

Tesis Doctoral

Dinámica de un láser de Ti: Zafiro de femtosegundos

Kovalsky, Marcelo G.

2004

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Físicas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the Master's and Doctoral Theses Collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:

Kovalsky, Marcelo G.. (2004). Dinámica de un láser de Ti: Zafiro de femtosegundos. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.
http://hdl.handle.net/20.500.12110/tesis_n3704_Kovalsky

Cita tipo Chicago:

Kovalsky, Marcelo G.. "Dinámica de un láser de Ti: Zafiro de femtosegundos". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 2004.
http://hdl.handle.net/20.500.12110/tesis_n3704_Kovalsky

EXACTAS UBA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales



UBA

Universidad de Buenos Aires

Dinámica de un láser de Ti:Zafiro de femtosegundos

Marcelo G. Kovalsky

Trabajo de Tesis para optar por el título de Doctor de
la Universidad de Buenos Aires

Director de Tesis: Dr. Alejandro A. Hnilo

Lugar de Trabajo: Centro de Investigaciones en Láseres y Aplicaciones
(CEILAP) - CITEFA - CONICET - UNSAM

№3704

Universidad de Buenos Aires

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Física

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Física

Dinámica de un láser de Ti:Zafiro de femtosegundos

por *Marcelo Gregorio Kovalsky*

Director de Tesis: Dr. Alejandro Andrés Hnilo

Lugar de Trabajo: Centro de Investigación en Láseres y Aplicaciones
(CEILAP), CITEFA - CONICET- UNSAM

Trabajo de Tesis para optar por el título de Doctor de la Universidad de Buenos Aires

2 de Febrero de 2004

El láser de Ti:Zafiro es la fuente más difundida de pulsos ultracortos en la actualidad. No obstante, y pese a su amplia difusión en vastos campos de aplicaciones, numerosos aspectos de su comportamiento permanecían poco explorados. El presente trabajo está dirigido a un estudio exhaustivo de la dinámica del láser de Ti:Zafiro con mode locking por efecto Kerr. Por un lado se desarrolla un modelo teórico basado en mapas iterativos. Los modos de operación conocidos del láser son naturalmente obtenidos con el mapa que tiene como variables el tamaño del haz, curvatura, duración de pulso, chirp y energía. Se obtienen las regiones de estabilidad de cada modo y se determinan sus comportamientos característicos. Por otro lado se determinan experimentalmente las propiedades estructuralmente estables predichas por el modelo, encontrando pleno acuerdo entre la experiencia y el modelo de mapas.

Se muestra experimentalmente que las inestabilidades pulso a pulso en la salida del láser son usuales y pueden afectar alguna de las variables dejando inalteradas las otras. Se describe una forma simple de detectarlas y eliminarlas.

A partir de la obtención experimental de series temporales de mode locking de los dos modos pulsados del láser se confirma que el comportamiento del láser responde al caos determinístico de baja dimensión y se determina, para cada modo, su ruta al caos. De las series temporales generadas por el mapa se obtienen los mismos atractores que los hallados experimentalmente.

Como aplicación de los conocimientos generados se propone un algoritmo de control del caos que permite optimizar las prestaciones del láser, reduciendo la duración de pulso a valores cercanos a los 10fs.

PALABRAS CLAVE: Láseres de Ti:Zafiro, Kerr lens mode locking, Pulsos ultracortos, Bifurcaciones y caos, Dinámica no lineal.

Dynamics of a femtosecond Ti:Sapphire laser

Abstract

The Ti:Sapphire laser is the most widely used source of femtosecond pulses. However, and in spite of its applications in many fields of science, several of its dynamical properties remain poorly known. In this work an exhaustive study of the dynamics of the Kerr - lens mode locked Ti:Sapphire laser is presented. On the one hand, a theoretical model based on iterative maps is developed. The observed modes of operation are naturally obtained from a description based on an iterative map of five pulse variables, beam size, curvature, pulse duration, chirp and energy. The stability regions for each mode are obtained as well as its characteristic behaviors. On the other hand, the structurally stable properties of the system are experimentally found, observing a good agreement between the experiment and the model.

It is experimentally shown that pulse to pulse instabilities in the output of the laser are usual and they can affect some of the pulse variables and not others. A simple way to detect and eliminate the instabilities is described.

Experimental time series of the two pulsed model are obtained. From this series the chaotic low dimensional deterministic behavior is confirmed and the route to chaos in each case is established. The same attractors are obtained from the simulated series.

As an application of the model, an algorithm of control of chaos that allows reach shorter pulse duration, close to 10 fs, is presented.

KEYWORDS: Ti:Sapphire lasers, Kerr lens mode locking, Ultrashort pulses, Bifurcations and chaos, Nonlinear dynamics.

Si bien una Tesis lleva un solo un nombre propio como autor, no es menos cierto que el trabajo difícilmente llegue a buen puerto si no cuenta con la colaboración y el apoyo de un grupo de personas. Sirvan estas líneas para expresar mi gratitud hacia ellas.

A las autoridades del Instituto, por intermedio del Director de nuestro Centro, el Dr. Eduardo J. Quel, por permitirme trabajar en el laboratorio.

A todo el personal del CEILAP por brindarme su colaboración cada vez que fue necesario. Es un placer trabajar en un ambiente tan agradable.

A toda la gente del LEC, quienes me abrieron las puertas de su laboratorio y me facilitaron el acceso al Ti:Zafiro. Gracias Ariel por las largas horas dedicadas a transmitirme el arte de alinear el láser y colaborar en tantas mediciones.

A Mario, por los consejos, su fina ironía y la gran ayuda que, generoso, brindó en todo momento.

A mis compañeros de trabajo: Richi, Laura, David, Damián, Ana, Leandro, Mónica y Mariana.

A Francis, por el osciloscopio . Y la confianza.

A Piero, por ser una fuente inagotable de sabios consejos de amplio espectro, por su bondad a toda prueba y por ser el anfitrión de esas ya míticas rondas de mate de donde salieron, mas de una vez, aportes a esta Tesis (un verdadero brainstorming de las Pampas).

Finalmente, gracias Alejandro. Gracias por hacer y dejar hacer, por esa absoluta libertad que en ningún momento confundí con desinterés. Gracias por las ideas y el estímulo, y por estar cuando había que estar.

Contenidos

Capítulo 1 Introducción

- 1.1 El Ti:Zafiro . Propiedades del material, **2**
- 1.2 Técnicas de mode locking, **3**
 - 1.2.1 Mode locking por efecto Kerr, **3**
 - 1.2.2 Mode locking con absorbentes saturables, **7**
- 1.3 KLM para la generación de pulsos ultracortos, **7**
- 1.4 Generación de femtosegundos a partir de láseres sólidos, **9**
 - 1.4.1 Pr: YLF, femtosegundos en el visible, **10**
 - 1.4.2 Láseres basados en Neodimio, **10**
 - 1.4.3 Láseres basados en Cromo, **12**

Capítulo 2 Construcción del mapa iterativo

- 2.1 Matrices ABCD, **16**
 - 2.1.1 Nolinealidades, **17**
 - 2.1.2 Ecuaciones del mapa, **20**
- 2.2 Puntos fijos y su estabilidad, **21**
- 2.3 Reducción del mapa para la bifurcación tipo 2A, **28**
 - 2.3.1 Ecuación unidimensional para la variable S, **28**
 - 2.3.2 Expansión del mapa a primer orden en las nolinealidades, **29**
 - 2.3.3 Ruta al caos del mapa unidimensional, **30**
- 2.4 Relación duración de pulso - GVD, propiedad estructuralmente estable, **32**

Capítulo 3 Resultados experimentales

- 3.1 El láser de Ti:Zafiro, **35**
- 3.2 Detección de inestabilidades pulso a pulso, **38**
- 3.3 Determinación de la biestabilidad, **41**
- 3.4 Duración de pulso en función de la GVD para cada modo, **43**
- 3.5 Comportamiento de los modos pulsados, **44**
- 3.6 Obtención de las series temporales, **46**

Capítulo 4 Herramientas de dinámica no lineal

- 4.1 Observando el caos, **53**
- 4.2 Reconstrucción del espacio de fase, **53**
- 4.3 Información mutua, **56**
- 4.4 Dimensión de embedding y concepto de falsos vecinos, **57**
- 4.5 Caos como fuente de información, **58**
 - 4.5.1 Exponentes de Lyapunov, **58**
 - 4.5.2 Dimensiones, **60**
 - 4.5.3 Dimensión de Hausdorff, **60**
 - 4.5.4 Dimensiones generalizadas, dimensión de correlación, **61**

Capítulo 5 Análisis de las series temporales

- 5.1 Método de falsos vecinos, 64**
 - 5.1.1 Determinación del nivel de ruido, 64**
- 5.2 Caracterización del atractor, 65**
 - 5.2.1 Datos sustituidos, 66**
 - 5.2.2 Dimensión de embedding, 67**
 - 5.2.3 Del mode locking estable al caos, 71**
 - 5.2.4 Dimensión fractal, 73**
- 5.3 Determinación de las rutas al caos, 76**

Capítulo 6 Aplicación del modelo al control del caos

- 6.1 El método OGY, 91**
 - 6.1.1 Dinámica pico a pico, 92**
- 6.2 Diseño del sistema de control, 93**
 - 6.2.1 Control a través de la estabilización de las órbitas periódicas, 94**
- 6.3 Realización sobre el Ti:Zafiro, 96**

Conclusiones, 101

Apéndices

- I-1 Aplicaciones de los femtosegundos, 106**
- II-1 Expresión para las no linealidades, 111**
- II-2 Ecuaciones del mapa, 114**
- II-3 Ecuación del mapa para la variable S de dimensión 1, 118**
- II-4 Punto fijo para la ecuación de la energía, 121**
- III-1 Parámetros del láser de Ti:Zafiro, 122**
- III-2 Autocorrelación como técnica de medición de la duración del pulso, 125**
- IV-1 Dimensión de embedding, 128**
- IV-2 Entropía de Kolmogorov, 129**
- V-1 Método de los falsos vecinos, 130**
- VI-1 Algoritmo de control empleando δ , 132**

Referencias, 134

Índice, 144

Palabras Iniciales

Los Capítulos que siguen resumen mi trabajo realizado durante los últimos cuatro años y medio, y que conforman esta Tesis de Doctorado. La pretensión al inicio era, en definitiva, desentrañar los comportamientos característicos del láser de Ti:Zafiro con mode locking por efecto Kerr. La Tesis se sostiene con dos pilares básicos: un modelo de mapa iterativo de cinco variables y un conjunto de mediciones realizadas sobre el láser. De la construcción, utilización e interacción de estos dos elementos se deriva todo el trabajo.

No soy, el lector lo comprobará a poco de adentrarse en el texto, un eximio escritor. Por otra parte, convengamos, la materia no se presta para demasiados lucimientos dialécticos. Esta combinación hace que el texto adopte, en determinados (anhelo que en pocos) pasajes, la forma de un pesado y somnífero ladrillo. Fue mi sincera intención, y principal objetivo al componer estos Capítulos, ser lo más prístino posible, evitar el abuso de jerga y sobreentendidos. Sin embargo, para lograrlo cabalmente hubiera tenido que incluir demasiada información básica, haciendo al ladrillo mas pesado y duro aún. Así por ejemplo, en el Capítulo 1, *Introducción*, donde presento al láser de Ti:Zafiro, y lo pongo en el contexto de las demás fuentes de femtosegundos, no abundo en los principios del mode locking pasivo, que, descuento, domina el lector. En cambio, ciertas nociones de dinámica no lineal, imprescindibles en el Capítulo 5, *Análisis de las series temporales*, dieron forma al Capítulo 4, *Herramientas de dinámica no lineal*. De todos modos no busque nadie allí un curso condensado de dinámica no lineal. Debe verse como una presentación y definición de términos a los que se hará referencia en el Capítulo posterior. Sí será de gran utilidad para quien quiera profundizar el tema, aventurarse en las referencias del Capítulo 4. Los Capítulos 2, 3 y 5 son el núcleo de la Tesis. El Capítulo 2 *Construcción del mapa iterativo*, es uno de los pilares al que refería mas arriba. El Capítulo 3, *Resultados experimentales*, es el otro, mientras que en el ya mencionado Capítulo 5 se puede ver la interacción entre ambos. El Capítulo 6, *Aplicación del modelo al control del caos*, es la frutilla del postre, donde doy forma a un algoritmo de control que permite una significativa reducción de la duración de pulso del láser.

El escrito queda entonces estructurado de la siguiente forma:

Capítulo 1, *Introducción*: es dedicado a repasar las propiedades de Ti:Zafiro como material, dar cuenta de las técnicas de mode locking pasivo más empleadas en la actualidad, Kerr lens mode locking (KLM) y absorbentes saturables semiconductores (SESAM) y reseñar los diversos láseres sólidos capaces de entregar femtosegundos. Derivé al apéndice correspondiente a este Capítulo un resumen de las aplicaciones de los femtosegundos en áreas como las comunicaciones, la espectroscopía y la interacción de los pulsos ultracortos con la materia. Siguiendo las referencias de este Capítulo y su apéndice, los interesados podrán profundizar sobre los tópicos mencionados

Capítulo 2, *Construcción del mapa iterativo*: describe las matrices ABCD y las formas de las no linealidades espacial y temporal que dan forma al mapa iterativo, calcula puntos fijos y regiones de estabilidad; caracteriza los tipos de bifurcaciones y se dedica a obtener un mapa reducido de menor dimensión y analizar su camino al caos.

Capítulo 3, *Resultados experimentales*: se dedica a describir mediciones realizadas sobre el láser y las formas en que fueron obtenidas. Así aborda la detección de inestabilidades ocultas, del comportamiento biestable, relación de duración de pulsos para los dos modos y obtención de las series temporales.

Capítulo 4, *Herramientas de dinámica no lineal* : resume conceptos básicos como reconstrucción del espacio de fase, información mutua, dimensión de embedding y falsos vecinos. Luego refiere al caos como fuente de información para finalizar con una breve presentación de los exponentes de Lyapunov y las dimensiones generalizadas.

Capítulo 5, *Análisis de las series temporales*: aplica los conceptos del Capítulo anterior a las series temporales halladas en el Capítulo 3 y a las generadas con el mapa de 5 dimensiones. Determina el nivel de ruido de las series, caracteriza los atractores de cada uno de los modos pulsados y establece su dimensión de embedding para, finalmente, describir las respectivas rutas al caos.

Capítulo 6, *Aplicación del modelo al control del caos*: aplica una variante del método OGY para la estabilización de órbitas periódicas. Diseña el sistema de control específico para el láser y define el modo de instrumentarlo.

Unas breves consideraciones, bajo el título de Conclusiones, cierran el trabajo.

1

Introducción

Esta Tesis, teórica – experimental, busca comprender los comportamientos de los distintos modos pulsados de un láser de Ti:Zafiro con mode locking por efecto Kerr. Para lograr este objetivo desarrollaremos un modelo basado en mapas iterativos. Durante la construcción de este mapa buscaremos el delicado equilibrio necesario para arribar a un conjunto de ecuaciones que sea suficientemente sencillo para su manipulación analítica así como para facilitar las simulaciones numéricas sin perder por ello la riqueza que permita reproducir la enorme variedad de propiedades observadas en el láser. El modelo, entonces, nos permitirá, por un lado, predecir comportamientos y propiedades características del láser, que posteriormente iremos a buscar sobre el Ti:Zafiro; y por otro, explicar con él los hallazgos experimentales. A fin de registrar las variaciones pulso a pulso de los observables del láser deberemos, además, desarrollar diversas técnicas de medición y procesamiento de los datos.

Este Trabajo clasifica sistemáticamente los comportamientos observados en el láser de Ti:Zafiro; estudia, también, cada uno de los modos de operación de mode locking estable, estableciendo sus límites en el espacio de parámetros. Predice, y encuentra, propiedades características de los modos que son independientes de las condiciones iniciales o de la geometría de la cavidad, es decir estructuralmente estables. Determina, de una manera fehaciente, analizando series temporales de trenes de pulsos, la forma en que los modos pierden estabilidad. Haciendo uso de herramientas de dinámica no lineal determina que el Ti:Zafiro se comporta como un sistema caótico de baja dimensión. Para cada modo pulsado describe su ruta al caos.

No obstante, antes de desplegar el trabajo realizado creo necesario brindar al lector un marco amplio, sobre el cual poder ubicar al láser de Ti:Zafiro y que permita comprender las raíces de la complejidad de su dinámica. Me propongo poner en contexto el rol del

efecto Kerr en la generación de pulsos ultracortos y dar una idea sobre la forma en que actualmente es posible generarlos mas allá del Ti:Zafiro.

Así, en lo que sigue veremos las propiedades básicas del Ti:Zafiro, mencionaremos las dos formas dominantes de generación de pulsos ultracortos en la actualidad, el mode – locking por efecto Kerr (KLM) y la técnica que emplea absorbentes saturables crecidos sobre semiconductores (SESAM). Prestaremos particular interés al efecto Kerr en la formación de los pulsos ultracortos para finalmente detenernos en la descripción de distintos láseres sólidos capaces de generarlos.

1.1 El Ti:Zafiro. Propiedades del material

El láser de Ti:Zafiro fue reportado por primera vez por P. F. Moulton [1-1]¹. Ha cobrado, desde entonces, creciente popularidad en un sinnúmero de aplicaciones. El Ti:Zafiro combina un ancho rango sobre el cual es sintonizable, de alrededor de 400 nm, con una sección de ganancia amplia. La estructura de niveles de energía del ion Ti^{3+} se distingue del resto de los metales de transición en que no tiene niveles de energía por sobre el nivel láser superior. Su simplicidad, una configuración $3d^1$, elimina la posibilidad de absorción de estados excitados de la radiación láser, un efecto que limita el rango sintonizable y reduce la eficiencia de otros láseres dopados con metales de transición.

En este material, un ion Al^{3+} es sustituido por un ion Ti^{3+} en Al_2O_3 . Los cristales son crecidos con el método de Czochralski y consisten de zafiro, dopado con un 0.1% de Ti^{3+} por peso. Los cristales de $Ti:Al_2O_3$ exhiben una amplia banda de absorción, localizada en la región verde-azul del espectro visible con un pico alrededor de los 490nm.

Una banda de absorción relativamente débil es observada en la región infrarroja, debida a los pares $Ti^{3+} - Ti^{4+}$. Esta absorción residual IR interfiere con la operación del láser, en especial cuando el bombeo es por lámpara flash. Más allá de sus propiedades

¹ La comunicación del autor se produjo en la *Twelfth International Quantum Electronics Conference*, Munich, en junio de 1982. Además de [1-1] aparece una comunicación en *Solid State Research Report* (Lincoln Laboratory, MIT, 1982:3), pp. 15-21. Una descripción más completa se encuentra en el capítulo "Recent advances in transition-metal-doped lasers," in *Tunable Solid State Lasers*, Springer Series in Optical Sciences, P. Hammerling, A. Budgor, y A. Pinto, eds. (Springer-Verlag, Berlin, 1985), pp. 4-10. La versión más detallada pude verse en *J.Opt.Soc.B*, 3,125, 1986.

espectroscópicas favorables, otras de las ventajas del $\text{Ti:Al}_2\text{O}_3$ provienen de las características del zafiro como material. Muy elevada conductividad térmica, lo que favorece su refrigeración, es inerte químicamente y tiene una gran rigidez mecánica.

El Ti:Zafiro ha sido bombeado, además de por lámparas flash, con láseres, principalmente el de argón. Con él era habitual obtener potencias de bombeo del orden de los 5W. Más recientemente, el advenimiento de arreglos de diodos láser de alta potencia (100W o más), permitió el desarrollo de láseres de Nd:YAG o Nd:YVO₄ (neodimio-vanadato) doblados en frecuencia, capaces de igualar, o superar, la potencia entregada por los láseres de argón. Con la confiabilidad adicional que implica un láser de estado totalmente sólido, en la actualidad la gran mayoría de los Ti:Zafiro están bombeados por YAG o vanadatos con doblado intracavidad.

1.2 Técnicas de mode locking

Los pulsos ultracortos son generados en láseres con mode - locking. Por interferencia constructiva, se forma un pulso cuando muchos modos longitudinales son puestos en fase dentro de la cavidad del láser. Diversas técnicas se emplean para lograr este objetivo, usualmente se las agrupa bajo las denominaciones de mode locking "activo" o "pasivo". Una explicación detallada del proceso de mode locking puede encontrarse en [1-2] ó [1-3]. El mode locking activo hace uso de moduladores dentro de la cavidad. Para la generación de los pulsos más cortos se emplean técnicas pasivas. Las dos que dominan actualmente el mundo de la generación de pulsos ultracortos son el mode locking por efecto Kerr y el de absorbentes saturables semiconductores.

1.2.1 Mode locking por efecto Kerr

El mecanismo de mode locking por efecto Kerr (KLM) está directamente relacionado con el autoenfoco que se produce en el cristal de Ti:Zafiro. Este efecto de lente dependiente de la intensidad lo vemos esquematizado en la figura 1.1. Un aumento en la intensidad del haz de entrada produce un angostamiento a la salida del medio activo.

Una abertura intracavidad transfiere este haz dependiente de la intensidad hacia una posterior modulación en las pérdidas de propagación. La abertura puede ser algún elemento físico, como un diafragma, en cuyo caso hablamos de *hard aperture mode locking*, o bien adecuando el modo de la cavidad de forma tal de aumentar las pérdidas para el haz de mayor tamaño. En este caso el mismo haz de bombeo determina una abertura si es que no excita en forma uniforme el material. El juego entre el modo del bombeo y el modo de la cavidad determina la presencia de *soft aperture mode locking*.

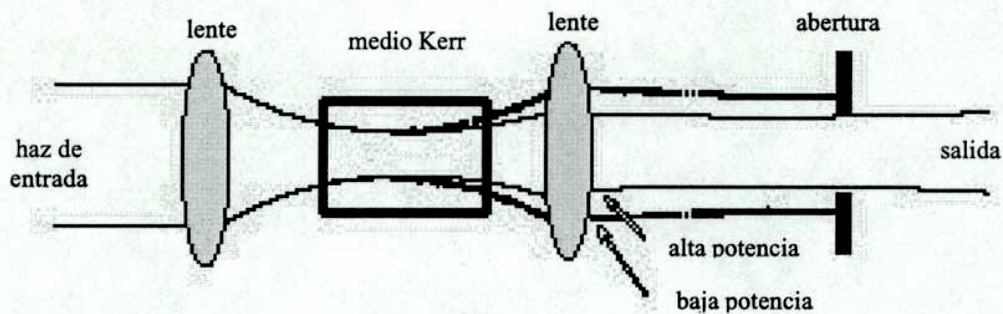


Figura 1.1: Efecto Kerr. El haz atraviesa el medio de izquierda a derecha. El medio Kerr y el medio activo no necesariamente son el mismo, como sucede en el laser de Ti:Zafiro. Por ejemplo, en el laser de Nd:YAG se introduce en la cavidad una pieza de otro material con índice de refracción no lineal alto.

Veamos que efectos produce sobre un pulso, la propagación a través de un medio Kerr. Supongamos que un haz con una intensidad moderada, I , y un perfil suave, atraviesa un medio Kerr. La mayor intensidad en el centro del haz causará un aumento en el índice de refracción visto por el centro del haz, en comparación con el índice visto por los extremos del haz. En otras palabras el medio Kerr se convirtió en una lente positiva cuya potencia depende de la intensidad del haz incidente. Si este efecto de auto enfoque es mayor que el ensanchamiento por difracción, el haz comenzará a enfocarse a medida que se propague por el medio. Este enfoque aumentará la intensidad en el centro del haz, favoreciendo aún mas la focalización del haz.

El efecto Kerr también tiene sus consecuencias en la parte temporal del pulso, produciendo lo que se conoce como auto modulación de fase o *self phase modulation*.

Supongamos que un pulso con intensidad $I(t)$ se propaga una longitud L a través de un medio Kerr, y que la intensidad del pulso es suficiente como para producir un cambio en el índice de refracción $\Delta n(t) \equiv n(t) - n_0 = n_{2I} I(t)$ y en consecuencia en el camino óptico

$\Delta n(t) L$, al menos cerca del pico del pulso. El campo del pulso sufrirá un cambio de fase, dependiente del tiempo, de la forma $\exp [i \Delta \phi(t)] = \exp [-i 2\pi \Delta n(t) L / \lambda] = \exp [-i 2\pi n_{2I} I(t) L / \lambda]$ producido por la variación de intensidad del pulso mismo. Si el coeficiente Kerr es positivo, como ocurre en la mayoría de los materiales ($n_{2I} > 0$), esta automodulación de fase representará, en efecto, una disminución en la frecuencia del pulso en su flanco creciente, dado que $dn/dt > 0$ y por lo tanto $\Delta \omega(t) = (d/dt) \Delta \phi(t) < 0$. En términos físicos, el medio es ópticamente más largo, de modo que el arribo de los ciclos ópticos se ve retardado. De modo similar habrá un incremento en la frecuencia del pulso durante el flanco decreciente. El cambio máximo de frecuencia se producirá en los puntos de máxima pendiente, es decir cuando se maximice $d I(t) / dt$. El efecto de la automodulación de fase es disminuir la frecuencia del flanco creciente y aumentar la del decreciente, produciendo lo que se conoce como chirp.

El autoenfoco y la automodulación de fase son los efectos fundamentales que se producen en el medio Kerr (que en el caso del Ti:Zafiro, coincide con el medio activo). El otro fenómeno relevante en la parte temporal es el que aparece en cualquier medio transparente, ocasionado por la variación del índice de refracción con la longitud de onda, que es particularmente importante para la generación de pulsos de femtosegundos, por su gran extensión espectral, conocido como dispersión de la velocidad de grupo. Como resultado, modos con diferentes frecuencias viajarán a distintas velocidades; por sí sólo este efecto hace que el pulso se ensanche cuando se propaga a través de un medio con dispersión positiva. Temporalmente la GVD, que se da en los materiales ópticos y la SPM, que depende de la intensidad, y que se produce mayormente en la barra de material activo, son usualmente compensados por un par de prismas que introducen dispersión negativa de la velocidad de grupo [1-4]. En el dominio espacial, la configuración de la cavidad óptica, curvatura y distancia de los espejos, la difracción y el autoenfoco -que depende de la intensidad- determinan el diámetro y la curvatura del haz. La saturación de la ganancia (que depende de la extensión espacial y espectral del pulso) determina la energía del pulso, que a su vez determina el valor de las no linealidades de autoenfoco y automodulación de fase.

La comprensión completa del mecanismo que genera el mode locking por efecto Kerr es, todavía, tema de discusión. Por un lado el efecto jugado por las aberturas dentro de la cavidad, las que actúan como absorbentes saturables rápidos, ha sido base de

numerosos modelos, y es la única forma de explicar el mode locking en láseres de ancho de banda angosto, como el Nd:YAG [1-5], donde los efectos de dispersión de la velocidad de grupo son irrelevantes y los efectos dominantes son los de abertura espacial. Por otra parte, la interacción de los fenómenos descritos en los dominios espacial y temporal son los que conforman y sostienen los pulsos, en una forma solitónica

Un solitón es en general cualquier miembro de una clase de soluciones a cierto problema de propagación no lineal, en el cual cada solución es caracterizada por una cierta amplitud o nivel de potencia y cierta forma de pulso, estando estas dos condiciones por lo general interrelacionadas; y en el cual estas soluciones pueden o bien propagarse con la misma forma de pulso por una distancia indefinida, o mostrar una oscilación periódica leve con la distancia a través de un conjunto de formas de pulso características. Dependiendo del fenómeno no lineal en particular, los solitones pueden tener diferentes formas; las velocidades de propagación y distancias para la recurrencia periódica pueden depender de la ecuación no lineal y de la amplitud del pulso.

De acuerdo a una clasificación más precisa, cualquier solución a una ecuación no lineal que se propague con un perfil definido, o que repita su perfil en forma periódica con la distancia, es conocida como una onda solitaria, pero solo aquella clase de ondas solitarias que pueden chocar o atravesarse mutuamente y recuperar su propagación solitaria sin cambios en su perfil luego de una de estas colisiones son llamados solitones.

Volviendo al modelo solitónico para el KLM, el rol de las aberturas, si bien existe en la realidad, quedaría relegado a una perturbación de segundo orden.

En el Capítulo siguiente daremos forma, mediante matrices de 2×2 , a los efectos aquí descritos. Cabe destacar, en este punto, que las matrices del modelo no tendrán elementos complejos. Físicamente esto quiere decir que los efectos de abertura son ignorados por completo en el modelo. A pesar de ello, como veremos a lo largo de la Tesis, el modelo es capaz de dar cuenta en forma muy satisfactoria de la dinámica del láser por lo cual podemos adelantar, que para láseres de gran ancho de banda, como el Ti:Zafiro, el modelo solitónico es el adecuado.

1.2.2 Mode locking con absorbentes saturables

Un absorbente saturable es un material que tiene absorción de luz decreciente con intensidades de luz crecientes. Para cierto valor de intensidad incidente, el material alcanza un máximo de transmisión (se dice que satura o que se “blanquea”). Los parámetros fundamentales en un absorbente saturable son su rango en longitud de onda, es decir en qué región espectral absorbe, su respuesta dinámica (cuán rápido recobra el estado inicial) y su intensidad de saturación, o sea a qué intensidad de pulso satura. Hasta principios de la década del '90, los absorbentes saturables eran, o bien colorantes orgánicos (con las consiguientes degradaciones, toxicidad y dificultad de manipuleo haciendo que estos sistemas sólo pudiesen operar en condiciones de laboratorio), o bien absorbentes de estado sólido, como los cristales de Cr:YAG, más cómodos y tratables pero con rangos limitados de operabilidad en longitud de onda, tiempos de recuperación y niveles de saturación. Surgen entonces los absorbentes saturables semiconductores (SESAM, *Semiconductor Saturable Absorber*). Se trata básicamente de un absorbente saturable integrado en un resonador de Fabry Perot operado en la condición de anti resonancia.

1.3 KLM para la generación de pulsos ultracortos

Los comienzos del método de KLM se remontan a 1985. Mario Marconi los describe y ensaya por vez primera en su Tesis de Doctorado [1-6], realizada en el CEILAP; también son publicados dos años más tarde por él junto a O.E. Martínez y F.P. Diodati [1-7]. El primer láser de Ti:Zafiro reportado que opera bajo el principio del KLM es el de Spence, Kean y Sibbett [1-8].

Existen ciertas características deseables que son deseables en un láser de pulsos ultracortos. A continuación describiremos alguna de estas propiedades y cómo responde a ellas el KLM.

La profundidad de la modulación es el monto total de pérdidas saturables en un absorbente, que pueden ser blanqueadas por un pulso "infinitamente" grande de energía (una densidad de energía mucho mayor que la fluencia de saturación del absorbente).

En el KLM el efecto análogo es producido por una disminución de las pérdidas debidas al autoenfoco, a través de una *hard aperture*, o por un aumento en la ganancia en el láser como resultado de una mejor superposición de los modos del láser y de bombeo sobre el cristal. La profundidad de la modulación es, entonces, tan grande como las pérdidas totales, si suponemos una operación bien por encima del umbral. Una profundidad de modulación de 10% puede ser obtenida si el láser, KLM y *soft aperture*, opera con un espejo de salida de 10% de transmisión.

Otro parámetro a tener en cuenta es el de las pérdidas no saturables. Este tipo de pérdida es, por supuesto, no deseable en el láser. En el KLM sin aberturas estas pérdidas no existen, ya que solo la ganancia es modulada. De haber abertura, es decir KLM *hard aperture*, las pérdidas pueden existir, ya que la abertura deberá cortar el haz para obtener un cambio eficiente entre las operaciones pulsada y continua.

La energía de saturación ideal debería ser adaptable a la energía del pulso deseado o esperado en el láser. Es difícil definir una fluencia de saturación en el KLM y aún más, medirla. Sin embargo la aparición de múltiples pulsos es un indicio de éste inconveniente en un determinado láser.

Otro factor a tener en cuenta es la respuesta temporal a la excitación del pulso. Es lo que determina el máximo angostamiento posible del pulso, esto es la mínima duración de pulso alcanzable. Este tiempo de respuesta es tan rápido como la no linealidad Kerr, la que está estimada en el orden de unos pocos femtosegundos [1-9]. Es con láseres KLM que se obtienen los pulsos más cortos en el Ti:Zafiro.

También debe tenerse en cuenta la dependencia con la longitud de onda. Uno desea parámetros independientes de la longitud de onda. De otra forma, podrían aparecer efectos de filtrado adicional, resultando en una reducción del ancho de banda de la ganancia neta, lo que es un detrimento para la generación de pulsos ultracortos. La no linealidad Kerr es independiente de la longitud de onda.

La libertad de ajustar los parámetros del sistema en forma independiente en los dominios temporal y espacial es también algo deseable. En el caso de KLM, como hemos visto, los fenómenos espaciales y temporales están ligados. Esto implica severas restricciones en las características de la cavidad, que es muy sensible a todos los efectos mencionados. Es entonces de gran importancia investigar la dinámica espacio – temporal en esta clase de láser en una forma semi – analítica, a fin de alcanzar una comprensión cualitativa de la complejidad de su dinámica. Esto, sin dudas, redundará en

ulteriores mejoras en el desarrollo del láser, permitiendo optimizar la cavidad en función de las prestaciones requeridas.

1.4 Generación de femtosegundos a partir de láseres sólidos

Antes de sumergirnos en los detalles del modelo, que lo haremos en el Capítulo siguiente, echemos un vistazo a los distintos láseres capaces de producir pulsos de femtosegundos.

Con la creciente demanda por pulsos ultracortos en diversos campos de aplicación, surgió también la necesidad de proveer femtosegundos en un amplio rango de longitudes de onda. Una breve descripción sobre la aplicación de los femtosegundos en diferentes áreas como la espectroscopía o las comunicaciones puede encontrarse en el Apéndice I-1. Un factor a tener en cuenta, para posibles empleos fuera del laboratorio, es la confiabilidad del equipo, un tamaño lo más reducido posible así como la mayor facilidad de operación y mínimas necesidades de mantenimiento. Es así como con estos requerimientos aparecen, además del Ti:Zafiro, numerosos láseres sólidos que proveen pulsos ultracortos. A continuación repasaremos, someramente, la evolución de las fuentes de femtosegundos hasta la actualidad.

Hasta mediados de los '80 los láseres de colorantes eran la especie dominante como fuente de pulsos ultracortos. Empleaban técnicas de mode locking pasivo y llegaban a pulsos del orden de la decena de femtosegundos. Sin embargo su operación resultaba muy engorrosa. Problemas del flujo de colorante, de refrigeración así como inconvenientes en la optimización de la concentración eran habituales en estos equipos. Además requerían de sistemas de bombeo por lo general muy grandes, como los láseres de argón. A pesar de todos estos aspectos negativos, los láseres de colorantes son hoy en día, una fuente importante de femtosegundos en la región del visible. En asociación con sistemas compensadores de la fase de orden cúbico, se generaron pulsos tan cortos como 6fs [1-10]. Durante mucho tiempo este registro se mantuvo como un record de pulsos cortos.

Los láseres sólidos vieron su renacimiento a partir de la implementación del Ti:Zafiro. Capaz de soportar femtosegundos por su gran ancho de banda, exhibe acción láser en un

amplio rango desde los 670 nm a los 1100nm, con la única desventaja inicial de requerir un bombeo en la región del verde, es decir mediante láseres de argón. Como ya mencionamos, la aparición de láseres sólidos basados en neodimio (YAG o vanadato) y bombeados por diodos de alta potencia, removió este inconveniente haciendo el láser de Ti:Zafiro totalmente de estado sólido una eficiente realidad. Con todo, el Ti:Zafiro no es la única fuente de pulsos de femtosegundos. Veamos, a continuación, algunos ejemplos.

1.4.1 Pr:YLF, femtosegundos en el visible

Como resultado del fuerte apantallamiento de los electrones internos, los materiales cristalinos dopados con elementos de tierras raras muestran propiedades favorables para el láser. El Praseodimio (Pr^{3+}) es un ion que ofrece diversidad de longitudes de onda para operar, particularmente en el visible. Como resultado del efecto Stark en los niveles de energía, se obtuvo acción láser en varias líneas de emisión, del azul al infrarrojo [1-11]. En particular la transición de 613 nm tiene un ancho de banda capaz de soportar pulsos de femtosegundos. Con un cristal crecido en la Universidad de Central Florida, el grupo de óptica de femtosegundos del Imperial College de Londres construyó un láser con este material activo que entrega pulsos de 400 fs en 613 nm [1-12]. El láser, mode locking KLM, tiene una cavidad en "z" de siete elementos similar a las habituales en el Ti:Zafiro. Lamentablemente, el bombeo del Pr:YLF debe hacerse en 476 nm, la línea azul del argón, donde sólo hay disponibles del orden de 1.5W. La potencia media obtenida para ese bombeo y espejo de salida de 3% fue de 45mW. Si bien ofrece femtosegundos en la región visible, los inconvenientes que acarrea el bombeo en la línea azul del argón atentan contra su difusión masiva.

1.4.2 Láseres basados en Neodimio

Uno de los más populares, si no el más, entre los láseres sólidos es el Nd:YAG. Si bien su ancho de banda sólo permite llegar a pulsos de picosegundos, es de gran interés generar pulsos cortos en este láser. Las técnicas de mode locking pasivo se aplicaron exitosamente sobre el Nd:YAG. Miguel Larotonda, en su Tesis Doctoral desarrollada en

el CEILAP [1-13], construyó el primer láser de Nd:YAG bombeado por diodos con mode locking por efecto Kerr obteniendo, para 3.5W de bombeo, pulsos de 4.5ps a 100MHz con una potencia media de 800mW. Dado que el Nd:YAG no tiene una no linealidad capaz de sostener el KLM, la cavidad del láser es una “z” donde en el foco de los espejos curvos se ubica un material no lineal, por caso SF 57, de modo que, a diferencia del Ti:Zafiro, el medio activo y el medio Kerr se encuentran separados. También en Nd:YAG, pero empleando SESAM y con un esquema de bombeo transversal sin óptica de acople entre el diodo de bombeo, de 20W, y el material activo, conocido como DCP (direct coupled pump) [1-14], el grupo de Keller obtuvo pulsos de 16 ps y energía media de 10W, para 40W de bombeo [1-15]. Otros integrantes de la familia del neodimio, como el Nd:YLF, y el Nd:YVO₄, también han entregado pulsos de picosegundos [1-16, 17]. Sin embargo, sólo el Nd:Vidrio, con un ancho de banda de fluorescencia del orden de 30 nm, es apto para producir pulsos de femtosegundos. Su banda de absorción, centrada en los 800 nm lo hace ideal para ser bombeado con diodos. Estos láseres se colocan como una interesante alternativa a los más grandes, en volumen y costo, Ti:Zafiro en particular en el rango del infrarrojo. El primer Nd:Vidrio continuo bombeado por diodos es de 1986, y generaba, tan sólo 3.2mW [1-18]. Con técnicas de mode locking activo se obtuvieron pulsos de 7ps y potencia media de 5mW [1-19]. Con bombeo mediante un láser de Ti:Zafiro fue posible llegar a pulsos de 310 fs [1-20]. El primer Nd:Vidrio con mode locking pasivo produjo pulsos de 88 fs y 200 mW de potencia media, con bombeo mediante un láser de kriptón, empleando una técnica conocida como *additive pulse mode locking* [1-21]. Intentos previos de mode locking pasivo en este láser pueden hallarse ya en 1966, resultando en un mode locking montado sobre pulsos de Q – switch. Los resultados más exitosos fueron obtenidos con SESAM. Keller y su grupo obtuvieron, en 1998, pulsos de 175 fs y 1W de potencia media, bombeando con un arreglo de diodos de 20W [1-22].

No se conocen, hasta la fecha, Nd:Vidrio con mode locking KLM, bombeado por diodos. Es así como en el laboratorio de láseres sólidos del CEILAP, del que formo parte, se está actualmente diseñando y construyendo un láser de estas características. La idea es emplear un arreglo de diodos de 20W de potencia, bombeo longitudinal, lo que implica un delicado trabajo de enfoque, para con una cavidad en “V” lograr pulsos de femtosegundos y potencia superiores al watt. Este tipo de cavidades fueron sugeridas por Bouma y Fujimoto [1-23], y probadas en Ti:Zafiro.

1.4.3 Láseres basados en cromo

De gran interés resulta tener fuentes de pulsos ultracortos en la región espectral de $1.16\mu\text{m}$ a $1.58\mu\text{m}$ con miras a aplicaciones en comunicaciones. Los medios activos basados en iones del cromo son los empleados para estos fines. Entre los más importantes mencionemos el Cr^{3+} :YAG y el Cr:Forsterita (Cr^{4+} : Mg_2SiO_4). También de la familia del cromo, pero con láseo en los 850 nm es el Cr:LISAF. El atractivo de estos láseres es que permiten cavidades más compactas y pueden ser bombeados directamente con diodos.

El primer Cr:LISAF fue demostrado por el grupo del Imperial College de Londres, en 1992, obteniendo pulsos de 30 fs [1-24]. Dos años más tarde se logra el Cr:LISAF bombeado por diodos, con pulsos más largos, de 100 fs [1-25]. Su banda de absorción se encuentra centrada en 670 nm . Los diodos láser disponibles en esa longitud de onda no superan el watt de potencia y son más costosos que los de 800 nm . Esta razón hizo que la mejor opción para pulsos ultracortos en la región cercana a $1\mu\text{m}$ sea, sin dudas, el Nd:Vidrio.

