ESTILOS DE ESCRITA E DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS SOB UMA PERSPECTIVA HISTÓRICA

A HISTORICAL VIEW OF WRITING STYLES AND MATHEMATICAL DEMONSTRATIONS

Inocêncio Fernandes Balieiro Filho[1]

Ricardo Scucuglia Rodrigues da Silva 2

Giovana Aparecida Bertolucci[3]

Resumo

Diferentes estilos e processos argumentativos estão presentes nas inúmeras estratégias de investigar e de inventar soluções para os problemas que surgem em diversos ramos da Matemática, bem como para compreender a gama de elementos, relações, métodos heurísticos, lógicos e formais existentes numa demonstração. As experiências, práticas e preferências de cada matemático caracterizam seu estilo singular de escrita matemática e demonstrativa. Nesta perspectiva, o presente artigo discute treze estilos de escrita e de demonstração em Matemática identificados por meio de uma revisão histórica. Para isso, são apresentados os doze estilos apontados por Lorenzo (1971) – geométrico, poético, cossisto, algébrico-cartesiano, indivisível, operacional, épsilon, sintético e analítico, dual, axiomático, formal – e, a essa lista, acrescentamos uma décima terceira forma: o estilo intuicionista. A discussão sobre os estilos de demonstração é aprofundada por meio de uma perspectiva da História da Matemática e da Filosofia da Matemática como meios para compreender os processos de formação do pensamento matemático em relação aos estilos de escrita matemática.

Palavras-chave: Matemática; Demonstração; Estilo; Escrita; História da Matemática.

Abstract

Different styles and argumentative processes are present in the innumerable strategies of investigating and inventing solutions to problems that arise in different branches of mathematics, as well as to understand the range of elements, relationships, heuristic, logical and formal methods existing in a demonstration. The experiences, practices and preferences of each mathematician characterize their unique style of mathematical and demonstrative writing. In this perspective, this article discusses thirteen styles of writing and demonstration in Mathematics identified through a historical review. For this, the twelve styles pointed out by Lorenzo (1971) are presented and discussed and, to this list, we add a thirteenth form: the intuitionist style. The discussion on demonstration styles is deepened throught a perspective of the History of Mathematics and Philosophy of Mathematics as a means to understand the processes of formation of mathematical thought in relation to mathematical writing styles.

[1] Doutor em Educação Matemática: FEIS - Universidade Estadual Paulista – UNESP – Ilha Solteira - SP, Departamento de Matemática, inocencio.balieiro@unesp.br
[2] Doutor em Educação: IBILCE - Universidade Estadual Paulista – UNESP – São José do Rio Preto - SP, Departamento de Educação, ricardo.scucuglia@unesp.br
[3] Mestre em Ensino e Processos Formativos: Professora da Secretaria Municipal de Educação do Município de Novo Horizonte – SP, giovana.aparecida@unesp.br

Keywords: Mathematics; Demonstration; Style; Writing; History of Mathematics.

Introdução

A evolução para a constituição de uma demonstração rigorosa promove revoluções na Matemática e, a comunidade matemática, mediante críticas e arbitragens, legitima as demonstrações em periódicos especializados. Entretanto, para além dos aspectos formais, a demonstração em Matemática pode ser analisada como uma atividade social, negociada em comunidade.

Garnica (2002) afirma que a prova rigorosa é um elemento essencial para que seja possível compreendermos como funciona o discurso matemático, bem como a forma como surgem as concepções sobre Matemática que estão presentes na sala de aula. Esta perspectiva, para o autor, torna a discussão sobre a demonstração em Matemática um tema importante para a Educação Matemática. Garnica (2002) também aponta que há uma carência de estudos históricos mais amplos sobre o surgimento da demonstração e sobre o seu desenvolvimento até a formalização atual.

O início do desenvolvimento histórico da noção de demonstração presente em alguns povos antigos pode ser observado nas primeiras ideias fundamentais relacionadas aos métodos experimentais, intuitivos, analógicos e indutivos. Tais métodos se apresentavam no cotidiano do homem quando ele precisava resolver problemas práticos por meio de um algoritmo com o intuito de organizar e melhorar seus procedimentos de trabalho ou também na resolução de problemas teóricos, que podiam resultar desses problemas práticos. Ao considerarmos essa perspectiva, sobretudo, em relação à Matemática, fica evidente a utilização, formação, organização e o desenvolvimento de um corpo de conhecimento científico que pode ser caracterizado por três ramos elementares da Matemática: Aritmética, Geometria e Álgebra.

As pesquisas atuais em História da Matemática (KATZ, 2007; SELIN, 2000) apontam que as antigas sociedades (Egípcia, Mesopotâmica, Chinesa, Indiana, Maia, Asteca, Inca, Japonesa, Coreana, culturas do Pacifico, Aborígene australiana, África Central, Austral, Ocidental, entre outras) desenvolveram corpos elaborados de conhecimento matemático e científico que podem ser descritos como pertencentes à Aritmética, Geometria, Álgebra e Astronomia. De fato, essas recentes e aprofundadas pesquisas sobre a Matemática desenvolvida por aqueles povos, sobretudo os egípcios, mostram um desenvolvimento considerável de problemas matemáticos práticos e teóricos cujas soluções assinalam procedimentos organizados, métodos, fórmulas aproximadas e exatas e um estilo de escrita homogênea que apresentava com certo formalismo esse conhecimento matemático. O estilo é definido como qualquer forma específica de utilizar a linguagem, que é característica de um autor, escola, período, gênero ou qualquer outro atributo linguístico.

Nesse sentido, em relação ao prelúdio das ideias de demonstração, pode-se afirmar que não se concebem pressupostos matemáticos apenas com o uso de um método puramente axiomático, ou seja, nos procedimentos para a realização de uma demonstração matemática estão também presentes certos elementos que fazem parte de processos heurísticos argumentativos (intuição, analogia, indução, análise, síntese, refutação, dedução, etc.) e que possibilitam, ao final desse procedimento, uma construção de uma demonstração organizada, lógica e rigorosa.

