

Tesis Doctoral

Grados de libertad en teorías teleparalelas de gravedad modificada

Guzmán Monsalve, María José

2018-03-22

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:

Guzmán Monsalve, María José. (2018-03-22). Grados de libertad en teorías teleparalelas de gravedad modificada. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.

Cita tipo Chicago:

Guzmán Monsalve, María José. "Grados de libertad en teorías teleparalelas de gravedad modificada". Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 2018-03-22.



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Física

Grados de libertad en teorías teleparalelas de gravedad modificada

*Tesis presentada para optar al título de Doctor de la Universidad
de Buenos Aires en el área Ciencias Físicas por*

Lic. María José Guzmán Monsalve

Director de Tesis: Dr. Rafael Ferraro

Consejero de Estudios: Dr. Gastón Giribet

Lugar de Trabajo: Instituto de Astronomía y Física del Espacio

Buenos Aires, Febrero 2018

Fecha de defensa: 22 de marzo 2018

Grados de libertad en teorías teleparalelas de gravedad modificada

Resumen

En esta Tesis se desarrolla la formulación Hamiltoniana de teorías teleparalelas de gravedad modificada, utilizando el formalismo de Dirac–Bergmann para sistemas Hamiltonianos con vínculos, con el fin de comprender la naturaleza de los grados de libertad en este tipo de teorías. En primer lugar se aplica el procedimiento al equivalente teleparalelo de la relatividad general (ETRG), a partir de un Lagrangiano escrito en términos del vierbein (tétrada ortonormal), que es la variable canónica utilizada. Así se obtiene el álgebra de vínculos de la teoría ETRG, la cual incluye el álgebra del formalismo ADM de la relatividad general, pero contiene además nuevos vínculos relacionados con el grupo de Lorentz que manifiestan que la elección del vierbein en ETRG no es más que una fijación de gauge. Usando estos resultados como base, se ha desarrollado la estructura de vínculos de la gravedad teleparalela modificada, también conocida como gravedad $f(T)$, una extensión de la relatividad general basada en un espacio-tiempo con estructura teleparalela, donde el vierbein no sólo es portador de la información sobre la estructura métrica del espacio-tiempo sino que contiene grados de libertad adicionales cuyo número y características se desea establecer. Mientras que en ETRG todos los vínculos son de primera clase y, por lo tanto, generan transformaciones de gauge, en las teorías $f(T)$ la familia de vínculos se ve agrandada, produciéndose una intrincada álgebra de vínculos que comprende vínculos de primera y de segunda clase. A partir de esta álgebra se puede determinar el número de grados de libertad, las cantidades que son puro gauge, y los observables de las teorías $f(T)$. El significado de los grados de libertad extra puede ser mejor entendido en soluciones simples. Para ello se han estudiado dos soluciones de gravedad $f(T)$ cuya estructura métrica es compartida con soluciones conocidas de RG: el agujero negro rotante de Kerr, y la solución de agujero negro en un fondo cosmológico o solución de McVittie. En estos casos, la resolución de las ecuaciones dinámicas para el vierbein se facilita mediante la utilización de tétradas nulas asociadas al vierbein.

Palabras Clave: Gravedad Modificada, Teleparalelismo, Sistemas Hamiltonianos con vínculos, Gravedad $f(T)$, Relatividad General

Degrees of freedom in modified teleparallel theories of gravity

Abstract

In this Thesis we develop the Hamiltonian formulation of modified teleparallel theories of gravity, using the Dirac–Bergmann formalism for constrained Hamiltonian systems, in order to understand the nature of the degrees of freedom of this kind of theories. First we apply this procedure to the teleparallel equivalent of general relativity (TEGR), through a Lagrangian written in terms of the vierbein (orthonormal tetrad), which is the canonical variable used. In this way we obtain the constraint algebra of the TEGR theory, which includes the algebra of the ADM formalism for general relativity, but it also contains new constraints related with the Lorentz group, which manifest that the choice of the vierbein in TEGR is nothing more than a gauge fixation. Using this results as a basis, we developed the constraint structure of the modified teleparallel gravity, also known as $f(T)$ gravity, an extension of general relativity based on a space-time with teleparallel structure, where the vierbein is not only the carrier of the information of the metric structure of the space-time, but it also contains additional degrees of freedom whose number and characteristics we would like to establish. While in TEGR all constraints are first class, and therefore they generate gauge transformations, in $f(T)$ theories the constraint family is enlarged, giving as a result an intricate constraint algebra that comprehends first and second class constraints. Through this algebra it can be established the number of degrees of freedom, the quantities that are pure gauge, and the observables of the $f(T)$ theories. The meaning of the extra degrees of freedom can be better understood in simple solutions. For that, it has been studied two solutions of $f(T)$ gravity whose metric structure is shared with known solutions of general relativity: the Kerr rotating black hole, and the cosmological black hole or McVittie solution. In this cases, the resolution of the dynamical equations for the vierbein is facilitated using null tetrads associated to the vierbein.

Keywords: Modified Gravity, Teleparallelism, Constrained Hamiltonian systems, $f(T)$ gravity, General Relativity

Agradecimientos

Al finalizar esta extensa e importante etapa de mi vida y recapitular todo lo vivido, surge de manera espontánea la gratitud hacia las muchas personas que me han acompañado en este camino. Quisiera comenzar agradeciendo a mi director y colega Rafael Ferraro, quien ha guiado mis pasos en la carrera científica en una forma excepcional, mostrando en cada momento una calidad humana incomparable que han hecho de este período unos muy agradables años. Su pasión por el conocimiento y la buena enseñanza ha hecho posible que este trabajo haya concluido exitosamente, y que haya adquirido herramientas que sin duda me han hecho una mejor científica. Agradezco a Cecilia Bejarano, mi segunda directora, por toda su compañía, apoyo y preocupación en estos años, y las incontables tardes tanto de trabajo como de distensión. Agradezco a Franco Fiorini, por las breves pero estimulantes discusiones científicas durante sus visitas a Buenos Aires. Agradezco al Instituto de Astronomía y Física del Espacio y las muchas personas en las cuales se apoya, por el grato ambiente de trabajo en el cual se desarrolló esta Tesis. A quienes fueran mis compañeros de oficina: Vanesa, Yago y Mariela, por la buena onda siempre reinante y el apoyo moral mutuo y colectivo. El trabajo de esta Tesis se ha visto favorecido por múltiples interacciones científicas con colegas físicos y astrofísicos que he conocido en escuelas y congresos en Argentina, Chile, Brasil, Colombia y Uruguay.

Quisiera extender mi gratitud hacia las muchas personas que con su amistad me han acompañado en este camino. A Olgui Bracco e Ignacio Gargiulo, los queridos ex-vecinos y familia, por la amistad y el apoyo invaluable que han significado en esta etapa. A Florencia Teppa y Juan Pablo Caso, por los jueves de música y birra, la alegría y la compañía de todos estos años. A Ulises González y Johanna Torres, por la fraternidad, aquella que se comparte y la otra que nunca olvidaremos. Por el crecimiento filosófico, gracias a Ana Cappella, Verónica Chaparro, Claudia Ling y muchas otras que me enseñaron a trabajar y crecer como persona. Agradezco de manera muy sentida a amigos que, ante la inclemencia de la distancia, nunca me han abandonado. Entre otros, a Daniela Valencia, Williams Thennet, Sergio Vásquez, Yesenia Sagurieé, y a Paola Rioseco, por tantos años de buena amistad y camaradería. Finalmente queda agradecer a mi amada familia, quienes pese a la distancia siempre han estado presentes en mi mente y corazón. A la memoria de mi papá Guillermo Marcelo, a mis hermanos Marcelo y Francisca, y a mi mamá María Regina, a todos ustedes los llevo siempre presentes en cada paso que doy. Y a mi pareja Cristian Vega Martínez, quien me ha acompañado en toda esta travesía con su amor incondicional. Gracias por escogerme como tu compañera en la vida; sigamos caminando hacia nuevos desafíos.

Índice general

| | |
|---|-----------|
| Introducción | 1 |
| 1. El equivalente teleparalelo de la relatividad general | 7 |
| 1.1. Objetos geométricos fundamentales | 7 |
| 1.2. El equivalente teleparalelo de la relatividad general | 18 |
| 1.2.1. Teorías teleparalelas generales | 18 |
| 1.2.2. Gravedad teleparalela en lenguaje geométrico | 20 |
| 1.2.3. Gravedad teleparalela en términos de coordenadas | 23 |
| 1.2.4. Término de borde | 25 |
| 1.3. Ecuaciones de movimiento y equivalencia | 25 |
| 2. Teorías $f(T)$: Gravedad teleparalela modificada | 29 |
| 2.1. Motivación teórica | 29 |
| 2.2. Teorías $f(T)$ de gravedad | 30 |
| 2.3. Soluciones de vacío en $f(T)$ | 31 |
| 2.4. Invariancia local de Lorentz y simetrías remanentes | 32 |
| 2.5. Transformaciones conformes | 34 |
| 3. Sistemas Hamiltonianos con vínculos | 37 |
| 3.1. Formulación Lagrangiana | 39 |
| 3.2. Vínculos primarios | 40 |
| 3.2.1. Equivalencias débiles y fuertes | 41 |
| 3.3. Hamiltoniano canónico y total | 41 |
| 3.3.1. Corchete de Poisson | 42 |
| 3.3.2. Consistencia de los vínculos | 44 |
| 3.4. Vínculos de primera y segunda clase | 46 |
| 3.5. La conjetura de Dirac y simetrías variacionales | 48 |
| 3.5.1. Corchete de Dirac | 50 |
| 3.6. Conteo de grados de libertad | 50 |
| 3.7. Ejemplos | 51 |