Por otra parte el Cr:Forsterita con longitud de onda de láseo en los $1.25\mu\text{m}$, donde las fibras ópticas presentan un mínimo de dispersión, muestra picos de absorción en $1.06\mu\text{m}$, para bombear con Nd:YAG, y en 800 nm , lo que hace factible su bombeo directo con diodos. Pionero en este material es el grupo de Robert Alfano, de la City University de New York. En 1992 presentaron el primer Cr:forsterita con mode locking activo (modulador acusto óptico, a 78 MHz), del cual obtuvieron pulsos de 60 fs . El bombeo era a través de un Nd:YAG [1-26]. Desde entonces numerosas evoluciones llevaron a mejorar las prestaciones del láser. Por ejemplo, el diseño construido por el grupo del Instituto Max Born, Berlin, Alemania. Se trata de un Cr:forsterita KLM de tres elementos intracavidad, donde el espejo de fondo, en forma de cuña, actúa como elemento compensador de la dispersión de la velocidad de grupo. Pulsos de 163 fs con una potencia media de 100 mW son característicos para un bombeo de 4 W provenientes de un láser de Nd:YAG [1-27]. Una cavidad de similares características, pero con Cr:YAG como material activo, muestra pulsos de 55 fs en $1.55\mu\text{m}$, con potencia media de 100 mW [1-28].

La disponibilidad de diodos láser de alta potencia a relativamente bajo costo sumado a las mejoras en las técnicas para el crecido de materiales han expandido el horizonte de

los láseres sólidos con mode locking, haciendo viable la construcción diversos láseres de estado sólido compactos, sintonizables y con pulsos de femtosegundos. Día a día se reportan nuevos materiales con propiedades adecuadas para pulsos ultracortos. Indudablemente la introducción de estos materiales, la mejor comprensión de los mecanismos subyacentes a la conformación del pulso y el estudio de su dinámica, contribuirán a expandir el uso de los femtosegundos en aplicaciones en todas las áreas del mundo real.

En este sentido, la presente Tesis aporta conocimiento acerca de los láseres con mode locking KML en general. Si bien el trabajo se centra en el láser de Ti:Zafiro y todas las verificaciones experimentales fueron realizadas sobre este láser, la forma del modelo teórico desarrollado puede adaptarse a otros medios activos y geometrías, convirtiéndolo en una interesante herramienta para el diseño y estudio de los láseres de gran ancho de banda con mode locking KLM.

Construcción del mapa iterativo

La física del láser KLM es intrínsecamente compleja, dado que está determinada por un delicado balance entre efectos temporales y espaciales. En el dominio temporal, la dispersión de la velocidad de grupo (GVD) presente en todos los elementos ópticos de la cavidad, y la automodulación de fase (SPM) dependiente de la intensidad, que se halla principalmente en el medio activo, son balanceadas por la dispersión (negativa) producida por un par de prismas. En el dominio espacial, las propiedades relevantes son la configuración de la cavidad y el efecto de autoenfoco (SF). La amplificación es una fuente adicional de no linealidad, a través de la saturación de la ganancia.

La aproximación usual a este tipo de sistemas es a través de alguna versión de las *master equations* [2-1]. Esto es, en general, una ecuación del tipo Guinzburg – Landau, [2-2], que presenta una vasta y no totalmente explorada variedad de comportamientos dinámicos. Lograr soluciones analíticas a este tipo de ecuación es difícil y habitualmente se recurre a simulaciones numéricas para obtener los valores de las variables del pulso.

Imponiendo condiciones a la ganancia remanente luego del pasaje de un pulso se puede estudiar la condición de estabilidad ante la aparición de pulsos satélites [2-3, 2-4]. Análisis más generales sobre inestabilidades, como oscilaciones pulso a pulso en la duración de pulso, se realizaron, también, en forma numérica [2-5].

Estas aproximaciones son herramientas poderosas para el diseño de láseres, sin embargo aportan poco conocimiento sobre la dinámica subyacente del sistema físico, que *per se*, es un tema de sumo interés. Por otra parte, para obtener las *master equations* se debe suponer que el pulso es levemente modificado de un round trip al siguiente, suposición inhibe automáticamente el estudio de los casos donde las variaciones pulso a pulso son apreciables.

Una aproximación tradicional a los sistemas no lineales complejos es pasar del estudio del sistema dinámico continuo, a un sistema asociado, discreto en el tiempo, descrito por un mapa iterativo [2-6]. Un mapa es una secuencia de valores de una variable tomada a tiempos discretos. La descripción de sistemas físicos mediante el empleo de mapas es una alternativa totalmente equivalente al empleo de ecuaciones diferenciales ya que no hay pérdida o ganancia de información entre ambas descripciones.

Existen, sin embargo, ciertas ventajas en el uso de los mapas que son inmediatas. La dimensionalidad del problema se reduce en (al menos) uno y las simulaciones numéricas son más fáciles y rápidas. A pesar de estas ventajas, en la mayor parte de los casos encontrar la ecuación para el mapa es, por lo menos, tan dificultoso como resolver el sistema de ecuaciones diferenciales parciales, salvo que el sistema físico en cuestión tenga algún tipo de “reloj interno” que defina la posición de ciertos tiempos característicos.

Un láser con mode locking pasivo se presenta, desde esta perspectiva, como un sistema ideal para la aplicación de mapas iterativos. El “reloj interno” es provisto por el tiempo de round trip en la cavidad, lo cual permite vincular fácilmente los valores de las variables del pulso en un tránsito y en el siguiente [2-7].

Una vez escrita la ecuación del mapa, la estabilidad de las soluciones periódicas (como los trenes de pulsos de mode locking), son determinadas muy fácilmente.

Otras ventajas adicionales se presentan a la hora de estudiar comportamientos inestables mediante el empleo de mapas. Las dos más claras y significativas son la ya mencionada desaparición de la restricción a pequeñas variaciones pulso a pulso, con lo cual la validez del mapa es independiente del tamaño de las fluctuaciones entre pulsos, y la fácil descripción de fenómenos (previamente observados en esta clase de láseres) como los doblamientos de períodos [2-8, 2-9].

La idea que rige este Capítulo es obtener un mapa, lo más sencillo posible, capaz de describir la dinámica del láser de Ti:Zafiro con mode locking por efecto Kerr; que nos permita no sólo analizar las regiones de estabilidad de los distintos regímenes de funcionamiento, sino también hacer ciertas predicciones sobre el funcionamiento del láser que, posteriormente, puedan ser verificadas experimentalmente.

En este punto creo oportuno aclarar que lo que busca el modelo, más que predicciones cuantitativas precisas, es hallar comportamientos cualitativos característicos del láser. Dado que este tipo de sistemas es extremadamente sensible tanto a condiciones iniciales

como al ruido, las comparaciones directas con series numéricas son imposibles. Por el contrario, pretendo encontrar propiedades estructuralmente estables [2-6, 2-10]. Por ejemplo, no espero poder predecir el valor preciso de la GVD para el que el mode locking pierde estabilidad, sino que, cuando lo hace, lo hace de un determinado modo (digamos, mediante un doblamiento de período en el tamaño del haz, dejando inalteradas el resto de las variables). En consecuencia, cada vez que sea necesario tomar alguna decisión sobre el modelo, la elección será tomada poniendo la mirada en preservar estas propiedades esenciales del sistema. El objetivo final es obtener un conocimiento detallado de la dinámica del láser más que emplearlo para un diseño cuantitativamente preciso de una cavidad. Sin embargo, y como se verá durante el desarrollo de este trabajo, a menudo las predicciones muestran un más que satisfactorio acuerdo cuantitativo con las observaciones.

En lo que resta de este Capítulo nos dedicaremos, en la Sección 1, a describir las ecuaciones del mapa así como las aproximaciones que debimos hacer para obtenerlas, en la Sección 2, a obtener las expresiones para el punto fijo y a determinar las zonas de estabilidad, en la Sección 3, a reducir (para un cierto valor de los parámetros) el mapa de cinco variables a uno unidimensional, con la esperanza de obtener una descripción más simple, que permita acceder a una comprensión intuitiva de la dinámica. Finalmente la Sección 4 nos mostrará una propiedad estructuralmente estable del sistema.

2.1 Matrices ABCD

Comenzamos suponiendo que el campo eléctrico dentro del pulso de mode locking, como función de la distancia al eje óptico, r y el tiempo t , está dado por:

$$E(t) = E_0 \exp(-i k r^2/2q) \exp(-i k t^2/2p) \quad (2.1)$$

donde p, q :

$$\frac{1}{p} = Q - i \frac{n \lambda}{\pi \tau^2} \quad (2.2)$$

$$\frac{1}{q} = \frac{n}{R} - i \frac{n \lambda}{\pi \sigma^2} \quad (2.3)$$

son funciones de las variables del pulso: el radio del tamaño del haz (spot size) σ , el radio de curvatura del haz, R , la duración del pulso τ y el chirp Q . Hay una quinta variable, la energía, que veremos en detalle más adelante.

Conforme el pulso se propaga a través de un elemento óptico o una distancia dentro de la cavidad, los parámetros p y q varían de acuerdo a:

$$q_{\text{out}} = (A \cdot q_{\text{in}} + B) / (C \cdot q_{\text{in}} + D) \quad (2.4)$$

donde $\{A \dots D\}$ son los elementos de la matriz 2×2 [2-11]. Lo mismo vale para p [2-12, 2-13]. La matriz que describe los efectos causados por varios elementos de la cavidad se obtiene multiplicando las matrices de cada elemento. En general, la propagación es descrita en forma completa por una matriz de 4×4 . De esta forma, es fácil obtener la matriz que describe el efecto de un pasaje completo dentro de la cavidad del láser. En el caso del Ti:Zafiro, emplearemos la aproximación Gaussiana (2.1). Si no pretendemos extender el modelo a pulsos mas cortos que 10 fs, podremos despreciar términos de segundo orden y superiores. La matriz de 4×4 puede entonces, [2-12], ser separada en dos bloques diagonales de 2×2 para el tipo de cavidad simétrica con un par de prismas. De esta forma el efecto de un tránsito completo por la cavidad en los parámetros p y q puede ser descrito con una matriz de la forma:

$$M = \begin{pmatrix} A & B & 0 & 0 \\ C & D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K & I \\ 0 & 0 & J & L \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

2.1.1 Nolinealidades

Las nolinealidades surgen del hecho que los elementos de matriz incluyen términos, debidos al autoenfoque y la automodulación de fase, que son funciones de las variables del pulso. Estos términos son los que denominamos a lo largo del trabajo “nolinealidades” y tienen la forma:

$$\gamma = c_{\gamma} \frac{U}{\tau \sigma^4} \quad (2.6)$$

para la matriz ABCD y :

$$\beta = c_{\beta} \frac{U}{\sigma^2 \tau^3} \quad (2.7)$$

para la matriz KIJL. Las constantes c_{γ} y c_{β} son proporcionales al índice de refracción no lineal del Ti:Zafiro. La expresión completa de estas constantes no lineales no es simple, y puede hallarse en el Apéndice II –1 .

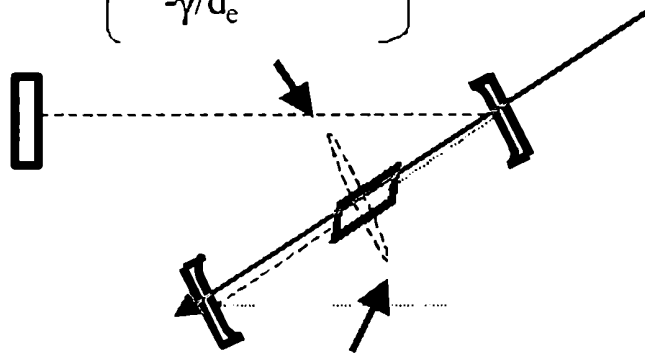
La propiedad distintiva del mapa empleado en esta Tesis es que la no linealidad sólo se hace efectiva sobre una distancia de Rayleigh, y no sobre la totalidad del medio activo. El valor de la longitud de Rayleigh es calculado en ausencia de no linealidades. En la figura 2.1 puede observarse la cavidad del láser con las no linealidades esquematizadas. Para escribir las ecuaciones del mapa es conveniente definir un nuevo conjunto de variables a partir de las variables físicas del sistema: $S = \sigma^{-2}$; $T = \tau^{-2}$; $\rho = R^{-1}$.

Las expresiones que relacionan los valores de las variables del pulso en el tránsito (n+1) con el tránsito anterior, es decir las ecuaciones del mapa tienen la siguiente forma: (para una detallada deducción de cómo se obtienen estas ecuaciones ver Apéndice II- 2)

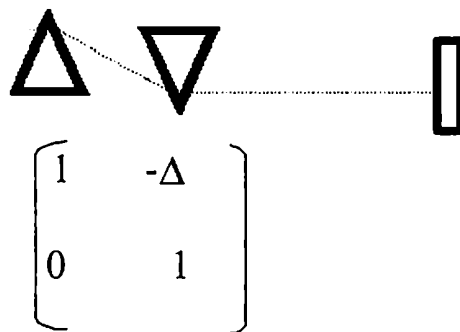
Nolinealidad espacial

$$\gamma = c_\gamma U / (\tau \sigma^4)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\gamma d_e / 4 \\ -\gamma / d_e & \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \beta & 1 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} 1 & -\Delta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nolinealidad temporal

$$\beta = c_\beta U / (\sigma^2 \tau^3)$$

$-\Delta = \text{GVD neta negativa}$

Figura 2.1: Esquema de la cavidad del láser de Ti:Zafiro, con la forma que adoptan las matrices de las nolinealidades espacial y temporal, cuyo efecto consideramos que actúa sólo sobre un rango de Rayleigh en el medio activo, así como la dispersión de la velocidad de grupo negativa que introducen el par de prismas.

2.1.2 Ecuaciones del mapa

$$S_{n+1} = \frac{S_n}{(A+B\rho_n)^2 + (B\lambda S_n)^2} \quad (2.8)$$

$$\rho_{n+1} = \frac{(A+B\rho_n)(C+D\rho_n) + BD(\lambda S_n)^2}{(A+B\rho_n)^2 + (B\lambda S_n)^2} \quad (2.9)$$

$$T_{n+1} = \frac{T_n}{(K+IQ_n)^2 + (\frac{IT_n}{\pi})^2} = T_n \frac{L-IQ_{n+1}}{K+IQ_n} \quad (2.10)$$

$$Q_{n+1} = \frac{(K+IQ_n)(J+LQ_n) + IL(\frac{T_n}{\pi})^2}{(K+IQ_n)^2 + (\frac{IT_n}{\pi})^2} \quad (2.11)$$

La ecuación para la energía U se halla a partir de la expansión, alrededor de los valores medios de las variables S y U , de la expresión usual de saturación de la ganancia (ver Apéndice II-2)

$$U_{n+1} = U_n \left\{ 1 - \frac{2}{\mu} \left(\frac{U^* S_n + U_n S^*}{D_s} \right) + 4 \frac{\mu-1}{\mu} \right\} \quad (2.12)$$

donde μ es el producto de la ganancia de pequeña señal y el factor de realimentación por pasaje debido a las pérdidas pasivas (reflectividad de los espejos, scattering, etc.) y $D_s = 1.22 \text{ mJ cm}^{-2}$ es el producto de la energía de saturación multiplicada por la longitud de tránsito por la cavidad, para el láser de Ti:Zafiro de este trabajo. Los elementos de matriz de las ecuaciones (2.8) – (2.12) incluyen las no linealidades. Es conveniente expresarlos de la forma:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \gamma \mathbf{A}_1 + \gamma' \mathbf{A}'_1 + \gamma^2 \mathbf{A}^{(2)} + \gamma'^2 \mathbf{A}'^{(2)} + \gamma\gamma' \mathbf{A}''^{(2)} + \dots \quad (2.13)$$

lo mismo vale para B, C, D, y :

$$\mathbf{K} = 1 + 2\delta\beta' \quad (2.14)$$

$$\mathbf{I} = 2\delta \quad (2.15)$$

$$\mathbf{J} = 2\delta\beta\beta' + \beta + \beta' \quad (2.16)$$

$$\mathbf{L} = 1 + 2\delta\beta \quad (2.17)$$

donde 2δ es el valor de GVD negativa por tránsito en la cavidad. Los coeficientes de las expansiones (2.13) son funciones sólo de los parámetros geométricos. Los factores γ y β son las no linealidades, definidas por (2.6) y (2.7) cuando el pulso atraviesa el medio activo en sentido hacia el espejo de salida, mientras que los factores primados, γ' y β' corresponden a las no linealidades cuando el pulso se propaga en el sentido opuesto.

El conjunto de ecuaciones (2.8) - (2.12) y (2.13) -(2.17) conforman el mapa iterativo que describe la dinámica del láser. Los valores de operación del láser los obtendremos imponiendo la condición de que el valor de cada variable en un dado pasaje sea igual al valor en el pasaje anterior. Esto es lo que se denomina un punto fijo del mapa.

Los elementos $\{A \dots L\}$, por otra parte, incluyen las no linealidades, las que a su vez son funciones de las variables del pulso. En general este tipo de problemas es intratable en forma analítica, pero puede ser resuelto si se asume que las no linealidades son relevantes solamente hasta primer orden. Esta es una buena aproximación para pulsos mayores a 10fs, un límite que de todos modos habíamos impuesto al adoptar la aproximación Gaussiana.

2.2 Puntos fijos y su estabilidad

Esta aproximación al problema permite predecir que los láseres de Ti:Zafiro tienen, por lo menos, cuatro modos de operación (ver más abajo), que corresponden a los puntos fijos de las ecuaciones del mapa (2.8) – (2.12): funcionamiento continuo (CW) al que

denominamos en este trabajo P_0 ; mode locking con pulsos limitados por transformada , llamado P_1 ; mode locking de pulsos con chirp positivo, designado como P_2 , y mode locking con pulsos con chirp negativo, designado como P_3 . Los tres primeros modos de operación han sido observados y caracterizados experimentalmente. El cuarto modo, P_3 , no ha sido observado pero, como veremos, esto tiene una explicación.

Más allá de que estos modos de operación se obtienen algebraicamente como soluciones de (2.8)-(2.12), es posible interpretarlos de manera bastante sencilla. Veamos qué ocurre físicamente con cada uno de estos modos de operación a medida que el pulso se desplaza dentro de la cavidad. Comenzamos desde el espejo de salida M_1 , (ver figura 2.2). La solución P_1 (figura 2.2a) corresponde a pulsos limitados por transformada a la salida. Cuando el pulso atraviesa la barra, adquiere chirp positivo a través de la SPM y GVD. El par de prismas introduce GVD negativa, de forma tal que el pulso llega sin chirp a M_4 . Un nuevo pasaje a través de los prismas introduce GVD negativa adicional. Cuando el pulso retorna a la barra, tiene casi la misma duración que cuando la dejó, pero con chirp negativo. La GVD positiva y la SPM en la barra compensan el chirp negativo, haciendo que el pulso sea limitado por transformada cuando abandona el medio activo hacia el espejo M_1 , donde comienza un nuevo ciclo. Los cálculos de los efectos no lineales promedio en la barra para un caso general son dificultosos, ver por ejemplo [2-7, 2-14], sin embargo de esta simple descripción podemos ver que, para el punto fijo P_1 , la contribución no lineal cuando el pulso se propaga hacia el espejo M_1 es aproximadamente la misma que cuando viene desde M_1 ; es decir $\beta \approx \beta'$ y $\gamma \approx \gamma'$. Esta observación simplifica enormemente los cálculos.

La solución P_2 (figura 2.2b) corresponde a pulsos chirpeados positivamente a la salida (espejo M_1). Cuando el pulso atraviesa el medio activo adquiere más chirp positivo al tiempo que se hace más largo. Luego de dos pasajes por el par de prismas, está con suficiente chirp negativo como para ser limitado por transformada en el centro de la barra. Adquiere entonces cierto chirp positivo en la mitad restante de la barra, de modo que llega con chirp positivo al espejo M_1 y el ciclo se repite. Cabe destacar que dentro de la barra de Ti: Zafiro el pulso es, en promedio, mucho más corto cuando viaja hacia M_1 que cuando viene de M_1 .

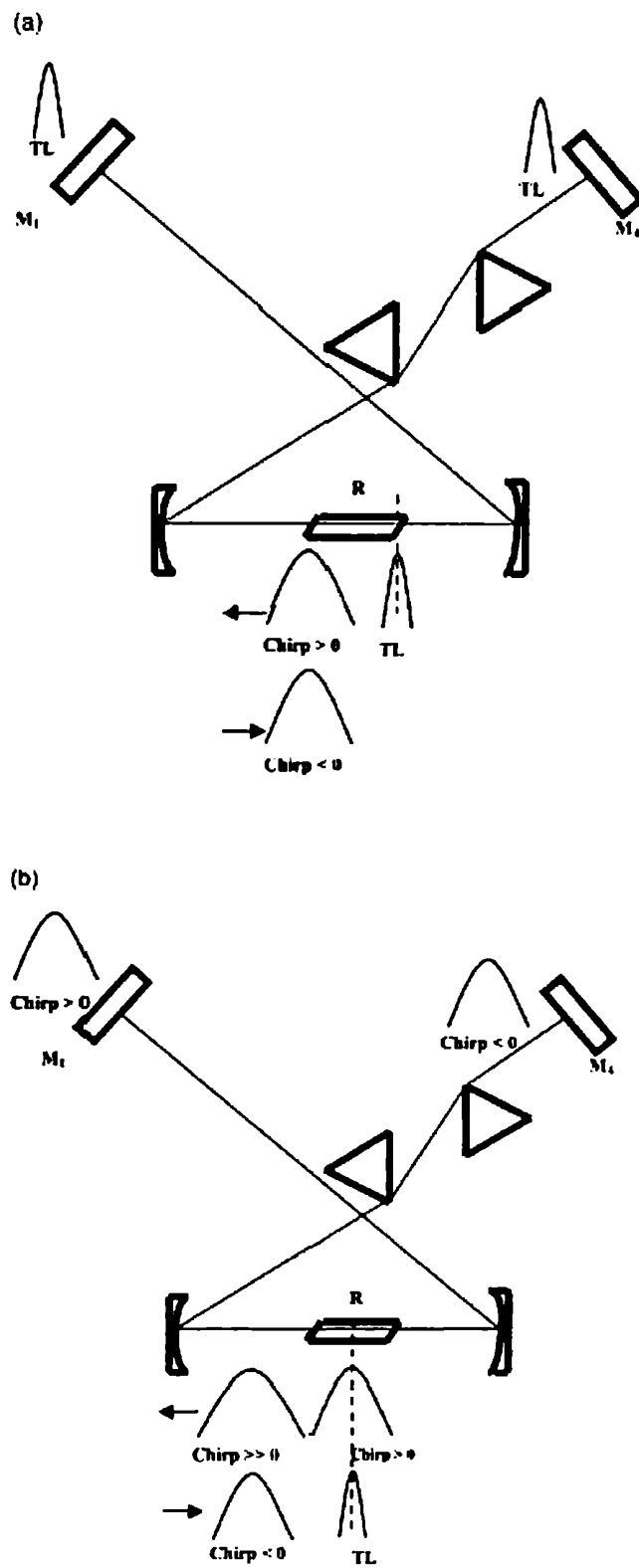


Figura 2.2: El chirp del pulso dentro de la cavidad. Las flechas indican la dirección de propagación. Las líneas punteadas marcan el plano de cálculo. a) modo P_1 , b) modo P_2 .

Podemos considerar, entonces, que las no linealidades son significativas sólo cuando el pulso se propaga hacia el espejo de salida, es decir podemos aproximar $\beta + \beta' \approx \beta$ y $\gamma + \gamma' \approx \gamma$. Además los focos temporal y espacial son casi coincidentes, lo que conduce a una simplificación ulterior [2-15]. El modo P_3 corresponde a $\beta > \beta'$, lo que conduce a chirp negativo a la salida del láser.

Los puntos fijos se obtienen planteando la condición de igualdad entre los valores de las variables del pulso en un tránsito y en el siguiente en las ecuaciones del mapa. En particular si examinamos la segunda expresión (2.10) vemos que una de las soluciones es $T_n = T_{n+1} = 0$, lo cual corresponde a P_0 , solución continua (duración de pulso $\tau \rightarrow \infty$). Nótese que en este caso todas las no linealidades se desvanecen. Si $T \neq 0$, tenemos otra solución si $Q_n = Q_{n+1} = Q^* = 0$, lo cual implica $K = L$ y de ahí $\beta = \beta'$, es decir la solución P_1 , no linealidades iguales en ambas direcciones de propagación y pulsos limitados por transformada. Si, en cambio, $Q^* \neq 0$, $2 I Q^* = L - K$ y entonces $Q^* = \beta - \beta'$, que es o positivo (es decir, la solución P_2) o negativo (es decir, la solución P_3).

Una de las principales ventajas de la aproximación con mapas es que la estabilidad de los modos de operación del láser pueden ser calculados en forma muy sencilla, a partir de los autovalores del Jacobiano del mapa en el punto de interés. El punto fijo es estable si todos los autovalores tienen módulo menor que 1.

En lo que sigue consideramos las regiones de estabilidad y los vectores inestables para la solución P_1 , P_2 y P_3 . Las regiones de estabilidad son calculadas en función de dos parámetros: la GVD neta dentro de la cavidad y la distancia entre el espejo de salida y el medio activo, denominada x . Estos parámetros fueron elegidos por su facilidad de acceso experimental. El resto de los parámetros, distancias, valores de la ganancia, etc., son mantenidos fijos.

Tanto para las aplicaciones como para un efectivo diseño de cavidades lo que interesa son las regiones de estabilidad del mode locking. Para una comprensión completa del funcionamiento del láser se requiere, además, poner atención no solo a los límites entre las regiones estable e inestable sino también a la forma en que el tren de pulsos se desestabiliza. Estos límites están dados por la condición de que al menos uno de los autovalores sea (en módulo) de valor 1. Dependiendo de los valores de los parámetros, las inestabilidades involucran diferentes autovalores y autovectores asociados, es decir

las direcciones en el espacio de fases en las que el punto fijo se vuelve inestable. El diagrama de estabilidad da cuenta de estas regiones. Según por cual de estos límites se atraviese de la zona estable a la inestable, el autovalor cuyo módulo se hace mayor que 1 en primer término puede ser diferente en cada caso. Esto implica que la “dirección”(en el espacio de cinco dimensiones del problema) en que se desestabiliza el sistema varía dependiendo del valor de los parámetros.

Los tipos de transiciones, o bifurcaciones, calculadas están detalladas en el tabla II-1. Las clasificamos además, en “verticales”, si la región inestable es alcanzada variando solamente la distancia x , y en “horizontales” si se llega a la región inestable cambiando únicamente la GVD.

Tipo de transición	Autovalor	Principal variable inestable
1A	+1	U
1B	+1	ρ , S
2A	-1	S
2B	-1	S, U
3B	c.c.	S
3B	c.c.	S, U

Tabla II-1: Tipo de transición estable - inestable clasificados según la dirección principal del correspondiente autovector.

De los cálculos resultó que los autovectores inestables tienen componentes principales en una dirección (tipo A) o a lo sumo en dos direcciones (tipo B), en el espacio de fases de cinco dimensiones. Por ejemplo en la bifurcación tipo 1B, el autovector normalizado tiene componentes 0.766 en ρ , 0.642 en S y 10^{-9} , 10^{-10} , y 10^{-9} en Q, T y U respectivamente.

Estas transiciones fueron estudiadas en forma exhaustiva en [2-16]. Allí comprobé la forma en que el mode locking se desestabilizaba variando la GVD introducida por el par de prismas, para diversos valores de largo total de la cavidad, hallando experimentalmente los tres tipos de transiciones descritas por el modelo. Es importante destacar que, a pesar de que la forma que adoptan las zonas varía dependiendo de los parámetros geométricos, los tipos de transiciones son siempre los mismos y se hallan presentes en el láser independientemente de la geometría de la cavidad.

En la figura 2.3 se observan las regiones estable e inestable y los límites de cada tipo de transición para el modo P_2 . Las "islas" de estabilidad están calculadas para la configuración geométrica que se empleó en [2-16] para contrastar el modelo, que difiere de la empleada en el resto de esta Tesis solo en las distancias que separan cada elemento de la cavidad.

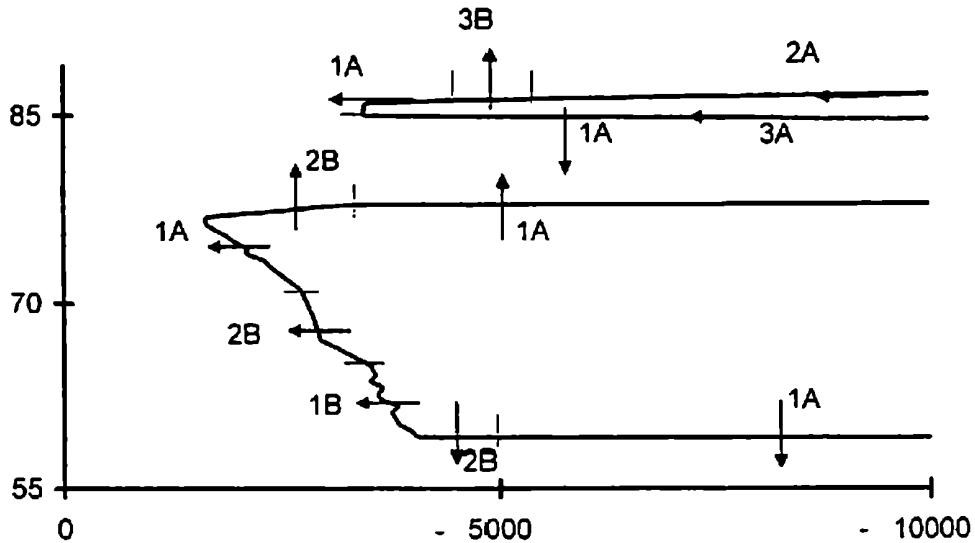


Figura 2.3: Diagrama de las regiones de estabilidad para el modo P_2 para la cavidad del láser de Ti:Zafiro empleado en la referencia [2-16]. Hay dos "islas" de estabilidad rodeadas de una región inestable. Las flechas van de la región estable hacia la inestable y, en cada caso está indicado el tipo de transición. Las líneas indican la posición aproximada de cada tipo de transición. Escala horizontal GVD en fs^2 . Escala vertical: largo de un brazo de la cavidad, en cm.

Los límites de las regiones de estabilidad para cada modo de operación del láser en la configuración geométrica que detallaremos en el Capítulo 3 y que es la empleada en toda la parte experimental de esta Tesis se puede observar en la figura 2.4.

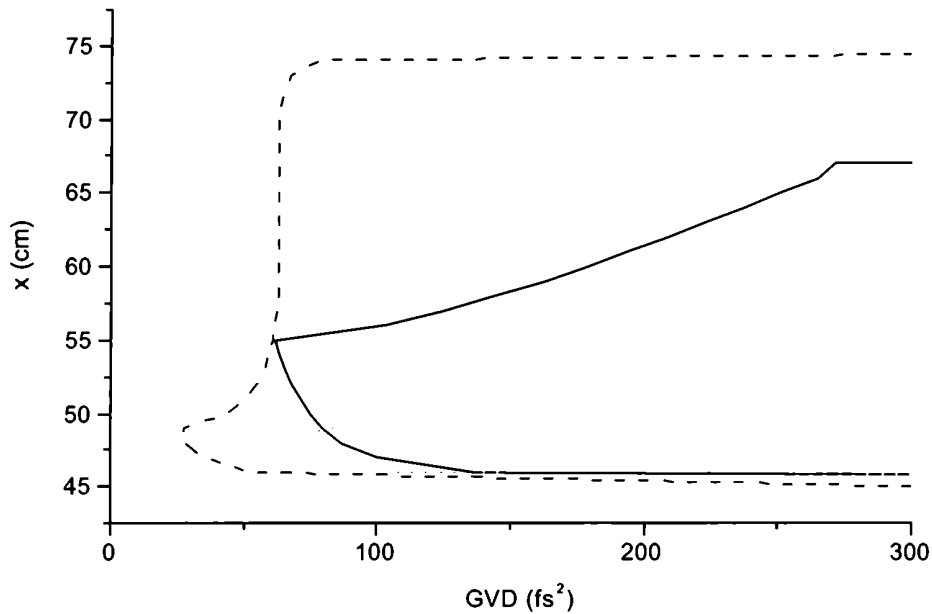


Figura 2.4: Regiones de estabilidad para los tres regímenes de mode locking del láser. Línea sólida (negra) P_1 ; línea rayada (roja), P_2 ; línea punteada (verde), P_3 . Eje horizontal GVD neta negativa dentro de la cavidad. Eje vertical: largo del brazo que no contiene a los prismas, x .

La inclusión del estudio de las zonas de estabilidad de la solución P_0 - el continuo- nos lleva al problema del autoarranque, es decir aquellas regiones en que el mode locking se inicia sin la necesidad de perturbación externa alguna. Un criterio básico que debe cumplirse para el autoarranque es que la solución P_0 sea inestable, mientras alguna de las soluciones pulsadas se mantiene estable. Como ya hemos puntualizado, la solución P_0 corresponde a ignorar las no linealidades. Esto nos llevaría, al estudiar la estabilidad, al criterio de estabilidad geométrica (ver [2-11] Capítulo 19) que no es de utilidad para el autoarranque. Se debe, en cambio, calcular el Jacobiano, pero evaluar las derivadas en el punto fijo cuyo valor de duración de pulso es infinito (i.e. solución continua). Cabe acotar que ciertas derivadas, al ser evaluadas en $T = 0$, divergen; esto se debe a que la variable del mapa que corresponde a la duración del pulso no es τ , la variable física real, sino T , lo que provoca una divergencia artificial. Este hecho es subsanado tomando como valor representativo de la emisión continua un tiempo característico de la cavidad, en este caso el tiempo de tránsito que, comparado con los valores típicos de duración de pulso para las soluciones pulsadas, es prácticamente infinito, evitando la divergencia artificial.

Diversos trabajos abordan el análisis de las regiones de autoarranque. En particular [2-14] examina en profundidad el tema, proponiendo diferentes formas para la no linealidad. La denominada en ese trabajo como mapa E resulta ser la más propicia para el autoarranque y es la que tiene igual forma que la no linealidad empleada en esta Tesis. La conclusión más relevante de [2-14] es la existencia de autoarranque aún sin considerar aberturas geométricas ni espectrales dentro de la cavidad, contrariamente a la creencia de que el mecanismo básico para el autoarranque se produce a partir de pérdidas selectivas generadas por las aberturas. Del mismo modo el modelo presentado en esta Tesis ignora las aberturas, al no incluir en ninguna de las matrices de propagación elementos complejos.

2.3 Reducción del mapa para la bifurcación tipo 2A

A pesar de las muchas simplificaciones hechas, la descripción del sistema es aún tan intrincada que no puede ser tratada más que en forma numérica. Sin embargo, notamos que en las transiciones del tipo 2A sólo una variable física es significativa, además el primer autovalor que pierde estabilidad es -1 , lo cual resulta ventajoso para la descripción con mapas, pues corresponde a un doblamiento de períodos. Estudiamos, entonces, este tipo de transición en más detalle con el objetivo de hallar una expresión para el mapa lo más sencilla posible.

2.3.1 Ecuación unidimensional para la variable S

Debido al rol dominante jugado por la variable S, destaquemos que el autovector inestable es prácticamente colineal con S, construimos un mapa con S como única variable. Si bien las demás variables permanecen casi estables, no pueden ser ignoradas. Las variables U y ρ son las más relevantes, de modo que reemplazamos sus valores en el mapa por sus expresiones como función de S. Las variables Q y T, cuyas variaciones son mucho menores, son reemplazadas por sus valores en el punto fijo. De esta forma

obtenemos un mapa de una sola variable (para los detalles de esta deducción ver Apéndice II-3):

$$y_{n+1} = \frac{y_n}{[y_n^2 a b + c]^2 + [y_n d + y_n^3 a e]^2} \quad (2.18)$$

donde $y_n \equiv S_n/S^*$. Este mapa provee el valor de la inversa del tamaño del haz luego de un tránsito por la cavidad, dado el valor inicial del área del haz, los parámetros geométricos de la cavidad y el parámetro de autoenfoco.

2.3.2 Expansión del mapa a primer orden en las no linealidades

Un resultado no trivial es que la función (2-18) tiene un extremo, es decir, hay un valor del tamaño del haz tal que en el tránsito siguiente, su área es mínima. Como consecuencia de la existencia de un extremo el mapa es no invertible: hay, en general, dos valores del tamaño del haz que convergen al mismo valor en el round trip siguiente. Esto se puede entender de la siguiente manera. Un dado valor σ del tamaño del haz puede ser alcanzado, a partir del pulso anterior, de dos maneras distintas. La primera, por una propagación “normal” comenzando con cierta área σ_1 . La segunda, comenzando con un área más pequeña, σ_{n1} , que induce una lente dependiente de la intensidad. Para una no linealidad suficientemente grande, siempre habrá un valor de σ_{n1} que alcance σ en el siguiente round trip. No es sorprendente, desde este punto de vista, que el extremo sea más notorio con un aumento de la no linealidad. Cabe destacar que en ausencia de no linealidad la evolución del tamaño del haz sí es invertible, debido a la reversibilidad de los caminos ópticos.

Como hemos dicho, la estabilidad de los puntos fijos está determinada por la pendiente del mapa en el punto fijo, que será inestable si la derivada, en módulo, es mayor que 1. Insertando los valores de los parámetros geométricos del láser de Ti:Zafiro empleado en las mediciones, y dejando el valor de GVD neta dentro de la cavidad, que determina la duración del pulso, como parámetro libre, vemos que la duración de pulso disminuye y la no linealidad crece con la GVD. La pendiente en el punto fijo crece casi hasta el valor 1, sin alcanzarlo, para luego decrecer en forma abrupta, atravesando el valor -1 . Esto

implica una bifurcación por doblamiento de periodo, en concordancia con las observaciones experimentales, como veremos más adelante, en el Capitulo 3.

Este comportamiento lo veremos más claramente si expandimos la ecuación (2-18) a primer orden en la no linealidad:

$$y_{n+1} = 4 B y_n \left(\frac{10 a d e + 3 d^2}{8 a d e + 2 d^2} - y_n \right) \quad (2.19)$$

donde:

$$B = \frac{4 a d e + d^2}{2(2 a d e + d^2)} \quad (2.20)$$

2.3.3 Ruta al caos del mapa unidimensional

La ecuación (2.19) es del tipo del mapa logístico para la variable y y el parámetro B , que es función de la GVD neta por round trip. Es bien conocido, ver por ejemplo [2-16], que el mapa logístico exhibe una ruta al caos vía doblamiento de periodos. También son características las cascadas inversas de doblamientos de periodos, las ventanas de periodo tres dentro de la zona caótica y las bifurcaciones tangentes. En particular, si llamamos B_m al valor del parámetro B para el cual ocurre la bifurcación de periodo 2^m a 2^{m+1} , las bifurcaciones se acumulan de forma tal que:

$$\delta_m = \frac{B_m - B_{m-1}}{B_{m+1} - B_m} \quad (2.21)$$

Converge, en el límite de $m \rightarrow \infty$ a $\delta_m = 4.6692\dots$, valor que es conocido como la constante de Feigenbaum. Esta constante es válida para todos los mapas con extremos cuadráticos, independientemente de su forma. De este modo, decimos que todos los mapas con extremos cuadráticos pertenecen a la misma *clase de universalidad* [2-17].

Si nos encontramos ante un mapa de propiedades desconocidas, la evaluación del límite (2.21) nos dará una indicación certera sobre si el mapa en cuestión pertenece a la misma clase de universalidad que el mapa logístico. En nuestro caso el mapa (2.19) es obtenido

luego de una serie de simplificaciones realizadas al modelo completo original. La más incierta es la forma en que realizamos la reducción de la dimensionalidad. A fin de estimar el error, calculamos el diagrama de bifurcaciones del mapa simplificado (2.19) y del mapa completo de 5 variables (2.8) – (2.12) y (2.13) – (2.17) para la variable S en el modo P_2 , como función de la GVD neta en la cavidad.

En la figura 2.5 vemos el conocido diagrama de bifurcaciones del mapa logístico (notar la ventana característica de periodo 3). El mapa completo de cinco variables también muestra un camino al caos vía doblamiento de periodos, los puntos de bifurcación están ligeramente desplazados respecto al mapa logístico, lo cual no es importante, y la ventana de periodo tres está ausente. Es razonable pensar que las variaciones de las otras cuatro variables, aun siendo pequeñas, puedan ser las responsables de desdibujar la ventana de periodo tres sin mayores consecuencias. Pero, lo más serio es que el límite (2.21) converge a 4.980..., que indica que el mapa no pertenece a la misma clase de universalidad que el mapa logístico. En otras palabras, el mapa simplificado (2.19) es una buena aproximación del mapa completo sólo para las primeras bifurcaciones. Bien dentro de la región caótica, los mapas son esencialmente diferentes. El mapa simplificado (2.19) no puede ser empleado para una descripción adecuada de la región caótica. De todos modos, y consientes de sus limitaciones (también el mapa completo las tiene), es útil contar con un mapa sencillo para cierta región del espacio de parámetros.

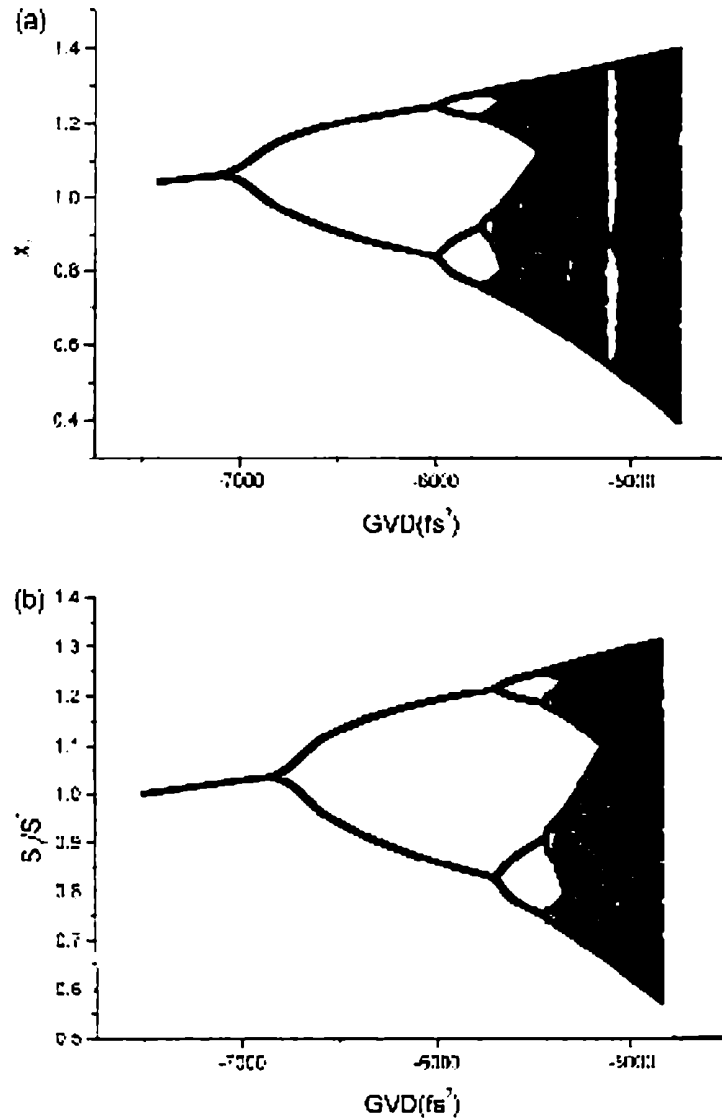


Figura 2.5: a) Diagrama de bifurcaciones para la variable S (normalizada con el valor de punto fijo) calculada con el mapa aproximado de una variable (2.19). b) Lo mismo que a) pero calculado con el mapa completo de cinco variables.

