Widya Warta No. 02 Tahun XXXV / Juli 2011
ISSN 0854-1981

ALJABAR MAX PLUS : SUATU KAJIAN TEORI DAN APLIKASI FUNDAMENTALNYA

Gregoria Ariyanti
Program Studi Pendidikan Matematika - FKIP
Universitas Katolik Widya Mandala Madiun

ABSTRACT

In max-plus algebra we work with the algebra structures consisting of the set $\mathbb{R}_{max} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ *together with operations* $a \oplus b = max(a,b)$ *and* $a \otimes b = a + b$. *The additive and multiplicative identities are taken to be* $\varepsilon = -\infty$ *and* $e = 0$ *respectively. Its operations are associative, commutative and distributive similar to those in conventional algebra.*

In this article matrix over max-plus algebra (or in $\mathbb{R}_{max}$*) is defined. This article emphasizes on max-plus linear algebra specifically. It is evident that some of the concepts of conventional linear algebra are also possessed by a max-plus version. The solvability of linear systems, such as* $A \otimes x = b$ *is specifically elaborated in this article.*

Key words: *max-plus algebra, matrix over max-plus algebra, system of linear equations in max-plus algebra*

A. Pendahuluan

Struktur aljabar yang sudah dikenalkan dalam perkuliahan S1 Program Studi Matematika dan Pendidikan Matematika adalah struktur aljabar atas lapangan (*Field*), yaitu Grup (*Group*) dan Gelanggang (*Ring*). Dalam perkembangannya, struktur aljabar tidak hanya terbatas atas Grup dan Gelanggang saja, tetapi ada jenis lain, yaitu Aljabar Max-Plus (*Max-Plus Algebra*). Ada analogi antara teori dalam Aljabar Max-Plus dan teori struktur aljabar yang sudah dikenal (Grup dan Gelanggang). Namun, ada juga yang berbeda antara teori dalam Grup dan Gelanggang dengan teori dalam Aljabar Max-Plus. Karena Aljabar Max-Plus tidak sepenuhnya dikembangkan seperti dalam Grup dan Gelanggang, meskipun beberapa sifat dan konsep aljabar linier, seperti aturan *Cramer*, teorema *Cayley-Hamilton*, nilai eigen dan vektor eigen juga ada dalam Aljabar Max Plus (Schutter, 1997).

Adapun tujuan penulisan ini adalah untuk menginformasikan tentang struktur aljabar, yang disebut aljabar max-plus, sifat-sifat dasarnya, matriks atas aljabar linier max-plus serta contoh fundamentalnya pada sistem persamaan linier max-plus.

B. Definisi dan Sifat-sifat Dasar Aljabar Max-Plus

Berikut dipaparkan definisi dan sifat-sifat dasar aljabar max-plus (Olsder, 2005).

Definisi 1

Untuk $\mathbb{R}$ himpunan semua bilangan riil, diberikan $\mathbb{R}_{max} = \mathbb{R} \cup \{\varepsilon\}$ dengan $\varepsilon := -\infty$ dan $e := 0$.

Untuk setiap $a, b \in \mathbb{R}_{max}$, didefinisikan operasi $\oplus$ dan $\otimes$ sebagai berikut :

$$a \oplus b := \max(a,b)$$
$$a \otimes b := a + b$$

Berdasarkan definisi 1, karena $\max(a,-\infty) = \max(-\infty,a) = a$ dan $a+(-\infty) = -\infty+a = -\infty$, untuk suatu $a \in \mathbb{R}_{max}$, maka $a \oplus \varepsilon = a = \varepsilon \oplus a$ dan $a \otimes e = a = e \otimes a$.

Dan elemen nol untuk $\oplus$ dalam $\mathbb{R}_{max}$ dinyatakan dengan $\varepsilon := -\infty$.

Dari definisi 1 dapat diberikan contoh berikut :

$5 \oplus 3 = \max(5,3) = 5$

$5 \oplus \varepsilon = \max(5,-\infty) = 5$

$5 \otimes \varepsilon = 5 - \infty = -\infty = \varepsilon$

$e \oplus 3 = \max(0,3) = 3$

$5 \otimes 3 = 5+3 = 8$

Hasil pembentukan $\mathbb{R}_{max}$ bersama dengan operasi $\oplus$ dan $\otimes$ disebut **Aljabar Max-Plus** (*Max-Plus Algebra*) dan dinotasikan dengan $\Re_{\max} = (\mathbb{R}_{max}, \oplus, \otimes, \varepsilon, e)$.