| | |
|--|------------|
| 4. Formulación Hamiltoniana de la gravedad teleparalela | 59 |
| 4.1. Lagrangiano de la gravedad teleparalela | 60 |
| 4.2. Coordenadas y momentos canónicos | 62 |
| 4.3. Vínculos primarios | 63 |
| 4.4. Hamiltoniano canónico de la gravedad teleparalela | 65 |
| 4.4.1. Autovectores no nulos de D para dimensión $n = 3$. . . | 68 |
| 4.4.2. Autovectores no nulos de D para dimensión $n \geq 4$. . . | 69 |
| 4.5. Vínculos secundarios: super-Hamiltoniano y super-momento . | 71 |
| 4.5.1. Vínculos secundarios a través de las ecuaciones de movimiento | 72 |
| 4.5.2. Vínculos secundarios a través de la consistencia de los vínculos primarios | 75 |
| 4.6. Conteo de grados de libertad en ETGR | 77 |
| 4.7. Transformaciones de gauge | 78 |
| 4.8. Conclusiones y discusión | 80 |
| | |
| 5. Formulación hamiltoniana de la gravedad teleparalela modi- ficada | 83 |
| 5.1. Formulación canónica | 84 |
| 5.2. Equivalencia escalar | 86 |
| 5.3. Modelo de juguete: Lagrangiano pseudo-invariante rotacional . | 87 |
| 5.4. Momentos canónicos y vínculos primarios | 92 |
| 5.5. Consistencia a través del formalismo Lagrangiano | 94 |
| 5.6. Hamiltoniano canónico | 96 |
| 5.7. Consistencia de los vínculos primarios | 97 |
| 5.8. Consistencia de los vínculos secundarios | 103 |
| 5.8.1. Autovectores nulos en $n = 4$ | 108 |
| 5.9. Multiplicadores de Lagrange | 110 |
| 5.10. Grados de libertad en las teorías $f(T)$ | 111 |
| 5.11. Transformaciones conformes extendidas | 115 |
| 5.12. Conclusiones | 117 |
| | |
| 6. Soluciones exactas para la gravedad teleparalela modificada | 119 |
| 6.1. Método de la tetrada nula | 120 |
| 6.2. Geometría de Kerr | 121 |
| 6.3. Geometría de McVittie | 124 |
| 6.4. Geometría de McVittie en gravedad $f(T)$ | 126 |
| 6.5. Solución cosmológica con $T = 0$ | 127 |
| 6.5.1. Simetrías remanentes en cosmología | 128 |
| 6.6. Conclusiones | 129 |

| | |
|--|-----|
| Conclusiones generales y trabajo futuro | 131 |
| A. Geometría diferencial | 145 |
| B. Las matrices C y D en gravedad teleparalela | 151 |
| C. Corchetes de Poisson y álgebra de vínculos | 153 |

Introducción

Nos encontramos en una época única en la historia de la humanidad, una en la que los avances científicos y tecnológicos nos han permitido realizar mediciones del Universo del que formamos parte con una precisión exquisita e inimaginable. En el campo de la gravitación y la cosmología, hemos sido testigos de observaciones y detecciones que nos han hecho cambiar, más de una vez, los paradigmas sostenidos acerca del comportamiento del Universo. Observaciones como el descubrimiento de la expansión acelerada del Universo [1, 2] o el conjunto de observaciones que llevaron a la hipótesis de la materia oscura [3], han removido los cimientos de la relatividad general (RG) en cuanto ésta no posee un marco teórico que pueda explicar estos fenómenos. Por otro lado, la reciente detección de ondas gravitacionales en la fusión de un sistema binario de agujeros negros [4, 5], ha confirmado la predicción de las ondas gravitacionales que hiciera Einstein cien años atrás.

En el ámbito de la física teórica, encontramos muchas preguntas fundamentales relacionadas con problemas de ajuste fino, y con la consistencia interna de las teorías a la hora de efectuar una unificación entre las teorías cuánticas de campos y la gravitación. Además, la relatividad general presenta el problema de la aparición de singularidades en soluciones de agujero negro y el comienzo del universo (el Big-Bang). Algunas veces, los intentos para resolver un problema pueden llevar a solucionar otros; por ejemplo, una extensión a la RG que otorgue una expansión acelerada, en un régimen de energía diferente podría ser útil para la regularización de singularidades. La búsqueda del conocimiento no es un camino lineal, y es por esto que todas las alternativas teóricas bien fundamentadas merecen ser exploradas hasta sus últimas consecuencias, pues sería poco sensato pensar que estamos en la cúspide del conocimiento. Al contrario, en la actualidad nos enfrentamos a desafíos tanto teóricos como experimentales. En lo que respecta a la física teórica, a la hora de estudiar la teoría de gravitación a altas energías/curvatura grande, a escalas del orden de la energía de Planck $E_P \approx 10^{19}\text{GeV}$, existen impedimentos instrumentales para testear de manera directa estos niveles de energía, haciendo necesario recurrir a observaciones indirectas de procesos a

altas energías en el ámbito de la astrofísica y la cosmología.

Viéndonos enfrentados a la tarea de estudiar teorías de gravedad alternativa, el estudio de la historia de la RG resulta reconfortante, pues nos otorga algunas claves que nos permiten evaluar la factibilidad de realizar ciertas modificaciones. La historia de la RG comienza con la relatividad especial en 1905, la cual logra incluir el electromagnetismo de Maxwell en un conjunto de leyes fundamentales que son válidas en cualquier sistema inercial, es decir, un sistema que no presenta aceleración y se cumplen las leyes de la mecánica de Newton. Más tarde en 1907, Einstein propone el principio de equivalencia entre la fuerza gravitacional y la fuerza inercial, que viene de la igualdad teórica entre la masa gravitacional y la masa inercial. Esta igualdad induce el concepto de universalidad de la caída libre, es decir que cuerpos con diferente masa y composición son acelerados del mismo modo, además de la identidad entre fuerzas gravitatorias e inerciales. Fue esta visión la que permitió el paso hacia la relatividad general en 1915. Por medio de la comprensión de que un campo universal debía regir la fuerza experimentada por todas las partículas, Einstein llegó a la conclusión que ese campo debía ser el tensor métrico, el ente físico que describe el espacio-tiempo. Así, la materia y el espacio-tiempo se encontrarían entrelazados: la materia curva el espacio-tiempo, y el espacio-tiempo rige el movimiento de la materia.

La curvatura del espacio-tiempo sería la propiedad intrínseca en la que radica la diferencia con la interpretación Newtoniana de la gravedad. Aquí, en vez de ser interpretada como una fuerza, la gravedad es la consecuencia de la deformación espacio-temporal, que induce a las partículas libres a seguir las geodésicas determinadas por las ecuaciones dinámicas de la teoría. En ausencia de gravedad, nos encontramos con un espacio-tiempo plano, el cual está descrito por la métrica de Minkowski de acuerdo a la relatividad especial. Esta métrica es constante, por lo tanto tiene curvatura cero, y puede ser interpretada como la métrica plana que describe localmente el espacio tangente de la variedad espacio-temporal.

Si bien el tensor métrico ha sido históricamente el único ente presente en la descripción del espacio-tiempo, han habido intentos de describir la gravedad por medio de otros campos físicos. Por ejemplo, es sabido que Einstein estudió por el año 1925 un intento de unificar la gravedad y el electromagnetismo por medio de las componentes del campo de tétradas, una base ortonormal definida en el espacio tangente [6]. Estos intentos fueron infructuosos, y fueron inspirados por idénticos intentos realizados por Weyl en 1918 [7]. Ya que el campo de tétradas no es un objeto simétrico, tiene 16 componentes independientes, a diferencia de las 10 componentes independientes de la métrica. Con estos 6 grados adicionales de libertad de la tétrada, se intentaría introducir el campo electromagnético. Más tarde, llegarían a la conclusión de

que estos grados de libertad adicionales pueden ser absorbidos por medio de transformaciones locales de Lorentz que dada una tétrada, dejan invariante a la métrica. Estos intentos sentarían las bases de lo que hoy se conoce como teorías de gravedad teleparalelas, que serán objeto de nuestro estudio.

Otros intentos de unificación fueron realizados por Kaluza [8] y Klein [9] en la década del 20, mientras que al mismo tiempo, Cartan habría desarrollado una modificación a la RG basada en un espacio-tiempo con curvatura y torsión, la cual es conocida hoy como teoría de Einstein–Cartan [10, 11, 12, 13]. En esta teoría la conexión posee torsión diferente de cero, y puede obtenerse una ecuación lineal que la determine a partir de las ecuaciones de movimiento. Al igual que en RG, la fuente de la curvatura es el tensor de energía-momento, mientras que el spin es la fuente de la torsión a través de una ecuación algebraica. Cabe destacar que en aquella época en la cual la teoría fue formulada, el concepto de spin aún no habría sido formalizado por completo, por tanto sus intentos fueron prematuros para la época ¹.

Luego de este período, no hubieron avances en las teorías de gravedad teleparalelas hasta la década de los 60, en la cual Møller revive la idea original de Einstein, pero con el propósito de encontrar una expresión tensorial para la densidad gravitacional de energía-momento. Møller tuvo éxito en encontrar un tensor invariante bajo transformaciones generales de coordenadas, pero no que fuera invariante bajo transformaciones locales de Lorentz [15]. Siguiendo este trabajo, Pellegrini y Plebański encontraron una formulación Lagrangiana de la teoría de gravedad teleparalela [16], y luego en 1967 Hayashi y Nakano formularon una teoría de gauge para el grupo de traslaciones ² [17]. Luego en 1967, Cho probó que el Lagrangiano teleparalelo es invariante bajo transformaciones locales de Lorentz, salvo por una divergencia. Por lo tanto, mostró que el Lagrangiano del teleparalelismo es equivalente al Lagrangiano de Einstein-Hilbert de la RG [18]. Más tarde Hayashi y Shirafuji definen una teoría teleparalela general con coeficientes arbitrarios, para encontrar que el equivalente teleparalelo de la relatividad general ocurre para una elección específica de dichos coeficientes [19].