2.4 Relación duración de pulso – GVD, propiedad estructuralmente estable

De las ecuaciones del modelo surge la predicción de una propiedad estructuralmente estable del sistema. Calculando los puntos fijos de la duración de pulso para cada uno de los modos de operación obtenemos:

$$\tau = -\delta / (2\pi^2 C_{\beta} F) \quad (\text{modo } P_1) \quad (2.22)$$

$$\tau = -\delta / (\pi^2 C_{\beta} F) \quad (\text{modo } P_2) \quad (2.23)$$

donde $F = U / \sigma^2$. Notemos que la duración de pulso varía linealmente con la GVD neta, en concordancia tanto con las observaciones como con las simulaciones numéricas. Teniendo en cuenta lo que sucede con las otras variables, hallamos que F es una constante igual al flujo de energía de saturación multiplicado por la ganancia de pequeña señal y el factor de realimentación por pasaje (causado por las pérdidas lineales o pasivas dentro del resonador). [Ver Apéndice II –4]. Una descripción que tenga en cuenta el ancho de banda finito del amplificador nos llevaría a la adición de una ordenada al origen a las ecuaciones (2.22) y (2.23) [2-7]. Más allá de los detalles, lo importante es que la pendiente de la recta τ vs. GVD es el doble para P_2 que para P_1 . Esta es una predicción que no depende del valor que toma C_{β} (cuyo valor es incierto, ver Apéndice III-1) y que puede ser verificada experimentalmente.

Concluimos este Capítulo con un conjunto de ecuaciones, (2.8) – (2.17), que conforman el núcleo de lo que podemos denominar el “Ti:Zafiro virtual”. Con él determinamos el comportamiento de cada uno de los modos pulsados del láser, construimos las regiones de estabilidad, tipos de transición del mode locking estable a inestable y propiedades intrínsecas del sistema. En lo que sigue incluiremos estas ecuaciones en gran cantidad de códigos que nos permitirán simular comportamientos del láser, para posteriormente contrastarlos con el Ti:Zafiro real.

3

Resultados experimentales

Si bien el láser de Ti:Zafiro es la fuente más difundida de pulsos ultracortos en nuestros días y existen numerosos equipos comerciales que ofrecen una operación sencilla y eficiente, ninguno de ellos está libre de inestabilidades en el tren de pulsos de mode locking. Algunas de estas inestabilidades son debidas a ruido externo, como perturbaciones mecánicas, derivas térmicas y fluctuaciones en la intensidad del láser de bombeo. Todas estas inestabilidades tienen frecuencias muy bajas comparadas con la frecuencia de repetición de los pulsos del Ti:Zafiro (≈ 100 MHz), y producen efectos consistentes sobre las variables de salida del láser. Además, son detectadas fácilmente en las trazas del tren de mode locking vistas en el osciloscopio, así como en la autocorrelación de los pulsos.

Hay, sin embargo, otro tipo de inestabilidades, intrínsecas al sistema, ya que son causadas por la misma interacción que genera el KLM. En estos casos el tiempo típico de las fluctuaciones es tan corto como el tiempo de tránsito por la cavidad y se refleja en variaciones pulso a pulso de las variables de salida. Por otra parte, y debido a su origen no lineal, estas fluctuaciones pueden, en principio, afectar alguna variable (por ejemplo el tamaño del haz) dejando inalteradas otras (como la duración de pulso y su energía).

En el Capítulo 2 hemos descripto las ecuaciones del mapa que representan la evolución de las variables del láser. Para vislumbrar la complejidad de la dinámica, consideremos, por ejemplo, que una fluctuación aumenta la energía del pulso en el n -ésimo round trip. Esto causará un incremento en la potencia de la lente de Kerr o lo que es equivalente en la no linealidad espacial de acuerdo a la ecuación (2.6). Dependiendo del diseño de la cavidad, el tamaño del haz en el tránsito siguiente será más grande o más pequeño. Si es más grande la no linealidad espacial se verá reducida y el haz puede recobrar su tamaño y energía originales. Si, contrariamente, el spot se hace más pequeño, la no linealidad espacial aumenta nuevamente y el ML deviene inestable. Las alternativas son aun inciertas, ya que los cambios en el spot afectan también las no linealidades temporales

(ecuación (2.7)). Dependiendo del valor del chirp, el cambio en el tamaño del haz afecta la duración del pulso y modifica la no linealidad espacial nuevamente. También altera la energía a través de la superposición con el volumen activo y el nivel de saturación de la ganancia. Notemos que las no linealidades temporal y espacial son funciones diferentes de las variables del pulso, de modo que cierta combinación de cambios podría dejar una de las no linealidades constante y modificar la otra. Esta es una forma de entender porqué alguna variable puede inestabilizarse mientras otras permanecen estables.

Existen descripciones en la literatura sobre inestabilidades pulso a pulso en el caso de “additive pulse mode locking” [2-9]. Para láseres de Ti:Zafiro con KLM, las inestabilidades son mencionadas brevemente [2-15, 3-1]. Es en un trabajo surgido de esta Tesis [3-2] donde se describen por primera vez en forma detallada las inestabilidades pulso a pulso que afectan sólo alguna de las variables y que denominamos *inestabilidades ocultas (hidden instabilities)*. Estas inestabilidades pueden pasar inadvertidas en las formas habituales de observar la salida del láser (autocorrelador y osciloscopio) pero producen efectos indeseables en casi todas las aplicaciones.

En las secciones siguientes de este Capítulo presentaré , en la Sección 1, el láser de Ti:Zafiro que empleo para la parte experimental de este Trabajo y describiré el dispositivo montado para la observación de las inestabilidades pulso a pulso. En la Sección 2 descubriremos las inestabilidades ocultas en los modos pulsados. Dedicaremos la Sección 3 a determinar experimentalmente la biestabilidad. La Sección 4 a la relación entre la duración del pulso para los modos P_1 y P_2 . La Sección 5 observará los comportamientos de los modos pulsados del láser y finalmente mostraremos, en la Sección 6, cómo obtener series temporales de las variables del láser.

3.1 El láser de Ti:Zafiro

El láser que empleé en todas las mediciones de esta Tesis fue el Ti: Zafiro ubicado en el Laboratorio de Electrónica Cuántica (LEC) de la Facultad de Ciencias Exactas (FCEN), Universidad de Buenos Aires.

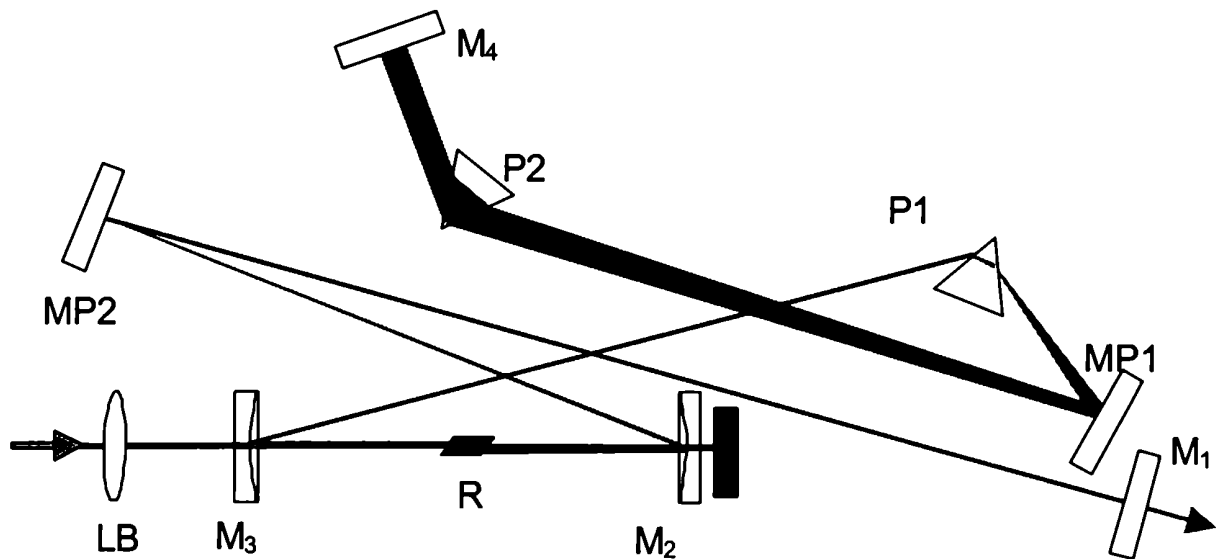


Figura 3.1a: Esquema del láser de Ti:Zafiro del LEC. LB: lente de bombeo; $M_{2, 3}$: espejos curvos; R: material activo; $MP_{1, 2}$: espejos plegadores; $P_{1, 2}$: prismas; M_4 : espejo de fondo; M_1 : espejo de salida. Distancias en mm: $M_3 - R = R - M_2$: 50; $M_2 - MP_2$: 140; $MP_2 - M_1$: 465; $M_3 - P_1$: 297; $P_1 - MP_1$: 198; $MP_1 - P_2$: 415; $P_2 - M_4$: 109.

En su configuración actual, sobre la que se realizaron la mayoría de las mediciones que se presentan en esta Tesis, se compone de siete elementos, con una configuración en X. El espejo de fondo es plano de alta reflectividad, en tanto que el de salida también es plano y de 12% de transmisión. Los espejos focalizadores M_2 y M_3 tienen un radio de curvatura de 10cm. El cristal de Ti:Zafiro es de 4mm de longitud. Un par de prismas de *fused silica* separados 60cm entre sí son ubicados dentro de la cavidad para compensar la GVD. La longitud total de la cavidad es 172.4 cm, resultando en una frecuencia de repetición de pulsos de 86.94 MHz y una potencia típica promedio de 400 mW, con un espectro centrado en los 820 nm. El láser de bombeo es un Nd:YVO₄ bombeado por diodos y doblado en frecuencia (Verdi, Coherent) que entrega 5W de potencia en 532nm y que son enfocados en el medio activo a través de una lente de distancia focal $f = 10$ cm. Cabe destacar que en sus comienzos, el láser de bombeo era un Argón multilínea con potencia de 5W. La configuración de la cavidad era la misma, si bien con variaciones en los parámetros geométricos. Los hallazgos de inestabilidades ocultas, que veremos en la sección 3.2, fueron realizadas con este esquema.

Además de las dimensiones geométricas de la cavidad hay otros parámetros que determinarán el comportamiento del láser. No todas estas cantidades se pueden determinar vía medición directa, como por ejemplo la GVD neta dentro de la cavidad.

El Apéndice III-1 es un resumen de todos los parámetros del láser y la forma en que fueron obtenidos o calculados.

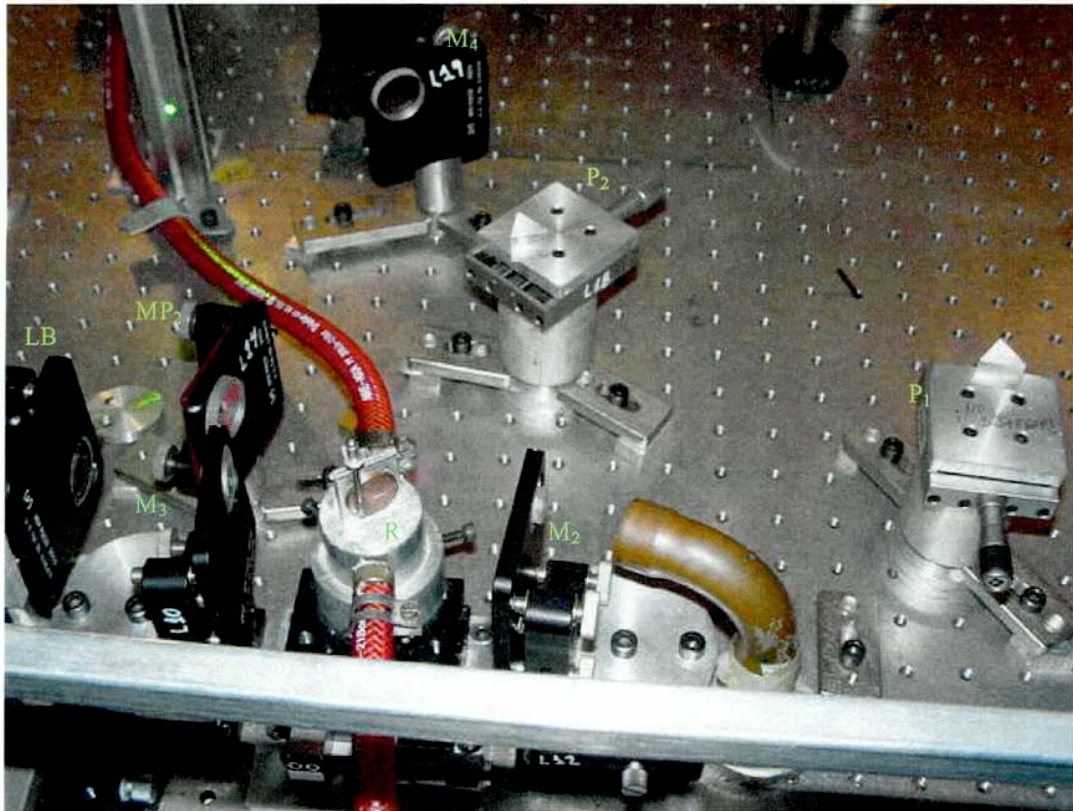


Figura 3.1b: El láser de Ti:Zafiro del Laboratorio de Electrónica Cuántica, sobre el que se realizó la parte experimental de esta Tesis. Las referencias son las mismas que en la fig. 3.1a.

3.2 Detección de las inestabilidades pulso a pulso

La figura siguiente muestra un diagrama del láser junto con el setup empleado en las mediciones.

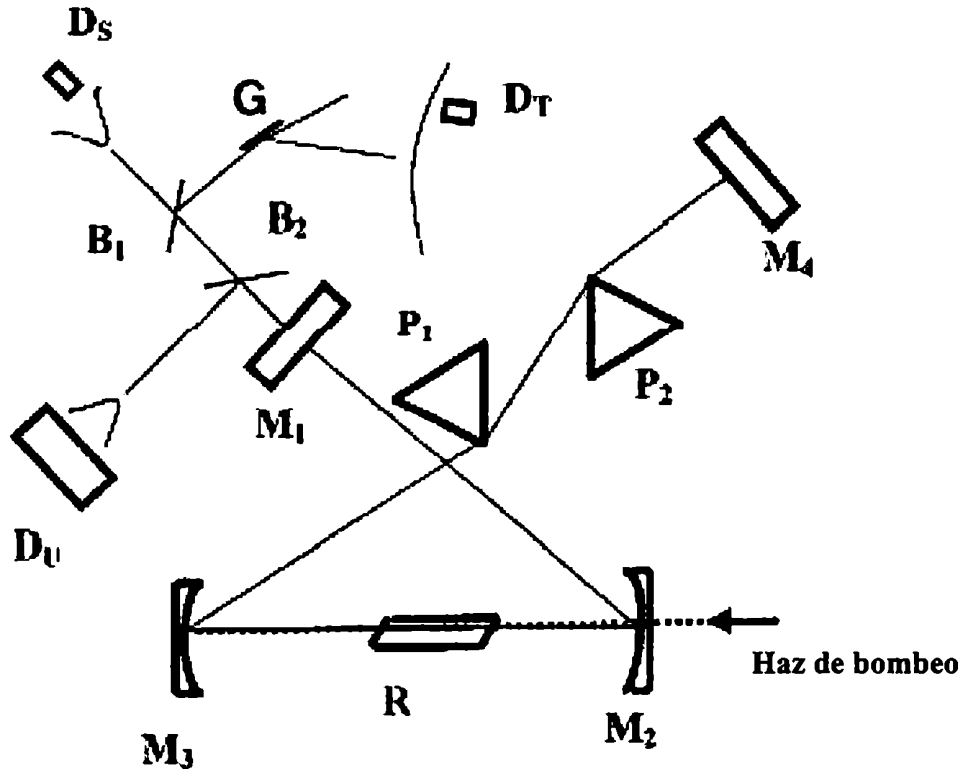


Figura 3.2: Láser de Ti:Zafiro con el setup de medición. B_1, B_2 : beam splitters; G:red de difracción (1200mm^{-1}); D_U, D_S, D_T : fotodiodos rápidos.

La salida del láser pasa a través de dos divisores de haz (*beam splitters*). Uno de los haces es colectado por el fotodiodo D_U , que monitorea la energía total del pulso. Este fotodiodo (EG&G YAG 444) tiene un área grande, de 1cm^2 , de modo que el spot es colectado siempre. Para detectar las variaciones pulso a pulso en el tamaño de spot dirijo el otro haz hacia el fotodiodo D_S (Melles Griot 13 DSH001). Este tiene un área activa mucho más pequeña (0.2mm de diámetro) que el spot en ese lugar ($2.5 - 5\text{mm}$ de diámetro). Para las variables temporales, duración de pulso y chirp, y teniendo en cuenta que no hay instrumentos capaces de registrar las variaciones pulso a pulso en el rango de los femtosegundos, empleo un método indirecto de medición.

Asumo que cualquier modificación en la duración del pulso o en el chirp necesariamente se reflejará en el ancho de banda, tal como ocurre en el caso de un pulso solitónico. En consecuencia el tercer haz es enviado hacia una red de difracción en incidencia casi rasante y el fotodiodo D_T , de iguales características que D_S , es colocado cerca de uno de los extremos del espectro, donde la sensibilidad a fluctuaciones en el ancho de banda es presumiblemente mayor. Uso el primer orden de difracción y separo D_T 789mm de la red. La resolución espectral estimada en estas condiciones es de 0.25nm. A fin de registrar las variaciones pulso a pulso envío las señales de cada uno de los fotodiodos a un osciloscopio de 400 MHz en modo barrido simple (*single sweep*). Los parámetros que se varían en la búsqueda de inestabilidades son: la distancia x del espejo de salida al espejo M_2 y la GVD neta de la cavidad. El resto de los parámetros son mantenidos fijos. Comienzo con un tren de pulsos estables y en la región de GVD neta total negativa, por ende entro en la región inestable introduciendo más el prisma dentro de la cavidad, y con un valor fijo de x . Repito el mismo procedimiento para distintos valores de x .

Una clara confirmación de la existencia de inestabilidades ocultas se puede observar en la figura 3.3.

En la figura 3.3a observamos la señal del fotodiodo D_S que detecta el tamaño del haz, donde se produce una variación alternada pulso a pulso o doblamiento de período. En la figura 3.3b apreciamos la señal de D_T simultánea con D_S . Aquí se ve un tren de pulsos estable, lo que indica que no hay variaciones en las variables temporales. Desplazo la posición de D_T a lo largo de todo el espectro corroborando que el ML es estable para todas las longitudes de onda. Por su parte el fotodiodo D_U , que monitorea la energía, registra un ML estable. Otro tipo de inestabilidades en el tamaño del haz son observadas para diferentes posiciones de x . En la figura 3.3c el spot size viaja alrededor de un valor originalmente estable en una variación de baja amplitud de período muy largo. Eventualmente el ML parece estabilizarse para luego volver al ciclo cuasi periódico. Este comportamiento tiene el aspecto de lo que se conoce como bifurcación tangente [2-17]. Un período tres se observa en la figura 3.3d. Todos estos comportamientos son típicos de los no lineales y confirman la conveniencia de la descripción con mapas.

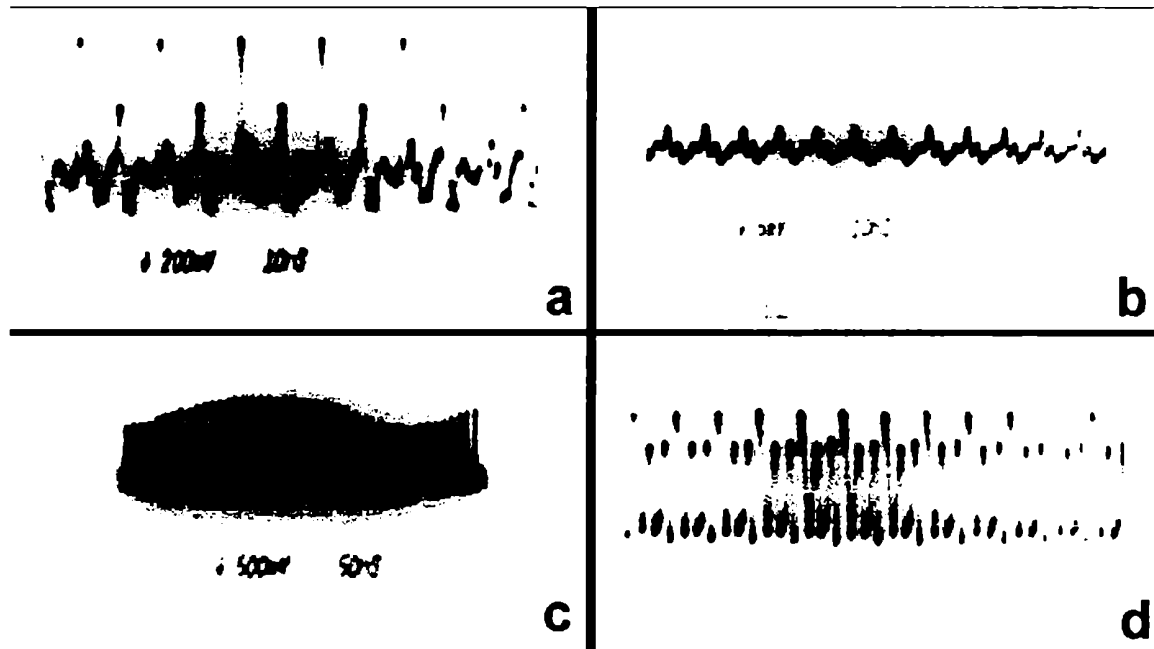


Figura 3.3: Traza en modo barrido simple del osciloscopio de las señales de los fotodiodos. a: Doblamiento de periodo en D_3 ; b: Simultáneamente con a D_7 muestra mode locking estable; c: D_3 muestra lo que se asemeja a una bifurcación tangente; d: D_3 muestra un periodo 3. Escalas: a, b y d: 10ns/división (modo reduced scan); c: 50ns/división.

Cabe destacar que el spot size no es la única variable que se desestabiliza. Una apropiada elección de la GVD y del parámetro x permite observar doblamientos de periodos e incluso señales caóticas en cualquiera de las variables. Sin embargo es notable que la duración de pulso y el chirp nunca son las únicas variables inestables. Sólo se hacen inestables si alguna de las otras variables, en general la energía o el spot size, también lo hacen. Esto tiene consecuencias prácticas importantes a la hora de detectar inestabilidades ocultas cuando se busca un tren de pulsos estable para alguna aplicación. El hecho de que el tamaño del haz o la energía estén siempre involucrados en el comportamiento inestable, hace que sea suficiente agregar al setup normal un fotodiodo de área pequeña, como el mencionado D_3 , conectado a un osciloscopio en modo *single sweep*. Si se descubre una inestabilidad durante la operación del láser, el tren de ML estable puede recuperarse, aunque en general a costa de un aumento en la duración de pulso, ajustando el valor de la GVD de modo tal que la GVD negativa dentro de la cavidad sea mayor.

3.3 Determinación de la biestabilidad

Como hemos visto en el Capítulo 2, del modelo surgen tres modos de operación pulsados, cuyas zonas de estabilidad tienen regiones de superposición. Queremos determinar experimentalmente si el láser puede operar realmente en cualquiera de estos modos y si se encuentran zonas en donde coexisten.

Partimos de una posición de x (definido en el Capítulo 2) de 58cm y un tren de pulsos de ML estable. El espectro del láser, medido con un arreglo de fotodiodos de resolución 2nm, nos muestra una forma de campana (figura 3.4); si disminuimos la GVD neta total dentro de la cavidad, introduciendo más prisma, en algún momento el espectro pasa a tener la forma de la figura 3.5. Existe, además, un punto en el cual el láser pasa de un espectro al otro espontáneamente. Mientras tanto, la duración de pulso, medida a través de un autocorrelador interferométrico (ver Apéndice III-2), nos indica que se produce un aumento en la duración del pulso para el modo de la figura 3.5.

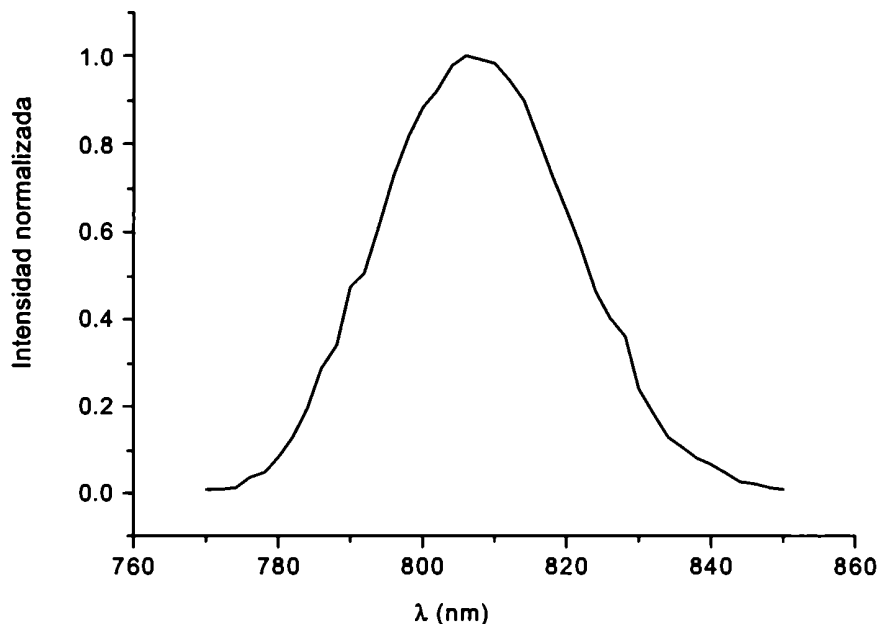


Figura 3.4: Espectro del régimen de mode locking con pulsos limitados por transformada, que denominamos P_1

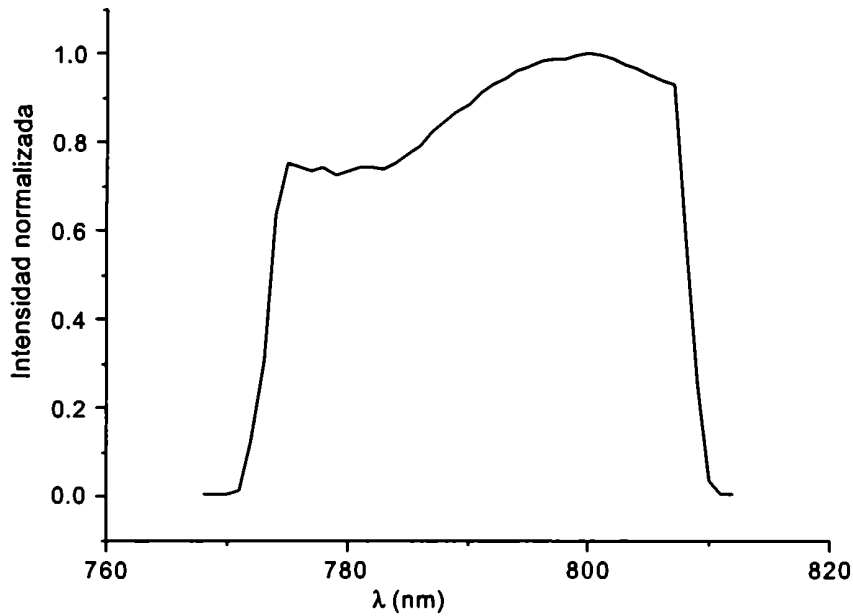


Figura 3.5: Espectro del régimen de mode locking con pulsos con chirp positivo, que denominamos P_2

Si calculamos la relación ancho de pulso – espectro para cada uno de los modos, hallamos que el correspondiente a la figura 3.4 es limitado por transformada y con chirp el restante. Identificamos entonces al primero con el modo P_1 y con P_2 al último.

Modo	$\Delta\tau\Delta\lambda$ [fs nm]
Limitado por transformada(teórico)	1000
P_1	992.96
P_2	2105.95

Tabla 3.1: Relación ancho de pulso – ancho de espectro medida para los modos pulsados del láser y su comparación con el valor teórico

3.4 Duración de pulso en función de la GVD para cada modo

El modelo, a través de las relaciones (2.22) y (2.23), predice que la pendiente de la recta que resulta de graficar la duración de pulso en función de la dispersión neta total dentro de la cavidad, es, para el modo P_2 el doble que para P_1 . En particular, a igual GVD, es decir en la zona biestable, la duración de los pulsos limitados por transformada (P_1) es la mitad que la de los correspondientes al modo P_2 (pulsos con chirp a la salida). En esta sección determinaremos la validez de esta predicción en forma experimental.

Para ello ajustamos el láser a una posición donde P_1 es estable. Midiendo la separación entre los prismas y el camino del haz dentro de la cavidad, obtenemos el valor típico de GVD neta por round trip. Para P_1 resulta alrededor de -120 fs^2 . En esta posición, el ruido mecánico, por ejemplo un golpe sobre el posicionador de uno de los espejos, induce transiciones entre P_2 y P_1 . En estas condiciones, movemos “hacia adentro” uno de los prismas, agregando más vidrio en el camino y, en consecuencia, reduciendo el valor absoluto de GVD en la cavidad. De acuerdo a los valores tabulados de GVD para el *fused silica* un avance del prisma de 0.5 mm introduce 20.32 fs^2 de GVD positiva. Midiendo la posición del prisma y la correspondiente duración de pulso, determinamos la pendiente de la recta. Cerca de los -100 fs^2 , zona biestable, el láser pasa de P_1 , con duración de pulso de 38 fs FWHM , a P_2 con pulsos de 66 fs FWHM .

Modo	Pendiente [fs^{-1}]
P_1	0.32
P_2	0.61

Tabla 3.2: Valores medidos de la pendiente de la recta duración de pulso vs. GVD para los modos P_1 y P_2

En concordancia con la predicción de los mapas, obtuvimos que el valor de la pendiente para el modo con pulsos limitados por transformada es, teniendo en cuenta los errores experimentales, el doble que el correspondiente al modo con pulsos chirpeados.

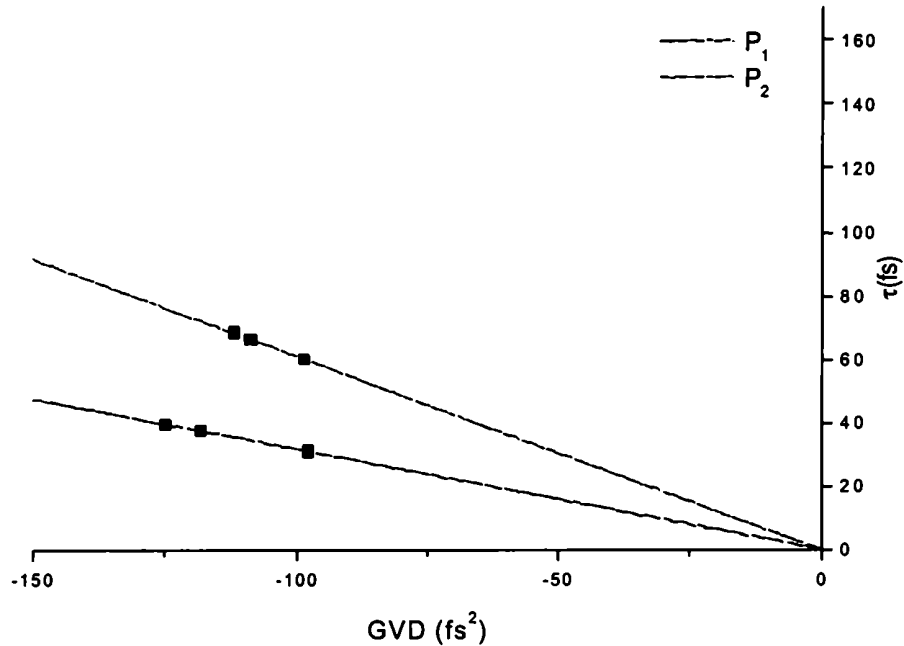


Figura 3.6: Rectas duración de pulso vs. dispersión de la velocidad de grupo neta total dentro de la cavidad para los modos P_1 y P_2 .

Cabe notar que los valores de pendientes medidos son aproximadamente un orden de magnitud más grandes que los calculados en simulaciones previas por otros autores [3-3, 2-4], lo que indica que, en la práctica, los efectos no lineales, que son proporcionales a C_β , son mucho menores que los esperados. En nuestras simulaciones numéricas, el valor de C_β se adapta al valor que surge de las mediciones.

3.5 Comportamiento de los modos pulsados

Con las regiones de estabilidad de cada modo de operación en mente (figura 2.2 Capítulo 2), podemos entender ahora el comportamiento del láser fácilmente. Para valores grandes de GVD negativa, tanto P_1 como P_2 son estables, y las perturbaciones

mecánicas pueden inducir transiciones entre estos modos. Si introducimos vidrio en la cavidad, el punto de operación se desplaza hacia la izquierda, atravesando el límite de estabilidad de P_1 . De acuerdo a la figura 2.2 del Capítulo 2, la transición ocurre, para $x = 58$ cm, a -150 fs^2 para una duración de pulso, del modo P_1 , de 49 fs, mientras que la medición arroja un valor de -112 fs^2 y $\tau = 37$ fs, en excelente e inesperada concordancia cuantitativa.

Lo destacable, en resumen, es que para “mucho vidrio” dentro de la cavidad sólo el modo P_2 es estable. Metiendo todavía más vidrio, también P_2 se hace inestable y el láser colapsa al único modo estable, P_0 , (CW). Esta descripción es válida para cualquier valor del parámetro x .

Vale la pena destacar que la existencia de una solución con chirp con regiones de estabilidad más grandes que las de la solución con pulsos limitados por transformada había sido reportada hace mucho tiempo [3-4, 3-5].

De la atenta observación de las regiones de estabilidad surgen dos interrogantes: ¿porqué el modo P_3 , con pulsos chirpeados negativamente no es observado?, y ¿Cómo es posible que, a pesar de la inevitable coexistencia con el modo P_2 , el modo P_1 es lo suficientemente estable como para ser empleado en la práctica?

La respuesta a estas preguntas está en el valor numérico de los autovalores. Si son pequeños (en módulo) indican que cualquier perturbación al punto fijo desaparece en unas pocas iteraciones, i.e. en pocos tránsitos por la cavidad. Inversamente, autovalores cercanos a 1, indican que cualquier perturbación hace que el punto representativo del sistema viaje, en el espacio de las fases, durante un número importante de iteraciones en la vecindad del punto fijo. En consecuencia, el módulo de los autovalores es una medida de la capacidad real del punto fijo de retener el sistema. Podemos pensar los autovalores como una medida de cuan “empinadas” son las “paredes del potencial” (en verdad, la superficie de Lyapunov), que rodea el punto fijo estable.

Aún en su región estable, los cálculos muestran que el módulo de los autovalores de P_3 está muy cercano a 1 y es siempre más grande que el de los modos P_1 y P_2 . Como la región de estabilidad de P_3 está completamente incluida en las regiones estables de los “más empinados” puntos fijos P_1 o P_2 , el sistema es atraído marginalmente hacia P_3 .

El mismo argumento es aplicable para explicar porqué el láser prefiere P_1 a P_2 en la región de GVD negativa grande. Los módulos de los autovalores de P_2 son más grandes

que los de P_1 y P_2 por un factor 2 salvo, claro está, en la región donde P_1 se hace inestable.

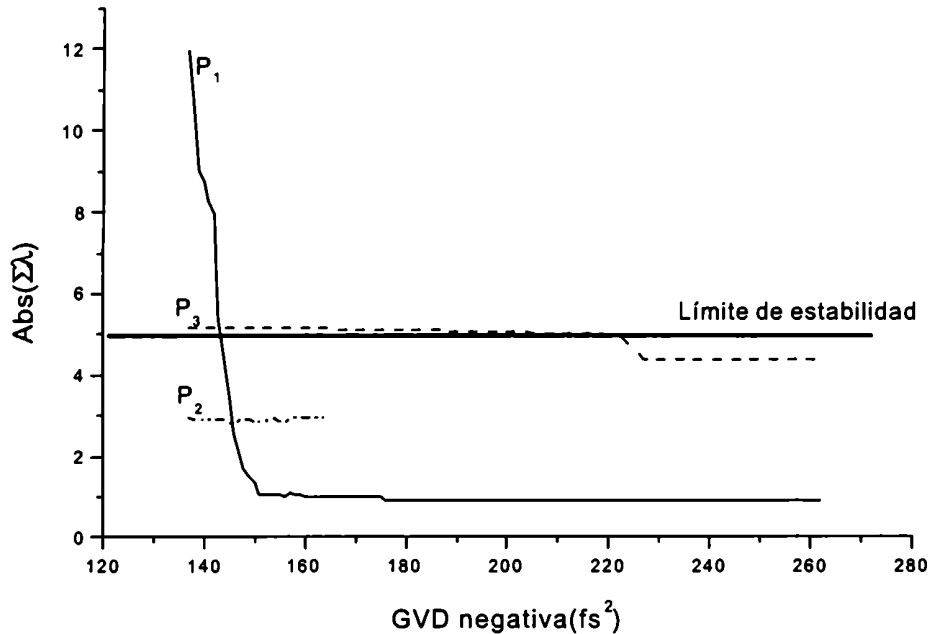


Figura 3.7: Gráfico del módulo de la suma de los 5 autovalores para los modos de funcionamiento pulsado en función de la GVD neta en la cavidad

Esta “ventaja” de P_1 es debida a su menor duración de pulso, lo que induce no linealidades más fuertes. El “precio” de esta ventaja es una región estable más reducida.

3.6 Obtención de las series temporales

Hasta aquí hemos visto como es posible, a través de mediciones de observables del láser en el régimen de mode locking estable, contrastar propiedades del sistema y predicciones del modelo. Las soluciones para la condición de punto fijo de las ecuaciones del modelo, que definen los distintos modos de funcionamiento del láser, fueron observados midiendo la duración de pulso y el ancho del espectro. Por otra parte, el análisis de autovalores y autovectores nos permite delimitar las regiones de estabilidad. Nuevamente su determinación experimental se basa en la medición de la

duración de pulso y el cálculo de la GVD dentro de la cavidad. Sus límites, sobre el láser, mostraron notable coincidencia con los valores del modelo. Las predicciones de biestabilidad y de la relación de duración de pulso entre ambos modos también fueron corroboradas en base a las mediciones de observables en el tren de pulsos estable. Sin embargo para una acabada caracterización del sistema necesitamos comprender cómo se comporta en la zona caótica. En primer lugar allí no podremos medir, por ejemplo, la duración de pulso. Aunque fuese posible, de nada serviría comparar uno de estos valores con las predicciones numéricas precisamente por el carácter caótico del sistema y la extrema sensibilidad a las condiciones iniciales. Tampoco es de utilidad para esta tarea el empleo del mapa reducido de una dimensión, ya que es en la región caótica donde pierde validez.

Nos queda, para el estudio del Ti:Zafiro en la región caótica, recurrir a propiedades del sistema como sus dimensiones en el espacio de fase, rutas al caos o exponentes de Lyapunov. Todas estas propiedades pueden ser determinadas empleando las ecuaciones del modelo. Para su comparación con la realidad necesitamos extraer la misma información a partir de mediciones sobre el láser. Una forma eficaz de obtenerla es a través del estudio de las series temporales. Por serie temporal nos referimos al registro del valor de alguna variable de salida del sistema en forma ordenada temporalmente. Describimos, a continuación, la forma en que fueron obtenidas las series temporales de este láser.

La variable de salida empleada es la señal que entrega el fotodiodo D_S , ya mencionado en la Sección 1. Dado que la duración de los pulsos está en el rango de los fs, aún empleando fotodiodos con tiempo de respuesta rápidos, del orden de 0.5 ns (como D_S), el ancho del pulso reconstruido por el osciloscopio sólo tendrá que ver con el tiempo de respuesta de la electrónica involucrada. Por otra parte, la velocidad de muestreo del osciloscopio empleado debe ser tal que nos permita obtener una cantidad razonable de puntos como para reconstruir la forma de ese pulso y debe tener suficiente memoria para almacenar la evolución del sistema durante una cantidad significativa de round trips.

Teniendo en cuenta todos estos requerimientos (y, sobre todo, las disponibilidades de nuestro laboratorio) empleamos un osciloscopio digital Tektronix, de 4GS/s, y una memoria de 50K. Los 50000 puntos adquiridos por el osciloscopio son bajados a un archivo como se observa en la figura 3.8. Dada la velocidad de muestreo del

osciloscopio y la separación entre pulsos, las series temporales, una vez procesadas, son de 2000 pulsos.

