УДК 519.67 **DOI: 10.14529/cmse210402**

АЛГОРИТМ СОЕДИНЕНИЯ ЦИКЛОВ ДЛЯ МЕТРИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ КОММИВОЯЖЕРА НА МАКСИМУМ

© 2021 А.В. Панюков, Ю.Ф. Леонова
Южно-Уральский государственный университет
(454080 Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, д. 76)
E-mail: paniukovav@susu.ac.ru, yuliya.igosheva@gmail.com
Поступила в редакцию: 22.03.2021

Задача коммивояжера на максимум имеет ряд практических приложений, например, при сжатии произвольных данных и анализе последовательностей ДНК. При том, что задача коммивояжера на максимум является менее разработанной, чем задача коммивояжера на минимум, для ее решения существуют эффективные приближенные алгоритмы. В статье приведены оценки точности лучших на сегодняшний день алгоритмов для приближенного решения метрической задачи коммивояжера на максимум, и предлагается еще один алгоритм приближенного решения задачи коммивояжера на максимум, состоящий из поиска 2-фактора максимального веса в заданном графе, а затем применения операции оптимального соединения циклов в один гамильтонов цикл. Приведено доказательство, что для метрической задачи коммивояжера на максимум отношение длины найденного алгоритмом гамильтонова цикла к максимально возможной длине гамильтонова цикла не менее 5/6. Вычислительная сложность алгоритма не превышает $O(|V|^3)$. Проведено тестирование качества алгоритма на случайно сгенерированных матрицах стоимостей с евклидовой метрикой. Аналитическое и численное исследование алгоритма объединения циклов позволило выдвинуть гипотезу об асимптотической точности алгоритма на классе метрических задач коммивояжера на максимум.

Ключевые слова: алгоритм, асимптотическая точность, вычислительная сложность, вычислительный эксперимент, задача коммивояжера.

ОБРАЗЕЦ ЦИТИРОВАНИЯ

Панюков А.В., Леонова Ю.Ф. Алгоритм соединения циклов для метрической задачи коммивояжера на максимум // Вестник ЮУрГУ. Серия: Вычислительная математика и информатика. 2021. Т. 10, № 4. С. 26–36. DOI: 10.14529/cmse210402.

Введение

Пусть $G = (V, E)$ полный граф, $W: E \to Z^{\geq 0}$ — заданная весовая функция, $W(E') = \sum_{e \in E'} W(e)$ для любого $E' \subset E$. Гамильтонов цикл — это цикл, проходящий через каждую вершину графа ровно один раз. Задача коммивояжера на максимум (MAX TSP) состоит в нахождении гамильтонова цикла $H \in G$ с максимальным весом $W(H)$.

Задача коммивояжера на максимум нашла применение в комбинаторике и вычислительной биологии: в частности, для понимания взаимодействий РНК [1] и обеспечения алгоритмов сжатия результатов секвенирования ДНК [2]; в задаче нахождения треугольного покрытия графа максимального веса [3] и к комбинаторной задаче bandpass-2 [4], в которой необходимо найти наилучшую перестановку строк в матрице с булевыми значениями, при которой взвешенная сумма структур, называемых полосовыми пропусками, максимальна.

Особый интерес представляют геометрические экземпляры задачи коммивояжера, в которых вершины графа G соответствуют точкам в $\mathbb{R}^d$ для некоторого $d \geq 1$, а расстояния вычисляются в соответствии с некоторой геометрической нормой. Подобные задачи принято называть метрическими [5]. Метрическая задача коммивояжера на максимум является SNP-трудной [6, 21], что обуславливает актуальность изучения эвристических алгоритмов решения задачи.

В данной статье предлагается алгоритм соединения циклов для метрической задачи коммивояжера на максимум. Статья организована следующим образом. В первом разделе статьи отражено текущее состояние исследований приближенных алгоритмов решения задачи MAX TSP. Во втором разделе дано описание алгоритма соединения циклов для решения задачи коммивояжера на максимум. В третьем разделе приведено исследование качественных характеристик алгоритма. Результаты эмпирического исследования на основе разработанного программного обеспечения приведены в разделе 4. В заключении приводится краткая сводка результатов, полученных в работе, и указаны направления дальнейших исследований.

1. Обзор состояния проблемы

Алгоритм называется C-приближенным, если при любых исходных данных он находит допустимое решение со значением целевой функции, отличающимся от оптимума не более чем в C раз.

