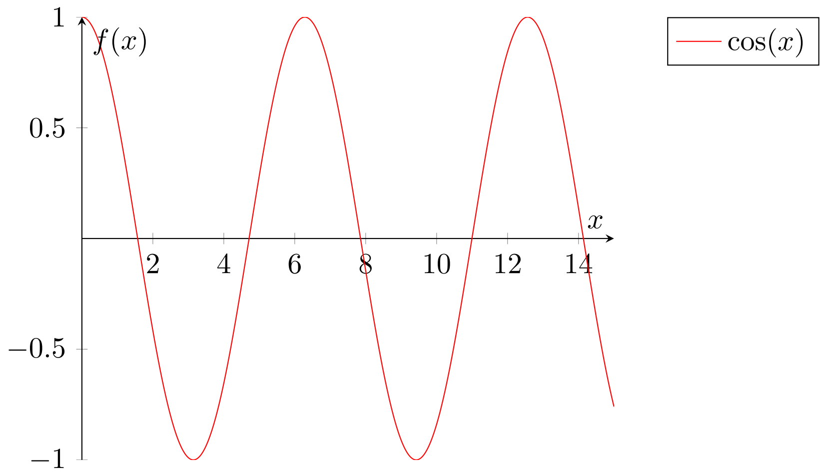
- Granica właściwa (tj. skończona) funkcji F_1 przy $c \to +\infty$ może istnieć, jak np. dla $f_1(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Istotnie, wtedy $F_1(x) = \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} 0 = \operatorname{arctg} x \to \frac{\pi}{2}$ przy $x \to +\infty$.



- Nie musi istnieć właściwa (tj. skończona) granica funkcji F_2 przy $c \to +\infty$, jak np. dla $f_2(x) = x^3 + x^5$. Istotnie $F_2(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{6}x^6 \to +\infty$ przy $x \to +\infty$.



- Nie musi istnieć granica funkcji F_3 przy $c \to +\infty$, jak np. dla $f_3(x) = \cos x$. Wówczas $F_3(x) = \sin x$ i, jak wiemy, funkcja sinus nie posiada granicy w nieskończoności.



Powyższe obserwacje prowadzą do zasadniczego pytania, wokół którego koncentrują się nasze rozważania:

$$\textit{Kiedy granica } \lim_{c \to +\infty} F(c) \textit{ jest skończona?}$$

Definicja 1.3. Niech $f \in \Re_{loc}([a, +\infty))$. Kładziemy (formalnie)

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{c \to +\infty} \int_a^c f(x)\, dx = \lim_{c \to +\infty} F(c).$$

Symbol

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$$

nazywamy całką niewłaściwą funkcji f na $[a, +\infty)$.

(i) Jeśli istnieje granica właściwa

$$\lim_{c \to +\infty} \int_a^c f(x)\, dx, \tag{1.1}$$

to mówimy, że całka niewłaściwa jest zbieżna.

(ii) Jeśli istnieje granica niewłaściwa (1.1) (równa $+\infty$ bądź $-\infty$), to mówimy, że całka niewłaściwa jest rozbieżna.

(iii) Jeśli nie istnieje granica (1.1) ani w sensie właściwym, ani w sensie niewłaściwym, to mówimy, że całka niewłaściwa jest nieokreślona.

Podane wyżej przykłady ilustrują trzy możliwe przypadki zbieżności/braku zbieżności występujące w tej definicji. Analiza funkcji $f(x) = \cos x$ sugeruje proste kryterium nieujemności funkcji podcałkowej, pozwalające wykluczyć przypadek całki nieokreślonej. Ma to oczywisty związek z tym, że funkcje monotoniczne posiadają w każdym punkcie właściwym granice jednostronne właściwe. Z kolei w punkcie niewłaściwym (przypomnijmy, że punktami niewłaściwymi nazywamy $+\infty$ bądź $-\infty$) granica ta może również być niewłaściwa. Jest ona jednak skończona, gdy funkcja jest dodatkowo ograniczona z góry (o ile funkcja jest określona na przedziale ograniczonym z dołu).

Stwierdzenie 1.1. *Niech* $f \in \Re_{loc}([a,+\infty))$ *będzie taka, że* $f(x) \geq 0$ *dla* $x \geq a$. *Wtedy funkcja* $F : [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ *dana wzorem*

$$F(c) = \int_a^c f(x)\,dx$$

jest niemalejąca.

Dowód. Weźmy dowolne $c_2 > c_1 \geq a$. Wtedy oczywiście $\int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx \geq 0$. Ze znanych własności całki Riemanna mamy

$$\begin{aligned} F(c_2) &= \int_a^{c_2} f(x)\,dx = \int_a^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx \\ &= F(c_1) + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx \geq F(c_1). \end{aligned}$$ ∎

Uwaga 1.1. Skoro funkcja monotoniczna posiada granicę (właściwą lub nie) w $+\infty$, to całki z funkcji nieujemnych mogą być albo zbieżne albo rozbieżne.

Uwaga 1.2. Założenie o funkcji f w powyższym stwierdzeniu możemy zastąpić następującym: istnieje $a_1 \geq a$ takie, że $f(x) \geq 0$ dla $x \geq a_1$. Wtedy również funkcja F jest niemalejąca na przedziale $[a_1, +\infty)$. Na ogół nie będziemy takich założeń robić, niemniej jednak warto o nich pamiętać w konkretnych zastosowaniach.

Ćwiczenie 1.1. Zaproponować i uzasadnić warunki na to, aby funkcja F była nierosnąca.

Następujące twierdzenie pozwala w łatwy sposób podać metodę znajdowania całki niewłaściwej przy pomocy całki nieoznaczonej. Jest ono intuicyjnie oczywiste i opiera się na stosowanych przez nas technikach rachunkowych.

Twierdzenie 1.1 (*Analogon twierdzenia Newtona-Leibniza*)**.** *Załóżmy, że funkcja $f \in \Re_{loc}([a, +\infty))$ posiada funkcję pierwotną na $[a, +\infty)$, tzn. istnieje funkcja $F : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ taka, że*

$$F'(x) = f(x) \ \text{dla}\ x \in [a, +\infty),$$

przy czym pochodną w $x_0 = a$ rozumiemy jako pochodną prawostronną. Wówczas całka $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ jest zbieżna wtedy i tylko wtedy, gdy

$$L = \lim_{x \to +\infty} F(x) < +\infty. \tag{1.2}$$

Zachodzi również wzór

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = L - F(a).$$

Dowód. Weźmy dowolne $A \geq a$. Wtedy korzystając z twierdzenia Newtona-Leibniza dla całki Riemanna otrzymujemy

$$\int_a^{A} f(x)\,dx = F(A) - F(a). \tag{1.3}$$

Przy założeniu, że całka $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ jest zbieżna, to istnieje granica

$$\lim_{A \to +\infty} \int_a^{A} f(x)\,dx = \lim_{A \to +\infty} F(A) - F(a) = L - F(a).$$

Podobnie, jeśli istnieje granica (1.2), to z relacji (1.3) wniokujemy, że całka $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ jest zbieżna. ∎

Uwaga 1.3. Zauważmy, że jeśli dodatkowo założymy, że $f \in \Re_{loc}([a,+\infty))$ jest ciągła, to funkcja F dana wzorem $F(c) = \int_a^c f(x)\,dx$ jest różniczkowalna oraz wtedy

$$F'(x) = f(x)$$

dla $x \geq a$.

Uwaga 1.4. Powyższe twierdzenie jest uzsadnieniem teoretycznym przyjętej przez nas techniki obliczania całki niewłaściwej, polegającej na znalezieniu całki nieoznaczonej, a następnie przejściu do granicy.

Przykład 1.3. Zbadamy zbieżność całki

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$$

dla różnych $\alpha > 0$. Dla dowolnego $c > 1$ mamy

$$\int_1^c \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \left.\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_1^c, & \text{dla } \alpha \neq 1 \\ \left.\ln x\right|_1^c, & \text{dla } \alpha = 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{c^{1-\alpha}}{1-\alpha}, & \text{dla } \alpha \neq 1 \\ \ln c, & \text{dla } \alpha = 1 \end{cases}.$$

Stąd dla $\alpha = 1$ badana całka jest rozbieżna, gdyż $\ln c \to +\infty$ przy $c \to +\infty$. Z kolei dla $\alpha \in (0,1)$

$$\lim_{c\to+\infty} \frac{c^{1-\alpha}}{1-\alpha} = +\infty,$$

skąd również wynika jej rozbieżność. Z drugiej strony dla $\alpha > 1$ mamy

$$\lim_{c\to+\infty} \frac{c^{1-\alpha}}{1-\alpha} = 0$$

i całka jest zbieżna. Podsumowując

$$\int_1^c \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \text{jest rozbieżna dla } \alpha \in (0,1], \\ \text{jest zbieżna dla } \alpha > 1. \end{cases}$$

Przykład 1.4. Rozważmy dla dowolnych $\alpha > 0$ oraz $\beta \in \mathbb{R}$ całkę

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin(\beta x)\, dx.$$

Funkcja $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dana wzorem

$$f(x) = e^{-\alpha x} \sin(\beta x) \text{ dla } x \in [0, +\infty)$$

jest ciągła, skąd wiemy od razu, iż jej funkcję pierwotną $F : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ można znaleźć szukając funkcji górnej granicy całkowania. Mamy

$$F(x) = -\frac{e^{-x\alpha}}{\alpha^2 + \beta^2} (\beta \cos(\beta x) + \alpha \sin(\beta x))$$

dla $x \in [0, +\infty)$. Widzimy, że

$$|\beta \cos(\beta x) + \alpha \sin(\beta x)| \leq \alpha + |\beta| \text{ dla } x \in [0, +\infty)$$

oraz

$$\lim_{x \to +\infty} e^{-\alpha x} = 0.$$

Zatem

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = 0.$$

Zatem całka jest zbieżna. Do zastosowania twierdzenia Newtona-Leibniza do oceny zbieżności nie jest konieczne znajdowanie wartości funkcji F dla $x_0 = 0$.

1.2. Związek z szeregami

Całki niewłaściwe I rodzaju mają sporo wspólnego z szeregami liczbowymi. W poniższej tabeli zbieramy pewne porównania:

szereg liczbowy: $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$	całka niewłaściwa: $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$
ciąg wyrazów ogólnych: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$	funkcja podcałkowa: f
suma częściowa: $\sum_{n=1}^{N} a_n$	całka Riemanna: $\int_a^{A} f(x)\,dx$
suma szeregu: $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ to:	całka niewłaściwa: $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ to:
$\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n$	$\lim_{A\to+\infty} \int_a^{A} f(x)\,dx$
reszta szeregu: $\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$	całka: $\int_A^{+\infty} f(x)\,dx$

Powyższe porównanie sugeruje następujące wyniki (których dowodów zamieszczać nie potrzeba, gdyż postępuje się jak w przypadku szeregów). Zainteresowanego Czytelnika zachęcamy do samodzielnego przeprowadzenia stosownych dowodów. Zakładamy, że dla funkcji $f, g \in \Re_{loc}([a,+\infty))$ całki

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx, \quad \int_a^{+\infty} g(x)\,dx$$

są zbieżne. Zachodzą wówczas poniższe rezultaty.

(i) Dla dowolnego $c \geq a$ zachodzi równość

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int_a^{c} f(x)\,dx + \int_c^{+\infty} f(x)\,dx.$$

(ii) Dla dowolnych $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ zachodzi równość

$$\int_a^{+\infty} (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^{+\infty} f(x)\,dx + \beta \int_a^{+\infty} g(x)\,dx.$$

(iii)

$$\lim_{A\to+\infty} \int_A^{+\infty} f(x)\,dx = 0.$$

Ponadto, prawdziwe jest następujące kryterium:

Twierdzenie 1.2 (***Ogólne kryterium Cauchy'ego zbieżności***). *Załóżmy, że $f \in \Re_{loc}([a,+\infty))$. Na to, aby całka $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ była zbieżna, potrzeba* *i wystarcza, aby dla dowolnego $\varepsilon > 0$ dało się dobrać taką liczbę $A_0 \in [a, +\infty)$, że dla wszystkich $A_1, A_2 \in (A_0, +\infty)$ zachodzi nierówność*

$$|F(A_1) - F(A_2)| < \varepsilon.$$

Dowód. Zbieżność całki $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ jest równoważna istnieniu granicy właściwej $\lim_{c\to+\infty} F(c) = \lim_{x\to+\infty} \int_a^c f(x)\,dx$, co z kolei na podstawie kryterium Cauchy'ego istnienia granicy właściwej w punkcie niewłaściwym implikuje tezę. ∎

Z powyższego kryterium wynika, że (o ile całka $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ jest zbieżna) dla dostatecznie dużych A_1, A_2 całka $\int_{A_1}^{A_2} f(x)\,dx$ co do wartości bezwzględnej jest dowolnie mała.

Przykład 1.5. Powyższe kryterium Cauchy'ego pozwala w łatwy sposób stwierdzić brak zbieżności (bez rozróżnienia na rozbieżność i nieokreśloność) całki

$$\int_0^{+\infty} \sin x dx.$$

1.3. Kryterium porównawcze (nierównościowe i graniczne)

Twierdzenie 1.3 (***Kryterium porównawcze***). *Załóżmy, że funkcje*

$$f, g \in \Re_{loc}([a, +\infty))$$

są takie, że

$$0 \le f(x) \le g(x) \ \ \textit{dla } x \ge a.$$

Wtedy:

(i) jeżeli całka $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ jest rozbieżna, to całka $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ jest również rozbieżna;

(ii) jeżeli całka $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ jest zbieżna, to całka $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ jest również zbieżna.

Uwaga 1.5. Zbieżność całki $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ nie implikuje zbieżności całki $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$. Skoro $x \le x^2$ dla $x \ge 1$, to również

$$\frac{1}{x^2} \le \frac{1}{x} \text{ dla } x \ge 1.$$

Całka $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ jest zbieżna, ale całka $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ nie jest zbieżna. Podobnie rozbieżność całki $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ nie pociąga za sobą rozbieżności całki $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

Dowód. Przez $G : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ rozumiemy funkcję daną wzorem

$$G(c) = \int_a^c g(x)\,dx \text{ dla } c \ge a.$$

Skoro $g(x) \ge f(x) \ge 0$ dla $x \ge a$, to korzystając z własności całki Riemanna otrzymujemy

$$F(x) \le G(x) \text{ dla } x \ge a.$$

Załóżmy teraz, że całka $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ jest zbieżna. Oznacza to, że istnieje granica

$$\lim_{x \to +\infty} G(x) = L \ge 0.$$

Granica jest nieujemna, gdyż funkcja G jest monotoniczna i nieujemna. Istotnie, widzimy, że

$$\lim_{x \to +\infty} G(x) = \sup_{x \in [a, +\infty)} G(x).$$

Stąd również

$$F(x) \le L \text{ dla } x \ge a.$$

Skoro F jest niemalejąca, to istnieje granica

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = L_1 \le L.$$

Załóżmy teraz, że całka $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ jest rozbieżna. Oznacza to, że

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty.$$

Korzystając z definicji granicy niewłaściwej widzimy, że dla dowolnego $M > 0$ istnieje takie $r \geq a$, że dla wszystkich $x \geq r$ zachodzi $F(x) \geq M$. Skoro

$$G(x) \geq F(x) \geq M,$$

to mamy stąd

$$\lim_{x\to+\infty} G(x) = +\infty.$$

W konsekwencji całka $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ jest również rozbieżna. ∎

Przykład 1.6. Rozważmy całki

$$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}dx \text{ oraz } \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}dx.$$

Łatwo stwierdzić, iż dla $x \in [1, +\infty)$ zachodzą nierówności

$$\frac{\pi}{4} \leq \operatorname{arctg} x \leq \frac{\pi}{2}.$$

Skoro całka $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ jest rozbieżna, to stąd wnioskujemy, że pierwsza z całek jest rozbieżna na podstawie nierówności

$$\frac{\operatorname{arctg} x}{x} \geq \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{x} \text{ dla } x \in [1, +\infty).$$

Druga z całek jest zbieżna, gdyż całka $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ jest zbieżna oraz

$$\frac{\operatorname{arctg} x}{x^2} \leq \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{x^2} \text{ dla } x \in [1, +\infty).$$

Twierdzenie 1.4 (***Kryterium porównawcze w wersji granicznej***)**.** *Załóżmy, że funkcje $f, g \in \Re_{loc}([a, +\infty))$ są takie, że*

$$f(x) \geq 0,\ g(x) \geq 0 \textit{ dla } x \geq a$$

oraz że istnieje granica właściwa lub niewłaściwa

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} =: K \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}.$$

Jeżeli $K < +\infty$, to zbieżność całki $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ implikuje zbieżność całki $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$. Natomiast dla $K > 0$ (w tym również dla $K = +\infty$) rozbieżność całki $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ implikuje rozbieżność całki $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$.

Uwaga 1.6. Dla $K \in (0, +\infty)$ obie całki są albo jednocześnie zbieżne, albo jednocześnie rozbieżne. Zatem uwagi wymagają przypadki „graniczne".

Fragment dowodu. Załóżmy, że $K > 0$ oraz całka $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ jest rozbieżna. Posługując się definicją granicy właściwej w punkcie niewłaściwym wiemy, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje takie $R > a$, że dla $x \geq R$ zachodzi nierówność

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - K \right| \leq \varepsilon.$$

Zatem, skoro obie funkcje są nieujemne, to dla $x \geq R$ zachodzi

$$f(x) \leq (K + \varepsilon)\, g(x).$$

Ponieważ całka $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ jest rozbieżna, to rozbieżna (na podstawie kryterium porównawczego, twierdzenie 1.3) jest całka $(K + \varepsilon) \int_a^{+\infty} g(x)\,dx$. Dokończenie dowodu dla pozostałych przypadków zostawiamy jako łatwe **ćwiczenie** Czytelnikowi. ∎

Uwaga 1.7. Założenie, że

$$f(x) \geq 0,\ g(x) \geq 0 \text{ dla } x \geq a$$

można zastąpić założeniem, że nierówności $f(x) \geq 0$, $g(x) \geq 0$ zachodzą dla dostatecznie dużych x, por. z uwagą 1.2.

Przykład 1.7. Rozważmy całkę

$$\int_1^{+\infty} (\pi - 2 \operatorname{arctg} x)\, dx. \tag{1.4}$$

Kładziemy

$$f(x) = \pi - 2 \operatorname{arctg} x \text{ oraz } g(x) = \frac{1}{x}.$$

Zauważmy, że na podstawie reguły de l'Hospitala mamy

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\pi - 2 \operatorname{arctg} x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{1+x^2} = 2.$$

Stąd i z rozbieżności całki $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ całka (1.4) jest rozbieżna.

Przykład 1.8. Badając zbieżność całki

$$\int_1^{+\infty} \frac{x+\cos x}{x^3+\sin x} dx$$

przy pomocy twierdzenia 1.4 porównujemy ją ze zbieżną całką $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$. W ten właśnie sposób dowodzimy jej zbieżność.

1.4. Zbieżność bezwzględna całki

Dla całki Riemanna wiemy, że jeśli funkcja f jest całkowalna od a do b (całkowalna w sensie Riemanna na przedziale $[a, b]$), to całkowalna jest również funkcja $|f|$ na tym samym przedziale. Przypominamy jednakże, że całkowalność funkcji $|f|$ nie implikuje całkowalności funkcji f, co wiadomo badając zachowanie funkcji

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \text{ wymiernych,} \\ -1 & \text{dla pozostałych} \end{cases}$$

na odcinku $[0, 1]$. W przypadku całki niewłaściwej (ze względu na założenie lokalnej całkowalności funkcji) sytuacja nie jest analogiczna. W tym przypadku również dają się zauważyć analogie z szeregami liczbowymi. Posługując się kryterium Leibniza wiemy, że szereg

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

jest zbieżny, podczas gdy szereg

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

już zbieżny nie jest. Z drugiej strony oba szeregi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \text{ oraz } \sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n^2} \right|$$

są zbieżne. Stąd też wyróżnimy pojęcie zbieżności bezwzględnej dla całki niewłaściwej. Podkreślamy, że porównanie zbieżności i zbieżności bezwzględnej nie jest ani tak bezpośrednie, ani tak łatwe jak w przypadku szeregów.

Definicja 1.4. Załóżmy, że $f \in \Re_{loc}([a, +\infty))$. Mówimy, że całka $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ jest zbieżna bezwzględnie, jeżeli zbieżna jest całka $\int_a^{+\infty} |f(x)|\, dx$.

Czasem też będziemy mówić o **całkowalności bezwzględnej** jako synonimie zbieżności bezwzględnej.

Uwaga 1.8. Dla funkcji, które nie zmieniają znaku na przedziale $[a, +\infty)$ – przynajmniej dla dostatecznie dużych x – zbieżność całki jest równoważna zbieżności bezwzględnej.

Definicja 1.5. Niech dana będzie funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Kładziemy

$$f_+(x) = \max\{f(x), 0\} = \begin{cases} f(x), & \text{jeżeli } f(x) \geq 0, \\ 0, & \text{dla pozostałych } x, \end{cases}$$

$$f_{-}(x) = \max\{-f(x), 0\} = \begin{cases} -f(x), & \text{jeżeli } f(x) \leq 0, \\ 0, & \text{dla pozostałych } x. \end{cases}$$

Uwaga 1.9. Łatwo jest uzasadnić następujące relacje dla $x \in \mathbb{R}$:

$$f_{+}(x) \geq 0,\ f_{-}(x) \geq 0;$$

$$f(x) = f_{+}(x) - f_{-}(x),\ |f(x)| = f_{+}(x) + f_{-}(x);$$

$$f_{+}(x) = \frac{|f(x)| + f(x)}{2},\ f_{-}(x) = \frac{|f(x)| - f(x)}{2};$$

$$f_{+}(x) \leq |f(x)|,\ f_{-}(x) \leq |f(x)|.$$

Uwaga 1.10. Łatwo stwierdzić, że jeżeli $f \in \Re_{loc}([a, +\infty))$, to również

$$|f|,\ f_{+},\ f_{-} \in \Re_{loc}([a, +\infty)).$$

Można zatem mówić jednocześnie mówić o całkowalności wymienionych tu funkcji.

Twierdzenie 1.5. *Załóżmy, że $f \in \Re_{loc}([a, +\infty))$ oraz że całka $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ jest zbieżna bezwzględnie. Wtedy całka $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ jest zbieżna oraz zachodzi nierówność*

$$\left|\int_a^{+\infty} f(x)\,dx\right| \leq \int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx.$$

Dowód. Rozumowanie przeprowadzimy przy wykorzystaniu części dodatniej oraz części ujemnej funkcji f. Otóż skoro

$$0 \leq f_{+}(x) \leq |f(x)|,\ 0 \leq f_{-}(x) \leq |f(x)|$$

dla $x \geq a$ oraz skoro całka $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ jest zbieżna, to (na podstawie kryterium porównawczego) zbieżne są również całki

$$\int_a^{+\infty} f_{+}(x)\,dx \text{ oraz } \int_a^{+\infty} f_{-}(x)\,dx.$$

Skoro

$$f(x) = f_+(x) - f_-(x) \text{ dla } x \geq a,$$

to ze zbieżności powyższych całek wynika zbieżność całki $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$. Ponadto dla $A \geq a$ mamy

$$\left| \int_a^A f(x)\,dx \right| \leq \int_a^A |f(x)|\,dx.$$

Przechodząc z A do granicy w $+\infty$ i korzystając z ciągłości funkcji moduł widzimy, że

$$\left| \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \right| \leq \int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx.$$

Twierdzenie zostało zatem udowodnione. ∎

Uwaga 1.11. Z twierdzenia 1.5 łatwo wynika, że całka zbieżna bezwzględnie jest różnicą dwóch całek – całki z części dodatniej i całki z części ujemnej funkcji podcałkowej. W przypadku całki, która zbieżna bezwzględnie nie jest (ale jest zbieżna) obie te całki (tj. z części dodatniej i z części ujemnej) nie są jednocześnie zbieżne. Gdyby bowiem chociaż jedna z nich była zbieżna, to od razu byłaby zbieżna druga. Warto tutaj przypomnieć, iż analogiczne relacje miały miejsce w przypadku szeregów zbieżnych jedynie warunkowo.

Twierdzenie 1.5 można również udowodnić przy pomocy kryterium Cauchy'ego. Pokażemy to poniżej.

Dowód. Ponieważ całka $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ jest zbieżna, to dla dowolnego $\varepsilon > 0$ dobieramy takie A_0, że dla wszystkich $A_1 > A_0$, $A_2 > A_0$ (ustaliwszy, że $A_2 > A_1$) zachodzi

$$\varepsilon > \left| \int_a^{A_1} |f(x)|\,dx - \int_a^{A_2} |f(x)|\,dx \right| = \left| \int_{A_1}^{A_2} |f(x)|\,dx \right| = \int_{A_1}^{A_2} |f(x)|\,dx.$$

Skoro

$$\left| \int_a^{A_1} f(x)\,dx - \int_a^{A_2} f(x)\,dx \right| = \left| \int_{A_1}^{A_2} f(x)\,dx \right| \leq \int_{A_1}^{A_2} |f(x)|\,dx < \varepsilon,$$

to od razu dostajemy tezę. ∎

Uwaga 1.12. *Całki zbieżne bezwzględnie nazywa się czasem niewłaściwie zachowującymi się całkami niewłaściwymi. Czytelnik poznawszy, w miarę studiowania matematyki, zagadnienia związane z całkowalnością w sensie Lebesgue'a, zechce dokonać porównania całki zbieżnej bezwzględnie z funkcją całkowalną w sensie Lebesgue'a na* $[a, +\infty)$*. Całki zbieżne, ale niebędące zbieżnymi bezwzględnie, nazywa się czasami całkami niewłaściwymi zachowującymi się właściwie.*

W celu badania zbieżności bezwzględnej całki posługujemy się kryterium porównawczym bądź – w szczególnych przypadkach – definicją. W przypadku badania zbieżności bezwzględnej warto pamiętać o następującym prostym kryterium:

Twierdzenie 1.6. *Załóżmy, że* $f \in \Re_{loc}([a, +\infty))$ *oraz że* $g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ *jest funkcją ograniczoną, tzn. istnieje taka stała* $M > 0$*, że*

$$|g(x)| \leq M \text{ dla } x \in [a, +\infty).$$

Jeżeli całka $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ *jest zbieżna bezwzględnie, to zbieżna bezwzględnie jest również całka*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, g(x)\, dx.$$

Dowód. Zauważmy, że dla $x \in [a, +\infty)$ zachodzi

$$|f(x)\, g(x)| \leq M\, |f(x)|.$$

Stąd i z bezwzględnej zbieżności całki $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ otrzymujemy tezę na podstawie kryterium porównawczego (twierdzenie 1.3). ∎

Przykład 1.9. Badając zbieżność całki

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{k^2 + x^2} dx$$

dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ i dowolnego $a \in \mathbb{R}$ widzimy, że

$$|\cos ax| \leq 1$$

dla wszystkich x oraz że całka

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{k^2 + x^2}$$

jest zbieżna. Zastosowanie twierdzenia 1.6 dowodzi zbieżności bezwzględnej całki

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{k^2 + x^2} dx,$$

a zatem i jej zbieżności. Zauważmy, że do badanej całki nie można wprost stosować kryterium porównawczego, gdyż funkcja podcałkowa zmienia znak. Z kolei bezpośrednie zastosowanie kryterium porównawczego pozwala stwierdzić, że całka

$$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2} dx$$

jest zbieżna bezwzględnie.

W przypadku badania zbieżności warunkowej całek posłużymy się kryterium Dirichleta. Warto to twierdzenie skonfrontować z kryterium Leibniza, mówiącym, iż szereg

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$$

jest zbieżny (warunkowo), o ile ciąg $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ma wyrazy dodatnie, jest malejący oraz

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = 0.$$

Zauważmy przy tym, że dla dowolnego $N \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność

$$\left| \sum_{n=1}^{N} (-1)^n \right| \leq 1.$$

Twierdzenie 1.7 (***Kryterium Dirichleta***). *Załóżmy, że* $f \in \Re_{loc}([a,+\infty))$ *oraz że* $g:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ *jest funkcją malejącą i taką, że*

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0.$$

Jeżeli istnieje taka stała $K>0$*, że dla dowolnego* $A\geq a$ *zachodzi nierówność*

$$\left|\int_a^A f(x)\,dx\right| \leq K,$$

to całka

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,g(x)\,dx$$

jest zbieżna.

Uwaga 1.13. Stała K nie zależy od A. Poszukując oszacowania

$$\left|\int_a^A f(x)\,dx\right| \leq K$$

raczej nie warto korzystać z możliwości wejścia z modułem pod znak całki. Wówczas takiego oszacowania najczęściej nie udaje się znaleźć. Oszacowanie nie musi być dokładne i stałej nie trzeba dobierać bardzo precyzyjnie – wystarczy znaleźć dowolną pasującą stałą $K>0$. Zauważmy również, że funkcja g, jako malejąca o granicy równej 0 w $+\infty$, ma wartości dodatnie.

Przykład 1.10. Weźmy pod uwagę całkę

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Połóżmy

$$f(x) = \sin x \text{ oraz } g(x) = \frac{1}{x}.$$

Zauważmy, że spełnione są założenia kryterium Dirichleta (twierdzenie 1.7). Istotnie, g jest malejąca,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$$

oraz dla dowolnego $A \geq 1$ widzimy, że

$$\left|\int_1^A \sin x dx\right| \leq |\cos A - \cos 1| \leq 2.$$

Stąd widzimy, że całka

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \tag{1.5}$$

jest zbieżna. Pokażemy, że całka nie jest zbieżna bezwzględnie, tzn. nie jest zbieżna całka

$$\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx. \tag{1.6}$$

Przypuśćmy przeciwnie, tzn. że całka (1.6) jest zbieżna. Skoro dla $x \geq 1$ zachodzi

$$\sin^2 x \leq |\sin x|\,,$$

to zbieżna byłaby również całka

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx.$$

Skoro

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}\left(1 - \cos 2x\right)$$

to w oczywisty sposób zbieżna jest również całka

$$\int_1^{+\infty} \frac{1 - \cos 2x}{x} dx.$$

Postępując analogicznie jak przy badaniu zbieżności całki (1.5), wnioskujemy, że całka

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx$$

jest zbieżna na podstawie kryterium Dirichleta. Korzystając z relacji

$$\int_1^{+\infty} \frac{1 - \cos 2x}{x} dx = 2\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$$

oraz (wykazanej powyżej) zbieżności całki

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx,$$

a także założonej zbieżności całki

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$$

widzimy, że całka

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$$

jest zbieżna, co jest niemożliwe, gdyż

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{A \to +\infty} \int_1^A \frac{dx}{x} = \lim_{A \to +\infty} (\ln A - \ln 1) = +\infty.$$

Stąd przypuszczenie, że zbieżna jest całka (1.6), okazało się fałszywe. Zatem całka (1.5) nie jest zbieżna bezwzględnie (czyli jest właściwie zachowującą się całką niewłaściwą).

Uwaga 1.14. W podobny sposób pokazujemy zbieżność całki

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx,$$

bądź ogólniej całek

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx, \quad \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha} dx$$

dla dowolnego $\alpha \in (0, 1]$. Łatwo widać, iż całki

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx, \quad \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha} dx$$

dla dowolnego $\alpha > 1$ są już zbieżne bezwzględnie, a zatem zbieżne.

