INVERS DARI MATRIKS BERUKURAN *MXN* (KASUS PADA MATRIKS DENGAN RANK BARIS ATAU KOLOM PENUH)

Gregoria Ariyanti
Prodi Matematika –JPMIPA
Universitas Widya Mandala Madiun

ABSTRACT

We can find the general inverse of matrices if they are square matrices with non zero determinant. In this paper, the writer presents a sufficient condition for the matrices which are not square but have an inverse, the case in matrices with full row or column rank.

Key words : *full row rank, full column rank, singular value decomposition, the pseudoinverse of matrices*

A. Pendahuluan

Sejak di bangku SMA, siswa sudah dikenalkan dengan invers dari matriks berukuran *2x2* (matriks persegi). Suatu matriks A mempunyai invers bila terdapat matriks B sehingga $AB=BA=I$ dengan I matriks identitas. Matriks B disebut invers matriks A dan ditulis A^{-1}.

Misal diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, maka invers dari matriks A tersebut adalah

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$ dengan det $(A) = ad - bc\ ^{1}\ 0$.

Selanjutnya juga dikembangkan invers dari matriks persegi lain ,seperti matriks berukuran *3x3* atau lebih, yang dapat diselesaikan dengan pertolongan matriks *adjoin* dan eliminasi *Gauss*. Matriks-matriks persegi yang mempunyai invers adalah matriks-matriks taksingular, yaitu matriks dengan determinan tidak sama dengan 0.

Timbul permasalahan, bagaimana menentukan invers dari matriks yang bukan persegi.

Dalam tulisan ini, A *mxn* menyatakan matriks dengan unsur-unsurnya bilangan real dan berukuran *mxn*.

B. Dekomposisi Nilai Singular Matriks *A*

Yang disebut dengan bentuk *echelon* baris tereduksi (*the reduced row echelon form*) adalah serangkaian proses :

1. Baris nol, jika ada, merupakan baris terakhir dari suatu matriks
2. Elemen taknol pertama dalam baris taknol adalah 1 dan disebut *leading* 1
3. Setiap kolom yang memuat leading 1, disebut kolom *leading*, adalah suatu vektor unit, e_i , untuk suatu I
4. *Leading* 1 dalam baris p terletak bagian kiri dari *leading* 1 dalam baris ke q, untuk p<q.

Definisi tersebut analog untuk serangkaian proses pada kolom dan

ISSN 0854-1981

disebut bentuk *echelon* kolom tereduksi.

Adapun, perubahan baris-baris berikut ini pada matriks A disebut operasi baris elementer yang terdiri dari :

Tipe 1 Menukarkan tempat baris ke-i dan baris ke-j, ditulis $H_{ij}(A)$

Tipe 2 Mengalikan baris ke-i dengan skalar $\lambda \neq 0$, ditulis $H_i^{(\lambda)}(A)$

Tipe 3 Menambah baris ke-i dengan λ kali baris ke-j , ditulis $H_{ij}^{(\lambda)}(A)$.

Analog untuk perubahan kolom-kolom pada matriks A disebut operasi kolom elementer yang masing-masing tipe dapat ditulis sebagai $K_{ij}(A)$, $K_i^{(\lambda)}(A)$ dan $K_{ij}^{(\lambda)}(A)$.

Rank matriks A, ditulis rank (A), adalah banyak maksimum baris/kolom taknol dalam bentuk *echelon* baris/kolom A. Rank (A) dapat diketahui dari matriks baru yang diperoleh dengan menerapkan operasi baris/kolom elementer beberapa kali sampai diperoleh baris dan kolom yang tidak dapat dinolkan lagi.

Definisi b.1

Diberikan matriks A berukuran mxn.

Matriks A dikatakan mempunyai rank kolom penuh jika rank A = n dan mempunyai rank baris penuh jika rank A = m.

Jika $A^T = A$, dengan A^T menyatakan *transpose* matriks A , maka matriks A dikatakan simetri.

Bilangan real λ yang memenuhi $Ax = \lambda x$, dengan $x \neq 0$, disebut nilai eigen dari A dan $x \neq 0$ disebut vektor eigen yang bersesuaian dengan λ.

Definisi b.2

Diberikan A matriks atas bilangan real berukuran mxn .

Bilangan real positif s dikatakan nilai singular matriks A jika ada vektor taknol $u \in R^m$ dan $v \in R^n$ sedemikian sehingga

$Av = \sigma u$ dan $A^T u = \sigma v$.

Dari pengertian nilai eigen dan nilai singular matriks A, dapat dinyatakan hubungan bahwa jika λ^2 nilai eigen matriks AA^T maka λ merupakan nilai singular matriks A.

Suatu matriks Q dikatakan *orthogonal* jika $Q^TQ = I$ atau $Q^T = Q^{-1}$.