Ada analogi antara operasi $\oplus$ dan $\otimes$ dalam aljabar max-plus dengan operasi + dan x dalam aljabar linier (konvensional), yaitu operasi $\otimes$ mempunyai prioritas (atau lebih kuat) daripada operasi $\oplus$.

Sebagai contoh, $5 \otimes -9 \oplus 7 \otimes 1$ berarti $(5 \otimes -9) \oplus (7 \otimes 1)$.

Operasi $\oplus$ dan $\otimes$ juga mempunyai sifat aljabar.

Sebagai contoh, untuk $x, y, z \in \mathbb{R}_{max}$, berlaku

$$\begin{aligned} x \otimes (y \oplus z) &= x + \max(y, z) \\ &= \max(x+y, x+z) \\ &= (x \otimes y) \oplus (x \otimes z), \end{aligned}$$

yang artinya distributif $\otimes$ terhadap $\oplus$.

Adapun sifat aljabar yang lain dari aljabar max-plus adalah (Olsder, 2005):

1. asosiatif, yaitu $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}_{max}$, $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$ dan
   $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}_{max}$, $x \otimes (y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z$
2. komutatif, yaitu $\forall\, x, y \in \mathbb{R}_{max}$, $x \oplus y = y \oplus x$ dan $x \otimes y = y \otimes x$
3. distributif $\otimes$ terhadap $\oplus$, yaitu
   $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}_{max}$, $x \otimes (y \oplus z) = (x \otimes y) \oplus (x \otimes z)$

Widya Warta No. 02 Tahun XXXV / Juli 2011
ISSN 0854-1981

4. adanya elemen nol, yaitu $\forall\ x \in \mathbb{R}_{max}$, $x \oplus \varepsilon = \varepsilon \oplus x = x$
5. adanya elemen satuan (*unit*), yaitu $\forall\ x \in \mathbb{R}_{max}$, $x \otimes e = e \otimes x = x$
6. adanya sifat penyerapan oleh elemen nol ε terhadap $\otimes$, yaitu
   $\forall\ x \in \mathbb{R}_{max}$, $x \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes x = \varepsilon$
7. sifat idempotent dari $\oplus$, yaitu $\forall\ x \in \mathbb{R}_{max}$, $x \oplus x = x$

Untuk $\mathbb{N}$ himpunan semua bilangan asli, didefinisikan untuk $x \in \mathbb{R}_{max}$ sebagai berikut :

$$x^{\otimes n} := \underbrace{x \otimes x \otimes \ldots \otimes x}_{n \text{ faktor}}$$

untuk semua $n \in \mathbb{N}$ dengan $n \neq 0$, dan untuk $n = 0$ didefinisikan $x^{\otimes 0} := e$ (=0).
Jika dianalogikan dengan aljabar linier, tampak bahwa untuk $n \in \mathbb{N}$,

$$x^{\otimes n} := x + x + \ldots. + x = n \times x.$$

Sebagai contoh,

$$5^{\otimes 3} = 3 \times 5 = 5$$
$$8^{\otimes -2} = -2 \times 8 = -16 = 16^{\otimes -1}$$

Didefinisikan pula $\varepsilon^{\otimes 0} := 0$ dan $\varepsilon^{\otimes n} := \varepsilon$, untuk n.

Dari definisi semiring berikut, tampak bahwa aljabar max-plus merupakan salah satu contoh struktur aljabar yang disebut semiring (Farlow, 2009).

Definisi 2

Semiring adalah himpunan tak kosong R dengan dua operasi $\oplus_R$ dan $\otimes_R$ sedemikian sehingga :

a. $\oplus_R$ adalah asosiatif dan komutatif dengan elemen nol ε_R
b. $\otimes_R$ adalah asosiatif, distributif terhadap $\oplus_R$, dan mempunyai elemen satuan (*unit*) e_R
c. ε_R merupakan elemen penyerap terhadap $\otimes_R$.