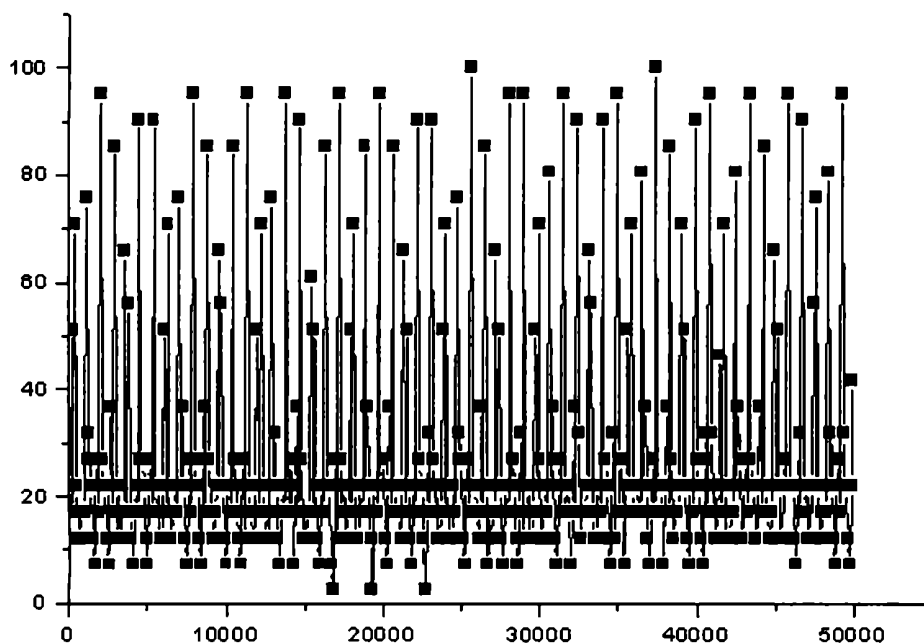


Figura 3.8: Serie temporal obtenida con el osciloscopio de 50k de memoria. Eje horizontal: puntos de la muestra (la base temporal es grabada en un archivo separado). Eje vertical: voltaje sobre el fotodiodo (normalizado).

A partir de esta serie 'cruda' debemos determinar el valor del observable en cada pulso. Diversos criterios de ajuste son posibles. El más elemental es asignar el valor al máximo de cada pulso (recuérdese que no es observable el pulso de mode locking directamente, que puede considerarse una delta, sino sólo la respuesta instrumental)

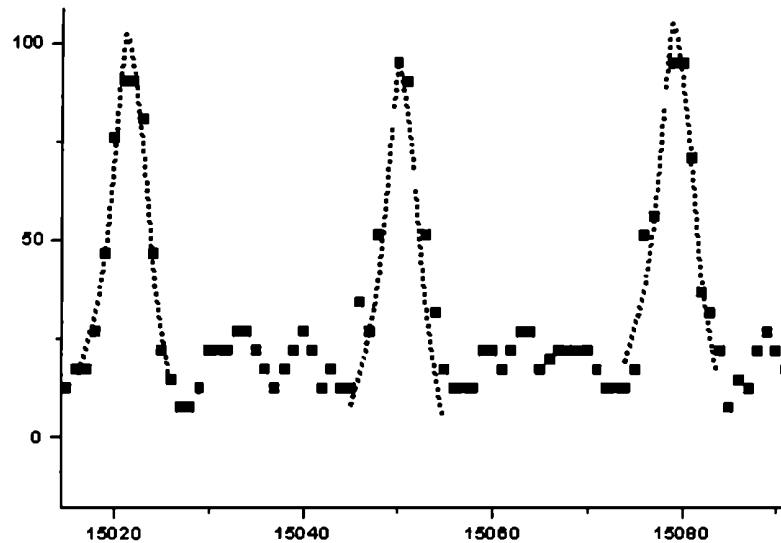


Figura 3.9: Ampliación de la Figura 3.8, donde se ven en detalle 3 pulsos de la serie. En línea punteada está dibujada una hipotética forma del pulso verdadero

El osciloscopio no necesariamente muestrea siempre el máximo real del pulso. Por ejemplo, en el primer pulso de la figura 3.9, debido a la frecuencia de muestreo, es eludido; en cambio es tomado en el segundo mientras que en el tercero nuevamente el máximo es obviado. El error es, por lo menos, incierto. Una mejora puede obtenerse al ajustar cada pulso con un polinomio de grado 4 y asignar el valor al máximo local del polinomio. De este modo evitamos la incertidumbre que presenta el criterio anterior. Para la construcción de cada polinomio empleamos diez puntos. Este es el criterio empleado por Bolton y Acton [3-6] y que se esquematiza en la figura 3.10.

Otro criterio, a priori válido para minimizar los errores, es emplear el área de cada pulso como medida del valor de la variable. Por un lado se promedian mejor los efectos de “rebote” del fotodiodo, y por otro el peso del máximo real no es tan determinante como en los métodos anteriores (figura 3.11).

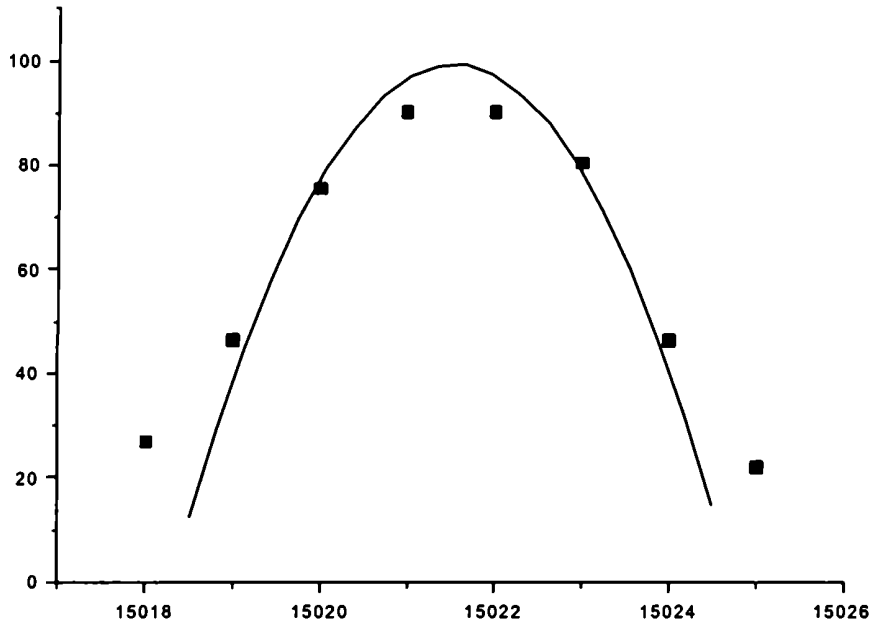


Figura 3.10: Criterio del polinomio para la asignación del máximo. La línea llena es el polinomio de cuarto grado que interpola el pulso. El valor de la serie es asignado al máximo del polinomio. Eje horizontal: puntos de la muestra. Eje vertical: voltaje sobre el fotodiodo (normalizado).

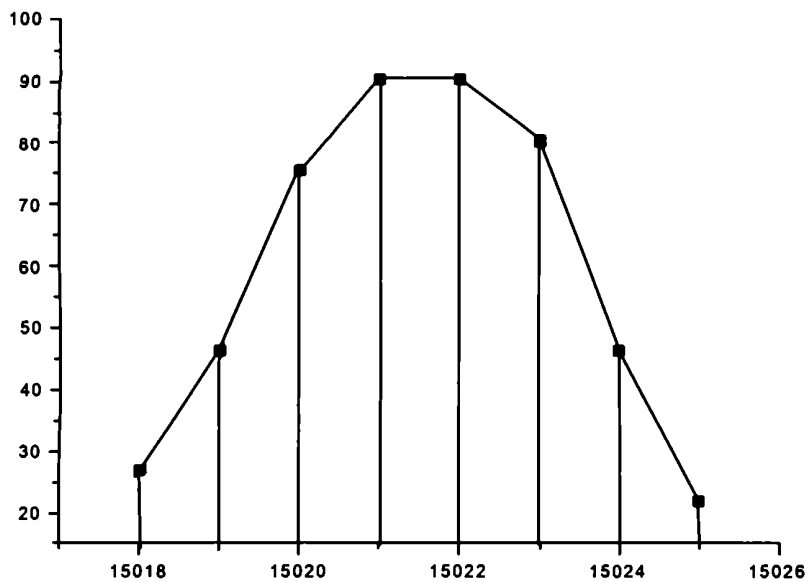


Figura 3.11: Los mismos puntos que en la figura 3.11, con el criterio del área.

He procesado las series temporales con los criterios del polinomio y del área. Es decir, desarrollé dos códigos que toman la serie temporal tal como la registra el osciloscopio y filtran el nivel de “rebote” del fotodiodo. Uno de los códigos selecciona diez puntos del pulso para generar el polinomio interpolante y determina el máximo local, mientras que el otro calcula el área que encierran los mismos diez puntos.

Dado que los algoritmos que emplearé en el Capítulo 5 para obtener, a partir de las series temporales, diversas cantidades características del sistema, son muy sensibles a contaminación por ruido, tendremos allí oportunidad de comprobar cuál de los criterios se comporta mejor en la práctica

Herramientas de dinámica no lineal

Hemos visto en el Capítulo anterior la forma en que se obtienen las series temporales experimentales. Por otra parte, de las ecuaciones del mapa, es fácil extraer series temporales de cualquiera de las variables. Ahora bien, ¿es posible, a partir de estas series, extraer información sobre el láser?. La sensibilidad a las condiciones iniciales hace que una comparación directa de las series carezca por completo de sentido. Tampoco un análisis de Fourier aportaría demasiado. Desde este punto de vista, una señal caótica poco difiere del ruido. Además, que la serie presente un espectro ancho en frecuencias, no nos habilita a afirmar que estamos ante la presencia de caos. No es sino empleando el bagaje de herramientas que nos proporciona la dinámica no lineal que podremos responder afirmativamente al interrogante inicial.

No obstante, previo al análisis de las series, creo conveniente dedicar algo de tiempo y esfuerzo a describir someramente estos instrumentos. Seguramente este Capítulo esté de más para el lector experto en el tema, quién podrá obviarlo sin más; con todo, para aquellos que no se dedican habitualmente al análisis de datos provenientes de un sistema caótico, puede ser de utilidad contar con un compendio donde encontrar rápidamente los conceptos básicos que emplearemos mas adelante para la extracción de información de la serie. De ninguna manera este Capítulo pretende ser un curso veloz de dinámica no lineal. Presentará, sí, las herramientas; privilegiando esclarecer su utilidad y funcionamiento, sacrificando, en aras de la claridad, rigurosidad matemática.

Nos concentraremos en ver cómo, a partir de una serie temporal del sistema, es posible caracterizar el conjunto de puntos en el espacio de fase a los cuales tiende la trayectoria, es decir, su atractor.

4.1 Observando el Caos

Un indicio de que estamos ante la presencia de caos se nos presenta, a primera vista, al examinar una serie temporal. Veremos una traza compleja, en apariencia desordenada y no periódica. Por otra parte un análisis de Fourier nos mostrará un ancho espectro. Finalmente deberemos notar una gran sensibilidad a pequeños cambios en las condiciones iniciales. Podemos entonces ubicar a las señales caóticas lógicamente entre las totalmente predecibles, regulares, periódicas o cuasi periódicas y las totalmente irregulares, estocásticas conocidas como ‘ruido’ y que son completamente impredecibles. El caos es irregular en el tiempo, en cierto modo predecible y tiene estructura en el espacio de fase. Pretendemos desentrañar esta estructura en el espacio de fase para poder comprender, y eventualmente controlar, el caos.

Desde el punto de vista de extraer información cuantitativa a partir de un sistema caótico, la tarea parece, a priori, bastante complicada. En primer término sólo podemos observar una o a lo sumo un par de variables del sistema. Además debemos pasar de estas cantidades, escalares, a magnitudes multidimensionales en el espacio de fase. En cuanto al primer problema, la naturaleza compleja del sistema acude en nuestra ayuda. Como vimos en el Capítulo 2, las variables están acopladas, por lo que cada una debería llevar información sobre todas las demás, en cuanto a la reconstrucción del espacio de fase a partir de una cantidad escalar veamos en más detalle el problema.

4.2 Reconstrucción del espacio de fase

Denotemos como:

$$x_i(t_0), x_i(t_1), \dots, x_i(t_j), \dots \quad (4.1)$$

una serie temporal de datos correspondiente a uno de los observables del sistema, x_i , donde el intervalo de tiempo $\Delta t = t_j - t_{j-1}$ es constante. En el caso del láser Δt está dado naturalmente por el tiempo de round trip. El atractor en un espacio de dimensión d puede ser reconstruido tomando como variable:

$$\underline{x}(t_j) = (x_i(t_j), x_i(t_j + \tau), \dots, x_i(t_j + (d-1)\tau)) \quad (4.2)$$

donde τ es lo que se conoce como tiempo de retardo o *time delay* y es un múltiplo entero de Δt y d es la dimensión de *embedding*. [Ver Apéndice IV-1]

Graficando $\underline{x}(t_j)$ para cada tiempo t_j podremos reconstruir un atractor diferente del ‘verdadero’, aunque topológicamente equivalente. La validez de esta afirmación reside en el teorema de embedding, debido a Takens y Mañé [4-1]. [Ver Apéndice IV-1]

El teorema nos asegura que el nuevo espacio euclideo d – dimensional, reconstruido a partir de una magnitud escalar observable, está relacionado al espacio original desconocido, por transformaciones diferenciales suaves. El ‘buen comportamiento’ de estas transformaciones permite la demostración de que todos los invariantes de movimiento vistos en el espacio reconstruido son los mismos que en el espacio original. Es decir, toda la información que podríamos sacar del sistema ‘verdadero’ la podemos obtener a partir de la reconstrucción hecha a partir de un observable.

Sin embargo, nada nos dice el teorema acerca de cómo seleccionar el observable. Tampoco nos asegura que la dimensión del espacio reconstruido sea la misma que la del verdadero, el teorema de embedding es geométrico, y nos da una medida del número de componentes suficientes para desplegar el atractor. Nos indica que, en teoría, es decir con un monto infinito de datos sin contaminación por ruido, es suficiente para desplegar al atractor tomar:

$$d > 2d_A \quad (4.3)$$

donde d_A es la dimensión del atractor, y d la dimensión de embedding.

Dado que d_A es, en principio, desconocida, deberemos estimar d de alguna forma iterativa hasta que ‘sature’ con cierto criterio predeterminado.

Otro aspecto importante que el teorema de embedding no menciona es la elección del tiempo de retardo. Si bien cualquier tiempo debería funcionar, al inclinarnos por un tiempo muy pequeño el atractor queda restringido a una diagonal en el espacio de fase reconstruido, mientras que un tiempo muy largo haría perder correlación a las componentes. Diversos autores proponen distintos criterios para una adecuada elección del tiempo de retardo. Por ejemplo, un criterio es tomar el mínimo de las fluctuaciones

de las integrales de correlación en una determinada región. Sin embargo es posible que estas fluctuaciones disminuyan con retardos decrecientes. Por otra parte, hallar el mínimo requiere repetir el análisis para muchos valores de retardos, lo que incrementa notablemente el tiempo de máquina consumido. Otras opciones son emplear el tiempo de autocorrelación, es decir cuando la autocorrelación alcanza un valor de e^{-1} ; una ‘ventana fija’ [4-2], que si bien es un método menos sensible a ruido puede producir una saturación espuria debido a la pérdida de información adicional a medida que la dimensión de embedding aumenta [4-3]; o el mínimo de la función conocida como información mutua (*mutual information*) [4-4]. Es este último criterio el que adopto en todos los cálculos a partir de las series temporales empleadas en ésta Tesis.

Antes de adentrarnos en el concepto de *mutual information*, destaquemos que lo principal que hemos visto hasta el momento es que, a partir de un conjunto de observaciones escalares podemos, usando un adecuado tiempo de retardo, construir cantidades vectoriales en un espacio de dimensión m que no tiene cruzamiento de órbitas por proyecciones de un espacio de mayor dimensión. Hemos determinado el número suficiente de componentes de estos vectores y nos queda por ver el valor necesario para la dimensión d así como la forma de seleccionar el tiempo de retardo. Ausente un teorema que nos indique la forma ‘ideal’ de esta selección, nos vemos obligados a adoptar algún criterio. Para no hacer del todo arbitraria esta elección fijemos algunas propiedades que sería conveniente que tuviera el candidato elegido.

- Que sea un múltiplo del tiempo de muestreo del observable τ_m , dado que sólo poseemos datos de esos tiempos.
- Si τ es muy corto, las coordenadas $x_i(t_j)$ y $x_i(t_j + \tau)$ que pretendemos emplear en el vector de reconstrucción no serán suficientemente independientes, es decir el sistema no habrá evolucionado en el espacio de fase como para aportar nueva información sobre el sistema. Por ejemplo, si nuestro objeto de estudio fuese un fluido viscoso, usar un τ de 1 ns haría que las mediciones en t y en $t + \tau$ fuesen para todo propósito práctico las mismas, con el único resultado de un sobremuestreo innecesario del sistema.
- Por otra parte, y dado que el sistema caótico es intrínsecamente inestable, un τ demasiado grande haría perder correlación entre una medición y la siguiente, haciendo que los valores del observable en t y en $t + \tau$ sean, en definitiva, aleatorios.

- Finalmente es deseable que la forma de evaluar τ sea lo más económica posible en tiempo de cálculo.

4.3 Información mutua

El concepto de información mutua entre mediciones se debe a Shannon [4-5]. La información mutua entre mediciones a_i extraídas de un conjunto $A = \{a_i\}$ y mediciones b_j extraídas de un conjunto $B = \{b_j\}$ es el monto aprendido sobre una señal por haber medido la otra, en bits:

$$\log_2 \frac{P_{AB}(a_i, b_j)}{P_A(a_i) P_B(b_j)} \quad (4.4)$$

donde $P_{AB}(a, b)$ es la densidad de probabilidad conjunta de obtener a y b en las mediciones de A y B . En tanto que $P_A(a)$ y $P_B(b)$ son las densidades de probabilidades individuales para las mediciones de A y B . En un sistema determinístico estas ‘probabilidades’ son evaluadas mediante la construcción de un histograma de a_i o b_j .

Si el valor a_i que resulta de medir A es completamente independiente de la medición de B , que da por resultado b_j ; entonces $P_{AB}(a, b)$ se factoriza como $P_A(a) \times P_B(b)$ y el monto de información entre las mediciones, es decir la información mutua, es, como corresponde, cero. El promedio sobre todas las mediciones es lo que se conoce como información mutua promedio entre A y B , y tiene la forma:

$$I_{AB} = \sum_{a_i, b_j} P_{AB}(a_i, b_j) \log_2 \frac{P_{AB}(a_i, b_j)}{P_A(a_i) P_B(b_j)} \quad (4.5)$$

Esta cantidad no está en absoluto vinculada con las reglas de evolución, sean estas lineales o no lineales, de las magnitudes medidas. Se trata estrictamente de un conjunto de ideas teóricas que conectan dos conjuntos de mediciones entre sí y establece un criterio para la dependencia de la información mutua. Nos valdremos de esta conexión para dar forma a la noción de cómo vincular las mediciones de un observable al tiempo t y $t + \tau$.

Tomemos como el conjunto A las mediciones de nuestro observable en el tiempo t , $x_i(n)$ y como conjunto B $x_i(n + \tau)$, entonces la información mutua promedio entre las dos mediciones, es decir, el monto en bits aprendido por las mediciones de $x_i(n)$ por haber medido $x_i(n + \tau)$ es:

$$I(\tau) = \sum_{x_i(n), x_i(n+\tau)} P(x_i(n), x_i(n+\tau)) \log_2 \frac{P(x_i(n), x_i(n+\tau))}{P(x_i(n)) P(x_i(n+\tau))} \quad (4.6)$$

Se puede demostrar [4-5] que $I(\tau) > 0$, además $I(0)$ está directamente relacionada [4-4] con la entropía de Kolmogorov, [ver Apéndice IV-2], que puede ser vista como una cantidad que mide el ‘grado de caoticidad’ del sistema.

Cuando τ se hace muy grande, el comportamiento caótico de la señal hace que las mediciones $x_i(n)$ y $x_i(n + \tau)$ sean en la práctica independientes, con lo que $I(\tau)$ tiende a cero. Podemos pensar a $I(\tau)$ como una especie de autocorrelación no lineal para determinar cuándo los valores de $x_i(n)$ y $x_i(n + \tau)$ son lo suficientemente independientes como para ser empleados en el vector de reconstrucción del espacio de fase y al mismo tiempo no tan independientes como para estar totalmente desvinculados entre sí. La sugerencia clásica [4-6] es tomar como valor de τ donde ocurre el primer mínimo de $I(\tau)$.

4.4 Dimensión de embedding y concepto de falsos vecinos

Queremos ahora determinar el número de coordenadas necesarias para desplegar el atractor, sin que se produzcan cruzamientos de una misma órbita debido a que el atractor está proyectado sobre una dimensión menor. El número entero más bajo que cumpla estas condiciones es lo que denominamos dimensión de embedding.

Como ya hemos visto, el teorema de embedding nos dice que si la dimensión del atractor es d_A , podremos desplegarlo empleando una dimensión $d_E > 2 d_A$. No es la dimensión necesaria, sino que nos dice cuándo dejar de agregar coordenadas al vector de reconstrucción, es decir, da una condición suficiente.

Por ejemplo, la dimensión del atractor del modelo de Lorenz es $d_A \approx 2.06$, lo cual nos conduciría a $d_E = 5$, mientras que $d_E = 3$ alcanza para desplegar el atractor cuando empleamos como observaciones la variable $x(t)$ del modelo [4-7].

Supongamos que tenemos un vector del espacio de fase reconstruido:

$$y(k) = [s(k), s(k+T), \dots, s(k+(d-1)T)] \quad (4.7)$$

donde $s(k)$ es una cantidad medida y T es el tiempo sugerido por el criterio de la información mutua. Examinemos los vecinos más cercanos (*nearest neighbors*) en el espacio de fase del vector $y(k)$. Tendrán la forma:

$$y^{NN}(k) = [s^{NN}(k), s^{NN}(k+T), \dots, s^{NN}(k+(d-1)T)] \quad (4.8)$$

Si este vector es un vecino verdadero de $y(k)$, provendrá de una vecindad de $y(k)$ en un sentido dinámico. Será el más cercano anterior o posterior en la órbita. Dado que el atractor de un sistema físico real es compacto en el espacio de fase, cada punto en el espacio de fase tendrá numerosos vecinos en la medida que tengamos suficientes datos. Si, por otra parte, el vector $y(k)$ es un vecino falso de $y(k)$, llegará a su vecindad como consecuencia de una proyección desde una dimensión mayor, debido a que el atractor no está completamente desplegado en la dimensión d . Podemos aumentar la dimensión a $d+1$, y ver si el punto desaparece de la vecindad de $y(k)$, lo cual revelará que se trataba de un falso vecino. Analizando cada punto $y(k)$ y preguntando qué dimensión elimina completamente los falsos vecinos, iremos removiendo secuencialmente las intersecciones de órbitas de dimensiones más bajas, hasta quitar la última, ese momento habremos identificado la dimensión más baja que nos permite desplegar el atractor, es decir tendremos d_E .

4.5 Caos como fuente de información

4.5.1 Exponentes de Lyapunov

En un sistema cuyo movimiento se vuelve caótico, dos puntos cercanos en el espacio de fase se apartan exponencialmente en el tiempo. Esta rápida separación de las órbitas en el tiempo, que a menudo llamamos 'sensibilidad a las condiciones iniciales', es la manifestación precisa de las inestabilidades en el espacio de fase que conducen a los movimientos no periódicos que denominamos caos. Los exponentes de Lyapunov dan cuenta de la divergencia de las trayectorias en el espacio de fase. El número de estos exponentes es igual a la dimensión del espacio de fase: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_d$. En general se los ordena de mayor a menor.

El significado de los exponentes puede explicarse en forma intuitiva con argumentos geométricos. Si las trayectorias en el espacio de fase tienen la forma $e^{\lambda t}$ siendo t un índice temporal, con $\lambda < 0$ tendremos trayectorias convergentes, en tanto que trayectorias inicialmente muy cercanas serán completamente divergentes si $\lambda > 0$. Las superficies pueden ser vistas como $e^{(\lambda_1 + \lambda_2)}$ y los volúmenes como $e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)}$.

De este criterio establecemos que para que el sistema sea globalmente estable, todos los exponentes deben ser negativos, mientras que alcanza con que uno de ellos sea mayor que cero para que el sistema se convierta en inestable. Una clara presencia de caos está indicada con un exponente positivo. También vemos que la suma de todos los exponentes debe ser negativo, para asegurar que el sistema sea disipativo.

Otro aspecto destacable relacionado a los exponentes de Lyapunov, es el de los sistemas caóticos como fuente de información, tal como lo destaca Abarbanel [4-6]. Supongamos que tenemos una dada resolución con la que podemos examinar el espacio de fase. Digamos, además, que no somos capaces de resolver puntos dentro de una esfera de radio R . Entonces dos puntos $x^1(t)$ y $x^2(t)$ localizados dentro de esta esfera serán indistinguibles para nuestro sistema de medición. A un cierto tiempo posterior t' , la distancia entre estos dos puntos será $|x^1(t') - x^2(t')| \approx |x^1(t) - x^2(t)| \exp[\lambda |t' - t|]$, con $\lambda > 0$. Cuando esta distancia supere R , podremos distinguir experimentalmente las órbitas $x^1(t')$ y $x^2(t')$. La inestabilidad descubrió información que no estaba disponible un tiempo antes. La cantidad de información ganada puede cuantificarse en función de la entropía de Kolmogorov [4-6].

4.5.2 Dimensiones

El comportamiento dinámico puede también ser caracterizado por la estructura geométrica asociada al atractor. Esto se realiza por medio de un conjunto de cantidades conocidas como *dimensiones*. El significado intuitivo de la dimensión de un conjunto es el número de coordenadas o el monto de información necesaria para especificar en forma completa un punto en él. La más sencilla y conocida de las dimensiones topológicas es la Euclídea.

4.5.3 Dimensión de Hausdorff

Previo a la definición de esta dimensión, es conveniente introducir el concepto de *cubierta* o *cobertura* (*covering, coverage*) de un objeto o conjunto de puntos A . Con fines de implementar en un código de computadora suelen emplearse pequeños cubos en lugar de esferitas. Obviamente nos referimos a cubos (esferas) de igual dimensión que el espacio de fase en el cual está inmerso el conjunto A .

Consideremos la cobertura de un conjunto A por cubos de lado l y sea $N(l)$ el número mínimo de estos cubos requerido para la cubierta. La dimensión de Hausdorff de A , se define como :

$$D_H(A) = - \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\log N(l)}{\log l} \quad (4.9)$$

Se puede probar fácilmente que para objetos regulares, como un punto, un segmento, una superficie o un cuerpo en el espacio ordinario, esta dimensión es 0, 1, 2 y 3. En caso de objetos más complicados, como un atractor, la dimensión de Hausdorff no coincide con la dimensión topológica y puede ser un número no entero. Si además, éste es mayor que la dimensión topológica, se dice que el objeto es 'fractal'. Por este motivo se suele denominar a la dimensión de Hausdorff como dimensión fractal.

D_H puede ser evaluada a partir de (4.9), sin embargo para $D_H > 2$ esta expresión se vuelve impráctica. Un procedimiento alternativo es calcular otro tipo de dimensiones

fractales que aportan la misma información sobre la dinámica del sistema y que son más sencillas de evaluar en forma numérica.

4.5.4 Dimensiones generalizadas, dimensión de correlación

Consideremos una serie temporal de algún observable del sistema, tomada a tiempos t_j separados por intervalos regulares τ . Dividamos el espacio m -dimensional en cajas de lado l^n , y denotemos p_i , la probabilidad de hallar el punto $\underline{x}(t_j)$ en la celda i , es decir la probabilidad con la cual el sistema visita la celda i durante la evolución temporal.

Podemos definir un conjunto infinito de dimensiones 'generalizadas' como:

$$D_K = - \lim_{l \rightarrow 0} \frac{1}{k-1} \frac{\log \sum_i p_i^k}{\log l} \quad (4.10)$$

donde la suma se extiende sobre el número total de celdas, $N(l)$.

La dimensión D_0 es la dimensión de Hausdorff. Por su parte la dimensión D_1 es:

$$D_1 = - \lim_{l \rightarrow 0} \frac{S(l)}{\log l} \quad (4.11)$$

donde:

$$S(l) = - \sum_i p_i \log p_i \quad (4.12)$$

es una cantidad con la forma de una entropía; en nuestro caso da una medida del grado de desorden de los puntos en el atractor o, en otras palabras, el monto de información en 'bits', necesaria para localizar el sistema en una cierta celda i . Dado que la entropía es un concepto relacionado a la teoría de la información, D_1 es conocida como la 'dimensión de información'.

La siguiente dimensión, D_2 , tiene la forma:

$$D_2 = - \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\log \sum_i p_i^2}{\log l} \quad (4.13)$$

Para N grande la sumatoria representa la probabilidad de que cualquier par de puntos esté en la misma celda. Esta aproximación coincide con la 'integral de correlación' $C(l)$, la cual representa la probabilidad de que cualquier par de puntos estén separados por una distancia menor que l :

$$C(l) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \sum_{j,j'} \Theta(l - |\underline{x}_j - \underline{x}_{j'}|) \quad (4.14)$$

donde $\underline{x}_j = \underline{x}_j(t_j)$ y Θ representa la función escalón o de Heaviside.

Por esta razón D_2 se denomina 'dimensión de correlación'.

Con esto completamos el arsenal de herramientas que, a continuación, serán necesarias para procesar las series temporales. Con ellas podremos comparar las predicciones del modelo con los resultados experimentales.

5

Análisis de las series temporales

Nos proponemos ahora extraer información sobre el comportamiento del láser a partir de las series temporales. Por un lado, el Capítulo 2 nos proporcionó las ecuaciones del modelo que simulan el láser, de las cuales es muy sencillo extraer series temporales; por otro, obtuvimos, en el Capítulo 3, las series temporales experimentales. Un asunto que dejamos sin resolver en aquel momento fue la determinación del nivel de contaminación por ruido de los métodos empleados en la interpolación de las series.

Sabemos que el ruido, en oposición a las señales generadas por caos determinístico, presenta muy alta dimensión. Podemos, entonces, mediante el método de los falsos vecinos cuantificar el nivel de ruido de nuestras series. En un gráfico de porcentaje de falsos vecinos en función de la dimensión, veremos que no decrecerá con un aumento en la dimensión, sino que, por el contrario, llegará a un mínimo para luego volver a crecer en el caso de contaminaciones mayores o alcanzará una meseta en un valor que por lo general ronda el 30% para ruido moderado.

Juzgo conveniente, en este punto, un breve comentario acerca de qué entendemos por ruido. Claramente, empleando otras herramientas, como por ejemplo el análisis de Fourier, el caos mismo sería calificado como “ruido”. Desde el punto de vista de la dimensionalidad del espacio de fase reconstruido, requerido para desplegar el atractor, consideramos “ruido” cualquier otro sistema dinámico con dimensión de embedding d_E muy alta. Es decir que si la dinámica que nos interesa tiene una dimensionalidad cinco, veremos una señal de dimensión diez como ruido, mientras que si el sistema bajo análisis fuese de dimensionalidad quince esa misma señal dejaría de calificar como ruidosa.

En las siguientes secciones de este Capítulo veremos cómo implementar en la práctica los códigos que nos permitirán evaluar magnitudes como los falsos vecinos o la dimensión de embedding. Aplicaremos estos códigos a las series medidas y a las generadas, comparando los resultados obtenidos en ambos casos.

5.1 Método de falsos vecinos

5.1.1 Determinación del nivel de ruido

El algoritmo que empleo para la determinación del porcentaje de falsos vecinos en función de la dimensión está basado en el trabajo de Kennel *et al.* [5-1] El programa busca los vecinos más cercanos de cada punto de la serie en dimensión m para luego iterar un paso hacia adelante, incrementando en uno la dimensión. Si la distancia entre un punto y su vecino vista en la dimensión $m + 1$ relativa a la misma distancia en dimensión m excede cierto valor umbral, diremos que el punto en cuestión es un falso vecino. La salida del programa es el porcentaje de falsos vecinos en función de la dimensión. En el Apéndice 5.1 puede hallarse una descripción más detallada de la matemática involucrada en la confección del algoritmo.

Tomo cada serie temporal experimental y la proceso con los tres criterios de ajuste descritos en el Capítulo 3, del máximo, del área y del polinomio. A cada una de las series resultantes le aplico el programa de los falsos vecinos. En la figura 5.1 vemos el resultado para una serie en particular. Para la ajustada con el criterio del máximo tenemos un comportamiento errático de los falsos vecinos y notamos cómo a medida que la dimensión crece no hay una tendencia a cero. La correspondiente al área si bien presenta una forma descendente, en ningún caso llega a cero sino que tiende a estabilizarse alrededor de un valor de falsos vecinos de 35%, lo que denota contaminación. Finalmente la serie procesada con el criterio del polinomio es la que se comporta correctamente para una señal de baja dimensionalidad, es decir alcanza un valor de falsos vecinos igual a cero para una determinada dimensión (en este caso 3), valor que se mantiene en cero para dimensiones mayores.

Las variaciones relativas entre pulsos para la serie de la figura 5.1 no son mayores al 10%; para series que presentan variaciones relativas mayores, el criterio de ajuste por el área empareja en calidad al del polinomio, mientras que el del máximo continúa mostrándose defectuoso.

En base a esta evidencia decido emplear para todos los cálculos que siguen las series procesadas con el criterio del polinomio.

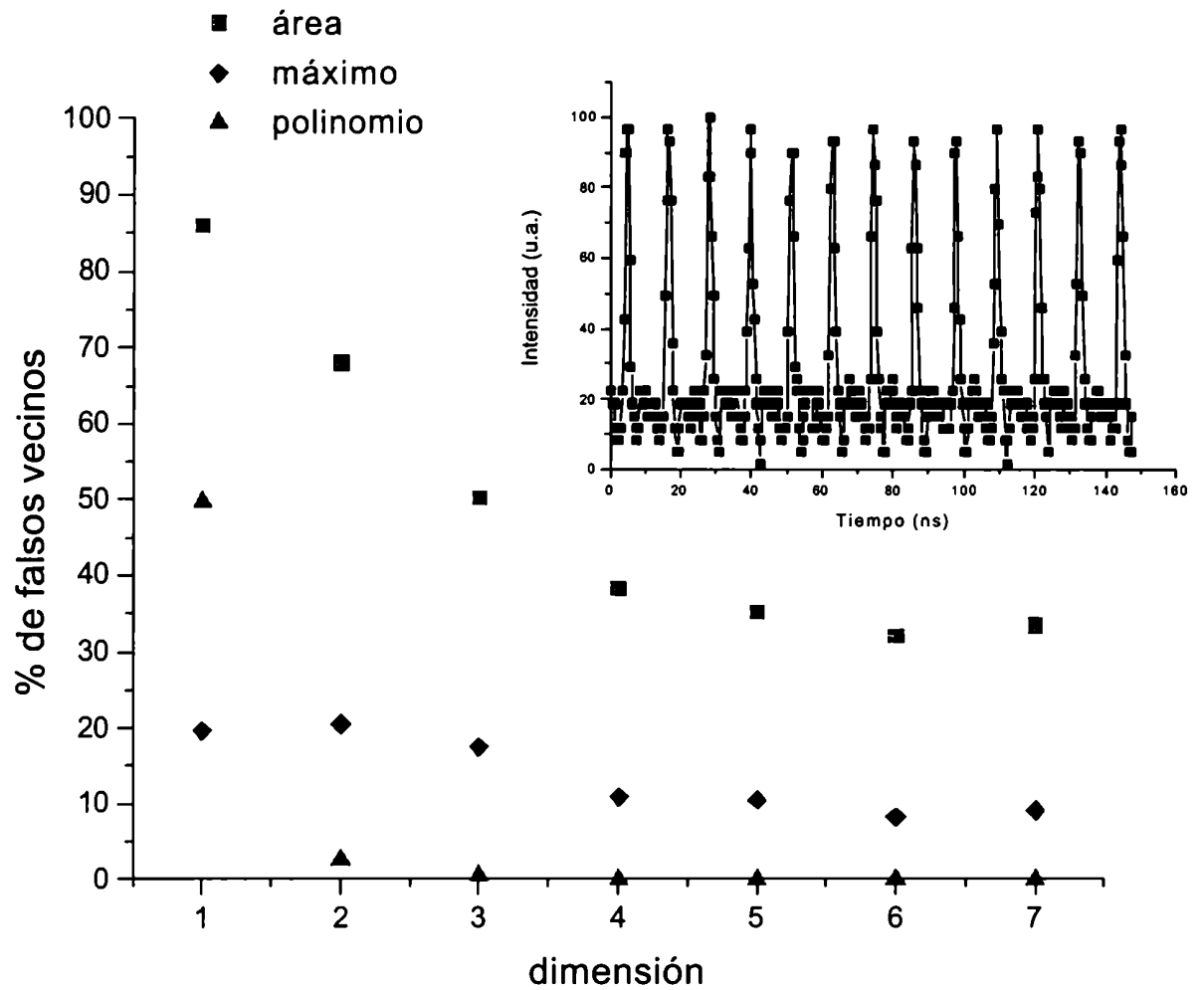


Figura 5.1: Gráfico de falsos vecinos vs. dimensión para una serie temporal experimental del Ti:Zafiro (insertada en la figura un segmento)

5.2 Caracterización del atractor

En esta sección nos dedicaremos a determinar las dimensiones del atractor. Nos concentraremos en la dimensión de embedding, d_E , y la dimensión fractal D_2 . Previamente nos encargaremos de corroborar la no linealidad de la señal mediante el método de datos sustitutos conocido como *surrogate data*. Si bien sabemos que el

sistema que genera nuestra serie temporal, el láser de Ti:Zafiro, es no lineal, el hecho de que un sistema contenga componentes no lineales no prueba que esta no linealidad sea también reflejada en algún observable medido. Después de todo, no queremos que en el análisis de los datos se reflejen nuestros prejuicios subyacentes sobre el sistema, sino que sean una fiel muestra de la estructura presente en las series. Consecuentemente, cualquier estudio basado en datos debe ser sometido a controles que prevengan la errónea interpretación de los mismos [5-2].

5.2.1 Datos sustituidos

La idea básica del código que realiza este procedimiento es tomar la serie, transformar Fourier los datos originales, hacer aleatorias las fases, lo que hace perder determinismo, y volver a transformar Fourier. Los detalles de este método pueden encontrarse en [5-2]. La figura 5.2 toma como base la misma serie de la figura 5.1, interpolada con el método del polinomio. Claramente observamos la falta de convergencia en los datos sustituidos. Este mismo procedimiento lo realicé para todas las series temporales, tanto experimentales como simuladas, verificando que la dinámica observada procede en efecto de la no linealidad del sistema y no es un efecto espurio .

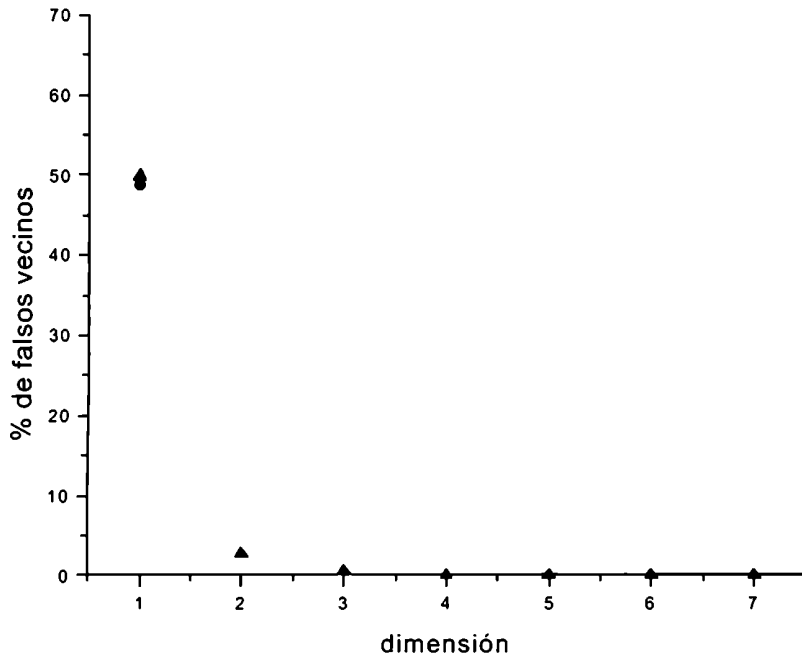


Figura 5.2 Serie temporal experimental fiteada con el criterio del polinomio (triángulos rojos) y la misma serie sustituida (círculos azules)

5.2.2 Dimensión de embedding

Realizo, sobre el láser de Ti:Zafiro, un barrido en GVD registrando, para cada modo, diversas series temporales desde la correspondiente a un mode locking estable hasta una con un tren de pulsos aparentemente caótico. Dado que el fotodiodo empleado en las mediciones colecta la totalidad del haz del láser, lo que se está midiendo es la energía del pulso. Procesando las series con el método de los falsos vecinos determino la dimensión de embedding. Además, midiendo la inserción de uno de los prismas dentro de la cavidad, calculo el rango de GVD necesario para hacer la transición completa desde el mode locking estable hasta el caos desarrollado.

Por otra parte, con las ecuaciones del modelo (2.8) – (2.12), genero, para cada uno de los modos, códigos que arrojan por resultado series temporales de las cinco variables del sistema. Para una posterior comparación con los resultados experimentales, retengo solamente las correspondientes a la energía. En estas simulaciones los valores de los

parámetros del sistema, así como los valores de punto fijo son ajustados de acuerdo a mediciones que realicé sobre el láser.