Teorema b.3 (Teorema Dekomposisi Nilai Singular matriks A)

Misal A matriks atas bilangan real berukuran mxn dengan rank r. Maka terdapat matriks orthogonal U mxm dan V mxm sedemikian sehingga $A = USV^T$ dengan S adalah matriks mxn dengan bentuk

S = diag $(\Sigma , 0)$ = diag $(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_r, 0, ..., 0)$

dengan $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_r$ adalah nilai-nilai singular dari A.

Bukti :

Dapat ditunjukkan dengan mudah bahwa A^TA dan AA^T adalah matriks simetri dan matriks semidefinit positif. Oleh karena itu nilai eigen taknolnya adalah positif dan sama serta akar positif dari nilai eigen didefinisikan sebagai nilai singular matriks A.

Vektor eigen dari A^TA dapat dipilih pada pembentukan basis orthonormal untuk R^n. Diberikan

$V = [\, v_1 \;\; v_2 \;\; v_3 \; ... \; v_r \;\; v_{r+1} \; ... \; v_n \,]$

matriks nxn yang kolomnya adalah vektor-vektor orthonormal.

Karena rank A adalah r, maka dapat diasumsikan r kolom pertama dari V adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen dari A^TA; yaitu $A^T Av_i = \sigma_i^{\,2} v_i$, untuk i = 1, 2, ..., r (r vektor ini adalah vektor-vektor singular kanan dari A).

Sisanya, n-r kolom dalam V adalah vektor-vektor eigen dari A^TA berkorespondensi dengan nilai eigen nolnya. Karena kolom dari V orthonormal, maka V matriks yang orthogonal.

Dari sini terbentuk matriks V dengan elemen-elemen yang terdefinisi. Didefinisikan U sebagai berikut : untuk $i = 1, 2, \ldots, r$, dibentuk $u_i = (1/\sigma_i)\,Av_i$. Selanjutnya, tinjau dua vektor u_i dan u_j dalam pembentukan ini.

$$\begin{aligned} < u_i , u_j > &= (1/\sigma_i)(1/\sigma_j) < Av_i , Av_j > = (1/\sigma_i)(1/\sigma_j) < v_i , A^HA\, v_j > \\ &= (1/\sigma_i)(1/\sigma_j) < v_i , \sigma_j^{\,2} v_j > = (\sigma_j/\sigma_i) < v_i, v_j > \\ &= (\sigma_j/\sigma_i)\,\delta_{ij} \end{aligned}$$

Oleh karena itu, himpunan $\{ u_1, u_2, \ldots , u_r \}$ adalah orthonormal. Sebanyak r vektor orthonormal ini membentuk r kolom pertama dari U.

Sisanya, m-r kolom dari U adalah vektor-vektor orthonormal yang membentuk suatu basis untuk *null* (AA^T), yaitu ruang eigen dari AA^T bersesuaian dengan $\lambda = 0$.

$$\begin{aligned} \text{Selanjutnya, } U^TAV &= U^TA\,[\, v_1 \;\ldots\; v_r \; v_{r+1} \;\;\ldots\;\; v_n \,] \\ &= U^T\,[Av_1 \;\ldots\; Av_r \quad Av_{r+1} \;\ldots\; Av_n] \\ &= U^T\,[\,\sigma_1 u_1 \ldots\; \sigma_r u_r \quad 0 \;\ldots\; 0\,] \\ &= [\,\sigma_1 U^T u_1 \ldots\; \sigma_r U^T u_r \quad 0 \;\ldots\; 0\,] \\ &= [\,\sigma_1 e_1 \;\ldots\; \sigma_r e_r \quad 0 \;\ldots\; 0\,] = S \end{aligned}$$

C. *Pseudo-Inverse* dari Matriks (Invers Semu suatu Matriks)

Sebelum mendefinisikan invers semu suatu matriks, diberikan sifat sebagai berikut.

Teorema c.1

Untuk setiap matriks A berukuran *mxn*, terdapat tunggal matriks A^+ berukuran *nxm* yang memenuhi keempat sifat sebagai berikut :

(1). $A^+AA^+ = A^+$

(2). $AA^+A = A$

(3). $(A^+A)^T = A^+A$

(4). $(AA^+)^T = AA^+$

Bukti :

Akan dibuktikan sifat ketunggalan. Misal $A^\#$ adalah sebarang matriks yang memenuhi sifat (1) sampai (4).

Dari sifat (2),

$$AA^\# = (AA^+A)A^\# = (AA^+)(AA^\#)$$

Dari persamaan ini, dan karena matriks-matriks AA^+ dan $AA^\#$ simetri , menurut sifat (4)

$$AA^\# = (AA^\#)^T = ((AA^+)(AA^\#))^T = (AA^\#)^T(AA^+)^T = AA^\#\, AA^+ = (AA^\#A)A^+ = AA^+$$

Dengan cara yang sama, $A^\#A = A^+A$.