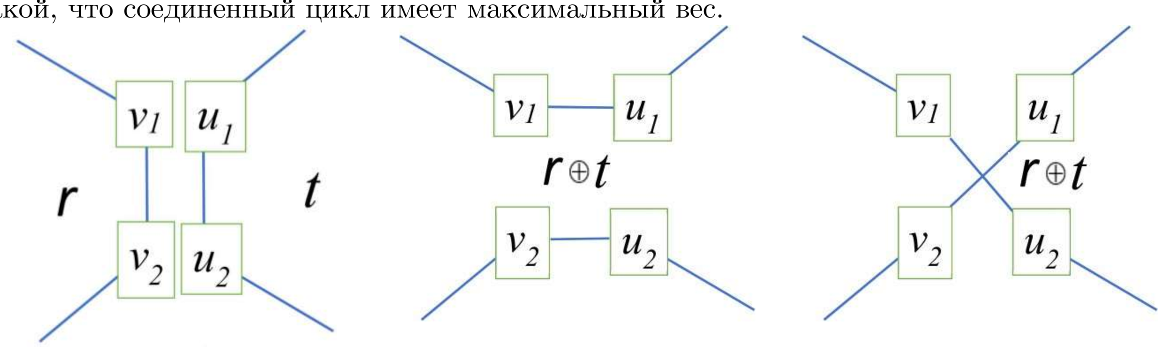
Первые приближенные алгоритмы для задачи MAX TSP были разработаны Фишером, Немхаузером и Уолси [7]. Они предложили несколько алгоритмов с коэффициентом аппроксимации 1/2 и один 2/3-приближенный алгоритм. В [8] Косараджу, Парк и Штейн представили улучшенный 19/27-приближенный алгоритм. Этот результат, в свою очередь, был улучшен Хассином и Рубинштейном, которые предложили 5/7-приближенный алгоритм [9]. В 1984 году Сердюков [10] представил простой и элегантный 3/4-приближенный алгоритм. Алгоритм является детерминированным (выдает уникальный и предопределенный результат для заданных входных данных) и имеет вычислительную сложность $O(V^3)$, где V — множество вершин графа. Впоследствии Хассин и Рубинштейн [12] предложили рандомизированный (использует степень случайности как часть своей логики) алгоритм, имеющий ожидаемый коэффициент аппроксимации не менее $\frac{25(1-\varepsilon)}{33-32\varepsilon}$ и вычислительную сложность $O\left(|V|^2\left(|V|+2^{1/\varepsilon}\right)\right)$, где ε — произвольно малая константа. Первый детерминированный приближенный алгоритм с оценкой лучше, чем 3/4, был предложен в [13] Ченом, Окамото и Вангом: 61/81-приближенный алгоритм с вычислительной сложностью $O(|V|^3)$. В 2009 году Палуч, Муха и Мадри [14] предложили 7/9-приближенный алгоритм с вычислительной сложностью $O(|V|^3)$. В 2017 году Дудич, Марцинковский, Палуч и Рыбицкий предложили 4/5-приближенный алгоритм [15] с вычислительной сложностью $O(|V|^3)$.

Для метрической задачи коммивояжера на максимум известны детерминированный 5/6-приближенный алгоритм Косточки—Сердюкова [16] с вычислительной сложностью $O(|V|^4)$, 7/9-приближенный алгоритм Панюкова—Тычинина [11] с вычислительной сложностью $O(|V|^3)$, 7/8-приближенный алгоритм Хассина и Рубинштейна [17], имеющий асимптотическую оценку точности и вычислительную сложность $O(|V|^3)$, 17/20-приближенный рандомизированный алгоритм, предложенный Ченом, Окамото и Вангом [13] с вычислительной сложностью $O(|V|^3)$.

2. Описание алгоритма соединения циклов

Суть предлагаемого алгоритма соединения циклов (Cycles Merging Algorithm — CMA) для решения задачи коммивояжера состоит в предварительном нахождении в заданном графе 2-регулярного суграфа максимального веса, т.е. покрытия этого графа циклами. Данную конструкцию принято называть 2-фактором максимального веса, он определяется на первом шаге алгоритма.

На втором шаге проверяется условие единственности цикла полученного решения. Если 2-фактор представлен единственным циклом, то этот цикл является решением задачи. Если 2-фактор представлен несколькими циклами, то перебираются попарно различные циклы r и t, в каждом цикле выбранной пары перебираются по одному ребру, пусть выбраны $e^r_{\{r\oplus t\}}=[v_1,\ v_2]$ и $e^t_{\{r\oplus t\}}=[u_1,\ u_2]$, для них находятся две пары сопряженных ребер ($f=[v_1,\ u_1]$, $g=[v_2,\ u_2]$) и ($f=[v_1,\ u_2]$, $g=[v_2,\ u_1]$), используемых для соединения циклов (см. рис. 1). Выполняется поиск набора $\{r,\ t,\ e^r_{\{r\oplus t\}},\ e^t_{\{r\oplus t\}},\ f,\ g\}$ из перечисленных элементов такой, что соединенный цикл имеет максимальный вес.