Semiring demikian dinotasikan oleh $\mathfrak{R} = (R, \otimes_R, \oplus_R, \varepsilon_R, e_R)$.

Jika $\otimes_R$ komutatif, maka $\mathfrak{R}$ disebut komutatif dan jika $\oplus_R$ idempotent, maka disebut idempotent. Suatu operasi $\oplus_R$ dikatakan idempoten pada $\mathfrak{R}$ jika untuk setiap $x \in \mathfrak{R}$ berlaku $x \oplus_R x = x$.

Aljabar max-plus adalah contoh dari semiring komutatif dan idempoten. Karena untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{R}_{max}$, berlaku:

a. $\oplus$ adalah asosiatif dan komutatif dengan elemen nol ε, yaitu :
   $(a \oplus b) \oplus c = \max(\max(a,b),c) = \max(a,b,c) = \max(a,\max(b,c)) = a \oplus (b \oplus c)$
   $a \oplus b = \max(a,b) = \max(b, a) = b \oplus a$
   $a \oplus \varepsilon = \max(a, -\infty) = a$

b. $\otimes$ adalah asosiatif, distributif terhadap $\oplus$ dan mempunyai elemen satuan (*unit*) e, yaitu :
$(a \otimes b) \otimes c = (a + b) + c = a + (b + c) = a \otimes (b \otimes c)$
$(a \oplus b) \otimes c = \max(a, b) + c = \max(a + c, b + c) = (a \otimes c) \oplus (b \otimes c)$,
$a \otimes (b \oplus c) = a + \max(b, c) = \max(a + b, a + c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$.
$a \otimes e = a + 0 = a = 0 + a = e \otimes a$

c. ε merupakan elemen penyerap terhadap $\otimes$, yaitu :
$a \otimes \varepsilon = a + (-\infty) = -\infty = (-\infty) + a = \varepsilon \otimes a$.

d. komutatif dan idempoten, yaitu
$a \otimes b = a + b = b + a = b \otimes a$
$a \oplus a = \max(a, a) = a$.

C. Matriks atas Aljabar Max-Plus

Operasi $\otimes$ dan $\oplus$ dalam aljabar max-plus dapat diperluas untuk operasi matriks atas aljabar max-plus. (Olsder, 2005).
Himpunan m x n matriks atas aljabar max plus dinotasikan dengan $\mathbb{R}_{max}^{mxn}$.
Untuk $n \in \mathbb{N}$, didefinisikan $\bar{n} = \{1, 2, \ldots, n\}$.
Elemen dari matriks A$\in \mathbb{R}_{max}^{mxn}$ dalam baris i dan kolom j dinotasikan dengan a_{ij}, untuk $i \in \bar{m}$ dan $j \in \bar{n}$, atau elemen a_{ij} dapat ditulis sebagai $[A]_{ij}$ dengan $i \in \bar{m}$ dan $j \in \bar{n}$.
Jumlahan matriks A,B$\in \mathbb{R}_{max}^{mxn}$, dinotasikan dengan A$\oplus$B, didefinisikan sebagai

$$[A \oplus B]_{ij} = a_{ij} \oplus b_{ij} = \max(a, b) \text{ untuk } i \in \bar{m} \text{ dan } j \in \bar{n}.$$

Sebagai contoh, diberikan

$$A = \begin{pmatrix} e & \varepsilon \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \text{dan } B = \begin{pmatrix} -1 & 11 \\ 1 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

maka $[A \oplus B]_{11} = e \oplus -1 = \max(0, -1) = 0 = e$.
Demikian juga, $[A \oplus B]_{12} = \varepsilon \oplus 11 = \max(-\infty, 11) = 11$
$[A \oplus B]_{21} = 3 \oplus 1 = \max(3, 1) = 3$
$[A \oplus B]_{22} = 2 \oplus \varepsilon = \max(2, -\infty) = 2$
Jadi, $A \oplus B = \begin{pmatrix} e & 11 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.
Untuk $A \in \mathbb{R}_{max}^{mxn}$, dan $\alpha \in \mathbb{R}_{max}$, perkalian skalar $\alpha \otimes$ A didefinisikan oleh

$$[\alpha \otimes A]_{ij} = \alpha \otimes a_{ij} ,\ i \in \bar{m} \text{ dan } j \in \bar{n} .$$

Sebagai contoh, diambil α= 2 dan $A = \begin{pmatrix} e & \varepsilon \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.
Diperoleh, $[2 \otimes A]_{11} = 2 \otimes e = 2 + 0 = 2$.
Demikian juga diperoleh, $[2 \otimes A]_{12} = \varepsilon$, $[2 \otimes A]_{21} = 5$ dan $[2 \otimes A]_{22} = 4$.