1.5. Podstawowe twierdzenia – analogie z całką Riemanna

Twierdzenie 1.8 (***Całkowanie przez części***). *Załóżmy, że funkcje f, g : $[a, +\infty) \to \mathbb{R}$ są klasy C^1 (tzn. posiadają ciągłe pochodne pierwszego rzędu, przy czym w $x_0 = a$ mamy pochodną prawostronną). Załóżmy, że istnieje granica właściwa*

$$\lim_{A \to +\infty} f(A) g(A) =: L \tag{1.7}$$

oraz, że przynajmniej jedna z całek

$$\int_a^{+\infty} f'(x) g(x) \, dx, \int_a^{+\infty} f(x) g'(x) \, dx$$

jest zbieżna. Wówczas obie całki są zbieżne oraz zachodzi równość

$$\int_a^{+\infty} f'(x) g(x) \, dx = L - f(a) g(a) - \int_a^{+\infty} f(x) g'(x) \, dx. \tag{1.8}$$

Dowód. Z założeń twierdzenia wynika, że

$$f, \ g, \ f', \ g' \in \Re_{loc}([a, +\infty)).$$

Stąd na przedziale $[a, A]$, dla dowolnego $A > a$, możemy korzystać z całkowania przez części dla całki Riemanna, otrzymując

$$\int_a^{A} f'(x) g(x) \, dx = f(A) g(A) - f(a) g(a) - \int_a^{A} f(x) g'(x) \, dx. \tag{1.9}$$

Załóżmy dla ustalenia uwagi, że całka

$$\int_a^{+\infty} f(x) g'(x) \, dx$$

jest zbieżna. Stąd, dzięki istnieniu granicy w (1.7), wnioskujemy z (1.9), że całka

$$\int_a^{+\infty} f'(x) g(x) \, dx$$

jest również zbieżna. Przechodząc w (1.9) do granicy przy $A \to +\infty$ otrzymujemy relację (1.8). ∎

Uwaga 1.15. W twierdzeniu 1.8 wystarczy założyć, że funkcje f, g posiadają pochodne lokalnie całkowalne na $[a, +\infty)$. Wtedy

$$f,\ g \in \Re_{loc}\left([a, +\infty)\right)$$

jako funkcje ciągłe. Łatwe sformułowanie i dowód twierdzenia rozszerzającego w opisany sposób twierdzenie 1.8 pozostawiamy Czytelnikowi.

Przykład 1.11. Aby zbadać zbieżność całki

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx,$$

możemy zastosować twierdzenie 1.8 (o całkowaniu przez części dla całki pierwszego rodzaju) zamiast korzystać z kryterium Dirichleta (twierdzenie 1.7). Połóżmy

$$f(x) = -\cos x.$$

Wtedy

$$f'(x) = \sin x$$

oraz

$$g(x) = \frac{1}{x},\ g'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

dla $x \in [1, +\infty)$. Funkcje f i g są różniczkowalne w sposób ciągły na przedziale $[1, +\infty)$. Całka

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$$

jest zbieżna bezwzględnie, gdyż funkcja kosinus jest ograniczona, a całka

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$$

jest zbieżna bezwzględnie. Skoro

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)\,g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{x} = 0,$$

to na podstawie twierdzenia o całkowaniu przez części (twierdzenie 1.8) mamy

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{x \to +\infty} f(x) g(x) - f(1) g(1) - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx.$$

Stąd widzimy od razu, iż całka

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

jest zbieżna.

Uwaga 1.16. W dalszych rozważaniach będziemy czasem pisać

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) g(x) = f(x) g(x)|^{+\infty}$$

rozumiejąc to jako pewne nadużycie oznaczeń. Podobnie będziemy pisać

$$f(x) g(x)|_a^{+\infty} = \lim_{x \to +\infty} f(x) g(x) - f(a) g(a).$$

Przykład 1.12 (***Wzory redukcyjne***)**.** Całkowanie przez części dla całek niewłaściwych prowadzi do uzyskania wzorów redukcyjnych, które można w dalszym ciągu z powodzeniem wykorzystywać. Dla $n \in \mathbb{N}$ rozważmy całkę

$$I_n = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^n dx.$$

Skoro obie funkcje podcałkowe są klasy $C^\infty(\mathbb{R})$ (różniczkowalne w sposób ciągły dowolnie wiele razy na $\mathbb{R}$) oraz (na podstawie reguły de l'Hospitala) dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{x \to +\infty} e^{-x} x^n = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{n x^{n-1}}{e^x} = \ldots = \lim_{x \to +\infty} \frac{n!}{e^x} = 0,$$

to możemy stosować całkowanie przez części przy założeniu jego wykonalności, tzn. przy założeniu zbieżności odpowiednich całek. Zastosujemy tutaj następującą technikę: będziemy całkować przez części tak długo, aż sprowadzimy obliczenia do całki, której istnienie potrafimy uzasadnić, a wówczas wykorzystując metodę analizy starożytnych (czyli powtarzając rozumowania w odwrotnej kolejności) uzyskamy poprawne uzasadnienie przeprowadzonego rozumowania. Mamy zatem

$$I_n = - \left. e^{-x} x^n \right|_0^{+\infty} + n \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{n-1} dx = n I_{n-1}.$$

Stąd, stosując całkowanie przez części n-razy, otrzymujemy

$$I_n = n!.$$

Powyższy wzór można wykazać formalnie posługując się również indukcją matematyczną.

Twierdzenia o całkowaniu przez podstawienie podamy przy okazji analizy całki drugiego rodzaju, gdyż może się okazać, iż całkę pierwszego rodzaju (po przedziale nieograniczonym) sprowadzi się do całki drugiego rodzaju (z funkcji nieograniczonej) i na odwrót.

1.6. Kryterium całkowe Maclaurina

Zajęliśmy się wcześniej analogiami zbieżności całki niewłaściwej i zbieżności szeregu liczbowego. Łatwo sformułować kryterium wiążące oba zagadnienia.

Twierdzenie 1.9. *Załóżmy, że funkcja $f \in \Re_{loc}([a, +\infty))$ jest nierosnąca i nieujemna. Wtedy całka*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$$

jest zbieżna wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżny jest szereg

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f(a+n).$$

Dowód. Dla prostoty dowodu przyjmiemy (bez zmniejszania ogólności), że $a = 0$. Pozwoli nam to uniknąć niezręcznych oznaczeń, ale jednocześnie nie strywializuje naszych rozważań. Warto jednak w ramach ćwiczenia przeprowadzić dowód dla dowolnego a. Ustalmy $n \in \mathbb{N}$ i weźmy $x \in [n-1, n]$. Ponieważ funkcja f jest nierosnąca, to otrzymujemy

$$f(n) \le f(x) \le f(n-1).$$

Zatem dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$

$$f(n) = \int_{n-1}^{n} f(n)\, dx \le \int_{n-1}^{n} f(x)\, dx \le \int_{n-1}^{n} f(n-1)\, dx = f(n-1).$$

Stąd dla dowolnego $N \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N} f(n) &\le \sum_{n=1}^{N} \int_{n-1}^{n} f(x)\, dx = \int_{0}^{N} f(x)\, dx \\ &\le \sum_{i=1}^{N} f(n-1) = f(0) + \sum_{i=1}^{N-1} f(n). \end{aligned}$$

Z powyższego, jeśli całka jest zbieżna, to wtedy

$$\lim_{N\to+\infty} \int_{0}^{N} f(x)\, dx = \int_{0}^{+\infty} f(x)\, dx \in \mathbb{R}.$$

Stąd

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} f(n) \le \int_{0}^{+\infty} f(x)\, dx,$$

a zatem szereg

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f(n) \tag{1.10}$$

jest zbieżny (jako szereg o wyrazach dodatnich o ograniczonym ciągu sum częściowych). Jeżeli teraz szereg (1.10) jest zbieżny, to zbieżna jest i całka

$$\int_{0}^{+\infty} f(x)\, dx \tag{1.11}$$

(jako całka z funkcji nieujemnej, dla której wyrażenie

$$\int_0^N f(x)\,dx$$

jest ograniczone ze względu na N).

Rozważmy przypadek rozbieżności całki (1.11). Wtedy szereg (1.10) jest rozbieżny, gdyż

$$\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N-1} f(n) = +\infty.$$

Podobnie, jeśli szereg (1.10) jest rozbieżny, to

$$\lim_{N\to+\infty}\int_0^N f(x)\,dx = +\infty,$$

a zatem rozbieżna jest całka (1.11). ∎

Z powyższego twierdzenia wynika (przy spełnieniu jego założeń), że jeśli dodatkowo f posiada funkcję pierwotną (najczęściej stosowanym warunkiem wystarczającym na to, by założenie takie było sprawdzalne, jest jej ciągłość), to zbieżność/rozbieżność szeregu jest związana z istnieniem/nieistnieniem granicy właściwej funkcji pierwotnej w nieskończoności. Kryterium Maclaurina jest raczej stosowane do badania zbieżności szeregów poprzez badanie zbieżności całki, niż do badania zbieżności całek.

Wnoisek 1.1. *Załóżmy, że $f \in \Re_{loc}([1,+\infty))$ jest nierosnąca i nieujemna oraz posiada funkcję pierwotną $F : [1,+\infty) \to \mathbb{R}$. Wtedy:*

(i) jeżeli granica $\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$, to szereg $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ jest rozbieżny;

(ii) jeżeli $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ jest skończona, to szereg $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ jest zbieżny.

Uwaga 1.17. Podkreślmy, że granica $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ może być albo właściwa, albo równa $+\infty$, co wynika z tego, że F jest funkcją niemalejącą jako pierwotna funkcji nieujemnej.

Uwaga 1.18. Zauważmy, że we wniosku 1.1 przyjęliśmy, iż funkcja jest określona na przedziale $[1, +\infty)$, a nie na przedziale $[a, +\infty)$. Jeśli $a > 1$, to na przedziale $[1, a)$ kładziemy $f(x) = 0$. Jeśli $a < 1$, z kolei przedefiniowujemy f na $[a, 1)$ w ten sam sposób. Zmienia to oczywiście być może wartość całki (sumy szeregu), ale nie wpływa na jej (jego) zbieżność. Nie będziemy zatem takiej procedury w konkretnych zastosowaniach powtarzać, pamiętając jednak o niej. Podane przez nas kryterium dotyczy jedynie kwestii zbieżności, a nie sposobu obliczania sum szeregów.

Przykład 1.13. (i) Niech $\sigma > 0$. Rozważmy szereg

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln^{1+\sigma} n}.$$

Skoro funkcja $f : [2, +\infty) \to \mathbb{R}$ dana wzorem

$$f(x) = \frac{1}{x \ln^{1+\sigma} x}$$

jest ciągła, to posiada funkcję pierwotną $F : [2, +\infty) \to \mathbb{R}$. Jest ona dana wzorem

$$F(x) = -\frac{1}{\sigma \ln^{\sigma} x}.$$

Skoro

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = 0,$$

to rozpatrywany szereg jest zbieżny.

(ii) Rozważmy szereg

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n \ln n \ln(\ln n)}.$$

Funkcja $f : [3, +\infty) \to \mathbb{R}$ dana wzorem

$$f(x) = \frac{1}{x \ln x \ln(\ln x)}$$

jest ciągła i stąd posiada funkcję pierwotną $F : [3, +\infty) \to \mathbb{R}$ daną wzorem

$$F(x) = \ln(\ln(\ln x)).$$

Skoro

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = +\infty,$$

to badany szereg jest rozbieżny.

1.7. Uwagi o całkach na przedziałach $(-\infty, +\infty)$ oraz $(-\infty, b]$

Rozumowanie dotyczące całek z funkcji $f \in \Re_{loc}([a, +\infty))$ można łatwo przenieść na przypadek całek z funkcji $f \in \Re_{loc}((-\infty, b])$ definiując uprzednio klasę funkcji lokalnie całkowalnych na $(-\infty, b]$ poprzez analogię do klasy $\Re_{loc}([a, +\infty))$ i następnie wprowadzić odpowiednią definicję zbieżności, rozbieżności i nieokreśloności. Przypadek całek określonych na przedziałach $(-\infty, +\infty)$ wymaga również nieznacznej modyfikacji. Miejmy na uwadze, iż przedział $(-\infty, +\infty)$ dzielimy dowolnym punktem a, np. $a = 0$ i następnie do każdego z przedziałów $(-\infty, a]$, $[a, +\infty)$ stosujemy wcześniej wprowadzone kryteria i techniki badania zbieżności. Przy tym ani zbieżność, ani rozbieżność nie zależą od wyboru punktu a. Zatem dla funkcji $f \in \Re_{loc}(-\infty, +\infty)$ kładziemy formalnie (dla dowolnie wybranego $a \in \mathbb{R}$)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{A \to +\infty} \int_a^A f(x)\,dx + \lim_{B \to -\infty} \int_B^a f(x)\,dx$$

i mówimy, że całka $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ jest:

(i) zbieżna, jeżeli obie całki $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$, $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$ są zbieżne,

(ii) rozbieżna, jeżeli istnieją obie granice (w tym co najmniej jedna w sensie niewłaściwym) i wykonalne są na nich działania (tzn. $+\infty + \infty = +\infty$, $-\infty - \infty = -\infty$, $+\infty + \alpha = +\infty$, $-\infty + \alpha = -\infty$ dla pewnego $\alpha \in \mathbb{R}$)

(iii) nieokreślona, jeśli któraś z powyższych granic nie istnieje, bądź obie istnieją w sensie niewłaściwym i są równe $+\infty$, $-\infty$ odpowiednio.

Prostym przykładem jest zbieżna całka

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} &= \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} \\ &= \lim_{A\to+\infty} \int_0^{A} \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{B\to-\infty} \int_B^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.\end{aligned}$$

Należy mieć na uwadze, że dla dowolnego a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{A\to+\infty} \int_a^{A} f(x)\,dx + \lim_{B\to-\infty} \int_B^{a} f(x)\,dx,$$

ale nie jest prawdą, że

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{A\to+\infty} \int_{-A}^{A} f(x)\,dx.$$

Istotnie, wiemy iż całki

$$\int_0^{+\infty} \sin x dx, \quad \int_{-\infty}^{0} \sin x dx$$

są rozbieżne, ale korzystając z nieparzystości funkcji sinus i postępując jak powyżej mamy

$$\lim_{A\to+\infty} \int_{-A}^{A} \sin x dx = \lim_{A\to+\infty} 0 = 0.$$

Prowadzi to do pojęcia tzw. wartości głównej całki, którym nie będziemy się jednak tutaj zajmowali.

ROZDZIAŁ 2

Całka niewłaściwa drugiego rodzaju

W przypadku całki drugiego rodzaju mamy do czynienia z funkcjami nieograniczonymi w otoczeniu jednego z krańców przedziału określoności. Nieograniczoność funkcji f w otoczeniu (prawo- lub lewostronnym) punktu $a \in \mathbb{R}$ oznacza, iż

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty \text{ lub } \lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty.$$

Taki punkt nazywamy osobliwym bądź mówimy, iż funkcja f ma osobliwość w punkcie a.

2.1. Definicja i podstawowe pojęcia

Definicja 2.1. Niech dana będzie taka funkcja $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ która dla dowolnego $c \in (a, b)$ jest całkowalna od c do b, lub innymi słowy jest całkowalna w sensie Riemanna na przedziale $[c, b]$. Taką funkcję nazywamy lokalnie całkowalną na $(a, b]$ i piszemy, że $f \in \Re_{loc}((a, b])$.

Uwaga 2.1. Można zauważyć, że symbolem loc oznaczamy w ogólności całkowalność na podzbiorach domkniętych i ograniczonych dziedziny w $\mathbb{R}$ (czyli innymi słowy na podzbiorach zwartych).

Definicja 2.2. Dla funkcji $f \in \Re_{loc}((a,b])$ wprowadzamy funkcję **dolnej granicy całkowania** następująco: definiujemy $F : (a,b] \to \mathbb{R}$ wzorem

$$F(c) = \int_c^b f(x)\,dx.$$

Zauważmy, że podobnie jak poprzednio definicja F jest dobrze postawiona, tzn. $F(c) \in \mathbb{R}$ dla dowolnego c o tej własności, że $a < c \leq b$ (co jest konsekwencją lokalnej całkowalności funkcji f). W łatwy sposób funkcję dolnej granicy całkowania można przekształcić w funkcję górnej granicy całkowania, kładąc

$$F(c) = -\int_b^c f(x)\,dx.$$

Stąd funkcja F (rozumiana jako funkcja górnej granicy całkowania dana jak wyżej) jest ciągła. Przy tym podobnie, jak poprzednio zachodzą poniższe własności. (Zachęcamy Czytelnika do wykonania odpowiednich przeliczeń, znów dla ustalenia uwagi $a = 0$, $b = 1$):

- Granica właściwa F przy $c \to 0^+$ istnieje, jak np. dla $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Istotnie, wtedy $F(x) = 2 - 2\sqrt{x} \to 2$ przy $x \to 0^+$.
- Nie musi istnieć właściwa (tj. skończona) granica funkcji F przy $c \to 0^+$, jak np. dla $f(x) = \frac{1}{x}$. Istotnie, wtedy $F(x) = \ln 1 - \ln x = -\ln x \to +\infty$ przy $x \to 0^+$.

Definicja 2.3. Niech $f \in \Re_{loc}((a,b])$. Kładziemy (formalnie)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c \to a} \int_c^b f(x)\,dx = \lim_{c \to a} F(c).$$

Symbol $\int_a^b f(x)\,dx$ nazywamy całką niewłaściwą funkcji f na $(a,b]$.

(i) Jeśli istnieje granica właściwa $\lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)\,dx$, to mówimy, że całka niewłaściwa jest zbieżna.

(ii) Jieśli stnieje granica niewłaściwa $\lim_{c\to a^+}\int_c^b f(x)\,dx$ (równa $+\infty$ bądź $-\infty$), to mówimy, że całka niewłaściwa jest rozbieżna.

(iii) Jeśli nie istnieje granica $\lim_{c\to a^+}\int_c^b f(x)\,dx$ ani w sensie właściwym, ani w sensie niewłaściwym, to mówimy, że całka niewłaściwa jest nieokreślona.

Uwaga 2.2. Jeżeli $f\in\Re_{loc}((a,b])$ oraz jeżeli istnieje granica $\lim_{x\to a^-} f(x) = A$, to kładziemy $f(a)=A$ i stąd funkcja jest określona na $[a,b]$, a zatem całka niewłaściwa $\int_a^b f(x)\,dx$ sprowadzi się do całki Riemanna.

Uwaga 2.3. W sposób bezpośredni definiujemy teraz całkę z funkcji $f\in\Re_{loc}([a,b))$, kładąc formalnie

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to b^-}\int_a^c f(x)\,dx = \lim_{c\to b^-} F(c),$$

gdzie

$$F(c) = \int_a^c f(x)\,dx \text{ dla } c\in[a,b).$$

W przykładach będziemy korzystali z obu możliwości zdefiniowania całki. Jeśli punkt osobliwy znajduje się we wnętrzu przedziału, to rozbijamy przedział na dwa przedziały i określamy dwie różne całki tak, jak to czyniliśmy w przypadku całkowania na przedziale $(-\infty,+\infty)$ z zachowaniem tej samej ostrożności. Podobnie postępujemy w przypadku całek na przedziałach nieograniczonych, w których funkcje podcałkowe posiadają osobliwości.

Podamy teraz kryteria dotyczące całkowalności niewłaściwej drugiego rodzaju. Dowody łatwo przenoszą się z przypadku całek pierwszego rodzaju i zostawiamy je Czytelnikowi jako ćwiczenie. Istotnie, wystarczy w większości przypadków dokonać zamiany przedziału nieograniczonego na ograniczony i skorzystać potem z podanej wyżej definicji całki drugiego rodzaju. Zwracamy jednak uwagę na pewne różnice w wypowiedzi twierdzeń. Widać je poniżej.

Stwierdzenie 2.1.

(i) Niech funkcja $f \in \Re_{loc}((a,b])$ *będzie taka, że* $f(x) \geq 0$ *dla* $x \in (a,b]$. *Wtedy funkcja* $F : (a,b] \to \mathbb{R}$ *dana wzorem*

$$F(c) = \int_c^b f(x)\,dx$$

jest nierosnąca.

(ii) Niech $f \in \Re_{loc}([a,b))$ *będzie taka, że* $f(x) \geq 0$ *dla* $x \in [a,b)$. *Wtedy funkcja* $F : [a,b) \to \mathbb{R}$ *dana wzorem*

$$F(c) = \int_a^c f(x)\,dx$$

jest niemalejąca.

Uwaga 2.4. W obu przypadkach opisanych powyżej granice istnieją (być może w sensie niewłaściwym) ze względu na monotoniczność funkcji F. Stąd stosują się wszystkie opisane przez nas uprzednio rozumowania. Podkreślamy, że techniki związane z badaniem zbieżności całki drugiego rodzaju są trudniejsze niż w przypadku całek pierwszego rodzaju.

2.2. Podstawowe twierdzenia i kryteria, przykłady

Sformułujemy analogon twierdzenia Newtona-Leibniza umożliwiający badanie zbieżności całek poprzez ich bezpośrednie wyznaczanie.

Twierdzenie 2.1 (*Analogon twierdzenia Newtona-Leibniza*)**.** *Załóżmy, że funkcja* $f \in \Re_{loc}((a,b])$ *posiada funkcję pierwotną* $F : (a,b] \to \mathbb{R}$. *Wówczas całka* $\int_a^b f(x)\,dx$ *jest zbieżna wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$L = \lim_{x \to a^+} F(x) \in \mathbb{R}.$$

Ponadto zachodzi wówczas wzór

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - L.$$

Oczywiście jeżeli funkcja f jest ciągła na $(a,b]$, to posiada funkcję pierwotną. Jest to najczęściej spotykana sytuacja. Dowód twierdzenia 2.1 przebiega poprzez zastosowanie klasycznego twierdzenia na przedziale $[c,b]$ dla $c \in (a,b)$ i przejście do granicy $c \to a^+$.

Przykład 2.1. Niech $a < b$, $\alpha > 0$ oraz niech

$$f(x) = \frac{x}{(b-x)^\alpha} \text{ dla } x \in [a,b).$$

Wówczas $f \in \Re_{loc}([a,b))$. Rozważymy zbieżność całki

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$$

dla różnych $\alpha > 0$. Dla dowolnego $c \in (a,b)$ mamy

$$\begin{aligned}\int_a^c \frac{dx}{(b-x)^\alpha} &= \begin{cases} \left.\frac{(b-x)^{1-\alpha}}{\alpha-1}\right|_a^c & \text{dla } \alpha \neq 1, \\ -\ln(b-x)|_a^c & \text{dla } \alpha = 1, \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{(b-c)^{1-\alpha}-(b-a)^{1-\alpha}}{\alpha-1} & \text{dla } \alpha \neq 1, \\ \ln\frac{b-a}{b-c} & \text{dla } \alpha = 1. \end{cases}\end{aligned}$$

Wówczas dla $\alpha \neq 1$ zachodzi

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} &= \lim_{c \to b^-} \frac{(b-c)^{1-\alpha}-(b-a)^{1-\alpha}}{\alpha-1} \\ &= \begin{cases} \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}, & \text{dla } \alpha < 1 \\ +\infty, & \text{dla } \alpha > 1 \end{cases}.\end{aligned}$$

Dla $\alpha = 1$ mamy

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \lim_{c \to b^-} \ln\frac{b-a}{b-c} = +\infty.$$

Podsumowując

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^{\alpha}} = \begin{cases} \text{jest zbieżna} & \text{dla } \alpha \in (0,1)\,, \\ \text{jest rozbieżna} & \text{dla } \alpha \geq 1. \end{cases}$$

Twierdzenie 2.2. *Zakładamy, że dla funkcji $f, g \in \Re_{loc}((a,b])$ całki*

$$\int_a^b f(x)\,dx, \quad \int_a^b g(x)\,dx$$

są zbieżne. Wówczas zachodzą poniższe własności.

(i) Dla dowolnego $c \in (a,b)$ zachodzi równość

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

(Tutaj całka $\int_a^c f(x)\,dx$ jest niewłaściwa, natomiast $\int_c^b f(x)\,dx$ jest całką Riemanna).

(ii) Dla dowolnych $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ zachodzi równość

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx.$$

(iii)

$$\lim_{d \to a^+} \int_a^d f(x)\,dx = 0.$$

Twierdzenie 2.3 (*Kryterium porównawcze*). *Załóżmy, że funkcje $f, g \in \Re_{loc}((a,b])$ są takie, że*

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \ \text{ dla } x \in (a,b]\,.$$

Wtedy:

(i) jeżeli całka $\int_a^b f(x)\,dx$ jest rozbieżna, to całka $\int_a^b g(x)\,dx$ jest również rozbieżna;

(ii) jeżeli całka $\int_a^b g(x)\,dx$ jest zbieżna, to całka $\int_a^b f(x)\,dx$ jest również zbieżna.

Uwaga 2.5. Podobnie jak w przypadku całki pierwszego rodzaju wprowadzamy kryterium porównawcze w wersji granicznej.

Przykład 2.2. Rozważmy całkę

$$\int_1^3 \sqrt{\frac{7-x}{3-x}}dx. \tag{2.1}$$

Widzimy, że funkcja $f(x) = \sqrt{\frac{7-x}{3-x}}$ jest ciągła na $[1,3)$, skąd wiemy, iż jest lokalnie całkowalna. Funkcja ma osobliwość dla $x = 3$. Skoro $7 - x \leq 4$ dla $x \in [1,3)$ oraz skoro całka (jak to już ustaliliśmy w przykładzie 2.1)

$$\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{3-x}}$$

jest zbieżna, to na podstawie kryterium porównawczego całka (2.1) jest zbieżna.

Przykład 2.3. Badając zbieżność całki

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{x}}{\sin x}dx$$

znajdujemy

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sqrt{x}}{\sin x} : \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\sin x} = 1$$

skąd od razu wynika, że całka jest zbieżna.

Uwaga 2.6. Jeżeli $f \in \Re_{loc}((a,b])$, to również

$$|f|\,,\ f_+,\ f_- \in \Re_{loc}((a,b])\,.$$

Wynika to od razu z własności całki Riemanna.

Definicja 2.4. Załóżmy, że $f \in \Re_{loc}((a,b])$. Mówimy, że całka $\int_a^b f(x)\,dx$ jest zbieżna bezwzględnie (całkowalna bezwzględnie), jeżeli zbieżna jest całka $\int_a^b |f(x)|\,dx$.

Uwaga 2.7. Dla funkcji, które nie zmieniają znaku na $(a, b]$, przynajmniej w pewnym prawostronnym sąsiedztwie punktu a, całkowalność bezwzględna jest równoważna całkowalności w sensie niewłaściwym. Relacje między oboma typami całkowalności są takie, jak opisaliśmy w przypadku całek pierwszego rodzaju.

Twierdzenie 2.4. *Załóżmy, że* $f \in \Re_{loc}((a, b])$ *oraz że całka* $\int_a^b f(x)\, dx$ *jest zbieżna bezwzględnie (tzn. zbieżna jest całka* $\int_a^b |f(x)|\, dx$*). Wtedy całka* $\int_a^b f(x)\, dx$ *jest zbieżna oraz zachodzi relacja*

$$\left|\int_a^b f(x)\, dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

Dowód. Na podstawie kryterium porównawczego w oczywisty sposób zbieżne są całki

$$\int_a^b f_+(x)\, dx \text{ oraz } \int_a^b f_-(x)\, dx.$$

Skoro

$$f(x) = f_+(x) - f_-(x) \text{ na } (a, b],$$

to od razu możemy stwierdzić, że całka $\int_a^b f(x)\, dx$ jest zbieżna. Korzystając z relacji

$$\left|\int_c^b f(x)\, dx\right| \leq \int_c^b |f(x)|\, dx$$

i przechodząc do granicy $c \to a^+$ mamy

$$\left|\int_a^b f(x)\, dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx. \qquad \blacksquare$$

2.3. Całkowanie przez podstawienie

Podając poniżej twierdzenie o całkowaniu przez podstawienie rozważymy funkcje klasy $\Re_{loc}([a, b))$, gdzie $b \in (a, +\infty) \cup \{+\infty\}$. Nie będziemy tej konwencji przypominali w dalszym ciągu.

Twierdzenie 2.5. *Załóżmy, że funkcja $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ jest ciągła oraz że funkcja $\varphi : [\alpha, \beta) \to [a, b)$ jest klasy C^1 i rosnąca. Niech ponadto $\varphi(\alpha) = a$ oraz $\lim_{t\to\beta^-} \varphi(t) = b$. Wówczas zachodzi równość*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

przy założeniu, że którakolwiek z występującej w niej całek jest zbieżna.

Dowód. Z twierdzenia o funkcji odwrotnej wiemy, iż istnieje funkcja odwrotna do φ, a mianowicie

$$\varphi^{-1} : [a, b) \to [\alpha, \beta).$$

Funkcja φ^{-1} jest ciągła i rosnąca, przy czym

$$\lim_{x\to b^-} \varphi^{-1}(x) = \beta.$$

Weźmy dowolne $x_0 \in [a, b)$. Niech

$$t_0 = \varphi^{-1}(x_0) \in [\alpha, \beta).$$

Dokonując w całce Riemanna

$$\int_a^{x_0} f(x)\,dx$$

podstawienia $x = \varphi(t)$ i korzystając z twierdzenia o podstawieniu otrzymujemy

$$\int_a^{x_0} f(x)\,dx = \int_\alpha^{t_0} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt.$$

Załóżmy dla ustalenia uwagi, iż zbieżna jest całka

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt.$$

Gdy $t_0 \to \beta^-$, widzimy, że $x \to b^-$. Stąd zbieżna jest całka

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

i zachodzi równość z tezy twierdzenia. ∎

Przykład 2.4. Obliczymy całkę

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx.$$

Wykażemy najpierw, że jest ona zbieżna. Zbadamy dwie całki

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2} dx \text{ oraz } \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx.$$

Pierwszą z całek porównujemy przy pomocy kryterium porównawczego w wersji granicznej ze zbieżną całką $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ dla $\alpha \in (0,1)$, obliczając granicę

$$\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{\ln x}{1+x^2} \right) : \left(\frac{1}{x^\alpha} \right).$$

Drugą z całek porównujemy z całką $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ dla $\alpha \in (1,2)$, badając granicę

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln x}{1+x^2} \right) : \left(\frac{1}{x^\alpha} \right).$$

Stąd

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx = \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx.$$

Dokonajmy w drugiej z całek podstawienia $\varphi(t) = \frac{1}{t}$. W tym przypadku

$$a = 1,\ b = +\infty$$

oraz

$$\alpha = 1,\ \beta = 0.$$

Do wykonaniu oczywistych obliczeń otrzymujemy

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx = \int_1^0 \frac{\ln t}{1+t^2} dt = -\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2} dx.$$

Stąd

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx = 0.$$

ROZDZIAŁ 3

Ciągi funkcyjne

W tym rozdziale zajmiemy się badaniem zbieżności (oraz własności granicy) ciągów i szeregów funkcyjnych. Z pojęciem ciągu zetknęliśmy się już wcześniej, a pojęcie granicy dla ciągów liczbowych, jak i poszukiwanie granic, są nam dobrze znane.