Исходные циклы $r, t \in C$: $e^r_{\{r\oplus t\}} = \{v_1, v_2\}$, $e^t_{\{r\oplus t\}} = \{u_1, u_2\}$

Вариант соединения 1: $f_{r\oplus t} = \{v_1, u_1\}$, $g_{r\oplus t} = \{v_2, u_2\}$

Вариант соединения 2: $f_{r\oplus t} = \{v_1, u_2\}$, $g_{r\oplus t} = \{v_2, u_1\}$

Рис. 1. Варианты соединения циклов

Затем найденная пара циклов заменяется объединенным циклом с максимальной стоимостью. Алгоритм завершает работу, когда текущий 2-фактор содержит один цикл.

Формально CMA для задачи MAX TSP может быть записан следующим образом.

Алгоритм соединения циклов

Вход: полный граф $G = (V, E)$,

весовая функция $W{:}\, E \to R$.

Выход: гамильтонов цикл максимального веса.

Шаг 1. Найти 2-фактор $C = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ максимального веса в графе G.

Шаг 2. Если $n = 1$, то вернуть C — найденное решение. Переход на Шаг 5.

Шаг 3. Для всех попарно различных циклов $r, t \in C$ найти замену ребер, обеспечивающую оптимальное соединение циклов, и стоимость этого соединения.

$$\begin{pmatrix} e^r_{\{r\oplus t\}} \\ e^t_{\{r\oplus t\}} \\ f_{\{r\oplus t\}} \\ g_{\{r\oplus t\}} \end{pmatrix} = \arg \max_{\substack{e^r=\{u_1,u_2\}\in E(c_r) \\ e^t=\{u_1,u_2\}\in E(c_t) \\ f,g\in E(G):\, f\cup g = e^r \cup e^t}} [W(f) + W(g) - W(e^r) - W(e^t)], \tag{1}$$

$$\widetilde{W}(r\oplus t) = W\big(f_{r\oplus t}\big) + W\big(g_{r\oplus t}\big) - W\big(e^r_{r\oplus t}\big) - W\big(e^t_{r\oplus t}\big). \tag{2}$$

Шаг 4. Пока $n > 1$, выполнять шаги 4.1–4.4.

Шаг 4.1. Пусть

$$(r^*, t^*) = \arg\max_{r,t \in C} \widetilde{W}(r \oplus t). \tag{3}$$

Шаг 4.2. Построить цикл

$$\begin{aligned} &s = r^* \oplus t^* \colon V(s) = V(r^*) \cup V(t^*), \\ &E(s) = \big(E(r^*) \cup E(t^*) \cup \{f_{r\oplus t}, g_{r\oplus t}\}\big) \backslash \{e^r_{\{r\oplus t\}}, e^t_{\{r\oplus t\}}\}. \end{aligned} \tag{4}$$

Шаг 4.3. Модифицировать 2-фактор

$$C = (C \cup \{s\}) \backslash \{r, t\};\ n := n - 1. \tag{5}$$

Шаг 4.4. Для всех $t \in C \colon t \neq s$ найти замену ребер, обеспечивающую оптимальное соединение циклов t и s, и стоимость этого соединения:

$$\begin{pmatrix} e^r_{\{r\oplus t\}} \\ e^t_{\{r\oplus t\}} \\ f_{\{r\oplus t\}} \\ g_{\{r\oplus t\}} \end{pmatrix} = \arg \max_{\substack{e^r = \{u_1, u_2\} \in E(c_r) \\ e^t = \{u_1, u_2\} \in E(c_t) \\ f, g \in E(G) : f \cup g = e^r \cup e^t}} [W(f) + W(g) - W(e^r) - W(e^t)], \tag{6}$$

$$\widetilde{W}(r \oplus t) = W(f_{s\oplus t}) + W(g_{s\oplus t}) - W(e^s_{s\oplus t}) - W(e^t_{s\oplus t}). \tag{7}$$

Шаг 5. C — найденное решение. Останов.

3. Аналитическое исследование качества алгоритма соединения циклов для метрической задачи MAX TSP

3.1. Вычислительная сложность алгоритма соединения циклов

Теорема 1. Вычислительная сложность алгоритма CMA соединения циклов не превосходит величины $O(|V|^3)$.

Доказательство. Вычислительная сложность Шага 1 не превосходит величины $O(|V|^3)$. Вычислительная сложность Шага 2 не превосходит величины $O(1)$.

Поскольку 2-фактор неориентированного графа является объединением не более $O(|V|/3)$ циклов и содержит |V| ребер, то количество возможных замен ребер для соединения циклов не превосходит величины $O(|V|^2)$, а вычислительная сложность нахождения всех оптимальных замен, т.е. вычислительная сложность шага 3, также не превосходит величины $O(|V|^3)$.