Otros aportes han ocurrido luego de estos trabajos a lo largo de los años, sin embargo las bases teóricas de la gravedad teleparalela se encuentran relativamente bien fundadas. El interés por la gravedad teleparalela en la última década surge porque se ha propuesto como base para construir teorías de gravedad modificada, más conocidas como gravedad teleparalela modificada o teorías $f(T)$. El primer modelo fué presentado en [20] y consiste en una

¹Recién en 1925, Uhlenbeck y Goudsmit postularían la existencia de una nueva propiedad intrínseca de las partículas que más tarde Pauli acuñaría con el nombre de *spin* [14]

²Hay que tener cautela al hablar de grupos de gauge en el contexto de teorías teleparalelas, porque la analogía no es completa del todo. Volveremos a este tema en el Capítulo 3

deformación tipo Born–Infeld del Lagrangiano de la gravedad teleparalela, la cual resuelve exitosamente el paradigma inflacionario sin recurrir al campo del inflatón. Si bien la teoría fue pensada originalmente como una extensión en el régimen ultravioleta (o de altas energías) para la regularización de singularidades en el Big-Bang o en agujeros negros [21, 22], también permite explicar fenómenos a bajas energías como la expansión acelerada del universo, sin recurrir al concepto de energía oscura [23]. Desde entonces la gravedad $f(T)$ y algunas de sus variantes han sido estudiadas extensamente en la literatura (ver [24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65] y sus referencias, entre otros). Un aspecto de la teoría que no ha pasado desapercibido desde sus comienzos es que se caracteriza por la pérdida de la invariancia local de Lorentz [20, 66, 36, 67]. La consecuencia de este hecho se ve reflejada en la emergencia de marcos de referencia privilegiados, que aparecen como entes físicos que describen las interacciones gravitacionales. La interpretación de estos grados de libertad adicionales de la teoría, los cuales fijan los marcos de referencia, es un problema controversial, que no se encuentra resuelto [29, 49, 68], y es la principal motivación del trabajo que presentaremos a lo largo de esta Tesis.

El objetivo principal de esta Tesis es estudiar los grados de libertad de la gravedad $f(T)$. Si bien existen diversas estrategias a seguir para cumplir esta misión, nos hemos enfocado principalmente en la formulación Hamiltoniana de la teoría y la utilización del algoritmo de Dirac–Bergmann para la búsqueda y el estudio de la consistencia de los vínculos. Esta tarea ha requerido de varios pasos previos. En particular, el estudio del formalismo Hamiltoniano del electromagnetismo y de la relatividad general, para luego desarrollar un método independiente que describa el formalismo Hamiltoniano de la gravedad teleparalela. Esta no es una tarea simple, puesto que a diferencia de la relatividad general, la gravedad teleparalela posee más variables dinámicas codificadas en la tétrada, las cuales complican la estructura de vínculos y el cálculo de los corchetes de Poisson de la teoría. Con este formalismo a la mano, es que nos fue posible desarrollar la formulación Hamiltoniana de la gravedad $f(T)$. Otros métodos para enfrentar el problema de los grados de libertad de la teoría han sido desarrollados, en particular el estudio de transformaciones conformes y el método de la tétrada nula para encontrar soluciones de RG que se preservan en teorías $f(T)$.

Dada la variedad y complejidad de los tópicos que trataremos en el transcurso de esta Tesis, es que hemos incluido varios Capítulos introductorios. En el Capítulo 1 realizamos una introducción matemática a los conceptos de tétrada, conexión, torsión y curvatura. La base matemática de esta introducción, a saber la geometría diferencial, se presenta para un lector principiante

en el Apéndice A. Luego se presentará el equivalente teleparalelo de la relatividad general (ETRG) o gravedad teleparalela, un caso particular de teorías de gravedad con estructura teleparalela que será de nuestro interés durante esta Tesis. En el Capítulo 2 introduciremos los fundamentos de la gravedad teleparalela modificada o gravedad $f(T)$ y algunos tópicos de interés relacionados con la pérdida de la invariancia local de Lorentz. En el Capítulo 3 presentamos el marco teórico bajo el cual se estudian los sistemas Hamiltonianos con vínculos, y presentaremos dos casos de interés: el electromagnetismo de Maxwell y la relatividad general de Einstein. En el Capítulo 4 presentamos la formulación Hamiltoniana de la gravedad teleparalela a través de un formalismo independiente que hemos desarrollado durante el trabajo de esta Tesis. Usamos ésto como base para estudiar el formalismo Hamiltoniano de la gravedad $f(T)$ en el Capítulo 5. Aquí se exhiben los resultados más importantes de esta Tesis, los cuales estimamos que tendrán una amplia repercusión en trabajos previos en la materia. Finalmente, en el Capítulo 6 estudiamos las soluciones de Kerr y McVittie en gravedad $f(T)$ por medio del método de la tétrada nula, el cual facilita considerablemente la búsqueda de soluciones a las ecuaciones dinámicas de la teoría. Terminamos con varias observaciones conclusivas y proyecciones de este trabajo a futuro. Se incluye, además, una sección de Apéndices que permiten ilustrar aspectos que, debido a su complejidad, y en aras de favorecer una lectura amena, es conveniente tratar por separado.

Capítulo 1

El equivalente teleparalelo de la relatividad general

Para comprender y describir las interacciones gravitatorias es necesario entender el lenguaje de la geometría diferencial, en cuanto todas las teorías de gravedad están descritas en términos de objetos geométricos definidos en el espacio tangente de la variedad del espacio-temporal. Para el lector que no posea conocimiento de geometría diferencial, se ha incluido el Apéndice A que sintetiza las definiciones básicas de tensores, p -formas, y operaciones con estos objetos, como la derivada de Lie, la derivada exterior y el producto *wedge*. En este capítulo comenzaremos definiendo los objetos geométricos fundamentales que describen las propiedades del espacio-tiempo. Estos objetos corresponden a la tétrada y la conexión de spin, los cuales a su vez definen la torsión y la curvatura. Los diferentes valores que pueden tomar la torsión y la curvatura describen distintos tipos de geometrías, que son los escenarios en los cuales se desarrollan las diferentes teorías de gravedad.

1.1. Objetos geométricos fundamentales

Tétrada

La tétrada consiste en una base ortonormal de vectores definida localmente en el espacio tangente de la variedad espacio-temporal. Denotaremos esta base por medio del conjunto de n vectores $\{\bar{E}_a\}$, con $a = 0, \dots, n - 1$, y a la base dual en el espacio cotangente por medio de $\{\tilde{E}^b\}$, tal que ambas satisfacen la siguiente relación de completitud

$$\bar{E}_a(\tilde{E}^b) = \delta_a^b. \quad (1.1)$$

Podemos descomponer la base de vectores y 1-formas en una base coordenada, por medio de las matrices E_a^μ y E_ν^b de dimensión $n \times n$, como

$$\bar{E}_a = E_a^\mu \partial_\mu, \quad \tilde{E}^b = E_\nu^b dx^\nu, \quad (1.2)$$

tal que las relaciones de completitud se pueden reescribir como

$$E_a^\mu E_\mu^b = \delta_a^b, \quad E_a^\mu E_\nu^a = \delta_\nu^\mu. \quad (1.3)$$

Aquí los índices griegos $\mu = 0, \dots, n-1$ son índices de coordenadas, a diferencia de los índices latinos a, b, \dots que denotan índices en el espacio tangente. La condición de ortonormalidad será definida una vez se haya definido el tensor métrico. Mientras tanto, estaremos trabajando con bases anholónomas generales (ver Apéndice A para su definición).

Conexión

Se define la conexión Γ_{ab}^c por medio de la derivada covariante de un vector base respecto a otro, lo cual da origen a la relación

$$\nabla_{\bar{E}_a} \bar{E}_b = \Gamma_{ab}^c \bar{E}_c. \quad (1.4)$$

Es decir, las componentes de la conexión Γ representan los coeficientes de la combinación lineal de los vectores base, que definen la variación de una base respecto a sí misma. Dada esta definición, podemos reescribir la derivada covariante de un vector \bar{V} a lo largo de \bar{U} como sigue

$$\begin{aligned} \nabla_{\bar{U}} \bar{V} &= U^a [\bar{E}_a(V^c) + \Gamma_{ab}^c V^b] \bar{E}_c, \\ &\equiv U^a (\nabla \bar{V})_a^c \bar{E}_c \end{aligned} \quad (1.5)$$

donde ahora el objeto $(\nabla \bar{V})_a^c = \bar{E}_a(V^c) + \Gamma_{ab}^c V^b$ no depende de \bar{U} , es decir es una derivada covariante independiente de la dirección de derivación.

Es importante conocer cómo transforma esta conexión ante cambios de bases. Se puede demostrar que, dado un cambio de base $\bar{E}_{a'} = \Lambda_a^{a'} \bar{E}_a$, la conexión transforma como

$$\Gamma_{ba}^c = \Lambda_{c'}^c [\Lambda_a^{a'} \bar{E}_{a'}(\Lambda_b^{c'}) + \Lambda_a^{a'} \Lambda_b^{b'} \Gamma_{b'a'}^{c'}]. \quad (1.6)$$

Se debe utilizar la relación (1.1), y aplicar la regla de Leibniz. Es posible definir también la acción de la derivada covariante sobre una 1-forma base, lo cual corresponde al objeto $\nabla_{\bar{E}_a} \tilde{E}^c = -\Gamma_{da}^c \tilde{E}^d$. Con estas herramientas podemos definir la derivada covariante de cualquier objeto tensorial.

Finalmente, con el concepto de derivada covariante podemos definir la noción de *curvas autoparalelas*. Se define que una curva es autoparalela si su vector tangente \bar{V} satisface la relación

$$\nabla_{\bar{V}}\bar{V} = f\bar{V}. \quad (1.7)$$

Es decir, en este tipo de curvas, la derivada covariante del vector tangente es proporcional al mismo vector tangente, en todo punto de la curva. Esta noción da origen al concepto de geodésicas en relatividad general, y será esencial en la definición de gravedad teleparalela.