Widya Warta No. 02 Tahun XXXV / Juli 2011
ISSN 0854-1981

Jadi, $2 \otimes A = \begin{pmatrix} 2 & \varepsilon \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$.

Sedangkan, untuk $A \in \mathbb{R}_{max}^{mxl}$, dan $B \in \mathbb{R}_{max}^{lxn}$ hasilkali matriks $A \otimes B$ didefinisikan oleh

$$[A \otimes B]_{ik} = \bigoplus_{j=1}^{l} a_{ij} \otimes b_{jk} = \max_{j \in \bar{l}} \{a_{ij} + b_{jk}\} .$$

Sebagai contoh, diambil $A = \begin{pmatrix} e & \varepsilon \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} -1 & 11 \\ 1 & \varepsilon \end{pmatrix}$.

Diperoleh, $[A \otimes B]_{11} = e \otimes (-1) \oplus \varepsilon \otimes 1 = \max(0-1, -\infty+1) = -1$

$[A \otimes B]_{12} = e \otimes 11 \oplus \varepsilon \otimes \varepsilon = \max(0+11, -\infty - \infty) = 11$

$[A \otimes B]_{21} = 3 \otimes (-1) \oplus 2 \otimes 1 = \max(3-1, 2+1) = 3$

$[A \otimes B]_{22} = 3 \otimes 11 \oplus 2 \otimes \varepsilon = \max(3+11, 2-\infty) = 14$

Jadi, $A \otimes B = \begin{pmatrix} -1 & 11 \\ 3 & 14 \end{pmatrix}$

Matriks identitas max-plus n x n , E_n, didefinisikan sebagai

$$[E_n]_{ij} = \begin{cases} e, jika\ i = j \\ \varepsilon, jika\ i \neq j \end{cases}$$

Operasi-operasi matriks atas aljabar max-plus mempunyai sifat sebagai berikut (Rudhito, 2003):

1. $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$
2. $A \oplus B = B \oplus A$
3. $(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$
4. $A \otimes (B \oplus C) = (A \otimes B) \oplus (A \otimes C)$
5. $(A \oplus B) \otimes C = (A \otimes C) \oplus (A \otimes C)$
6. $\alpha \otimes A = A \otimes \alpha$
7. $\alpha \otimes (\beta \otimes A) = (\alpha \otimes \beta) \otimes A$
8. $\alpha \otimes (A \otimes B) = (\alpha \otimes A) \otimes B = A \otimes (\alpha \otimes B)$
9. $(\alpha \oplus \beta) \otimes A = (\alpha \otimes A) \oplus (\beta \otimes A)$
10. $\alpha \otimes (A \oplus B) = (\alpha \otimes A) \oplus (\alpha \otimes B)$
11. $A \oplus A = A$.

D. Contoh Fundamental Aljabar Max-Plus pada Sistem Persamaan Linier Max-Plus

Dalam bagian ini, akan dipaparkan sistem persamaan linier untuk aljabar max-plus. Meskipun ada beberapa kesamaan antara penyelesaian sistem persamaan linier aljabar max-plus dan aljabar konvensional, tetapi tetap ada perbedaan.