Цикл Шага 4 выполняется не более $O(|V|/3)$ раз. Наиболее трудоемкими в теле цикла являются Шаг 4.1 и Шаг 4.4. Очевидно, что их вычислительная сложность не превосходит величины $O(|V|)$. Следовательно, вычислительная сложность Шага 4 не превосходит величины $O(|V|^2)$, а всего алгоритма соединения циклов не превосходит величины $O(|V|^3)$. Теорема доказана.

3.2. Точность алгоритма соединения циклов для метрической задачи MAX TSP

Теорема 2. Пусть W_{opt} — оптимальное значение метрической задачи MAX TSP, W_C — вес максимального 2-фактора данной задачи, W_{alg} — вес цикла, построенного алгоритмом CMA. Тогда $W_{alg}/W_{opt} \geq 5/6$. Оценка $W_{alg}/W_{opt} \geq W_{alg}/W_C = 5/6$ достижима.

Доказательство. Так как весовая функция W метрической задачи удовлетворяет неравенству треугольника

$$W\{u,v\}+W\{v,w\}\le W\{u,w\},\qquad u,v,w\in V, \tag{8}$$

то имеем:

$$W\{v_1,v_2\}\le W\{v_1,u_1\}+W\{u_1,v_2\},$$
$$W\{v_1,v_2\}\le W\{v_1,u_2\}+W\{u_2,v_2\},$$
$$W\{u_1,u_2\}\le W\{u_1,v_1\}+W\{v_1,u_2\},$$
$$W\{u_1,u_2\}\le W\{u_1,v_2\}+W\{v_2,u_2\},$$
$$v_1,v_2,u_1,u_2\in V.$$

Суммирование этих неравенств дает:

$$\begin{gathered}2\cdot(W\{v_1,v_2\}+W\{u_1,u_2\})\le 2\cdot W\{v_1,u_1\}+2\cdot W\{u_2,v_2\}+2\cdot W\{v_2,u_1\}+2\cdot W\{u_1,v_2\}\le\\ \le 4\cdot\max\{W\{v_1,u_1\}+W\{u_2,v_2\},\ W\{v_2,u_1\}+W\{u_1,v_2\}\},\qquad v_1,v_2,u_1,u_2\in V.\end{gathered} \tag{9}$$

Пусть C — 2-фактор максимального веса. Рассмотрим соединение циклов $r,t\in C$ с использованием ребер $\{v_1,v_2\}\in E(r)$, $\{u_1,u_2\}\in E(t)$ (рис. 2).

Из оптимальности 2-фактора C следует, что

$$W(e^r_{\{r\oplus t\}})+W(e^t_{\{r\oplus t\}})=W\{v_1,v_2\}+W\{u_1,u_2\}\ge W\{v_1,u_1\}+W\{u_2,v_2\}, \tag{10}$$

$$W\left(e^r_{\{r\oplus t\}}\right)+W\left(e^t_{\{r\oplus t\}}\right)=W\{v_1,v_2\}+W\{u_1,u_2\}\ge W\{v_1,u_2\}+W\{v_2,u_1\}. \tag{11}$$

Следовательно, с учетом (9) имеем

$$\begin{gathered}\frac{\left[W(e^r_{\{r\oplus t\}})+W(e^t_{\{r\oplus t\}})\right]}{2}\le\\ \le\max\{W\{v_1,u_1\}+W\{u_2,v_2\},W\{v_2,u_1\}+W\{u_1,v_2\}\}\le\left[W(f_{\{r\oplus t\}})+W(g_{\{r\oplus t\}})\right],\end{gathered} \tag{12}$$

то есть полусумма веса удаленных ребер не превосходит суммы весов введенных ребер.

Учитывая (12), получаем нижнюю оценку стоимости соединенных циклов $r,t\in C$:

$$\begin{gathered}\widetilde{W}(r\oplus t)=W(f_{r\oplus t})+W(g_{r\oplus t})-W(e^r_{r\oplus t})-W(e^t_{r\oplus t})\ge\\ -\min_{\substack{\{v_1,v_2\}\in E(r),\\ \{u_1,u_2\}\in E(t)}}\frac{W\{v_1,v_2\}+W\{u_1,u_2\}}{2}=\\ -\frac{1}{2}\left[\min_{\{v_1,v_2\}\in E(r)}W\{v_1,v_2\}+\min_{\{u_1,u_2\}\in E(t)}W\{u_1,u_2\}\right]\ge-\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{W(r)}{|r|}+\frac{W(t)}{|t|}\right].\end{gathered} \tag{13}$$