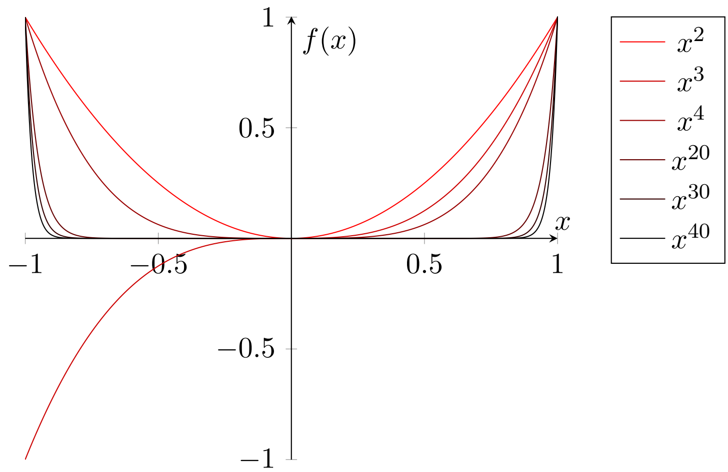
Niech $A \subset \mathbb{R}$ będzie ustalonym zbiorem. Najczęściej w dalszym ciągu $A = [a, b]$ lub $A = [a, +\infty)$, lub $A = \mathbb{R}$.

Definicja 3.1. Rozważmy rodzinę funkcji $f_n : A \to \mathbb{R}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Rodzinę $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazywamy ciągiem funkcyjnym.

Weźmy rodzinę funkcji

$$f_n(x) = x^n$$

określoną na $[-1, 1]$ i zobrazowaną (dla kilku początkowych wartości n, a następnie, począwszy od $f_{20}(x) = x^{20}$ dla $n = 20, 30, \ldots$) na poniższym wykresie.

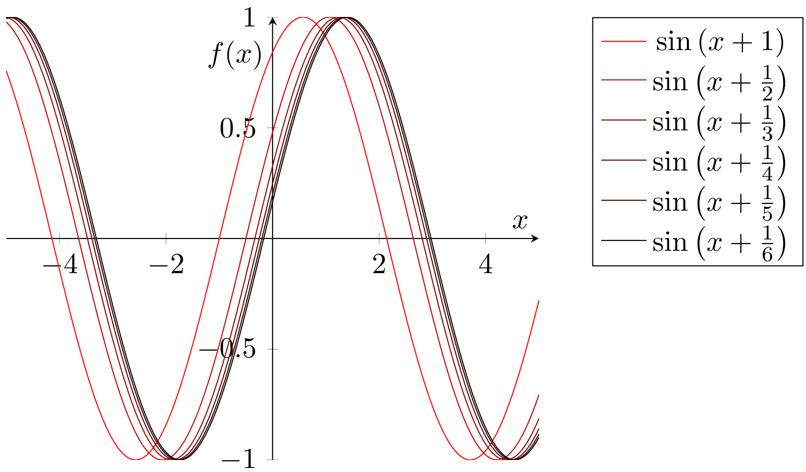


Z rysunku możemy zaobserwować, iż wykresy ciągu funkcji rozważane jedynie na przedziale $[0, 1]$ zaczynają wzrastać dość gwałtownie w coraz mniejszym sąsiedztwie 1. Będzie to miało dla nas dość istotne konsekwencje, gdy już wprowadzimy pojęcie zbieżności ciągu funkcyjnego.

Nieco inaczej zachowuje się rodzina funkcji

$$f_n(x) = \sin\left(x + \frac{1}{n}\right)$$

określona tym razem na $\mathbb{R}$. Mamy następującą ilustrację graficzną:



Widzimy, iż wykresy dla rosnącego n (co jest zobrazowane powyżej) przesuwają się w kierunku wykresu funkcji sinus.

W przypadku ciągów funkcyjnych obserwujemy dwie różne sytuacje:

- dla ustalonego $n \in \mathbb{N}$ element rodziny jest funkcją f_n, stąd można mówić o jej ciągłości, różniczkowalności jak i innych własnościach;
- dla ustalonego $x \in A$ otrzymujemy ciąg liczbowy $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, dla którego możemy pytać o granicę, monotoniczność, ograniczoność.

Sytuacja komplikuje się w przypadku jednoczesnej zmienności n i x, czyli przy badaniu zachowania się ciągu funkcyjnego. Zaczniemy od omówienia zbieżności punktowej takiego ciągu, czyli najbardziej naturalnej.

3.1. Zbieżność punktowa

Przy każdym ustalonym $x \in A$ analizujemy zbieżność ciągu liczbowego $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$. Sprowadza się więc to zagadnienie do badania granicy ciągu liczbowego z parametrem.

Definicja 3.2. Niech $A \subset \mathbb{R}$ oraz niech $f_n : A \to \mathbb{R}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Mówimy, że ciąg funkcyjny $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny punktowo w punkcie $x_0 \in A$, jeżeli ciąg liczbowy $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ posiada granicę oznaczaną $f(x_0)$. Zbiór A_0 składający się ze wszystkich punktów $x_0 \in A$, dla których ciąg liczbowy $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ posiada granicę, nosi nazwę obszaru zbieżności punktowej ciągu $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$. Określamy w ten sposób odwzorowanie $f : A_0 \to \mathbb{R}$ dane wzorem $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ dla $x \in A_0$. Piszemy $f_n \to f$ i mówimy, że f_n zbiega punktowo do f w A_0.

Uwaga 3.1. Skorzystawszy z definicji zbieżności punktowej ciągu $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ dla $x \in A_0$ widzimy, że

$$\forall_{\varepsilon>0}\forall_{x\in A_0}\exists_{N:=N(\varepsilon,x)}\forall_{n\geq N}\,|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \tag{3.1}$$

Zauważmy, że indeks N zależy od pary (ε, x). O ile dla przypadku granicy ciągu indeks zależał od ε, tym razem dodatkowo zależy również od x.

Uwaga 3.2. Z jednoznaczności granicy (ciągu liczbowego) wynika, iż funkcja f jest zdefiniowana jednoznacznie.

Przykład 3.1. Weźmy rodzinę funkcji $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ taką, że $f_n(x) = x^n$ dla $x \in [-1, 1]$. Widzimy, że dla $x_0 = -1$ ciąg $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ nie posiada granicy. Dla $x_0 \in (-1, 1)$ ciąg $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny do 0, a dla $x_0 = 1$ otrzymujemy $f_n(x_0) = 1$. Stąd obszarem zbieżności punktowej ciągu $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest przedział $(-1, 1]$ oraz

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in (-1, 1), \\ 1 & \text{dla } x = 1. \end{cases}$$

Dziedziną funkcji f jest przedział $(-1, 1]$, natomiast elementy ciągu $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ są określone na $[-1, 1]$. Funkcja f jest nieciągła mimo, że wszystkie elementy ciągu $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ są funkcjami ciągłymi. Mówi to nam od razu o tym, że zbieżność punktowa nie zachowuje w granicy funkcyjnej natury elementów ciągu. Zatem nie będzie ona wygodnym narzędziem w dalszej analizie badanego przez nas zagadnienia. Zawężenie obszaru zbieżności do pewnego podzbioru dziedziny, na której elementy ciągu $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ są określone, nie jest niczym zaskakującym. Wszak wspomnieliśmy, iż badamy granicę ciągu liczbowego zależnie od parametru. Przeanalizujemy, jak wygląda znajdowanie liczby $N(\varepsilon, x)$ w definicji zbieżności jednostajnej wyrażonej za pomocą warunku (3.1). Przypadek $x = 1$ jest oczywisty. Wówczas $|1^n - 1| = 0$ dla $n \in \mathbb{N}$. Weźmy teraz dowolne $\varepsilon \in (0,1)$ oraz dowolne $x \in (-1,1)$. Przypominamy, iż w definicji granicy wystarczy się ograniczyć do małych ε. Mamy wtedy

$$|x|^n < \varepsilon$$

skąd po skorzystaniu z monotoniczności i własności funkcji logarytm otrzymujemy

$$n \ln|x| < \ln\varepsilon$$

i skoro $\ln|x| < 0$ oraz $\ln\varepsilon < 0$, to otrzymujemy

$$n > \frac{\ln\varepsilon}{\ln|x|} = N(\varepsilon, x).$$

Przy ustalonym ε widzimy, że dla $x \to 1$ zachodzi $\frac{\ln\varepsilon}{\ln|x|} \to +\infty$. Oznacza to, iż nie możemy dobrać wspólnej liczby $N(\varepsilon, x)$ dla wszystkich x z tego podzbioru obszaru zbieżności, na którym zachowana jest ciągłość granicy. Będziemy do tego zagadnienia jeszcze wracali w miarę wprowadzania kolejnych narzędzi teoretycznych służących analizie ciągów funkcyjnych.

Przykład 3.2. Biorąc rodzinę funkcji

$$f_n(x) = \sin\left(x + \frac{1}{n}\right), \ f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

widzimy, że dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ mamy (korzystając z ciągłości funkcji sinus)

$$\lim_{n\to+\infty} \sin\left(x + \frac{1}{n}\right) = \sin x.$$

Obszarem zbieżności jest tym razem $\mathbb{R}$ oraz granica punktowa ciągu $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest funkcją ciągłą, okresową i ograniczoną. Pokażemy jak tym razem znaleźć liczbę $N(\varepsilon, x)$. Znajdziemy najpierw oszacowanie wartości bezwzględnej różnicy $|\sin x - \sin y|$ dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$. Korzystając z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej istnieje $\theta \in (x, y)$, przy czym przedział rozumiemy następująco

$$(x, y) := \{\lambda x + (1 - \lambda) y : \lambda \in (0, 1)\},$$

takie, że

$$\sin x - \sin y = \cos \theta \cdot (x - y).$$

Przypominamy, że θ zależy od x i y. Skoro $|\cos \theta| \leq 1$, to mamy stąd

$$|\sin x - \sin y| = |\cos \theta \cdot (x - y)| \leq |x - y|.$$

Weźmy teraz dowolne $\varepsilon \in (0, 1)$ oraz dowolne $x \in \mathbb{R}$. Korzystając z powyższych oszacowań mamy

$$\left|\sin\left(x + \frac{1}{n}\right) - \sin x\right| \leq \frac{1}{n}.$$

Stąd biorąc nierówność $\frac{1}{n} < \varepsilon$, widzimy, że $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Zatem $N(\varepsilon, x) = \frac{1}{\varepsilon}$. Widzimy, że tym razem liczbę N można tak dobrać, aby nie zależała od x, a jedynie od ε.

Uwaga 3.3. W powyższym przykładzie można również posłużyć się tożsamościami trygonometrycznymi, aby zauważyć, że

$$\left|\sin\left(x + \frac{1}{n}\right) - \sin x\right| = 2 \sin \frac{1}{2n}.$$

Dużo trudniej tym razem wyznaczyć liczbę $N(\varepsilon)$. Trzeba by potem uzasadnić, iż dla dostatecznie dużych $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$\sin \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{n}.$$

Relacje tę uzyskujemy zauważając, że

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

skąd dla $\varepsilon = 1$ istnieje $\delta > 0$ taka, że dla $0 < x < \delta$ mamy

$$\left| \frac{\sin x}{x} - 1 \right| \leq 1.$$

Stąd uzyskujemy $\sin x \leq 2x$ dla $0 < x < \delta$.

Zastanowimy się dalej, jaki wpływ na własności funkcji granicznej ma właśnie taka możliwość wyboru liczby N.

Uwaga 3.4. Prócz zbieżności punktowej dla ciągu funkcyjnego rozważać będziemy tzw. zbieżność jednostajną. Różnice między tymi pojęciami najlepiej obrazują powyżej omówione przykłady. Przymiotnik punktowy oznacza tu, iż liczbę $N(\varepsilon, x)$ dobieramy być może na inny sposób dla każdego x. Przymiotnik jednostajny z kolei sugeruje, iż dobór tej liczby dla x z obszaru zbieżności, bądź najczęściej jego pewnego podzbioru, nie zależy od x lub inaczej mówiąc jest taki sam dla tych elementów x (co oddaje sens słowa jednostajny).

Powyższa uwaga naprowadza nas na nową definicję, w której w stosunku do (3.1) dokonujemy przestawienia kwantyfikatorów.

3.2. Zbieżność jednostajna

Definicja 3.3. Niech $A \subset \mathbb{R}$ oraz niech $f_n,\ f : A \to \mathbb{R}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Ciąg funkcyjny $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ zbiega jednostajnie do funkcji f na zbiorze $A_0 \subset A$, jeżeli

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{N:=N(\varepsilon)} \forall_{x\in A_0} \forall_{n\geq N} \left|f_n(x) - f(x)\right| < \varepsilon. \tag{3.2}$$

Piszemy wówczas, że $f_n \rightrightarrows f$ na A_0.

Mamy oczywistą relację wynikającą bezpośrednio z przestawienia kwantyfikatorów szczególnego z ogólnym:

$$\text{Jeżeli } f_n \rightrightarrows f \text{ na } A_0, \text{ to } f_n \to f \text{ na } A_0.$$

Oznaczenie. Niech $f : A \to \mathbb{R}$. Przyjmijmy, że

$$\|f\|_{\infty,A} = \sup_{x\in A} |f(x)|. \tag{3.3}$$

Założymy, że $\|f\|_{\infty,A} < +\infty$. Łatwo sprawdzić, że $\|f\|_{\infty,A} = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f(x) = 0$ dla dowolnego $x \in A$. Dla dowolnego $\lambda \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$\|\lambda f\|_{\infty,A} = |\lambda| \, \|f\|_{\infty,A}.$$

Ponadto dla dowolnych funkcji $f, g : A \to \mathbb{R}$ takich, że

$$\|f\|_{\infty,A}, \;\; \|g\|_{\infty,A} < +\infty$$

mamy

$$\|f+g\|_{\infty,A} \leq \|f\|_{\infty,A} + \|g\|_{\infty,A}.$$

Uwaga 3.5. Przestrzeń funkcji ciągłych na odcinku $[a,b]$, czyli zbiór

$$C[a,b] := \{f : [a,b] \to \mathbb{R} : \text{ f jest ciągła na } [a,b]\}$$

jest przestrzenią wektorową. Funkcja $\|\cdot\|$ dana wzorem (3.3) jest na $C[a,b]$ dobrze określona, co jest konsekwencją z twierdzenia Weierstrassa o kresach funkcji ciągłej na odcinku domkniętym i ograniczonym.

Uwaga 3.6. Zauważmy, że relację (3.2) możemy równoważnie zapisać jako

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{N:=N(\varepsilon)} \forall_{n\geq N} \forall_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Stąd wynika, że

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{N:=N(\varepsilon)} \forall_{n\geq N} \forall_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Przypominając własność supermum zbioru widzimy, że nierówność

$$\forall_{x\in A} \left|f_n(x) - f(x)\right| \leq \varepsilon$$

jest równoważna temu, że

$$\sup_{x\in A} \left|f_n(x) - f(x)\right| \leq \varepsilon.$$

A przypominając definicję granicy ciągu widzimy finalnie, że (3.2) oznacza, iż

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in A} \left|f_n(x) - f(x)\right| = 0.$$

Zatem relacja $f_n \rightrightarrows f$ na A, czyli zbieżność jednostajna ciągu $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ do funkcji f na A, jest równoważna żądaniu, aby

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_{\infty,A} = 0.$$

W kontekście powyżej wprowadzonej definicji otrzymaliśmy dwa różne typy zbieżności: punktowy oraz jednostajny. Zapis obu definicji (3.1), (3.2) od razu sugeruje, iż zbieżność jednostajna pociąga za sobą zbieżność punktową. Powstaje pytanie, czy ciąg może mieć dwie różne granice: punktową i jednostajną.

Stwierdzenie 3.1. *Niech $A \subset \mathbb{R}$ oraz niech $f_n, f, g : A \to \mathbb{R}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Jeżeli $f_n \to g$ oraz $f_n \rightrightarrows f$ na A, to $f(x) = g(x)$ dla $x \in A$.*

Dowód. Na podstawie uwagi 3.2 od razu otrzymujemy, iż $f_n \to f$ na A. Z jednoznaczności granicy punktowej mamy tezę. ∎

Powyższe stwierdzenie daje nam wskazówkę do tego, w jaki sposób wyznaczać granicę jednostajną ciągu funkcyjnego. Znajdujemy granicę punktową i sprawdzamy (na razie z definicji), czy jest ona granicą jednostajną. Zilustrujemy to na kolejnym przykładzie, w którym ciągi funkcji nieróżniących się od siebie istotnie będą zachowywały się w granicy zupełnie inaczej.

Przykład ten poprzedzimy prostym kryterium porównawczym pozwalającym badać zbieżność jednostajną. Kluczem do zrozumienia sensu stosowania tego kryterium jest to, że nie należy szukać supremum wartości bezwzględnej różnicy $|f_n - f|$, ale jedynie supremum pewnego jej ograniczenia górnego.

Twierdzenie 3.1 (*Kryterium porównawcze zbieżności jednostajnej*)**.** *Niech $A \subset \mathbb{R}$ oraz niech $f_n, f : A \to \mathbb{R}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Załóżmy, że $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest takim ciągiem liczbowym, że $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ oraz że*

$$|f_n(x) - f(x)| \leq a_n \text{ dla } x \in A, n \in \mathbb{N}. \tag{3.4}$$

Wówczas $f_n \rightrightarrows f$ na A.

Dowód. Rozumowanie przebiega w sposób elementarny. Skoro $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, to

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{N:=N(\varepsilon)} \forall_{n \geq N}\ a_n \leq \varepsilon. \tag{3.5}$$

Z (3.4) widzimy, że

$$\sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| \leq a_n.$$

Stąd i z (3.5) dostajemy

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_{\infty,A} = 0.$$

■

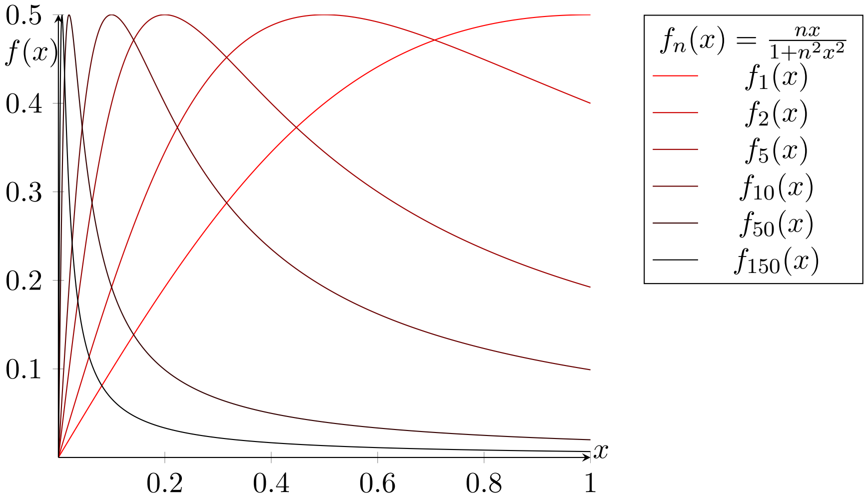
3.3. Przykłady

Niech $A = [0, 1]$. Rozważymy na A dwa ciągi funkcyjne $g_n, f_n : A \to \mathbb{R}$ dla $n \in \mathbb{N}$ dane wzorami

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2x^2} \text{ oraz } g_n(x) = \frac{x}{1 + n^2x^2}.$$

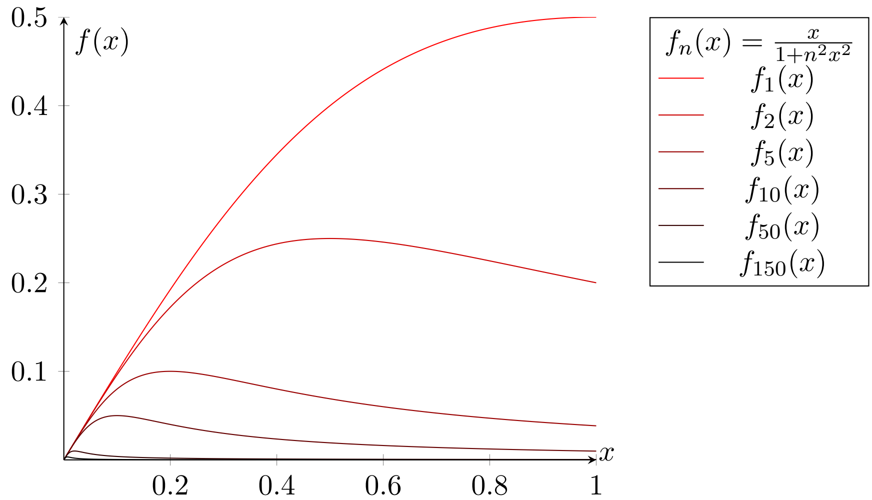
W przypadku ciągów funkcyjnych $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ łatwo stwierdzić, iż obszarem ich zbieżności punktowej jest A oraz granice punktowe $f(x) =$

$g(x) = 0$ dla $x \in A$. Warto przeanalizować charakter zbieżności na poniższym wykresie.



Widzimy z wykresu, że charakter zbieżności punktowej jest zależny od podzbioru A oraz zauważamy przesuwające się w kierunku 0 „garby” wykresów funkcji. Ich obniżanie się jest spowodowane błędami obliczeń numerycznych (już dla $n = 150$), gdyż $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$ dla $n \in \mathbb{N}$.

Inaczej wizualizują się wykresy elementów drugiego z ciągów funkcyjnych.



Zachowaliśmy w powyższym rysunku tę samą kolejność szkicowanych wykresów (i tę samą kolorystykę). Różnica widoczna jest od razu – w drugim przypadku mamy do czynienia z garbem tłumionym do zera. Poddamy ją teraz dokładniejszej analizie poszukując liczby $N(x,\varepsilon)$ oraz sprawdzając możliwość zastosowania wprowadzonego powyżej kryterium zbieżności (twierdzenie 3.1).

Zajmijmy się najpierw ciągiem

$$g_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}.$$

Skoro $1+n^2x^2 \geq 2xn$ dla dowolnych $n \in \mathbb{N}$ oraz $x \in A$, to oczywiście

$$\frac{x}{1+n^2x^2} \leq \frac{1}{2n}.$$

Stąd

$$\left|\frac{x}{1+n^2x^2}\right| \leq \frac{1}{2n} =: a_n$$

i skoro $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, to widzimy, iż ciąg $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny jednostajnie na A. Poszukiwanie liczby $N(\varepsilon)$ również warto przeprowadzić wykorzystując otrzymane ograniczenie górne. Stąd widzimy, że

$$n > \frac{1}{2\varepsilon} =: N(\varepsilon)$$

Stosowanie metod rachunku różniczkowego do oszacowania z góry wyrażenia

$$\frac{x}{1+n^2x^2} \text{ na } A$$

nie jest zatem, jak widzimy, zawsze niezbędne.

Zajmijmy się teraz ciągiem

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}.$$

Wiemy już, że $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$, co sugeruje, iż nie znajdziemy liczby $N(\varepsilon)$ dobranej dla wszystkich $x \in A$ przy ustalonym $\varepsilon > 0$. Widzimy, że

$$\frac{nx}{1+n^2x^2} \leq \frac{1}{nx} < \varepsilon \tag{3.6}$$

zachodzi dla $n > \frac{1}{x\varepsilon}$. W połączeniu z równością $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$ stwierdzamy zbieżność jedynie punktową na A. Chcemy tutaj podkreślić, iż samo oszacowanie (3.6) nie wystarcza do stwierdzenia braku zbieżności jednostajnej. Jest to jedno z wielu możliwych oszacowań i dopiero w połączeniu z wiedzą o przesuwającym się „stałym garbie wykresu" pozwala nam na konkluzję o braku zbieżności jednostajnej.

Z oszacowaniem (3.6) jest związana następująca interesująca obserwacja. Otóż na dowolnym przedziale $[a, 1]$, gdzie $a \in (0, 1)$ jest ustalone, ciąg $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny jednostajnie. Istotnie, wtedy dla $x \in [a, 1]$ mamy

$$\frac{1}{x \cdot n} \leq \frac{1}{a \cdot n}.$$

Stąd oraz z oszacowania (3.6) dostajemy

$$\frac{nx}{1+n^2x^2} \leq \frac{1}{nx} \leq \frac{1}{a \cdot n} =: a_n.$$

Skoro $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, to mamy od razu uzasadnienie zbieżności jednostajnej. Zauważmy przy okazji, iż na przedziale $(0,1]$ z usuniętym punktem, wokół którego powstawało zachowanie się ciągu prowadzące do braku zbieżności jednostajnej, otrzymujemy również zbieżność jedynie punktową. Uzasadniamy to jak powyżej.

Uwaga 3.7. Bardzo łatwo wykazać (Czytelnik zechce to ćwiczenie wykonać), iż jeżeli $f_n \rightrightarrows f$ na A_1 oraz $f_n \rightrightarrows f$ na A_2, gdzie A_1 i A_2 są rozłączne oraz $f : A_1 \cup A_2 \to \mathbb{R}$, to również $f_n \rightrightarrows f$ na $A_1 \cup A_2$. Stąd od razu wynika, że uzupełnienie obszaru zbieżności jednostajnej o skończoną liczbę zbiorów jednopunktowych nie zaburzy tej zbieżności.

3.4. Fundamentalne twierdzenia dotyczące ciągów funkcyjnych

Zanim przejdziemy do fundamentalnych twiedzeń, pozostaje nam omówić pojęcie zbieżności niemal jednostajnej.

Definicja 3.4. Niech dane będą funkcje $f_n, f : A \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Mówimy, że ciąg funkcyjny $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny niemal jednostajnie do funkcji f na A, jeżeli $f_n \rightrightarrows f$ na każdym domkniętym i ograniczonym podzbiorze zbioru A.

Od razu widzimy, że jeżeli $f_n \rightrightarrows f$ na A, to ciąg $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny niemal jednostajnie do funkcji f na A. Podobnie, jeżeli $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny niemal jednostajnie do funkcji f na A, to ciąg $f_n \to f$ na A.

Przykład 3.3. Ciąg
$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$$
jest zbieżny niemal jednostajnie na $(0,1]$, ale nie na $[0,1]$. Podobnie ciąg
$$f_n(x) = x^n$$
jest zbieżny niemal jednostajnie na $[0,1)$.

Postawimy teraz trzy podstawowe pytania dotyczące zachowania się granicy ciągu funkcyjnego. Zakładamy wykonalność działań, o których mowa poniżej, bez precyzowania odpowiednich założeń. Niech $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem funkcyjnym, $f_n, f : A \to \mathbb{R}$ i zakładamy, że

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x) \text{ dla } x \in A.$$

(i) Niech x_0 będzie punktem skupienia zbioru A. Czy ma miejsce relacja

$$\lim_{x\to x_0} \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x)\,?$$

(ii) Niech teraz A będzie przedziałem oraz $x_0 \in A$. Czy zachodzi zawsze

$$\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x_0)\right)' = \lim_{n\to+\infty} f_n'(x_0)?$$

(iii) Wreszcie niech $A = [a, b]$. Czy zachodzi równość

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx?$$

Podamy teraz przykłady, które mówią nam, że trzeba zachować niezwykłą ostrożność przy wszelkich przejściach granicznych.

Przykład 3.4. Niech

$$s_{n,m} = \frac{m}{n+m} \text{ dla } m, n \in \mathbb{N}.$$

Widzimy, że dla ustalonego $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{m\to+\infty} s_{n,m} = 1$$

oraz dla ustalonego $m \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to+\infty} s_{n,m} = 0,$$

skąd wynika, że

$$\lim_{n\to+\infty} \lim_{m\to+\infty} s_{n,m} \neq \lim_{m\to+\infty} \lim_{n\to+\infty} s_{n,m}.$$

Przykład 3.5. Niech teraz $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie dane wzorem

$$f_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{n}} \text{ dla } n \in \mathbb{N}.$$

Widzimy (przez bezpośredni rachunek), że

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n}} = 0 \text{ dla } x \in \mathbb{R},$$

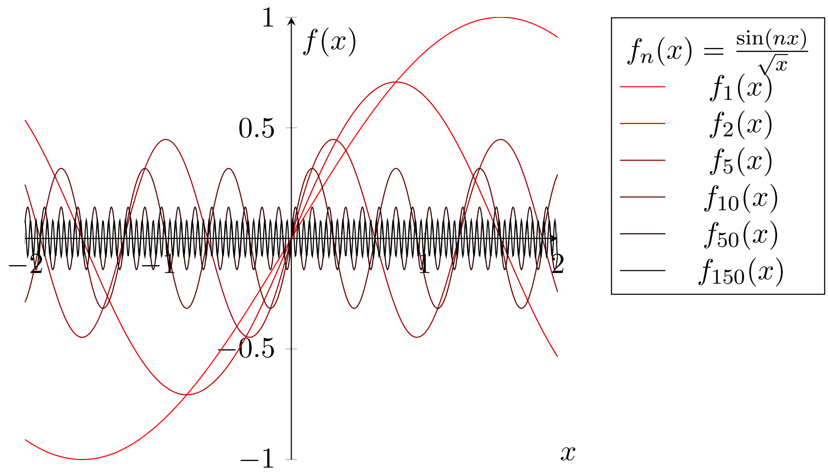
skąd wynika, że $f_n \to f_0$, gdzie $f_0(x) = 0$ dla $x \in \mathbb{R}$. Ponadto, skoro

$$\left|\frac{\sin nx}{\sqrt{n}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ dla } x \in \mathbb{R},$$

to otrzymujemy $f_n \rightrightarrows f_0$. Zauważmy, że $f_0'(x) = 0$ dla $x \in \mathbb{R}$, ale

$$f_n'(x) = \sqrt{n}\cos nx \text{ dla } x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}.$$

Skoro $f_n'(0) = \sqrt{n}$ dla $n \in \mathbb{N}$, to widzimy, że ciąg funkcyjny $\{f_n'\}_{n=1}^{\infty}$ nie jest zbieżny.