Variando el parámetro de GVD recorremos así la transición, desde el mode locking estable hasta una situación aparentemente caótica. En la figura 5.3 vemos, para el modo P_1 , dos situaciones; en 5.3a) para un valor de GVD tal que la dimensión de embedding es, tanto en las simulaciones como en las series experimentales, tres; en 5.3b) la GVD neta total es disminuida (en el láser equivale a “agregar vidrio”) obteniendo una dimensión de embedding cuatro. Las figuras 5.4 a) y b) reflejan las dimensiones de embedding para distintos valores de GVD, para el modo P_2 . Nuevamente la d_E es cuatro.

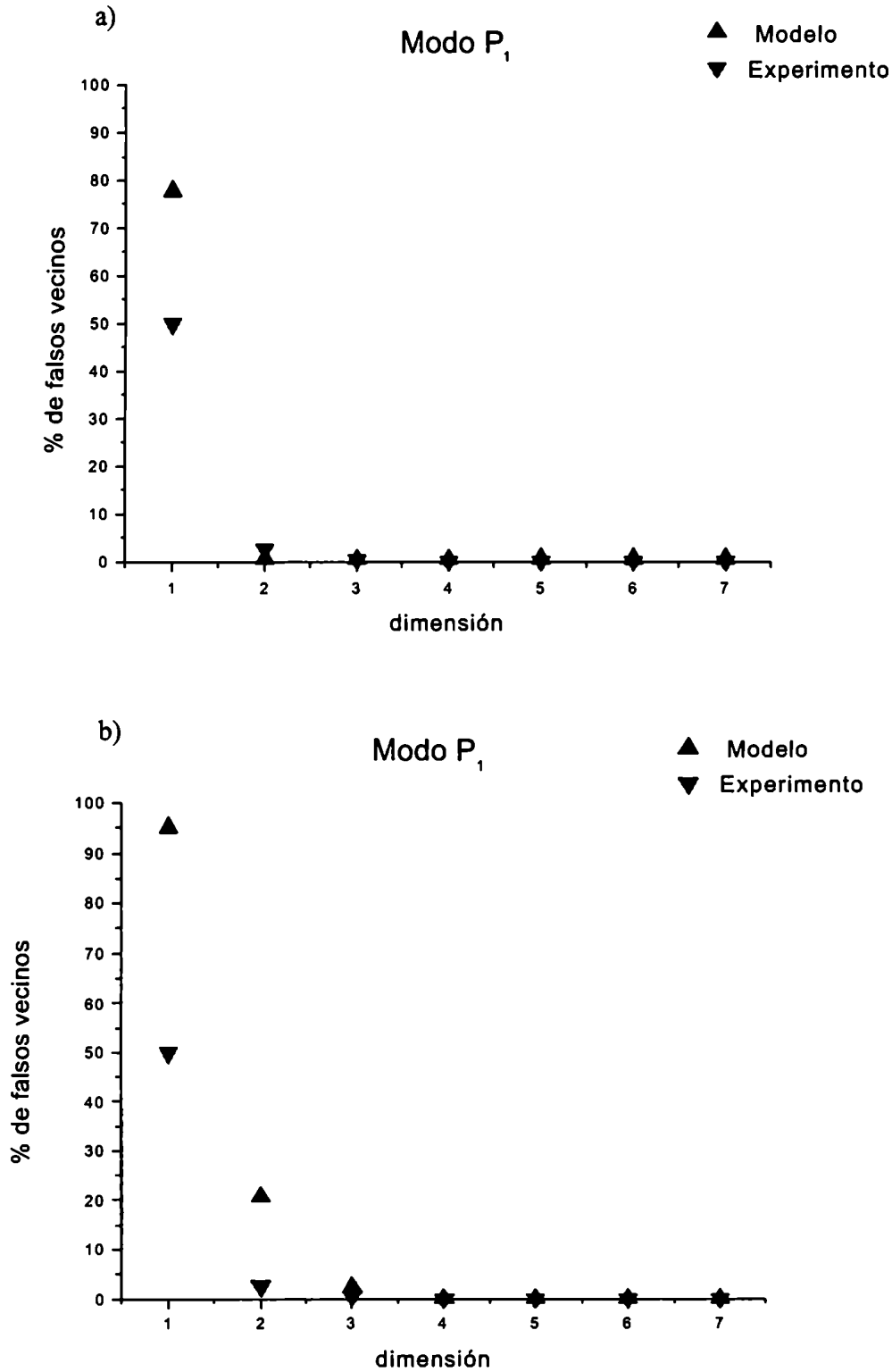


Figura 5.3: determinación de la dimensión de embedding para el modo P_1 . a) dimensión de embedding 3 (en dimensión 2, % de falsos vecinos: 2.67 experimento y 0.68 modelo). b) dimensión de embedding 4 (en dimensión 3, % de falsos vecinos: 2.67 experimento y 0.68 modelo)

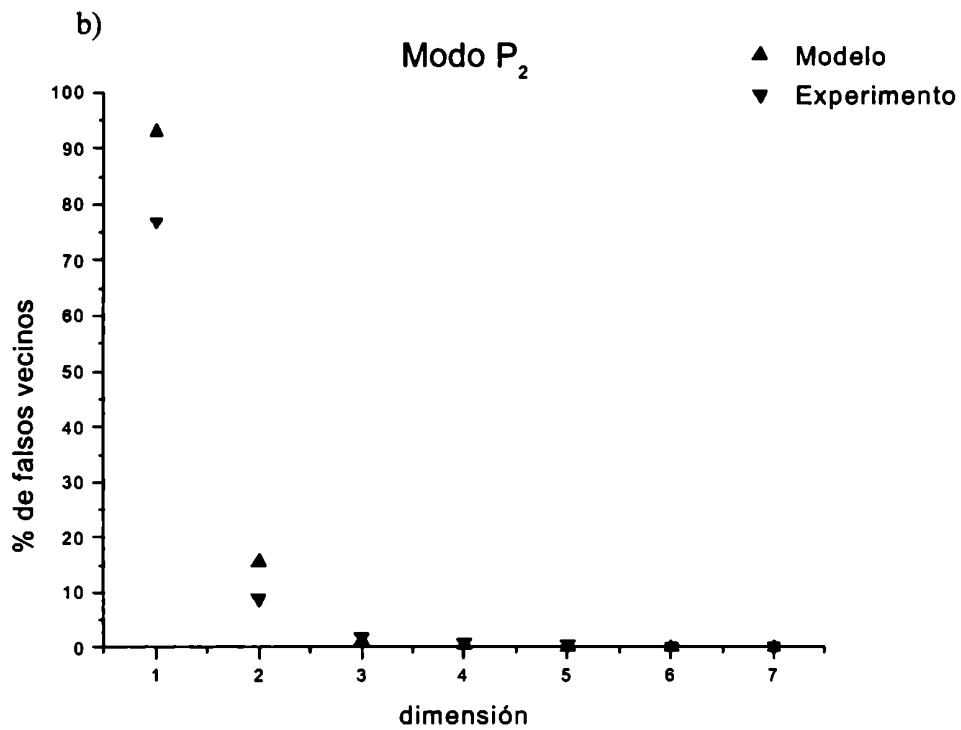
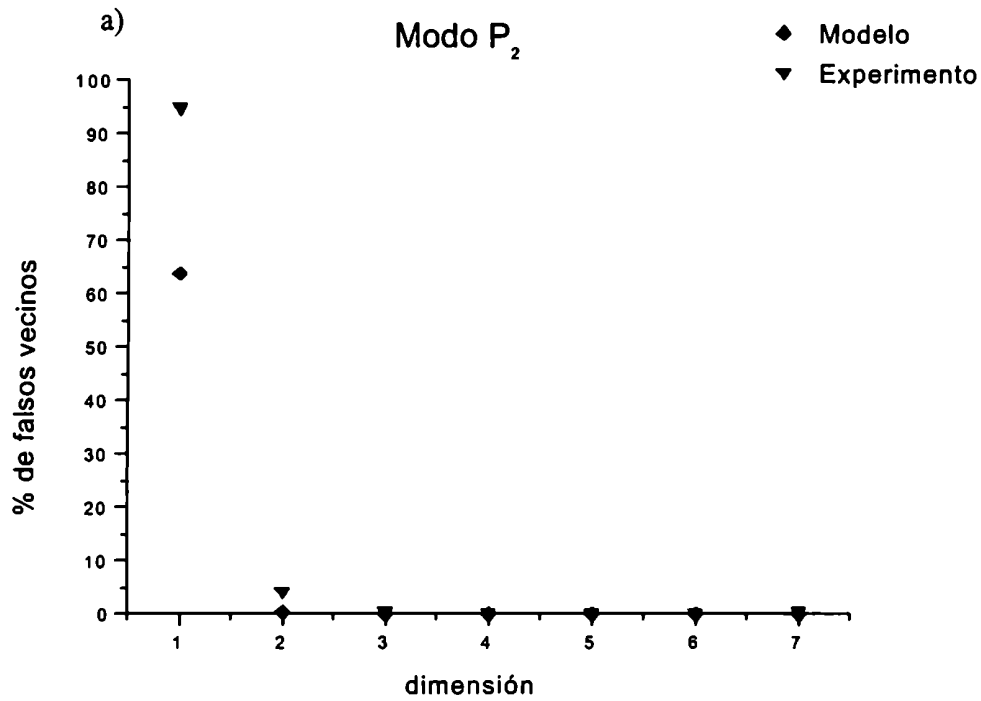


Figura 5.4: determinación de la dimensión de embedding para el modo P_2 . a) dimensión de embedding 3 (en dimensión 2, % de falsos vecinos: 4.27 experimento y 0.33 modelo). b) dimensión de embedding 4 (en dimensión 3, % de falsos vecinos: 1.93 experimento y 1.15 modelo)

5.2.3 Del mode locking estable al caos

Pretendo determinar cuánta GVD es necesaria para pasar de la operación estable al caos desarrollado. De las ecuaciones del modelo surge que a partir de un cierto valor, una disminución en la GVD no conlleva un aumento en la dimensión de embedding. El valor mínimo de GVD en el cual la dimensión de embedding es máxima es el que establezco como límite, donde el sistema alcanza el régimen caótico.

Experimentalmente, los valores se estiman a partir del gráfico de la dimensión de embedding en función de la GVD para las series experimentales, ver figura 5.5. Para el modo P_1 esta transición se logra con una variación de 130fs^2 según el modelo, mientras que la medición arroja un valor de 40fs^2 (Tabla 5.1). La discrepancia en el ancho de la transición se entiende teniendo en mente los siguientes elementos: En primer término el modelo predice pulsos estables para cualquier valor suficientemente grande de GVD negativa (recordar que no hay límite de estabilidad hacia la derecha en el gráfico de la figura 3.2), hecho que en la realidad es imposible de lograr, ya que la separación entre prismas impone un límite a la GVD negativa máxima, y que al operar muy cerca de los extremos de los prismas se producen inestabilidades debidas a las imperfecciones en sus bordes. Esto hace que, aunque el modelo prediga un valor de -150fs^2 como límite de estabilidad, en la práctica sólo se consiga mode locking estable para un valor de GVD de hasta aproximadamente -110fs^2 . Por otra parte, las ecuaciones para cada modo, como vimos en el Capítulo 2, deben ser simuladas por separado, es decir que no es un único mapa el que, según el valor de los parámetros, pasa de pulsos limitados por transformada a chirpeados; esto hace que el mapa no contenga información sobre las interacciones con el modo P_2 , que en esa región del espacio de parámetros es estable, conduciendo a una transición más larga. En la realidad, sin embargo, estas interacciones hacen que la zona de transición se vea reducida.

Para el modo P_2 , en cambio, los efectos que mencionamos para el modo P_1 no son relevantes, observando plena coincidencia en el valor de la transición: 11fs^2 para el experimento y 12fs^2 para el modelo (ver Tabla 5.2 y figura 5.6). Por un lado, la transición completa se produce para valores de GVD negativa menores, lo que evita trabajar muy cerca del borde de los prismas, y por otro la zona inestable de P_2 también lo es de P_1 , con lo que la omisión de los efectos de interacción entre modos que surge del tratamiento con mapas no afecta los resultados.

Modo P_1	Ancho de la transición [fs ²]
Modelo	130
Experimento	40

Tabla 5.1: GVD necesaria para pasar de mode locking estable a $d_E=4$ según el modelo y el experimento, para el modo P_1 .

Modo P_2	Ancho de la transición [fs ²]
Modelo	12
Experimento	11

Tabla 5.2: GVD necesaria para pasar de mode locking estable a $d_E=4$ según el modelo y el experimento, para el modo P_2 .

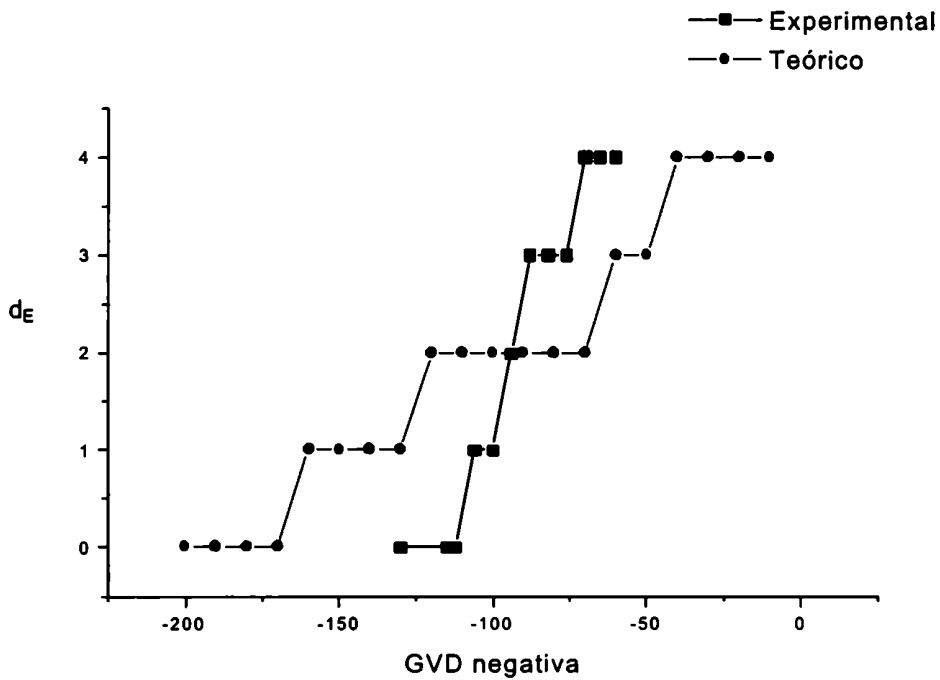


Figura 5.5: Transición desde la operación estable hasta el caos desarrollado para el modo P_1 . Eje horizontal: GVD neta dentro de la cavidad en fs². Eje vertical: dimensión de embedding.

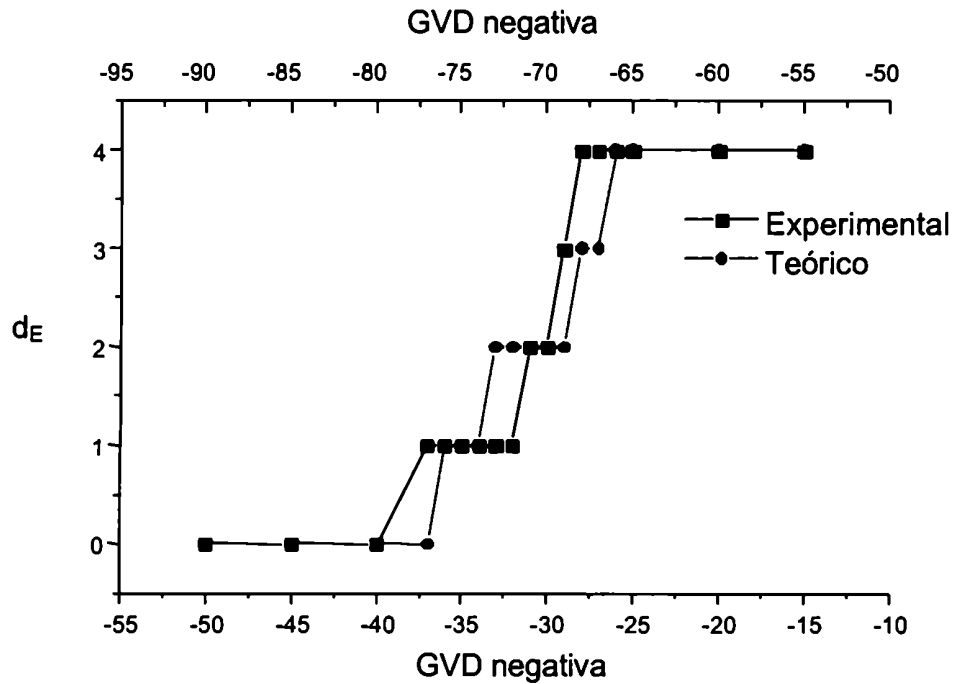


Figura 5.6: Transición desde la operación estable hasta el caos desarrollado para el modo E. Eje horizontal: GVD neta dentro de la cavidad en fs^2 . Superior: experimento. Inferior: teórico. Eje vertical: dimensión de embedding.

5.2.4 Dimensión fractal

Un valor no entero en la dimensión de correlación o dimensión fractal nos señala que estamos ante la presencia de un atractor extraño. Además, y dado que los algoritmos que la calculan son muy sensibles al ruido, su evaluación se constituye en una muy buena medida del grado de adecuación de las predicciones del modelo [4-7].

Empleo la idea de Grassberger y Procaccia [5-3]. Ellos desarrollaron un práctico algoritmo para evaluar D_2 basado en que la integral de correlación $C(l)$ (ecuación 4.14, Capítulo 4) es, en la práctica, proporcional a l^v para l pequeño, y v casi coincide con D_2 . Adicionalmente, el método nos entrega otra forma de evaluar la mínima dimensión de embedding, toda vez que para dimensiones crecientes, el valor de v (y de D_2) se hace constante. En cuanto a la discriminación entre caos determinístico y ruido, cuando la amplitud de las fluctuaciones en el espacio de fase producido por ruido es mucho menor que la dimensión de la celda, l , la pendiente en un gráfico $\log C(l)$ en función de $\log l$, conduce al valor de D_2 del atractor (comportamiento determinístico); en contraste,

cuando la amplitud del ruido supera la dimensión de la celda, la pendiente tiende a no converger.

Comencemos con el modelo para el modo P_1 y con una GVD de -29 fs^2 donde el láser se encuentra en la zona inestable, en una situación aparentemente caótica. En la figura 5.7 vemos el cálculo de D_2 para crecientes dimensiones de embedding. La "meseta" en más de una década en $\log(l)$ denota un comportamiento determinístico además de indicar que los elementos de la serie temporal son lo suficientemente "limpios" como para otorgar un resultado confiable. Para la determinación numérica de D_2 prefiero el gráfico de D_2 versus dimensión de embedding (figura 5.7). Allí vemos que la dimensión fractal está entre 3 y 4. En primer lugar verificamos que la dimensión de embedding que predice el modelo es, nuevamente, 4; por otra parte, al ser la dimensión fractal fraccionaria, podemos afirmar que nos encontramos ante un atractor extraño. Los

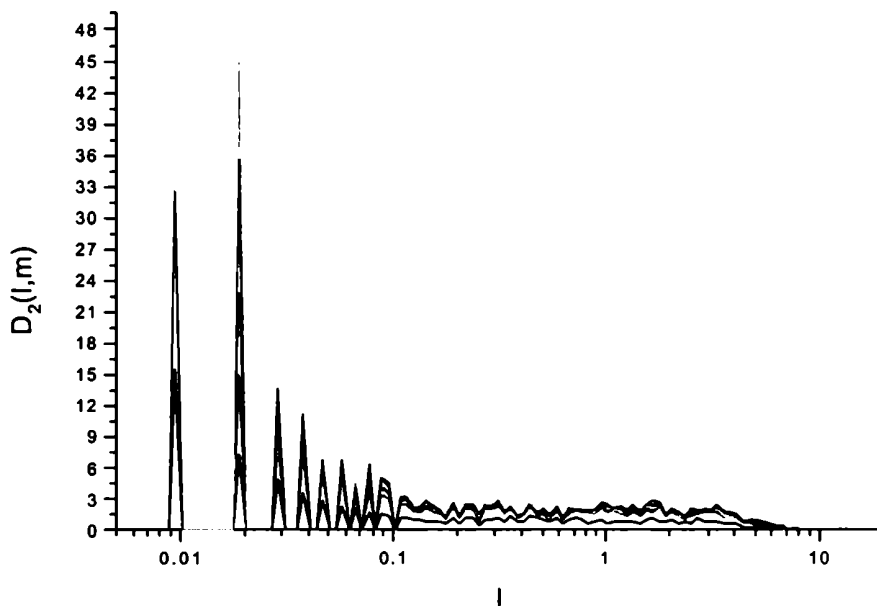


Figura 5.7: Dimensión de correlación para el modo P_1 . Las distintas curvas corresponden a dimensiones de embedding crecientes.

mismos resultados son obtenidos generando series temporales en un amplio rango de valores de GVD decrecientes. Para las series experimentales, en cambio, la posibilidad de variación en la GVD, sin que el láser deje de mode lockear, se ve acotada notablemente. Las series experimentales caóticas para el modo P_1 están confinadas en un intervalo de aproximadamente 5 fs^2 , que corresponde a una variación en la

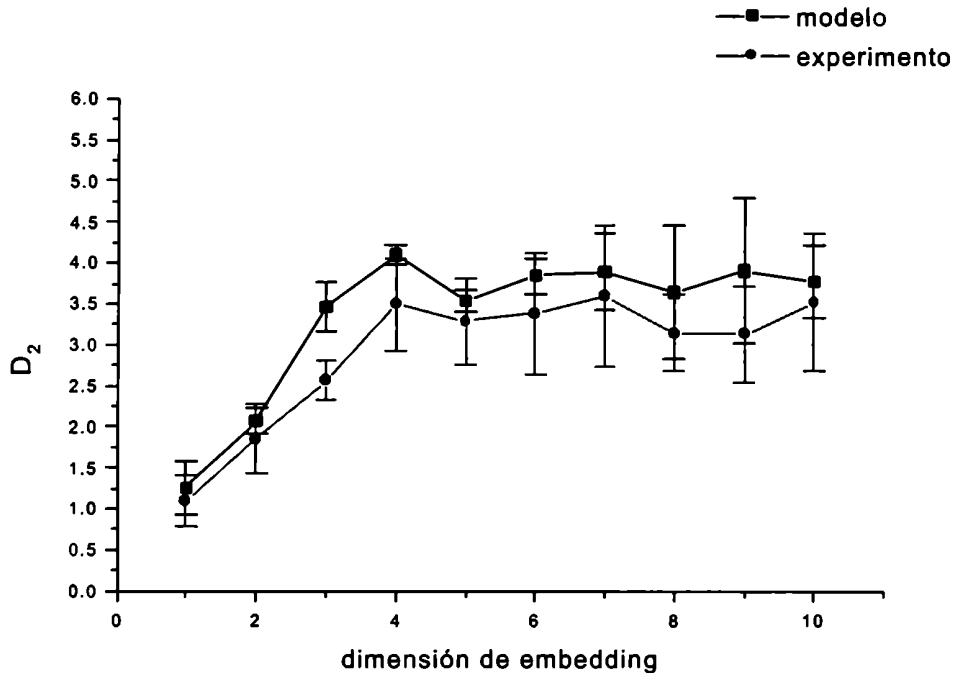


Figura 5.8: Dimensión de correlación para el modo P_1 . Cada punto de del gráfico es calculado a partir de las “mesetas” de $D_2(l,m)$ en función de $\log(l)$.

variación en la inserción de prisma dentro de la cavidad de 0.12mm. La dimensión D_2 que surge de estas series, como se ve en la figura 5.8, concuerda muy bien con los resultados del modelo.

El modo P_2 , por su parte, presenta similares características. Trabajando con el modelo genero series temporales a partir de los -25 fs^2 . Luego de verificar la existencia de la meseta en el gráfico $D_2(l,m)$ vs. $\log(l)$, aplico los mismos códigos que en el caso de P_1 , de donde surge que la dimensión de correlación es un valor entre 3 y 4 (figura 5.9). En cuanto a la comparación con el experimento destacamos que, ya que la transición completa se produce en tan sólo 11 fs^2 , es decir en media vuelta del tornillo micrométrico que controla el prisma, y que el procesamiento de las series no se puede realizar en forma simultánea con su adquisición, con lo cual no sabemos, a priori, la dimensión de la serie en cuestión, es más complicado aún que para el modo P_1 registrar series caóticas. La coincidencia con el modelo, teniendo en cuenta las barras de error, puede ser calificada como satisfactoria. Podemos afirmar, entonces, que tanto para P_1 como para P_2 , la dimensión de correlación es un valor no entero entre 3 y 4.

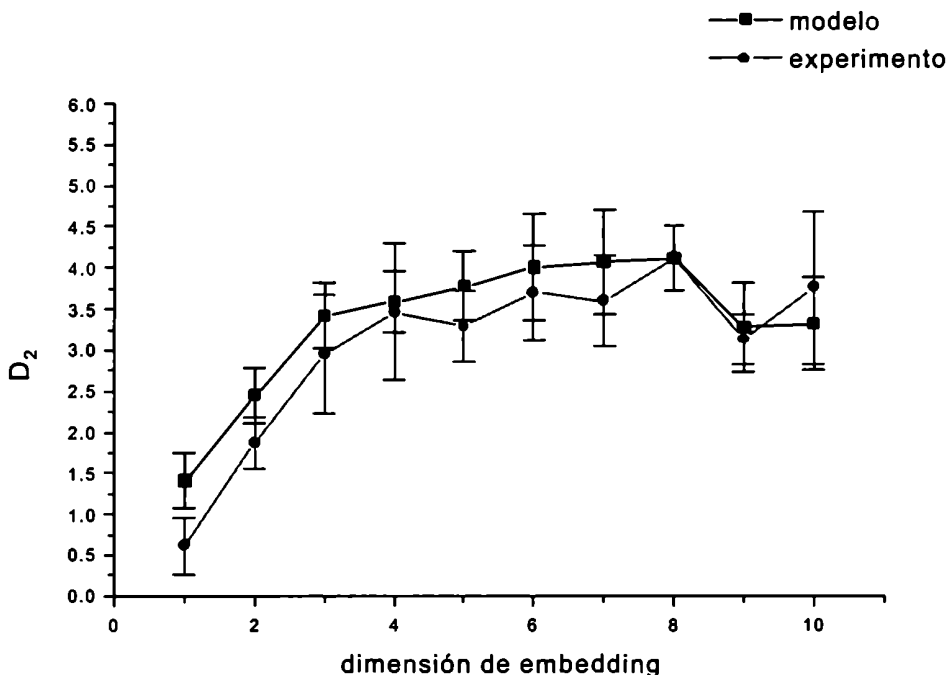


Figura 5.9: Dimensión de correlación para el modo P_2 .

5.3 Determinación de las rutas al caos

Buscamos ahora establecer tanto la forma de los atractores en el espacio de fase para P_1 y P_2 como el modo en que cada uno realiza la transición del mode locking estable hasta el caos desarrollado, es decir, su ruta al caos. Si bien las dimensiones de embedding y de correlación coinciden para ambos, no necesariamente lo harán estas otras características del atractor. La variedad de rutas al caos es muy amplia y su cantidad desconocida, sin embargo muchos sistemas comparten rutas características al caos, que son conocidas con el nombre de *escenarios* [4-7].

Para revelar las formas de los atractores debemos, partiendo del conjunto de observaciones escalares que representa la serie temporal, generar vectores. Sus componentes son los elementos de la serie espaciados por un tiempo de retardo. Su dimensión, la de embedding. Identifico el primer mínimo de la función información mutua, $I(t)$, con ese tiempo de retardo. Para evaluar la función de información mutua

empleo un código del paquete TISEAN [5-4]. El algoritmo que calcula $I(t)$ está basado en el trabajo de Fraser *et. al* [5-5].

Partiendo de series temporales con dimensión de embedding tres para ambos modos pulsados, encuentro la función información mutua $I(t)$. Para la de pulsos limitados por transformada el primer mínimo de $I(t)$ está en tres, para la de pulsos con chirp en seis (figuras 5.10 y 5.11). Identificados los mínimos de la información mutua para cada caso, estamos en condiciones de construir los vectores en el espacio de fase a partir de las series temporales. Para el modo P_1 tendremos :

$$\underline{s}_1(n) = (s_1(n), s_1(n + 3), s_1(n + 6)) \quad (5.1)$$

donde $s_1(n)$ es cada punto de la serie correspondiente al modo P_1 y dimensión de embedding tres. Para P_2 , el vector en el espacio de fase, también para dimensión de embedding tres será:

$$\underline{s}_2(n) = (s_2(n), s_2(n + 6), s_2(n + 12)) \quad (5.2)$$

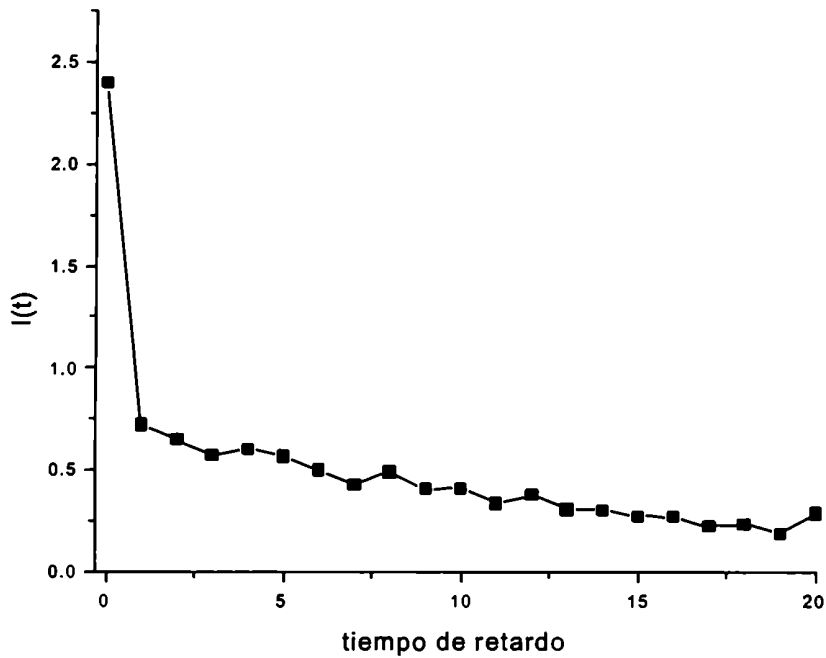


Figura 5.10: Información mutua para una serie temporal del modo P_1 . Eje horizontal: tiempo de retardo en unidades de tiempo de tránsito en la cavidad.

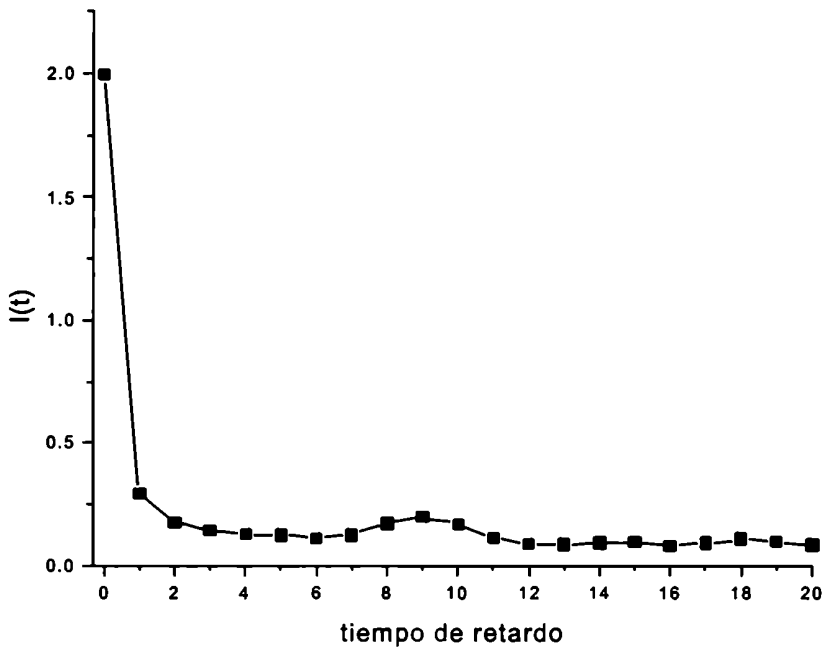


Figura 5.11: Información mutua para una serie temporal del modo P_2 . Eje horizontal en unidades de tiempo de tránsito en la cavidad

Una vez determinados los vectores $\underline{s}_1(n)$ y $\underline{s}_2(n)$ podemos observar la forma de los respectivos atractores en dimensión tres.

En la figura 5.12 vemos lo que ocurre con el modo P_1 al reconstruir el atractor en un espacio de dimensión tres a partir de una serie temporal generada con la ecuación del mapa iterativo. Es notable la forma toroidal característica de los atractores cuasi periódicos.

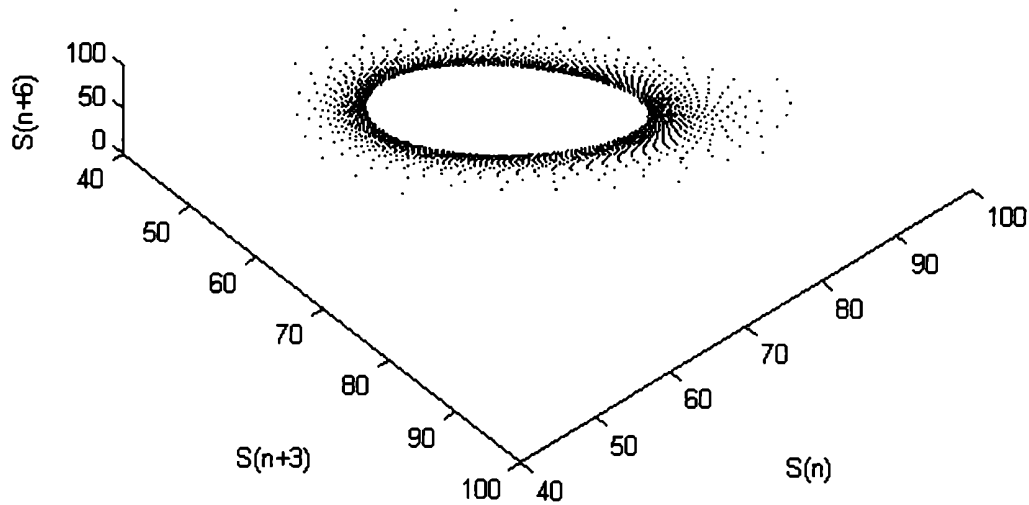


Figura 5.12 :Representación 3-D del atractor del modo P_1 generado con el vector reconstruido de series simuladas. Unidades adimensionales normalizadas en base al valor de punto fijo de la variable.

De la misma manera procedemos con una serie experimental con dimensión de embedding tres. En la figura 5.13 podemos observar que si bien el atractor reconstruido carece de la definición del creado por la simulación numérica - cuenta con un tercio de los puntos de su homólogo teórico- mantiene la misma forma toroidal. De estos gráficos rescatamos la forma toroidal característica de los atractores cuasi periódicos.

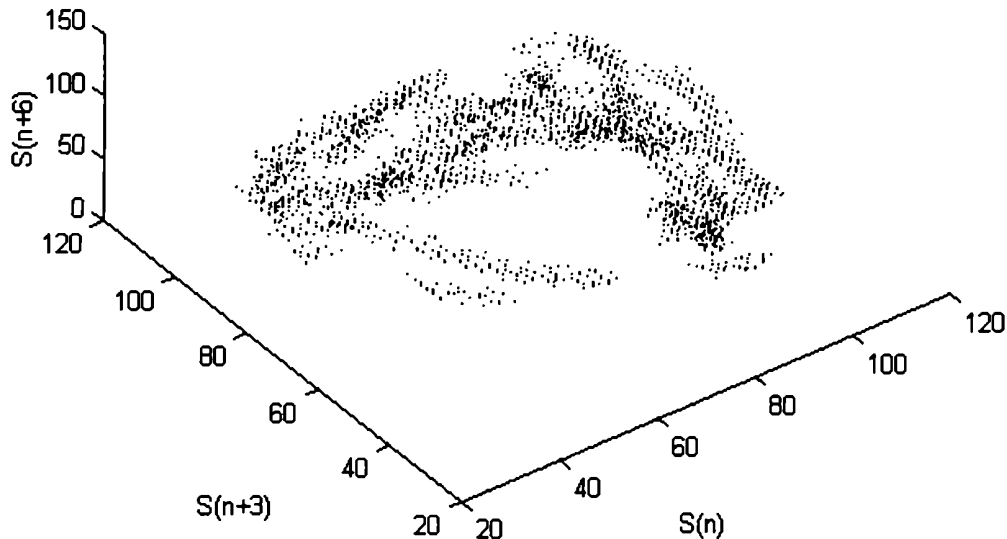


Figura 5.13: Atractor del modo P_1 en dimensión 3 obtenido en base a una serie temporal experimental. Unidades dimensionales normalizadas a partir del máximo de la serie temporal.

Una superficie toroidal aparece cuando la dinámica del sistema tiene una doble periodicidad; en esos casos, las trayectorias pueden ser descritas por dos variables independientes que, en general, son combinación lineal de las variables físicas del sistema y cuya dependencia temporal es periódica, con dos frecuencias bien definidas. Para una comparación mas adecuada de los atractores teórico y experimental, veamos, a través de un análisis de Fourier, qué obtenemos de la serie temporal que genera el toroide. En la figura 5.14 observamos, para la serie simulada con las ecuaciones del mapa, la presencia de dos frecuencias características, en 33.39MHz y 22.46MHz, además de otras, combinaciones lineales de las anteriores, en 10.93MHz y 44.32 MHz. La transformada de Fourier correspondiente al atractor de la figura 5.13 (es decir, el experimental), muestra (figura 5.15) la misma forma que el anterior, con frecuencias en 37.3MHz, 25MHz y 12.2MHz. Vemos en la tabla 5.3, que las relaciones entre los picos son coincidentes, lo que nos permite afirmar que el atractor reproducido numéricamente coincide con el generado a partir de la serie temporal experimental. Carece de sentido físico tratar de discernir, con este análisis de Fourier, si el cociente entre las frecuencias es racional o no. Lo que sí podemos decir, basados en los gráficos 5.12 y 5.13 es que no

aparecen líneas cerradas sobre el toroide (características de cocientes racionales entre las frecuencias) y sí se observa que las trayectorias cubren el toroide enteramente, con lo que las relaciones entre los picos parece ser irracional.

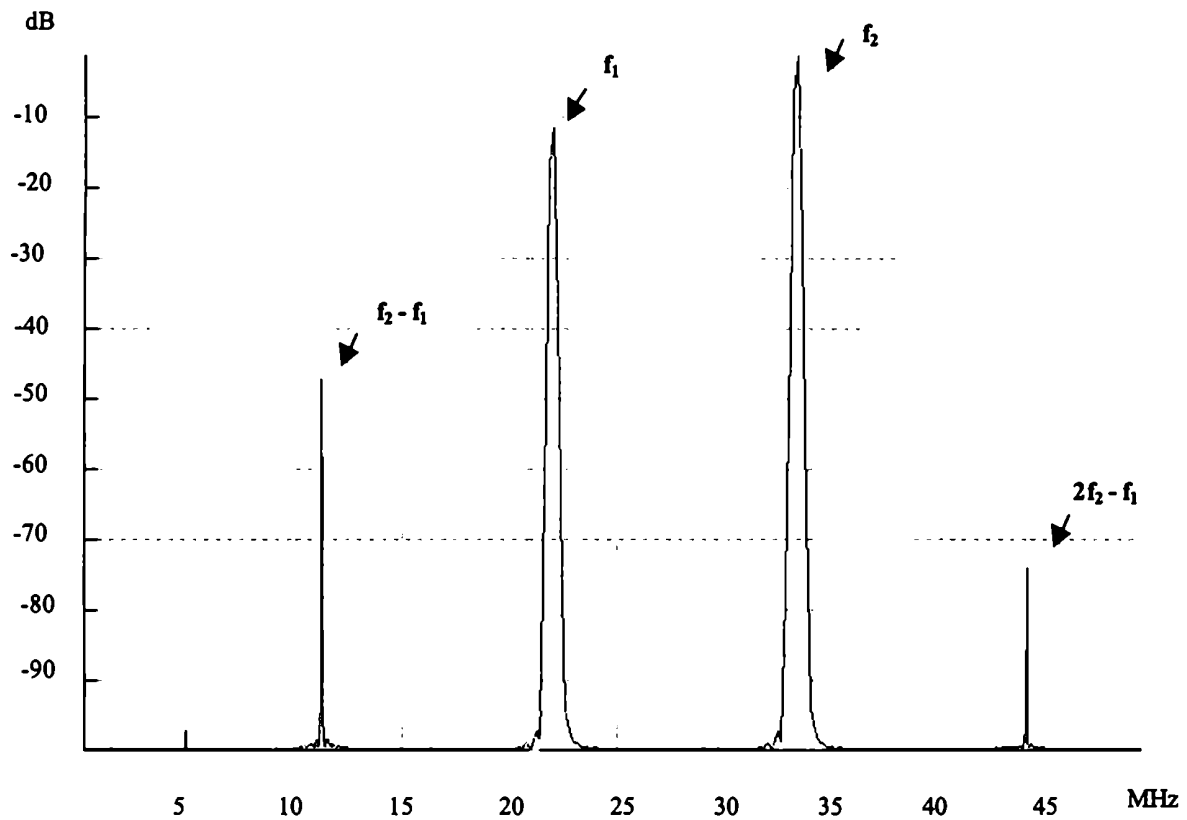


Figura 5.14: Transformada de Fourier de la serie correspondiente al atractor teórico de la figura 5.12.