Diferentes sociedades produziram conhecimentos matemáticos, notadamente aquelas de que se tem algum tipo de comunicação desses artefatos matemáticos – verbal (tradições orais), não verbal (gestos), temporárias (desenho na areia), permanentes (tábula de argila, papiro, bambu, pergaminho, etc.). Pode-se admitir que, para que houvesse uma comunicação de ideias matemáticas, foi necessária a existência de uma linguagem com um conjunto de símbolos, sinais e regras bem definidas para operá-los, com certas funcionalidades para que possibilitasse, mediante o emprego da palavra falada ou escrita, o compartilhamento de conteúdos matemáticos para uma pessoa ou para um grupo de pessoas ou para divulgar textos de assuntos matemáticos.

Nessa perspectiva, pode-se verificar que no transcorrer da História da Matemática, em decorrência dessas formas de linguagem, surgiram estilos de escritas nas diferentes sociedades para exibir as ideias presentes numa demonstração matemática. Como consequência, os estilos de escrita dos matemáticos, em cada período histórico, afetam a forma como se organizam as exposições das ideias matemáticas usadas para formalizar logicamente as demonstrações das proposições com o escopo de verificar a veracidade.

Na prática, historicamente e cronologicamente, esses matemáticos optaram por alguns estilos (geométrico, poético, cossisto, algébrico-cartesiano, indivisível, operacional, épsilon, sintético e analítico, dual, axiomático, formal, etc.) de demonstração que compreendiam alguns procedimentos, a saber: experimentais, heurísticos, formais, demonstrações meticulosas, sucintas, abstratas, complexas, com ou sem exemplos e algumas vezes orientadas por diagramas.

Os diferentes estilos e processos argumentativos adotados estão presentes nas inúmeras estratégias de investigar e de inventar soluções para os problemas que surgem em diversos ramos da Matemática, bem como para compreender a gama de elementos, relações, métodos heurísticos, lógicos e formais existentes numa demonstração. Desse modo, as experiências, práticas e preferências de cada matemático caracterizam seu estilo singular de escrita matemática e demonstrativa.

O texto aqui apresentado é resultado de uma pesquisa de abordagem qualitativa do tipo historiográfico, em que foram adotadas as etapas para pesquisa em História da Matemática apontadas em Balieiro (2017), considerando-se os processos metodológicos de Bervian e Cervo (1983), as etapas de pesquisa em História propostas por Besselaar (1973) e os critérios para a classificação de fontes históricas indicados por May (1978).

O *estilo geométrico* de escrita em demonstração

Como afirmamos na introdução, as antigas sociedades desenvolveram corpos elaborados de conhecimento matemático e científico e os egípcios mostraram um desenvolvimento considerável de problemas matemáticos práticos e teóricos.

O próximo estágio desse desenvolvimento histórico do conceito de demonstração acontece quando antigos geômetras gregos propõem proposições geométricas gerais, para as quais é necessária uma reflexão sobre sua validade. O primeiro desses geômetras é Thales de Mileto (624 – 547 AEC), que foi o primeiro a enunciar alguns teoremas cuja verdade poderia e deveria ser justificada mediante um argumento dedutivo (Katz, 2009).

A estrutura argumentativa presente na cultura e no pensamento grego, caracterizada pelo uso da razão e da lógica na construção de um argumento incontestável, estava presente em vários ramos do conhecimento desse povo; na verdade, essa forma de pensamento dialético estava espalhada na vida pública na Grécia antiga (na mitologia, na constituição das leis, na formação política, nas várias formas de literatura, nas artes, na arquitetura e na filosofia). Possivelmente, nesses domínios do conhecimento, podemos encontrar as origens da demonstração matemática helênica. Notadamente, segundo Cellucci (2013), na Filosofia, essa estrutura argumentativa fica patente no método parmenidiano (o princípio da não-contradição, o princípio do terceiro excluído e a redução ao absurdo), no método socrático (implementado por meio do diálogo argumentativo entre indivíduos, visto que as perguntas e as respostas estimulam o pensamento crítico, para extrair ideias e hipóteses escondidas), no método dialético platônico (implementado mediante o desenvolvimento de processos lógicos, pois o conhecimento não pode ser adquirido sem esses procedimentos racionais) e no método silogístico aristotélico (implementado por intervenção do desenvolvimento de meios lógicos, já que possibilita a capacidade de obter uma conclusão sobre a proposição proposta).

Ainda conforme Cellucci (2013), Aristóteles de Estagira (384 – 322 AEC), em sua obra *Órganon*, reuniu, organizou e sistematizou os conteúdos de textos anteriores que continham elementos filosóficos e procedimentos lógicos que pudessem constituir uma ciência lógica com o intuito de compor uma teoria para o estudo da Matemática e outras ciências. Ademais, pode-se declarar que há uma relação estreita entre a construção teórica estabelecida por Aristóteles e a estruturação axiomática organizada por Euclides de Alexandria (325 – 265 AEC).

Já nesse período, no Século III, os geômetras gregos possuíam conhecimentos geométricos consideráveis, tinham acumulado uma gama de preposições geométricas importantes e dispunham de artifícios para demonstrações geométricas (Katz, 2009). Por isso, nessa época, apareceram algumas tentativas de congregar esse excessivo volume de conhecimento sobre Geometria em um único tratado, com o propósito de organizar e fundamentar os conceitos elementares, os resultados geométricos, as demonstrações, os métodos e dispô-los numa sequência compreensível e racional. O geômetra grego que realizou este importante trabalho com o intuito de axiomatização da Geometria foi Euclides em seu tratado mais conhecido *Os elementos*, composto por treze livros (capítulos) que organizam e sistematizam, essencialmente, os conhecimentos de Geometria Plana e Espacial. Para isso, Euclides define os conceitos, em seguida, expõe os postulados e os axiomas e, por fim, expõe as proposições dispondo-as em ordem lógica, de forma que a demonstração de cada premissa realizar-se-á mediante a utilização de definições, postulados, axiomas e proposições precedentes (lemas), não necessariamente nesta ordem (Balieiro, 2017). Esse modelo evidencia um estilo singular de escrever e de demonstrar teoremas matemáticos. Em *Os elementos* quase todas as proposições com suas demonstrações são compostas por seis partes e também se empregam diagramas para descrever os aspectos importantes no desenrolar das demonstrações.