ISSN 0854-1981

Dengan mengalikan $AA^{\#} = AA^{+}$ dari kanan dengan $A^{\#}$ dan menurut sifat (1) maka diperoleh

$A^{\#}AA^{\#} = A^{\#}AA^{+}$ atau $A^{\#} = A^{\#}AA^{+}$.

Selanjutnya, dengan mengalikan $A^{\#}A = A^{+}A$ dari kanan dengan A^{+} diperoleh

$A^{\#}AA^{+} = A^{+}AA^{+} = A^{+}$.

Hal ini membuktikan, $A^{\#} = A^{+}$.

Selanjutnya, dibuktikan eksistensi matriks invers semu dari A.

Menurut teorema dekomposisi nilai singular, untuk setiap matriks A mxn terdapat matriks-matriks orhogonal U, V dan matriks S sedemikian sehingga $A = USV^T$ dengan

$$S = \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Akibatnya, $A^{+} = (USV^T)^{+} = VS^{+}U^T$.

Dibuktikan, $VS^{+}U^T$ memenuhi sifat (1) sampai (4).

Sifat –sifat :

(1) $A^{+}AA^{+} = VS^{+}U^TAVS^{+}U^T = VS^{+}U^TUSV^TVS^{+}U^T$

$= VS^{+}SS^{+}U^T = VS^{+}U^T = A^{+}$

(2) $AA^{+}A = AVS^{+}U^TA = USV^TVS^{+}U^TUSV^T$

$= USS^{+}SV^T = USV^T = A$; dengan mengingat sifat SS^{+}.

(3) Dengan menggunakan $(S^{+}S)^T = S^{+}S$ dan $A^{+}A = VS^{+}U^TUSV^T = VS^{+}SV^T$,

$(A^{+}A)^T = (VS^{+}U^TUSV^T)^T = (VS^{+}SV^T)^T$

$= V(S^{+}S)^TV^T = VS^{+}SV^T = A^{+}A$

(4) Dengan menggunakan $(SS^{+})^T = SS^{+}$ dan $AA^{+} = USS^{+}U^T$

$(AA^{+})^T = (USV^TVS^{+}U^T)^T = (USS^{+}U^T)^T$

$= U(SS^{+})^TU^T = USS^{+}U^T = AA^{+}$

Matriks A^{+} ini disebut *p-invers* dari A, yang merupakan singkatan dari *pseudo-inverse* dan diartikan sebagai invers semu dari A.

D. Sifat-sifat Invers Semu dan Contoh Menentukan Invers Semu.

Lemma d.1.

Diberikan C matriks atas bilangan real.

(i). Jika C matriks dengan rank baris penuh maka $C^T(CC^T)^{-1}$ adalah invers semu dari C.

(ii). Jika C matriks dengan rank kolom penuh maka $(C^TC)^{-1}C^T$ adalah invers semu dari C.

Bukti :

(i). $X = C^T(CC^T)^{-1}$ adalah invers semu dari C, sebab :

$CXC = C\,C^T(CC^T)^{-1}C = C$

$XCX = C^T(CC^T)^{-1}CC^T(CC^T)^{-1} = C^T(CC^T)^{-1} = X$

$(XC)^T = (C^T(CC^T)^{-1}C)^T = C^T((CC^T)^{-1})^TC = C^T((CC^T)^T)^{-1}C = C^T(CC^T)^{-1}C = XC$

$(CX)^T = (CC^T(CC^T)^{-1})^T = ((CC^T)^{-1})^TCC^T = ((CC^T)^T)^{-1}CC^T = (CC^T)^{-1}CC^T$

$= CC^T(CC^T)^{-1} = CX$

Dengan demikian X adalah invers semu dari C atau $C^T(CC^T)^{-1} = C^{+}$.

(ii). $X = (C^TC)^{-1}C^T$ **adalah invers semu dari** C**, sebab :**

$$
\begin{aligned}
CXC &= C(C^TC)^{-1}C^T C = C \\
XCX &= ((C^TC)^{-1}C^TC(C^TC)^{-1}C^T = (C^TC)^{-1}C^T = X \\
(XC)^T &= (C^TC)^{-1}C^TC)^T \\
&= C^T((C^TC)^{-1}C^T)^T \\
&= C^TC((C^TC)^{-1})^T \\
&= C^TC((C^TC)^T)^{-1} \\
&= C^TC(C^TC)^{-1} \\
&= (C^TC)^{-1}C^TC \\
&= XC \\
(CX)^T &= (C(C^TC)^{-1}C^T)^T \\
&= ((C^TC)^{-1}C^T)^T C^T \\
&= C((C^T C)^{-1})^TC^T \\
&= C((C^T C)^T)^{-1}C^T \\
&= C(C^T C)^{-1}C^T \\
&= CX
\end{aligned}
$$