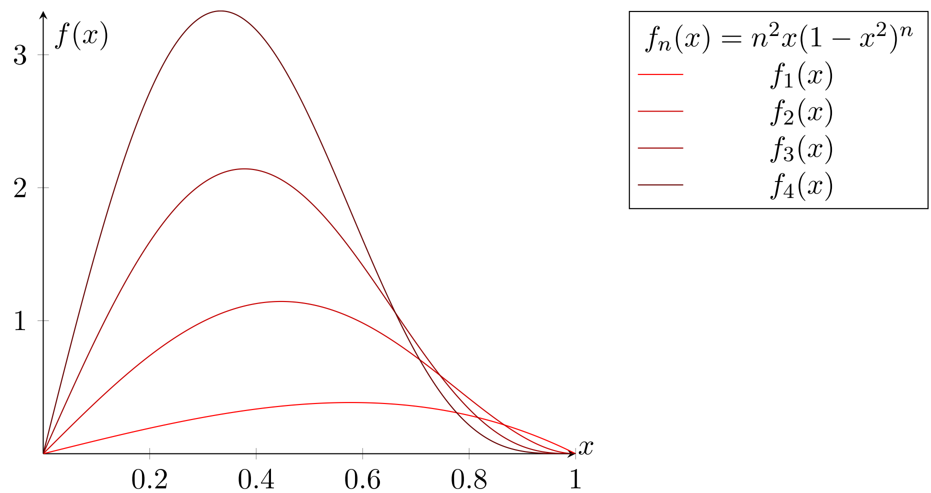
Przykład 3.6. Weźmy $f_n(x) = n^2 x \left(1 - x^2\right)^n$ na $[0,1]$ dla $n \in \mathbb{N}$. Łatwo sprawdzamy, że $f_n \to f_0$, gdzie $f_0(x) = 0$ dla $x \in [0,1]$, ale zbieżność ta nie

jest jednostajna. Wtedy

$$\int_0^1 f_0(x)\,dx = 0,$$

ale

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{n^2}{2n+2} \to +\infty \text{ dla } n \to +\infty.$$



W dowodzeniu kolejnych twierdzeń przydatny będzie warunek Cauchy'ego zbieżności jednostajnej. Jest to narzędzie bardziej teoretyczne niż praktyczne, chociaż w zasadzie stosowaliśmy je już z powodzeniem nie wypowiadając go formalnie.

Twierdzenie 3.2 (*Warunek Cauchy'ego zbieżności jednostajnej*)**.** *Niech dane będą funkcje* $f_n, f : A \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, *gdzie* $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$. *Wówczas* $f_n \rightrightarrows f$ *na* A *wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi następujący jednostajny warunek zbieżności:*

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{N:=N(\varepsilon)} \forall_{x\in A} \forall_{m,n\geq N} \left| f_n(x) - f_m(x) \right| \leq \varepsilon. \tag{3.7}$$

Dowód. Załóżmy, że $f_n \rightrightarrows f$ na A. Wtedy dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje takie $N(\varepsilon)$, że dla $x \in A$, $m, n \geq N(\varepsilon)$ zachodzą nierówności

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ oraz } |f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Stąd widzimy, że

$$|f_n(x) - f_m(x)| = |(f_n(x) - f(x)) - (f_m(x) - f(x))| \leq$$

$$|f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Załóżmy teraz, że zachodzi (3.7). Zatem dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje takie $N(\varepsilon)$, że dla $x \in A$, $m, n \geq N(\varepsilon)$ zachodzi nierówność

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon.$$

Ustalmy powyżej n oraz przejdźmy do nieskończoności z m. Wówczas dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $N(\varepsilon)$ takie, że dla $x \in A$, $n \geq N(\varepsilon)$ zachodzi nierówność

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon,$$

co oznacza, że $f_n \rightrightarrows f$ na A. ∎

Twierdzenie 3.3 (*O zamianie granic przy zbieżności jednostajnej*)**.** *Załóżmy, że dane są funkcje $f_n, f : A \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, takie, że $f_n \rightrightarrows f$ na A. Niech x_0 będzie punktem skupienia zbioru A. Połóżmy*

$$\lim_{x \to x_0} f_n(x) =: a_n$$

dla $n \in \mathbb{N}$. Wówczas ciąg $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny oraz

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{x \to x_0} f(x).$$

Inaczej mówiąc

$$\lim_{n \to +\infty} \lim_{x \to x_0} f_n(x) = \lim_{x \to x_0} \lim_{n \to +\infty} f_n(x).$$

Uwaga 3.8. Zauważmy, że w twierdzeniu 3.3 nie zkładamy istnienia granicy właściwej

$$\lim_{x \to x_0} f_n(x) = a_n$$

dla $n \in \mathbb{N}$.

Dowód. Skoro $f_n \rightrightarrows f$ na A, to dla dowolnego $\varepsilon > 0$ widzimy, że istnieje takie N_ε, że dla każdego $x \in A$ oraz dla wszystkich $m, n \geq N_\varepsilon$ mamy

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Przechodząc z x do granicy w x_0 widzimy, że dla $m, n \geq N_\varepsilon$

$$|a_n - a_m| \leq \varepsilon.$$

W konsekwencji ciąg $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ spełnia warunek Cauchy'ego, czyli jest zbieżny do pewnego $a_0 \in \mathbb{R}$. Mamy zatem dla każdego $x \in A$

$$\begin{aligned} |f(x) - a_0| &= |(f(x) - f_n(x)) + (f_n(x) - a_n) + (a_n - a_0)| \\ &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - a_n| + |a_n - a_0|. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Weźmy dowolne $\varepsilon > 0$ i dobierzmy N_ε w taki sposób, aby (na podstawie zbieżności $a_n \to a_0$) dla dowolnych $n \geq N_\varepsilon$ zachodziła nierówność

$$|a_n - a_0| < \frac{\varepsilon}{3}$$

oraz aby (na podstawie zbieżności jednostajnej) dla dowolnych $n \geq N_\varepsilon$, $x \in A$ zachodziła nierówność

$$|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Ustalmy pewien indeks $n \geq N_\varepsilon$. Dla tak dobranego n skorzystamy z definicji granicy

$$\lim_{x \to x_0} f_n(x) = a_n$$

znajdując dla $\frac{\varepsilon}{3}$ takie sasiędztwo V_{x_0} punktu x_0, że dla $x \in V_{x_0} \cap A$ zachodzi

$$|f_n(x) - a_n| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Stąd, skorzystawszy z (3.8), dla wszystkich $x \in V_{x_0} \cap A$ zachodzi szacowanie

$$|f(x) - a_0| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Skoro $\varepsilon > 0$ był dowolny, to widzimy, że

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a_0.$$

Zatem teza twierdzenia jest udowodniona. ∎

Powyższe twierdzenie od razu dostarcza nam informacji o ciągłości granicy jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji ciągłych.

Wnoisek 3.1. *Załóżmy, że dane są funkcje f_n, $f : A \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, takie, że $f_n \rightrightarrows f$ na A. Załóżmy, że funkcje f_n są ciągłe na A. Wtedy również funkcja f jest ciągła na A.*

Dowód. Funkcja f jest ciągła na A, jeśli jest ciągła w każdym punkcie tego zbioru. Jeżeli $x_0 \in A$ nie jest punktem skupienia zbioru A, to funkcja f jest ciągła wprost z definicji (gdyż x_0 jest wówczas punktem izolowanym, a każda funkcja jest ciągła w punktach izolowanych). Załóżmy teraz, że $x_0 \in A$ jest punktem skupienia zbioru A. Wtedy na podstawie ciągłości

$$\lim_{x \to x_0} f_n(x) = f_n(x_0) = a_n.$$

Ciągłość funkcji f jest wynika z twierdzenia 3.3. ∎

Uwaga 3.9. Warto podkreślić, iż wniosek 3.1 dostarcza łatwego kryterium pozwalającego badać zbieżność niejednostajną. Otóż jeżeli wszystkie elementy ciągu są funkcjami ciągłymi, a jego granica jest nieciągła, to zbieżność nie może być jednostajna. Tak jest w przypadku ciągu o wyrazach $f_n(x) = x^n$ na $[0,1]$. Należy jednak podkreślić, iż wszystkie elementy ciągu i granica mogą być funkcjami ciągłymi, ale zbieżność może być nadal niejednostajna. Ma to miejsce w przypadku ciągu o wyrazach $f_n(x) = x^n$ na $[0,1)$.

Uwaga 3.10. Wniosek 3.1 pozwala nam również na pewną ciekawą obserwację. Otóż wiemy, że dla ciągu liczbowego $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ relacja

$$\lim_{n\to+\infty} |a_n - a_0| = 0$$

mówi nam, że ciąg ten jest zbieżny do liczby a_0.

Zbieżność jednostajną we wniosku 3.1 można zastąpić zbieżnością niemal jednostajną z zachowaniem tezy.

Wnoisek 3.2. *Załóżmy, że funkcje f_n, $f : A \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, ciąg $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny niemal jednostajnie do funkcji f na zbiorze A oraz, że funkcje f_n są ciągłe na A. Wtedy również f jest ciągła na A.*

Przykład 3.7. Zwróćmy jeszcze uwagę na następujacy ciąg:

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{n} & \text{dla } x \text{ wymiernych,} \\ 0 & \text{dla pozostałych,} \end{cases}$$

który jest ciągiem funkcji nieciągłych (poza $x_0 = 0$) jednostajnie zbieżnym do funkcji stale równej 0, a więc ciągłej. Stąd widzimy, iż zbieżności jednostajnej nie należy bezpośrednio wiązać z ciągłością.

Wiemy, że istnieją ciągi funkcji ciągłych zbieżne punktowo do funkcji nieciągłej. Okazuje się, że jeżeli granica takiego ciągu określonego na zbiorze domkniętym i ograniczonym jest już ciągła oraz ciąg dla ustalonego x jest nierosnący, to zbieżność musi być jednostajna. Mamy bowiem następujący rezultat:

Twierdzenie 3.4. *Załóżmy, że:*

(i) $f_n, f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *dla* $n \in \mathbb{N}$ *są ciągłe;*

(ii) $f_n \to f$ *na* $[a, b]$*;*

(iii) *dla dowolnego* $x \in [a, b]$ *ciąg* $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *jest nierosnący, tzn.* $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$ *dla* $n \in \mathbb{N}$.

Wówczas $f_n \rightrightarrows f$ *na* $[a, b]$.

Uwaga 3.11. W powyższym twierdzeniu domkniętość zbioru $[a, b]$ jest niezbędna. Zdefiniujemy ciąg $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ następująco:

$$f_n(x) = \frac{1}{nx + 1}, \ 0 < x < 1.$$

Widzimy, że dla dowolnego x ciąg $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ jest malejący oraz

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = 0.$$

Zbieżność $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ do 0 na $(0, 1)$ nie jest jednostajna.

Zbieżność jednostajna zezwala na zachowanie ciągłości w granicy. Podobnie zezwala na przejście do granicy pod znakiem całki. Mamy bowiem następujące twierdzenie:

Twierdzenie 3.5. *Załóżmy, że* $f_n, f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *dla* $n \in \mathbb{N}$ *są całkowalne na* $[a, b]$ *oraz że*

$$f_n \rightrightarrows f \text{ na } [a, b].$$

Wówczas zachodzą równości

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b \lim_{n \to +\infty} f_n(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx. \tag{3.9}$$

Dowód. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Skoro $f_n \rightrightarrows f$ na $[a, b]$, to istnieje takie $N = N(\varepsilon)$, że dla $n \geq N(\varepsilon)$ zachodzi

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \text{ dla } x \in [a, b].$$

Stąd dla $n \geq N(\varepsilon)$ mamy

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right| &= \left|\int_a^b (f_n(x) - f(x))\,dx\right| \\ &\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx \\ &\leq \int_a^b \varepsilon dx = \varepsilon(b-a).\end{aligned}$$

Zatem dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje takie $N = N(\varepsilon)$ (dobrane do $\varepsilon(b-a)$), że dla $n \geq N(\varepsilon)$ zachodzi nierówność

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \varepsilon(b-a),$$

co oznacza, że

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Skoro $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$ dla $x \in [a,b]$, to stąd wynika (3.9). ∎

Najczęściej używanym warunkiem wystarczającym całkowalności jest ciągłość funkcji. Zatem powyższy rezultat stosuje się dla jednostajnie zbieżnych ciągów funkcji ciągłych. Wtedy funkcja f jest od razu całkowalna (jako ciągła). Dodatkowo można wykazać, że granica jednostajna ciągu funkcji całkowalnych w sensie Riemanna jest całkowalna w sensie Riemanna.

Powstaje naturalne pytanie, czy powyższy wynik można przenieść na przypadek całki niewłaściwej (np. pierwszego rodzaju). Trzeba tutaj pamiętać o subtelnych związkach całkowalności oraz całkowalności bezwzględnej. Powtarzając dowód twierdzenia 3.5 otrzymujemy następujący rezultat:

Twierdzenie 3.6. *Załóżmy, że $f, f_n \in \Re_{loc}([a,+\infty))$ dla $n \in \mathbb{N}$ oraz że całki*

$$\int_a^{+\infty} f_n(x)\,dx, \quad \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

są zbieżne bezwzględnie dla $n \in \mathbb{N}$. *Niech* $f_n \rightrightarrows f$ *na* $[a, +\infty)$. *Wówczas*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^{+\infty} f_n(x)\,dx = \int_a^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Pozostaje nam podać twierdzenie pozwalające różniczkować ciąg funkcyjny wyraz po wyrazie.

Twierdzenie 3.7. *Niech* $f_n, f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *dla* $n \in \mathbb{N}$. *Załóżmy, że* $f_n \in C^1([a, b])$ *oraz że*

$$f_n' \rightrightarrows g,\ f_n \to f \text{ na } [a, b].$$

Wówczas

$$f'(x) = g(x) \text{ dla } x \in [a, b],$$

czyli

$$\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n\to+\infty} f_n'(x) \text{ dla } x \in [a, b]. \tag{3.10}$$

Dowód. Skoro f_n' dla $n \in \mathbb{N}$ jest funkcją ciągłą, to na podstawie twierdzenia Newtona-Leibniza dla dowolnie ustalonego $x \in [a, b]$ zachodzi

$$f_n(x) - f_n(a) = \int_a^x f_n'(t)\,dt. \tag{3.11}$$

Na podstawie zbieżności jednostajnej $f_n' \rightrightarrows g$ na $[a, b]$ mamy

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^x f_n'(t)\,dt = \int_a^x \lim_{n\to+\infty} f_n'(t)\,dt = \int_a^x g(t)\,dt,$$

zatem przechodząc w (3.11) do granicy z n do nieskończoności otrzymujemy

$$f(x) - f(a) = \int_a^x g(t)\,dt.$$

Skoro g (jako granica jednostajna ciągu funkcji ciągłych) jest funkcją ciągłą, to widzimy, że f jest funkcją różniczkowalną oraz $f'(x) = g(x)$. Mając na uwadze definicje funkcji f i g dostajemy od razu (3.10) z dowolności x. ∎

Uwaga 3.12. Wystarczy w powyższym twierdzeniu założyć, iż pochodne f_n' dla $n \in \mathbb{N}$ oraz funkcja g są całkowalne. Ponadto, wystarczy założyć, iż f_n zbiega do f przynajmniej w jednym punkcie. Trzeba jednak wtedy w inny sposób przeprowadzić dowód.

Uwaga 3.13. Zwróćmy uwagę na to, iż zbieżność f_n do f (nawet jednostajna) nie gwarantuje, że formuła (3.10) jest prawdziwa przy zbieżności f_n do g jedynie punktowej. Istotnie, dla $n \in \mathbb{N}$ zdefinujmy funkcje $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wzorem

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + n \cdot x^2}.$$

Niech $f(x) = 0$ dla $x \in \mathbb{R}$. Postępując jak w podrozdziale 3.3 możemy wywnioskować, że $f_n \rightrightarrows f$ na $\mathbb{R}$. Widzimy, że

$$f_n'(x) = \frac{1 - nx^2}{(nx^2 + 1)^2} \text{ dla } x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$$

Stąd od razu wynika, że ciąg $\{f_n'\}_{n=1}^{\infty}$ zbiega punktowo do

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x = 0, \\ 0 & \text{dla } x \neq 0. \end{cases}$$

Wzór (3.10) zachodzi zatem jedynie dla $x \neq 0$.

3.5. Twierdzenie Arzeli-Ascolego

Wiemy, że ciąg ograniczony liczb rzeczywistych posiada podciąg zbieżny. Interesuje nas, czy podobny rezultat zachodzi w przypadku ciągów funkcyjnych, czyli czy ciąg funkcyjny ograniczony posiada podciąg zbieżny jednostajnie. Zbieżność punktowa byłaby łatwiejsza do uzyskania. Jak pamiętamy, nie jest ona warunkiem wystarczającym do zastosowania żadnego z podstawowych twierdzeń o ciągach.

Definicja 3.5. Rozważmy rodzinę funkcji $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Ciąg funkcji $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazywamy jednostajnie ograniczonym, jeżeli

$$\exists_{M>0}\forall_{x\in[a,b]}\forall_{n\in\mathbb{N}}\left|f_n\left(x\right)\right| \leq M.$$

Przykład 3.8. Niech $[a, b] = [0, 1]$ oraz

$$f_n\left(x\right) = \frac{x^2}{x^2 + \left(1 - nx\right)^2}.$$

Wówczas

$$f_n \to 0 \text{ na } [0, 1]$$

oraz dla dowolnych $x \in [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}$ otrzymujemy

$$\left|f_n\left(x\right)\right| = \left|\frac{x^2}{x^2 + \left(1 - nx\right)^2}\right| \leq 1.$$

Ciąg $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ nie zawiera ani jednego podciągu zbieżnego jednostajnie, gdyż

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = 1 \text{ dla } n \in \mathbb{N}.$$

Podobne zjawisko braku zbieżności jednostajnej mieliśmy już okazję analizować dla ciągów jednostajnie ograniczonych (wtedy ich tak nie nazywaliśmy) w podrozdziale 3.3.

Z powyższego przykładu widzimy, że założenie o jednostajnej ograniczoności nie wystarcza do wyboru podciągu zbieżnego jednostajnie z danego ciągu funkcyjnego.

Definicja 3.6. Mówimy, że funkcja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest jednostajnie ciągła na $[a, b]$, jeżeli

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta:=\delta(\varepsilon)>0}\forall_{x,y\in[a,b]}\left|x - y\right| < \delta \implies \left|f\left(x\right) - f\left(y\right)\right| < \varepsilon.$$

Każda funkcja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ciągła na $[a, b]$ jest tam jednostajnie ciągła. Oznacza to, iż w pewnym sensie taka funkcja jest w taki sam sposób ciągła w każdym punkcie. Musimy zatem dodatkowo zagwarantować, iż elementy ciągu jednostajnie ograniczonego są funkcjami ciągłymi w taki sam sposób. Stąd propnujemy następującą definicję:

Definicja 3.7 (*Jednakowa jednostajna ciągłość*)**.** Mówimy, że rodzina $\Re$ której elementami są funkcje określone na $[a, b]$ o wartościach w $\mathbb{R}$ jest jednakowo jednostajnie ciągła, jeżeli

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta:=\delta(\varepsilon)>0}\forall_{f\in\Re}\forall_{x,y\in[a,b]}\,|x-y|<\delta \implies |f(x)-f(y)|<\varepsilon. \tag{3.12}$$

Przykład 3.9. Rodzina funkcji z poprzedniego przykładu nie stanowi rodziny jednakowo jednostajnie ciągłej, co jest konsekwencją tego, że

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = 1,\ f_n(0) = 0 \text{ dla } n \in \mathbb{N}.$$

Stąd dla $\varepsilon = \frac{1}{2}$ nie znajdziemy takiej liczby $\delta > 0$, że zachodzi (3.12) dla każdej funkcji f_n.

Przykład 3.10. Każda skończona rodzina funkcji ciągłych na $[a, b]$ jest rodziną funkcji jednakowo jednostajnie ciągłych. Istotnie, niech $\Re = \{f_n\}_{n=1}^{N}$, przy czym $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ dla $n = 1, 2, ..., N$ są ciągłe. Weźmy dowolne $\varepsilon > 0$. Wtedy istnieją takie liczby $\delta_n > 0$ dla $n = 1, 2, ..., N$, że dla dowolnych $x, y \in [a, b]$ zachodzi implikacja

$$|x-y| < \delta_n \implies |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon.$$

Biorąc

$$\delta = \min_{1\le n\le N} \delta_n$$

widzimy, że $\delta > 0$ oraz że

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta:=\delta(\varepsilon)>0}\forall_{f\in\Re}\forall_{x,y\in[a,b]}\,|x-y|<\delta \implies |f(x)-f(y)|<\varepsilon.$$

Przykład 3.11. Niech $\mathfrak{R}$ oznacza ciąg funkcji $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, spełniających na $[a,b]$ warunek Lipschitza z tą samą stałą $L > 0$, tzn.

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \forall_{x,y\in[a,b]} \left| f_n(x) - f_n(y) \right| \leq L \left| x - y \right|.$$

Wówczas $\mathfrak{R}$ jest rodziną jednakowo jednostajnie ciągłą. Istotnie, weźmy dowolny $\varepsilon > 0$ i połóżmy $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$. Wtedy dla dowolnych $|x-y| < \delta$ oraz dowolnego $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$\left| f_n(x) - f_n(y) \right| \leq L \left| x - y \right| < L \frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon.$$

Taką rodziną jest np. ciąg funkcji

$$f_n(x) = \sin nx \text{ dla } x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}.$$

Twierdzenie 3.8. *Załóżmy, że ciąg funkcji ciągłych $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, przy czym $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, jest jednostajnie zbieżny na $[a,b]$ do pewnej funkcji $f_0 : [a,b] \to \mathbb{R}$. Wtedy rodzina $\mathfrak{R} = \{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ jest jednakowo jednostajnie ciągła.*

Dowód. Skoro $f_n \rightrightarrows f_0$, to korzystając z definicji oraz jednostajnego warunku Cauchy'ego (twierdzenie 3.2) dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje takie $N := N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, że dla $n \geq N$ zachodzi

$$\left| f_n(x) - f_0(x) \right| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ dla } x \in [a,b]$$

oraz dla $m \geq n \geq N$ mamy

$$\left| f_n(x) - f_m(x) \right| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ dla } x \in [a,b].$$

Ustalmy dowolnie $n \geq N$. Wtedy dla $x \in [a,b]$ mamy

$$\left| f_n(x) - f_N(x) \right| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{3.13}$$

Funkcje f_n dla $n = 1, 2, .., N$ są na podstawie przykładu 3.10 jednakowo jednostajnie ciągłe. Wiemy, że wtedy istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że dla $x, y \in [a,b]$

$$|x - y| < \delta \implies \left| f_n(x) - f_n(y) \right| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{3.14}$$

Weźmy teraz $n > N$ oraz $x, y \in [a, b]$ takie, że $|x - y| < \delta$. Wtedy z (3.13) oraz (3.14) mamy

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_n(y)| &\leq |f_n(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(y)| + |f_n(y) - f_N(y)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Podsumowując

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta:=\delta(\varepsilon)>0} \forall_{n\in\mathbb{N}} \forall_{x,y\in[a,b]} \, |x - y| < \delta \implies |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon. \quad \blacksquare$$

Przejdziemy teraz do omówienia twierdzeń pozwalających na wybór podciągów z ciągów ograniczonych punktowo, a następnie podciągów zbieżnych jednostajnie z rodzin funkcji jednostajnie ograniczonych i jednakowo jednostajnie ciągłych.

Twierdzenie 3.9. *Dany jest zbiór przeliczalny A oraz ciąg funkcyjny $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, $f_n : A \to \mathbb{R}$ dla $n \in \mathbb{N}$ taki, że*

$$\forall_{x\in A} \exists_M \forall_{n\in\mathbb{N}} \, |f_n(x)| \leq M.$$

Wtedy istnieją podciąg $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ ciągu $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ oraz funkcja $f_0 : A \to \mathbb{R}$ takie, że

$$\lim_{k\to+\infty} f_{n_k}(x) = f_0(x) \ \text{dla } x \in A.$$

Dowód. Zastosujemy przekątniową metodę wyboru. Zbiór A ustawiamy w ciąg $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Ponieważ ciąg liczbowy $\{f_n(x_1)\}_{n=1}^{\infty}$ jest ograniczony, to ma podciąg zbieżny oznaczany $\{f_{1,k}\}_{k=1}^{\infty}$. Ciąg $\{f_{1,k}\}_{k=1}^{\infty}$ wybieramy w ten sam sposób z ciągu $\{f_{1,k}(x_2)\}_{k=1}^{\infty}$. Kontynuując tę procedurę otrzymujemy rodzinę ciągów $S_1, S_2, \ldots$ zapisaną w postaci „macierzy nieskończonej”:

$$\begin{bmatrix} S_1: & f_{1,1} & f_{12} & f_{1,3} & f_{1,4} & f_{1,5} & \cdots \\ S_2: & f_{2,1} & f_{2,2} & f_{2,3} & f_{2,4} & f_{2,5} & \cdots \\ S_3: & f_{3,1} & f_{3,2} & f_{3,3} & f_{3,4} & f_{3,5} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ S_n & f_{n,1} & f_{n,2} & f_{n,3} & f_{n,4} & f_{n,5} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

Elementy tej rodziny mają następujące własności:
a) ciąg $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest podciągiem ciągu $\{S_{n-1}\}_{n=2}^{\infty}$;
b) $\{f_{n,k}(x_n)\}_{k=1}^{\infty}$ jest zbieżny (rozważamy granicę przy $k \to +\infty$);
c) zachowana jest kolejność występowania funkcji w kolejno po sobie następujących ciągach.

Rozważmy teraz ciąg

$$S: \quad f_{1,1} \quad f_{2,2} \quad f_{3,3} \quad f_{4,4} \quad \cdots$$

Ciąg S jest, zgodnie z przeprowadzoną konstrukcją, podciągiem ciągu $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ dla dowolnego $n \geq 1$, poza być może początkowymi $n-1$ wyrazami. Zatem dla dowolnego $x_i \in A$

$$\lim_{n \to +\infty} f_{n,n}(x_i) =: f_0(x_i),$$

czyli funkcję f_0 definiujemy punktowo jako granice kolejno wybieranych podciągów zbieżnych. ∎

Bez dowodu podajemy na koniec następujące twierdzenie:

Twierdzenie 3.10 (*Arzeli-Ascolego*). *Niech $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie ciągiem funkcji jednakowo jednostajnie ciągłych oraz jednostajnie ograniczonym. Wówczas istnieją podciąg $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ ciągu $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ oraz funkcja $f_0 : [a,b] \to \mathbb{R}$ takie, że*

$$f_{n_k} \rightrightarrows f_0 \text{ na } [a,b].$$

Uwaga 3.14. Jeżeli każdy podciąg $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ ciągu $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ w powyższym twierdzeniu jest zbieżny do tej samej funkcji f_0, to również

$$f_n \rightrightarrows f_0 \text{ na } [a,b] .$$

Dodatkowo warunek jednostajnej ograniczoności można w tej sytuacji zastąpić warunkiem punktowej ograniczoności ciągu $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Wnoisek 3.3. *Niech $\Re$ oznacza ciąg funkcji $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, przy czym $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, spełniających na $[a,b]$ warunek Lipschitza z tą samą stałą $L > 0$ i takich, że $f_n(0) = 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Wówczas $\Re$ jest jednakowo jednostajnie ciągła.*

Dowód. Ponieważ dla dowolnych $x \in [a,b]$ oraz $n \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$|f_n(x)| = |f_n(x) - f_n(0)| \le L|x| \le L \max\{|a|, |b|\} ,$$

to rodzina $\Re$ jest jednostajnie ograniczona. Stąd na podstawie twierdzenia 3.10 rodzina $\Re$ zawiera podciąg jednostajnie zbieżny. ∎

ROZDZIAŁ 4

Szeregi funkcyjne

4.1. Wprowadzenie

Niech $A \subset \mathbb{R}$ będzie ustalonym zbiorem. Rozważmy rodzinę funkcji

$$f_n : A \to \mathbb{R} \text{ dla } n \in \mathbb{N}.$$

Definiujemy ciąg funkcyjny $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ sum częściowych $S_n : A \to \mathbb{R}$ dla $n \in \mathbb{N}$ następująco:

$$S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x) \text{ dla } x \in A.$$

Mówimy, że szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ jest zbieżny punktowo (odpowiednio: jednostajnie) na A do funkcji $S : A \to \mathbb{R}$ zwanej sumą tego szeregu, jeżeli ciąg sum częściowych jest zbieżny punktowo (odpowiednio: jednostajnie) do S. Piszemy wówczas odpowiednio

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \to S \text{ oraz } \sum_{n=1}^{+\infty} f_n \rightrightarrows S \text{ na } A.$$

Funkcję S definiujemy zatem w sposób następujący dla $x \in A$:

$$S(x) = \lim_{n\to+\infty} S_n(x).$$

Podobnie jak w przypadku ciągów funkcyjnych mówimy o obszarze zbieżności punktowej i jednostajnej szeregu funkcyjnego. Podsumowując, mówimy, że szereg $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ zbiega na A do funkcji S:

(i) **punktowo** na A, jeżeli

$$\forall_{\varepsilon>0}\forall_{x\in A}\exists_{N:=N(\varepsilon,x)}\forall_{n\geq N} \left|S_n\left(x\right)-S\left(x\right)\right|<\varepsilon;$$

piszemy wtedy

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \to S \text{ na } A;$$

(ii) **jednostajnie** na A, jeżeli

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{N:=N(\varepsilon)}\forall_{x\in A}\forall_{n\geq N} \left|S_n\left(x\right)-S\left(x\right)\right|<\varepsilon;$$

piszemy wtedy

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \rightrightarrows S \text{ na } A;$$

(iii) **bezwzględnie** na A, jeżeli dla każdego $x \in A$ szereg $\sum_{n=1}^{+\infty} \left|f_n\left(x\right)\right|$ jest zbieżny.

Uwaga 4.1. Jak widzimy z powyższych definicji, zarówno zbieżność punktowa, jak i jednostajna szeregu funkcyjnego, sprowadza się do odpowiedniej zbieżności ciągu sum częściowych rozpatrywanego szeregu funkcyjnego. Stąd łatwo stwierdzić, że warunkiem koniecznym i wystarczającym zbieżności jednostajnej jest spełnienie następującego (jednostajnego) warunku Cauchy'ego:

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{N:=N(\varepsilon)}\forall_{x\in A}\forall_{m\geq n\geq N} \left|S_n\left(x\right)-S_m\left(x\right)\right|<\varepsilon.$$

Uwaga 4.2. Zauważmy, że warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby

$$f_n \rightrightarrows f \text{ na } A,$$

jest

$$f_n - f \rightrightarrows 0 \text{ na } A.$$

Stąd mamy bezpośrednią obserwację dotyczącą zbieżności jednostajnej szeregów:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \rightrightarrows S \text{ na } A$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$S_n - S \rightrightarrows 0 \text{ na } A.$$

Zauważmy, że $\{S_n - S\}_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem reszt szeregu funkcyjnego $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$. Warto pamiętać o tej obserwacji, gdyż (jak wiemy z teorii szeregów liczbowych) w niektórych przypadkach reszty szeregów dają się łatwo szacować.

Często w zapisie będziemy stosowali konwencję $0^0 = 1$.

4.2. Kryterium Weierstrassa

Warunkiem wystarczającym mówiącym o zbieżności jednostajnej szeregu funkcyjnego jest podane poniżej kryterium Weierstrassa. Wykorzystamy w nim warunek Cauchy'ego, mówiący o tym, że szereg liczbowy

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy jego ciąg sum częściowych $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, gdzie

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \text{ dla } n \in \mathbb{N},$$

spełnia zależność

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{N:=N(\varepsilon)} \forall_{m>n\geq N} \, |s_n - s_m| < \varepsilon$$

lub równoważnie (po rozpisaniu różnicy w module)

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{N:=N(\varepsilon)} \forall_{m>n\geq N} \, |a_{n+1} + \ldots + a_m| < \varepsilon.$$

Twierdzenie 4.1 (*Kryterium Weierstrassa*)**.** *Niech $A \subset \mathbb{R}$ będzie ustalonym zbiorem. Rozważmy rodzinę funkcji $f_n : A \to \mathbb{R}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Załóżmy, że $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest takim ciągiem liczbowym, że*

$$|f_n(x)| \leq a_n \text{ dla } x \in A.$$

Jeżeli szereg liczbowy $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ jest zbieżny, to szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ jest zbieżny jednostajnie i bezwzględnie na A (do swojej sumy S).