Diberikan persamaan matriks $A \otimes x = b$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} (a_{11} \otimes x_1) \oplus (a_{12} \otimes x_2) \oplus \dots \oplus (a_{1n} \otimes x_n) = b_1 \\ (a_{21} \otimes x_1) \oplus (a_{22} \otimes x_2) \oplus \dots \oplus (a_{2n} \otimes x_n) = b_2 \\ \vdots \\ (a_{m1} \otimes x_1) \oplus (a_{m2} \otimes x_2) \oplus \dots \oplus (a_{mn} \otimes x_n) = b_m \end{matrix}$$

Selanjutnya, diperoleh penyelesaian sistem berikut :

$$\begin{matrix} \max\{(a_{11} + x_1), (a_{12} + x_2), \dots, (a_{1n} + x_n)\} = b_1 \\ \max\{(a_{21} + x_1), (a_{22} + x_2), \dots, (a_{2n} + x_n)\} = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ \max\{(a_{m1} + x_1), (a_{m2} + x_2), \dots, (a_{mn} + x_n)\} = b_m \end{matrix}$$

Akan ditinjau kasus bahwa penyelesaiannya ada dan beberapa elemen dari b adalah -∞ (Andersen, 2002). Tanpa kehilangan keumuman, dapat diurutkan persamaan sehingga elemen-elemen berhingga dari b berbentuk :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \\ \hline -\infty \\ \vdots \\ -\infty \end{pmatrix}$$

Akibatnya,

$$\begin{cases} \max\{(a_{11} + x_1), (a_{12} + x_2), \dots, (a_{1n} + x_n)\} = b_1 \\ \vdots \\ \max\{(a_{k1} + x_1), (a_{k2} + x_2), \dots, (a_{kn} + x_n)\} = b_k \\ \max\{(a_{k+1,1} + x_1), (a_{k+1,2} + x_2), \dots, (a_{k+1,n} + x_n)\} = -\infty \\ \vdots \\ \max\{(a_{n1} + x_1), (a_{n2} + x_2), \dots, (a_{nn} + x_n)\} = -\infty \end{cases}$$

Matriks tersebut dapat dipartisi sehingga terdapat j dengan $a_{k+1,j}, \dots, a_{m,j} = -\infty$ sebagai berikut :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} & A_1 & & A_2 \\ \hline -\infty & \cdots & -\infty & \\ \vdots & \ddots & \vdots & A_3 \\ -\infty & \cdots & -\infty & \end{array}\right) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_l \\ \hline x_{i+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \\ \hline -\infty \\ \vdots \\ -\infty \end{pmatrix}$$

Diberikan dimensi matriks A_1 yaitu k x l.

Widya Warta No. 02 Tahun XXXV / Juli 2011
ISSN 0854-1981

Diberikan $b' = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}$ dan $x' = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_l \end{pmatrix}$.

Jika $A \otimes x = b$ mempunyai penyelesaian, maka $x_{l+1} = \ldots = x_n = -\infty$, dan $A_1 \otimes x' = b'$. Akibatnya, $A \otimes x = b$ mempunyai penyelesaian jika dan hanya jika x' adalah penyelesaian pada $A_1 \otimes x' = b'$ dan penyelesaian pada $A \otimes x = b$ adalah

$$x = \begin{pmatrix} x' \\ -\infty \\ \vdots \\ -\infty \end{pmatrix}.$$

Selanjutnya, penyelesaian dari sistem dengan elemen tak hingga dalam b dapat direduksi pada sistem dengan elemen berhingga dalam b'. Oleh karena itu, dapat dibatasi pada $A \otimes x = b$ dengan semua elemen dari b adalah berhingga.

Jika terdapat penyelesaian pada sistem persamaan max-plus, maka $a_{ij} + x_j \leq b_i$ untuk semua $i \in \{1, \ldots, m\}$ dan $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Untuk mencari penyelesaian dari sistem, pertama perhatikan tiap komponen dari x secara terpisah.

Sebagai contoh, x_1.

Jika ada penyelesaian dari sistem, maka $a_{i1} + x_1 \leq b_i$ untuk $i = 1, 2, \ldots, m$.

Maka $x_1 \leq b_i - a_{i1}$ untuk setiap i, dan pada sistem berikut untuk batas atas x_1 :

$$\begin{aligned} x_1 &\leq b_1 - a_{11} \\ x_1 &\leq b_2 - a_{21} \\ &\vdots \\ x_1 &\leq b_m - a_{m1} \end{aligned}$$