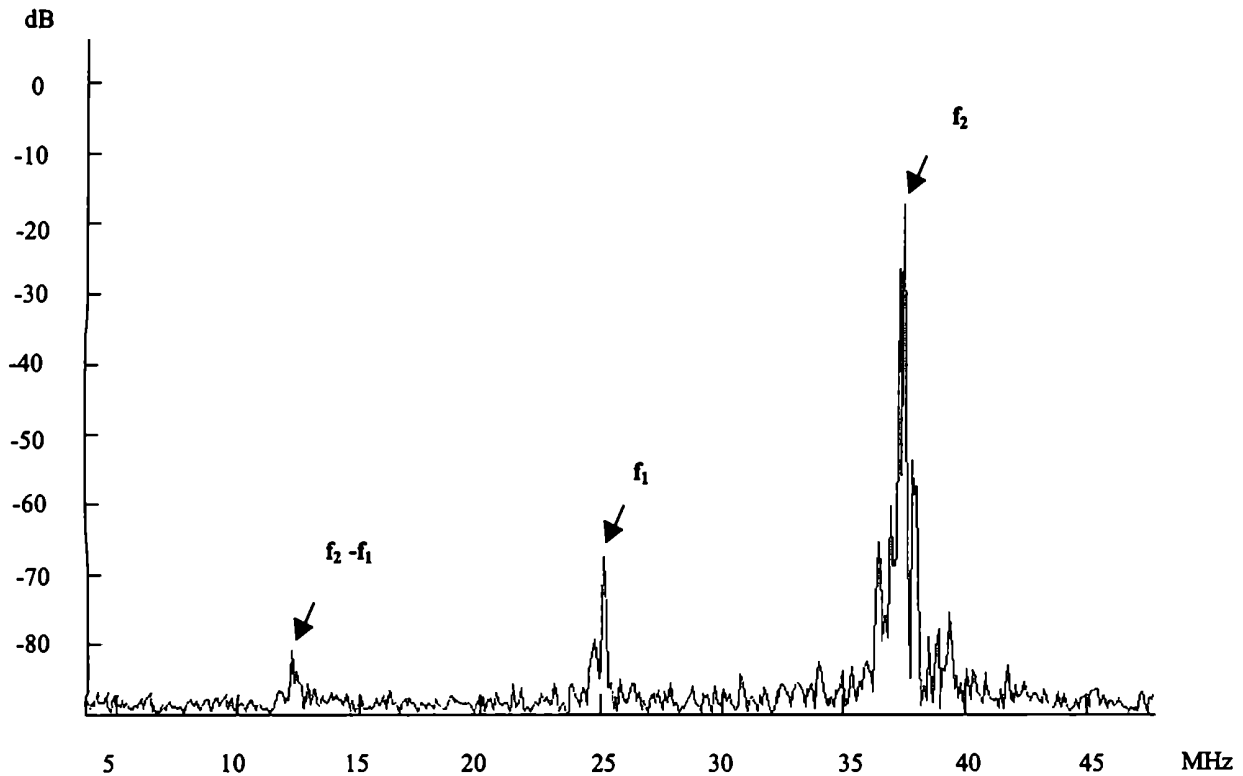


Figura 5.15: Transformada de Fourier correspondiente al atractor experimental de la figura 5.13.

	f_1	f_2	f_2/f_1	$f_2 - f_1$		$2f_2 - f_1$	
	MHz	MHz		cálculo	observación	cálculo	observación
				MHz		MHz	
modelo	22.46	33.39	1.488	10.93	10.9	44.32	44.40
experimento	25	37.3	1.492	12.3	12.2	49.6	-

Tabla 5.3 : Comparación de las frecuencias encontradas en las transformadas de Fourier de las series temporales correspondientes al modo con pulsos limitados por transformada.

El espectro de Fourier de una serie temporal experimental cuya dimensión de embedding es cuatro, se revela ancho aunque se distinguen claramente los picos de las frecuencias de las oscilaciones cuasi periódicas (figura 5.16). De este modo completamos el camino al caos que recorre el modo P_1 .

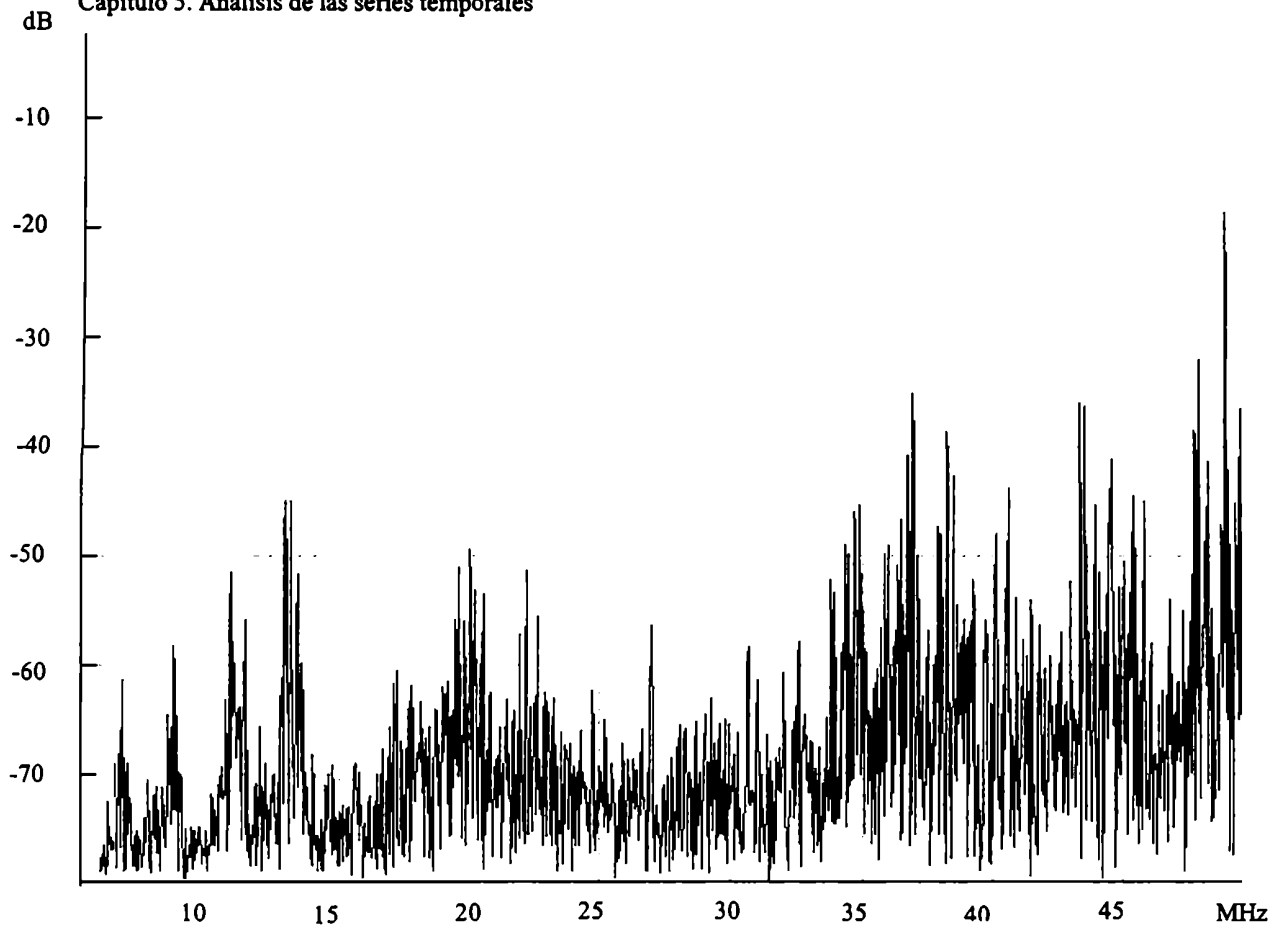


Figura 5.16: Serie temporal experimental, correspondiente a dimensión de embedding 4 en el modo P_1 , donde se observa el ensanchamiento en el espectro, señal de caoticidad, y también se distinguen las frecuencia del cuasi periódico.

Partiendo de una magnitud escalar, la serie temporal, hemos construido una cantidad vectorial que nos permitió graficar el atractor en el espacio de fase. De su forma toroidal supusimos su posible ruta al caos. El análisis de Fourier corroboró la presunción mostrando las frecuencias características del atractor. De esta manera observamos, tanto en el modelo de mapas como experimentalmente, la transición completa desde la desestabilización de los pulsos, hasta el caos desarrollado. Cabe destacar que en todas las series experimentales obtenidas del modo P_1 con $d_E = 3$, los picos de frecuencias fueron coincidentes.

Para el modo P_2 (pulsos con chirp a la salida), veamos, en primer término, si la forma en que el modo pierde estabilidad es la misma que para el modo de pulsos limitados por transformada. Para ello graficamos el vector $s_2(n)$ cuando la dimensión de embedding es tres. En la figura 5.17 vemos el correspondiente a la serie simulada con el mapa. El atractor reconstruido a partir de la serie experimental, por su parte, toma la forma que observamos en la figura 5.18.

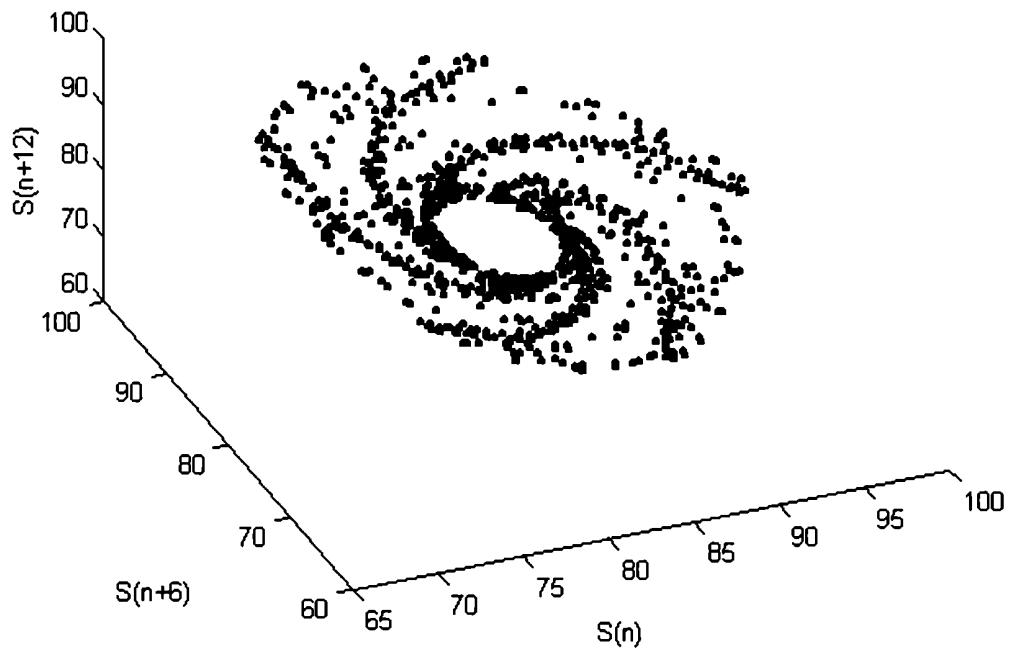


Figura 5.17: Atractor del modo P_2 , reconstruido a partir de una serie temporal simulada con dimensión de embedding 3. Unidades adimensionales normalizadas en base al valor de punto fijo de la variable.

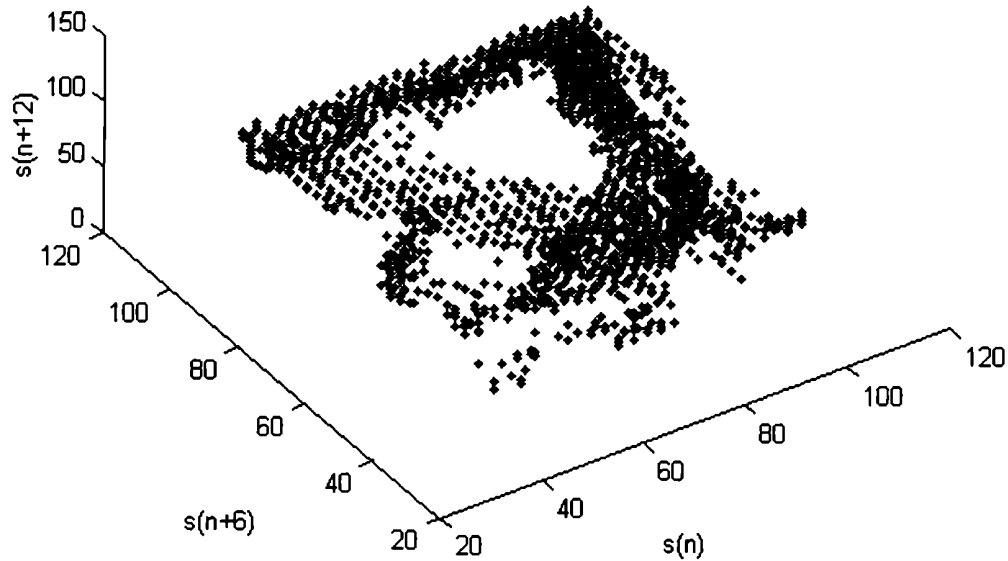


Figura 5.18: Atractor para el modo P_2 reconstruido a partir de una serie temporal experimental con dimensión de embedding 3. Unidades adimensionales normalizadas a partir del máximo de la serie temporal.

La similitud en la forma de los atractores teórico y experimental carece de la definición que encontramos en el modo P_1 . Sin embargo, si analizamos las respectivas transformadas de Fourier (figuras 5.19 y 5.20), veremos que coinciden en su espectro. Ambas muestran picos en frecuencias alrededor de los 20MHz; las relaciones entre ellos, por otra parte, no corresponden a las de un atractor cuasi periódico. Descartamos, de este modo, una ruta al caos cuasi periódica para el modo P_2 .

Trabajando con el modelo de mapas, ya hemos visto en el Capítulo 2, al reducir el mapa de cinco a una variable, que el modo P_2 presenta una cascada de bifurcaciones (figura 2.4). Es un camino al caos similar al escenario de Feigenbaum, estando las mayores diferencias en que no encontramos la ventana de periodicidad tres y que la correspondiente "constante de Feigenbaum" difiere de la que define la ruta al caos para el mapa logístico.

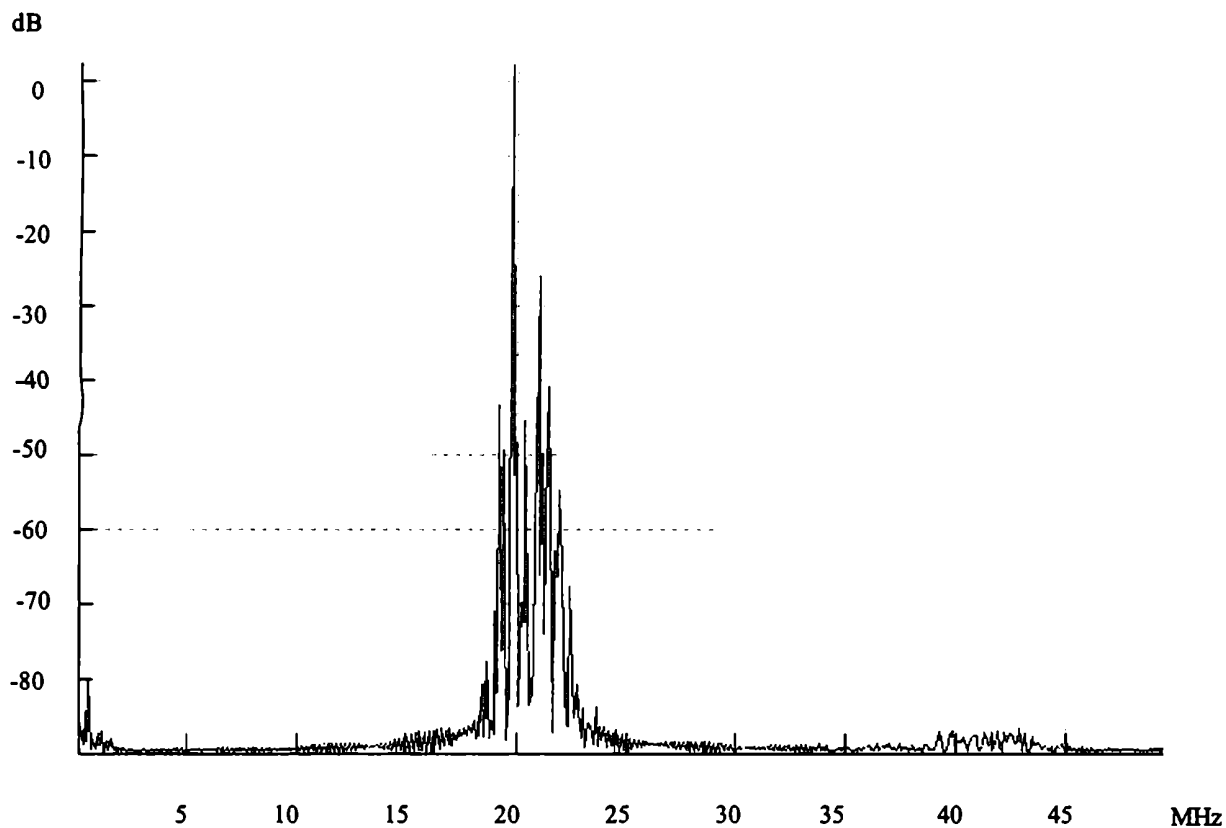


Figura 5.19 : Transformada de Fourier de una serie temporal del modo P_2 generada con las ecuaciones del mapa.

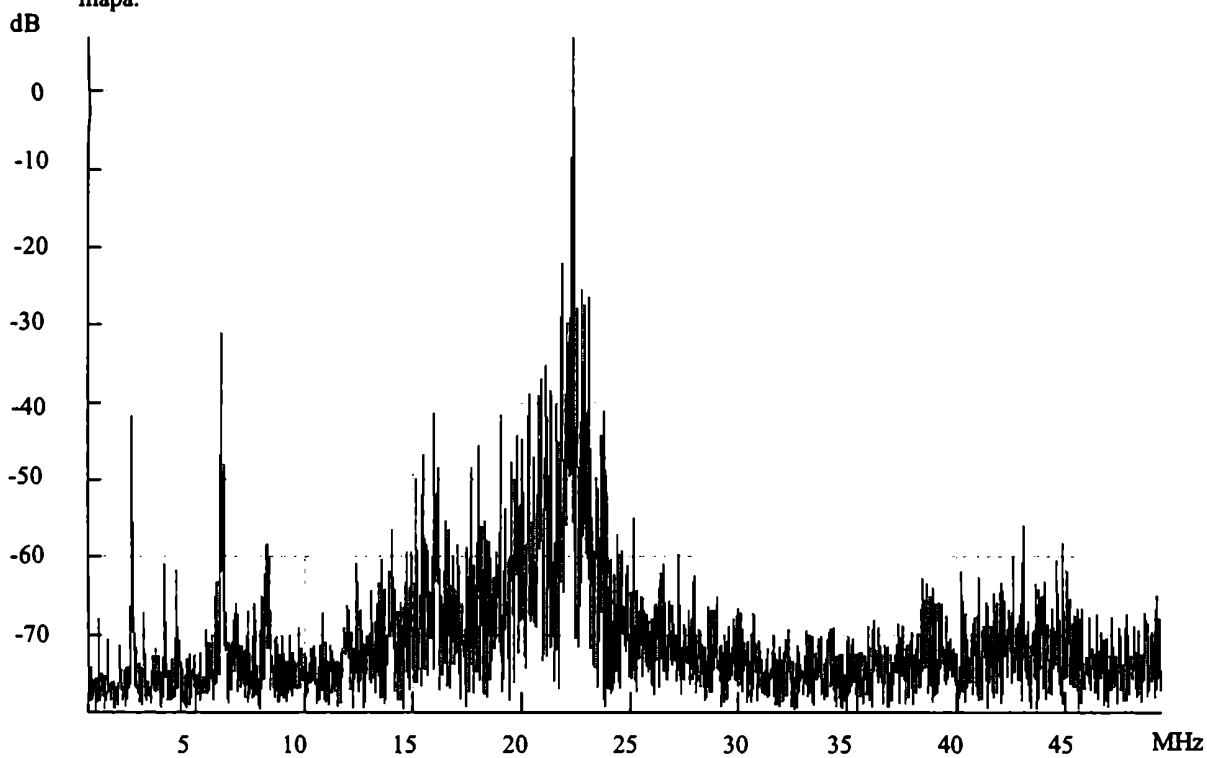


Figura 5.20: Transformada de Fourier de una serie temporal experimental del modo P_2

Reproducir este camino en forma experimental resulta muy difícil fundamentalmente por lo angosto de la transición completa y por la imposibilidad del procesamiento *in situ* de las series temporales, lo que en la práctica hace que uno adquiera información ‘a ciegas’ y en muchos casos repetida. A pesar de todo, contamos con suficiente evidencia experimental. Ya en la figura 3.3c del Capítulo 3 habíamos observado cómo la energía presentaba un comportamiento característico de una bifurcación tangente. Otro resultado experimental es la comprobación de intermitencia en el modo P_2 , ausente en el P_1 . La forma en que podemos cuantificar la intermitencia es mediante una cantidad estadística conocida como kurtosis. La kurtosis para serie de números ordenados y_1, y_2, \dots, y_n se define como:

$$k = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^4}{(N-1)s^4} \quad (5.3)$$

donde \bar{y} es el valor medio de la serie y s su desviación estándar.

La kurtosis para una distribución normal estándar es 3, por lo cual suele definirse el exceso de kurtosis como:

$$k_e = k - 3 \quad (5.4)$$

Así, una kurtosis negativa es característica de una señal plana, mientras que kurtosis positiva revela intermitencia, toda vez que significa más peso en las ‘colas’ de la distribución de picos.

En señales como la que se puede apreciar en la figura 5.21, donde claramente se observa intermitencia, la kurtosis alcanza valores moderados en dimensiones de embedding 2 y 3 donde no supera un valor de 12, para elevarse en dimensión de embedding 4, donde alcanza valores de hasta 955.

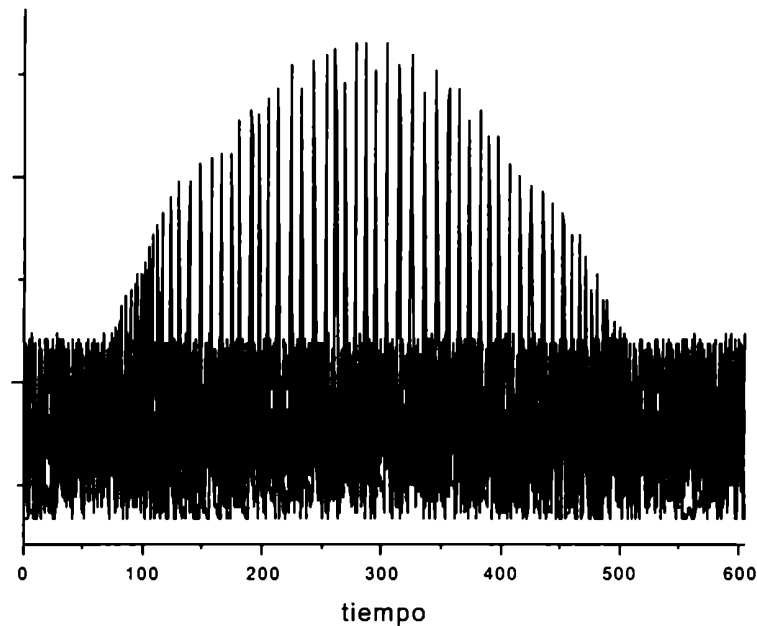


Figura 5.21: Intermitencia en la energía en el modo P_2 de una serie temporal experimental. Los pulsos muestran un comportamiento cuasi estable o fase laminar, para en cierto punto adoptar una conducta irregular o fase turbulenta. A medida que varía el parámetro de control (GVD), la duración de la fase turbulenta es más extensa, hasta alcanzar el caos desarrollado (dimensión de embedding 4). Eje horizontal: tiempo en unidades del tiempo de tránsito en la cavidad. Eje vertical: energía, unidades arbitrarias. La kurtosis de esta serie es 11.93.

En resumen, hemos caracterizado el comportamiento del láser de Ti:Zafiro desde la perspectiva de su dinámica. Cada una de las magnitudes determinadas mediante el modelo de mapas fue contrastada con su análoga experimental. De esta forma no sólo desentrañamos las propiedades del sistema, sino que verificamos la adecuación del modelo, que resistió todas las comparaciones efectuadas.

Para el modo de pulsos limitados por transformada, P_1 , encontramos que la ruta al caos es la bien conocida cuasi periódica. Para el modo P_2 , de pulsos con chirp, descubrimos características de la ruta al caos que lo diferencian claramente del escenario del modo P_1 . Estos rasgos característicos son la intermitencia y los doblamientos de períodos. Las diferencias fundamentales con el escenario de Feigenbaum son la ausencia de la ventana de período tres y una constante de Feigenbaum de 4.980. Podemos describir esta ruta al caos de la siguiente forma. Partiendo de un tren de pulsos estable, conforme disminuimos la GVD negativa total dentro de la cavidad, el láser pierde estabilidad, en

principio, a través de doblamientos de períodos, con ocasionales apariciones de intermitencia. A medida que nos acercamos al caos desarrollado, los fenómenos de intermitencia se incrementan. No se observan cascadas inversas ni ventanas periódicas. Este escenario, que comparte, en las formas, similitudes con el del mapa logístico, no ha sido identificado con ningún escenario previamente descrito en la literatura, lo que me mueve a denominarlo escenario al caos del Ti:Zafiro.

Ambos escenarios comparten una propiedad de fundamental importancia. Se trata de caos de baja dimensión, y ambos tienen en el caos desarrollado una dimensión de embedding de 4. Es decir que a pesar de las numerosas aproximaciones realizadas y de suponer la inexistencias de aberturas en el modelo, no solo explicamos satisfactoriamente los comportamientos del láser, sino que determinamos que el número de variables necesarias para describir el sistema no es mayor que cuatro.

Aplicación del modelo al control del caos

A esta altura del trabajo, contamos con un modelo teórico que es capaz de explicar satisfactoriamente los comportamientos típicos del láser de Ti:Zafiro. Conocemos en qué regiones del espacio de parámetros el láser opera en cada uno de los modos pulsados y cuándo y dónde son estables o inestables. Sabemos, para cada modo, cómo evoluciona la duración del pulso en función de la dispersión de la velocidad de grupo. También determinamos las dimensiones de sus atractores. Si bien el modelo estaba dirigido a obtener una descripción cualitativa, la coincidencia cuantitativa con los resultados experimentales es también satisfactoria.

Surge ahora la pregunta: ¿es posible aprovechar estos conocimientos en alguna aplicación concreta?. Una forma sería aprovechar el caos que genera el láser para, por ejemplo, encriptar señales. El empleo de sistemas caóticos para comunicaciones seguras data de 1990 con los trabajos de Pecora y Carroll [6-1,2]. Su evolución hasta el presente muestra adelantos en simulaciones numéricas, siendo la parte experimental en su gran mayoría volcada hacia los circuitos eléctricos o diodos láser. Otra vertiente es la de emplear propiedades del caos mismo en comunicaciones. En ese sentido se encaminan las investigaciones de Hayes, Grebogi y Ott [6-3] y Mazzini [6-4]. Sin embargo, a la hora de transmitir efectivamente señales, el ancho de banda y su carácter caótico, hacen la implementación más que dificultosa. Muchas versiones de auto-sincronizados han sido propuestas; todas ellas son muy sensibles al ruido y emplean un gran ancho de banda sin ofrecer nada a cambio. A pesar de todo, es una línea que tiene fervorosos adeptos en diversos laboratorios del mundo.

Una aplicación más inmediata, en referencia al Ti:Zafiro, es tratar de estabilizar el mode locking en la zona caótica, donde los pulsos son más cortos. Para esto, surge naturalmente la idea del *control del caos*. La idea fue enunciada a comienzos de la década del '90 por Ott, Grebogi y Yorke (OGY) [6-5]. Teniendo en cuenta que un

atractor extraño está formado por infinitas órbitas periódicas inestables, el método consiste, básicamente, en esperar que el sistema pase naturalmente por una órbita cercana al comportamiento deseado, para entonces aplicar alguna clase de perturbación que la estabilice. Gran cantidad de trabajos con simulaciones numéricas fueron desarrollados con éste y otros métodos de control. Los campos sobre los que actúan varían desde la Química (reacción de Belousov–Zhabotinski) hasta Electrónica (circuito de Chua–Matsumoto) o Fluidos (convección de Rayleigh–Bénard). Un completo panorama sobre el control del caos puede encontrarse en [6-6]. Otros implementan estos métodos en forma experimental. El grupo de H.Mancini descolla, particularmente, en fluidos (ver, por ejemplo [6-7]); en circuitos, los ya mencionados Hayes, Grebogi y Ott además de Cuomo y Oppenheim (ver, por ejemplo [6-8,9]). En cuanto a los láseres, ingentes esfuerzos han sido dedicados a controlar las fluctuación de intensidad en los procesos de generación de segunda armónica con cristales no lineales dentro de la cavidad. En el contexto del control del caos, Roy *et al.* [6-10] usaron una variante del método OGY, conocido como OPF por *Occasional Proportional Feedback*, para controlar las fluctuaciones de la segunda armónica de un láser de Nd:YAG bombeado por diodos. La realimentación era inyectada sobre la corriente del láser de bombeo. En este Capítulo presentaré una propuesta de implementación, acaso la primera, de control del caos aplicado al láser de Ti:Zafiro. El objetivo es adentrarnos en las zonas de operación inestables, estabilizar alguna de esas órbitas y obtener un mode locking estable con duraciones de pulso más cortas.

Antes de presentar esta forma de control creo necesario, en primer término, formular, con cierto detalle, los principios básicos del método, para luego sí introducir la función de control en el caso concreto del láser de Ti:Zafiro, desarrollado en forma numérica. Hacia el final del Capítulo esbozaré el dispositivo experimental necesario para realizar esta clase de control sobre el láser.

6.1 El método OGY

El ingrediente principal en la idea del control del caos es la observación de que un sistema caótico, en el cual “vive” la trayectoria, está inmerso en un gran número de

órbitas periódicas inestables. Además, por ergodicidad, la trayectoria visita o accede a la vecindad de cada una de estas órbitas periódicas en un tiempo finito. alguna de esas órbitas es la que nos interesa, por algún motivo, estabilizar. El segundo ingrediente es que el caos, con su sensible dependencia a pequeños cambios, es, por eso mismo, fácilmente alterable empleando pequeñas perturbaciones. La combinación de estos factores permite manipular el proceso caótico. Específicamente el método OGY comprende los siguientes pasos: En primer lugar, determinamos ciertas órbitas, de bajo período, que están inmersas en el atractor. Luego debemos examinar su localización y estabilidad, para seleccionar cuál es la que nos interesa controlar. Finalmente aplicamos, sobre algún parámetro del sistema, una adecuada, pequeña perturbación que estabilice la órbita deseada.

La principal objeción sobre la realización del método OGY es que uno debe esperar cierto tiempo para que, por ergodicidad, el sistema llegue a la cercanía del lugar que nos interesa. Dependiendo de cada caso, por ejemplo un fluido de evolución lenta, este tiempo puede ser muy largo, haciendo impracticable el método de control. En el caso del láser de Ti:Zafiro este problema se desvanece, toda vez que los tiempos de evolución del sistema (básicamente el tiempo de tránsito en la cavidad) hacen que en un segundo tengamos 90 millones de pulsos, suficientes para recorrer la cercanía de cualquier entorno. Por otro lado, la velocidad de los procesos hace complicada la realización experimental de la señal de control.

6.1.1 Dinámica pico a pico

En numerosos sistemas caóticos los valores de los picos (máximos relativos) de un observable y su tiempo de ocurrencia pueden ser predichos, con muy buena aproximación, conociendo el valor del pico previo. Esta propiedad, conocida como dinámica pico a pico, nos permitirá generar la función de control que aplicaremos sobre un parámetro del sistema. Decimos que un sistema caótico con una variable de salida $y(t)$ tiene dinámica pico a pico, cuando el conjunto $\{(y_k, y_{k+1})\}$ de pares de picos consecutivos, puede aproximarse por una o más curvas en el espacio (y_k, y_{k+1}) [6-11]. Su existencia está estrictamente relacionada a la baja dimensionalidad del atractor

caótico. Como hemos visto el Capítulo anterior, los atractores para ambos modos pulsados del Ti:Zafiro cumplen este requisito.

6.2 Diseño del sistema de control

Denominemos u a nuestro parámetro de control, el cual podrá variar en un cierto rango $U = [u_{min}, u_{max}]$. Para cada valor de u y, empleando las ecuaciones del mapa, es posible calcular los picos del observable y , a partir del cual podremos obtener el gráfico pico a pico, es decir :

$$y_{k+1} = F(y_k, u) \quad (6.1)$$

donde u es un valor fijo del parámetro de control.

Dejemos ahora que u varíe. Supongamos que es constante entre dos picos consecutivos, pero que puede variar luego de cada pico:

$$u(t) = u_k \quad \forall t \in (t_k, t_{k+1}] \quad (6.2)$$

siendo t_k, t_{k+1} , los tiempos en que se producen los picos y_k, y_{k+1} .

Dado que la ecuación (6.1) describe la dinámica del sistema para un valor de u fijo, y sólo después de un cierto transitorio, es decir después que el estado haya alcanzado el atractor $X(u)$, no es correcto emplear (6.1) y reemplazar u por u_k para predecir el valor del pico siguiente y_{k+1} . Es más, cuando el parámetro de control es cambiado a u_k , el sistema no está en el atractor $X(u_k)$, de modo que y_{k+1} será diferente de $F(y_k, u_k)$. A pesar de todo, es razonable suponer que, si el transitorio es más corto que el tiempo τ_k (el tiempo entre el pico k y el $k+1$), y la diferencia entre u_{k-1} y u_k no es muy grande, el pico siguiente estará bien aproximado por:

$$y_{k+1} = F(y_k, u_k) \quad (6.3)$$

El rango de validez de (6.3) es, definitivamente, difícil de evaluar. Una estimación posible es la que sugieren Piccardi y Rinaldi [6-12] basada en los exponentes de

Lyapunov. Los exponentes negativos, en la vecindad del atractor, corresponden a la tasa de convergencia hacia el atractor mismo. Si la variación en el parámetro de control entre los pasos k y $k+1$ es pequeña, será correcto suponer que los atractores $X(u_k)$ y $X(u_{k+1})$ son muy parecidos entre sí. Más precisamente, proponen calcular los exponentes de Lyapunov del sistema, en particular el más negativo, λ^- , y comparar la constante temporal, $\tau^- = |\lambda^-|^{-1}$, con el tiempo promedio τ_p entre picos consecutivos. Estimando un transitorio de $5 \tau^-$ diremos que si :

$$5 \tau^- < \tau_p \quad (6.4)$$

la aproximación es adecuada, y podremos aplicar este esquema de control a nuestro sistema. Con una herramienta para determinar la validez del método de control, veamos ahora cómo construir la función de control.

6.2.1 Control a través de la estabilización de órbitas periódicas

Nuestro objetivo es, empleando el método de control OGY, estabilizar una órbita periódica inestable (UPO, unstable periodic orbit) inmersa en el atractor caótico correspondiente al valor constante del parámetro de control, u .

Consideremos el mapa de Poincaré $z_{k+1} = P(z_k, u_k)$, donde $z_k \in \mathbb{R}^{n-1}$ es el punto que representa la k -ésima intersección de la trayectoria con la sección de Poincaré Σ de dimensión $n-1$ y u_k es el parámetro de control, constante, aplicado entre las intersecciones k y $k+1$. La UPO es un punto fijo del mapa de Poincaré, es decir: $\bar{z} = P(\bar{z}, \bar{u})$. Escribimos como:

$$A = \left[\frac{\partial P}{\partial z} \right]_{\bar{z}, \bar{u}} \quad (6.5)$$

$$b = \left[\frac{\partial P}{\partial u} \right]_{\bar{z}, \bar{u}} \quad (6.6)$$

las matrices $(n-1) \times (n-1)$ y $(n-1) \times 1$ que describen el mapa de Poincaré en las vecindades del punto fijo. La función de control se define como [6-5]:

$$u_k = \begin{cases} \bar{u} + h^T (z_k - \bar{z}) \\ \bar{u} \end{cases} \quad \begin{cases} \text{si } \|z_k - \bar{z}\| \leq \varepsilon \\ \text{si } \|z_k - \bar{z}\| > \varepsilon \end{cases} \quad (6.7)$$

donde $\varepsilon > 0$ es un número pequeño, predefinido y $h \in \mathbb{R}^{n-1}$ debe ser elegido de forma tal que la matriz $(A + b h^T)$ de dimensión $(n-1) \times (n-1)$, tenga todos sus autovalores dentro de un círculo unitario. En definitiva, el método OGY implementa un controlador de realimentación lineal, que es encendido cuando el estado se encuentra cerca del objetivo.

Cuando n es grande, el empleo del mapa $P : \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ puede ser muy engorroso. El problema se convierte en mucho más tratable si la dinámica puede ser deducida de un modelo de orden reducido, como el que propone el mapa de la dinámica pico a pico.

En ese caso, el punto fijo $\bar{y} = F(\bar{y}, \bar{u})$ identifica la UPO de la trayectoria. La aproximación lineal del mapa F alrededor de \bar{y} está dada por:

$$y_{k+1} - \bar{y}_k = A (y_k - \bar{y}) + b (u_k - \bar{u}) \quad (6.8)$$

donde:

$$A = \left[\frac{\partial F}{\partial y} \right]_{\bar{y}, \bar{u}} \quad (6.9)$$

$$b = \left[\frac{\partial F}{\partial u} \right]_{\bar{y}, \bar{u}} \quad (6.10)$$

son números reales distintos de cero. La forma que adopta la ley de control será entonces:

$$u_k = \begin{cases} \bar{u} + h(y_k - \bar{y}) & \text{si } |y_k - \bar{y}| \leq \epsilon \\ \bar{u} & \text{si } |y_k - \bar{y}| > \epsilon \end{cases} \quad (6.11)$$

donde h es ahora un escalar que debe verificar la desigualdad:

$$|A + b h| < 1 \quad (6.12)$$

El rango de variación en el parámetro de control está acotado en el intervalo $(\bar{u} - h \epsilon)$, $(\bar{u} + h \epsilon)$. Entre los infinitos valores posibles para h tomamos, como en [6-13]:

$$h = -\frac{A}{b} \quad (6.13)$$

Esta elección, es decir $A + b h = 0$, es óptima toda vez que el tiempo de respuesta de la aproximación lineal es mínima (igual a uno); ya que $y_{k+1} = \bar{y}$.

6.3 Realización sobre el Ti:Zafiro

Conociendo ya el esquema de control, veamos cómo aplicarlo sobre el Ti:Zafiro. Antes de avanzar en su desarrollo, usemos el criterio de los exponentes de Lyapunov (6.4) para verificar que nuestro sistema lo cumpla.

Calculo, empleando un algoritmo del paquete TISEAN basado en [6-14], los exponentes de Lyapunov de series temporales caóticas de dimensión de embedding 4 pertenecientes a los modos P_1 y P_2 , generadas con el mapa de cinco variables.

En la tabla 6.1 podemos observar, para cada modo, el exponente más negativo junto con el tiempo típico entre picos. La relación entre estas magnitudes satisface (6.4). Es pues razonable, para ambos modos pulsados del láser, intentar el control.

Modo	λ^-	τ_p	$\tau_p \lambda^- / 5$
P ₁	-0.572	18	5.148
P ₂	-0.800	15	2.4

Tabla 6.1: Exponente de Lyapunov más negativo, λ^- ($[\lambda^-] = \text{tiempo}^{-1}$); tiempo característico entre picos, τ_p y relación entre ambos. Para que el esquema de control sea viable debe ser mayor que 1. La unidad de tiempo empleada es el tiempo tránsito por la cavidad.

A lo largo de toda esta Tesis, el parámetro que elegí variar fue la dispersión de la velocidad de grupo dentro de la cavidad. La razón de esta elección residió en la fácil accesibilidad experimental de este parámetro. Basta, para modificarlo, con mover el tornillo micrométrico del posicionador que soporta el prisma. Sin embargo, en un esquema de control debemos ser capaces, para permitir cambios pico a pico, de modular el parámetro con frecuencias del orden de 10MHz, lo que descarta, obviamente, las variaciones mecánicas. Un parámetro sobre el que se puede ejercer un control a gran velocidad es el de pérdidas de la cavidad del láser, μ . Mas adelante veremos como, mediante un modulador acústico óptico, es factible modular μ . Teniendo esto en cuenta, y con vistas a una futura implementación, elijo cambiar la GVD por las pérdidas de la cavidad, representadas en el modelo por μ (ecuación (2.12) Capítulo 2), como variable de control. Cabe aclarar que desde el punto de vista de las simulaciones el resultado final es independiente del parámetro de control empleado (ver Apéndice VI-1).

En cuanto a la variable sobre la que activaré el control, hemos visto que las primeras en perder estabilidad son las espaciales y que las temporales nunca son inestables a menos que lo sean las espaciales. Es decir, si garantizamos variables espaciales estables, todas lo serán. Sumado esto a que el tamaño del haz es fácilmente observable con el montaje desarrollado en el Capítulo 3; de las cinco variables del sistema, la elección recae sobre S, la inversa del tamaño del haz. Finalmente, por ser el menos favorable según el criterio de los exponentes de Lyapunov, elijo aplicar el control al modo P₂ para ilustrar el método.

Resumiendo, hasta aquí hemos decidido controlar el tamaño del haz para el modo de pulsos con chirp a la salida, empleando como parámetros de control la GVD o bien las pérdidas. Intentaremos estabilizar la operación del láser para duraciones de pulso de otro modo inaccesibles. Partimos de los valores:

$$\bar{S} = 120000 \text{ cm}^{-1} \quad (\text{i.e.: } \sigma = 28 \mu\text{m})$$

$$\bar{\mu} = 3.15$$

Allí el sistema es inestable en la totalidad de sus variables. De ser estable, la duración de pulso sería del orden de los 18fs. Recordemos que la menor duración de pulso estable predicha para el modo P_2 es del orden de 40fs. Experimentalmente, la duración más corta obtenida fue de 66fs.