Torsión

La torsión T es un tensor tipo $\binom{1}{2}$ que actúa sobre dos vectores \bar{U} y \bar{V} de la siguiente forma

$$T(\bar{U}, \bar{V}) = \nabla_{\bar{U}}\bar{V} - \nabla_{\bar{V}}\bar{U} - [\bar{U}, \bar{V}], \quad (1.8)$$

con $[\bar{U}, \bar{V}]$ la derivada de Lie de los vectores respectivos. La torsión es un objeto antisimétrico bajo el intercambio $\bar{U} \longleftrightarrow \bar{V}$. Este tensor mide la diferencia entre el desplazamiento infinitesimal de dos puntos en una variedad. Podemos obtener una interpretación geométrica de este objeto matemático de la siguiente forma. En un punto P consideramos dos vectores infinitesimales \bar{U}_P y \bar{V}_P . Realizando el transporte paralelo de \bar{U}_P a lo largo de \bar{V}_P , se obtiene el vector \bar{U}_R^{\parallel} en el punto R . De la misma forma, transportando paralelamente el vector \bar{V}_P a lo largo de \bar{U}_P obtenemos el vector \bar{V}_Q^{\parallel} . En un espacio-tiempo con torsión no nula, los vectores no forman un paralelogramo y la diferencia está dada por la torsión $T(\bar{U}, \bar{V})$. Este procedimiento se ve reflejado en la Figura 1.1.

Sin embargo, en una variedad con curvatura diferente de cero, el vector que se obtiene luego de realizar el transporte paralelo ya no es paralelo al vector de partida. Por ejemplo, en el caso del transporte paralelo de \bar{U}_P a lo largo de \bar{V}_P en una variedad con curvatura, se obtiene el vector \bar{U}_R , no \bar{U}_R^{\parallel} . La diferencia entre ambos vectores está representada por el vector $\nabla_{\bar{V}}\bar{U}$. De la misma forma, la diferencia entre \bar{V}_Q y \bar{V}_Q^{\parallel} es $\nabla_{\bar{U}}\bar{V}$. Finalmente, el conmutador entre \bar{U} y \bar{V} corresponde a la diferencia entre los vectores \bar{V}_Q y \bar{U}_R , como puede apreciarse en la Figura 1.2.

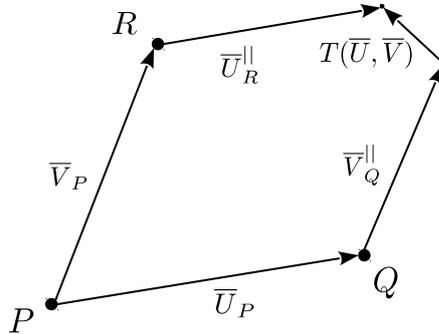


Figura 1.1: La torsión es la diferencia en el cierre de un paralelogramo generado por el transporte paralelo infinitesimal del par de vectores \bar{U} y \bar{V} .

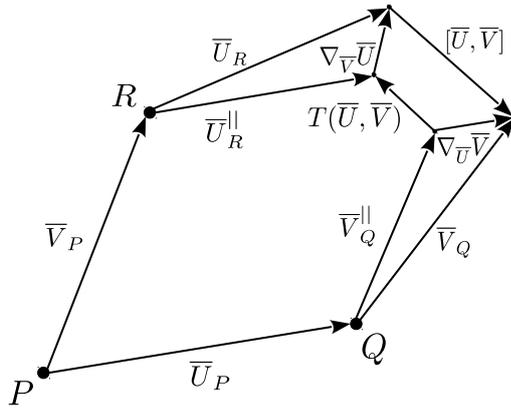


Figura 1.2: La definición de la torsión $T(\bar{U}, \bar{V})$ representada geoméricamente.

En esta figura se aprecia la definición de la torsión de modo geométrico, en el paralelogramo formado por los vectores $\nabla_{\bar{V}}\bar{U}$, $\nabla_{\bar{U}}\bar{V}$, $[\bar{U}, \bar{V}]$ y $T(\bar{U}, \bar{V})$, los cuales representan la definición dada en la ecuación (1.8).

Ahora calcularemos la torsión en una base coordenada, para lo cual tomamos como argumento los vectores coordenados, es decir consideraremos la expresión $T(\ ; \partial_\mu, \partial_\nu)$. Un cálculo simple muestra que

$$T(\ ; \partial_\mu, \partial_\nu) = \nabla_{\partial_\mu} \partial_\nu - \nabla_{\partial_\nu} \partial_\mu = (\Gamma^\lambda_{\nu\mu} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu}) \partial_\lambda. \quad (1.9)$$

Por lo tanto, es posible interpretar las componentes de la torsión en base coordenada, como la parte antisimétrica de la conexión, es decir $T^\mu_{\nu\lambda} = 2\Gamma^\mu_{[\nu\lambda]}$. Sin embargo, para una base anholónoma esta expresión es más complicada.

Si damos como argumento a (1.8) una base anholónoma $\bar{E}_a = E_a^\mu \partial_\mu$, donde E_a^μ son los coeficientes de una combinación lineal genérica, se obtiene que

$$\begin{aligned} T(; \bar{E}_a, \bar{E}_b) &= \nabla_{\bar{E}_a} \bar{E}_b - \nabla_{\bar{E}_b} \bar{E}_a - [\bar{E}_a, \bar{E}_b] \\ &= \Gamma_{ba}^c \bar{E}_c - \Gamma_{ab}^c \bar{E}_c - (E_a^\mu \partial_\mu E_b^\nu - E_b^\mu \partial_\mu E_a^\nu) \partial_\nu. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Las componentes T_{ab}^c de este objeto geométrico se calculan dando a $T(; \bar{E}_a, \bar{E}_b)$ como primer argumento una 1-forma \tilde{E}^c , tal que

$$T_{ab}^c = T(\tilde{E}^c; \bar{E}_a, \bar{E}_b) = \Gamma_{ba}^c - \Gamma_{ab}^c - E_\nu^c (E_a^\mu \partial_\mu E_b^\nu - E_b^\mu \partial_\mu E_a^\nu). \quad (1.11)$$

Con todo esto es posible escribir la torsión en lenguaje geométrico de la siguiente forma. Tomamos la torsión en una base anholónoma $T = T_{ab}^c \bar{E}_c \otimes \tilde{E}^a \otimes \tilde{E}^b$, tal que

$$\begin{aligned} T &= T_{ab}^c \bar{E}_c \otimes \tilde{E}^a \otimes \tilde{E}^b \\ &= (E_a^\mu E_b^\nu \partial_\mu E_\nu^c - E_b^\mu E_a^\nu \partial_\mu E_\nu^c + \Gamma_{ba}^c - \Gamma_{ab}^c) \bar{E}_c \otimes \tilde{E}^a \otimes \tilde{E}^b \\ &= (E_a^\mu E_b^\nu \partial_\mu E_\nu^c + \Gamma_{ba}^c) \bar{E}_c \otimes \tilde{E}^a \wedge \tilde{E}^b \\ &= \bar{E}_c \otimes (d\tilde{E}^c + \Gamma_{ba}^c \tilde{E}^a \wedge \tilde{E}^b). \end{aligned} \quad (1.12)$$

En la última línea vemos que la torsión puede escribirse como el producto tensorial de un vector por una 2-forma. Si denotamos por T^c a esta 2-forma, podemos escribir

$$T^c = T(\tilde{E}^c; ,) = d\tilde{E}^c + \Gamma_{ba}^c \tilde{E}^a \wedge \tilde{E}^b. \quad (1.13)$$

Es decir, la torsión es una colección de 2-formas, etiquetadas por el índice c que posee n valores posibles. En esta definición se encuentra codificado un objeto de importancia crucial en la geometría diferencial: la conexión de spin $\tilde{\omega}_b^a$, dada por

$$\tilde{\omega}_b^c = \Gamma_{ba}^c \tilde{E}^a, \quad (1.14)$$

la cual es una colección de 1-formas que nos permite escribir la torsión como

$$\tilde{T}^c = d\tilde{E}^c + \tilde{\omega}_b^c \wedge \tilde{E}^b. \quad (1.15)$$

Curvatura

La curvatura se define, en notación geométrica, como

$$R(; \bar{C}, \bar{A}, \bar{B}) = [\nabla_{\bar{A}}, \nabla_{\bar{B}}] \bar{C} - \nabla_{[\bar{A}, \bar{B}]} \bar{C}, \quad (1.16)$$

la cual posee la propiedad de antisimetría

$$R(; \overline{C}, \overline{A}, \overline{B}) = -R(; \overline{C}, \overline{B}, \overline{A}). \quad (1.17)$$

La curvatura representa el cambio que experimenta un vector al realizar su transporte paralelo a lo largo de una curva cerrada. Al efectuar este procedimiento en una variedad con curvatura diferente de cero, el vector final no es necesariamente idéntico al vector de partida. Este hecho se traduce como una no conmutatividad de la derivada covariante de un par de vectores base.

Si calculamos la curvatura (1.16) en una base coordenada, se obtienen las componentes del tensor de curvatura, las cuales corresponden a

$$R^\sigma{}_{\lambda\mu\nu} = \Gamma^\sigma{}_{\lambda\nu,\mu} - \Gamma^\sigma{}_{\lambda\mu,\nu} + \Gamma^\alpha{}_{\lambda\nu}\Gamma^\sigma{}_{\alpha\mu} - \Gamma^\alpha{}_{\lambda\mu}\Gamma^\sigma{}_{\alpha\nu}. \quad (1.18)$$

Estas componentes forman lo que se conoce como el tensor de Riemann. Si todas las componentes de este tensor son nulas, entonces el transporte paralelo de vectores es independiente del camino. Es posible encontrar una expresión para la curvatura en lenguaje geométrico, si damos como argumento a (1.16) un conjunto de vectores base $\overline{E}_c, \overline{E}_a, \overline{E}_b$. Puede mostrarse que

$$R(; \overline{E}_c, \overline{E}_a, \overline{E}_b) = \tilde{R}^d{}_c \equiv \Gamma^d{}_{ce} d\tilde{E}^e + \Gamma^e{}_{cb} \Gamma^d{}_{ea} \tilde{E}^a \wedge \tilde{E}^b + E_a^\mu (\partial_\mu \Gamma^d{}_{cb} \tilde{E}^a \wedge \tilde{E}^b). \quad (1.19)$$

Utilizando el hecho de que

$$d\tilde{E}^e = d(E_\nu^e \tilde{d}x^\nu) = \partial_\mu E_\nu^e \tilde{d}x^\mu \wedge \tilde{d}x^\nu = E_a^\mu E_b^\nu \tilde{E}^a \wedge \tilde{E}^b,$$

reescribimos $\tilde{R}^a{}_b$ como

$$\begin{aligned} \tilde{R}^a{}_b &= d(\Gamma^d{}_{cb} \tilde{E}^b) + (\Gamma^d{}_{ea} \tilde{E}^a) \wedge (\Gamma^e{}_{cb} \tilde{E}^b) \\ &= d\tilde{\omega}^a{}_b + \tilde{\omega}^a{}_c \wedge \tilde{\omega}^c{}_b. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Vemos que la curvatura está dada por la 2-forma $\tilde{R}^a{}_b$, la cual está definida en términos de la conexión de spin y su derivada exterior.