> Utilizando a *síntese* para *expor* o que se encontrou para solucionar um problema ou demonstrar um teorema, os antigos geômetras dividiam o problema (ou teorema) e sua solução (ou demonstração) em seis partes, a saber, *protasis*, *ekthasis*, *diorismós*, *kataskeue*, *apodeixis* e *sumperasma*. *Protasis* – é o enunciado da proposição. *Ekthasis* – é o que é dado no enunciado da proposição. *Diorismós* – é o que se pede no enunciado da proposição. *Kataskeue* – é a construção geométrica da proposição. *Apodeixis* – é a demonstração da proposição. *Sumperasma* – é a conclusão da proposição. (BALIEIRO, 2017, p. 75-78).

Por certo, de acordo com Balieiro (2017), os antigos geômetras utilizavam um processo heurístico para obter a solução de um problema ou a demonstração de uma proposição, ou melhor, eles usavam o procedimento da *análise* para obter a solução do problema ou a demonstração da proposição. E, em seguida, usavam o procedimento da *síntese* para exprimir a solução daquele problema ou apresentar a demonstração daquela proposição.

Ainda na Antiguidade, conforme Balieiro (2017), foi utilizado um procedimento de demonstração diferente do adotado por Euclides, cuja estratégia de argumentação empregava um método mecânico. Esse procedimento foi proposto por Arquimedes (287 – 212 AEC), que utilizava os princípios da Estática (as noções de forças e das condições de equilíbrio dos corpos materiais submetidos à ação dessas forças). Dessa maneira, para suas demonstrações de proposições geométricas, em seu tratado *O Método de Arquimedes, relativo às investigações mecânicas, para Eratóstenes*, o siracusano deixou para um segundo momento os procedimentos axiomáticos demonstrativos euclidianos, utilizando em suas demonstrações, primeiramente, considerações da Estática para assentar suas conclusões geométricas mediante conceitos relacionados com massa, força, centro de gravidade e equilíbrio (o estado de repouso de um corpo em relação a outros corpos materiais). Por fim, de posse das sequências lógicas da demonstração e da conclusão produzida pelo método mecânico, Arquimedes utilizou o modelo de prova euclidiana com o intuito de estabelecer o rigor.

Em alguns tratados de Arquimedes fica evidente outro procedimento de demonstração que foi elaborado por Eudoxo de Cnido (408 – 355 AEC) e que alguns geômetras renascentistas denominavam de método de exaustão. Conforme Balieiro

(2017), quando é necessário encontrar áreas de figuras planas ou volumes de figuras espaciais, esse método compara a área ou o volume que se quer calcular com duas sequências de grandezas decrescentes ou crescentes conhecidas (áreas ou volumes) que convergem para a área ou volume que se quer calcular e essa comparação realiza-se por um duplo processo de *reductio ad absurdum*. Por certo, quando já se conhece, mediante processos intuitivos, mecânico ou por outros procedimentos, a equivalência entre duas áreas ou volumes, ou seja, as grandezas Σ e Φ, cuja uma delas é conhecida, então, pelo método de exaustão (utilizado em *Os elementos* de Euclides, livro XII, nas proposições 2, 5, 10, 11, 12 e 18), demonstra-se essa equivalência. Para isso, considere a proposição que se quer demonstrar da seguinte forma $\Sigma = \Phi$, em que Σ é a figura curvilínea cuja grandeza se quer conhecer e Φ é a figura retilínea regular cuja grandeza é conhecida. Em seguida, suponha que Σ é maior do que Φ; então, é necessário construir em Σ uma figura inscrita retilínea regular Ψ maior do que Φ; porém, sendo inscrita, também será de fato menor do que Φ; logo, por redução ao absurdo, a suposição é falsa. Agora, suponha que Σ é menor do que Φ; então, é necessário construir em Σ uma figura circunscrita retilínea regular Ω menor do que Φ; porém, sendo circunscrita, também será de fato maior do que Φ; logo, por redução ao absurdo, a suposição é falsa. Portanto, pela lei da tricotomia, tem-se $\Sigma = \Phi$.

O *estilo poético* de escrita em demonstração

Na Matemática Indiana, conforme Sesiano (2009), é possível identificar um *estilo poético*, como, por exemplo, em *Aryabhatıya* (500 DC), cujo conteúdo astronômico pertence ao gênero de *Siddhanta* (ou tratados astronômicos), escrito por Aryabhata I (476 – 550) e que parece pertencer à uma tradição matemática bem estabelecida. Seus sucessores foram matemáticos criativos que desenvolveram novas áreas dessa Matemática, em especial, a Álgebra, cuja característica fundamental estava em sua forma. A maioria dos textos indianos matemáticos é composto em verso sânscrito e redigido num *estilo poético* projetado para que tais textos fossem recitados e memorizados.

De acordo Lorenzo (1971), pode-se sustentar que o *estilo poético* de escrita e de demonstração em Matemática Indiana tem as seguintes características:

> (...) obras são integralmente escritas em verso, mas porque essa mesma formulação condiciona a própria Matemática que está sendo construída. Um poema astronômico-matemático é mero passatempo; um Tantra indiano é um verdadeiro enredo matemático. Mas se o termo "poético" é aplicado ao estilo em que os tratados indianos foram escritos, alguns pontos devem ser especificados.
> (...) o sânscrito é uma língua de extraordinária riqueza até fonética, mas não tanto as traduções que podem ser feitas, quase necessariamente em prosa. (LORENZO, 1971, p. 66).

Considerando a transferência do conhecimento matemático grego para o mundo islâmico, pode-se reiterar, de acordo com Katz e Parshall (2014), que as principais obras clássicas de Matemática Grega foram traduzidas para o árabe e eruditos islâmicos estudaram e escreveram comentários sobre tais obras. Um aspecto importante da cultura matemática grega que foi apreendida pelos eruditos islâmicos por meio da investigação desses trabalhos clássicos foi o processo de demonstração inspirado no modelo axiomático euclidiano.