В данной цепочке первое неравенство есть следствие (12), равенство есть следствие отсутствия пересечения $r,t\in C$, последнее неравенство следует из того, что средний вес ребра в цикле не меньше минимального из весов входящих в него ребер. Следовательно,

$$\begin{gathered}\frac{W_{alg}}{W_{opt}}\ge\frac{W_{alg}}{W(C)}\ge\frac{W(C)-\sum_{c\in C}\frac{W(c)}{2\cdot|c|}}{W(C)}=1-\frac{1}{W(C)}\cdot\sum_{c\in C}\frac{W(c)}{2|c|}\ge\\ \ge 1-\frac{1}{2\cdot W(C)}\cdot\max\left\{\sum_{i=1}^{|C|}\frac{y_i}{x_i}\ \middle|\ \begin{array}{l}\sum_{i=1}^{|C|}y_i=W(C),\\ \sum_{i=1}^{|C|}x_i=|V|,\\ x,y\ge 0\end{array}\right\}=1-\frac{|C|}{2\cdot|V|}\ge\frac{5}{6}.\end{gathered} \tag{14}$$

Первое неравенство является следствием $W_{opt} \leq W(C)$. Второе неравенство является следствием (1)–(5) и (13). В третьем неравенстве сумма средних значений весов ребер из элементов 2-фактора C заменена численной задачей на максимум с допустимым множеством, включающим средние значения весов ребер из каждого элемента 2-фактора C.

Оптимальное решение полученной задачи равно $x_i = |V|/|C|$, $y_i = W(C)/|C|$, $i = 1,2,\ldots,|C|$, оптимальное значение равно $(W(C) \cdot |C|)/|V|$. Равенство очевидно. Четвертое неравенство является следствием неравенства $|C| \leq |V|/3$.

Для доказательства достижимости оценки рассмотрим граф G, приведенный на рис. 2.

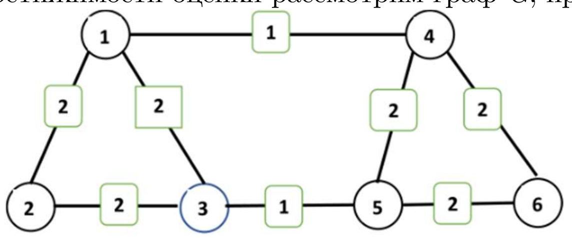


Рис. 2. Пример графа для доказательства достижимости оценки $W_{alg}/W_C = 5/6$

Чтобы не загромождать рисунок, изображены только ребра с ненулевым весом. Оптимальным решением задачи MAX TSP для данного графа является гамильтонов цикл H={1→2→3→5→6→4→1}. Его вес W_{opt} = 2+2+1+2+2+1=10. 2-фактор максимального веса содержит циклы C_1={1→2→3→1} и C_2={4→5→6→4}. Его вес $W(C)$= 2+2+2+2+2+2=12. В результате объединения циклов C_1 и C_2 имеем $C_1 \oplus C_2 = H$. Таким образом, в рассматриваемом примере $W_{alg}/W_{opt} > W_{alg}/W_C = 5/6$.
Теорема доказана.

4. Эмпирическое исследование алгоритма соединения циклов для метрической задачи коммивояжера на максимум

Для проверки полученных теоретических результатов алгоритм соединения циклов для решения задачи коммивояжера на максимум был протестирован на случайно сгенерированных матрицах стоимостей с евклидовой метрикой. Количество вершин n варьируется от 100 до 3000 с шагом 100. Для $100 < n < 1000$ все результаты являются средними по 10 испытаниям каждое, а для $1000 < n < 3000$ результаты являются средними по трем испытаниям каждое.

Такая схема тестирования применяется в известных работах [18, 19] для анализа качества работы алгоритмов решения задачи коммивояжера.

Так как уже для большинства задач с числом городов n>13 невозможно получить точное решение за приемлемое время [20], то в качестве оценки относительной погрешности использовано отношение разности верхней оценки и полученного значения к полученному значению. В качестве верхней оценки принимается сумма весов ребер, полученная на первой итерации цикла. Даже при такой грубой оценке результаты эксперимента (см. табл. 1) показывают, что при небольшом числе вершин среднее значение оценки относительной погрешности составляет менее 0.1 доли процента. С ростом числа вершин точность алгоритма быстро растет.

Полученные эмпирические результаты для метрической MAX TSP значительно превосходят теоретическую оценку точности. Проведенное исследование дает основание выдвинуть гипотезу об асимптотической точности алгоритма CMA на классе метрических задач коммивояжера на максимум.