La 2-forma curvatura aparece de manera natural al definir una derivada exterior covariante $D = d + \omega$. Por ejemplo, para un vector de Lorentz ϕ^a , se tiene que

$$D\phi^a = d\phi^a + \omega^a{}_b \phi^b. \quad (1.21)$$

Si tomamos nuevamente la derivada exterior covariante de esta expresión, obtenemos

$$\begin{aligned} D^2\phi^a &= D[d\phi^a + \omega^a{}_b \phi^b] \\ &= d[d\phi^a + \omega^a{}_b \phi^b] + \omega^a{}_b [d\phi^b + \omega^b{}_c \phi^c] \\ &= [d\omega^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b] \phi^b. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Vemos que la 2–forma que multiplica a ϕ^b ,

$$\tilde{R}^a_b = d\omega^a_c \wedge \omega^c_b \quad (1.23)$$

es precisamente la 2–forma curvatura que hemos definido con anterioridad.

En este punto cabe mencionar una relación de importancia entre la derivada exterior covariante y la curvatura, conocida como la identidad de Bianchi y dada por

$$DR^a_b = dR^a_b + \omega^a_c \wedge R^c_b - \omega^c_b \wedge R^a_c \equiv 0, \quad (1.24)$$

que es una identidad que no aporta información nueva, puesto que se satisface por cualquier conexión bien definida de manera trivial.

El espacio métrico

Las nociones de distancia y ángulo son posibles de definir por medio del tensor métrico, el cual es un tensor $\binom{0}{2}$ simétrico definido en la variedad M , dado por la expresión

$$g = g_{ab} \tilde{E}^a \otimes \tilde{E}^b. \quad (1.25)$$

Podemos definir el producto escalar de vectores en función de g de la siguiente forma

$$\bar{A} \cdot \bar{B} \equiv g(\bar{A}, \bar{B}) = g_{ab} \tilde{E}^a(\bar{A}) \tilde{E}^b(\bar{B}) = g_{ab} A^a B^b. \quad (1.26)$$

Definiremos el intervalo o longitud de arco Δs^2 en función de g y un desplazamiento infinitesimal $\overline{\Delta x} = \Delta x^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$, con $\Delta x^\mu \rightarrow 0$ como

$$\Delta s^2 = \overline{\Delta x} \cdot \overline{\Delta x} = g \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) \Delta x^\mu \Delta x^\nu = g_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu. \quad (1.27)$$

La métrica nos permite definir la operación de subir y bajar índices, lo cual equivale a una asociación entre vectores y 1–formas. Por ejemplo, sea \bar{V} un vector en \mathcal{T}_P , se tendrá que

$$g(\bar{V}, \cdot) \equiv \tilde{V} \in \mathcal{T}_P^*. \quad (1.28)$$

Hemos definido la 1–forma \tilde{V} tal que, al ser aplicada sobre un vector \bar{U} , otorga

$$\tilde{V}(\bar{U}) = g(\bar{V}, \bar{U}) = g_{ab} V^a U^b = V_b U^a, \quad (1.29)$$

donde se ha definido la operación de bajar índices por medio de las componentes de la métrica como $g_{ab} V^a = V_b$. La operación inversa estará dada por las componentes de la métrica inversa g^{ab} , tal que $V^a = g^{ab} V_b = g^{ba} V_b$.

En la gravedad teleparalela trabajaremos con **bases ortonormales**, las cuales pueden ser definidas únicamente a partir de este punto, puesto que

el tensor métrico permite tener una noción de producto escalar. Definimos las bases ortonormales como el conjunto $\{\bar{E}^{\hat{a}}\}$ tal que su producto escalar satisface

$$\bar{E}_{\hat{a}} \cdot \bar{E}_{\hat{b}} = g(\bar{E}_{\hat{a}}, \bar{E}_{\hat{b}}) = \eta_{ab}, \quad (1.30)$$

con $\eta_{ab} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ las componentes de la métrica de Minkowski. Estas bases ortonormales satisfacen, además, que la base dual es $\tilde{E}^{\hat{a}} = \eta^{ac} g(\bar{E}_{\hat{c}}, \cdot)$. En efecto,

$$\tilde{E}^{\hat{a}}(\bar{E}_{\hat{b}}) = \eta^{ac} g(\bar{E}_{\hat{c}}, \bar{E}_{\hat{b}}) = \eta^{ac} \eta_{cb} = \delta_b^a. \quad (1.31)$$

Notar que es innecesario indicar si los tensores η y δ tienen índices ortonormales o no, puesto que $\eta_{\hat{a}\hat{b}} = \eta_{ab}$ y $\delta_{\hat{b}}^{\hat{a}} = \delta_b^a$. Las bases ortonormales nos permiten definir la noción de volumen métrico, cuya n -forma está dada por

$$\begin{aligned} \tilde{E}^{\hat{1}} \wedge \tilde{E}^{\hat{2}} \wedge \cdots \wedge \tilde{E}^{\hat{n}} &= E_{\mu}^{\hat{1}} E_{\nu}^{\hat{2}} \cdots \tilde{d}x^{\mu} \wedge \tilde{d}x^{\nu} \wedge \cdots \\ &= \det(E_{\mu}^{\hat{a}}) \tilde{d}x^1 \wedge \tilde{d}x^2 \wedge \cdots \wedge \tilde{d}x^n. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Finalmente, por medio del tensor métrico podemos definir la operación de la estrella de Hodge $*$, que es una aplicación lineal que asocia p -formas con $(n-p)$ -formas. Sea $\tilde{\alpha}$ una p -forma, se tiene que $*\tilde{\alpha}$ es una $(n-p)$ -forma dada por

$$(*\tilde{\alpha})_{i_{p+1} \dots i_n} \equiv \frac{\det(g_{\mu\nu})}{p!} \epsilon_{i_1 \dots i_p i_{p+1} \dots i_n} \alpha^{i_1 \dots i_p}. \quad (1.33)$$

Conexiones métricas

Se dirá que una conexión es métrica si es que su derivada covariante asociada cumple la regla de Leibniz ante el producto escalar. Podemos encontrar la condición que debe cumplir una conexión métrica aplicando la derivada covariante $\nabla_{\bar{E}_{\hat{c}}}$ sobre el producto $\bar{E}_{\hat{a}} \cdot \bar{E}_{\hat{b}} = \eta_{ab}$. Se obtiene

$$\begin{aligned} \nabla_{\bar{E}_{\hat{c}}} \bar{E}_{\hat{a}} \cdot \bar{E}_{\hat{b}} + \bar{E}_{\hat{a}} \cdot (\nabla_{\bar{E}_{\hat{c}}} \bar{E}_{\hat{b}}) &= 0, \\ \longrightarrow \Gamma_{\hat{a}\hat{c}}^{\hat{d}} \bar{E}_{\hat{d}} \cdot \bar{E}_{\hat{b}} + \Gamma_{\hat{b}\hat{c}}^{\hat{d}} \bar{E}_{\hat{a}} \cdot \bar{E}_{\hat{d}} &= 0, \\ \longrightarrow \Gamma_{\hat{a}\hat{c}}^{\hat{d}} \eta_{\hat{d}\hat{b}} + \Gamma_{\hat{b}\hat{c}}^{\hat{d}} \eta_{\hat{a}\hat{d}} &= 0, \\ \longrightarrow \Gamma_{\hat{a}\hat{c}}^{\hat{d}} \eta_{\hat{d}\hat{b}} \tilde{E}^{\hat{c}} + \Gamma_{\hat{b}\hat{c}}^{\hat{d}} \eta_{\hat{a}\hat{d}} \tilde{E}^{\hat{c}} &= 0, \\ \longrightarrow \tilde{\omega}_{\hat{a}}^{\hat{d}} \eta_{\hat{d}\hat{b}} + \tilde{\omega}_{\hat{b}}^{\hat{d}} \eta_{\hat{a}\hat{d}} &= 0. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Para que se satisfaga la última igualdad debe cumplirse que

$$\tilde{\omega}_{\hat{b}\hat{a}} + \tilde{\omega}_{\hat{a}\hat{b}} = 0, \quad (1.35)$$

por tanto, una conexión métrica es aquella que satisface una relación de antisimetría entre sus índices en una base ortonormal.