As primeiras traduções dos textos clássicos gregos, segundo Sesiano (2009), foram aperfeiçoadas e comentadas, e se pode reconhecer que, por volta do Século X, a ciência grega já havia sido totalmente assimilada pelos islâmicos. Considerando esse período, pode-se ratificar que houve uma crescente influência da Geometria Grega sobre a Álgebra, em decorrência dos trabalhos sobre essa última. Abu Ja'far Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi (780 – 850), por exemplo, utilizou um modelo intuitivo de Geometria no início do Século IX e Abu Kamil Shuja ibn Aslam ibn Muhammad ibn Shuja (850 – 930) aplicou os procedimentos matemáticos euclidianos nas demonstrações de seus teoremas no final desse século.

O *estilo cossisto* de escrita em demonstração

Os matemáticos do período do Renascimento, conforme Lorenzo (1971), estabeleceram um *estilo cossisto* (termo que deriva da palavra *cosa* usada pelos matemáticos italianos para a "coisa" desconhecida), cuja abordagem matemática apresenta um caráter aritmético e não espacial. Ao considerar o modelo de demonstração euclidiana em Geometria e em Aritmética e ao refletir sobre esse período precedente da Matemática em relação ao processo de demonstração associada aos métodos algébricos, pode-se comprovar, segundo Katz e Parshall (2014), que esses procedimentos argumentativos interessaram aos geômetras renascentistas. De fato, Girolamo Cardano

(1501 – 1576) representa essa tendência, ao apresentar um tratamento algébrico e abstrato num modelo dedutivo euclidiano para resolver equações de terceiro e quarto grau.

O matemático François Viète (1540 – 1603), de acordo com Katz (2009), reconheceu o processo de demonstração utilizando a análise e a síntese dos geômetras gregos com essa nova Álgebra de seus predecessores e compôs diversos tratados sobre a arte analítica e, nesse sentido, reformulou o estudo da Álgebra. Ainda conforme Katz (2009), para Viète a análise problemática tornou-se a análise zetética (procedimento que transforma um problema em uma equação relacionando aquilo que é desconhecido com os vários conhecidos), a análise teórica tornou-se a análise porística (procedimento que explora a verdade de uma proposição matemática mediante utilização adequada de símbolos) e, por fim, a análise exegética, que transforma a equação encontrada, pela análise zetética para encontrar um valor para o termo desconhecido.

O *estilo algébrico-cartesiano* de escrita em demonstração

Os sucessores da Álgebra construída por Viète, de acordo com Katz e Parshall (2014), foram Thomas Harriot (1560 – 1621) e Pierre de Fermat (1601 – 1665) que contribuíram para transformá-la num método de resolução de problemas que Viète havia imaginado; porém, foi René Descartes (1596 – 1650) que, por meio de seu texto *La Géométrie* (A Geometria, 1637), realizou os propósitos e os processos de demonstração estabelecidos por Viète com o intuito de demonstrar, mediante processos algébricos, resultados geométricos e contribuiu com as ideias de Fermat em identificar uma curva geométrica com uma equação algébrica em duas variáveis. Consoante Lorenzo (1971), o *estilo algébrico-cartesiano* de escrita e de demonstração em Matemática têm as seguintes características: Descartes adota o uso de notação e terminologia breve e busca na Matemática um modelo de raciocínio, questionando seus aspectos e suas características essenciais. Por meio dessa busca, Descartes cria a Geometria Analítica e uma "sistematização rigorosa das notações ou símbolos algébricos" (LORENZO, 1971, p.81).

Além disso, em relação à contribuição cartesiana, convém salientar outro aspecto que está relacionado com a evolução da Matemática: a abstração. Conforme Lorenzo (1971), a abstração adota uma nova notação em que cada símbolo representa um conjunto de números ao invés de um único número. Nas obras de Descartes, essa notação contribui para que as operações possam ser generalizadas e marca a transição da Aritmética para a Álgebra.

O *estilo indivisível* de escrita em demonstração

As pesquisas realizadas no Século XVI, por exemplo, sobre centros de gravidade, conduziram alguns geômetras a elaborarem métodos para o cálculo de áreas e de volumes de figuras geométrica que envolviam o conceito do infinitamente pequeno para examinar o comportamento dessas formas geométricas quando submetidas a processo infinito de inscrições e circunscrição. Esse estudo foi iniciado por Simon Stevin (1548 – 1620) e Luca Valerio (1552 – 1618) que utilizaram métodos similares aos empregados por Arquimedes.

Conforme Eves (1969), os primeiros matemáticos que desenvolveram ideias de conceitos infinitesimais com o intuito de resolver problemas de integração foram Johann Kepler (1571 – 1630) e Bonaventura Francesco Cavalieri (1598 – 1647). Kepler utilizou um procedimento de integração por meio do conceito de infinitésimos para calcular as áreas envolvidas em sua segunda lei do movimento planetário e os volumes de barris de vinho; como outros matemáticos dessa época, adotava sem rigor o método de exaustão e utilizava os processos heurísticos arquimediano. Já Cavalieri utilizou um procedimento de integração mediante o conceito de indivisíveis para calcular áreas de figuras planas e espaciais. Para Cavalieri um indivisível de uma dada figura plana é uma corda dessa figura e um indivisível de uma dada figura sólida é uma seção plana dessa figura. Dessa forma, uma figura plana é considerada como composta por um conjunto infinito de cordas paralelas e uma figura sólida como composto de um conjunto infinito de seções planas paralelas.

Em relação ao conceito de indivisíveis, conforme Lorenzo (1971), Blaise Pascal (1623 – 1662) foi um dos geômetras que conseguiu, usando o estilo de demonstração por meio dos indivisíveis, calcular a área de algumas curvas, volume de alguns sólidos e o centro de gravidade de certas figuras estabelecendo-os numa linguagem precisa e compreensível cuja abordagem pode ser traduzida para a linguagem atual sem qualquer dificuldade. Na prática, consoante Lorenzo (1971), houve uma mudança substancial na concepção de indivisíveis estabelecidas por Galileu Galilei (1564 – 1642), Johann Kepler e Bonaventura Francesco Cavalieri.