Таблица 1. Данные об эмпирической оценке относительной погрешности

Число вершин	Оценка точности $\frac{W_{alg}}{W_{opt}}$	Число вершин	Оценка точности $\frac{W_{alg}}{W_{opt}}$
100	0.9990217	**1600**	0.9999727
200	0.9995204	**1700**	0.9999747
300	0.9997492	**1800**	0.9999738
400	0.9997926	**1900**	0.9999752
500	0.9998432	**2000**	0.9999790
600	0.9998711	**2100**	0.9999810
700	0.9998988	**2200**	0.9999801
800	0.9999048	**2300**	0.9999833
900	0.9999343	**2400**	0.9999809
1000	0.9999340	**2500**	0.9999830
1100	0.9999506	**2600**	0.9999867
1200	0.9999594	**2700**	0.9999846
1300	0.9999593	**2800**	0.9999855
1400	0.9999691	**2900**	0.9999860
1500	0.9999753	**3000**	0.9999862

Заключение

Предложенный в данной работе алгоритм соединения циклов для метрической задачи коммивояжера на максимум, заключается в нахождении 2-фактора максимального веса и последующем соединении входящих в него циклов в гамильтонов цикл. Проведенное аналитическое и эмпирическое исследование алгоритма соединения циклов для приближенного решения задачи коммивояжера на максимум подтверждают справедливость доказанных в работе теорем.

Предложенный алгоритм имеет вычислительную сложность $O(|V|^3)$, как в алгоритме Панюкова—Тычинина, однако, его точность $W_{alg}/W_{opt} \geq 5/6$ аналогична точности алгоритма Косточки—Сердюкова, лучшего из известных на сегодняшний день детерминированных приближенных алгоритмов для метрической задачи MAX TSP, который имеет сложность $O(|V|^4)$. Таким образом, предложенный алгоритм имеет более высокие качественные характеристики.

Проведенное исследование дает основание выдвинуть гипотезу об асимптотической точности алгоритма соединения циклов на классе метрических задач MAX TSP. Полное статистическое исследование данной гипотезы представляет предмет отдельной статьи.

Литература

1. Tong W., Goebel R., Liu T., Lin G. Approximation algorithms for the maximum multiple RNA interaction problem //International Conference on Combinatorial Optimization and Applications, Chengdu, China, December 12–14, 2013. Springer, Cham, 2013. P. 49–59. DOI: 10.1007/978-3-319-03780-6_5.

2. Sichen Z., Zhao L., Liang Y. *et al.* Optimizing read reversals for sequence compression // International Workshop on Algorithms in Bioinformatics, Atlanta, GA, USA, September 10–12, 2015. Springer, Berlin, Heidelberg, 2015. P. 189–202. DOI: 10.1007/978-3-662-48221-6_14.
3. Hassin R., Rubinstein S. An approximation algorithm for maximum triangle packing // Discrete applied mathematics. 2006. Vol. 154, no. 6. P. 971–979. DOI: 10.1016/j.dam.2005.11.003.
4. Chen Z.Z., Wang L. An improved approximation algorithm for the bandpass-2 problem // International Conference on Combinatorial Optimization and Applications, Banff, AB, Canada, August 5–9, 2012. Springer, Berlin, Heidelberg, 2012. P. 188–199. DOI: 10.1007/978-3-642-31770-5_17.
5. Харари Ф. Теория графов. Глава 9. Факторизация. М.: Едиториал УРСС, 2003. 296 с.
6. Barvinok A.I., Johnson D.S., Woeginger G.J., Woodroofe R. Finding maximum length tours under polyhedral norms // Proceedings of IPCO VI, Lecture Notes in Computer Science, Houston, Texas, June 22–24, 1998. 1998. Vol. 1412. P. 195–201. DOI: 10.1007/3-540-69346-7_15.
7. Fisher M.L., Nemhauser G.L., Wolsey L.A. An analysis of approximations for finding a maximum weight Hamiltonian circuit // Operations Research. 1979. Vol. 27, no. 4. P. 799–809. DOI: 10.1287/opre.27.4.799.
8. Kosaraju S.R., Park J.K., Stein C. Long tours and short superstrings // Proceedings 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science, Santa Fe, New Mexico, November 20–22, 1994. IEEE, 1994. P. 166–177. DOI: 10.1109/sfcs.1994.365696.
9. Hassin R., Rubinstein S. An approximation algorithm for the maximum traveling salesman problem // Information Processing Letters. 1998. Vol. 67, no. 3. P. 125–130. DOI: 10.1016/s0020-0190(98)00102-1.
10. Сердюков А.И. Алгоритм с оценкой для задачи коммивояжера на максимум // Дискретный анализ и исследование операций. 1984. № 25. С. 80–86.
11. Панюков А.В., Тычинин С.А. Применение дополнений паросочетаниями для решения задачи MAX TSP // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. 2008. № 15 (115). С. 54–63.
12. Hassin R., Rubinstein S. Better approximations for MAX TSP // Information Processing Letters. 2000. Vol. 75, no. 4. P. 181–186. DOI: 10.1016/s0020-0190(00)00097-1.
13. Chen Z.Z., Okamoto Y., Wang L. Improved deterministic approximation algorithms for MAX TSP // Information Processing Letters. 2005. Vol. 95, no. 2. P. 333–342. DOI: 10.1016/j.ipl.2005.03.011.
14. Paluch K., Mucha M., Madry A. A 7/9-approximation algorithm for the maximum traveling salesman problem // Approximation, Randomization, and Combinatorial Optimization. Algorithms and Techniques, Berkeley, CA, USA, August 21–23, 2009. Springer, Berlin, Heidelberg, 2009. P. 298–311. DOI: 10.1007/978-3-642-03685-9_23.
15. Dudycz S., Marcinkowski J., Paluch K., Rybicki B. A 4/5-approximation algorithm for the maximum traveling salesman problem // International Conference on Integer Programming and Combinatorial Optimization, Waterloo, ON, Canada, June 26–28, 2017. Springer, Cham, 2017. P. 173–185. DOI: 10.1007/978-3-319-59250-3_15.
16. Косточка А.В., Сердюков А.И. Полиномиальные алгоритмы с оценками 3/4 и 5/6 для задачи коммивояжера на максимум // Управляемые системы. 1985. № 26. С. 55–59