Conexión de Levi-Civita

Si a la propiedad de metricidad se agrega la anulación de la torsión, es decir imponemos

$$T^a = d\tilde{E}^{\hat{a}} + \omega_{\hat{c}}^{\hat{a}} \wedge \tilde{E}^{\hat{c}} = 0, \quad (1.36)$$

la conexión de spin queda totalmente determinada. Imponiendo este requerimiento junto a la condición de metricidad, se obtiene la siguiente conexión

$$(\tilde{\omega}_{\hat{a}\hat{b}})_{\hat{c}} = \frac{1}{2} \left((d\tilde{E}^{\hat{a}})_{\hat{b}\hat{c}} + (d\tilde{E}^{\hat{b}})_{\hat{c}\hat{a}} - (d\tilde{E}^{\hat{c}})_{\hat{a}\hat{b}} \right), \quad (1.37)$$

la cual corresponde a la conexión de Levi-Civita. Si usamos una base coordenada, obtenemos los símbolos de Christoffel $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ en función de las componentes del tensor métrico,

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\partial_{\mu} g_{\nu\rho} + \partial_{\nu} g_{\mu\rho} - \partial_{\rho} g_{\mu\nu}). \quad (1.38)$$

En relatividad general, las geodésicas son curvas autoparalelas de esta conexión, es decir la ecuación de la geodésica se escribe como

$$\frac{d^2 x^{\mu}}{d\tau^2} + \Gamma^{\mu}_{\nu\rho} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} \frac{dx^{\rho}}{d\tau} = 0. \quad (1.39)$$

Conviene definir también la contorsión \tilde{K}^a_b , que es la diferencia entre la conexión de spin y la conexión de Levi-Civita,

$$\tilde{K}^a_b = \tilde{\omega}^a_b - \tilde{\omega}^a_b. \quad (1.40)$$

Se puede mostrar que existe una relación entre la torsión y la contorsión (dado que $\tilde{\omega}^a_b$ tiene torsión nula), otorgando

$$\tilde{T}^a = \tilde{K}^a_b \wedge \tilde{E}^b = -\tilde{E}^b \wedge \tilde{K}^a_b. \quad (1.41)$$

La conexión de Weitzenböck

La conexión de Weitzenböck corresponde a escoger una conexión de spin que se anule, es decir $\omega_b^a \equiv 0$. La componentes de la conexión de Weitzenböck en base coordenada, están dadas por

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = E_a^\lambda \partial_\nu E_\mu^a = -E_\mu^a \partial_\nu E_a^\lambda. \quad (1.42)$$

A partir de la definición en (1.20), es sencillo ver que la curvatura de esta conexión se anula no solo en base coordenada sino en toda base, pues la curvatura es un tensor. Para estudiar las propiedades de la conexión de Weitzenböck, definimos la derivada covariante asociada a ella mediante su acción en la tétrada

$$\nabla_\nu E_\mu^a = \partial_\nu E_\mu^a - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda E_\lambda^a. \quad (1.43)$$

Es sencillo ver que a partir de la definición en la Ec. (1.42), la derivada covariante de la tétrada (1.43) se anula. Esto significa que la tétrada es transportada paralelamente de manera automática a lo largo de cualquier curva. Esto significa también que es métrica-compatible. Más aún, el transporte paralelo de cualquier vector en un espacio-tiempo con esta conexión no depende del camino, ya que la curvatura siempre es cero. La derivada covariante de un vector con respecto a la conexión de Weitzenböck es

$$\nabla_\nu \bar{U} = \nabla_\nu (U^a \bar{E}_a) = \bar{E}_a \partial_\nu U^a, \quad (1.44)$$

entonces el vector \bar{U} se verá transportado paralelamente si y sólo si sus componentes U^a son constantes.

Geometrías del espacio-tiempo

A lo largo de esta breve introducción matemática hemos visto que podemos caracterizar una variedad por medio de vectores en el espacio tangente \bar{E}_a y 1-formas \tilde{E}^a . Estos objetos geométricos, junto a las derivada de Lie y derivada exterior por sí solos no bastan para definir por completo las propiedades de la variedad. Es necesario introducir la noción de conexión de spin, la cual indica cómo varían los vectores base con respecto a sí mismos. Este objeto nos permite definir la curvatura, y junto al vielbein definen la torsión. La curvatura y la torsión caracterizan por completo la geometría del espacio-tiempo, a menos que se introduzcan nuevos grados de libertad relacionados con la condición de metricidad. Esta condición sobre la conexión de spin ya la vimos en (1.35), pero puede representarse también en lenguaje coordinado a través del tensor $Q_{\mu\nu\lambda}$, el cual está definido en términos de la métrica como

$$Q_{\mu\nu\lambda} = -\nabla_\mu g_{\nu\lambda} = 0. \quad (1.45)$$

Si el tensor de metricidad $Q_{\mu\nu\lambda}$ es cero, se dice que estamos en un espacio-tiempo métrico-compatible, cuya conexión de spin es antisimétrica, como ya probamos en la ecuación (1.35). Se dice que un espacio-tiempo con esta característica es un **espacio-tiempo de Riemann–Cartan**, y se denota por U_d . Esta condición deja libre tanto la torsión como la curvatura. Si queremos que la conexión quede totalmente determinada por la métrica, y la métrica sea el único campo indeterminado, entonces se debe imponer que el tensor de torsión \tilde{T}^a se anule. Esta imposición da origen a la conexión de Levi-Civita y sus componentes están dadas por los símbolos de Christoffel. Un espacio-tiempo de Riemann–Cartan U_d con torsión nula corresponde a un **espacio-tiempo de Riemann** V_d . Es en esta sub-variedad en la cual se encuentra definida la teoría de la relatividad general. Existe, sin embargo, otra forma de reducir el número de campos independientes: imponiendo que el tensor de curvatura R^a_b se anule. En este caso, tanto la métrica como la conexión están completamente determinadas en términos de la tétrada: una base ortonormal de vectores en el espacio tangente. En este caso se utiliza la conexión de Weitzenböck ¹, la cual posee torsión. Un espacio-tiempo de Riemann–Cartan equipado con esta conexión se dice que es un **espacio-tiempo de Weitzenböck** A_d , y es en esta variedad en la cual está definida la gravedad teleparalela, que estudiaremos en los siguientes capítulos. Si tanto la torsión como la curvatura se anulan, se tiene un espacio-tiempo de Minkowski M_d [71].

Notación

En lo que sigue efectuaremos un cambio de notación para denotar bases ortonormales. En particular, usaremos letra en negrita para escribir tanto bases de vectores como de 1-formas, es decir $\bar{E}_a \equiv \mathbf{e}_a$, y $\tilde{E}^b \equiv \mathbf{e}^b$. Así mismo, cualquier p -forma se escribirá en letra negrita, como por ejemplo la 2-forma torsión \mathbf{T}^a y la 2-forma curvatura \mathbf{R}^a_b . Las componentes de la tétrada se denotarán con la letra e mayúscula o minúscula, E^a_μ o e^a_μ , de manera indistinta y de acuerdo al contexto. El determinante de la tétrada será $e = \det(e^a_\mu)$.

¹Sin embargo, la imposición de curvatura cero no determina por completo la conexión, existiendo otras conexiones que también satisfacen la condición de curvatura nula. Por ejemplo, ver [69] y [70].

1.2. El equivalente teleparalelo de la relatividad general

En esta sección introduciremos el formalismo para estudiar teorías de gravedad basadas en el teleparalelismo, esto significa, teorías que poseen una noción bien definida del paralelismo entre vectores definidos en diferentes puntos de la variedad espacio-temporal. En contraste, teorías como la relatividad general y algunas de sus generalizaciones poseen curvatura diferente de cero, por lo cual el transporte paralelo de vectores depende del recorrido y no existe una noción de paralelismo absoluto. La conexión de Weitzenböck posee curvatura idénticamente cero, por lo cual es natural su elección para definir una teoría física con paralelismo absoluto. La gravedad teleparalela es una descripción equivalente a la relatividad general de los fenómenos gravitatorios, que lleva a resultados físicos equivalentes, pues la equivalencia ocurre a nivel de las ecuaciones de movimiento. De igual forma, la acción para ambas teorías es idéntica, salvo por un término de borde.

El campo físico fundamental de esta clase de teorías es el *vielbein* E_{μ}^a . En el caso de dimensión $n = 4$, se le llama tétrada o *vierbein* (cuatro patas, en alemán). De ahora en adelante usaremos vielbein y tétrada como sinónimos, teniendo en mente esta distinción inicial. La tétrada posee n^2 componentes independientes, mientras que la métrica posee $\frac{n(n+1)}{2}$. Las componentes extra del vielbein son $\frac{n(n-1)}{2}$, el mismo número de componentes de un tensor $n \times n$ antisimétrico. Esta casualidad no pasó desapercibida en la historia, y Einstein mismo propuso que una forma de unificar la gravedad y el electromagnetismo podría consistir en una teoría basada en la tétrada. Luego, notaría que las componentes extra pueden ser removidas introduciendo invariancia local de Lorentz, por medio de una conexión construída a partir del vielbein.

Si no se tiene interés en formular teorías teleparalelas con invariancia local de Lorentz desde el principio, es posible comenzar construyendo teorías generales que tengan únicamente invariancia general de coordenadas e invariancia global de Lorentz.

1.2.1. Teorías teleparalelas generales

La construcción de un Lagrangiano para una teoría teleparalela genérica es en apariencia sencilla: se buscan términos que tengan invariancia global de Lorentz y que sean, a lo sumo, cuadráticos en derivadas de la tétrada [71]. Una teoría teleparalela posee un tensor de curvatura nulo, por tanto este objeto geométrico no se encuentra disponible para construir parte de un Lagrangiano. Debemos encontrar invariantes que dependan de las componentes

de la torsión de la conexión de Weitzenböck $T^\rho_{\mu\nu} = E_a^\rho(\partial_\mu E_\nu^a - \partial_\nu E_\mu^a)$, que es el único objeto disponible para construir una dinámica. En dimensión n , existen tres términos que se comportan como escalares bajo transformaciones de Lorentz, que son densidades bajo cambios generales de coordenadas, y son cuadráticos en derivadas de primer orden de la tétrada. Estos son los invariantes de Weitzenböck I_1 , I_2 e I_3 , dados por [71]

$$\begin{aligned} I_1 &= eT_{\mu\nu\rho}T^{\mu\nu\rho}, \\ I_2 &= eT_{\mu\nu\rho}T^{\rho\nu\mu}, \\ I_3 &= eT_{\mu\rho}{}^\rho T^\mu{}_\sigma{}^\sigma. \end{aligned} \quad (1.46)$$