Dowód. Skoro szereg $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ jest zbieżny, to spełnia warunek Cauchy'ego. Weźmy dowolne $\varepsilon > 0$ i dobierzmy $N(\varepsilon)$ w taki sposób, że dla $m > n \geq N(\varepsilon)$

$$a_{n+1} + \ldots + a_m < \varepsilon.$$

Skoro

$$|f_n(x)| \leq a_n \text{ dla } x \in A,$$

to mamy dla tych samych n, m oraz $x \in A$

$$|S_n(x) - S_m(x)| = |f_{n+1}(x) + \ldots + f_m(x)| \leq a_{n+1} + \ldots + a_m < \varepsilon. \tag{4.1}$$

Stąd wnioskujemy, że ciąg sum częściowych szeregu $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ spełnia jednostajny warunek Cauchy'ego, czyli jest zbieżny jednostajnie. Widzimy zatem, że szereg $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ jest zbieżny jednostajnie na A. Zbieżność bezwzględna wynika z oszacowania (4.1) (dla dowolnie ustalonego $x \in A$). ∎

Stosowanie podanego wyżej kryterium Weierstrassa jest zbliżone do stosowania znanych nam kryteriów porównawczych. Należy wyznaczyć majorantę, której zbieżność badamy przy pomocy znanych kryteriów dla szeregów liczbowych.

Przykład 4.1. Rozważmy szereg

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n^4 x)}{n\sqrt{n}}$$

na $\mathbb{R}$. Widzimy, że dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ mamy

$$\left|\frac{\sin\left(n^4 x\right)}{n\sqrt{n}}\right| \leq \frac{1}{n\sqrt{n}}.$$

Skoro szereg

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

jest zbieżny, to z kryterium Weierstrassa (twierdzenie 4.1) wnioskujemy, że szereg

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(n^4 x\right)}{n\sqrt{n}}$$

jest zbieżny bezwzględnie i jednostajnie na $\mathbb{R}$, a zatem również punktowo.

Powyższy przykład sugeruje następujący prosty i przydatny wniosek dotyczący badania zbieżności jednostajnej. Otóż przemnożenie wyrazów szeregu przez funkcję ograniczoną nie wpływa na jego zbieżność jednostajną. Zbieżność jednostajna szeregów, podobnie jak w przypadku ciągów, nie musi się wiązać z ciągłością wyrazów ciągu.

Przykład 4.2. Niech $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie ustaloną funkcją. Rozważmy szereg

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + \varphi^2(x)} \tag{4.2}$$

dla $x \in \mathbb{R}$. Skoro dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$0 \leq \frac{1}{n^2 + \varphi^2(x)} \leq \frac{1}{n^2}$$

oraz skoro szereg

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

jest zbieżny, to na podstawie kryterium Weierstrassa (twierdzenie 4.1) zbieżny jednostajnie i bezwzględnie jest szereg (4.2). Suma szeregu (4.2) nie musi być funkcją ciągłą, gdy funkcja φ nie jest ciągła (φ może być np. funkcją Dirichleta).

Kryterium Weierstrassa (twierdzenie 4.1) dostarcza jedynie warunku wystarczającego zbieżności jednostajnej. Zwróćmy uwagę na poniższy przykład, w którym mimo braku zbieżnej majoratny w postaci szeregu liczbowego dany szereg funkcyjny jest zbieżny jednostajnie. Warto przypomnieć sposób szacownia reszty $r_n = s - s_n$ dla $n \in \mathbb{N}$ (tutaj s jest sumą szeregu liczbowego, a s_n jego sumą częściową) w przypadku stosowania kryterium Leibniza do badania zbieżności szeregu

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} c_n,$$

gdzie $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest malejącym i zbieżnym do 0 ciągiem liczb rzeczywistych dodatnich. Wówczas

$$|r_n| \leq c_{n+1}$$

dla $n \in \mathbb{N}$.

Przykład 4.3. Rozważmy szereg

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{x^2 + n} \tag{4.3}$$

określony dla $x \in \mathbb{R}$. Niemniej jednak z uwagi poczynionej przed przykładem wiemy, że reszta szeregu (4.3) R_n szacuje się następująco dla $x \in \mathbb{R}$:

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{x^2 + n + 1} \leq \frac{1}{n+1}.$$

Z powyższego oszacowania ciąg reszt $R_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest zbieżny jednostajnie. Zatem szereg (4.3) również zbiega jednostajnie na $\mathbb{R}$. Zauważmy, iż szereg wartości bezwględnych nie jest zbieżny nawet punktowo, co (dla każdego ustalonego $x \in \mathbb{R}$) wynika z rozbieżności szeregu

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + n}.$$

Przykład 4.4. Szereg

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^2}{(1+x^2)^n} \tag{4.4}$$

jest zbieżny punktowo i bezwzględnie dla $x \in \mathbb{R}$. Istotnie, dla dowolnego $N \in \mathbb{N}$ i dowolnie ustalonego $x \neq 0$ mamy

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} &= x^2 \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(1+x^2)^n} = x^2 \frac{1-\frac{1}{(1+x^2)^N}}{1-\frac{1}{1+x^2}} \\ &= \left(x^2+1\right)\left(1-\frac{1}{(x^2+1)^N}\right). \end{aligned}$$

Stąd przy $N \to +\infty$ otrzymujemy

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} \to x^2+1,$$

skąd wynika zbieżność punktowa i bezwzględna na $\mathbb{R}$. W przypadku badania zbieżności jednostajnej szeregu (4.4) widzimy, że dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ reszta oszacowana jest następująco:

$$|R_n(x)| \leq \frac{x^2}{(1+x^2)^n} = \frac{x^2}{1+nx^2+\ldots+x^{2n}} \leq \frac{x^2}{nx^2} = \frac{1}{n}.$$

Powyższe oszacowanie jest oczywiście prawdziwe dla $x=0$. Stąd, rozumując jak w poprzednim przykładzie, uzyskujemy zbieżność jednostajną szeregu (4.4) na $\mathbb{R}$.

Podobnie jak w przypadku badania zbieżności całek, do badania zbieżności jednostajnej szeregów można wykorzystać kryterium Dirichleta, które podajemy bez dowodu.

Twierdzenie 4.2 (*Kryterium Dirichleta*). *Niech $A \subset \mathbb{R}$ i niech*

$$f_n, g_n : A \to \mathbb{R} \textit{ dla } n \in \mathbb{N}.$$

Załóżmy, że sumy częściowe szeregu funkcyjnego $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ *są wspólnie ograniczone, to znaczy, że istnieje taka stała* $M > 0$, *że dla dowolnego* $N \in \mathbb{N}$ *oraz dowolnego* $x \in A$ *zachodzi nierówność*

$$\left|\sum_{n=1}^{N} f_n(x)\right| \leq M.$$

Załóżmy, że $g_n \rightrightarrows 0$ *na* A *oraz że dla każdego* $x \in A$ *ciąg* $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *jest monotoniczny. Wówczas szereg*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n g_n$$

jest zbieżny jednostajnie na A.

Przykład 4.5. Kryterium Dirichleta można w łatwy sposób zastosować do badnia zbieżności jednostajnej szeregu

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin nx$$

w przedziale $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, jeżeli $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest malejącym ciągiem liczb dodatnich zbieżnym do zera. Istotnie, dla ustalonego $N \in \mathbb{N}$ i dowolnego $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ mamy

$$\left|\sum_{n=1}^{N} \sin nx\right| = \left|\frac{\cos \frac{1}{2}x - \cos\left(N + \frac{1}{2}\right)x}{\sin \frac{1}{2}x}\right| \leq 2\sqrt{2}.$$

Do badania zbieżności jednostajnej szeregów funkcyjnych przydatne będzie także inne kryterium, które podamy poniżej. Skorzystamy z niego w dalszych rozważaniach.

Twierdzenie 4.3 (*Kryterium Abela*). *Niech* $A \subset \mathbb{R}$ *i niech dane będą funkcje* f_n, $g_n : A \to \mathbb{R}$ *dla* $n \in \mathbb{N}$. *Załóżmy, że szereg* $\sum_{n=1}^{+\infty} g_n$ *jest zbieżny jednostajnie na* A *oraz każdego* $x \in A$ *ciąg* $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *jest monotoniczny i funkcje* f_n *są* *jednostajnie ograniczone, tj. istnieje taka stała $M > 0$, że dla dowolnego $N \in \mathbb{N}$ oraz dowolnego $x \in A$ zachodzi*

$$|f_n(x)| \leq M.$$

Wówczas szereg

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n g_n$$

jest zbieżny jednostajnie na A.

4.3. Twierdzenia o zamianie sumy i granicy

Wzorując się na wynikach uzyskanych dla ciągów funkcyjnych, łatwo podać twierdzenia dotyczące ciągłości sumy (wniosek 3.1), jej różniczkowalności (zamiany kolejności sumowania i różniczkowania, twierdzenie 3.7) oraz zamiany całki i znaku sumy (twierdzenie 3.5). Nie będziemy ich dowodzić. Odpowiednie dowody są powtórzeniem tych, które podaliśmy dla ciągów.

Niech $A \subset \mathbb{R}$ będzie ustalonym zbiorem. Rozważmy rodzinę funkcji

$$f_n : A \to \mathbb{R} \text{ dla } n \in \mathbb{N}$$

oraz ciąg funkcyjny $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ sum częściowych $S_n : A \to \mathbb{R}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Przez $S : A \to \mathbb{R}$ oznaczamy sumę szeregu $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$.

Twierdzenie 4.4. *Załóżmy, że dane są funkcje $f_n, S : A \to \mathbb{R}$ dla $n \in \mathbb{N}$ takie, że funkcje f_n są ciągłe na A oraz $S_n \rightrightarrows S$. Wtedy również funkcja S jest również ciągła na A, czyli dla dowolnego $x_0 \in A$ będącego punktem skupienia zbioru A zachodzi*

$$S(x_0) = \lim_{x \to x_0} S(x) = \lim_{x \to x_0} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \to x_0} f_n(x).$$

Podobnie jak w przypadku ciągów funkcyjnych wystarczy założyć, iż S_n zbiega do S niemal jednostajnie na A.

Przykład 4.6. Rozważmy szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ funkcji $f_n(x) = x^n$ określonych i ciągłych na $(-1,1)$. Szereg ten jest zbieżny niemal jednostajnie na $(-1,1)$. Istotnie, ustalmy $a \in (0,1)$. Wówczas mamy dla $x \in [-a,a]$ oraz $n \in \mathbb{N}$

$$|x^n| \leq a^n.$$

Skoro

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a},$$

to z kryterium Weierstrassa (twierdzenie 4.1) wnioskujemy, że szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ jest zbieżny jednostajnie na $[-a,a]$. Z dowolności $a \in (0,1)$ jest on zbieżny niemal jednostajnie na $(-1,1)$ oraz

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ nie jest zbieżny jednostajnie na $(-1,1)$. Wiemy, że

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \text{ dla } x \in (-1,1)$$

Sumy częściowe tego szeregu są postaci

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} x^n = \frac{1-x^N}{1-x}$$

dla $N \in \mathbb{N}$. Stąd i z postaci sumy dostajemy, że reszta szeregu $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ jest następująca

$$R_N(x) = \frac{x^N}{1-x}$$

dla $N \in \mathbb{N}$. Skoro

$$\lim_{x \to -1^+} R_N(x) = \frac{1}{2} \text{ oraz } \lim_{x \to 1^-} R_N(x) = +\infty,$$

to widzimy, że chociażby dla $\varepsilon = \frac{1}{2}$ nie znajdziemy takiej liczby $N(\varepsilon)$, że $|R_N(x)| < \varepsilon$ dla $x \in (-1, 1)$. W konsekwencji ciąg reszt nie jest zbieżny jednostajnie na $(-1, 1)$, a zatem i szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ nie jest zbieżny jednostajnie na $(-1, 1)$.

Twierdzenie 4.5. *Załóżmy, że dane są funkcje f_n, $S : [a, b] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, całkowalne na $[a, b]$ oraz $S_n \rightrightarrows S$ na $[a, b]$. Wówczas zachodzi równość*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\, dx.$$

Twierdzenie 4.6. *Załóżmy, że dane są funkcje f_n, S, $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Załóżmy, że $f_n \in C^1([a, b])$ oraz, że szereg $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n'$ jest zbieżny jednostajnie do g na $[a, b]$, a szereg $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ jest zbieżny punktowo do S na $[a, b]$. Wówczas*

$$S'(x) = g(x) \ \textit{dla}\ x \in [a, b],$$

czyli szereg można różniczkować wyraz po wyrazie:

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x) \ \textit{dla}\ x \in [a, b].$$

Przykład 4.7. Wrócimy do przypadku szeregu z przykładu 4.6. Szereg jego pochodnych

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}$$

ma również obszar zbieżności niemal jednostajnej w przedziale $(-1, 1)$. Ustalmy $a \in (0, 1)$. Wówczas dla $x \in [-a, a]$ zachodzi nierówność

$$|x^n| \leq n a^{n-1}.$$

Szereg liczbowy

$$\sum_{n=1}^{+\infty} na^{n-1}$$

jest zbieżny na podstawie kryterium d'Alemberta, gdyż

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)\,a^n}{na^{n-1}} = a \in (0,1)\,.$$

Stąd na podstawie kryterium Weierstrassa (twierdzenie 4.1) szereg pochodnych

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}$$

jest zbieżny niemal jednostajnie na $(-1,1)$. Zatem szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ możemy różniczkować wyraz po wyrazie otrzymując tożsamość

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)' = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(x-1)^2}$$

prawdziwą dla wszystkich $x \in (-1,1)$.

Przykład 4.8. Szereg $\sum_{n=1}^{+\infty} t^n$ można całkować wyraz po wyrazie na $[0,x]$ dla ustalonego $x \in (0,1)$ otrzymując tożsamość

$$\int_0^x \sum_{n=1}^{+\infty} t^n dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^x t^n dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1}$$

prawdziwą dla dowolnego $x \in (0,1)$. Można uzasadnić, iż jest ona również prawdziwa dla $x \in (-1,0)$. Zauważmy, że dla $x=-1$ mamy szereg

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1} (-1)^{n+1}$$

zbieżny na podstawie kryterium Leibniza. Stąd widzimy, iż obszary zbieżności punktowej szeregu i szeregu pochodnych nie muszą się pokrywać.

4.4. Przykład funkcji nigdzie nie różniczkowalnej

W większości zastosowań mamy do czynienia z funkcjami ciągłymi, a często nawet klasy C^{∞}. Przykładem funkcji nigdzie nie ciągłej jest dobrze nam znana funkcja Dirichleta. Aby skonstruować funkcję ciągłą nigdzie nieróżniczkowalną, taki prosty zabieg nie wystarcza. Tutaj przydaje się wprowadzona przez nas wcześniej teoria dotycząca szeregów funkcyjnych. Podany niżej dowód jest w istocie szkicem. Pomijamy wiele istotnych szczegółów oddając jedynie główne idee.

Twierdzenie 4.7. *Istnieje funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nie różniczkowalna w żadnym punkcie.*

Dowód. Zdefiniujmy funkcję

$$\varphi(x) = |x| \text{ dla } -1 \leq x \leq 1$$

i rozszerzmy definicję φ na całą prostą w taki sposób, aby

$$\varphi(x+2) = \varphi(x) \text{ dla dowolnego } x \in \mathbb{R}$$

Wtedy φ jest ciągła oraz okresowa o okresie 2. Ponadto dla dowolnych $t, s \in \mathbb{R}$ mamy

$$|\varphi(t) - \varphi(s)| \leq |t - s| .$$

Kładziemy

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \varphi(4^n x) \text{ dla } x \in \mathbb{R}.$$

Skoro $|\varphi(x)| \leq 1$ dla $x \in \mathbb{R}$ oraz skoro szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n$ jest zbieżny, to na podstawie Kryterium Weierstrassa (twierdzenie 4.1) wnosimy, iż szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \varphi(4^n x)$ jest zbieżny jednostajnie i bezwzględnie na $\mathbb{R}$. Korzystając z twierdzenia 4.5 wiemy, że f jest funkcją ciągłą na $\mathbb{R}$. Uzasadnienie faktu, że funkcja f jest nieróżniczkowalna jest tu pominięte. ∎

ROZDZIAŁ 5

Wzór Taylora

Rozpoczniemy od omówienia symboliki Landaua, a następnie przejdziemy do przypomnienia wzoru Taylora przydatnego w dalszych rozważaniach dotyczących szeregów potęgowych i funkcji analitycznych. Rozdział ten ma na celu przypomnienie Czytelnikowi pojęć i twierdzeń niezbędnych do zrozumienia teorii szeregów potęgowych.

5.1. Symbole Landaua

Celem tego podrozdziału jest zebranie niektórych przydatnych własności tzw. symboliki Landaua związanej z obliczaniem granic. Przez c oznaczać będziemy punkt właściwy lub niewłaściwy. Pisząc $x \to c$ w przypadku, gdy c jest punktem właściwym, będziemy mieli na myśli zarówno granicę, jak i którąś z granic jednostronnych. Zakładamy, że funkcje f, g są określone w pewnym otoczeniu C punktu c (być może prawostronnym, lewostronnym albo odpowiednim podprzedziale nieograniczonym). Zakładamy, że istnieje (właściwa lub nie) granica

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

Definicja 5.1. Jeżeli $l \in \mathbb{R}$, to mówimy, że wzrost f jest kontrolowany przez wzrost g i piszemy

$$f = O(g) \text{ przy } x \to c.$$

Uwaga 5.1. Dokładniej mówiąc:

(i) jeżeli $l \in \mathbb{R}$, $l \neq 0$, to piszemy $f \asymp g$ przy $x \to c$;

(ii) jeżeli $l = 1$, to piszemy $f \sim g$ przy $x \to c$;

(iii) jeżeli $l = 0$, to piszemy $f = o\left(g\right)$.

Uwaga 5.2. Jeżeli $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$, to $\lim_{x \to c} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$.

Symbole $\asymp, \sim, o, O$ noszą nazwę symboli Landaua.

Przykład 5.1.

(i) $\sin x \sim x$ przy $x \to 0$, gdyż

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1;$$

(ii) $\sin x = o\left(x\right)$ przy $x \to \pm\infty$, gdyż

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{\sin x}{x} = 0;$$

(iii) $\sin x = o\left(\operatorname{tg} x\right)$ przy $x \to \frac{\pi}{2}^{\pm}$, gdyż

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^{\pm}} \frac{\sin x}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^{\pm}} \cos x = 0;$$

(iv) $\cos x \asymp (2x - \pi)$ przy $x \to \frac{\pi}{2}$, gdyż na podstawie reguły de l'Hospitala

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{(2x - \pi)} = -\frac{1}{2};$$

(v) $x^n = o\left(x^m\right)$ przy $x \to 0$, gdzie $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$;

(vi) $x^n = o\left(x^m\right)$ przy $x \to +\infty$, gdzie $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$.

Własności symobli Landaua przy $x \to c$ są następujące:

(i) $f \asymp g \Longrightarrow f = O(g)$,

(ii) $f \sim g \Longrightarrow f = O(g)$,

(iii) $f = o(g) \Longrightarrow f = O(g)$,

(iv) $f \sim g \Longrightarrow f \asymp g$.

Wszystkie powyższe relacje są łatwe do bezpośredniego wykazania. Dla przykładu uzasadnimy, że dla $x \to c$ zachodzi

$$f \asymp g \Longrightarrow f \sim l \cdot g,$$

gdzie $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = l$. Istotnie, wówczas

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{lg(x)} = 1.$$

Łatwo sprawdzić, że dla $x \to c$

$$f \sim g \Longrightarrow f = g + o(g).$$

Kładziemy $h = f - g$. Wtedy $f = g + h$ oraz widzimy, że skoro $f \sim g$ dla $x \to c$, to

$$\lim_{x\to c} \frac{h(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \left(\frac{f(x)}{g(x)} - 1 \right) = 0.$$

Podobnie widzimy, że dla $\lambda \neq 0$ mamy przy $x \to c$

$$o(\lambda \cdot f) = \lambda o(f).$$

Dodatkowo symbole Landaua podlegają działaniom algebraicznym w następujący sposób:

(i) $o(x^n) \pm o(x^n) = o(x^n)$ przy $x \to 0$;

(ii) $o(x^n) \pm o(x^m) = o(x^p)$ przy $x \to 0$, tutaj $m, n \in \mathbb{N}$, $p = \min\{m, n\}$;

(iii) $\varphi(x)\, o(x^n) = o(x^n)$ przy $x \to 0$, o ile funkcja φ jest określona i ograniczona w pewnym otoczeniu 0;

(iv) $x^m o(x^n) = o(x^{n+m})$ przy $x \to 0$, $m, n \in \mathbb{N}$;

(v) $o(x^m)\, o(x^n) = o(x^{n+m})$ przy $x \to 0$, $m, n \in \mathbb{N}$.

Zauważmy, że $f = o(1)$ przy $x \to c$ oznacza

$$\lim_{x \to c} f(x) = 0.$$

Przykład 5.2. Zapiszemy przy użyciu symboli Landaua kilka znanych granic. Zastosujemy dwie konwencje zapisu. Przy $x \to 0$ mamy

(i)	$\sin x \sim x$	$\sin x = x + o(x)$
(ii)	$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$	$1 - \cos x = \frac{1}{2}x^2 + o\left(x^2\right)$
(iii)	$\ln(1 + x) \sim x$	$\ln(1 + x) = x + o(x)$
(iv)	$e^x - 1 \sim x$	$e^x = 1 + x + o(x)$
(v)	$(1 + x)^\alpha - 1 \sim \alpha x;\ \alpha > 0$	$(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)\,;\ \alpha > 0$

5.2. Wzór Taylora z resztą Lagrange'a i Peano

Załóżmy, że P jest pewnym przedziałem w $\mathbb{R}$, ograniczonym bądź nieograniczonym, oraz dana jest funkcja $f : P \to \mathbb{R}$. Jeżeli w pewnym punkcie $x_0 \in P$ funkcja f ma pochodną, to dla takich h, że $x_0 + h \in P$, przy zapisie definicji pochodnej z zastosowaniem symoli Landaua zachodzi następująca równość:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)\, h + o(h)\,. \tag{5.1}$$

Jeżeli $P = [a, b]$ i funkcja f jest różniczkowalna na P, to zgodnie ze wzorem Lagrange'a dla dowolnych x_0, $x_0 + h \in P$ mamy

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0 + \theta h)\, h \tag{5.2}$$

dla pewnego $\theta \in (0,1)$ zależnego od x_0 oraz h, przy czym $\theta := \theta\left(x_0, h\right)$.

Uogólnienie powyższych dwóch zależności na przypadek funkcji różniczkowalnych n-razy jest celem tego podrozdziału.

Załóżmy, że funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest n-krotnie różniczkowalna przynajmniej w $x_0 \in \mathbb{R}$. Kładziemy wtedy dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$

$$R_n\left(x, x_0\right) = f\left(x\right) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}\left(x_0\right)}{k!}\left(x - x_0\right)^k .$$

Wyrażenie $R_n\left(x, x_0\right)$ nosi nazwę reszty. Zauważmy, że definicja jest poprawna, ale nie mówi niczego o wartości (ani zbieżności) reszty. Dla $n = 1, 2$ postaci reszty są następujące:

$$\begin{aligned} R_1\left(x, x_0\right) &= f\left(x\right) - f\left(x_0\right) - f'\left(x_0\right)\left(x - x_0\right), \\ R_2\left(x, x_0\right) &= f\left(x\right) - f\left(x_0\right) - f'\left(x_0\right)\left(x - x_0\right) - \frac{f'\left(x_0\right)}{2}\left(x - x_0\right)^2 . \end{aligned}$$

Widzimy, że w wyrażeniach (5.1), (5.2) mamy do czynienia z różnym typem reszty. Stąd też w zależności od rodzaju reszty będziemy mieć wzór Taylora, odpowiednio, z resztą Peano, lub z resztą Lagrange'a.

Twierdzenie 5.1 (*Wzór Taylora z resztą Peano*). *Załóżmy, że P jest pewnym przedziałem, $x_0 \in P$ oraz $n \in \mathbb{N}$. Załóżmy ponadto, że*

(i) funkcja $f : P \to \mathbb{R}$ jest $(n-1)$-krotnie różniczkowalna na P;

(ii) istnieje pochodna $n-$tego rzędu funkcji f przynajmniej w punkcie x_0 (tzn. funkcja $f^{(n-1)}$ jest różniczkowalna przynajmniej w x_0).

Wówczas dla dowolnego $h \in \mathbb{R}$ takiego, że $x_0 + h \in P$, zachodzi

$$f\left(x_0 + h\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}\left(x_0\right)}{k!} h^k + o\left(h^n\right).$$

Definicja 5.2. Załóżmy, że P jest pewnym przedziałem w $\mathbb{R}$, $f : P \to \mathbb{R}$ jest funkcją n-krotnie różniczkowalną w pewnym punkcie $x_0 \in P$. Wyrażenie

$$T_n(h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k$$

określone dla dowolnego $h \in \mathbb{R}$ nazywamy wielomianem Taylora rzędu n dla funkcji f w punkcie x_0.

Definicja 5.3. Jeśli $x_0 = 0$, to wzór Taylora nosi nazwę wzoru Maclaurina.

Twierdzenie 5.2 (*Wzór Taylora z resztą Lagrange'a*). *Załóżmy, że P jest pewnym przedziałem, $x_0, x \in P$, $n \in \mathbb{N}$. Załóżmy ponadto, że*

(i) funkcja $f : P \to \mathbb{R}$ jest n-krotnie różniczkowalna w sposób ciągły na P;

(ii) istnieje pochodna $(n+1)$ $-$tego rzędu funkcji f przynajmniej w pewnym otoczeniu punktu x_0 (być może poza punktem x_0).

Wówczas istnieje taki punkt $\overline{x} \in (x_0, x)$, że zachodzi

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\overline{x})}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}.$$

Uwaga 5.3. Aby zastosować powyższe twierdzenia, najczęściej w praktyce sprawdzamy, że funkcja jest $n-$ bądź $(n+1)$-krotnie różniczkowalna w sposób ciągły. Widzimy, że postaci reszty w obu twierdzeniach różnią się. Wzór Taylora z resztą Lagrange'a jest wygodny w stosowaniu, gdy pochodne są wspólnie ograniczone. Warto go używać do obliczeń przybliżonych. Wzór z resztą Peano z kolei jest wygodny do znajdowania wielomianów przybliżających daną funkcję (przynajmniej lokalnie).

Uwaga 5.4. Łatwo sprawdzić, że wzór Maclaurina funkcji parzystej zawiera jedynie parzyste potęgi zmiennej niezależnej, a wzór Maclaurina funkcji nieparzystej zawiera jedynie potęgi nieparzyste.

Wzór Taylora jest lokalnie jednoznaczny w następującym sensie:

Twierdzenie 5.3. *Załóżmy, że funkcja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ jest n-krotnie różniczkowalna. Jeżeli istnieje wielomian P_n stopnia co najwyżej n i taki, że*

$$f(x) = P_n(x) + o\left((x - x_0)^n\right) \tag{5.3}$$

dla x z pewnego sąsiedztwa punktu x_0, to P_n jest wielomianem Taylora rzędu n dla funkcji f w punkcie x_0.