Jika sistem pertidaksamaan ini mempunyai penyelesaian, maka akan dipenuhi :

$$x_1 \leq \min \{ (b_1 - a_{11}), (b_2 - a_{21}), \ldots, (b_m - a_{m1})\}.$$

Dengan cara yang sama, dapat diperoleh penyelesaian yang mungkin untuk $x_2, \ldots, x_n$, dan memberikan sistem pertidaksamaan berikut pada tiap elemen x_j :

$$\begin{aligned} x_1 &\leq \min \{ (b_1 - a_{11}), (b_2 - a_{21}), \ldots, (b_m - a_{m1})\}. \\ x_2 &\leq \min \{ (b_1 - a_{12}), (b_2 - a_{22}), \ldots, (b_m - a_{m2})\} \\ &\vdots \\ x_n &\leq \min \{ (b_1 - a_{1n}), (b_2 - a_{2n}), \ldots, (b_m - a_{mn})\} \end{aligned}$$

Dari pertidaksamaan di atas, dapat dimisalkan x' penyelesaian pada $A \otimes x = b$, dengan

$$x' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \text{ di mana } \begin{cases} x'_1 = \min \{ (b_1 - a_{11}), (b_2 - a_{21}), \ldots, (b_m - a_{m1})\} \\ x'_2 = \min \{ (b_1 - a_{12}), (b_2 - a_{22}), \ldots, (b_m - a_{m2})\} \\ \vdots \\ x'_n = \min \{ (b_1 - a_{1n}), (b_2 - a_{2m}), \ldots, (b_m - a_{mn})\} \end{cases}$$

Didefinisikan matriks $D_{A,b}$ (*the discrepancy matrix*) sebagai berikut :

$$D_{A,b} = \begin{pmatrix} b_1 - a_{11} & b_1 - a_{12} & \cdots & b_1 - a_{1n} \\ b_2 - a_{21} & b_2 - a_{22} & \cdots & b_2 - a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_m - a_{m1} & b_m - a_{m2} & \cdots & b_m - a_{mn} \end{pmatrix}$$

Matriks $D_{A,b}$ adalah suatu matriks sederhana dengan semua batas atas dari x_i dan setiap x_i dapat ditentukan dengan mengambil minimum dari kolom ke i dari $D_{A,b}$.

Contoh 1 :

Menentukan penyelesaian $A \otimes x = b$

dengan $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ dan $b = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 5 \\ 11 \end{pmatrix}$.

diperoleh matriks :

$$D_{A,b} = \begin{pmatrix} 6-2 & 6-3 & 6-1 \\ 10-0 & 10-4 & 10-6 \\ 5-3 & 5-1 & 5-(-2) \\ 11-9 & 11-6 & 11-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 10 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

Elemen untuk penyelesaian dapat ditentukan dengan mengambil nilai minimum tiap kolom dari $D_{A,b}$ yaitu :

$$x'_1 = \min\{4, 10, 2, 2\} = 2$$
$$x'_2 = \min\{3, 6, 4, 5\} = 3$$
$$x'_3 = \min\{5, 4, 7, 8\} = 4$$

maka $x' = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ adalah penyelesaian dari $A \otimes x = b$.

Dapat dibuktikan dengan perhitungan berikut :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2 \otimes 2) \oplus (3 \otimes 3) \oplus (1 \otimes 4) \\ (0 \otimes 2) \oplus (4 \otimes 3) \oplus (6 \otimes 4) \\ (3 \otimes 2) \oplus (1 \otimes 3) \oplus (-2 \otimes 4) \\ (9 \otimes 2) \oplus (6 \otimes 3) \oplus (3 \otimes 4) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} maks\{(2+2), (3+3), (1+4)\} \\ maks\{(0+2), (4+3), (6+4)\} \\ maks\{(3+2), (1+3), (-2+4)\} \\ maks\{(9+2), (6+3), (3+4)\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 5 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Jadi, sistem persamaan linier tersebut mempunyai satu penyelesaian.