17. Hassin R., Rubinstein S. A 7/8-approximation algorithm for metric MAX TSP // Information processing letters. 2002. Vol. 81, no. 5. P. 247–251. DOI: 10.1016/s0020-0190(01)00234-4.
18. Glover F., Gutin G., Yeo A., Zverovich A. Construction heuristics for the asymmetric TSP // European Journal of Operational Research. 2001. Vol. 129, no. 3. P. 555–568. DOI: 10.1016/s0377-2217(99)00468-3.
19. Goldengorin B., Jäger G., Molitor P. Tolerance based contract-or-patch heuristic for the asymmetric TSP // Workshop on Combinatorial and Algorithmic Aspects of Networking, Chester, UK, July 2, 2006. Springer, Berlin, Heidelberg, 2006. P. 86–97. DOI: 10.1007/11922377_8.
20. Кузюрин Н.Н., Фомин С.А. Эффективные алгоритмы и сложность вычислений : учебное пособие. Москва: МФТИ, 2007. 311 с.

Панюков Анатолий Васильевич, д.ф.-м.н., профессор, кафедра системного программирования, Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет) (Челябинск, Российская Федерация)

Леонова Юлия Федоровна, аспирант, кафедра системного программирования, Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет) (Челябинск, Российская Федерация)

DOI: 10.14529/cmse210402

CYCLES MERGING ALGORITHM FOR METRIC MAXIMUM TRAVELING SALESMAN PROBLEM

South Ural State University (pr. Lenina 76, Chelyabinsk, 454080 Russia)
E-mail: paniukovav@susu.ac.ru, yuliya.igosheva@gmail.com

Received: 22.03.2021

The traveling salesman problem is an important combinatorial optimization problem that involves finding the optimal path between given vertices. The maximum traveling salesman problem has several practical applications, for example, when compressing arbitrary data and analyzing DNA sequences. Even though maximum traveling salesman problem is less developed than minimum traveling salesman problem, there are effective approximate algorithms for solving this problem. The article presents estimates of the accuracy of the best algorithms for the approximate solution of the metric maximum traveling salesman problem. The paper proposes a new algorithm for the approximate solution of the traveling salesman problem to the maximum, consisting of finding the 2-factor of the extreme weight in each graph, and then applying the operation of the optimal connection of cycles into one Hamiltonian cycle. The computational complexity of the algorithm does not exceed $O(|V|^3)$. We present a proof of the theorem that for the metric traveling salesman problem, the maximum accuracy of the algorithm is at least 5/6. The quality of the algorithm has been tested on randomly generated cost matrices with the Euclidean metric. An analytical and numerical study of the algorithm for combining cycles has allowed us to move the hypothesis about the asymptotic accuracy of the algorithm on the class of metric traveling salesman problems to the maximum.

Keywords: algorithm, asymptotic accuracy, computational complexity, computational experiment, traveling salesman problem.

FOR CITATION

Panyukov A.V., Leonova Yu.F. Cycles Merging Algorithm for Metric Maximum Traveling Salesman Problem. Bulletin of the South Ural State University. Series: Computational Mathematics and Software Engineering. 2021. Vol. 10, no. 4. P. 26–36. (in Russian) DOI: 10.14529/cmse210402.