Para construir la función de control, u_k (6.11), necesitamos establecer el valor de las derivadas (6.9) y (6.10), donde ahora y representa a S y u a μ . Las derivadas las calculo numéricamente mediante el mapa de F , obteniendo:

$$A = 42.124$$

$$b = 41.74 \text{ cm}^{-1}$$

$$h = -1.009 \text{ cm}$$

De esta forma la función de control se escribe como:

$$\mu_k = \begin{cases} \bar{\mu} + h(s_k - \bar{s}) & \text{si } |s_k - \bar{s}| \leq \epsilon \\ \bar{\mu} & \text{si } |s_k - \bar{s}| > \epsilon \end{cases} \quad (6.14)$$

Permitiendo variaciones de hasta un 4%, es decir, $\epsilon = 0.04$, las variaciones en el parámetro μ estarán acotadas al intervalo (3.1083; 3.1917).

En la figura 6.1 podemos observar el control del caos que se obtiene a través de una simulación del mapa completo. Al comienzo el control no es activado, obteniendo una señal inestable; en $t = 50000$, es decir unos $500\mu\text{s}$ más tarde, el algoritmo enciende el control, cambiando el valor del parámetro μ por la función (6.15). Luego de un breve transitorio observamos cómo se estabiliza la señal. Por las características del sistema esto nos asegura que las demás variables, entre ellas la duración de pulso, también serán estables.

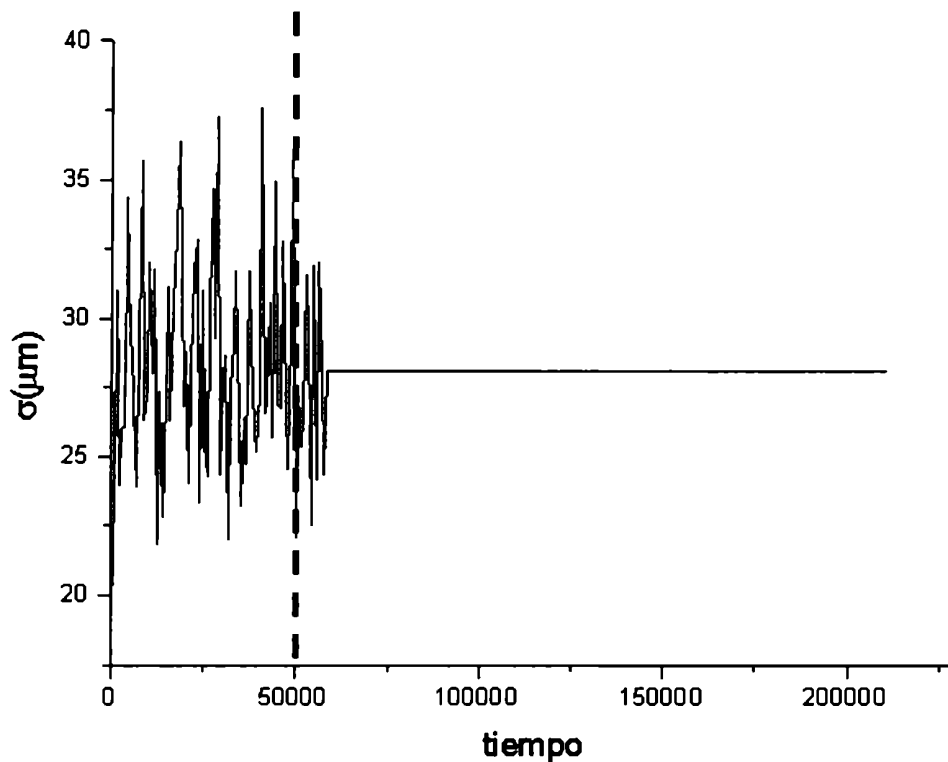


Figura 6.1: Evolución del tamaño del haz antes y después de activar la función de control. La línea punteada señala el momento en que se inicia el control. La unidad de tiempo es el de tránsito por la cavidad.

El mismo esquema de control que acabamos de ver permitiría llegar, aplicado al modo P_1 , de pulsos limitados por transformada, a una duración de pulso cercana a los 10fs. En cuanto a la realización experimental de este mecanismo, un breve comentario. Como hemos mencionado, la utilización como parámetro de la GVD no es posible.

Una forma viable de controlar el parámetro μ es por medio de la inserción en la cavidad, cerca del espejo de fondo, de un modulador acusto - óptico (AOM). Su funcionamiento se ve esquematizado en la figura 6.2. Un AOM consta, básicamente, de un cristal acusto - óptico donde la luz que lo atraviesa es difractada o transmitida dependiendo de la señal de control. El monto de luz difractada depende de la amplitud de la señal. Si ésta es apagada la luz pasa a través del cristal. Alineando adecuadamente el modulador dentro de la cavidad podremos modular las pérdidas. La señal del modulador debe ser la señal de control (6.15).

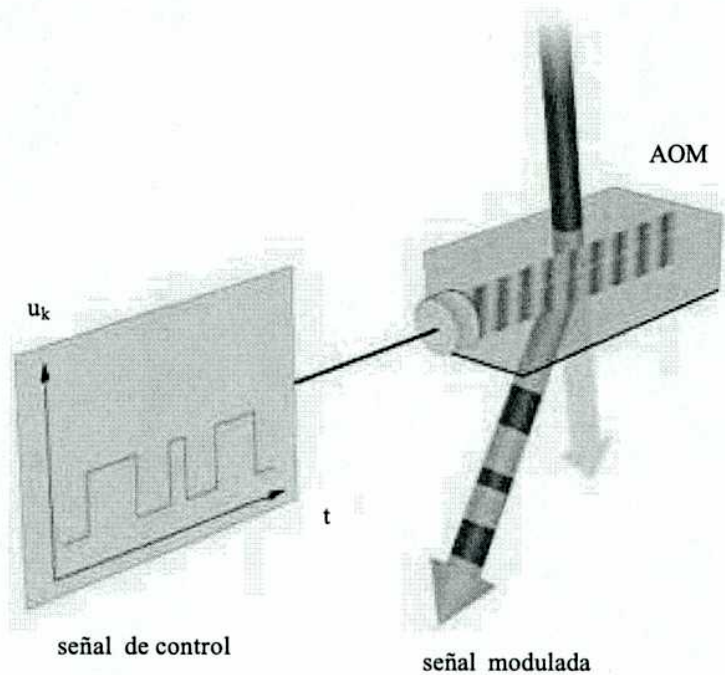


Figura 6.2: Esquema de funcionamiento del modulador acusto - óptico para introducir pérdidas en forma controlada dentro de la cavidad.

En síntesis, demostramos numéricamente la factibilidad del método de control del caos sobre el láser de Ti:Zafiro. Su aplicación no sólo es capaz de estabilizar comportamientos antes caóticos, sino que al mismo tiempo hace accesibles duraciones de pulso más cortas. Con el agregado de unos pocos elementos de relativo bajo costo, parece posible mejorar notoriamente las prestaciones del láser.

Durante los seis Capítulos anteriores resumí la tarea realizada que conforma esta Tesis de Doctorado. Los objetivos al iniciarla eran, por un lado, desarrollar un modelo lo mas sencillo posible que a la vez fuera capaz de explicar los comportamientos observados en los láseres de Ti:Zafiro y por otro, contrastarlo con mediciones directas sobre el láser. Para modelar los modos pulsados del láser preferí emplear mapas iterativos que, por la experiencia previa, demostraron ser mas dúctiles que los sistemas de ecuaciones diferenciales a derivadas parciales a la hora de desentrañar la dinámica del Ti:Zafiro. Aún con las enormes ventajas que acarrear los mapas, debí hacer un gran número de simplificaciones y aproximaciones para obtener un conjunto de ecuaciones medianamente tratables. De todas, la mas destacable es, sin dudas, la ausencia de aberturas en el modelo. Es importante remarcar que al poder explicar el mode locking por efecto Kerr en forma satisfactoria con un modelo carente de aberturas, queda demostrado que para láseres de ancho de banda grande, como el Ti:Zafiro, el rol de las aberturas es secundario, y el efecto que conforma y sostiene el pulso es de carácter solitónico.

El mapa, no solo se mostró cualitativamente correcto, sino que muchos resultados mostraron una inesperada coincidencia cuantitativa con los experimentales. Esto habla de la robustez del modelo, que reproduce los comportamientos del láser casi independientemente del valor que adopten ciertos parámetros del sistema. A lo largo de este trabajo no fue una preocupación determinar con extrema precisión los valores numéricos de, por ejemplo, las constantes de no linealidad espacial y temporal o del parámetro μ , ya que el objetivo era reproducir comportamientos característicos del láser, que denominamos estructuralmente estables. Una vez establecida la confiabilidad del mapa, podría emplearse para, a partir de una realimentación con las mediciones, establecer los valores numéricos de estos parámetros con mayor exactitud.

De las simulaciones numéricas surgió que alguna de las variables podía mostrar un tren de pulsos estable mientras que otra exhibiera, al mismo tiempo, comportamientos inestables. En todos los casos las variables que primero pierden estabilidad son las espaciales, es decir nunca las variables temporales son inestables si no lo son primero las espaciales. Estas inestabilidades ocultas, que fueron también descubiertas

experimentalmente, son de crítica importancia al emplear el Ti:Zafiro como elemento de medición (por ejemplo en experimentos del tipo pump and probe de fotoquímica). Realizar mediciones en condiciones donde alguna de las variables del láser sea inestable acarrearía un severísimo error sistemático. A partir de esta Tesis se cuenta con una forma simple y poco costosa de detectar estas inestabilidades.

Con el mapa expliqué, también, los distintos modos de operación observados en el láser; el continuo y dos pulsados, limitado por transformada uno y con chirp positivo otro. En base a los diagramas de estabilidad de cada uno de los modos no sólo se comprende la preferencia del láser por el modo de pulsos limitado por transformada, sino también por qué no se observan pulsos con chirp negativo. Cabe destacar que los diagramas de estabilidad también se mostraron robustos ante la variación de los parámetros geométricos de la cavidad. Esto fue corroborado involuntariamente, dado que a lo largo del desarrollo de esta Tesis, el láser de Ti:Zafiro del LEC sufrió varias reconfiguraciones y mejoras, lo que me llevó a recalcular estas regiones para las nuevas disposiciones del láser. Así pude observar que si bien las zonas estables de cada modo variaban, en esencia se mantenían las mismas distribuciones y relaciones entre los modos.

Aparece, asimismo, la posibilidad de la coexistencia de los dos modos pulsados, es decir la biestabilidad. Esta conjetura del modelo se verificó experimentalmente. Además, a lo largo del trabajo determiné que no era causada por un cambio de signo en la GVD neta dentro de la cavidad. Que el sistema opere en uno u otro régimen dependerá en última instancia de la forma y el tamaño de las zonas de estabilidad obtenidas con el mapa de cinco variables, así como de la relación entre el módulo de sus autovectores.

Sumado a esto la verificación experimental de la relación predicha por el modelo que la pendiente de la recta duración de pulso vs. GVD es el doble para el régimen de pulsos con chirp que para los pulsos limitados por transformada, podemos concluir que el modelo es correcto para reproducir los comportamientos característicos del láser.

Sin embargo quedaba, a esa altura, inexplorada la región caótica. El escollo más importante era contra qué contrastar el modelo. Imposible (e inútil) medir cualquier variable del láser, la solución estaba en las series temporales.

Fue luego de su obtención y procesamiento que pude proveer evidencia contundente sobre la existencia de caos determinístico de baja dimensión en el láser de Ti:Zafiro con mode locking por efecto Kerr. La forma en que cada modo hacía su ruta al caos quedó

también a la luz, siendo cuasiperiódica la del modo de pulsos limitado por transformada, y una variante de la intermitente, o *ruta al coas del Ti:Zafiro*, la del modo de pulso con chirp positivo. Así caractericé, por primera vez, los atractores de cada uno de los modos pulsados del láser.

Que el cálculo de la dimensión de embedding, empleando las series temporales experimentales, diera un valor de 4, es un resultado muy valioso. Impone una cota al número de variables independientes necesarias para desplegar completamente el atractor.

Las series temporales del mapa tienen, también, dimensión de embedding cuatro. Nuevamente coincidencia entre modelo y experiencia; ahora en la región caótica. En este campo queda como tarea determinar cuáles son las variables más adecuadas para la descripción del láser. Indudablemente esto dependerá, en parte, de qué comportamiento deseemos reproducir. Si, por ejemplo, estuviésemos interesados en el Q-switch, sería necesario tener entre las variables la inversión de población. No obstante (creo necesario recalcarlo aún a costa de ser reiterativo), y pese a la enorme complejidad que presenta a priori el Ti:Zafiro como sistema, sólo cuatro variables independientes son necesarias para describir sin ambigüedades su dinámica. Es esta baja dimensionalidad que hace este láser especialmente interesante como sistema dinámico.

En modo alguno los hallazgos obtenidos en esta Tesis cierran el tema de la dinámica del Ti:Zafiro. Muy por el contrario, creo que a partir de estos cimientos puede abrirse un fructífero campo de estudios. Además de hallar el mejor conjunto de cuatro magnitudes para el espacio de fase, cabría, por solo mencionar un par, mejorar la descripción topológica de los atractores y determinar la forma del potencial de Lyapunov generado por la no linealidad de Kerr en estos láseres. De ésta y del número de variables relevantes, debería ser posible establecer el tipo de *catástrofe* (matemática) subyacente a la transición: funcionamiento continuo - funcionamiento KLM en el caso general.

Elegí, en cambio, adentrarme en el terreno de las aplicaciones del modelo, intentando el control del caos. Así demostré la plausibilidad de un algoritmo, que implementado sobre el láser, permitiría estabilizar el mode locking en la región caótica, reduciendo la duración de pulso a valores cercanos a la mitad de los obtenidos con la misma configuración del láser sin control. Estaríamos, con sólo incluir un modulador en la cavidad, en duraciones de pulso de unos 10fs.

Conclusiones

No cabe duda que reducir un problema a otro, previamente resuelto, puede traer beneficios tecnológicos. Las técnicas de control del caos, en ese sentido son un ejemplo irrefutable. Otro camino, acaso mas oscuro pero no menos tentador, es no eliminar el caos, sino emplearlo. Dado que el caos es una señal intermedia entre el movimiento regular y el ruido, de alta dimensión, tal vez sea posible hallar alguna aplicación de esta clase de señales, que exploran vastas regiones del espacio de fase en una manera estructurada.

Finalmente, un punto que no quisiera dejar de mencionar y que, tal vez, no resalta con toda la intensidad que debería, es el trabajo realizado sobre el láser en sí. Ciertamente el resultado final puede ser un gráfico de duración de pulso en función de la GVD o una imagen de un tren de pulsos, sin embargo para llegar allí fue necesario no solo diseñar un setup adecuado para la medición o familiarizarse con las técnicas de autocorrelación sino algo que es difícil de expresar y que en el lenguaje coloquial denominamos “hacerse amigo del láser”. Aprender a alinear el Ti:Zafiro o lograr que el láser esté estable en el modo pulsado que uno desea para distintas posiciones del prisma y, al mismo tiempo medir la duración de pulso, es algo que, personalmente, valoro como otro logro importante de esta Tesis.

Apéndices

Apéndice I-1

Aplicaciones de los femtosegundos

El interés por los pulsos ultracortos ya se encuentra a mediados de los '60. De esa época datan los primeros trabajos en láseres de colorantes con mode locking pasivo. Sin embargo, y debido a la complejidad de estos sistemas, su empleo masivo en otras ramas de la ciencia, así como en aplicaciones específicas, se vio postergado hasta la aparición de los láseres de estado sólido y las técnicas de mode locking que hemos descripto. Con la creciente confiabilidad lograda por estos láseres, sumado a las potencias obtenidas, cada vez mayores, las aplicaciones abarcan todos los campos, desde la espectroscopía hasta las comunicaciones, la medicina o el procesamiento de materiales.

Interacción de los pulsos ultracortos con la materia

En el campo de los materiales, la ablación con láser no es novedosa. Se viene realizando, en general con láseres continuos o de pulsos largos (nanosegundos) mediante Q-switch. En estos regímenes el proceso dominante involucrado es el calentamiento del material, ya sea en fase líquida o gaseosa, con el resultado de expansión y expulsión del material deseado. Esto es acompañado de calentamiento y daño colateral del área circundante, que puede ser estimado como la razón de energía absorbida y la energía perdida por conducción térmica en el material. Este daño colateral es a menudo un perjuicio y un factor limitante cuando se requiere una ablación de alta precisión o cuando puede haber riesgo, como ocurre en las cirugías con láser. Debido a su gran intensidad de pico, los pulsos ultracortos extirpan material por medio de la rápida creación de un plasma que absorbe la energía incidente resultando en una vaporización directa del material. Esto produce mínimo calentamiento colateral y ondas de choque mucho menores que otros métodos. Estas propiedades hacen que la técnica sea ideal para diversas aplicaciones. En tejidos orgánicos el proceso comienza cuando un pulso es fuertemente enfocado sobre la muestra, se genera un campo eléctrico muy intenso, que conduce a la formación de una mezcla de electrones libres e iones que constituyen el plasma. Este plasma caliente, generado ópticamente se expande a

velocidades supersónicas, desplazando el tejido circundante. A medida que la expansión del plasma disminuye, el frente de desplazamiento se propaga a través del tejido como una onda de choque, que pierde energía y velocidad al propagarse, concluyendo como una onda acústica que se disipa inofensivamente para el tejido aledaño. La expansión adiabática del plasma ocurre en una escala temporal corta en comparación con la constante de difusión térmica local, confinando efectivamente el daño térmico. En la figura A1.1 vemos un esquema de este proceso.

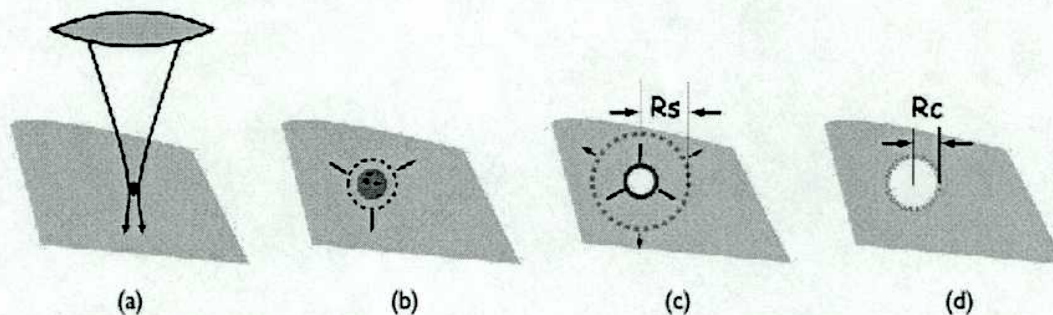


Figura A1.1: Esquema del proceso de fotodisrupción. a) El pulso láser enfocado se propaga en el tejido iniciando el proceso en el foco. b) Se produce el plasma que se expande a velocidades supersónicas con una onda de choque. c) El plasma se enfría rápidamente, al condensar forma una burbuja de gas. d) La burbuja alcanza un tamaño máximo y luego colapsa. Finalmente una pequeña burbuja estática permanece por un corto tiempo. R_s es la distancia a la cual velocidad de propagación de la onda de choque ha disminuido a la velocidad de una onda acústica ordinaria. R_c es el radio máximo de la burbuja. Figura extraída de [A I-1.1].

Los iones se recombinan en varias especies moleculares y el plasma forma, eventualmente, una burbuja de gas, centrada en el volumen focal del láser. Esta burbuja básicamente se compone de CO_2 , N_2 y H_2O , los que se difunden a través del tejido luego del evento de fotodisrupción.

Mientras estas propiedades describen el fenómeno en forma general, la naturaleza específica del proceso depende críticamente de la duración de pulso, la energía y la geometría de enfoque de cada dispositivo en particular.

Pulsos más cortos y fuertemente enfocados se asocian con propiedades fotodisruptivas mejores. El umbral de fluencia disminuye a medida que la duración del pulso decrece desde los nanosegundos a los aproximadamente 20 fs, mostrando sólo una débil dependencia bajando los cientos de femtosegundos. Consecuentemente el uso de pulsos extremadamente cortos no reduce mayormente la energía de fotodisrupción. Una

duración de pulso adecuada para usos quirúrgicos se puede establecer entre los 150 y 500 fs.

En metales es posible generar agujeros de 300 nm de diámetro y 52 nm de profundidad empleando un láser de Ti:Zafiro con duración de pulso de 200 fs [A I-1.2]. En dieléctricos la generación de plasma puede ser iniciada por una ionización multi fotónica más que por absorción resonante, resultando en un umbral de ablación que para pulsos suficientemente cortos, se hace dependiente solamente de la intensidad,

Ancho de pulso	Fluencia umbral (J/cm ²)	R _s (μm)	R _c (μm)
150 fs	1.5	20	3 –15
500 fs	1.6	20	3 –15
60 ps	14	200	30 –120
10 ns	185	700	300 –1200

Tabla A1.1: Fluencia umbral, dimensión de la onda de choque, R_s y de la burbuja, R_c en función de la duración de pulso. [A I-1.1]

sin importar las propiedades locales del material [A I-1.3]. Esta dependencia de la intensidad permite ablaciones más pequeñas que el tamaño del haz, operando cerca del umbral, dado que sólo una fracción, la región central, excede la intensidad umbral.

Femtosegundos en el control de propiedades ópticas

Propiedades ópticas de los materiales, como su reflectividad o transmisividad dependen de la ocupación de los niveles electrónicos, ya que los electrones son capaces de absorber fotones sólo si hay disponibles estados finales vacíos. En consecuencia, excitando electrones con pulsos muy cortos podremos cambiar la ocupación de los estados electrónicos, variando las propiedades ópticas del material. De esta forma es posible estudiar fenómenos transitorios rápidos como relajación de fonones en sólidos. Los experimentos conocidos como *pump and probe*, donde un pulso corto e intenso es empleado para excitar los electrones y otros más débiles y con retrasos variables determinan los cambios en la transmisividad del material, han demostrado gran

efectividad. Estas técnicas también permiten investigar los procesos dinámicos ultra rápidos que se producen en materiales semiconductores y en cristales fotónicos. Cerca de la región de *band gap* fotónico, los láseres de pulsos ultracortos permiten el estudio de efectos de retardos de la luz, así como fenómenos no lineales ultra rápidos en la reflectividad de estos materiales.

Los cristales fotónicos permiten el control del flujo de luz e interacciones de la luz con la materia. Están contruidos para presentar modulaciones periódicas en el índice de refracción en escalas de la longitud de onda de la luz. La analogía entre el comportamiento de las ondas electromagnéticas en estos medios artificiales y los electrones en cristales naturales fue descubierta por Eli Yablonovitch en 1987 [A I-1.4]. En la última década, en gran parte del mundo se desató una carrera por la obtención de cristales fotónicos 1-D, 2-D y 3-D, operables en diversas longitudes de onda, con vistas a aplicaciones en optoelectrónica y comunicaciones.

Espectroscopía de femtosegundos

Numerosas reacciones químicas, por otra parte, ocurren en escalas temporales del orden de los cien femtosegundos. Para estudiar y aprovechar estos efectos, es necesario desarrollar técnicas experimentales con resolución temporal extremadamente alta. Los tiempos característicos involucrados están más allá del dominio de la electrónica, y requieren de la espectroscopía con láseres de pulsos ultra cortos.

La elucidación acabada de los procesos reactivos es de fundamental importancia en la Química. La disponibilidad de láseres de femtosegundos llevó a la química dinámica a una nueva era, donde la espectroscopía ultra rápida se transformó en una versátil herramienta para el estudio de la dinámica inicial, como por ejemplo los eventos de formación y destrucción de ligaduras. Los pulsos de femtosegundos han puesto al alcance la posibilidad de intervenir activamente y controlar un reacción. Reacciones completamente controladas serían de gran utilidad en diversos campos. La fabricación de nanoestructuras es sólo un ejemplo donde el control de las reacciones es crucial.

Femtosegundos en comunicaciones

Desde la disponibilidad de fuentes de femtosegundos totalmente de estado sólido, la generación de pulsos ultracortos de múltiples longitudes de onda altamente sincronizados resulta de gran interés para redes que empleen formas combinadas de técnicas ya conocidas, como *wavelength division multiplexing* y *time division multiplexing* [A I-1.5]. Previamente, la forma de lograr operación en múltiples longitudes de onda era obtenida a través del uso de láseres de semiconductores, ya sea con medios de ganancia independientes o con sistemas de control de frecuencia en un único medio [A I-1.6,7]. Sin embargo esto requería precisos sistemas de control de la longitud de onda así como un medio independiente para cada canal o complejos mecanismos para el manejo de las diferentes salidas. La gran ventaja del empleo de fuentes de femtosegundos está directamente relacionada al ancho espectral que ofrecen. Recientemente varios grupos de investigación lograron demostrar la generación sincronizada de multi longitudes de onda directamente a partir de un láser con mode locking [A I-1.8]. Pulsos de 100fs permiten, típicamente, el empleo de 30 canales espaciados por 100GHz. Numerosas son las ventajas al emplear un láser de femtosegundos como fuente de amplio espectro: En primer lugar, contrariamente a las fuentes incoherentes, no hay ruido entre diferentes porciones del espectro dentro de un mismo canal, factor que limita la capacidad total de transmisión. Segundo, la fuente de femtosegundos es más estable y más confiable que los procesos no lineales en fibras. Finalmente la coherencia de la fuente puede ser usada para facilitar la alineación entre el transmisor y el receptor.

Apéndice II-1

Expresión para las no linealidades

Para calcular las no linealidades supondremos que el medio Kerr es delgado, con lo cual es adecuado suponer constantes las variables espaciales del pulso durante la propagación dentro del medio. Para la no linealidad espacial consideramos que los efectos no lineales son efectivos sobre una longitud equivalente al rango de Rayleigh calculado para el modo P_0 . De este modo la no linealidad espacial adopta la siguiente forma :

$$\gamma'_{\text{Total}} = \int_0^{z_R} dz' \gamma'(z') = \langle \gamma' \rangle z_R \quad (\text{AII-1.1})$$

donde γ'_{Total} representa la no linealidad total no adimensional, $[\gamma'_{\text{Total}}] = \text{cm}^{-1}$.

Dado que la forma de la no linealidad es:

$$\gamma'(z') = \frac{U(z')}{\sigma^4(z') \tau(z')} \quad (\text{AII-1.2})$$

con lo cual, reemplazando en (AII-1.1) tenemos:

$$\gamma'_{\text{Total}} = \int_0^{z_R} dz' \frac{U(z')}{\sigma^4(z') \tau(z')} = C \left\langle \frac{U(z')}{\sigma^4(z') \tau(z')} \right\rangle z_R \approx C \frac{\langle U \rangle}{\langle \sigma^4 \rangle \langle \tau \rangle} z_R \quad (\text{AII-1.3})$$

siendo C la constante no lineal.

Por su parte:

$$\sigma = \sigma_{\text{waist}} (1 + (z/z_R)^2)^{1/2} \quad (\text{AII-1.4})$$

$$\tau = \tau_{\text{min}} (1 + (z/z_R)^2)^{1/2} \quad (\text{AII-1.5})$$

Colocando el plano de cálculo en el centro del medio Kerr:

$$\sigma = \sigma_n (1 + (z/z_R)^2)^{1/2} \quad (\text{AII-1.6})$$

$$\tau = \tau_n (1 + (z/z_R)^2)^{1/2} \quad (\text{AII-1.7})$$

entonces:

$$\frac{z_R}{\langle \sigma^4 \rangle} = \int_{-z_R/2}^{z_R/2} dz \frac{1}{\sigma_n^4 (1 + (z/z_R)^2)^2} = \frac{z_R}{\sigma_n^4} [\arctg(1/2) + 0.4] \quad (\text{AII-1.8})$$

$$\frac{z_R}{\langle \tau \rangle} = \int_{-z_R/2}^{z_R/2} dz \frac{1}{\tau_n (1 + (z/z_R)^2)^2} = \frac{z_R}{\tau_n} \ln[(\sqrt{5} + 1)/(\sqrt{5} - 1)] \quad (\text{AII-1.9})$$

En tanto que para la energía tenemos, al atravesar un medio con ganancia por unidad de longitud g :

$$\langle u \rangle = u_{\text{entrada}} \frac{G^* - 1}{\ln G^*} \quad (\text{AII-1.10})$$

donde $u_{\text{entrada}} = u_n$

$$G^* = \exp(g z_R) = G^{z_R/d}$$

d es la longitud del medio activo

de modo que tendremos:

$$\langle u \rangle = u_n \frac{G^{z_R/d} - 1}{\frac{z_R}{d} \ln G} \quad (\text{AII-1.11})$$

Finalmente la no linealidad es:

$$\gamma'_{\text{Total}} = C_\gamma U_n T_n^{1/2} S_n^2 \quad (\text{AII-1.12})$$

donde

$$C_\gamma = C z_R \frac{G^{z_R/d} - 1}{\ln G} [\arctg(1/2) + 0.4] \ln[(\sqrt{5} + 1)/(\sqrt{5} - 1)]$$

y la no linealidad total adimensional es $\gamma = Z_R \gamma'_{\text{Total}}$.

Análogamente tenemos, para la no linealidad temporal:

$$\beta_{\text{Total}} = U_n T_n^{3/2} S_n \quad (\text{AII-1.13})$$

donde

$$C_\beta = C \frac{Z_R}{\lambda} \left\langle \frac{u}{\sigma^2 \tau^3} \right\rangle = C \frac{d G^{Z_R d} - 1}{\lambda \ln G} \cdot \frac{4}{\sqrt{5}} \arctg(1/2)$$

y $[\beta] = \text{seg}^{-2}$.

De esta forma completamos las expresiones para las no linealidades espacial y temporal en función de las variables del sistema.

Apéndice II – 2

Ecuaciones del mapa

Supongamos que el haz que se propaga en la cavidad es de forma gaussiana, con simetría cilíndrica, y que este perfil gaussiano se mantiene durante toda la propagación. Para un haz gaussiano de tamaño σ y radio de curvatura R en un material de índice de refracción n , el radio de curvatura complejo es q dado por (2.3). Si q_1 es el radio complejo a la entrada de un sistema óptico caracterizado, en la formulación matricial, por una matriz de la forma

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad (\text{AII-2.1})$$

el radio complejo q_2 a la salida está determinado por

$$q_2 = \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D} \quad (\text{AII-2.2})$$

La matriz que es consistente con las fórmulas standard para transformaciones de haces gaussianos es: [AII-2.1]:

$$\mathbf{M} = \sqrt{1-\gamma} \begin{pmatrix} 1 & d_e \\ \frac{-\gamma}{[(1-\gamma)d_e]} & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{AII-2.3})$$

donde $d_e = d / n$ es la longitud efectiva de propagación a través de un medio de longitud d e índice de refracción n , mientras que γ es la no linealidad espacial. Denominamos a γ no linealidad porque es una función de las variables del pulso y , por otra parte, las variables del pulso dependen de γ . Asimismo es una medida del SF que se produce debido al efecto Kerr, y su expresión en función de las variables del pulso es:

$$\gamma = c_\gamma \frac{U}{\tau \sigma^4} \quad (\text{AII-2.4})$$

donde U es la energía, τ la duración y σ el tamaño del haz. La constante es la calculada en el apéndice II-1 .

Seguimos la referencia[AII-2.1] para evidenciar los efectos no lineales y separarlos de los lineales que corresponden a la propagación a través de una longitud efectiva d_e , factorizamos la matriz M como :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{d_e}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{M}_K \begin{pmatrix} 1 & \frac{d_e}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{AII-2.5})$$

$$\text{donde } \mathbf{M}_K = \frac{1}{\sqrt{1-\gamma}} \begin{pmatrix} 1-\frac{\gamma}{2} & \frac{-\gamma d_e}{4} \\ \frac{-\gamma}{d_e} & 1-\frac{\gamma}{2} \end{pmatrix} \quad (\text{AII-2.6})$$

Las matrices a la izquierda y a la derecha de \mathbf{M}_K corresponden a la propagación a través de una longitud $d/2$ en un medio de índice de refracción n_0 . Todo el efecto no lineal espacial está contenido en la matriz \mathbf{M}_K . Para γ pequeño podemos desarrollar la matriz \mathbf{M}_K a primer orden obteniendo :

$$\mathbf{M}_K \approx \begin{pmatrix} 1 & \frac{-\gamma d_e}{4} \\ \frac{-\gamma}{d_e} & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{AII-2.7})$$

Esta expresión nos permite hacer una interpretación de la no linealidad. La matriz \mathbf{M}_K puede ser vista, a primer orden en γ , como una superposición de los efectos de una lente de distancia focal f_K y una propagación sobre una distancia negativa z_K donde :

$$\frac{1}{f_K} = \frac{\gamma}{d_e} \quad \text{y} \quad z_K = \frac{-\gamma d_e}{4}$$

La longitud focal f_K representa el auto enfoque, y la distancia negativa de propagación representa un efecto no trivial que es denominado "auto acortamiento" [AII-2.1].

Notemos que el determinante de esta matriz es 1 si despreciamos los términos de orden cuadrático en γ . En las expresiones que se deduzcan empleando la matriz M_K debemos retener únicamente los términos de orden cero y uno en γ , dado que la matriz es válida para γ pequeño. Esta aproximación no implica grandes restricciones en el modelo ya que se cumple en casi todos los casos de interés práctico.

Examinemos ahora los elementos que dan forma a la parte temporal de la matriz de tránsito :

- Para el medio Kerr :

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{AII-2.8})$$

donde α es la GVD que introduce la barra de Ti :zafiro.

- La matriz de los prismas compensadores es :

$$\begin{pmatrix} 1 & -\Delta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{AII-2.9})$$

donde Δ es la GVD introducida por el par de prismas. Su expresión en función de los parámetros geométricos puede hallarse en el apéndice AIII-3.

- La matriz que representa el SPM es de la forma :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{AII-2.10})$$

donde β es el coeficiente que representa las no linealidades temporales y su expresión en función de las variables del pulso es:

$$\beta = c\beta \frac{U}{\sigma^2 \tau^3} \quad (\text{AII-2.11})$$

donde la expresión para $c\beta$ es la que obtuvimos en el apéndice AII-1

Para la parte espacial obtenemos :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_0 & \mathbf{B}_0 \\ \mathbf{C}_0 & \mathbf{D}_0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} \mathbf{A}_\gamma & \mathbf{B}_\gamma \\ \mathbf{C}_\gamma & \mathbf{D}_\gamma \end{pmatrix} \quad (\text{AII-2.12})$$

donde los coeficientes de las matrices del lado derecho sólo son funciones de la geometría de la cavidad.

Mientras que para la parte temporal los elementos de matriz son los dados por las ecuaciones (2.14) – (2.17) del Capítulo 2.

Apéndice II –3

Ecuación del mapa para la variable S de dimensión 1

Reemplazamos:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \gamma \mathbf{A}_1 \quad (\text{AII-3.1})$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \gamma \mathbf{B}_1 \quad (\text{AII-3.2})$$

en la expresión (2.8) y sustituimos el punto fijo para la energía en la expresión de la no linealidad (2.6) con la expresión:

$$U^* = \frac{F}{S_0} (1 - H) \quad (\text{AII-3.3})$$

donde S_0 es el valor en el punto fijo P_0 . Definimos:

$$F \equiv D_S (\Gamma k^{1/2} - 1) \quad (\text{AII-3.4})$$

$$H \equiv \frac{F^2 c_\gamma c_\beta S_\gamma \pi^2}{\delta + p \pi^2 c_\beta F} \quad (\text{AII-3.5})$$

donde S_γ es una función algebraica de los parámetros geométricos de la cavidad y p es un factor de corrección que toma en cuenta que el ancho de banda del amplificador es finito [2-7]. La ecuación para la variable S tiene la forma:

$$S_{n+1} = \frac{S_n}{[a' b' S_n^2 + c']^2 + [d' S_n + a' e' S_n^3]^2} \quad (\text{AII-3.6})$$

donde:

$$a' = \frac{C_1 \frac{F}{S^*}}{\frac{\delta}{\pi C_\beta F} + p} \quad (\text{AII-3.7})$$

$$b' = \mathbf{A}_1 + \mathbf{B}_1 n \left(\rho_0 + \frac{\rho_0}{S_\gamma} \frac{H}{S^*} \right) \quad (\text{AII-3.8})$$

$$c' = \mathbf{A}_0 + \mathbf{B}_0 n \left(\rho_0 + \frac{\rho_0}{S_\gamma} \frac{H}{S^*} \right) \quad (\text{AII-3.9})$$

$$d' = \mathbf{B}_0 n \frac{\lambda}{\pi} \quad (\text{AII-3.10})$$

$$e' = \mathbf{B}_1 n \frac{\lambda}{\pi} \quad (\text{AII-3.11})$$

ρ_0 y ρ_γ son funciones algebraicas de los parámetros de la cavidad, n es el índice de refracción de la barra.

Escalamos la ecuación (AII-3.6) con la expresión de la variable S en el punto fijo:

$$y_{n+1} \equiv \frac{S_{n+1}}{S^*}, \quad a \equiv a' S^{*2}, \quad \text{etc} \quad (\text{AII-3.12})$$

obteniendo el mapa (2.18). El parámetro a depende del valor de la GVD, δ , mientras que los otros parámetros son sólo funciones de las distancias geométricas.

La pendiente del mapa, como función de a es:

$$y'_{n+1} = \frac{D(y_n) - y_n D'(y_n)}{[D(y_n)]^2} \quad (\text{AII-3.13})$$

donde $D(y_n)$ es el denominador de la ecuación (2.18). En el punto fijo $y_n = 1$ y $D(y_n) = 1$ de modo que:

$$y'_{n+1} = 1 - D'(1)$$

(AII-3.14)

Insertando ahora los valores de los parámetros geométricos, vemos que a medida que el parámetro a crece, la pendiente del mapa decrece siendo $y'_{n+1} = -1$ para $a = 0.7156$.

Es decir, de acuerdo a este mapa simplificado, tendremos una desestabilización en forma de doblamiento de períodos. Además, también en coincidencia con la evidencia experimental, las zonas inestables se alcanzan disminuyendo la dispersión de la velocidad de grupo.

Apéndice II –4

Punto fijo para la ecuación de la energía

Dado que las expresiones (2.22) y (2.23), que determinan la relación lineal entre la dispersión de la velocidad de grupo y la duración de pulso para cada uno de los modos pulsados P_1 y P_2 , involucran la cantidad F , el cociente de las pendientes de ambas rectas será una función de F . Si F es una constante, esta relación también lo será.

Demostraremos, a continuación que F es una constante que solo depende de los parámetros de la cavidad.

Partimos de la ecuación del mapa para la energía (2-12)

$$U_{n+1} = U_n \left\{ 1 - \frac{2}{\mu} \left(\frac{U^* S_n + U_n S^*}{D_s} \right) + 4 \frac{\mu - 1}{\mu} \right\} \quad (\text{AII-4.1})$$

Planteamos las condiciones de punto fijo, es decir:

$$U_{n+1} = U_n = U^* \quad (\text{AII-4.2})$$

$$S_n = S^* \quad (\text{AII-4.3})$$

con lo cual (AII-4.1) toma la forma:

$$U^* S^* = D_s (\mu - 1) \equiv F \quad (\text{AII-4.4})$$

donde $D_s = 1.22 \text{ mJ cm}^{-2}$ es la energía de saturación multiplicada por el round trip y μ es el producto de la ganancia de pequeña señal y el factor de realimentación por pasaje.

Hemos comprobado que la expresión (AII-4.4), en el punto fijo, es una constante, es decir F es una constante.

Apéndice III –1

Parámetros del láser de Ti:Zafiro

En la realización de simulaciones así como en la interpretación de los resultados experimentales intervienen, además de las dimensiones geométricas de la cavidad, otros parámetros que no siempre son accesibles a través de medición directa.

Veamos cuales son estos parámetros y cómo obtenemos su valor.

- Constantes de no linealidad espacial y temporal c_γ , c_β (deducidas en el Apéndice II-1)

$$c_\gamma = 1.3799 \cdot 10^{-11} \text{ cm}^4 \text{ fs nJ}^{-1}$$

$$c_\beta = 2.179 \cdot 10^{-7} \text{ cm}^2 \text{ fs nJ}^{-1}$$

- Dispersión neta de la velocidad de grupo (GVD)

La fase introducida a un pulso al atravesar un medio material de índice de refracción $n(\omega)$ y longitud l_m es [2.11]:

$$\phi = \frac{\omega n(\omega) l_m}{c} \quad (\text{AIII-1.1})$$

donde ω es la frecuencia del pulso y λ su longitud de onda.

La derivada segunda del parámetro de dispersión ϕ con respecto a la frecuencia toma la forma :

$$\phi'' \equiv \frac{d^2 \phi(\omega)}{d\omega^2} = \frac{\lambda^3}{2\pi c^2} l_m \frac{d^2 n}{d\lambda^2} \quad (\text{AIII-1.2})$$

La práctica usual en los textos de óptica ha sido graficar el índice de refracción del medio dispersivo como función de la longitud de onda, y referirse a las regiones donde este gráfico es cóncavo hacia arriba ($d^2 n/d\lambda^2 > 0$) como regiones de dispersión positiva, y regiones de signo opuesto como de dispersión negativa. En este sentido, dispersión

positiva indica valores positivos tanto para ϕ'' como para $d^2n/d\lambda^2$. La mayor parte de los materiales presentan, en las regiones de interés, dispersión positiva.

El desarrollo de láseres capaces de alcanzar pulsos de femtosegundos, así como el importante rol desempeñado por el chirp en la generación de los pulsos, llevó a la necesidad de contar con capaces de proveer dispersión de ambos signos.