O *estilo operacional* de escrita em demonstração

Com Isaac Newton (1643 – 1727) e Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646 – 1716) surge um novo modelo de demonstração. Ao desenvolver métodos para abordar questões relacionadas às derivações e integrações, conforme Andersen em Grattan-Guinness (1994), Newton e Leibniz não estavam preocupados com os problemas referentes aos fundamentos do Cálculo Diferencial e Integral, como vários de seus predecessores. No modelo elaborado por Newton e Leibniz foram adotados e utilizados métodos que usavam os infinitésimos. Como consequência, o uso desses métodos nos trabalhos matemáticos de Newton e Leibniz tornou os métodos anteriores supérfluos. Porém, é evidente que os resultados matemáticos por eles obtidos têm relação com as ideias e resultados de seus antecedentes. Desse modo, para a forma de escrita e para o método de demonstração utilizado por Leibniz, Lorenzo (1971) dá o nome de *estilo operacional*. Nas obras de Newton sobre Cálculo Infinitesimal podemos observar uma abordagem de natureza mecânica, provavelmente trilhando as ideias iniciadas por seu predecessor, Galileu Galilei, em relação aos conceitos de trajetória, velocidade e aceleração de um corpo em movimento.

A Análise Infinitesimal pode ser considerada o ramo da Matemática que, no Século XVIII, obteve uma maior atenção dos matemáticos do período, em virtude de algumas indagações em relação aos seus fundamentos (sobre a natureza dos infinitésimos e a natureza fundamentada de demonstração em Matemática). Os matemáticos que iniciaram esse movimento foram Leonhard Euler (1701 – 1783), Jean Le Rond d’Alembert (1717 – 1783) e Joseph Louis Lagrange (1736 – 1813).

Lagrange decidiu renunciar aos conceitos de diferencial, fluxão e limite empregados na Análise Infinitesimal, em favor do conceito de função, para fundamentar esse ramo da Matemática. Em sua obra, *Théorie des Fonctions Analytiques Contenant les Principes du Calcul Différentiel* (Teoria das Funções Analíticas Contendo os Princípios do Cálculo Diferencial, 1797), ele tentou demonstrar algebricamente que qualquer função f pode ser expandida em uma série de Taylor.

O *estilo épsilon* de escrita em demonstração

Ao considerarmos o início do Século XIX pode-se garantir que houve em Matemática, nomeadamente, em Análise Matemática, várias modificações relativamente às ideias, métodos, definições, demonstrações rigorosas que proporcionaram que fossem obtidos diferentes resultados dos já obtidos por matemáticos precedentes e que, possivelmente, influenciaram outros ramos do conhecimento matemático. Um dos matemáticos desse período que impulsionou o desenvolvimento dessas ideias inovadoras foi Augustin Louis Cauchy (1789 – 1857).

> O trabalho de Cauchy estabeleceu uma nova maneira de conceber os conceitos do Cálculo Diferencial e Integral. Como resultado, o assunto foi transformado de uma coleção de métodos poderosos e de resultados úteis em uma disciplina matemática inspirada em definições explicitas e demonstrações rigorosas. Seus pontos de vista foram menos intuitivos do que os antigos, mas forneceram um novo conjunto de questões interessantes. Sua definição de limite e a elaboração do método de demonstração associado às desigualdades são as bases das teorias modernas de continuidade, convergência, derivada e integral. (FAUVEL; GRAY, 1993, p. 571-572)

Evidentemente a Análise Matemática rigorosa começa com as pesquisas de outros matemáticos, por exemplo: Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano (1781 – 1848) – teoria sobre funções, teoria sobre números reais e teoria sobre o infinito; Niels Henrik Abel (1802 – 1829) – teoria sobre série binomial; Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805 – 1859) – continuidade uniforme; e Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 – 1866) – teoria sobre funções e teoria sobre derivação e integração e que foi aprimorada e consolidada por Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815 – 1897). Por consequência, durante a segunda metade do Século XIX, numerosos matemáticos espalharam as ideias de rigor estabelecidas para a Análise Matemática propostas por Weierstrass. Tanto Cauchy como Weierstrass procuraram esclarecer os fundamentos daquela disciplina e de outras, cujos principais objetivos eram a reorganização sistemática do conhecimento matemático que encontraram nos estudos de seus precursores. Além disso, esses matemáticos desenvolveram e propagaram novas técnicas e métodos que foram prontamente aceitos.

Em virtude das ideias, métodos, estilo de demonstração e rigor estabelecidos por Weierstrass, Lorenzo (1971) caracteriza e denomina essa forma de escrita e de demonstração de *estilo de épsilon*.

O *estilo sintético* e o *estilo analítico* de escrita em demonstração

Segundo Kline (1990), por mais de cem anos após a introdução da Geometria Analítica estruturada por Descartes e Fermat, os métodos algébricos e analíticos dominaram a Geometria quase ocasionando a exclusão dos métodos sintéticos utilizados para resolver problemas e demonstrar proposições. O estímulo para reviver a Geometria sintética veio das investigações de Gaspard Monge (1746 – 1818) cujas ideias, métodos e conteúdos estão presentes em seu *Traité de géométrie descriptive* (Tratado de Geometria Descritiva, 1799). Em consequência, no início do Século XIX, vários geômetras (Poncelet, Chasles, Carnot, Steiner, Staudt, etc.) decidiram que a Geometria sintética tinha sido negligenciada e fizeram um esforço considerável para reviver e ampliar essa abordagem em Geometria.

Outros geômetras utilizaram procedimentos analíticos e sintéticos com o intuito de desenvolver alguns ramos da Geometria e, nessa perspectiva, caracteriza-se o *estilo sintético* e o *estilo analítico*. Entretanto, conforme Lorenzo (1971), a importância de Monge não se limitou a sua contribuição para a Geometria sintética, mas foi além por meio da escola que criou que teve como discípulos, por exemplo, Poncelet, Dupin, Brianchon, Olinde Rodrigues e Meusnier e como lema a frase de Carnot: "*libertar a Geometria dos hieróglifos da Análise*". Porém, isso levou a uma divisão de estilos: por um lado, houve a retomada do estilo euclidiano com o intuito de excluir os hieróglifos das proposições geométricas, caracterizando o estilo sintético (ou geométrico puro) e, por outro lado, a introdução da Análise e da Álgebra nas proposições geométricas caracterizou o estilo analítico. Os dois estilos estão presentes na obra de Monge: a Geometria Descritiva apresentada em estilo sintético e a Geometria Diferencial, em estilo analítico.