Existe un cuarto invariante I_4 , que es cuadrático en primeras derivadas de la tétrada, pero únicamente en $n = 4$. En dimensión arbitraria está dado por

$$I_4 = \epsilon^{\mu_1 \dots \mu_{n-3} \nu_1 \nu_2 \nu_3} T_{\mu_1 \rho_1}{}^{\rho_1} T_{\mu_2 \rho_2}{}^{\rho_2} \dots T_{\mu_{n-3} \rho_{n-3}}{}^{\rho_{n-3}} T_{\nu_1 \nu_2 \nu_3}, \quad (1.47)$$

sin embargo no es invariante bajo transformaciones de paridad, y por tanto no será tomado en cuenta. Por otro lado, el determinante e es otro invariante que no será considerado aquí. El Lagrangiano teleparalelo más general, propuesto por Pellegrini y Plebański en [16], es una combinación lineal de los invariantes de Weitzenböck, es decir

$$\mathcal{L}_T = \sum_{i=1}^3 c^i I_i, \quad (1.48)$$

con c^i coeficientes arbitrarios, de los cuales sólo dos son independientes, ya que mediante una normalización podemos fijar uno de ellos. Existen otras formas de parametrizar este Lagrangiano, por ejemplo construir una teoría comenzando con las partes irreducibles de la torsión que son invariantes ante el grupo de Lorentz $\text{SO}(3, 1)$ [19]. Es común encontrar esta clasificación en términos del lenguaje geométrico, en particular puede escribirse este Lagrangiano como

$$L = \eta_{ab} \mathbf{e}^a \wedge^* (a_1^{(1)} \mathbf{T}^b + a_2^{(2)} \mathbf{T}^b + a_3^{(3)} \mathbf{T}^b), \quad (1.49)$$

donde se define

$$\begin{aligned} {}^{(1)}\mathbf{T}^a &= \mathbf{T}^a - {}^{(2)}\mathbf{T}^a - {}^{(3)}\mathbf{T}^a, \\ {}^{(2)}\mathbf{T}^a &= \frac{1}{3} \mathbf{e}^a \wedge (\mathbf{T}^b \mathbf{e}_b), \\ {}^{(3)}\mathbf{T}^a &= -\frac{1}{3} \mathbf{e}^a \wedge^* (\mathbf{T}^b \wedge \mathbf{e}_b). \end{aligned} \quad (1.50)$$

Las partes ${}^{(1)}\mathbf{T}^a$, ${}^{(2)}\mathbf{T}^a$ y ${}^{(3)}\mathbf{T}^a$ son llamadas *tentor*, *trator* y *axitor*, respectivamente. Las dos primeras poseen 4 componentes libres y la última, 16

componentes. La relación entre los coeficientes libres de ambas parametrizaciones descritas es

$$a_1 = c_1 + \frac{1}{2}c_2, \quad a_2 = c_1 + \frac{1}{2}c_2 + \frac{(n-1)}{2}c_3, \quad a_3 = c_1 - c_2. \quad (1.51)$$

La última expresión (1.49) para la densidad Lagrangiana puede escribirse en una base coordenada como

$$L = a_1 t^{\lambda\mu\nu} t_{\lambda\mu\nu} + a_2 v^\mu v_\mu + a_3 a^\mu a_\mu + a_0, \quad (1.52)$$

donde se define

$$\begin{aligned} t_{\lambda\mu\nu} &= \frac{1}{2}(T_{\lambda\mu\nu} + T_{\mu\lambda\nu}) + \frac{1}{6}(g_{\nu\lambda}v_\mu + g_{\nu\mu}v_\lambda) - \frac{1}{3}g_{\lambda\mu}v_\nu, \\ v_\mu &= T^\lambda_{\lambda\mu}, \\ a_\mu &= \frac{1}{6}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}T^{\nu\rho\sigma}. \end{aligned} \quad (1.53)$$

El tensor de torsión se escribe en términos de estas tres partes irreducibles como

$$T_{\lambda\mu\nu} = \frac{2}{3}(t_{\lambda\mu\nu} - t_{\lambda\nu\mu}) + \frac{1}{3}(g_{\lambda\mu}v_\nu - g_{\lambda\nu}v_\mu) + \epsilon_{\lambda\mu\nu\rho}a^\rho. \quad (1.54)$$

La observación de que el Lagrangiano (1.48) posee un límite en el cual es equivalente a la relatividad general proviene de Møller, quien por primera vez observara que para $c_1 = 1$, $c_2 = 2$ y $c_3 = -4$, este Lagrangiano es equivalente al Lagrangiano de Einstein–Hilbert, salvo por derivadas totales [15]. Es sencillo ver también que se obtiene el Lagrangiano de Yang–Mills para $c_1 = 2$, $c_2 = 0 = c_3$. Realizando un estudio de perturbaciones a primer orden en la tétrada es posible mostrar que el Lagrangiano (1.48) es fenomenológicamente viable si se cumple que [71]

$$2c_1 + c_2 + c_3 = 0. \quad (1.55)$$

1.2.2. Gravedad teleparalela en lenguaje geométrico

Ahora dedicaremos nuestra atención al equivalente teleparalelo de la relatividad general o gravedad teleparalela, que corresponde a la elección $c_1 = 1$, $c_2 = 2$, $c_3 = -4$ ². Definiremos el Lagrangiano en lenguaje geométrico a

²De ahora en adelante usaremos los términos *equivalente teleparalelo de la relatividad general* y *gravedad teleparalela* de manera indistinta, teniendo en cuenta que la gravedad teleparalela podría estarse refiriendo a una elección de coeficientes más general.

partir del Lagrangiano de Einstein–Hilbert, para luego estudiar la equivalencia entre ambas teorías, y estudiaremos las ecuaciones de movimiento en lenguaje de coordenadas.

La acción de Einstein–Hilbert es la 4–forma definida por

$$S_{EH} = \int L_{EH} = \frac{1}{4\kappa} \int \epsilon_{abcd} \mathbf{e}^a \wedge \mathbf{e}^b \wedge \mathbf{R}^{cd}, \quad (1.56)$$

con $\kappa = 8\pi G$. El objeto geométrico \mathbf{R}^{cd} corresponde a la 2–forma curvatura calculada a partir de la conexión de Levi-Civita. No debe confundirse con la 2–forma curvatura general \mathbf{R}^a_b que está evaluada para una conexión arbitraria. La diferencia entre ambas 2–formas curvatura puede expresarse en términos de la contorsión y su derivada covariante como

$$\mathbf{R}^a_b - \mathbf{R}^a_b = \overset{L}{D}\mathbf{K}^a_b + \mathbf{K}^a_c \wedge \mathbf{K}^c_b = D\mathbf{K}^a_b + \mathbf{K}^a_c \wedge \mathbf{K}^c_b, \quad (1.57)$$

donde $\overset{L}{D}$ es la derivada exterior covariante con respecto a la conexión de Levi-Civita. Con la propiedad obtenida en (1.57), el Lagrangiano de Einstein–Hilbert se reescribe como

$$L_{EH} = \frac{1}{4\kappa} \epsilon_{abcd} \mathbf{e}^a \wedge \mathbf{e}^b \left(\mathbf{R}^{cd} - \overset{L}{D}\mathbf{K}^{cd} - \mathbf{K}^c_e \mathbf{K}^{ed} \right). \quad (1.58)$$

Si usamos las propiedades de metricidad y torsión nula de la conexión de Levi-Civita, representadas respectivamente por las expresiones

$$\overset{L}{D}\epsilon_{abcd} = 0 \quad \text{y} \quad \overset{L}{D}\mathbf{e}^a = 0, \quad (1.59)$$

se obtiene que

$$L_{EH} = \frac{1}{4\kappa} \left[\epsilon_{abcd} \mathbf{e}^a \wedge \mathbf{e}^b (\mathbf{R}^{cd} - \mathbf{K}^c_e \mathbf{K}^{ed}) - \overset{L}{D}(\epsilon_{abcd} \mathbf{e}^a \wedge \mathbf{e}^b \wedge \mathbf{K}^{cd}) \right]. \quad (1.60)$$

En el último término de esta expresión puede usarse que $\overset{L}{D}(\epsilon_{abcd} \mathbf{e}^a \wedge \mathbf{e}^b \wedge \mathbf{K}^{cd}) = d(\epsilon_{abcd} \mathbf{e}^a \wedge \mathbf{e}^b \wedge \mathbf{K}^{cd})$, ya que $\epsilon_{abcd} \mathbf{e}^a \wedge \mathbf{e}^b \wedge \mathbf{K}^{cd}$ es un escalar invariante de Lorentz. Por lo tanto, el último término en la expresión (1.60) es un término de borde, que puede ser suprimido para otorgar el siguiente Lagrangiano

$$L = \frac{1}{4\kappa} \epsilon_{abcd} \mathbf{e}^a \wedge \mathbf{e}^b \wedge (\mathbf{R}^{cd} - \mathbf{K}^c_e \mathbf{K}^{ed}). \quad (1.61)$$

Este Lagrangiano está escrito en términos de una conexión de spin arbitraria ω^{cd} , sin embargo la variación con respecto a dicha conexión es un término

de superficie. Por lo tanto, el Lagrangiano (1.61) no otorga una dinámica a la conexión de spin. De hecho, hemos mostrado que la acción asociada a este Lagrangiano equivale a la acción de Einstein–Hilbert más un término de borde. Sin embargo, ya que la conexión de spin ω^{cd} no está contenida en L_{EH} , es posible concluir que la variación de (1.61) con respecto a ω^{cd} producirá un término de borde que compensará la variación del término de borde que acabamos de suprimir. Dicho término puede escribirse como [49]

$$\delta_\omega L = \frac{1}{4\kappa} d(\epsilon_{abcd} \mathbf{e}^a \wedge \mathbf{e}^b \delta\omega^{cd}). \quad (1.62)$$

Por ende, la conexión ω^{cd} aparece en el Lagrangiano (1.61) como una variable espuria, que puede fijarse de manera arbitraria. En ETRG la conexión de spin se escoge $\omega^{cd} = 0$; esta elección corresponde a la conexión de Weitzenböck, como ya hemos visto. Con esto, la 2–forma curvatura \mathbf{R}^{cd} es trivialmente cero, mientras que la contorsión se convierte en

$$\mathbf{K}^c_e = -\omega^L_e{}^c[\mathbf{e}], \quad (1.63)$$

es decir, es lineal y homogénea en derivadas de la tetrada. Entonces, el Lagrangiano se escribe como

$$L_{ETRG} = -\frac{1}{4\kappa} \epsilon_{abcd} \mathbf{e}^a \wedge \mathbf{e}^b \wedge \mathbf{K}^c_e[\mathbf{e}] \wedge \mathbf{K}^{ed}[\mathbf{e}]. \quad (1.64)$$

Esta elección de la conexión hace que el Lagrangiano sea cuadrático en derivadas de primer orden de la tetrada, pues la conexión de Levi-Civita es $(\omega^L_{ab})_c = \frac{1}{2}[(d\mathbf{e}_a)_{bc} + d(\mathbf{e}_b)_{ca} - (d\mathbf{e}_c)_{ab}]$.