Widya Warta No. 02 Tahun XXXV / Juli 2011
ISSN 0854-1981

Contoh 2 :

Menentukan penyelesaian A⊗x = b

dengan A = $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}$, x = $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ dan b = $\begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$.

diperoleh matriks :

$$D_{A,b} = \begin{pmatrix} 6-2 & 6-3 & 6-1 \\ 12-0 & 12-4 & 12-6 \\ 5-3 & 5-1 & 5-(-2) \\ 9-9 & 9-6 & 9-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 12 & 8 & 6 \\ 2 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Elemen yang akan menjadi penyelesaian dari sistem tersebut dapat ditentukan dengan mengambil nilai minimum tiap kolom dari $D_{A,b}$ yaitu :

$$x'_1 = \min\{4, 12, 2, 0\} = 0$$
$$x'_2 = \min\{3, 8, 4, 3\} = 3$$
$$x'_3 = \min\{5, 6, 7, 6\} = 5$$

tetapi jika $x' = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ disubstitusi pada A⊗x = b, diperoleh bahwa x′ bukan penyelesaiannya. Hal itu dapat ditunjukkan dengan perhitungan berikut :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2 \otimes 0) \oplus (3 \otimes 3) \oplus (1 \otimes 5) \\ (0 \otimes 0) \oplus (4 \otimes 3) \oplus (6 \otimes 5) \\ (3 \otimes 0) \oplus (1 \otimes 3) \oplus (-2 \otimes 5) \\ (9 \otimes 0) \oplus (6 \otimes 3) \oplus (3 \otimes 5) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} maks\{(2+0), (3+3), (1+5)\} \\ maks\{(0+0), (4+3), (6+5)\} \\ maks\{(3+0), (1+3), (-2+5)\} \\ maks\{(9+0), (6+3), (3+5)\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 11 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Jadi, sistem persamaan linier tersebut tidak mempunyai penyelesaian.

Contoh 3 :

Menentukan penyelesaian A⊗x = b

dengan A = $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}$, x = $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ dan b = $\begin{pmatrix} 8 \\ 13 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}$.

diperoleh matriks :

$$D_{A,b} = \begin{pmatrix} 8-2 & 8-3 & 8-1 \\ 13-0 & 13-4 & 13-6 \\ 5-3 & 5-1 & 5-(-2) \\ 10-9 & 10-6 & 10-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 7 \\ 13 & 9 & 7 \\ 2 & 4 & 7 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

Elemen untuk penyelesaian dapat ditentukan dengan mengambil nilai minimum tiap kolom dari $D_{A,b}$ yaitu :

$$x'_1 = \min\{6, 13, 2, 1\} = 1$$
$$x'_2 = \min\{5, 9, 4, 4\} = 4$$
$$x'_3 = \min\{7, 7, 7, 7\} = 7$$

Jika $x' = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ disubstitusi pada $A \otimes x = b$, diperoleh bahwa x' merupakan penyelesaiannya. Hal itu dapat ditunjukkan dengan perhitungan berikut :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2 \otimes 1) \oplus (3 \otimes 4) \oplus (1 \otimes 7) \\ (0 \otimes 1) \oplus (4 \otimes 4) \oplus (6 \otimes 7) \\ (3 \otimes 1) \oplus (1 \otimes 4) \oplus (-2 \otimes 7) \\ (9 \otimes 1) \oplus (6 \otimes 4) \oplus (3 \otimes 7) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} maks\{(2+1), (3+4), (1+7)\} \\ maks\{(0+1), (4+4), (6+7)\} \\ maks\{(3+1), (1+4), (-2+7)\} \\ maks\{(9+1), (6+4), (3+7)\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 13 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Jadi, sistem persamaan linier tersebut mempunyai penyelesaian.
Tetapi, ada penyelesaian lain yang juga memenuhi sistem tersebut. Yaitu, untuk setiap x yang memenuhi bentuk $x = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 7 \end{pmatrix}$ dengan $a \le 1$ dan $b \le 4$.

Jika matriks $D_{A,b}$ direduksi menjadi matriks $R_{A,b}$ dengan

$$R_{A,b} = (r_{ij}) \text{ dengan } r_{ij} = \begin{cases} 1 & jika\ d_{ij} = minimum\ dari\ kolom\ j \\ 0 & untuk\ yang\ lain \end{cases}$$

maka dari tiga contoh terakhir dapat diperoleh matriks sebagai berikut :

Contoh 1 : Satu penyelesaian	Contoh 2 : Tidak mempunyai penyelesaian	Contoh 3 : Lebih dari satu penyelesaian
$D_{A,b} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 10 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}$	$D_{A,b} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 12 & 8 & 6 \\ 2 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}$	$D_{A,b} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 7 \\ 13 & 9 & 7 \\ 2 & 4 & 7 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$
$R_{A,b} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$R_{A,b} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$R_{A,b} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Dari matriks di atas tampak bahwa elemen minimum pada masing-masing matriks merupakan penyelesaian dari masing-masing sistem persamaan linier.