O *estilo dual* de escrita em demonstração

Na Geometria Descritiva construída por Monge, conforme Lorenzo (1971), destacam-se dois princípios primordiais: a projeção dos elementos de uma figura nos planos de referência e a seção da projeção pelos planos. Poncelet, discípulo de Monge, considerou em seu trabalho esses dois princípios. Como consequência, as propriedades métricas e as distâncias não desempenharão papel essencial nessa abordagem. Por conseguinte, o estilo com o qual se desenvolve é sintético. Da mesma forma, nesse desenvolvimento, os dois postulados que caracterizarão o novo ramo da Geometria são: primeiro, o princípio de continuidade de Poncelet, que foi reformado por Michel Chasles (1793 – 1880) e Jakob Steiner (1796 – 1863) com a introdução dos elementos imaginários, ou seja, admitindo que duas retas paralelas tenham um ponto comum no infinito e que todas as direções do plano dão lugar para a cônica do infinito ou plano absoluto – análogo ao espaço; segundo, o princípio da dualidade descoberto por Poncelet e Joseph Diaz Gergonne (1771 – 1859).

Com relação à Geometria Projetiva, pode-se atestar que teve sua origem com a publicação de Jean Victor Poncelet (1788 – 1867) do livro *Traité des propriétés projectives des figures* (Tratado das Propriedades Projetivas das Figuras, 1822) que, também, se tangencia com as pesquisas realizadas por Chasles e Steiner que delinearam como objeto dessa Geometria as propriedades das figuras e das quantidades relacionadas invariantes sob qualquer projeção. Os trabalhos de Karl Georg Christian von Staudt (1798 – 1867) libertaram a Geometria do conceito de métrica e a transformou numa disciplina que estuda as propriedades da disposição geométrica das figuras.

Na Geometria Projetiva Plana consideram-se objetos de duas classes (pontos e retas) e as propriedades de suas relações recíprocas são definidas pelos postulados projetivos. Nessa Geometria, conforme Efimov (1985), pode-se enunciar proposições correspondentes aos enunciados dos seus postulados substituindo a palavra “ponto” por “reta” e a palavra “reta” por “ponto”. Por exemplo: Quaisquer que sejam dois pontos A e B, existe uma reta r pertencente ao ponto A e ao ponto B. A proposição dual desse axioma é: Quaisquer que sejam duas retas r e s, existe um ponto A pertencente à reta r e à reta s. Neste sentido, reside em essência o princípio da dualidade sobre o plano projetivo. Em virtude desse preceito dualístico da Geometria Projetiva, Lorenzo (1971) denominou sua forma de escrita e de demonstração com o *estilo dual*.

O *estilo axiomático* de escrita em demonstração

Em relação ao desenvolvimento dos processos de demonstração em Matemática, como já salientamos anteriormente, o método axiomático foi elaborado pelos antigos filósofos e geômetras gregos ao estruturar a Geometria e outros ramos do conhecimento. Evidentemente, esses filósofos e os geômetras gregos não propuseram o problema de descrever as ferramentas lógicas empregadas nesse método axiomático. Notadamente, um momento ímpar que possibilitou um impulso ao desenvolvimento do método axiomático aconteceu no início do Século XIX em virtude dos estudos sobre a Geometria não-Euclidiana. Desse modo, nesse período, houve uma preocupação dos filósofos, lógicos e matemáticos em relação à configuração dedutiva de construir teorias matemáticas e, em consequência, originou-se um novo problema relacionado com esse método axiomático, ou seja, a estruturação de uma teoria matemática axiomática formal. Com certeza, houve um número crescente de teorias matemáticas (Álgebra, Teoria dos Números, Álgebra Simbólica, Análise Real, Complexa e Vetorial, Probabilidade, Estatística, Geometria Diferencial, não Euclidiana, Projetiva, n-Dimencional, Teoria dos Grafos e Topologia) que tiveram uma derivação axiomática, em especial, a axiomatização da Geometria Plana e Espacial realizada por Moritz Pasch (1843 – 1930), Giuseppe Peano (1858 – 1932) e David Hilbert (1862 – 1943). Hilbert, que pode ser considerado um dos principais matemáticos do final do Século XIX e início do Século XX, reformulou o sistema axiomático proposto por Euclides em *Os elementos* num tratamento rigoroso formalmente axiomático que foi publicado em seu livro *Grundlagen der Geometrie* (Fundamentos da Geometria, 1899).

O procedimento axiomático apresentado por Hilbert, de acordo com (DETLEFSEN apud GOLD; SIMONS, 2008), fica evidente em seus *Fundamentos da Geometria*, pois Hilbert fixa algumas incompletudes na Geometria Euclidiana, e estabelece seu sistema de axiomas inspirado em três objetos indefinidos (ponto, reta e plano), três relações indefinidas: incidência (um ponto sobre uma reta), ordem (estar entre) e congruência. Da mesma forma, esse trabalho de Hilbert é uma das primeiras pesquisas em Matemática moderna que em vez de trabalhar no interior de uma estrutura matemática, ele estabelece definições e axiomas e, em seguida, demonstra proposições sobre toda a classe de objetos que satisfazem essas definições e axiomas.

O método axiomático, de acordo com Audi (1999), é um processo para organizar os conceitos e as proposições de uma ciência com o propósito de estender a clareza dos conceitos e a certeza das proposições. Nesse processo são determinadas a abrangência do discurso, os objetos primitivos (que são de apreensão imediata e não dependem de definições), os axiomas ou proposições primitivas, as definições primitivas que partem dos objetos primitivos e a dedução de proposições não primitivas por meio de inferências.

No caso do sistema axiomático estabelecido por Hilbert, a abrangência do discurso é a Geometria Euclidiana, os objetos primitivos são ponto, reta e plano, e os axiomas são as relações de incidência, ordem e congruência. A partir desses conceitos e proposições primitivas são construídas as definições primitivas e a dedução das proposições não primitivas.