La configuración de un par de prismas dispuestos dentro de la cavidad se popularizó en las cavidades de los láseres de femtosegundos y es debida a Fork, Martínez y Gordon [AIII-1.1]. Tiene como ventajas que el haz entra y sale de los prismas en ángulo de Brewster, y que no hay desplazamiento ni desviación del haz a la entrada o la salida del sistema. La dispersión negativa introducida por el sistema de prismas es [AIII-1.1,2]:

$$\frac{d^2\phi(\omega)}{d\omega^2} = -\frac{\lambda^3}{2\pi c^2} l_p \left(\frac{dn}{d\lambda}\right)^2 \quad (\text{AIII-1.3})$$

donde l_p es la separación entre prismas, y la derivada del índice de refracción en función de la longitud de onda se obtiene a partir de la ecuación de Sellmeier de cada material.

$$n^2(\lambda) = 1 + \frac{B_1\lambda^2}{\lambda^2 - C_1} + \frac{B_2\lambda^2}{\lambda^2 - C_2} + \frac{B_3\lambda^2}{\lambda^2 - C_3} \quad (\text{AIII-1.4})$$

En particular, para el *fused silica*, de los prismas del Ti:Zafiro empleado en esta Tesis, los coeficientes de la ecuación de Sellmeier son [AIII-1.3]:

B_1	0.6961663	C_1	$4.67914826 \cdot 10^{-3}$
B_2	0.4079726	C_2	$1.35120631 \cdot 10^{-2}$
B_3	0.8974794	C_3	97.9340025

Tabla AIII-1.1 : Coeficientes del Sellmeier del fused silica

- GVD positiva del Ti:Zafiro [AIII-1.2]: $58 \text{ fs}^2/\text{mm}$.
- D_S : 1.22 mJ cm^{-2}

Flujo de energía de saturación. Es el producto de la energía de saturación por el tiempo de round trip [AIII-1.4].

- $\mu : 1.61$

Parámetro adimensional, producto de la ganancia de pequeña señal y el factor de realimentación por pasaje, debido a pérdidas en la cavidad (reflectividad de los espejos, scattering, etc.). El valor consignado es calculado empleando la pendiente de la recta duración de pulso vs. GVD (ecuaciones 2.22, 2.23), dado que en el punto fijo

$$F = D_S(\mu - 1) \tag{AIII-1.5}$$

- Coeficientes de las matrices de propagación espacial (ecuación 2.13 del Capítulo 2), que son función de la geometría de la cavidad. Para los valores que se detallan en la figura AIII-1.1, los elementos de matriz adoptan los valores consignados en la tabla AIII-1.2

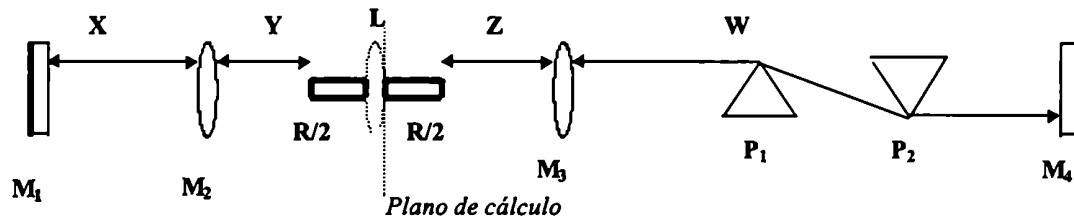


Figura AIII-1.1: Esquema de la cavidad del láser de Ti:Zafiro. M_1 :espejo de salida, M_2 y M_3 : espejos focalizadores, M_4 : espejo de fondo, P_1 y P_2 : prismas compensadores de la GVD, R :barra de Ti:zafiro, L : lente que representa cómo el modelo toma en cuenta las no linealidades. $X = 58.9$ cm, $Y = 5.5$ cm, $Z = 5$ cm, $W = 101.7$ cm, el radio de curvatura de los espejos M_2 y M_3 es 10 cm.

	Modo P_1	Modo P_2
A_0	4.138138	3.306214
B_0	-2.304786	-1.438793
C_0	8.327616	8.600394
D_0	-4.3965	-3.44072
A_γ	3.54758	-0.488072
B_γ	1.315279	0.195234
C_γ	-3.246724	-14.5647
D_γ	8.224233	6.338294

Tabla AIII-1.2 : Elementos de matriz. $[A_{0,\gamma}] = [D_{0,\gamma}] =$ adimensional. $[B_{0,\gamma}] = \text{cm}$, $[C_{0,\gamma}] = \text{cm}^{-1}$

Apéndice III –2

Autocorelación como técnica de medición de la duración de pulso

Debido a que aun los fotodiodos más rápidos son muy lentos para las mediciones temporales de pulsos de picosegundos y menores, fue necesario, junto con el surgimiento de los pulsos ultracortos, desarrollar técnicas que permiten determinar la duración de esos pulsos.

Las técnicas de autocorrelación no lineal con generación de segunda armónica se han posicionado como el método standard para la medición de pulsos ópticos ultracortos. La autocorrelación interferométrica, conocida como FRAC (*fringe resolved autocorrelation*) fue demostrada por primera vez en 1985 por Diels *et al.* [AIII-2.1], y es el método que continúa empleándose mayormente en la actualidad. Una de sus mayores ventajas es la comparativamente alta sensibilidad de las envolventes calculadas a los parámetros del pulso. Desde el punto de vista experimental, otro importante beneficio es la precisa y directa autocalibración provista por las franjas interferométricas así como la posibilidad de asegurarse de que el autocorrelador esté correctamente alineado observando el contraste.

Los elementos básicos del setup de un autocorrelador se pueden ver en la figura AIII 2.1.

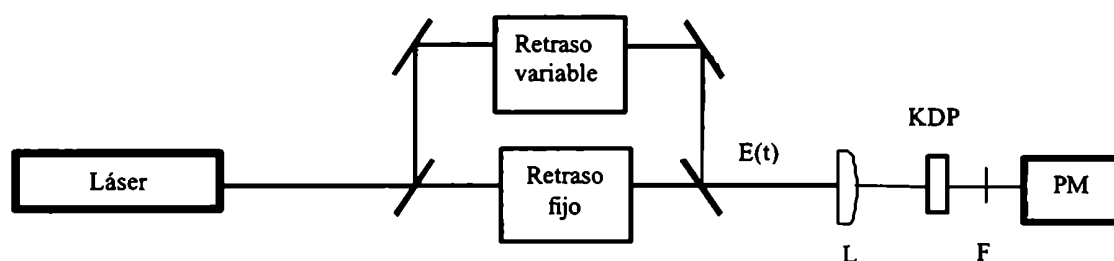


Figura AIII 2.1: Diagrama de un autocorrelador. El tren de pulsos original es dividido en dos haces con fase relativa ϕ y retraso τ . La segunda armónica, generada en el cristal KDP es detectada a través del filtro F (que elimina la radiación a la longitud de onda fundamental) por el fotomultiplicador PM. L es una lente de enfoque y $E(t) = E(t-\tau) e^{i\phi} e^{i\omega t} + E(t) e^{i\omega t}$.

El tren de pulsos es dividido en dos haces que son recombinados luego de haber atravesado un retraso fijo uno y variable el restante. Se recoge a la salida la intensidad en la segunda armónica (generada por algún cristal no lineal, por ejemplo KDP), como función del retraso variable, que es proporcional a

$$\int |E_t|^2 dt \quad (\text{AIII-2.1})$$

donde $E_t = E(t) + E(t-\tau)$ es el campo eléctrico que entra en el cristal doblador. Si las franjas de interferencia en el haz recombinado son promediadas, puede mostrarse que la señal será proporcional a:

$$I_{c1} = 1 + 2 \frac{\int I(t)I(t-\tau)dt}{\int I^2 dt} \quad (\text{AIII-2.2})$$

donde I es la intensidad del pulso de luz. La función I_{c1} tiene una relación pico – fondo de 3 a 1. Si lo que se mide es la función:

$$I_c = \frac{\int I(t)I(t-\tau)dt}{\int I^2 dt} \quad (\text{AIII-2.3})$$

estamos ante lo que se conoce como autocorrelación libre de fondo. Esta función no contiene información sobre la fase, por lo cual no puede emplearse para distinguir entre pulsos coherentes e incoherentes.

Si la medición es hecha con precisión interferométrica, la intensidad en la segunda armónica es proporcional a :

$$I_t = \int \left\{ E(t)e^{i(\omega t + \phi)} + E(t-\tau)e^{i(\omega(t-\tau) + \phi(t-\tau))} \right\}^2 dt \quad (\text{AIII-2.4})$$

Para retraso igual a cero tenemos:

$$I_t(0) = 2^4 \int E^4(t) dt \quad (\text{AIII-2.5})$$

En el siguiente incremento del retraso de medio período, los dos campos se suman con fases opuestas, resultando en una señal casi nula, (figura A3.2). La envolvente de interferencias constructivas y destructivas se mezclará en la intensidad de autocorrelación para retardos que excedan el tiempo de coherencia. Dado que esto involucra la potencia de cuarto orden de los campos, la envolvente superior será más sensible a la forma del pulso que la intensidad de autocorrelación.

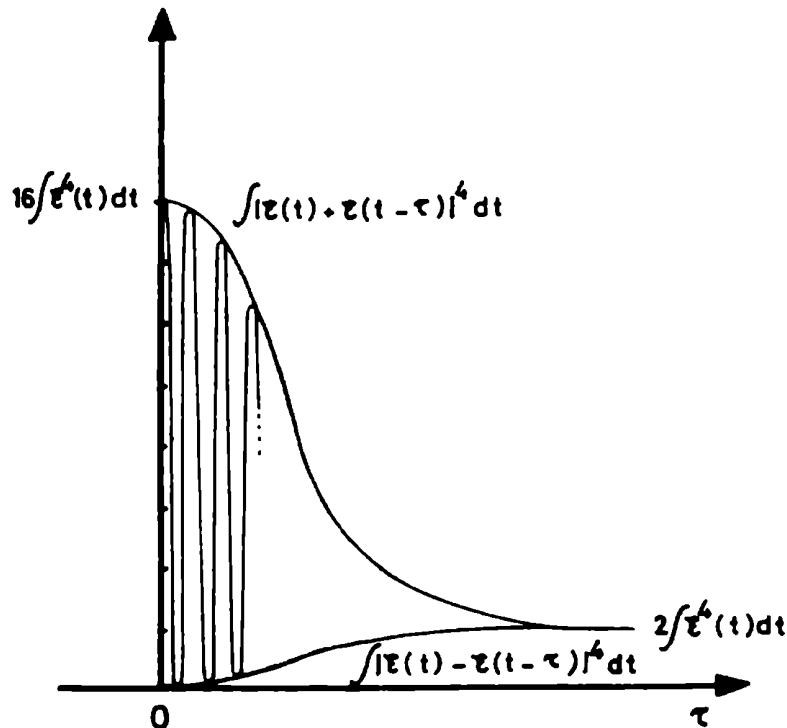


Figura A3.2: Autocorrelación interferométrica (de la referencia AIII 2.1)

Mediante esta técnica cambiamos el problema de determinar una cantidad temporal con muy alta resolución donde, por sus tiempos de respuesta, la electrónica no puede ser empleada, a un problema mucho mas tratable, de determinar con razonable precisión una cantidad espacial. De este modo se pueden medir duraciones de pulso inalcanzables con otros métodos de medición.

Apéndice IV-1

Dimensión de embedding

Dos espacios son topológicamente equivalentes si existe un mapeo continuo con una función inversa continua entre ellos. En este caso es suficiente que la estructura equivalente sea parte de una entidad más grande, mientras que el resto puede ser fácilmente ignorado. Surge entonces el concepto de embedding, que se define de la siguiente forma:

Una función $f: X \rightarrow Y$ es un embedding si es un mapeo continuo con una inversa continua $f^{-1}: f(X) \rightarrow X$ desde su rango a su dominio.

Se puede mostrar que cualquier *manifold*¹ en una dimensión d puede ser encajado (*embedded*) en \mathbb{R}^{2d+1} .

Contando únicamente con una serie temporal, la forma de obtener estas $2d+1$ coordenadas, es por medio de la introducción de las llamadas coordenadas de retardo.

Sea ϕ un flujo en un manifold M , $\tau > 0$, y $h: M \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave. La función de coordenadas retardadas con un tiempo de retardo τ , $F(h, \phi, \tau): M \rightarrow \mathbb{R}^{2d+1}$ es un embedding.

El teorema de Takens establece que en el caso más general, la dinámica del sistema recuperado por el embedding de coordenadas retardadas es la misma que la generada por el sistema original.

¹ Un manifold local estable W_{loc}^S de un punto fijo \underline{x}^0 es un conjunto de puntos cercano a \underline{x}^0 que satisface las siguientes condiciones:

- Las trayectorias que se originan en cualquiera de estos puntos se aproxima asintóticamente a \underline{x}^0 cuando $t \rightarrow \infty$.
- Estas trayectorias permanecen todo el tiempo ($t \geq 0$) dentro de W_{loc}^S .

El manifold global W^S se obtiene eliminando la condición de proximidad a \underline{x}^0 en la definición anterior. En forma equivalente el manifold inestable, local o global W_{loc}^U , W^U , de un punto fijo \underline{x}^0 se define cambiando el signo de la evolución temporal en la primera condición es decir $t \rightarrow -\infty$.

Apéndice IV-2

Entropía de Kolmogorov

Consideremos una trayectoria

$$\underline{x}(t_j) = (x_i(t_j), x_i(t_j + \tau), \dots, x_i(t_j + (d-1)\tau)) \quad (\text{AIV-2.1})$$

en un espacio de fase de dimensión d , el cual dividimos en ‘cajas’ de tamaño l^d . Sea $p_{i_0 \dots i_n}$ la probabilidad conjunta de que $\underline{x}(0)$ esté en la celda i_0 , $\underline{x}(\tau)$ en la celda i_1 , ..., y $\underline{x}(n\tau)$ en la celda i_n . Entonces, por analogía con el concepto usual de entropía en el marco de la teoría de información, la cantidad :

$$K_n = - \sum_{i_0 \dots i_n} p_{i_0 \dots i_n} \cdot \log p_{i_0 \dots i_n} \quad (\text{AIV-2.2})$$

es una medida de la información necesaria para caracterizar una trayectoria de n puntos de longitud con una precisión l . Como consecuencia de esto, $K_{n+1} - K_n$ mide la pérdida de información al pasar de un tiempo $n\tau$ a un tiempo $(n+1)\tau$.

La entropía de Kolmogorov o ‘K- entropía’, es definida como la tasa promedio de pérdida de información:

$$K = \lim_{\tau \rightarrow 0} \lim_{l \rightarrow 0} \left\{ \lim_{N \rightarrow 0} \frac{1}{N\tau} \sum_{i_0 \dots i_{N-1}} p_{i_0 \dots i_{N-1}} \cdot \log p_{i_0 \dots i_{N-1}} \right\} \quad (\text{AIV-2.3})$$

donde el límite $\tau \rightarrow 0$ debe ser omitido en el caso de mapas.

La entropía de Kolmogorov es una cantidad fundamental para medir el ‘grado de caoticidad’ de un sistema dado. Su valor más bajo es cero y corresponde a una evolución regular en el tiempo; para movimientos caóticos es positiva, cuanto más positiva ‘más caótico’ será el sistema, mientras que para un movimiento perfectamente aleatorio es infinita.

Apéndice V-1

Método de los falsos vecinos

La idea del algoritmo de cálculo de falsos vecinos, implementada por el código *false_nearest* del paquete TISEAN es la siguiente: para cada punto de la serie temporal buscamos sus vecinos en un espacio de dimensión m . Calculamos la distancia, iteramos ambos puntos y volvemos a calcular la distancia. Si ésta excede un determinado valor umbral el punto es marcado como un falso vecino.

Necesitamos un criterio para determinar cuándo un punto $y(k)$ y su vecino $y^{NN}(k)$ visto en la dimensión d , están más cerca o más lejos en la dimensión $d+1$. Al aumentar la dimensión de d a $d+1$, la componente adicional del vector $y(k)$ (ver ecuación (4.7), Capítulo 4) es $s(k, dT)$, y la componente adicional del vector $y^{NN}(k)$ es $s^{NN}(k, dT)$, ambos conocidos. Comparando las distancias entre los vectores $y(k)$ y $y^{NN}(k)$ en dimensión d con la distancia entre los mismos vectores en dimensión $d+1$, podemos, fácilmente, establecer cuáles vecinos son verdaderos y cuáles son falsos. Sólo necesitamos comparar $|s(k+dT) - s^{NN}(k+dT)|$ con la distancia euclídea $|y(k) - y^{NN}(k)|$ entre vecinos en dimensión d . Si la distancia adicional es mayor comparada con la distancia en dimensión d entre vecinos, estaremos en presencia de un falso vecino, en caso contrario el vecino será verdadero.

El cuadrado de la distancia euclídea entre los puntos vecinos, en dimensión d es:

$$R_d(k)^2 = \sum_{m=1}^d [s(k+(m-1)T) - s^{NN}(k+(m-1)T)]^2 \quad (\text{AV-1.1})$$

Mientras que en dimensión $d+1$ es:

$$\begin{aligned} R_{d+1}(k)^2 &= \sum_{m=1}^{d+1} [s(k+(m-1)T) - s^{NN}(k+(m-1)T)]^2 \\ &= R_d(k)^2 + |s(k+dT) - s^{NN}(k+dT)|^2 \end{aligned} \quad (\text{AV-1.2})$$

La distancia entre puntos vista en dimensión $d+1$, con respecto a la distancia en dimensión d es:

$$\sqrt{\frac{R_{d+1}^2(k) - R_d(k)^2}{R_d(k)^2}} = \frac{|s(k+dT) - s^{NN}(k+dT)|}{R_d(k)} \quad (\text{AV-1.3})$$

Cuando esta cantidad es mayor que un valor umbral preestablecido, identificamos dicho punto como un falso vecino. La determinación de falsos vecinos se vuelve insensible al valor del umbral si el número de datos es suficiente para poblar adecuadamente el atractor.

Apéndice VI-1

Algoritmo de control empleando δ

Para comprobar que los mismos resultados son obtenidos no importa cual sea el parámetro empleado, desarrollemos el esquema de control empleando la GVD como parámetro.

Comenzamos con los valores de la variable y el parámetro de la UPO:

$$\bar{S} = 120000 \text{ cm}^{-1} \text{ (i.e.: } \sigma = 28 \mu\text{m)}$$

$$\bar{\delta} = 30 \text{ fs}^2$$

Estos valores conducen, una vez estabilizados a una duración de pulso de 18fs.

Las derivadas y la forma de la función de control (6.11) toman la forma

$$A = 12.35$$

$$b = 3.04 \text{ cm}^{-1} \text{ fs}^{-2}$$

$$h = -4.0625 \text{ cm fs}^2$$

$$\delta_k = \begin{cases} \bar{\delta} + h(s_k - \bar{s})si |s_k - \bar{s}| \leq \epsilon \\ \bar{\delta} & si |s_k - \bar{s}| > \epsilon \end{cases} \quad (\text{AVI-1.1})$$

Permitiendo variaciones de hasta un 4%, es decir, $\epsilon = 0.04$, las variaciones en el parámetro δ estarán acotadas al intervalo (29.8; 30.17) fs^2 .

Aplicando la función de control (6.14) se obtiene el mismo gráfico de estabilización de la variable σ que obtuvimos con μ como parámetro (Gráfico 6.1).

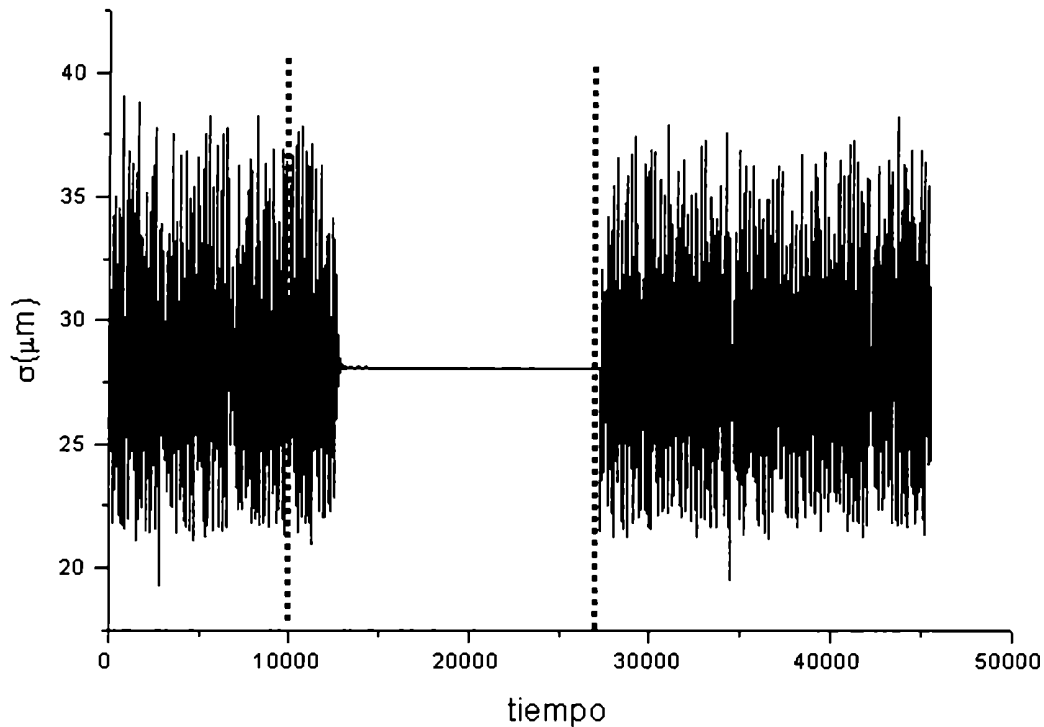


Figura AVI-1.1: Tamaño del haz en función del tiempo (en unidades del tiempo de tránsito en la cavidad). La línea punteada en $t= 10000$ indica el comienzo del control. Vemos que luego de un transitorio, la variable se estabiliza en el valor de punto fijo de la UPO. En $t = 27170$ desactivamos el control, volviendo a obtener una señal caótica.

Vemos que procediendo de forma análoga que en la Sección 6.3, pero con δ como parámetro de control se obtienen, numéricamente, los mismos resultados. Es decir podemos estabilizar una órbita periódica logrando un funcionamiento estable con una duración de pulso menor. El inconveniente de realizar experimentalmente el control sobre este parámetro reside en la imposibilidad de variar con la rapidez necesaria el parámetro δ .

Referencias

Capítulo 1

- [1-1] P.F.Moulton; Opt. News **8**, 9 (1982).
- [1-2] A. E. Siegman, "Lasers", University Science Books, California (1986), Capítulo 27.
- [1-3] W. Koechner, "Solid State Laser Engineering", Springer - Verlag, New York (1998), Capítulo 9.
- [1-4] R. L. Fork, O. E. Martinez, J. P. Gordon, " Negative dispersion using pairs of prisms", Opt. Lett. **9**, 150 (1984).
- [1-5] A. A. Hnilo, M. A. Larotonda, "Dynamics of the diode pumped Kerr lens mode locked Nd:YAG laser", J. Opt. Soc. Am. B, **18**, 1451 (2001).
- [1-6] M. C. Marconi, "Obtención de pulsos de alta potencia en radiación láser por medio de un nuevo método en la conmutación de la cavidad de oscilación", Tesis de Doctorado, FCEyN, UBA (1985).
- [1-7] M. C. Marconi, O. E. Martinez, F.P. Diodati, "Short pulse generation in solid state lasers by a novel passive technique", Opt. Comm., **63**, 211 (1987).
- [1-8] D. E. Spence, P. N. Kean, W. Sibett, " 60 fs pulse generation from self mode locked Ti:Sapphire laser", Opt. Lett, **16**, 42 (1991).
- [1-9] G. P. Agrawal, "Nonlinear Fiber Optics", Academic Press, New York (1989).

- [1-10] R. L. Fork, C. H. Brito-Cruz, P.C. Becker, C. V. Shank, "Compression of optical pulses to six femtoseconds by using cubic phase compensation", *Opt. Lett.* **12**, 483 (1987).
- [1-11] T. Sandrock, T. Danger, E. Heumann, G. Huber, B. Chai, "Efficient continuous wave laser emission of Pr^{3+} doped fluorides at room temperature", *Appl. Phys. B*, **58**, 149 (1994).
- [1-12] J. Sutherland, P. French, J. Taylor, B. Chai, "Visible continuous wave transitions in Pr^{3+} :YLF and femtosecond generation", *Opt. Lett.*, **21**, 797 (1996).
- [1-13] M.A. Larotonda, "Láser de Nd:YAG con mode locking por lente de Kerr bombeado por diodos", Tesis de Doctorado, FCEyN, UBA (2002).
- [1-14] J.D. Kmetec, "Solid state laser with trapped pump light", U.S. patent 5.744.488 (1998).
- [1-15] G. J. Spühler, R. Paschotta, U. Keller, M. Moser, M. J. P. Dymott, D. Kopf, J. Meyer, K. J. Weingarten, J. D. Kmetec, J. Alexander, G. Truong, "Diode-pumped passively mode-locked Nd:YAG laser with 10-W average power in a diffraction-limited beam", *Opt. Lett.* **24**, 528 (1999).
- [1-16] U. Keller, D. A. Miller, G. D. Boyd, T. H. Chiu, J. F. Ferguson, M. T. Asom, "Solid state low loss intracavity saturable absorber for Nd:YLF: an antiresonant Fabry - Perot saturable absorber", *Opt. Lett.* **17**, 505 (1992).
- [1-17] R. Rufing, A. Nebel, R. Wallenstein, "Conference on Lasers and Electro optics", OSA Technical digest series, **11** paper CWB2 (1997).
- [1-18] W. J. Kozlovsky, T. Y. Fan, R. L. Byer, "Diode-pumped continuous-wave Nd:glass laser", *Opt. Lett.* **11**, 788 (1986).

- [1-19] F. Krausz, T. Brabec, E. Wintner, and A. J. Schmidt, "Mode locking of a continuous wave Nd:glass laser pumped by a multistriple diode laser" *Appl. Phys. Lett.* **55**, 2386 (1989).
- [1-20] D. Kopf, F. X. Kartner, K. J. Weingarten, U. Keller, "Pulse shortening in a Nd:glass laser by gain reshaping and soliton formation", *Opt. Lett.* **19**, 2146 (1994).
- [1-21] Ch. Spielmann, F. Krausz, T. Brabec, E. Wintner, A. J. Schmidt "Femtosecond passive mode locking of a solid-state laser by a dispersively balanced nonlinear interferometer", *Appl. Phys. Lett.* **58**, 2470 (1991).
- [1-22] J. Aus der Au, F. H. Loesel, F. Morier-Genoud, U. Keller, " Femtosecond diode pumped Nd:Glass laser with more than 1W of average power", *Opt. Lett.* **23**, 271 (1998).
- [1-23] B. E. Bouma, J. G. Fujimoto, "Compact Kerr -lens mode locked resonators", *Opt. Lett.* **21**, 134 (1996).
- [1-24] N. H. Rizvi, P. M. W. French, J. R. Taylor , "Generation of 33-fs pulses from a passively mode-locked Cr³⁺:LiSrAlF₆ laser ", *Opt. Lett.* **17**, 1605 (1992).
- [1-25] M. J. P. Dymott, A. I. Ferguson , "Self-mode-locked diode-pumped Cr:LiSAF laser" , *Opt. Lett.* **19**, 1988 (1994).
- [1-26] A. Seas, V. Petricevic, R. R. Alfano, "Generation of sub-100-fs pulses from a cw mode-locked chromium-doped forsterite laser ", *Opt. Lett.* **17**, 937 (1992).
- [1-27] F. Jäger, F. Noack, N. Zhavoronkov, "All solid state Cr:Forsterite femtosecond laser designed as a three element resonator", *Conference on Lasers and Electro optics*, paper CMQ4 (2000).

Referencias

[1-28] T. Tomaru, H. Petek, "Femtosecond Cr⁴⁺ YAG laser with an L-f old cavity operating at a 1.2-GHz repetition rate " *Opt. Lett.* **25**, 584 (2000).

Capítulo 2

[2-1] O.Martínez, R.Fork and J.Gordon, " *Theory of passively mode-locked lasers for the case of a nonlinear complex-propagation coefficient* " *J.Opt.Soc.Am.B* **2**, 753 (1985).

[2-2]: H.Haus, "*Theory of mode locking with a fast saturable absorber*" *J.Appl.Phys.* **46**, 3049 (1975).

[2-3] H. Haus, J.G. Fujimoto and E.P.Ippen, " *Structures for additive pulse mode locking* " *J.Opt.Soc.Am. B* **8**, 2068 (1991).

[2-4] J.L.A.Chilla and O.E.Martínez, " *Spatial - temporal analysis of the self-mode-locked Ti:sapphire laser* ", *J.Opt.Soc.Am. B* **10**, 638 (1993).

[2-5] C.J.Chen, P.K.A.Wai and C.R. Menyuk, "*Stability of passively mode-locked fiber lasers with fast saturable absorption*", *Opt.Lett.* **19**, 198 (1994).

[2--6] S.Wiggins; *Introduction to applied nonlinear and dynamical systems and chaos*; Springer Verlag, New York (1990)

[2-7] A.A.Hnilo, " *Self mode locking Ti:Sapphire laser description with an iterative map* " *J.Opt.Soc.B* **12**, 4 (1995).

[2-8]: D.Coté and H. van Driel, "*Period doubling of a femtosecond Ti:sapphire laser by total mode locking* " *Opt.Lett.* **23**, 715 (1998).

[2-9] G.Sucha, S.Bolton, S.Weiss and D.Chemla, "*Period doubling and quasi-periodicity in additive-pulse mode-locked lasers* " *Opt.Lett.* **20**, 1794 (1995).

- [2-10] P.T.Saunders; *An introduction to Catastrophe theory*; Cambridge University Press, New York (1980).
- [2-11] A. Siegman, *Lasers*, University Science Books, Mill Valley, 1986.
- [2-12] A.G.Kostenbauder, " *Ray pulse matrices: A rational treatment for dispersive optical systems*", IEEE J.Quantum Electron. **26**, 1148 (1990).
- [2-13] O.E.Martínez and J.L.A.Chilla, " *Self-mode-locking of Ti:sapphire lasers: a matrix formalism* " Opt. Lett. **17**, 1210 (1992).
- [2-14] M.Marioni and A.Hnilo, " *Self starting of self mode locking Ti:Sapphire lasers. Description with a Poincaré map* " Opt.Comm. **147**, 89 (1998).
- [2-15] I.P.Christov, V.D.Stoev, M.M.Murnane and H.C.Kapteyn, " *Mode locking with a compensated space - time astigmatism* " Opt.Lett. **20**, 2111 (1995).
- [2-16] M. Kovalsky, " *Laser de Ti:Zafiro auto pulsante y su descripción mediante un mapa de Poincaré*", Tesis de Licenciatura en Ciencias Físicas, FCEyN, UBA, (1998).
- [2-17] E.Ott, " *Strange attractors and chaotic motions of dynamical* " Am.Phys.Soc. **53**, 655 (1981).

Capítulo 3

- [3-1] J.P.Likforman, G.Grillon, M.Joffre, C.Le Blanc, A.Migus and A.Antonetti; Appl. Phys.Lett. **58**, 206 (1991).
- [3-2] M. Kovalsky, A. Hnilo and C. González Inchauspe, " *Hidden instabilities in the Ti:Sapphire Kerr lens mode locked laser*", Opt.Lett., **24**, 1638 (1999).

Referencias

- [3-3] T.Brabec, C. Spielmann, and F.Krausz, " Mode locking in solitary lasers" *Opt.Lett.* **16**, 1961 (1991).
- [3-4] M.Murnane, H.Kapetyan, J.Zhov, C.Huang, D.Garvey and M.Asaki; "Advances in fs pulse generation through the use of solid state lasers"; *OSA Annual Meeting 1993*, Invited Communication WD1.
- [3-5] V.Petrov, D.Georgiev, J.Herrmann and U.Stamm "*Theory of cw passive mode-locking of solid state lasers with addition of nonlinear index and group velocity dispersion*", *Opt.Commun.* **91**,123 (1992).
- [3-6] S. Bolton and M. Acton , "*A quasiperiodic route to chaos in the Kerr lens mode locked Ti:Sapphire laser*" *Phys. Rev. A*, **62**, 063803 (2000).

Capítulo 4

- [4-1] R. Mañe, D. Rand and L.S. Young, "*Dynamical Systems and Turbulence*" pg. 230, Springer, Berlin, 1981.
- [4-2] A. Albano, J. Munch, C. Sschwartz, A. Mees and P. Raap "*Singular values descomposition and the Grassberger Procaccia algorithm*" *Phys Rev. A* ,**38**,3017 (1988).
- [4-3] D. Broomhead and G. King "*Extracting qualitative dynamics from experimental data* , *Physica D* , **20**, 217 (1986).
- [4-4] A. Fraser and H. Swinney "*Independent coordinates for stranges attractors from mutual information*" *Phys Rev. A* ,**33**,1134 (1986).
- [4-5] R. Gallager "*Information Theory and Reliable Communication*" John Wiley and Sons, New York, 1968.

[4-6] H.D.I. Abarbanel "*Analysis of Observed Chaotic Data*" Springer – Verlag, New York, 1996.

[4-7] C.O. Weiss and R. Vilaseca "*Dynamics of Lasers*" Verlagsgesellschaft, Weinheim, Germany, 1991.

Capítulo 5

[5-1] M. B. Kennel, R. Brown, H. D. I. Abarbanel, "Determining embedding dimension for phase-space reconstruction using a geometrical construction", *Phys. Rev. A* **45**, 3403 (1992).

[5-2] T. Sreiber, A. Schmitz, "Surrogate time series", *Physica D*, **142**, 346 (2000).

[5-3] P. Grassberger, I. Procaccia, "Measuring the strangeness of strange attractors", *Physica D*, **9**, 189 (1983).

[5-4] TISEAN (Time Series Analysis) es un paquete de software disponible públicamente en <http://www.mpipks-dresden.mpg.de/~tisean>.

[5-5] A. M. Fraser, H. L. Swinney, "Independent coordinates for strange attractors from mutual information", *Phys. Rev. A* **33**, 1134 (1986).

Capítulo 6

[6-1] L. M. Pecora and T. L. Carroll " *Synchronization in chaotic systems*", *Phys. Rev. Lett.*, **64**, 821 (1990).

[6-2] L. M. Pecora and T. L. Carroll " *Driving systems with chaotic signals*", *Phys. Rev. A.*, **44**, 2374 (1991).

- [6-3] S. Hayes, C. Grebogi, E. Ott and A. Mark " *Experimental control of chaos for communication*", Phys. Rev. Lett., **73**, 1781 (1994).
- [6-4] G. Mazzini , G. Setti, R. Rovatti, IEEE Transactions on Circuits and Systems, **44**, 937 (1997).
- [6-5] E. Ott, C. Grebogi, and J. Yorke " *Controlling chaos*", Phys. Rev. Lett., **64**, 1196 (1990).
- [6-6] S. Boccaletti, C. Grebogi, Y. Lai, H. Mancini and D. Maza " *The control of chaos : Theory and applications*", Phys. Reports, 329, 3 (2000).
- [6-7] H. Mancini and D. Maza " *Bénard-Marangoni thermal oscillators: An experimental study*" Phys. Rev. E, **55**, 2757 (1997).
- [6-8] S. Hayes, C. Grebogi and E. Ott " *Communicating with chaos*" Phys. Rev. Lett, **70**, 3031 (1993).
- [6-9] K. Cuomo and A. Oppenheim " *Circuit implementation of synchronizer chaos with applications to communications*" Phys. Rev. Lett, **71**, 65 (1993).
- [6-10] R. Roy, T. Murphy, T. Maier, and Z. Gills " Dynamical control of a chaotic laser: Experimental stabilization of a globally coupled system" Phys. Rev. Lett, **68**, 1259 (1992).
- [6-11] M. Candaten and S. Rinaldi " *Peak to peak dynamics: a critical survey*" Int. J. of Bifurcation and Chaos, **10**, 1805 (2000).

Referencias

- [6-12] C. Piccardi and S. Rinaldi " Control of complex peak to peak dynamics " *Int. J. of Bifurcation and Chaos*, **12**, 2927 (2002).
- [6-13] C. Piccardi and S. Rinaldi " *Optimal control of chaotic systems via peak to peak maps* " *Physica D*, **144**, 298 (2000).
- [6-14] M. Sano and Y. Sawada " *Measurement of the Lyapunov spectrum from a chaotic time series* " *Phys. Rev. Lett*, **55**, 1082 (1985).

Apéndices

- [A I-1.1] T. Juhasz, R. Kurtz, F. Raksi, C. Suarez, C. Horvath, G. Spooner , "The femtosecond blade" *Opt. Phot. News*, **13**, 24 (2002).
- [A I-1.2] P. Pronko, S. Dutta, J. Squier, J. Rudd, D. Du, G. Mourou, M. Perry, "Machining of sub micron holes using a fs laser at 800 nm", *Opt. Comm.*, **114**, 106 (1995).
- [A I-1.3] B. C. Stuart, M. D. Feit, A. M. Rubenchik, B.W. Shore, M. D. Perry, "Laser induced damage in dielectrics with ns to sub ps pulses", *Phys. Rev. Lett*, **74**, 2248 (1995).
- [A I-1.4] E. Yablonovitch, "Inhibited spontaneous emission in solid state physics and electronics", *Phys. Rev. Lett.* , **58**, 2059 (1987).
- [A I-1.5] J. M. Senior, " *Optical Fiber Communications*", second edition, Prentice Hall, New York (1992), Capítulo 11.
- [A I-1.6] I. H. White, *J. Lightwave Technol.* **9**, 893 (1991).
- [A I-1.7] T. Hidaka and Y. Hatano, *Electron. Lett.* **27**, 1075 (1991).

[A I-1.8] Tzu-Ming Liu, Shi-Peng Tai, Hsu-Hao Chang, and Chi-Kuang Sun
"Simultaneous multiwavelength generation from a mode-locked all-solid-
state Cr:forsterite laser" *Opt. Lett.* **26**, 834 (2001).

AII-2

[AII-2.1] V. Magni, G. Cerullo, S. De Silvestri, " *ABCD matrix analysis of propagation of gaussian beams through Kerr media*", *Opt. Comm.* **96**, 348 (1993).

AIII-1

[AIII-1.1] O. E. Martinez, R. L. Fork " *Theory of passively mode-locked lasers including self-phase modulation and group-velocity dispersion* ", *Opt. Lett.*, **9**, 150 (1984).

[AIII-1.2] C.M. González Inchauspe " *Nuevos esquemas de conformación de pulsos láser ultracortos* ", Tesis de doctorado, FCEyN, UBA, 1997.

[AIII-1.3] CVI Laser Corporation " *Laser optics and coatings* ", a5, 1997.

[AIII-1.4] M. Kovalsky and A. Hnilo " *Stability and bifurcations in Kerr lens mode locked Ti:Sapphire lasers* ", *Opt. Comm.*, **186**, 155 (2000).

AIII-2

[AIII-2.1] J. Diels, J. Fontaine, I. McMichael and F. Simoni " *Control and measurment of ultrashort pulse shapes (in amplitude and phase) with femtosecond accuracy* ", *Appl. Opt.* , **24**, 1270 (1985).

- A**
- abertura, 3, 5, 6, 8
 absorbente saturable, 6
 atractor, iv, 52, 54, 55, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 65, 73, 74, 75, 77, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 91, 92, 93, 94, 102, 130
 autocorrelación, 34, 55, 57, 103, 124, 125, 126
 autoenfoque, 3, 5, 7, 14, 17, 30
- B**
- biestabilidad, iii, 35, 41, 47, 101
 bifurcación, iii, 26, 29, 31, 32, 39, 40, 87
- C**
- caos, 2, iii, iv, vi, vii, 1, 31, 32, 47, 52, 53, 59, 60, 63, 67, 71, 72, 73, 74, 76, 83, 85, 88, 89, 90, 91, 92, 98, 100, 102, 103
 control del caos, 91
 cuasi periódico, 39, 83, 85
- D**
- dimensión de correlación, iv, 61, 63, 73, 75
 dimensión de embedding, vii, 54, 55, 58, 63, 65, 67, 68, 71, 72, 73, 74, 77, 79, 82, 83, 84, 85, 87, 88, 89, 96, 102
 dimensión de Hausdorff, 61, 62
 Dinámica pico a pico, iv, 92
- E**
- entropía, 57, 60, 62, 128
 espacio de fase, iii, vii, 47, 52, 53, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 63, 74, 76, 77, 83, 103, 128
 exponentes de Lyapunov, vii, 47, 59, 60, 94, 96, 98
- F**
- falsos vecinos, iv, v, vii, 58, 59, 63, 64, 65, 67, 129, 130
 Forsterita, 12
- G**
- glass, 134, 135
- I**
- inestabilidades ocultas, vii, 35, 37, 39, 40, 101
- información mutua, vii, 55, 56, 57, 58, 77
 intermitencia, 87, 88
- K**
- KLM, iii, vi, 1, 3, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 34, 35, 103
 kurtosis, 87, 88
- L**
- LISAF, 12
- M**
- mapa iterativo, iii, v, vi, 14, 15, 21, 79
- O**
- OGY, iv, vii, 91, 92, 94, 95
 órbitas periódicas, iv, vii, 91, 92, 94
- R**
- ruido, iv, vii, 16, 34, 43, 51, 52, 53, 54, 55, 63, 73, 74, 90, 103, 109
- S**
- saturación de la ganancia, 5, 14, 20, 35
 SESAM, vi, 1, 7, 11
 solitón, 5, 6
 SPM, 5, 14, 22, 115
- T**
- tiempo de retardo, 54, 55, 77, 78, 127
 TISEAN, 77, 96, 129, 139
 transformada de Fourier, 80
- Y**
- YAG, 2, 4, 5, 7, 9, 10, 12, 38, 91, 133, 134, 136
- Z**
- Zafiro, iii, iv, v, vi, viii, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 15, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 27, 30, 34, 35, 36, 37, 38, 47, 65, 66, 67, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 96, 100, 101, 102, 103, 107, 121, 122, 123, 137

Zafiro de femtosegundos

Kovalsky