Widya Warta No. 02 Tahun XXXV / Juli 2011
ISSN 0854-1981

Tampak pula, bahwa sistem mempunyai penyelesaian jika dalam tiap baris minimal terdapat satu elemen bernilai 1.

Teorema :
Diberikan A⊗x=b sistem persamaan linier dalam aljabar max plus dengan A matriks mxn dan b matriks nx1 dengan semua elemen berhingga.

a. Jika terdapat baris nol dalam matriks $D_{A,b}$ yang direduksi, maka sistem tidak mempunyai penyelesaian.
b. Jika terdapat paling sedikit satu elemen bernilai 1 pada tiap baris dari matriks $D_{A,b}$ yang direduksi menjadi $R_{A,b}$, maka x' merupakan penyelesaiannya.

Bukti :

a. Tanpa kehilangan keumumannya, dinotasikan baris nol pada $R_{A,b}$ dengan baris k.

   Dengan kontradiksi bahwa $\tilde{x}$ adalah penyelesaian dari A⊗x = b maka

   $$\tilde{x}_j \le \min_{l} (b_l - a_{lj}) < b_k - a_{kj}.$$

   Maka $\tilde{x}_j + a_{kj} < b_k$ untuk setiap j.

   Oleh karena itu, $\tilde{x}$ tidak memenuhi persamaan ke k dan bukan penyelesaian dari A⊗x = b.

b. Hal di atas juga dapat dibuktikan dengan kontraposisi.

   Misalkan x' bukan penyelesaian pada sistem tersebut, dengan definisi, $x'_j \le b_k - a_{kj}$ untuk semua j,k.

   Oleh karena itu, $\max_{j} (a_{kj} + x'_j) < b_k$ dan jika x' bukan penyelesaian maka terdapat k dengan $\max_{j} (a_{kj} + x'_j) < b_k$. Hal ini ekuivalen dengan $x'_j < b_k - a_{kj}$ untuk semua j. Oleh karena $x'_j = min\,(b_l - a_{lj})$ untuk suatu l, maka tidak ada elemen dalam baris k dari $R_{A,b}$ yang bernilai sama dengan 1.

E. Penutup

Aljabar max-plus adalah struktur aljabar yang terdiri dari $\mathbb{R}_{max} = \mathbb{R} \cup \{\varepsilon\}$ dengan ε := -∞ , dilengkapi operasi ⊕ dan ⊗ , didefinisikan untuk a, $b \in \mathbb{R}_{max}$ sebagai berikut :

$$a \oplus b := \max(a,b)$$
$$a \otimes b := a + b$$

Operasi ⊗ dan ⊕ dalam aljabar max-plus dapat diperluas untuk operasi matriks atas aljabar max-plus, dengan himpunan m x n matriks atas aljabar max plus dinotasikan dengan $\mathbb{R}_{max}^{mxn}$.

Dalam aljabar max plus, sistem persamaan linier mxn dapat mempunyai satu penyelesaian, tidak mempunyai penyelesaian, dan mempunyai penyelesaian lebih dari 1, yang juga berlaku pada aljabar konvensional.

DAFTAR PUSTAKA

Andersen, Maria H. 2002. *Max-Plus Algebra : Properties and Applications.* http://www.teachingcollegemath.com/files/. Diakses 5 Februari 2011.

Farlow, Kasie G. 2009. *Max-Plus Algebra.* Thesis submitted to the Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University.

Olsder, G.J., and Woude, J. 2005. *Max Plus at Work.* United State : Princeton University Press.

Rudhito, Andy. 2003. *Sistem Linear Max-Plus Waktu-Invariant*. Tesis: Program Pascasarjana Universitas Gadjah Mada. Yogyakarta.

Schutter, B. 1997. "*The Singular Value Decomposition in The Extended Max Algebra*," *Linear Algebra and Its Applications*, vol. 250, pp.143-176, Jan 1997. http://pub.deschutter.info/abs/94.27.html diakses 19 Januari 2011.