O *estilo formal* de escrita em demonstração

Conforme Malpass e Marfori (2017), devemos a Hilbert as ideias e os objetivos fundamentais da teoria da prova, um ramo da Lógica Matemática, que representa as demonstrações como objetos matemáticos formais, proporcionado sua análise por procedimentos matemáticos, com demonstrações estruturadas indutivamente e construídas mediante axiomas e regras de inferência do sistema lógico e essa teoria se caracteriza por ser de natureza sintática. Ainda houve o desenvolvimento de um sistema formal da Aritmética, atualmente conhecido como sistema axiomático de Peano, formulado por Giuseppe Peano em seu tratado *Formulario Mathematico* publicado em 1908.

Em virtude desses estudos que propuseram sistemas axiomáticos, surgiram pesquisas sobre o conceito de sistema dedutivo formal que foram realizadas de 1910 a 1913 pelos filósofos da Matemática Bertrand Arthur William Russell (1872 – 1970) e Alfred North Whitehead (1861 – 1947) estruturado em sua obra *Principia Mathematica* composta em três volumes e pelos matemáticos Hilbert e Wilhelm Ackermann (1896 – 1962) em seu livro *Grundzüge der Theoretischen Logik* (Princípios da Lógica Matemática, 1928). Nesse contexto, considerando esse desenvolvimento histórico de um sistema axiomático e de um sistema dedutivo formal, em concordância com Gray (2008), pode-se asseverar que na primeira metade do Século XX esses dois livros foram influentes para o desenvolvimento dos Fundamentos da Matemática, da Lógica e da Lógica Matemática. Além disso, conforme Gray (2008), Hilbert e sua escola matemática e filosófica promoveram e tentaram estabelecer uma concepção de estruturar um corpo organizado da Matemática como um sistema axiomático formal, um sistema dedutivo inspirado precipuamente em axiomas e em algumas regras de inferência. Em vista disso, o proposito hilbertiano era que essa abordagem axiomática formal evitaria a ocorrência de quaisquer paradoxos e contradições no interior da Matemática.

Para caracterizar esse período do desenvolvimento da Matemática em relação aos aspectos axiomático, de consistência, independência e completude em Matemática, consistência lógica, concepção de verdade em Matemática, metodologia e concepção de demonstração e a forma de escrita, Lorenzo (1971) adota a denominação de *estilo axiomático*.

Em decorrência desse movimento axiomático moderno, o desenvolvimento da Lógica e os paradoxos que surgiram no interior na Matemática deram origem às três principais correntes filosóficas (logicismo, intuicionismo e formalismo) presentes na Matemática durante o Século XIX. Nomeadamente, o pensamento formalista cuja concepção estabelece que a Matemática trata de manipulações de símbolos conforme certas regras estruturais e nega a existência dos objetos matemáticos. A concepção formalista surge com Hilbert e seus discípulos e estabelece que os fundamentos da Matemática possam ser estabelecidos demonstrando a consistência dos sistemas formais que são reduzidos das teorias matemáticas. Porém, o êxito do projeto hilbertiano foi limitado pelos dois teoremas da incompletude de Kurt Gödel (1906 – 1978).

> O formalismo pretende dissipar do símbolo seu conteúdo eidético, aceitando apenas seu conteúdo operacional. Qualquer carga semântica deve ser dissipada do símbolo, deixando o símbolo apenas como um elemento gráfico. O que é exigido exclusivamente do símbolo é saber como operar com ele, sem saber o que isso significa. Depois de ter feito uma construção formal, ter operado com os símbolos, cabe uma interpretação, um conteúdo. Mas é claro que, nesse caso, pode haver diferentes interpretações do mesmo sistema e não de uma especificamente. Cada interpretação será vista como uma realização, como modelo desse cálculo formalizado. Precisamente é o ponto para o qual conduziram as correntes de fundamentos matemáticos do século anterior. (LORENZO, 1971, p. 186)

Pode-se sancionar que nenhuma das soluções propostas pelos adeptos das correntes filosóficas (logicismo, intuicionismo e formalismo) com o intuito de explicitar os vários problemas e os paradoxos fundamentais que surgiram no interior basilar da Matemática alcançou o seu objetivo, que consistia em assegurar uma perspectiva universal no tocante aos seus fundamentos aceitáveis à Matemática. Por outro lado, as várias investigações sobre os fundamentos da Matemática realizadas por filósofos, lógicos e matemáticos daquelas três correntes de pensamento proporcionaram a essa ciência progressos em várias direções para explicitar os fundamentos e avanços em diferentes ramos da Matemática. Nesta perspectiva, Lorenzo (1971), caracteriza esse movimento e desenvolvimento na forma de demonstração e na forma de expor esse conhecimento matemático como o *estilo formal*.

O *estilo intuicionista* de escrita e de demonstração

Por fim, é necessário descrever e exemplificar os pressupostos da Matemática intuicionista, uma vez que Lorenzo (1971) não o inclui em seus estudos. Os primeiros matemáticos que representaram essas convicções filosóficas de natureza intuicionista foram Leopold Kronecker (1823 – 1891), Jules Henri Poincaré (1854 – 1912), porém foram Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881 – 1966) e Hermann Klaus Hugo Weyl (1885 – 1955) os que desenvolveram uma estrutura filosófica e matemática coerente com os preceitos desse pensamento matemático intuicionista. As concepções fundamentais para a Matemática presentes na Filosofia Matemática Intuicionista residem na afirmação de que as teorias matemáticas não podem ser significativas a menos que essas afirmações sejam construtivas tomando-se por base o estabelecimento de uma intuição intelectual.