Dengan demikian X **adalah invers semu dari** C **atau** $(C^TC)^{-1}C^T = C^+$**.**

Contoh :

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Matriks ini berukuran $2x3$**. Dengan menggunakan serangkaian operasi baris atau kolom elementer, dapat ditentukan rank** A**.**

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[K_{23}^{(-1)}]{K_{13}^{(-1)}} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{K_{32}^{(-1)}} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{K_{31}^{(-1)}} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{H^{(-1)}} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari langkah tersebut, terlihat bahwa banyaknya baris/kolom yang taknol pada matriks terakhir yang didapat adalah 2 **dan sesuai dengan banyaknya baris matriks** A**. Dalam hal ini,** A **dikatakan mempunyai rank baris penuh. Oleh karena itu invers semu dari** A **atau** A^+ **dapat ditentukan dengan rumus** $A^+ = A^T(AA^T)^{-1}$**. Dan prosesnya sebagai berikut :**

$$A^T = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AA^T = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 & 16 \\ 16 & 6 \end{bmatrix}$$

ISSN 0854-1981

$$(AA^T)^{-1} = \frac{1}{50.6 - 16.16}\begin{bmatrix} 6 & -16 \\ -16 & 50 \end{bmatrix} = \frac{1}{22}\begin{bmatrix} 3 & -8 \\ -8 & 25 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Jadi, } A^+ = A^T(AA^T)^{-1} = \frac{1}{22}\begin{bmatrix} 7 & -15 \\ -4 & 18 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Untuk matriks persegi A dan B yang taksingular selalu berlaku $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
Namun demikian, untuk matriks A dan B yang bukan persegi, sifat

$$(AB)^+ = B^+A^+$$

tidak berlaku secara umum, seperti contoh berikut ;

$$A = [1 \;\; 0] \;, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(AB)^+ = \left([1 \;\; 0]\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)^+ = [\,1\,] \text{ dan } B^+A^+ = [\,½ \;\; ½\,]\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = [\,½\,]$$

Hal tersebut dapat ditunjukkan dalam teorema berikut.

Teorema d.2.
Jika A matriks dengan rank kolom penuh dan B matriks dengan rank baris penuh, maka berlaku

$$(AB)^+ = B^T(BB^T)^{-1}(A^TA)^{-1}(A^TA)^{-1}A^T = B^+A^+$$

Bukti :
Diberikan $X = B^T(BB^T)^{-1}(A^TA)^{-1}A^T = B^+A^+$.
Akan dibuktikan $X = (AB)^+$.

$$\begin{aligned}
ABXAB &= ABB^T(BB^T)^{-1}(A^TA)^{-1}A^TAB = AB \\
XABX &= B^T(BB^T)^{-1}(A^TA)^{-1}A^TABB^T(BB^T)^{-1}(A^TA)^{-1}A^T \\
&= B^T(BB^T)^{-1}(A^TA)^{-1}A^T = X \\
XAB &= B^T(BB^T)^{-1}(A^TA)^{-1}A^TAB = B^T(BB^T)^{-1}B \;\; \textit{simetri, karena} \\
B^T(BB^T)^{-1}B &= B^T(B^T)^{-1}B^{-1}B^T = I \;\; \textit{simetri} \\
ABX &= ABB^T(BB^T)^{-1}(A^TA)^{-1}A^T = A(A^TA)^{-1}A^T.
\end{aligned}$$

E. Penutup

Dari uraian di atas dapat disimpulkan bahwa tidak hanya matriks persegi yang taksingular yang mempunyai invers tetapi matriks tidak persegi (khususnya matriks dengan rank *kolom atau baris penuh) juga mempunyai invers yaitu yang disebut invers semu.*
Jika C matriks dengan rank baris penuh maka $C^T(CC^T)^{-1}$ adalah invers semu dari C dan
jika C matriks dengan rank kolom penuh maka $(C^TC)^{-1}C^T$ adalah invers semu dari C.

Daftar Pustaka

Jack L. Goldberg , 1991, *Matrix Theory with Applications*, USA : Mc Graw-Hill, Inc.

Howad Anton, 1988, *Aljabar Linier Elementer*, Edisi Ketiga, Jakarta : Erlangga.

Thomas L.Boullion dan Patrick L. Odell , 1981, *Generalized Inverse Matrices*, USA : John Wiley and Son Inc.

YusufYahya, D. Suryadi H.S., dan Agus S., 1986, *Matematika Dasar untuk Perguruan Tinggi*, Jakarta : Ghalia Indonesia.