Dowód. Wzór (5.3) możemy zapisać jako

$$P_n(x) = f(x) + \varphi(x),$$

gdzie $\varphi(x) = o\left((x - x_0)^n\right)$ przy $x \to x_0$. Z drugiej strony

$$T_n(x) = f(x) + \psi(x),$$

gdzie $\psi(x) = o\left((x - x_0)^n\right)$ przy $x \to x_0$. Stąd i z własności symboli Landaua

$$P_n(x) - T_n(x) = o\left((x - x_0)^n\right)$$

przy $x \to x_0$. Skoro różnica $P_n - T_n$ jest wielomianem stopnia co najwyżej n, to możemy ją zapisać następująco:

$$P_n(x) - T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k (x - x_0)^k.$$

Przypuśćmy, że nie wszystkie współczynniki c_k dla $k = 0, 1, ..., m$ są równe 0. Niech m oznacza najmniejszy niezerowy współczynnik taki, że $m < n$. Wtedy

$$P_n(x) - T_n(x) = \sum_{k=m}^{n} c_k (x - x_0)^k.$$

Stąd dla $x \neq x_0$ mamy

$$\frac{P_n(x) - T_n(x)}{(x - x_0)^m} = c_m + \sum_{k=m+1}^{n} c_k (x - x_0)^{k-m}. \tag{5.4}$$

Skoro

$$P_n(x) - T_n(x) = o\left((x - x_0)^n\right)$$

przy $x \to x_0$ oraz $m < n$, to

$$P_n(x) - T_n(x) = o\left((x - x_0)^m\right)$$

przy $x \to x_0$. Zatem przechodząc w (5.4) do granicy przy $x \to x_0$ widzimy, że $c_m = 0$, co jest niemożliwe. Jeśli $m = n$, to mamy

$$P_n(x) - T_n(x) = c_n (x - x_0)^n$$

przy $x \to x_0$ i sprzeczność otrzymujemy jak wyżej. ∎

5.3. Przykłady rozwinięć

Przykład 5.3. Weźmy funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ daną wzorem

$$f(x) = e^x, \ x \in \mathbb{R}.$$

Wtedy $f^{(n)}(x) = e^x$ dla dowolnych $x \in \mathbb{R}$ oraz $n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Stąd $f^{(n)}(0) = 1$ dla $n \in \mathbb{N}_0$ i wzór Maclaurina z resztą Peano ma dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ postać

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n).$$

Z kolei wzór Maclaurina z resztą Lagrange'a ma dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ postać

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^{\overline{x}}}{(n+1)!} x^{n+1},$$

gdzie $\overline{x} \in (0, x)$. Kładąc $x = 1$, otrzymujemy

$$e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{e^{\overline{x}}}{(n+1)!}.$$

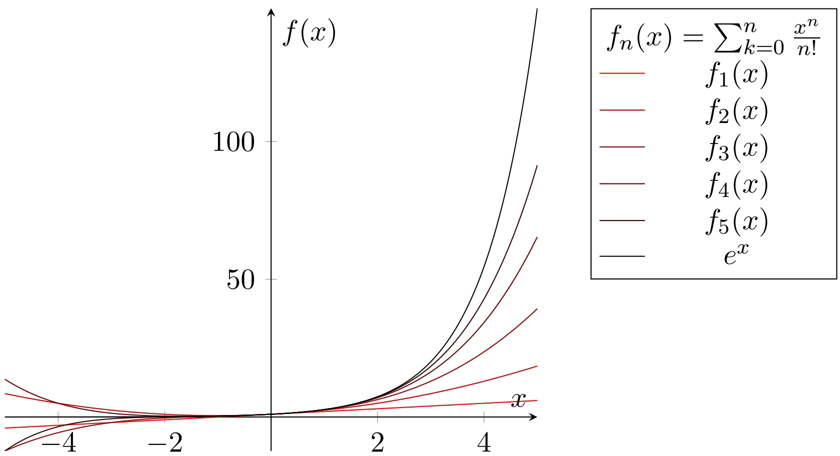
Oznaczmy

$$e_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

Ponieważ $1 < e^{\overline{x}} < e$, to mamy następujące oszacowanie błędu

$$\frac{1}{(n+1)!} < e - e_n < \frac{e}{(n+1)!}.$$

Przy pomocy rozwinięcia z resztą Peano możemy dokonać pewnej wizualizacji zagadnienia przybliżania funkcji za pomocą wzoru Taylora:



Przykład 5.4. Weźmy funkcję $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ daną wzorem

$$f(x) = \ln x.$$

Wtedy, przy pomocy indukcji matematycznej, dostajemy

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}(n-1)!x^{n-1}$$

dla dowolnych $x \in (0, +\infty)$ oraz $n \in \mathbb{N}$. Stąd

$$f^{(n)}(1) = (-1)^{n+1}(n-1)!$$

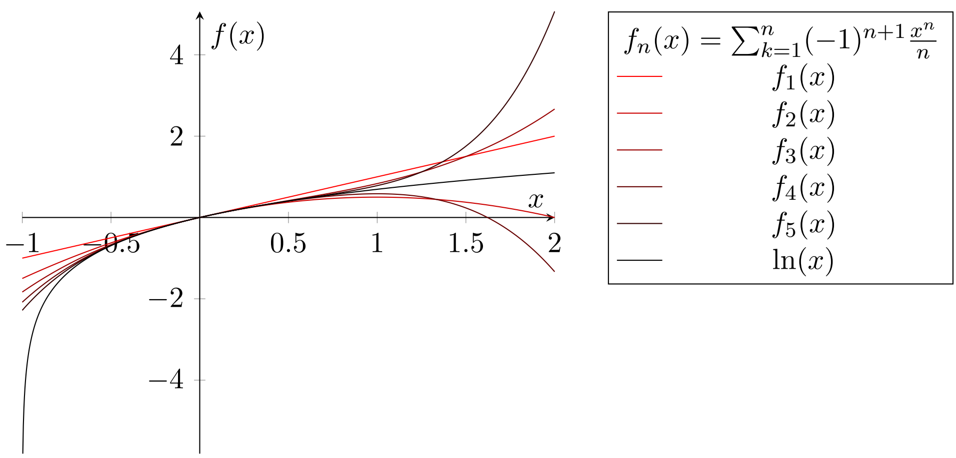
dla $n \in \mathbb{N}$ i wzór Taylora w $x_0 = 1$ z resztą Peano ma następującą postać dla dowolnego $x > 0$:

$$\ln x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^n}{n} + o\left((x-1)^n\right).$$

Dokonując zamiany x na $x+1$ widzimy, że mamy rozwinięcie funkcji $\ln(x+1)$ dla $x > -1$:

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n).$$

Wykres funkcji $f(x) = \ln(1+x)$ i kolejnych przybliżeń Taylora oddaje dobrze sens tego, że wzór Taylora stosuje się do obliczeń lokalnych (w otoczeniu punktu wokół którego się go wyznacza), a nie globalnych (czyli na całej dziedzinie):



W podobny sposób możemy uzyskiwać rozwinięcia innych znanych funkcji. Podsumujemy je następująco, nie precyzując szczegółów rachunkowych. Czytelnik zechce sprawdzić podane formuły. Podane poniżej rozwinięcia Maclaurina są prawdziwe w odpowiednich dziedzinach rozwijanych funkcji.

e^x	$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o\left(x^n\right);$
$\ln\left(x+1\right)$	$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \left(-1\right)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o\left(x^n\right);$
$\sin x$	$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \left(-1\right)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right);$
$\cos x$	$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \left(-1\right)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right);$
$\frac{1}{1+x}$	$= 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + \left(-1\right)^n x^n + o\left(x^n\right);$
$\sqrt{1+x}$	$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o\left(x^3\right).$

Pozostaje nam jeszcze do omówienia po krótce rozwinięcie funkcji

$$f\left(x\right) = \left(1+x\right)^{\alpha}$$

dla dowolnego $\alpha \in \mathbb{R}$. W dziedzinie funkcji f (i jej kolejnych pochodnych) obliczamy

$$f'\left(x\right) = \alpha\left(1+x\right)^{\alpha-1},$$

$$f''\left(x\right) = \alpha\left(\alpha-1\right)\left(1+x\right)^{\alpha-2},$$

$$f'''\left(x\right) = \alpha\left(\alpha-1\right)\left(\alpha-2\right)\left(1+x\right)^{\alpha-3}.$$

Z łatwego do uzasadnienia (poprzez indukcję matematyczną) wzoru dla $n \in \mathbb{N}$

$$f^{(n)}\left(x\right) = \alpha\left(\alpha-1\right)\cdot\ldots\cdot\left(\alpha-n+1\right)\left(1+x\right)^{\alpha-n}$$

widzimy, że

$$f\left(0\right) = 1,\, f^{(n)}\left(0\right) = \alpha\left(\alpha-1\right)\cdot\ldots\cdot\left(\alpha-n+1\right).$$

Przyjmując dla $\alpha \in \mathbb{R}$ oraz $n \in \mathbb{N}$ oznaczenia

$$\binom{\alpha}{0} = 1,\, \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha\left(\alpha-1\right)\cdot\ldots\cdot\left(\alpha-n+1\right)}{n!}$$

otrzymujemy następujące rozwinięcie Maclaurina:

$$\left(1+x\right)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}x^k + o\left(x^n\right). \tag{5.5}$$

Jawna postać powyższego wzoru jest następująca:

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + ... + \binom{\alpha}{n}x^n + o(x^n).$$

Podstawiając $\alpha = \frac{1}{2}$ oraz $n = 3$, łatwo dostajemy

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o\left(x^3\right).$$

5.4. Przykłady zastosowań do innych rozwinięć i obliczeń

W tym podrozdziale podamy przykłady rozwinięć funkcji innych niż opisane powyżej oraz pewne zastosowania uzyskanych rozwinięć.

Przykład 5.5. Wiemy, że dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} + o\left(x^{2n+2}\right).$$

Stąd, podstawiając $-x$ w miejsce x, otrzymujemy od razu

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} + o\left(x^{2n+2}\right).$$

Zatem

$$\sinh x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right)$$

oraz

$$\cosh x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right).$$

Przykład 5.6. Znamy rozwinięcia Macluarina rzędu 2 funkcji (dla $x > -1$)

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o\left(x^2\right),$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right).$$

Znajdziemy teraz rozwinięcie funkcji

$$f(x) = e^x \sqrt{1+x}.$$

Korzystając z oczywistych własności symboli Landaua

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o\left(x^2\right)\right)\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)\right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2\right)\left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) + o\left(x^2\right) \\ &= 1 + \frac{3}{2}x + \frac{7}{8}x^2 + \left(\frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{16}x^4\right) + o\left(x^2\right). \end{aligned}$$

Widzimy, że

$$\frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{16}x^4 = o\left(x^2\right).$$

Stąd

$$f(x) = 1 + \frac{3}{2}x + \frac{7}{8}x^2 + o\left(x^2\right).$$

Przykład 5.7. Korzystając z wcześniej przypomnianych rozwinięć

$$\sqrt{1+x} - 1 = \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o\left(x^2\right),$$

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + o\left(y^2\right).$$

dla $x > -1$ oraz $y \in \mathbb{R}$ znajdziemy rozwinięcie funkcji

$$f(x) = e^{\sqrt{1+x}-1}.$$

Mamy

$$f(x) = 1 + \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o\left(x^2\right)\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o\left(x^2\right)\right)^2. \tag{5.6}$$

Zauważmy, że

$$\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o\left(x^2\right)\right)^2=\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2\right)^2+2\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2\right)o\left(x^2\right)+\left(o\left(x^2\right)\right)^2.$$

Skoro

$$2\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2\right)o\left(x^2\right)+\left(o\left(x^2\right)\right)^2=o\left(x^2\right)$$

oraz

$$\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2\right)^2=\frac{1}{4}x^2+\left(\frac{1}{64}x^4-\frac{1}{8}x^3\right)=\frac{1}{4}x^2+o\left(x^2\right),$$

to

$$\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o\left(x^2\right)\right)^2=\frac{1}{4}x^2+o\left(x^2\right).$$

Zatem dokonując uproszczeń w (5.6) wnioskujemy, że

$$f\left(x\right)=1+\frac{1}{2}x+o\left(x^2\right).$$

Rozwinięcia funkcji we wzór Taylora (najczęściej Maclaurina) pozwalają na obliczanie granic bez używania reguły de l'Hospitala.

Przykład 5.8. Obliczymy granicę

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+x\right)-\frac{x}{x+1}}{x^2}$$

przy pomocy rozwinięcia Taylora zamiast stosowania reguły de l'Hospitala. Widzimy, że

$$\ln\left(1+x\right)=x-\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right),$$

$$\frac{x}{x+1}=x-x^2+o\left(x^2\right).$$

Stąd i z relacji

$$o\left(x^2\right)\pm o\left(x^2\right)=o\left(x^2\right)$$

mamy, że

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+x\right)-\frac{x}{x+1}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2+o\left(x^2\right)}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

Przykład 5.9. Postępując podobnie jak powyżej widzimy, że jedynie dla $\alpha = 4$ granica
$$\lim_{x\to 0} \frac{(\operatorname{arctg} 2x)^2 - \alpha x \sin x}{x^4}$$
jest skończona. Istotnie rozwinięcie licznika we wzór Macluarina rzędu 4 prowadzi do formuły
$$(4-\alpha)\, x^2 - \left(\frac{32}{3} - \frac{\alpha}{6}\right) x^4 + o\left(x^4\right).$$

5.5. Zastosowanie wzoru Taylora w optymalizacji

Zastosowania wzoru Taylora z resztą Peano są widoczne zwłaszcza w optymalizacji. Podamy teraz i udowodnimy warunek konieczny i wystarczający wyższego rzędu na istnienie ekstremum lokalnego. Podajemy je dla funkcji określonych na całej prostej, ale łatwo przenieść poniższe wyniki na funkcje, których dziedziną jest pewien przedział P . Podobnie można nakładaćsłabsze założenia różniczkowalności, czego my nie robimy ze względu na niepraktyczny charakter tychże założeń.

Twierdzenie 5.4. *Załóżmy, że funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna n-krotnie w sposób ciągły. Niech $x_0 \in \mathbb{R}$. Załóżmy, że*
$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(m-1)}(x_0) = 0,\ f^{(m)}(x_0) \neq 0 \tag{5.7}$$
dla pewnego m takiego, że $2 \le m \le n$.

(i) Jeżeli m jest parzyste, to punkt x_0 jest punktem ekstremum lokalnego. Przy tym jeżeli $f^{(m)}(x_0) > 0$, to x_0 jest punktem minimum lokalnego, a jeżeli $f^{(m)}(x_0) < 0$, to x_0 jest punktem maksimum lokalnego.

(ii) Jeżeli m jest nieparzyste, to w x_0 jest punkt przegięcia.

Dowód. Wykażemy część (i). Korzystając ze wzoru Taylora z resztą Peano widzimy, że dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o\left((x-x_0)^m\right).$$

Korzystając z założenia (5.7) mamy

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m + o\left((x-x_0)^m\right).$$

Skoro liczba m jest parzysta, $f^{(m)}(x_0) > 0$ oraz skoro

$$\frac{o\left((x-x_0)^m\right)}{(x-x_0)^m} \to 0 \text{ przy } (x-x_0)^m \to 0,$$

to znajdziemy takie otoczenie U_{x_0} punktu x_0, że dla wszystkich $x \in U_{x_0}$ zachodzi

$$\left|o\left((x-x_0)^m\right)\right| \leq \frac{1}{2}\frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m.$$

Stąd widzimy, że dla $x \in U_{x_0}$ mamy

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m + o\left((x-x_0)^m\right) \\ &\geq \frac{1}{2}\frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m \geq 0. \end{aligned}$$

∎

ROZDZIAŁ 6

Szeregi potęgowe

6.1. Definicja i wiadomości wstępne

Szeregi potęgowe są szczególnym przypadkiem szeregów funkcyjnych. Mieliśmy już do czynienia z badaniem szeregu

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

w obszarze $(-1, 1)$. Jest to najprostszy szereg potęgowy.

Definicja 6.1. Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ oraz niech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie ustalonym ciągiem liczbowym. Szereg funkcyjny postaci

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \ldots$$

nazywamy szeregiem potęgowym. Punkt x_0 nosi nazwę środka szeregu, a ciąg $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazywamy ciągiem współczynników tego szeregu.

Uwaga 6.1. Szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$ definiujemy dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$, ale nie musi być on zbieżny poza punktem x_0 (w którym zbieżny jest zawsze).

Przykład 6.1. Szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} n^n x^n$ jest zbieżny tylko dla $x = 0$. Dla pozostałych x rozbieżność szeregu wynika z zastosowania kryterium Cauchy'ego badania zbieżności szeregów liczbowych (w tym przypadku z parametrem x).

Przykład 6.2. Szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ jest z kolei zbieżny dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$, co łatwo uzasadniamy stosując kryterium d'Alemberta.

Przykład 6.3. Znany nam już szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ jest zbieżny jedynie dla $x \in (-1, 1)$. Znów dla uzasadnienia tego faktu stosujemy kryterium Cauchy'ego bądź kryterium d'Alemberta.

W dalszym ciągu dla uproszczenia przyjmujemy, że $x_0 = 0$. Wyniki teoretyczne przez nas uzyskane mogą być zastosowane z powodzeniem do szeregów typu

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$$

w taki sam sposób. Dlatego też nie będziemy komplikować zapisu.

Naszym celem jest podanie sposobu wyznaczania obszaru zbieżności szeregu

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Twierdzenie 6.1. *Niech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie ustalonym ciągiem liczbowym. Jeżeli dla ustalonego $\bar{x} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ szereg*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n \bar{x}^n|$$

jest zbieżny, to szereg

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

jest zbieżny jednostajnie i bezwzględnie w przedziale $(-|\bar{x}|, |\bar{x}|)$.

Dowód. Weźmy $a \in (0, |\bar{x}|)$ i rozważmy przedział $[-a, a]$. Dla dowolnego $x \in [-a, a]$ mamy

$$|a_n x^n| = |a_n| |x^n| = |a_n| |\bar{x}|^n \left|\frac{x}{\bar{x}}\right|^n \leq |a_n| |\bar{x}|^n .$$

Skoro szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n \bar{x}^n|$ jest zbieżny, to na podstawie kryterium Weierstrassa (twierdzenie 4.1) szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ jest zbieżny jednostajnie i bezwzględnie w przedziale $[-a, a]$, a z dowolności $a \in (0, |\bar{x}|)$ mamy zbieżność niemal jednostajną w $(-|\bar{x}|, |\bar{x}|)$. ∎

Przykład 6.4. Należy podkreślić, iż zbieżność szeregu $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n \bar{x}^n|$ nie gwarantuje zbieżności obu szeregów

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \bar{x}^n \text{ oraz } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left(-\bar{x}\right)^n .$$

Istotnie, pamiętamy przykład szeregu

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1},$$

który jest zbieżny dla $x = -1$, ale już nie dla $x = 1$. Przedział $[-1, 1)$ nie jest jego obszarem zbieżności bezwzględnej, gdyż dla $x = -1$ szereg ten jest zbieżny jedynie warunkowo.

Uwaga 6.2. Założenie o zbieżności szeregu

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n \bar{x}^n|$$

oznacza, że stosując warunek konieczny zbieżności szeregu liczbowego otrzymujemy

$$\lim_{n \to +\infty} |a_n \bar{x}^n| = 0.$$

Stąd istnieje taka stała $M > 0$, że dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$|a_n \bar{x}^n| \leq M.$$

Uwaga 6.2 sugeruje, iż założenia twierdzenia 6.1 można osłabić, co pokażemy poniżej.

Twierdzenie 6.2. *Niech* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *będzie ustalonym ciągiem liczbowym. Jeżeli dla ustalonego* $\bar{x}$ *wyrazy szeregu*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n \bar{x}^n|$$

są ograniczone (czyli jeżeli istnieje taka stała $M > 0$*, że dla wszystkich* $n \in \mathbb{N}$ *zachodzi* $|a_n \bar{x}^n| \leq M$*), to szereg*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

jest zbieżny jednostajnie i bezwzględnie w przedziale $(-|\bar{x}|, |\bar{x}|)$.

Dowód. Weźmy podobnie jak poprzednio $a \in (0, |\bar{x}|)$ i rozważmy przedział $[-a, a]$. Dla dowolnego $x \in [-a, a]$, korzystając z ograniczoności wyrazów szeregu, otrzymujemy

$$|a_n x^n| = |a_n| \, |x^n| = |a_n| \, |\bar{x}|^n \left|\frac{x}{\bar{x}}\right|^n \leq M \left|\frac{a}{\bar{x}}\right|^n.$$

Skoro $\left|\frac{a}{\bar{x}}\right| < 1$, to szereg

$$\sum_{n=0}^{+\infty} M \left|\frac{a}{x}\right|^n$$

jest zbieżny. Stąd szereg i $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ jest zbieżny niemal jednostajnie i bezwzględnie w $(-|x^-|, |x^-|)$. ∎

Przykład 6.5. Rozważmy szereg

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n-1}{n+1} x^n.$$

Wówczas dla $x \in [-1, 1]$ mamy

$$\left|\frac{n-1}{n+1} x^n\right| \leq 1 \text{ dla } n \in \mathbb{N}.$$

Na podstawie powyższego twierdzenia rozważany szereg jest zbieżny niemal jednostajnie i bezwzględnie w $(-1,1)$. Szereg ten jednakże nie jest zbieżny w punktach $x = \pm 1$. W konsekwencji wyniku z powyższego twierdzenia nie uda się rozszerzyć na przedział $[-|\bar{x}|, |\bar{x}|]$.

Twierdzenie 6.3. *Niech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie ustalonym ciągiem liczbowym. Jeżeli dla ustalonego $\widetilde{x} \neq 0$ szereg*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n \widetilde{x}^n|$$

jest rozbieżny, to szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ jest rozbieżny w zbiorze $(-\infty, -|\widetilde{x}|) \cup (|\widetilde{x}|, +\infty)$.

Z powyższych twierdzeń uzyskujemy następującą charakteryzację, która posłuży nam dalej do sformułowania definicji tzw. promienia zbieżności szeregu potęgowego.

Twierdzenie 6.4. *Niech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie ustalonym ciągiem liczbowym. Dla danego szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ zachodzi dokładnie jedna z trzech możliwości:*

(i) szereg jest zbieżny jedynie dla $x_0 = 0$;

(ii) szereg jest zbieżny niemal jednostajnie i bezwzględnie na $\mathbb{R}$;

(iii) istnieje liczba dodatnia R taka, że szereg jest zbieżny niemal jednostajnie i bezwzględnie w przedziale $(-R, R)$ oraz rozbieżny w zbiorze $(-\infty, -R) \cup (R, +\infty)$.

Dowód. Przez A oznaczmy obszar zbieżności szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Jeżeli $A = \{0\}$, to zachodzi przypadek (i).

Teza (ii) zachodzi, jeżeli szereg jest zbieżny dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Zatem zbieżny jest również dla $x = 1$. Stąd widzimy, że istnieje $M > 0$ takie, że

$|a_n| \leq M$ dla $n \in \mathbb{N}$. Zbieżność niemal jednostajna jest łatwa do uzyskania. Istotnie, weźmy dowolne $b > 0$. Mamy wtedy dla każdego $x \in [-b, b]$

$$|a_n x^n| = |a_n| \, |x^n| = |a_n| \, |b|^n \left| \frac{x}{b} \right|^n \leq |a_n| \, |b|^n .$$

Teza zachodzi zatem na podstawie kryterium Weierstrassa (twierdzenie 4.1).

Przypuśćmy, że A zawiera inne punkty niż 0, ale istnieje $\widetilde{x} \neq 0$ taki, że szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n \widetilde{x}^n|$ jest rozbieżny na podstawie twierdzenia 6.3. Wówczas $(-\infty, -|\widetilde{x}|) \cup (|\widetilde{x}|, +\infty)$ nie jest podzbiorem A. Stąd zbiór A jest ograniczony. Zatem skoro zbiór A zawiera inne punkty niż 0, otrzymujemy

$$0 < R = \sup A < +\infty.$$

Weźmy dowolny element $x \in \mathbb{R}$ taki, że $0 < |x| < R$. Wtedy na podstawie definicji kresu górnego istnieje takie x_1, że

$$|x| < x_1 < R.$$

Skoro szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_1^n$ jest zbieżny na podstawie twierdzenia 6.1, to szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ jest zbieżny niemal jednostajnie i bezwzględnie na $(-x_1, x_1)$. Z dowolności x_1 wnioskujemy, że szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ jest zbieżny niemal jednostajnie i bezwzględnie na $(-R, R)$. Z definicji kresu górnego wynika, że $(-\infty, -R) \cup (R, +\infty)$ nie jest podzbiorem zbioru A. ∎

6.2. Promień zbieżności szeregu i jego wyznaczanie

Twierdzenie 6.4, które udowodniliśmy pod koniec poprzedniego rozdziału, dostarcza sugestii odnośnie postaci obszaru zbieżności szeregu. Ponieważ obszar ten jest symetryczny względem zera, jest sensowne mówienie o jego promieniu.

Definicja 6.2 (*Promień zbieżności*). Promieniem zbieżności szeregu

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

nazywamy liczbę

$$R = \sup \left\{ x \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ jest zbieżny} \right\}.$$

Wracając do przykładów, które omawialiśmy na początku, widzimy, że dla szeregu:

(i) $\sum_{n=0}^{+\infty} n^n x^n$ mamy $R = 0$;

(ii) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ mamy $R = +\infty$;

(iii) $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ mamy $R = 1$.

Promień zbieżności nie jest wyznaczany na ogół z definicji, chociaż dalej podajemy przykład, w którym tylko taka droga postępowania prowadzi do konkluzji. Mamy do dyspozycji dwa wygodne w stosowaniu kryteria bazujące na znanych twierdzeniach pozwalających badać zbieżność szeregów liczbowych. Bierze się to stąd, że dla ustalonego x szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ jest szeregiem liczbowym i podlega znanym nam prawom i kryteriom.

Twierdzenie 6.5 (*d'Alemberta-Hadamarda*). *Niech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie ustalonym ciągiem liczbowym takim, że $a_n \neq 0$ dla $n \in \mathbb{N}$. Jeżeli istnieje granica (właściwa lub niewłaściwa)*

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = l,$$

to promień zbieżności szeregu $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ wynosi

$$R = \begin{cases} 0, & \text{gdy } l = +\infty, \\ +\infty, & \text{gdy } l = 0, \\ \frac{1}{l}, & \text{gdy } l \in (0, +\infty). \end{cases}$$

Dowód. Weźmy $x \neq 0$. Wtedy badając zbieżność szeregu $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ z kryterium d'Alemberta mamy

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = l\,|x|\,.$$

Stąd jeśli $l = +\infty$, to szereg jest rozbieżny dla $x \neq 0$, czyli $R = 0$. Jeśli $l = 0$, to dla dowolnego x mamy

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n} \right| < 1,$$

czyli $R = +\infty$. Jeśli $l \in (0, +\infty)$, to $\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = l\,|x| < 1$, o ile $|x| < \frac{1}{l}$. Stąd $R = \frac{1}{l}$. ∎

Postępując w ten sam sposób, jak przy dowodzie twierdzenia d'Alemberta-Hadamarda, otrzymujemy kolejny rezultat.

Twierdzenie 6.6 (*Cauchy'ego-Hadamarda*)**.** *Niech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie ustalonym ciągiem liczbowym. Jeżeli istnieje granica (właściwa lub niewłaściwa)*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l,$$

to promień zbieżności szeregu $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ wynosi

$$R = \begin{cases} 0, & \text{gdy } l = +\infty, \\ +\infty, & \text{gdy } l = 0, \\ \frac{1}{l}, & \text{gdy } l \in (0, +\infty)\,. \end{cases}$$

Uwaga 6.3. Powyżej udowodnione twierdzenia pozwalają znajdować w łatwy sposób promień zbieżności szeregu. Nie mówią one jednak niczego o obszarze zbieżności, gdyż mogą istnieć szeregi zbieżne w punktach $\pm R$ bądź w którymś z nich. W takim wypadku trzeba korzystać z kryteriów zbieżności szeregów liczbowych. Ich stosowanie nie jest jednakże na ogół łatwe.

Przykład 6.6. Rozważmy szereg

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2} x^n.$$

Stosując twierdzenie d'Alemberta-Hadamarda otrzymujemy $R = 1$. Widzimy, że powyższy szereg jest zbieżny dla $x = \pm 1$, skąd jego obszarem zbieżności punktowej jest $[-1, 1]$. Powstaje zatem naturalne pytanie, czy po dołączeniu do obszaru zbieżności któregoś z krańców zmieni się charakter zbieżności.

Twierdzenie 6.7 (*Abela*)**.** *Niech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie ustalonym ciągiem liczbowym. Niech $R > 0$ będzie promieniem zbieżności szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Załóżmy, że szereg ten jest zbieżny dla $x = R$. Wówczas $(-R, R]$ jest jego obszarem zbieżności niemal jednostajnej, tzn. na każdym domkniętym podprzedziale zbioru $(-R, R]$ szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ jest zbieżny jednostajnie.*

Dowód. Wystarczy wykazać zbieżność jednostajną na przedziale $[0, R]$. Widzimy, że rozpatrywany szereg możemy zapisać następująco:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n \left(\frac{x}{R}\right)^n.$$

Ponadto szereg

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$$

jest zbieżny (jednostajnie) oraz funkcje

$$g_n(x) = \left(\frac{x}{R}\right)^n$$

tworzą ciąg jednostajnie ograniczony (przez R) oraz monotoniczny względem n dla każdego $x \in [0, R]$. Stąd na podstawie kryterium Abela (twierdzenie 4.3) szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ jest zbieżny jednostajnie na $[0, R]$. Skoro szereg jest już zbieżny jednostajnie na $[-a, 0]$ dla dowolnego $a \in (0, R)$, to stąd wynika teza twierdzenia. ∎

Uwaga 6.4. W przypadku, gdy w twierdzeniu 6.4 obszarem zbieżności jest przedział $(-R, R)$, to zbieżność tam nie może być jednostajna. Istotnie, gdyby zbieżność była jednostajna, to z ciągłości funkcji potęgowej mielibyśmy

$$\lim_{x \to R^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n,$$

czyli szereg

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n,$$

byłby zbieżny, co jest niemożliwe.

Przykład 6.7. Szeregi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \text{ oraz } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1}$$

mają promień zbieżności 1, ale obszarem zbieżności pierwszego szeregu jest przedział $(-1, 1)$, a obszarem zbieżności drugiego szeregu jest przedział $[-1, 1)$.

Przykład 6.8. Szereg

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{(n-1)(n+2)} (x-2)^{2n}$$

badamy w taki sposób, iż dokonujemy podstawienia $y = x - 2$, otrzymując szereg

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{(n-1)(n+2)} y^{2n} = \frac{5}{4} y^4 + \frac{7}{10} y^6 + ...$$

Widzimy, iż jego współczynniki nie są niezerowe. Nie można zatem stosować twierdzenia d'Alemberta-Hadamarda (twierdzenie 6.5). Korzystając z twierdzenia Cauchy'ego-Hadamarda (twierdzenie 6.6) otrzmujemy

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\frac{2n+1}{(n-1)(n+2)}} = 1.$$

Stąd wynika, że promień zbieżności $R = 1$. Widzimy, stosując kryterium porównawcze, że szereg

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{(n-1)(n+2)}$$

nie jest zbieżny. Na podstawie kryterium Leibniza widzimy, że szereg

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{(n-1)(n+2)}$$

jest zbieżny. W rezultacie obszarem zbieżności niemal jednostajnej szeregu

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{(n-1)(n+2)} (x-2)^{2n}$$

jest $[1, 3)$. Obszarem zbieżności bezwzględnej jest $(1, 3)$. Istotnie, $-1 \leq y < 1$, zatem $-1 \leq x - 2 < 1$.

Przykład 6.9. W przypadku szeregu

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^{n!}$$

również nie wszystkie współczynniki są niezerowe. Zastosowanie kryterium Cauchy'ego-Hadamarda ani d'Alemberta-Hadamarda nie jest tutaj możliwe, zatem obszar zbieżności tego szeregu wyznaczymy badając zbieżność szeregu liczbowego z parametrem. Otrzymujemy wówczas (tym razem stosując twierdzenie d'Alemberta)

$$\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{x^{(n+1)n!}}{x^{n!}} \right| = \lim_{n \to +\infty} |x|^{nn!} = \begin{cases} 0 & \text{dla } |x| < 1, \\ 1 & \text{dla } x = \pm 1, \\ +\infty & \text{dla } |x| > 1. \end{cases}$$

Stąd widzimy, że promień zbieżności $R = 1$ i obszarem zbieżności niemal jednostajnej i bezwzględna rozważanego szeregu jest $(-1, 1)$.

Uwaga 6.5. Twierdzenie Cauchy'ego-Hadamarda jest mniej restrykcyjne od twierdzenia d'Alemberta-Hadamarda, gdyż nie wymaga tego, żeby wszytkie współczynniki szeregu były niezerowe. Dodatkowo możemy opuścić założenie, że istnieje granica (właściwa lub niewłaściwa)

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l,$$

zastępując l następującą definicją:

$$l := \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Obserwacja poczyniona w powyższej uwadze jest na tyle istotna, że wyróżnimy ją w postaci kolejnego twierdzenia.

Twierdzenie 6.8 (*Cauchy'ego-Hadamarda w wersji z granicą górną*)**.** *Niech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie ustalonym ciągiem liczbowym i niech*

$$l = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Wówczas promień zbieżności szeregu $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ wynosi

$$R = \begin{cases} 0, & \text{gdy } l = +\infty, \\ +\infty, & \text{gdy } l = 0, \\ \frac{1}{l}, & \text{gdy } l \in (0, +\infty)\,. \end{cases}$$

Przykład 6.10. Korzystając z kryterium Cauchy'ego-Hadamarda w wersji z granicą górną znajdujemy, że promień zbieżności szeregu

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(2 + (-1)^n\right)^n x^n$$

wynosi

$$R = \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{(2 + (-1)^n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(2 + (-1)^{2n}\right)} = \frac{1}{3}.$$

6.3. Operacje algebraiczne na szeregach

Zajmiemy się teraz dodawaniem i mnożeniem (w sensie iloczynu Cauchy'ego) szeregów. Niech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ będą ustalonymi ciągami liczbowymi. Oznaczymy

$$\sum\nolimits_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \ \sum\nolimits_2 = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n.$$

Twierdzenie 6.9. *Jeżeli szeregi $\sum_1$, $\sum_2$ mają promienie zbieżności R_1, R_2 odpowiednio, to ich suma, czyli szereg*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n)\, x^n$$

ma promień zbieżności $R \geq \min\{R_1, R_2\}$. Przy tym, jeżeli $R_1 \neq R_2$, to $R = \min\{R_1, R_2\}$.