> A Matemática clássica aceita como objeto de estudo qualquer estrutura matemática que possa ser definida de forma consistente. O intuicionismo, por outro lado, somente aceita a existência daqueles objetos matemáticos que podem ser construídos passo a passo no pensamento individual do matemático e apenas atribui àquelas propriedades que podem ser imediatamente capturadas por sua intuição intelectual. No tempo finito de que dispomos apenas podemos terminar de construir objetos finitos. Os objetos infinitos, como as séries numéricas, somente são dadas potencialmente, como processos inacabados de construção, Brouwer aceitou a ideia kantiana de uma intuição *a priori* do tempo, embora rejeitasse a do espaço. (MOSTERÍN; TORRETTI, 2002, p. 306)

Consequentemente, Brouwer propõem renunciar de uma parte considerável da matemática russeliana e hilbertiana como inaceitável em virtude dos problemas em sua fundamentação e, dessa maneira, limitar-se a utilizar uma matemática reduzida, embora reconstruída com processos finitos e alicerçada em critérios intuitivos intelectuais que assegurem sua certeza e verdade. E, além disso, na lógica intuicionista tem um significado diferente, ou melhor, se não tem uma demonstração de uma proposição P nem a demonstração de sua negação, não se pode asseverar de forma lógica que $P \vee \neg P$. Com efeito, segundo van Dalen (2013), esse pensamento filosófico matemático intuicionista é uma reação ao fundamento de Matemática sobre axiomas, à teoria transfinita dos números de Cantor, ao logicismo de Peano-Russell e aos fundamentos hilbertiano da Matemática.

Considerações Finais

As pesquisas contemporâneas em História da Matemática, Filosofia da Matemática, Etnomatemática e Sociologia da Matemática, que consideram a dimensão social um aspecto importante para o desenvolvimento da Matemática, enfatizam que os indivíduos (seres sociais), – presentes nas diversas sociedades, nas diferentes culturas e nos vários períodos históricos – que produziram alguma forma de conhecimento matemático, estavam imersos numa estrutura social com algumas características: a presença harmônica de relacionamentos entre os indivíduos, a constituição de parâmetros para o comportamento dos indivíduos para manter uma estabilidade social, organização de uma estrutura institucional, a presença implícita ou explícita de enfrentamentos sociais, a introdução de convenções e preceitos morais coletivos, entre outros aspectos. Desse modo, em razão desses estudos atuais, notadamente, sobre as sociedades citadas na introdução deste artigo, pode-se assegurar que, na atualidade, temos um conhecimento mais abrangente em relação à forma de se conceber Matemática e sobre os estilos utilizados para se apresentar uma demonstração.

Ao longo da revisão histórica que foi realizada e apresentada neste artigo foram discutidos treze estilos de demonstração: *estilo geométrico*, *estilo poético*, *estilo cossisto*, *estilo algébrico-cartesiano*, *estilo indivisível*, *estilo operacional*, *estilo de épsilon*, *estilo sintético*, *estilo analítico*, *estilo dual*, *estilo axiomático*, *estilo formal* e *estilo intuicionista*. Aos doze primeiros, que foram apontados por Lorenzo (1971), desdobramos especificidades e contextualizações históricas e filosóficas e, além disso, acrescentamos um décimo terceiro estilo: o *intuicionista*. Salientamos que esse conjunto de estilos matemáticos que indicamos e descrevemos não pretendem ser completos, pois outros estudiosos podem selecionar outros momentos históricos ou ainda períodos mais restritos do desenvolvimento da Matemática, como, por exemplo, quando se contrapõem os estilos de Weierstrass e Riemann ao apresentarem resultados fundamentais sobre Análise Complexa.

Referências

AUDI, R. (Org). **The Cambridge Dictionary of Philosophy**. New York: Cambridge University Press, 1999.

BALIEIRO, I. F. **Arquimedes, Pappus, Descartes e Polya**: Quatro Episódios da História da Heurística. São Paulo: Editora UNESP Digital, 2017.

CELLUCCI, C. **Rethinking Logic**: Logic in Relation to Mathematics, Evolution, and Method. Dordrecht: Springer, 2013.

EFIMOV, N. **Géométrie Supérieure**. Moscou: Mir, 1985.

EVES, H. **An Introduction to the History of Mathematics**. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1969.

FAUVEL, J.; GRAY, J. **The History of Mathematics**: A Reader. London: Macmillan, 1993.

GARNICA, A. V. M. As demonstrações em Educação Matemática: um ensaio. **BOLEMA** – Boletim de Educação Matemática, Rio Claro: Unesp. n.18, p. 91- 99, 2002.

GOLD, B.; SIMONS, R. A. **Proof and Other Dilemmas Mathematics and Phisosophy**. Washington: The Mathematical Association of America, 2008.

GRATTAN-GUINNESS, I. **Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences**. Vol. 1 e 2. New York: Routledge, 1994.

GRAY, J. **Plato's Ghost**: The Modernist Transformation of Mathematics. New Jersey: Princeton University Press, 2008.

JOSEPH, G. G. **The Crest of the Peacock**: Non-European Roots of Mathematics. New Jersey: Princeton University Press, 2011.

KATZ, V. **The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India, and Islam**: A Sourcebook. New Jersey: Princenton University Press, 2007.

KATZ, V. **A History of Mathematics**. Boston: Pearson, 2009.

KATZ, V.; PARSHALL, K. H. **Taming the Unknown**: History of Algebra from Antiquity to the Early Twentieth Century. New Jersey: Princeton University Press, 2014.

KLINE, M. **Mathematical Thought from Ancient to Modern Times**. New York: Oxford University Press, 1990.

LORENZO, J. **Introduccion al Estilo Matematico**. Madrid: Editorial Tecnos, 1971.

MALPASS, A.; MARFORI, M. A. **The History of Philosophical and Formal Logic**. London: Bloomsbury, 2017.

MOSTERÍN, J.; TORRETTI, R. **Diccionario de Lógica y Filosofía de la Ciencia**. Madrid: Alianza Editorial, 2002.

SELIN, H. **Mathematics Across Cultures**: The History of Non-Western Mathematics. Dordrecht: Springer, 2000.

SESIANO, J. **An Introduction to the History of Algebra**: Solving Equations from Mesopotamian Times to the Renaissance. Providence: American Mathematical Society, 2009.

STEDALL, J. **From Cardano's Great Art to Lagrange's Reflections**: Filling a Gap in the History of Algebra. Zürich: European Mathematical Society, 2011.

VAN DALEN, D. **Mystic, Geometer, and Intuitionist**: The Life of L. E. J. Brouwer. London: Springer, 2013.