References

1. Tong W., Goebel R., Liu T., Lin G. Approximation algorithms for the maximum multiple RNA interaction problem. International Conference on Combinatorial Optimization and Applications, Chengdu, China, December 12–14, 2013. Springer, Cham, 2013. P. 49–59. DOI: 10.1007/978-3-319-03780-6_5.
2. Sichen Z., Zhao L., Liang Y. *et al.* Optimizing read reversals for sequence compression. International Workshop on Algorithms in Bioinformatics, Atlanta, GA, USA, September 10–12, 2015. Springer, Berlin, Heidelberg, 2015. P. 189–202. DOI: 10.1007/978-3-662-48221-6_14.
3. Hassin R., Rubinstein S. An approximation algorithm for maximum triangle packing. Discrete applied mathematics. 2006. Vol. 154, no. 6. P. 971–979. DOI: 10.1016/j.dam.2005.11.003.
4. Chen Z.Z., Wang L. An improved approximation algorithm for the bandpass-2 problem. International Conference on Combinatorial Optimization and Applications, Banff, AB, Canada, August 5–9, 2012. Springer, Berlin, Heidelberg, 2012. P. 188–199. DOI: 10.1007/978-3-642-31770-5_17.
5. Harari F. Graph Theory. Chapter 9. Factorization. Moscow: Editorial URSS, 2003. 296 p. (in Russian)
6. Barvinok A.I., Johnson D.S., Woeginger G.J., Woodroofe R. Finding maximum length tours under polyhedral norms. Proceedings of IPCO VI, Lecture Notes in Computer Science, Houston, Texas, June 22–24, 1998. 1998. Vol. 1412. P. 195–201. DOI: 10.1007/3-540-69346-7_15.
7. Fisher M.L., Nemhauser G.L., Wolsey L.A. An analysis of approximations for finding a maximum weight Hamiltonian circuit. Operations Research. 1979. Vol. 27, no. 4. P. 799–809. DOI: 10.1287/opre.27.4.799.
8. Kosaraju S.R., Park J.K., Stein C. Long tours and short superstrings. Proceedings 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science, Santa Fe, New Mexico, November 20–22, 1994. IEEE, 1994. P. 166–177. DOI: 10.1109/sfcs.1994.365696.
9. Hassin R., Rubinstein S. An approximation algorithm for the maximum traveling salesman problem. Information Processing Letters. 1998. Vol. 67, no. 3. P. 125–130. DOI: 10.1016/s0020-0190(98)00102-1.
10. Serdyukov A.I. An algorithm with an estimate for the traveling salesman problem for a maximum. Discrete analysis and operations research. 1984. No. 25. P. 80–86. (in Russian)
11. Panyukov A.V., Tychinin S.A. The use of matching additions for solving MAX TSP. Bulletin of South Ural State University. Series: Mathematical modeling and programming. 2008. No. 15(115). P. 54–63. (in Russian)
12. Hassin R., Rubinstein S. Better approximations for MAX TSP. Information Processing Letters. 2000. Vol. 75, no. 4. P. 181–186. DOI: 10.1016/s0020-0190(00)00097-1.
13. Chen Z.Z., Okamoto Y., Wang L. Improved deterministic approximation algorithms for MAX TSP. Information Processing Letters. 2005. Vol. 95, no. 2. P. 333–342. DOI: 10.1016/j.ipl.2005.03.011.

14. Paluch K., Mucha M., Madry A. A 7/9-approximation algorithm for the maximum traveling salesman problem. Approximation, Randomization, and Combinatorial Optimization. Algorithms and Techniques, Berkeley, CA, USA, August 21–23, 2009. Springer, Berlin, Heidelberg, 2009. P. 298–311. DOI: 10.1007/978-3-642-03685-9_23.
15. Dudycz S., Marcinkowski J., Paluch K., Rybicki B. A 4/5-approximation algorithm for the maximum traveling salesman problem. International Conference on Integer Programming and Combinatorial Optimization, Waterloo, ON, Canada, June 26–28, 2017. Springer, Cham, 2017. P. 173–185. DOI: 10.1007/978-3-319-59250-3_15.
16. Kostochka A.V., Serdyukov A.I. Polynomial algorithms with the estimates 3/4 and 5/6 for the Traveling Salesman Problem of the maximum. Managed systems. 1985. No. 26. P. 55–59. (in Russian)
17. Hassin R., Rubinstein S. A 7/8-approximation algorithm for metric MAX TSP. Information processing letters. 2002. Vol. 81, no. 5. P. 247–251. DOI: 10.1016/s0020-0190(01)00234-4.
18. Glover F., Gutin G., Yeo A., Zverovich A. Construction heuristics for the asymmetric TSP. European Journal of Operational Research. 2001. Vol. 129, no. 3. P. 555–568. DOI: 10.1016/s0377-2217(99)00468-3.
19. Goldengorin B., Jäger G., Molitor P. Tolerance based contract-or-patch heuristic for the asymmetric TSP. Workshop on Combinatorial and Algorithmic Aspects of Networking, Chester, UK, July 2, 2006. Springer, Berlin, Heidelberg, 2006. P. 86–97. DOI: 10.1007/11922377_8.
20. Kuzyurin N.N., Fomin S.A. Efficient algorithms and computational complexity: a tutorial. Moscow: MIPT, 2007. 311 p. (in Russian)