Przykład 6.11. Szeregi

$$\sum\nolimits_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n + 1}{4^n - 2^n} x^n \text{ oraz } \sum\nolimits_2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1 - 2^n}{4^n + 2^n} x^n$$

mają promienie $R_1 = R_2 = 2$. Ich suma

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4}{4^n - 1} x^n$$

ma promień $R = 4$.

Niech dla $n \in \mathbb{N}$

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0. \tag{6.1}$$

We wnętrzu obszaru zbieżności szereg potęgowy jest zbieżny bezwzględnie. Powołując się na twierdzenie Mertensa, widzimy, że w części wspólnej wnętrz obszarów zbieżności szeregi potęgowe można mnożyć.

Twierdzenie 6.10. *Jeżeli szeregi $\sum_1$, $\sum_2$ mają promienie zbieżności R_1, R_2 odpowiednio, to ich iloczyn Cauchy'ego, czyli szereg*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n,$$

gdzie c_n jest dane wzorem (6.1) dla $n \in \mathbb{N}$, ma promień zbieżności

$$R \geq \min\left\{R_1, R_2\right\}.$$

Przykład 6.12. Mnożąc szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ przez siebie na $(-1,1)$ i korzystając z relacji

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \text{ dla } x \in (-1,1)$$

dostajemy

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}.$$

Dodatkowo możemy skomentować przypadek równości sum szeregów $\sum_1$, $\sum_2$ w otoczeniu 0. W takiej sytuacji szereg nie może mieć dwóch różnych postaci.

Twierdzenie 6.11. *Jeżeli szeregi $\sum_1$, $\sum_2$ mają jednakowe sumy w pewnym otoczeniu 0, to są tożsamościowo równe, tzn. $a_n = b_n$ dla $n = 0, 1, 2, \ldots$*

Dowód. Biorąc $x = 0$ w tożsamości

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots$$

otrzymujemy $a_0 = b_0$. Stąd biorąc dowolne $x \neq 0$ widzimy z powyższej tożsamości, że

$$a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \ldots = b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots$$

Możemy teraz podzielić jej obie strony przez x, w wyniku czego mamy

$$a_1 + a_2x^2 + a_3x^3 ... = b_1 + b_2x^2 + b_3x^3 + ...$$

Przechodząc z $x \to 0$ widzimy teraz, że $a_1 = b_1$. Stosując zasadę indukcji matematycznej uzyskujemy $a_n = b_n$ dla $n = 0, 1, 2, ...$ ∎

6.4. Ciągłość sumy szeregu, różniczkowanie i całkowanie szeregu

Skoro szereg jest niemal jednostajnie zbieżny przynajmniej we wnętrzu obszaru zbieżności, to od razu otrzymujemy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 6.12. *Niech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie ustalonym ciągiem liczbowym. Suma szeregu $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ o promieniu zbieżności R jest ciągła w zbiorze $(-R, R)$. Jeżeli szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ jest zbieżny w którymś z punktów $\pm R$, to suma też jest w nim ciągła.*

Przejdziemy teraz do analizy promienia zbieżności szeregu pochodnych. Z wcześniej omawianych przykładów należy się spodziewać, iż oba szeregi mają ten sam promień zbieżności.

Twierdzenie 6.13. *Niech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie ustalonym ciągiem liczbowym. Wówczas szeregi potęgowe*

$$\sum\nolimits_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \; \sum\nolimits_2 = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n$$

mają ten sam promień zbieżności.

Dowód. Oznaczmy przez R_1, R_2 promienie zbieżności szeregów $\sum_1, \sum_2$ odpowiednio. Niech $R_1 > 0$. Załóżmy, że

$$R_1 = \frac{1}{\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Wtedy dla $x \neq 0$ mamy

$$R_2 = \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|na_n|}} = R_1.$$ ∎

Zauważmy, że szereg

$$\sum\nolimits_2 = \sum_{n=0}^{+\infty} na_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\, a_{n+1} x^n$$

jest szeregiem pochodnych szeregu $\sum_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Twierdzenie 6.14. *Niech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie ustalonym ciągiem liczbowym. Wówczas szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ można różniczkować wyraz po wyrazie we wnętrzu obszaru zbieżności.*

Dowód. Szeregi $\sum_1$ i $\sum_2$, określone jak wyżej, mają ten sam promień zbieżności. Ponieważ zbieżność szeregu potęgowego jest niemal jednostajna wewnątrz jego obszaru zbieżności, tezę otrzymujemy z twierdzenia 4.6 o różniczkowaniu wyraz po wyrazie szeregu funkcyjnego. ∎

Uwaga 6.6. Skoro szereg pochodnych jest również szeregiem potęgowym, to stąd wynika, iż szereg potęgowy można różniczkować wyraz po wyrazie dowolną ilość razy we wnętrzu jego obszaru zbieżności.

Bazując na znanych już wynikach dla szeregów funkcyjnych (twierdzenia 4.4, 4.5, 4.6) możemy sformułować następujące twierdzenie:

Twierdzenie 6.15. *Niech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie ustalonym ciągiem liczbowym. Załóżmy, że promień R szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ nie jest zerem (ale może być $+\infty$). Niech S oznacza sumę szeregu $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Wówczas:*

(i) funkcja S jest klasy C^∞ na $(-R, R)$, tzn. istnieją i są ciągłe na $(-R, R)$ jej pochodne dowolnego rzędu;

(ii) dla dowolnego $x \in (-R, R)$ *zachodzi równość*

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\, a_{n+1} x^n;$$

(iii) dla dowolnego $x \in (-R, R)$ *zachodzi równość*

$$\int_0^x S(t)\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

Uwaga 6.7. Powyższe twierdzenie zachodzi również dla szeregów postaci

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$$

o środku w x_0. Wtedy:

(i) funkcja

$$S : (x_0 - R, x_0 + R) \to \mathbb{R}$$

jest klasy C^∞;

(ii) dla dowolnego $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ zachodzi

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\, a_{n+1} (x - x_0)^n;$$

(iii) dla dowolnego $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ zachodzi

$$\int_{x_0}^x S(t)\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1}.$$

Pozostaje nam skomentować, w jaki sposób współczynniki szeregu

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$$

zależą od pochodnych funkcji S.

Twierdzenie 6.16. *Niech* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *będzie ustalonym ciągiem liczbowym. Załóżmy, że promień* R *szeregu potęgowego*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$$

nie jest zerem (ale może być $+\infty$*). Współczynniki* a_n *zależą od pochodnych sumy*

$$S : (x_0 - R, x_0 + R) \to \mathbb{R}$$

w sposób następujący:

$$a_n = \frac{S^{(n)}(x_0)}{n!} \text{ dla } n \in \mathbb{N},\ a_0 = S(x_0)\,. \tag{6.2}$$

Uwaga 6.8. Czasem stosując konwencję $S^{(0)}(x_0) = S(x_0)$ oraz pamiętając, że $0! = 1$, będziemy pisali

$$a_n = \frac{S^{(n)}(x_0)}{n!} \text{ dla } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Udowodnimy teraz twierdzenie 6.16.

Dowód. Widzimy od razu, że dla $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ zachodzi

$$S(x) = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \ldots$$

Stąd $S(x_0) = a_0$. Obliczając pierwszą pochodną funkcji S dostajemy

$$S'(x_0) = a_1.$$

Przy pomocy indukcji matematycznej łatwo uzasadniamy, że

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n (n-1) \cdot \ldots \cdot (n - k + 1)\, a_n (x - x_0)^{n-k}\,.$$

Wstawiając w powyższym wzorze $x = x_0$ od razu dostajemy (6.2). ∎

6.5. Funkcje analityczne

Niech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie ustalonym ciągiem liczbowym. Załóżmy, że promień R szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ nie jest zerem (ale może być $+\infty$). Niech $f : (-R, R) \to \mathbb{R}$ oznacza funkcję $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Wiadomo wówczas, że funkcja f jest klasy C^{∞} przynajmniej na $(-R, R)$. Powstaje zatem pytanie, czy każda funkcja klasy C^{∞} daje się (przynajmniej lokalnie, tzn. w otoczeniu każdego z punktów z wnętrza swojej dziedziny) przedstawić w postaci sumy pewnego szeregu potęgowego. Dokładniej pytamy o dopuszczalność następującego przedstawienia. Niech $f : X \to \mathbb{R}$, gdzie $X \subset \mathbb{R}$ jest pewnym zbiorem otwartym. Dla każdego $x_0 \in X$ istnieją:

(i) liczba $\delta > 0$,

(ii) ciąg liczbowy $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ takie, że

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n \ \text{ dla } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Wówczas wiadomo, że

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \text{ dla } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Stąd f można zapisać jako

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \ \text{ dla } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta). \tag{6.3}$$

W szczególności dla $x_0 = 0$ mamy

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \text{ dla } x \in (-\delta, \delta).$$

Podamy dalej odpowiedź na powyżej postawione pytanie. Zauważmy, że jeśli f jest klasy C^{∞} na X, to szereg (zwany dalej **formalnym szeregiem Taylora funkcji** f)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

możemy zdefiniować dla dowolnego $x_0 \in X$. Ale nie oznacza to automatycznie, iż zachodzi równość (6.3) w pewnym otoczeniu punktu x_0. Dodatkowo należy zbadać obszar zbieżności tego szeregu, który nie musi pokrywać się z dziedziną funkcji. Jeśli $x_0 = 0$, to powyższy szereg nazywamy szeregiem Maclaurina.

Zwróćmy uwagę na następujący przykład (w którym część skomplikowanych obliczeń pomijamy):

Przykład 6.13. Rozważmy funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ klasy C^{∞} daną wzorem

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{dla } x \neq 0, \\ 0, & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

Łatwo sprawdzić, że $f^{(n)}(0) = 0$ dla $n = 0, 1, 2, \ldots$ Stąd gdyby funkcja rozwijała się w szereg Macluarina, to w pewnym otoczeniu 0 o promieniu $\delta > 0$ mielibyśmy

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \text{ dla } x \in (-\delta, \delta).$$

Skoro $f^{(n)}(0) = 0$ dla $n = 0, 1, 2, \ldots$, to widzimy, że

$$f(x) = 0 \text{ dla } x \in (-\delta, \delta),$$

co jest niemożliwe, bo $f(x) > 0$ dla $x \in (0, \delta)$.

Uwaga 6.9. Z przykładu 6.13 i wcześniejszych uwag wynika, że każda funkcja postaci

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \text{ dla } x \in (x_0-\delta, x_0+\delta), \delta > 0, \ x_0 \in \mathbb{R} \tag{6.4}$$

jest klasy $C^{\infty}(x_0-\delta,x_0+\delta)$, ale nie każda funkcja klasy $C^{\infty}(x_0-\delta,x_0+\delta)$ jest powyższej postaci.

Zajmiemy się teraz warunkiem wystarczającym na to, by funkcja była (lokalnie) rozwijalna w szereg Taylora, czyli by zachodziła równość (6.4) w otoczeniu każdego punktu z wnętrza dziedziny. Rozwijalność w sensie Taylora oznacza, iż formalny szereg Taylora jest zbieżny i jego sumą jest f. Zbieżność formalnego szeregu Taylora z kolei oznacza, iż reszta we wzorze Taylora zbiega na pewnym przedziale jednostajnie do 0.

Twierdzenie 6.17. *Niech $\delta>0$, $x_0\in\mathbb{R}$. Niech $f\in C^{\infty}(\mathbb{R})$. Jeżeli istnieją indeks n_0 oraz stała $M>0$ takie, że dla $n\geq n_0$ oraz $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ zachodzi*

$$\left|f^{(n)}(x)\right|\leq M\frac{n!}{\delta^n},$$

to funkcja f rozwija się w szereg Taylora środku x_0 i o promieniu równym co najmniej δ.

Dowód. Zapiszmy wzór Taylora z resztą Lagrange'a (twierdzenie 5.2) w punkcie x_0 dla $n\geq n_0$:

$$\begin{aligned} f(x)=&f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f'(x_0)}{2}(x-x_0)^2+\ldots\\ &+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_n)(x-x_0)^{n+1}, \end{aligned}$$

gdzie $x_n\in(x,x_0)$, $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$. Zatem resztę

$$r_n(x)=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_n)(x-x_0)^{n+1}$$

dla $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ możemy oszacować następująco:

$$|r_n(x)|\leq M\left|\frac{x-x_0}{\delta}\right|^{n+1}$$

Skoro $\left|\frac{x-x_0}{\delta}\right|<1$, to widzimy, że $r_n\rightrightarrows 0$ na $(x_0-\delta,x_0+\delta)$. Stąd dostajemy od razu tezę twierdzenia. ∎

Uwaga 6.10. Często w zastosowaniach sprawdzamy, czy

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \leq M. \tag{6.5}$$

Wtedy mamy oszacowanie reszty

$$|r_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1} \leq \frac{M\delta^{n+1}}{(n+1)!}$$

skąd również od razu wynika, że $r_n \rightrightarrows 0$ na $(x_0-\delta, x_0+\delta)$. Dodatkowo należy podkreślić, że oszacowanie typu (6.5) może zależeć od otoczenia punktu, w którym jest określone.

Powyżej uzyskane twierdzenie informuje nas kiedy funkcję można (lokalnie) rozwijać w szereg Taylora. Stąd wyróżniamy specjalną klasę funkcji zwanych funkcjami analitycznymi, o własności opisanej w powyższym twierdzeniu.

Definicja 6.3 (*Funkcja analityczna*)**.** Niech $X \subset \mathbb{R}$ będzie zbiorem otwartym. Mówimy, że funkcja f jest analityczna na X, jeżeli dla dowolnego $x_0 \in X$ istnieją:

(i) liczba $\delta > 0$,

(ii) ciąg liczbowy $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

takie, że

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n \text{ dla } x \in (x_0-\delta, x_0+\delta).$$

Przykład 6.14. Weźmy funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ daną wzorem

$$f(x) = e^x.$$

Wtedy $f^{(n)}(x) = e^x$ dla dowolnych $x \in \mathbb{R}$ oraz $n \in \mathbb{N}$. Funkcja f jest zatem klasy C^∞ na $\mathbb{R}$. Widzimy, że dla $x_0 = 0$ oraz dowolnie ustalonego $\delta > 0$ zachodzi

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \leq e^\delta =: M.$$

Stąd mamy rozwinięcie

$$f\left(x\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n}}{n!} \tag{6.6}$$

dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$. Zachowujemy konwencję, że $x^0 = 1$. Szereg jest zbieżny niemal jednostajnie, co jest konswekwencją tego, że stała M uzyskana powyżej zależy od promienia przedziału, na którym stosujemy wzór Maclaurina. Ogólniej, funkcja $f\left(x\right)=e^x$ rozwija się w szereg Taylora

$$f\left(x\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}e^{x_0}\frac{\left(x-x_0\right)^{n}}{n!}$$

w dowolnym otoczeniu każdego punktu $x_0 \in \mathbb{R}$. Zatem funkcja eksponencjalna jest analityczna. Promień zbieżności zarówno w przypadku szeregu Taylora, jak i Maclaurina wynosi $+\infty$.

Przykład 6.15. Kładąc we wzorze (6.6) $-x^2$ zamiast x otrzymujemy dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$

$$e^{-x^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-1\right)^{n}\frac{x^{2n}}{n!}.$$

Skoro powyższy szereg jest niemal jednostajnie zbieżny na $\mathbb{R}$, to możemy go całkować wyraz po wyrazie otrzymując dla $x \in \mathbb{R}$

$$\int_0^x\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-1\right)^{n}\frac{t^{2n}}{n!}dt=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(-1\right)^{n}}{n!}\int_0^x t^{2n}dt=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(-1\right)^{n}}{n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Przykład 6.16. Stosując indukcję matematyczną łatwo wykazujemy, że dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ i dowolnego $n \in \mathbb{N}$

$$\sin^{(n)}\left(x\right)=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right),\ \cos^{(n)}\left(x\right)=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right).$$

Stąd uzyskujemy rozwinięcia w szereg Macluarina

$$\sin x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(-1\right)^{n+2}}{(2n+1)!}x^{2n+1},$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+2}}{(2n)!} x^{2n}$$

o promieniu zbieżności równym $+\infty$. Oba szeregi są niemal jednostajnie zbieżne.

Uwaga 6.11. Wszystkie funkcje elementarne są analityczne. Podobnie złożenia (wykonalne) funkcji analitycznych są analityczne. Działania arytmetyczne (wykonalne) na funkcjach analitycznych prowadzą do uzyskania funkcji analitycznej.

Przykład 6.17. Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana wzorem

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

jest analityczna jako wykonalne złożenie funkcji analitycznych. Szereg Maclaurina tej funkcji ma postać

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n},$$

skąd widzimy, że promień zbieżności wynosi 1. Uzyskujemy go w rozwinięciu

$$\sum_{n=0}^{+\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$$

wstawiając $t = -x^2$. Ten przykład dobrze oddaje sens żądania lokalnej rozwijalności w szereg Taylora dla funkcji analitycznej.

Przykład 6.18. Funkcje arctg oraz $\ln$ są analityczne. Rozwijamy je w szereg Maclaurina znajdując ich pochodne i całkując wyraz po wyrazie ich rozwinięcia. Rozważmy dla przykładu funkcję arctg zostawiając funkcję $\ln$ do rozwinięcia Czytelnikowi.

Wiemy, że

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}$$

skąd na podstawie twierdzenia Newtona-Leibniza wnioskujemy, że

$$\operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} 0 = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt.$$

Skoro dla ustalonego $x \in (-1, 1)$ szereg

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \, t^{2n}$$

jest zbieżny jednostajnie na $[0, x]$, to możemy zamieniać sumowanie i całkowanie na podstawie twierdzenia 6.15, uzyskując

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \, t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}.$$

Skoro dla $x = 1$ szereg

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

jest zbieżny warunkowo, to otrzymujemy jego rozwinięcie

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

dla $x \in (-1, 1]$. Zbieżność powyższego szeregu jest niemal jednostajna w przedziale $(-1, 1]$ oraz bezwzględna na $(-1, 1)$. Skoro $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, to możemy łatwo zauważyć, że

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Przykład 6.19. Postępując jak w powyższym przykładzie uzyskujemy rozwinięcie

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

dla $x \in (-1, 1]$. Podstawiając tu $x = 1$ otrzymujemy

$$\ln 2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Przykład 6.20. Obliczymy całkę

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx$$

z dokładnością do 0.0001. Szereg

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}$$

jest niemal jednostajnie zbieżny na $\mathbb{R}$, skąd

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 x^{2n} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(2n+1)}.$$

Skoro

$$\left| \frac{(-1)^n}{n!\,(2n+1)} \right| < 0.0001$$

już dla $n = 8$, to

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{-x^2} dx &\approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} - \frac{1}{1320} + \frac{1}{9360} - \frac{1}{75600} \\ &= \frac{1009\,219}{1351\,350} = 0.746\,82. \end{aligned}$$

Jak pokażemy w kolejnym przykładzie, stosując całkowanie szeregów znajdujemy postaci funkcji, które dane są niejawnie.

Przykład 6.21. Wiemy, że

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

skąd wnioskujemy, że całka

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt \text{ dla ustalonego } x \in \mathbb{R}$$

jest całką Riemanna. Możemy zatem zdefiniować funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wzorem

$$f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt.$$

Skoro

$$\sin t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+2}}{(2n+1)!} t^{2n+1}$$

i szereg ten jest zbieżny niemal jednostajnie, to dla $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+2}}{(2n+1)!} t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+2}}{(2n+1)!\,(2n+1)} x^{2n+1}.$$

ROZDZIAŁ 7

Szereg Fouriera

Rozważaliśmy już zagadnienie przybliżania funkcji (analitycznych) ich szeregiem Taylora. Sumy częściowe tego szeregu są wielomianami coraz wyższych stopni. W takim razie dla funkcji sinus, która jest okresowa, kolejne przybliżenia są wielomianami, czyli funkcjami nieokresowymi. Stąd wyrasta potrzeba przybliżania funkcji okresowych funkcjami również okresowymi. Służą temu szeregi Fouriera.

7.1. Funkcje okresowe

Definicja 7.1. Funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nazywamy okresową o okresie $T > 0$, jeżeli dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$f(x + T) = f(x).$$

Jeśli funkcja f jest okresowa, to najmniejszą liczbę dodatnią T o powyższej własności (o ile taka istnieje) nazywmy okresem podstawowym.

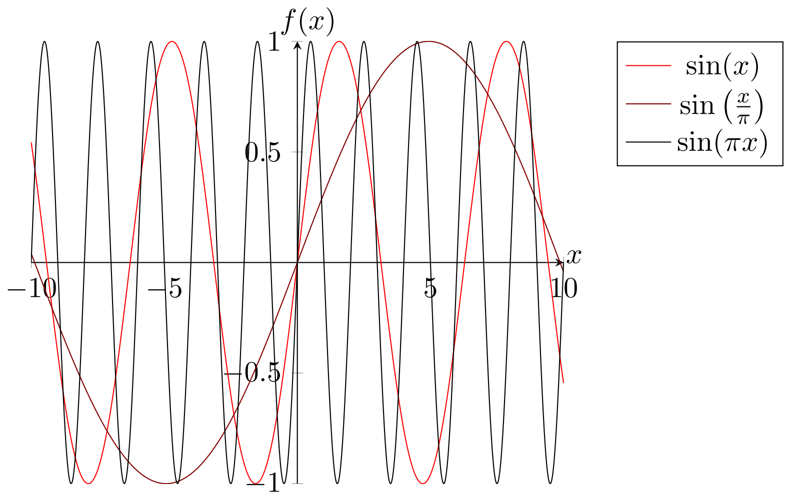
Przykład 7.1.

(i) Funkcje trygonometryczne są okresowe. Okresem podstawowym funkcji sinus i kosinus jest 2π, a funkcji tangens i kotangens π.

(ii) Funkcja stała jest okresowa o dowolnym okresie dodatnim, stąd nie ma okresu podstawowego.

(iii) Funkcją okresową o okresie $T = 1$ jest funkcja $x \longmapsto [x]$, gdzie przez $[x]$ rozumiemy część całkowitą liczby x.

(iv) Funkcje $x \longmapsto \cos(\lambda x)$, $x \longmapsto \sin(\lambda x)$, gdzie $\lambda \neq 0$, są okresowe o okresie podstawowym $\frac{2\pi}{\lambda}$.



(v) Funkcja Dirichleta

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

jest okresowa. Każda liczba wymierna jest jej okresem.

Uwaga 7.1. Dowolną funkcję określoną na przedziale $[a, b)$ można przedłużyć do funkcji okresowej o okresie $T = b - a$ na $\mathbb{R}$ kładąc

$$f(x + kT) = f(x) \text{ dla } k \in \mathbb{Z}, x \in [a, b).$$

Przedłużenie takie nie musi być ciągłe w punktach $x = a + kT$, nawet jeśli funkcja f byłaby ciągła na $[a, b)$. W sytuacji gdy funkcja f jest ciągła, są to jedyne punkty nieciągłości.

Powyższa obserwacja, wraz z wcześniej poczynionymi uwagami o tym, że rozwinięca w szereg są jedynie lokalne, pozwala nam stwierdzić, iż będziemy mogli w ramach wprowadzanej tutaj teorii badać dowolne funkcje (spełniające pewne warunki).

Uwaga 7.2. Poprzez proste podstawienie można przekształcić funkcję okresową o okresie $T_1 > 0$ na funkcję o dowolnym innym okresie $T_2 > 0$. Istotnie załóżmy, że funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ posiada okres $T_1 > 0$ i niech $T_2 > 0$ będzie ustalone. Zdefiniujmy $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wzorem

$$g(x) := f\left(\frac{T_1}{T_2}x\right) \text{ dla } x \in \mathbb{R}.$$

Wówczas funkcja g jest okresowa o okresie T_2. Istotnie, dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ mamy na podstawie tego, że f ma okres T_1

$$g(x + T_2) = f\left(\frac{T_1}{T_2}(x + T_2)\right) = f\left(\frac{T_1}{T_2}x + T_1\right) = f\left(\frac{T_1}{T_2}x\right) = g(x).$$

Powyższe uwagi mówią nam o tym, że w badaniu funkcji okresowych wystarczy ograniczyć się do jednego, ustalonego i wygodnego w obliczeniach okresu. Ponadto, rozumowania dotyczące funkcji okresowych, przynajmniej na pewnym dowolnie ustalonym przedziale, można przenieść na dowolną inną funkcję.

Funkcje okresowe mają ciekawe własności związane z ich całkowaniem, które w gruncie rzeczy sprowadza się do całkowania po przedziale długości równej ich okresowi.

Stwierdzenie 7.1. *Załóżmy, że $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest lokalnie całkowalna na $\mathbb{R}$ oraz okresowa o okresie $T > 0$. Wówczas dla dowolnego $x_0 \in \mathbb{R}$ zachodzi*

$$\int_0^T f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_0+T} f(x)\,dx. \tag{7.1}$$

W szczególności dla $x_0 = -\frac{T}{2}$ *mamy*

$$\int_0^T f(x)\,dx = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\,dx.$$

Dowód. Korzystając z własności całki Riemanna widzimy, że

$$\int_0^T f(x)\,dx = \int_0^{x_0} f(x)\,dx + \int_{x_0}^{x_0+T} f(x)\,dx + \int_{x_0+T}^{T} f(x)\,dx. \tag{7.2}$$

W całce

$$\int_{x_0+T}^{T} f(x)\,dx$$

podstawiamy $x = y + T$, skąd wykorzystując fakt, że f ma okres T otrzymujemy

$$\int_{x_0+T}^{T} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{0} f(y+T)\,dy = \int_{x_0}^{0} f(y)\,dy = \int_{x_0}^{0} f(x)\,dx.$$

Skoro

$$\int_{x_0}^{0} f(x)\,dx = -\int_0^{x_0} f(x)\,dx,$$

to widzimy z (7.2), że zachodzi (7.1). ∎

W przypadku przybliżania funkcji szeregiem Taylora mamy do czynienia z ciągiem wielomianów coraz wyższych stopni. Podobnie w obecnej sytuacji, gdy chcemy przybliżyć funkcję okresową, wprowadzamy pojęcie wielomianu trygonometrycznego.

Definicja 7.2. Wielomianem trygonometrycznym stopnia n nazywamy funkcję $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ postaci

$$P(x) = a_0 + \sum\nolimits_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

gdzie $a_0, a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n \in \mathbb{R}$.

Uwaga 7.3. Nazwa wielomian trygonometryczny bierze się stąd, że dowolny wielomian dwóch zmiennych X, Y stopnia n po podstawieniu $X = \cos x$ oraz $Y = \sin x$ generuje, po zastosowaniu wzorów trygonometrycznych, wielomian trygonometryczny co najwyżej stopnia n. Istotnie, weźmy

$$P(X, Y) = X^2 + Y^2$$

i podstawmy $X = \cos x$, $Y = \sin x$.

Przykład 7.2. Rozważmy wielomian dwóch zmiennych

$$P(X, Y) = X^3 + 2Y^2$$

stopnia 3. Po podstawieniu $X = \cos x$ oraz $Y = \sin x$ mamy

$$\begin{aligned}
\cos^3 x + 2\sin^2 x &= \cos x \frac{1 + \cos 2x}{2} + 2\frac{1 - \cos 2x}{2} \\
&= 1 + \tfrac{1}{2}\cos x - \cos 2x + \tfrac{1}{2}\cos x \cos 2x \\
&= 1 + \tfrac{1}{2}\cos x - \cos 2x + \tfrac{1}{4}(\cos x + \cos 3x) \\
&= 1 + \tfrac{3}{4}\cos x - \cos 2x + \tfrac{1}{4}\cos 3x = P(x).
\end{aligned}$$

7.2. Rodzina funkcji zregularyzowanych

W przypadku funkcji okresowych, jak widzieliśmy z wcześniejszych przykładów, nie ma sensu mówić o ciągłości na całej dziedzinie. Najczęściej jednak funkcje pojawiające się w zastosowaniach są przedziałami ciągłe.

W dalszym ciągu będą nas interesowały funkcje o okresie 2π i tylko dla takich podajemy dalej konieczne pojęcia. Jak już widzieliśmy, funkcję okresową można łatwo przekształcić na okresową o innym okresie. Oznaczmy dla $x_0 \in \mathbb{R}$ oraz funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f\left(x_0^+\right) = \lim_{x \to x_0^+} f(x), \; f\left(x_0^-\right) = \lim_{x \to x_0^-} f(x),$$

Definicja 7.3. Funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o okresie 2π nazywamy przedziałami ciągłą, jeśli jest ciągła na $[0, 2\pi]$, poza być może skończoną ilością punktów, w których istnieją właściwe granice jednostronne. Jeżeli w każdym punkcie nieciągłości $x_0 \in [0, 2\pi]$ zachodzi

$$f\left(x_0\right) = \frac{f\left(x_0^+\right) + f\left(x_0^-\right)}{2},$$

to f nazywamy funkcją zregularyzowaną.

Rodzinę funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o okresie 2π przedziałami ciągłych i zregularyzowanych oznaczać będziemy $\widetilde{C}_{2\pi}$.

Uwaga 7.4. Rodzina $\widetilde{C}_{2\pi}$ (ze standardowymi działaniami dodawania funkcji i mnożenia funkcji przez liczbę rzeczywistą) jest przestrzenią wektorową nad ciałem liczb rzeczywistych. Zauważmy, że skoro elementy przestrzeni $\widetilde{C}_{2\pi}$ są funkcjami mającymi na przedziałach ograniczonych skończoną liczbę punktów nieciągłości, to są one lokalnie całkowalne.

Stwierdzenie 7.2. *Wyrażenie dane wzorem*

$$(f, g) = \int_0^{2\pi} f\left(x\right) g\left(x\right) dx \text{ dla } f, g \in \widetilde{C}_{2\pi}$$

określa w przestrzeni $\widetilde{C}_{2\pi}$ iloczyn skalarny.

Dowód. Dla dowolnego $f \in \widetilde{C}_{2\pi}$ mamy

$$(f, f) = \int_0^{2\pi} f^2\left(x\right) dx \geq 0.$$

Jeżeli $f = 0$, to $(f, f) = 0$. Jeśli $(f, f) = 0$, to wtedy $\int_0^{2\pi} f^2\left(x\right) dx = 0$. Skoro jednak $f^2\left(x\right) \geq 0$ na $[0, 2\pi]$, to widzimy, że $f\left(x\right) = 0$ na $[0, 2\pi]$. Stąd

$$(f, f) = 0 \Longleftrightarrow f = 0.$$

Od razu widzimy, że dla dowolnych $f, g \in \widetilde{C}_{2\pi}$ mamy

$$(f, g) = (g, f)\,.$$

Ponadto, dla $f, g, h \in \widetilde{C}_{2\pi}$ i dowolnych $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mamy

$$\begin{aligned}(\alpha f + \beta g, h) &= \int_0^{2\pi} (\alpha f(x) + \beta g(x))\, h(x)\, dx \\ &= \alpha \int_0^{2\pi} f(x)\, h(x)\, dx + \beta \int_0^{2\pi} g(x)\, h(x)\, dx \\ &= \alpha (f, h) + \beta (g, h)\,.\end{aligned}$$ ∎

W przestrzeni $\widetilde{C}_{2\pi}$ wprowadzamy tak zwaną normę kwadratową zadaną wzorem

$$\|f\|_2 = \sqrt{(f, f)} = \sqrt{\int_0^{2\pi} f^2(x)\, dx} \text{ dla } f \in \widetilde{C}_{2\pi}. \tag{7.3}$$

Norma kwadratowa ma następujące własności:

(i) $\|f\|_2 = 0 \Longleftrightarrow f = 0$ oraz $\|f\| \geq 0$ dla $f \in \widetilde{C}_{2\pi}$;

(ii) $\|\alpha f\|_2 = |\alpha|\, \|f\|_2$ dla dowolnych $\alpha \in \mathbb{R}$, $f \in \widetilde{C}_{2\pi}$;

(iii) $\|f + g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2$ dla dowolnych $f,\ g \in \widetilde{C}_{2\pi}$ (nierówność Minkowskiego).

Zachodzi również nierówność Schwarza:

$$|(f, g)| \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2 \text{ dla dowolnych } f,\ g \in \widetilde{C}_{2\pi}.$$

Funkcja określona wzorem (7.3) będzie pełnić podobną rolę w przestrzeni $\widetilde{C}_{2\pi}$ do funkcji danej wzorem (3.3) w przestrzeni $C[a, b]$ funkcji ciągłych na odcinku $[a, b]$.

7.3. Układy ortogonalne i ortonormalne

Definicja 7.4. Układ (rodzinę) funkcji $f_k \in \widetilde{C}_{2\pi}$ dla $k = 0, 1, 2, ..$, które nie są tożsamościowo równe zero nazywamy układem ortogonalnym, jeżeli

$$(f_i, f_j) = 0$$

dla dowolnych $i \neq j$, przy czym $i, j = 0, 1, 2, ...$

Przykład 7.3. Układ funkcji

$$\mathcal{F} = \{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cos 3x, \sin 3x, ...\}$$

jest układem ortogonalnym, co sprawdzamy przez łatwe całkowanie. Istotnie, mamy bowiem

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} \cos^2(nx)\,dx = \int_0^{2\pi} \sin^2(nx)\,dx = \pi \text{ dla } n = 1, 2, ...\\
&\int_0^{2\pi} \cos(nx)\cos(mx)\,dx = 0 \text{ dla } n, m = 0, 1, 2, ..., m \neq n\\
&\int_0^{2\pi} \sin(nx)\sin(mx)\,dx = 0 \text{ dla } n, m = 0, 1, 2, ..., m \neq n\\
&\int_0^{2\pi} \cos(nx)\sin(mx)\,dx = 0 \text{ dla } n, m = 0, 1, 2, ...,\\
&\int_0^{2\pi} \cos(nx)\,dx = \int_0^{2\pi} \sin(nx)\,dx = 0 \text{ dla } n = 0, 1, 2, ...
\end{aligned} \tag{7.4}$$

Definicja 7.5. Układ (rodzinę) funkcji $f_k \in \widetilde{C}_{2\pi}$ dla $k = 0,\ 1,\ 2,\ ..$, które nie są tożsamościowo równe zero nazywamy układem ortonormalnym, jeżeli jest układem ortogonalnym oraz

$$\|f_k\|_2 = 1 \text{ dla } k = 0, 1, 2, ..$$

Uwaga 7.5. Każdy układ ortogonalny staje się ortonormalny po podzieleniu jego elementów przez ich normy kwadratowe. Stąd układ

$$\widehat{\mathcal{F}} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 3x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 3x}{\sqrt{\pi}}, \ldots \right\}$$

jest ortonormalny. Zastosujemy następujące oznaczenia dla kolejnych funkcji występujących w powyższym zapisie:

$$\widehat{\mathcal{F}} = \{\varphi_0, \varphi_1, \psi_1, \varphi_2, \psi_2, \varphi_3, \psi_3, \ldots\}. \tag{7.5}$$

Układ ortonormalny $\widehat{\mathcal{F}}$ pełni bardzo ważną funkcję w rodzinie $\widetilde{C}_{2\pi}$, podobną do tej jaką w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ pełni baza kanoniczna. Oznacza to, iż spodziewamy się, że każdy element przestrzeni $\widetilde{C}_{2\pi}$ jest sumą kombinacji liniowych elementów układu $\widehat{\mathcal{F}}$. Istotna różnica polega teraz na tym, że suma ta jest sumą szeregu. Musimy zatem zająć się odpowiednią definicją szeregu oraz w dalszej kolejności zbadać jego zbieżność i jej charakter. Jest to zagadnienie odmienne od tych, którymi się dotąd zajmowaliśmy. Istotne tutaj okaże się zastosowanie ciągów wielomianów trygonometrycznych, których zbieżność będzie dla nas kluczowa.

7.4. Współczynniki Eulera-Fouriera, formalny szereg Fouriera

Definicja 7.6. Załóżmy, że $f \in \widetilde{C}_{2\pi}$. Współczynnikami Eulera-Fouriera funkcji f względem układu $\widehat{\mathcal{F}}$ nazywamy liczby

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, dx; \tag{7.6}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx)\, dx \text{ dla } n = 1, 2, \ldots, \tag{7.7}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx)\, dx \text{ dla } n = 1, 2, \ldots\,. \tag{7.8}$$

Uwaga 7.6. Wzory Eulera-Fouriera możemy zapisać przy pomocy iloczynu skalarnego następująco:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(f, \varphi_0\right), \\ a_n &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(f, \varphi_n\right) \text{ dla } n = 1, 2, ..., \\ b_n &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(f, \psi_n\right) \text{ dla } n = 1, 2, ... \end{aligned}$$

Uwaga 7.7. Łatwo wydedukować, w jaki sposób można wprowadzić pojęcie współczynników Eulera-Fouriera. Poniżej przypuszczamy, że wszystkie operacje, które wykonujemy, są dopuszczalne. Jak się przekonamy dalej, na to by mogły one zachodzić, potrzeba dość dużych obostrzeń. Niech $f \in \widetilde{C}_{2\pi}$. Przypuśćmy, że dla $x \in [0, 2\pi]$ zachodzi

$$f\left(x\right) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \tag{7.9}$$

dla pewnych $a_0, a_n, b_n \in \mathbb{R}$ dla $n = 1, 2, ...$. Scałkujemy teraz obie strony równości (7.9) od 0 do 2π. Stąd widzimy, że (7.6) zachodzi. Pomnożenie obu stron (7.9) przez $\cos nx$ dla $n = 1, 2, ...$ oraz zastosowanie (7.4) prowadzi do wzoru (7.7). Podobnie, pomnożenie obu stron (7.9) przez $\sin nx$ dla $n = 1, 2, ...$ oraz zastosowanie (7.4) prowadzi do wzoru (7.8). Podkreślamy, że powyższe rachunki są jedynie naprowadzeniem i podobnie jak w przypadku funkcji klasy C^∞ i ich związku z analitycznością tutaj również musimy zachować dużą ostrożność.

Definicja 7.7. Formalnym szeregiem Fouriera funkcji $f \in \widetilde{C}_{2\pi}$ nazywamy następujący szereg funkcyjny

$$a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \tag{7.10}$$

gdzie a_0, a_n, b_n dla $n = 1, 2, \ldots$ są współczynnikami Eulera-Fouriera funkcji f względem układu $\widehat{\mathcal{F}}$. Piszemy wówczas

$$f \approx a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

Sumę częściową szeregu (7.10) oznaczamy jako

$$S_{n,f}(x) := \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx.$$

Użyliśmy słowa formalny dlatego, iż podobnie jak dla każdej funkcji klasy C^∞ mogliśmy zapisać szereg Taylora niekoniecznie do niej zbieżny, tak i dla funkcji $f \in \widetilde{C}_{2\pi}$ możemy obliczyć współczynniki Eulera-Fouriera, a zatem zdefiniować szereg (7.10).

Stwierdzenie 7.3. *Jeżeli funkcja $f \in \widetilde{C}_{2\pi}$ jest nieparzysta, to*

$$\begin{aligned} a_n &= 0 \textit{ dla } n = 0, 1, 2, \ldots, \\ b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin(nx)\, dx \textit{ dla } n = 1, 2, \ldots . \end{aligned}$$

Jeżeli z kolei funkcja $f \in \widetilde{C}_{2\pi}$ jest parzysta, to

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(x)\, dx, \\ a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos(nx)\, dx \textit{ dla } n = 1, 2, \ldots, \\ b_n &= 0 \textit{ dla } n = 1, 2, \ldots . \end{aligned}$$

Dowód. Załóżmy, że funkcja f jest parzysta. Przypomnijmy, że skoro funkcja f jest okresowa o okresie 2π, to

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx.$$

Korzystając z parzystości funkcji f mamy

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\,dx.$$

Tak samo uzasadniamy, że

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx \text{ dla } n = 1, 2, \ldots$$

Z kolei dla $n = 1, 2, \ldots$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = 0$$

na podstawie nieparzystości funkcji podcałkowej. ∎

W poniższych przykładach pomijamy pracochłonne szczegóły rachunkowe.

Przykład 7.4. Rozważmy funkcję

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{dla} \quad -\pi < x < 0, \\ 0 & \text{dla} \quad x = 0, \pm\pi, \\ 1 & \text{dla} \quad 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Widzimy, że $a_k = 0$ dla $k = 0, 1, 2, \ldots$ oraz

$$b_k = \begin{cases} 0 & \text{dla } k \text{ parzystego}, \\ \frac{4}{k\pi} & \text{dla } k \text{ nieparzystego}. \end{cases}$$

Formalny szereg Fouriera jest postaci

$$f \approx \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1}\sin(2n+1)\,x.$$

Przykład 7.5. Rozważmy funkcję $f(x) = |\sin x|$. Tym razem $b_k = 0$ dla $k = 1, 2, \ldots$. Natomiast $a_0 = \frac{2}{\pi}, a_1 = 0$ oraz dla $k > 1$

$$a_k = \begin{cases} 0 & \text{dla } k \text{ nieparzystego}, \\ \frac{4}{(k^2-1)\pi} & \text{dla } k \text{ parzystego}. \end{cases}$$

Formalny szereg Fouriera jest postaci

$$f \approx \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} \cos 2nx.$$

7.5. Zbieżność szeregu Fouriera

W przypadku ciągów i szeregów funkcyjnych mówiliśmy o zbieżności punktowej i implikującej ją zbieżności jednostajnej. Wprowadzimy teraz, dla szeregów typu (7.10) zbieżność w sensie normy kwadratowej.

Definicja 7.8. Funkcja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest całkowalna z kwadratem na $[a, b]$, jeżeli funkcja $x \longmapsto f^2(x)$ jest całkowalna na $[a, b]$.

Definicja 7.9. Załóżmy, że funkcje $f_n, f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dla $n = 1, 2, ...$ są całkowalne z kwadratem na $[a, b]$. Mówimy, że szereg funkcyjny

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$$

jest zbieżny w sensie normy kwadratowej do funkcji f na $[a, b]$, jeżeli

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} f_k(x) \right|^2 dx = \lim_{n\to+\infty} \left\| f - \sum_{k=0}^{n} f_k \right\|_2^2 = 0.$$

Uwaga 7.8. Zauważmy, że jeżeli $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \rightrightarrows f$ na $[a, b]$, to również szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ jest zbieżny w sensie normy kwadratowej do funkcji f na $[a, b]$. Istotnie, wiemy, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} f_k(x) \right|^2 \leq \sup_{t\in[a,b]} \left| f(t) - \sum_{k=0}^{n} f_k(t) \right|^2 \quad \text{dla } x \in [a, b].$$

Przypomnijmy oznaczenie

$$\left\| f - \sum_{k=0}^{n} f_k \right\|_{\infty,[a,b]} = \sup_{t\in[a,b]} \left| f(t) - \sum_{k=0}^{n} f_k(t) \right|.$$

Wówczas zachodzi

$$\begin{aligned} \left\| f - \sum_{k=0}^{n} f_k \right\|_2^2 &= \int_a^b \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} f_k(x) \right|^2 dx \\ &\leq \int_a^b \left\| f - \sum_{k=0}^{n} f_k \right\|_{\infty,[a,b]}^2 dx = (b-a) \left\| f - \sum_{k=0}^{n} f_k \right\|_{\infty,[a,b]}^2 . \end{aligned}$$

Skoro zbieżność

$$\left\| f - \sum_{k=0}^{n} f_k \right\|_{\infty,[a,b]}^2 \to 0 \text{ przy } n \to +\infty \tag{7.11}$$

jest równoważna temu, że $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \rightrightarrows f$ na $[a,b]$, to widzimy, że (7.11) implikuje, że

$$\left\| f - \sum_{k=0}^{n} f_k \right\|_2^2 \to 0 \text{ przy } n \to +\infty.$$

Należy jednak podkreślić, iż implikacja odwrotna nie jest prawdziwa. Ponadto szereg, który jest zbieżny w sensie normy kwadratowej, nie musi być zbieżny punktowo. Podanie przykładów i bardziej szczegółowe wyjaśnienie tych zagadnień przekracza ramy tego wykładu.

Fundamentalne twierdzenie dotyczące zbieżności szeregów Fouriera jest następujące:

Twierdzenie 7.1. *Jeżeli $f \in \widetilde{C}_{2\pi}$, to jej formalny szereg Fouriera (7.10) zbiega do f na $[0,2\pi]$ w sensie normy kwadratowej, tzn.*

$$\|f - S_{n,f}\|_2^2 \to 0 \textit{ przy } n \to +\infty.$$

Z powyższego twierdzenia otrzymujemy w łatwy sposób tożsamość Parsevala oraz lemat Riemanna-Lebesgue'a.

Wnoisek 7.1. *Jeżeli $f \in \widetilde{C}_{2\pi}$, to zachodzi następująca tożsamość Parsevala:*

$$\int_0^{2\pi} f^2(x)\,dx = 2\pi a_0^2 + \pi \sum_{n=0}^{+\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right).$$

Dowód. Zauważmy, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$

$$\|f - S_{n,f}\|_2^2 = (f - S_{n,f}, f - S_{n,f}) = (f, f) - 2(S_{n,f}, f) + (S_{n,f}, S_{n,f}).$$

Obliczając widzimy, że

$$(f, f) = \int_0^{2\pi} f^2(x)\,dx,$$

$$\begin{aligned}(S_{n,f}, f) &= \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) f(x)\,dx + \int_0^{2\pi} a_0 f(x)\,dx \\ &= 2\pi a_0^2 + \pi \sum_{k=1}^{n} \left(a_k^2 + b_k^2\right),\end{aligned}$$

oraz że

$$\lim_{n \to +\infty} (S_{n,f}, S_{n,f}) = 0.$$

Zatem z twierdzenia 7.1 otrzymujemy

$$\begin{aligned}0 &= \lim_{n \to +\infty} \|f - S_{n,f}\|_2^2 = \lim_{n \to +\infty} \left(\int_0^{2\pi} f^2(x)\,dx - 2\pi a_0^2 - \pi \sum_{k=1}^{n} \left(a_k^2 + b_k^2\right)\right) \\ &= \int_0^{2\pi} f^2(x)\,dx - 2\pi a_0^2 - \pi \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k^2 + b_k^2\right).\end{aligned}$$

∎

Lemma 7.1 (*Riemanna-Lebesgue'a*). *Jeżeli $f \in \widetilde{C}_{2\pi}$ oraz a_n, b_n są współczynnikami Eulera-Fouriera względem układu $\widehat{\mathcal{F}}$, to*

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} b_n = 0.$$

Dowód. Z tożsamości Parsevala wynika, że szereg $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(a_k^2+b_k^2\right)$ jest zbieżny, a zatem zbieżne są szeregi $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k^2$ oraz $\sum\limits_{k=1}^{\infty}b_k^2$. Stąd na podstawie warunku koniecznego zbieżności szeregu liczbowego otrzymujemy tezę. ∎

Pozostaje jeszcze skomentować, kiedy formalny szereg Fouriera funkcji $f\in\widetilde{C}_{2\pi}$ jest zbieżny punktowo, a kiedy jednostajnie. Potrzebujemy kilku definicji pomocniczych, których objaśniać nie potrzeba.

Definicja 7.10. Mówimy, że funkcja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ jest przedziałami regularna na $[a,b]$, jeżeli:
a) f jest różniczkowalna na $[a,b]$ poza być może skończoną ilością punktów,
b) f oraz f' są przedziałami ciągłe na $[a,b]$.

Definicja 7.11. Mówimy, że funkcja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ jest przedziałami monotoniczna na $[a,b]$, jeżeli $[a,b]$ można podzielić na skończoną ilość podprzedziałów, w których funkcja f jest już monotoniczna.

Definicja 7.12. Mówimy, że funkcja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ jest przedziałami klasy C^1 na $[a,b]$, jeżeli jest ciągła i przedziałami regularna.

Funkcja $f(x)=|x|$ jest przedziałami monotoniczna oraz przedziałami klasy C^1 na przedziale $[-1,1]$. Podobną własność ma funkcja $f(x)=|\sin x|$ na przedziale $[0,2\pi]$.

Twierdzenie 7.2. *Jeżeli funkcja $f\in\widetilde{C}_{2\pi}$ jest przedziałami regularna oraz przedziałami monotoniczna na $[0,2\pi]$, to formalny szereg Fouriera funkcji f zbiega do tej funkcji punktowo na $[0,2\pi]$. Jeżeli dodatkowo funkcja f jest przedziałami klasy C^1, to zbieżność ta jest jednostajna na $\mathbb{R}$, a zatem i punktowa na $\mathbb{R}$. Prawdziwy jest wówczas wzór*

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx \textit{ dla } x\in\mathbb{R}.$$

Przykład 7.6. Weźmy funkcję $f(x) = x$ na $(-\pi, \pi)$ rozszerzoną w sposób okresowy na całą prostą zgodnie z uwagą 7.1. Wartości w puntkach $\pm\pi$ dobieramy tak, by funkcja była zregularyzowana. Skoro $a_k = 0$ oraz

$$b_k = \frac{2}{k}(-1)^{k+1}$$

dla $k = 0, 1, 2, \ldots$, to

$$f \approx \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n}(-1)^{n+1} \sin nx.$$

Szereg ten jest zbieżny w sensie normy kwadratowej. Stąd i z tożsamości Parsevala mamy

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = \pi \sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2 = \pi \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n^2}.$$

Skoro

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^3}{3},$$

to z powyższego otrzymujemy

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Przykład 7.7. Formalny szereg Fouriera funkcji z przykładu 7.4 jest zbieżny w sensie normy kwadratowej oraz punktowo na $\mathbb{R}$.

7.6. Przypadek funkcji okresowych o okresie $T > 0$

Niech $T > 0$. W podobny sposób do klasy $\widetilde{C}_{2\pi}$ możemy zdefiniować klasę $\widetilde{C}_T$ oraz dla funkcji $f \in \widetilde{C}_T$ określić formalny szereg Fouriera wzorem

$$f \approx a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos \frac{2\pi n}{T} x + b_n \sin \frac{2\pi n}{T} x, \tag{7.12}$$

gdzie

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx,$$
$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^{2\pi} f(x)\cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right) dx \text{ dla } n = 1, 2, ...,$$
$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^{2\pi} f(x)\sin\left(\frac{2\pi n}{T}x\right) dx \text{ dla } n = 1, 2, ...$$

Twierdzenia z podrozdziału 7.5 przenoszą się przy zamianie przestrzeni $\widetilde{C}_{2\pi}$ na $\widetilde{C}_T$. Dla przykładu widzimy, że formuła Parsevala przyjmuje postać

$$\int_0^T f^2(x)\,dx = Ta_0^2 + \frac{T}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right).$$

Przykład 7.8. Funkcja $f(x) = 1 - x^2$ jest okresowa o okresie $T = 2$ na przedziale $[-1, 1]$, a skoro jest parzysta, to współczynniki b_n są równe 0. Podobnie

$$a_0 = \frac{2}{3},$$
$$a_n = \frac{4}{n^2\pi^2}(-1)^{n+1} \text{ dla } n = 1, 2, ...$$

Zatem korzystając ze wzoru (7.12) otrzymujemy

$$f \approx \frac{2}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos\pi nx.$$

Ponieważ f jest przedziałami klasy C^1, to na podstawie twierdzenia 7.2 zbieżność formalnego szeregu Fouriera jest jednostajna, czyli i punktowa. Możemy więc zapisać

$$f(x) = \frac{2}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos\pi nx \text{ dla } x \in \mathbb{R}.$$

Skoro $f(0) = 1$, $\cos 0 = 1$, to z powyższej równości otrzymujemy

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

ROZDZIAŁ 8

Całka zależna od parametru

W tym krótkim rozdziale podajemy jedynie podstawowe informacje dotyczące całki zależnej od parametru. Zanim będziemy mogli sprecyzować zagadnienia poruszane w niniejszym rozdziale, musimy omówić kilka wstępnych pojęć dotyczących funkcji ciągłych dwóch zmiennych i różniczkowalności po współrzędnych.

8.1. Ciągi i funkcje dwóch zmiennych

Ciąg $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy oba ciągi są zbieżne oraz rozbieżny, gdy rozbieżny jest przynajmniej jeden z nich. Będziemy pisali $(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$, lub $\lim_{n\to+\infty} (x_n, y_n) = (x_0, y_0)$, gdy (x_0, y_0) jest granicą ciągu $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$. Stąd ciąg $\left\{\left(\sin n, \frac{1}{n}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ nie jest zbieżny, a ciąg $\left\{\left(0, \frac{1}{n}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ zbieżny jest (gdyż ciąg stały jest zbieżny).

Definicja 8.1. Mówimy, że funkcja $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ jest ciągła w punkcie

$$(x_0, y_0) \in [a, b] \times [c, d]$$

jeżeli dla każdego ciągu $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty} \subset [a, b] \times [c, d]$ zbieżnego do (x_0, y_0) zachodzi

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n, y_n) = f(x_0, y_0).$$

Funkcja f jest ciągła na $[a,b]\times[c,d]$, gdy jest ciągła w każdym punkcie zbioru $[a,b]\times[c,d]$.

Uwaga 8.1. Zauważmy, że jeżeli funkcja $f:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ jest ciągła, to:

(i) dla dowolnego $y_0\in[c,d]$ funkcja $x\mapsto f(x,y_0)$ jest ciągła na $[a,b]$;

(ii) dla dowolnego $x_0\in[a,b]$ funkcja $y\mapsto f(x_0,y)$ jest ciągła na $[c,d]$;

Jednocześnie warto podkreślić, że jeżeli $f:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ jest funkcją dla której zachodzą oba powyższe warunki, to nie musi ona być ciągła.

Przykład 8.1. Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & \text{dla } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{dla } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Funkcja f nie jest ciągła w zerze. Istotnie,

$$\lim_{n\to+\infty} f\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)=-\frac{1}{2}$$

oraz

$$\lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}.$$

Niemniej jednak przy ustalonym $x_0=0$ widzimy, że $f(0,y)=0$ dla $y\in\mathbb{R}$ i stąd funkcja $y\mapsto f(x_0,y)$ jest ciągła na $\mathbb{R}$. Podobnie dla ustalonego $y_0=0$ funkcja $x\mapsto f(x,y_0)$ jest ciągła na $\mathbb{R}$. Stąd mamy prostą obserwację: ciągłość względem zespołu zmiennych implikuje ciągłość po współrzędnych, ale ciągłość po współrzędnych nie implikuje ciągłości ze względu na zespół zmiennych.

Definicja 8.2. Mówimy, że funkcja $f:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ posiada pochodną cząstkową względem y w punkcie $y_0\in[c,d]$, jeżeli dla dowolnie ustalonego $x_0\in[a,b]$ funkcja $y\mapsto f(x_0,y)$ jest różniczkowalna w y_0. W przypadku gdy $y_0 = c$ lub $y_0 = d$ pochodną rozumiemy jako prawo-, lewostronną odpowiednio. Stosujemy oznaczenia:

$$\frac{\partial f}{\partial y} f\left(x_0, y_0\right) \text{ lub } f_y\left(x_0, y_0\right).$$

Do obliczania pochodnych cząstkowych stosujemy zwykłe reguły różniczkowania funkcji jednej zmiennej.

Przykład 8.2. Zauważmy, że dla dowolnych $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ stosując znany wzór mamy

$$\frac{\partial f}{\partial y} \sin\left(x + y\right) = \cos\left(x + y\right),$$

natomiast posługując się formułą różniczkowania złożonego otrzmujemy

$$\frac{\partial f}{\partial y} e^{x^2 y} = e^{x^2 y} x^2.$$

8.2. Ciągłość, różniczkowalność i całkowalność pod znakiem całki

Możemy już teraz przejść do kluczowych twierdzeń. Zajmiemy się ciągłością, całkowalnością i różniczkowalnością funkcji zdefiniowanej przez całkę zależną od parametru.

Twierdzenie 8.1. *Jeżeli funkcja*

$$f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$$

jest ciągła na $[a, b] \times [c, d]$*, to funkcja* $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ *dana wzorem*

$$g\left(y\right) = \int_a^b f\left(x, y\right) dx$$

jest ciągła na $[c, d]$.

Dowód. Musimy pokazać, że dla dowolnego $y_0 \in [c,d]$ zachodzą równości

$$\lim_{y\to y_0} \int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b \lim_{y\to y_0} f(x,y)\,dx = \int_a^b f(x,y_0)\,dx,$$

czyli że

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta:=\delta(\varepsilon)>0} \forall_{y\in[c,d]}\ |y-y_0|<\delta \Longrightarrow |g(y)-g(y_0)|<\varepsilon.$$

Skoro funkcja f jest ciągła na $[a,b]\times[c,d]$, to dla dowolnie ustalonego $x\in[a,b]$ zachodzi:

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta:=\delta(\varepsilon)} \forall_{x\in[a,b],y\in[c,d]}\ \ |y-y_0|<\delta \Longrightarrow |f(x,y)-f(x,y_0)|<\frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Ustalmy $\varepsilon>0$ i dobierzmy $\delta>0$ według powyższej definicji. Wtedy dla $|y-y_0|<\delta$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x,y)\,dx - \int_a^b f(x,y_0)\,dx\right| &\le \int_a^b |f(x,y)-f(x,y_0)|\,dx \\ &\le \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a)=\varepsilon.\end{aligned}$$

Stąd już wynika teza twierdzenia. ∎

Przykład 8.3. Nie obliczając całek widzimy, że funkcje $g_1, g_2 : [1,d]\to\mathbb{R}$ dla $d>1$ są ciągłe, o ile

$$g_1(y) = \int_0^1 \operatorname{arctg}\frac{x}{y}dx \text{ oraz } g_2(y) = \int_0^1 \ln\left(x^2+y^2\right)dx. \tag{8.1}$$

Twierdzenie 8.2 (*Reguła Leibniza*)**.** *Załóżmy, że funkcje*

$$f, f_y : [a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$$

są ciągłe na $[a,b]\times[c,d]$. *Wówczas funkcja* $g:[c,d]\to\mathbb{R}$ *dana wzorem*

$$g(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$$

jest różniczkowalna w sposób ciągły na $[c,d]$ *oraz zachodzi wzór*

$$g'(y) = \int_a^b f_y(x,y)\,dx \text{ dla } y\in[c,d]. \tag{8.2}$$

Przykład 8.4. Rozpatrzmy ponownie funkcje $g_1, g_2 : [1, d] \to \mathbb{R}$, dla $d > 1$, dane wzorami (8.1). Wtedy dla $y \in [1, d]$ mamy

$$g_1'(y) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y}\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right)dx = -\int_0^1 \frac{x}{x^2+y^2}dx = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{y^2}{1+y^2}\right),$$

$$g_2'(y) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y}\ln\left(x^2+y^2\right)dx = \int_0^1 \frac{2y}{x^2+y^2}dx = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{y}.$$

Twierdzenie 8.3 (*Twierdzenie Fubiniego*). *Jeżeli funkcja*

$$f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$$

jest ciągła na $[a, b] \times [c, d]$*, to zachodzi wzór*

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\,dx\right)dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\,dy\right)dx.$$

Mianem twierdzeń Fubiniego określa się wyniki pozwalające zamieniać kolejność całkowania. Taka zamiana może mieć aspekt bardzo praktyczny ułatwiający obliczanie całek.

Przykład 8.5. Weźmy funkcję

$$f(x, y) = x^y$$

na

$$[a, b] \times [c, d] = [0, 1] \times [c, d],$$

gdzie $0 < c < d$. Z ciągłości funkcji f widzimy, że

$$\int_c^d \left(\int_0^1 x^y dx\right)dy = \int_0^1 \left(\int_c^d x^y dy\right)dx.$$

Ponieważ dużo łatwiej obliczyć całkę po lewej stronie, to mamy

$$\int_c^d \left(\int_0^1 x^y dx\right)dy = \int_c^d \frac{1}{y+1}dy = \ln\frac{d+1}{c+1}.$$

Obliczając całkę po prawej stronie otrzymujemy

$$\int_0^1 \left(\int_c^d x^y dy \right) dx = \int_0^1 \frac{x^d - x^c}{\ln x} dx.$$

Stąd

$$\int_0^1 \frac{x^d - x^c}{\ln x} dx = \ln \frac{d+1}{c+1}.$$

Przykład 8.6. Dla funkcji $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ danej wzorem

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{dla } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

nie są spełnione założenia twierdzenia o zamianie kolejności całkowania ze względu na nieciągłość w $(0,0)$. Mianowicie widzimy, że

$$\int_0^1 f(x,y)\, dx = \frac{1}{1+y^2}$$

dla $y > 0$ oraz

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\, dx \right) dy = \int_0^1 \frac{1}{1+y^2} dy = \frac{1}{4}\pi.$$

Z drugiej strony dla $y = 0$ całka $\int_0^1 f(x,y)\, dx$ jest rozbieżna. Stąd nie jest zaskoczeniem, że

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\, dy \right) dx = -\frac{1}{4}\pi.$$

Uwagi bibliograficzne

Pozostaje nam skomentować, w jaki sposób została wykorzystana literatura cytowana w niniejszej pozycji. Skrypt nie zawiera żadnych nowych wyników i jest opracowaniem powstałym na bazie lektur wymienionych poniżej.

Całkę niewłaściwą opracowano w oparciu o [2] z przykładami i niektórymi twierdzeniami zapożyczonymi z [3]. Ciągi i szeregi funkcyjne opisano bazując na [6], [3] (tom 2) i posiłkując się [4] i [5]. Wzór Taylora jest oparty o [1], a szeregi potęgowe opracowano znów w oparciu o [2] i [3] (tom 2). Rozdział o szeregach Fouriera pochodzi w całości z [2], natomiast rozdział o całce z parametrem z [3] (tom 2).

Bibliografia

[1] Canuto C., Tabacco A., (2008), *Mathematical Analysis I*, Springer.

[2] Canuto C., Tabacco A., (2008), *Mathematical Analysis II*, Springer.

[3] Fichtenholz G.M., (2019), *Rachunek różniczkowy i całkowy*, t. 1-3, PWN, Warszawa

[4] Kryszewski W., (2009), *Wykład analizy matematycznej, cz. 1: Funkcje jednej zmiennej*, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, Toruń.

[5] Rudin W., (2009), *Podstawy analizy matematycznej*, PWN, Warszawa.

[6] Spivak M., (2008), *Calculus*, TX: Publish or Perish, Houston.

Indeks

ISBN 978-83-66287-67-9
9 788366 287679