Si bien la conexión ω^{cd} es una variable espuria y carente de dinámica, tiene un rol importante pues hace que la expresión (1.61) sea un volumen escalar invariante de Lorentz, es decir, que es invariante bajo transformaciones locales de Lorentz en la tetrada. Esto ocurre porque la contorsión \mathbf{K}^c_e está definida como una diferencia entre conexiones, y por tanto es un tensor de Lorentz. Pero al eliminar ω^{cd} del Lagrangiano, la contorsión pierde su carácter tensorial, y pasa a ser una conexión que mantiene un carácter tensorial únicamente bajo transformaciones globales de Lorentz de la tetrada. Esto no debería ser visto como un problema, ya que una transformación local de Lorentz de la tetrada genera un término de borde, que es inofensivo para la dinámica de la teoría. De hecho, si realizamos una transformación local de Lorentz δ_Λ en L_{EH} en (1.58) y (1.60) para $\omega^{cd} = 0$, y ya que L_{EH} no es sensible ante esta transformación, se tiene que

$$\delta_\Lambda L_{ETRG} = \frac{1}{4\kappa} \delta_\Lambda d(\epsilon_{abcd} \mathbf{e}^a \wedge \mathbf{e}^b \wedge \mathbf{K}^{cd}[\mathbf{e}]) = \frac{1}{4\kappa} d(\epsilon_{abcd} \mathbf{e}^a \wedge \mathbf{e}^b \eta^{de} \Lambda^c_{e'} d\Lambda^{e'}). \quad (1.65)$$

Esto implica que la gravedad teleparalela es insensible a la orientación local de la tétrada, y al igual que la relatividad general, describe la dinámica local del tensor métrico, que es un invariante local en la teoría. Podría agregarse un término de borde para equilibrar el comportamiento de L_{ETRG} en (1.65), y construir una acción que es invariante local de Lorentz de la forma

$$\begin{aligned} S_{ETRG}[\mathbf{e}] = & -\frac{1}{4\kappa} \int_U \epsilon_{abcd} \mathbf{e}^a \wedge \mathbf{e}^b \wedge \mathbf{K}_e^c[\mathbf{e}] \wedge \mathbf{K}^{ed}[\mathbf{e}] \\ & - \frac{1}{4\kappa} \int_{\partial U} \epsilon_{abcd} \mathbf{e}^a \wedge \mathbf{e}^b \wedge \mathbf{K}^{cd}[\mathbf{e}], \end{aligned} \quad (1.66)$$

donde nuevamente $\mathbf{K}_e^c[\mathbf{e}] = -\omega_e^L[\mathbf{e}]$.

1.2.3. Gravedad teleparalela en términos de coordenadas

Ahora obtendremos el Lagrangiano de la gravedad teleparalela en lenguaje coordinado, que es la forma en la cual comúnmente se estudia en la literatura. Comenzamos descomponiendo la contorsión en una base anholónoma como $\mathbf{K}_e^c = K_{ef}^c \mathbf{e}^f$, tal que el primer término en (1.66) se escribe como

$$L_{ETRG} = -\frac{1}{4\kappa} \epsilon_{abcd} K_{ef}^c K_g^{ed} \mathbf{e}^a \wedge \mathbf{e}^b \wedge \mathbf{e}^f \wedge \mathbf{e}^g. \quad (1.67)$$

Reconocemos en esta expresión la 4-forma volumen, que denotaremos por Ω , y la cual puede ser expresada en una base coordinada como

$$\mathbf{e}^a \wedge \mathbf{e}^b \wedge \mathbf{e}^f \wedge \mathbf{e}^g = \epsilon^{abfg} \Omega = e \epsilon^{abfg} dx^0 dx^1 dx^2 dx^3. \quad (1.68)$$

Reemplazando en (1.67) y usando la propiedad del símbolo de Levi-Civita $\epsilon^{abfg} \epsilon_{abcd} = 2(\delta_c^g \delta_d^f - \delta_c^f \delta_d^g)$, se tiene que

$$L_{ETRG} = \frac{1}{2\kappa} (K_{ec}^c K_d^{ed} - K_{ed}^c K_c^{ed}) \Omega. \quad (1.69)$$

Tomaremos en cuenta las siguientes identidades entre la contorsión y la torsión

$$\begin{aligned} K_{ec}^c &= -T_{ec}^c, \\ K_d^{ed} &= -T_d^{d\ e}, \\ K_{ed}^c K_c^{ed} &= K_{[ed]}^c K_c^{ed} = -\frac{1}{2} T_{ed}^c K_c^{ed}, \end{aligned} \quad (1.70)$$

para reescribir el argumento en (1.69) como

$$\begin{aligned} K^c_{ec} K^{ed}_d - K^c_{ed} K^{ed}_c &= T^c_{ec} T^d_e + \frac{1}{2} T^c_{ed} K^{ed}_c \\ &= \frac{1}{2} T^c_{ed} (T_a^{ae} \delta_c^d - T_a^{ad} \delta_c^e + K^{ed}_c) = T^c_{ed} S_c^{ed}. \end{aligned} \quad (1.71)$$

Aquí se ha definido

$$S_c^{ed} = \frac{1}{2} K^{ed}_c + T_a^{a[e} \delta_c^{d]} = \frac{1}{2} K^{ed}_c + K_a^{a[e} \delta_c^{d]} \quad (1.72)$$

como el *superpotencial* de la teoría. La combinación $T^c_{ed} S_c^{ed} \equiv T$ es el escalar de torsión o escalar de Weitzenböck. Todas estas cantidades son tensores bajo una transformación de Lorentz, siempre y cuando no fijemos la conexión de spin a cero. En el caso con conexión de spin cero, estas cantidades serán tensores únicamente bajo transformaciones globales de Lorentz. Es importante notar que, debido a que la tétrada transforma índices del espacio tangente a índices de coordenadas, el escalar de torsión puede escribirse también como $T = T^\lambda_{\mu\nu} S_\lambda^{\mu\nu}$. Por tanto, también podemos escribir el superpotencial como

$$S_\rho^{\mu\nu} = -\frac{1}{4} (T^{\mu\nu}_\rho - T^{\nu\mu}_\rho - T_\rho^{\mu\nu}) + \frac{1}{2} \delta_\rho^\mu T^{\sigma\nu}_\sigma - \frac{1}{2} \delta_\rho^\nu T^{\sigma\mu}_\sigma. \quad (1.73)$$

Con esta forma podemos encontrar comúnmente escrita a la acción de la gravedad teleparalela la cual, con una constante cosmológica Λ , queda como

$$S_{ETRG} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x e (T - 2\Lambda) + S_m[e_\mu^a], \quad (1.74)$$

donde $S_m[e_\mu^a]$ representa una acción para la materia. El Lagrangiano contenido en (1.74) y los Lagrangianos anteriores que hemos presentado, si bien se entienden en términos de la conexión de Weitzenböck y su respectiva torsión, no determinan totalmente todas las componentes de la tétrada, sino que determinan la métrica. Debido a que la teoría es equivalente a la relatividad general, este hecho es esperable. Más aún, para campos de materia que se encuentren acoplados minimalmente con la métrica, las partículas libres siguen geodésicas delimitadas por la conexión de Levi-Civita.

Aún a pesar de esto, se dice que el teleparalelismo es una teoría donde los efectos gravitacionales están codificados en la torsión de la conexión de Weitzenböck. Podría pensarse en que la fijación de la conexión $\omega = 0$ es una fijación de gauge, en analogía con el electromagnetismo. Sin embargo, la analogía no es completa del todo, puesto que al fijar el campo de gauge A_0 en electromagnetismo, el potencial A_i queda determinado por completo. En cambio, al fijar ω ni la tétrada ni la torsión quedan determinadas, puesto que es una teoría que determina únicamente la métrica.

1.2.4. Término de borde

El término de borde

$$-\frac{1}{4\kappa} \int_{\partial U} \epsilon_{abcd} \mathbf{e}^a \wedge \mathbf{e}^b \wedge \mathbf{K}^{cd}[\mathbf{e}] \quad (1.75)$$

contribuye con un término $-\frac{1}{4\kappa} d(\epsilon_{abcd} \mathbf{e}^a \wedge \mathbf{e}^b \wedge \mathbf{K}^{cd})$ al Lagrangiano. Pero esta 4-forma es exacta, y por tanto puede reescribirse en términos de una cuadri-divergencia. Esto lo logramos notando que $\mathbf{K}^{cd} = K^{cd}_e \mathbf{e}^e$, y que

$$\mathbf{e}^a \wedge \mathbf{e}^b \wedge \mathbf{e}^e = -\epsilon^{abef} \Omega(\mathbf{e}_f). \quad (1.76)$$

Es decir, favorecemos la expresión para la 4-forma volumen en lugar del producto wedge entre las bases. Con esto, escribimos el término de borde como

$$\begin{aligned} d(\epsilon_{abcd} \mathbf{e}^a \wedge \mathbf{e}^b \wedge \mathbf{K}^{cd}) &= d(2(\delta_c^e \delta_d^f - \delta_c^f \delta_d^e) K^{cd}_e \Omega(\mathbf{e}_f)) \\ &= 4d(K^{cd}_c \Omega(\mathbf{e}_d)) = \frac{4}{e} \partial_\mu (e K^{cd}_c e^\mu_d) \Omega \\ &= \frac{4}{e} \partial_\mu (e T^\nu_\nu{}^\mu) \Omega. \end{aligned} \quad (1.77)$$

En la última igualdad $\Omega = \mathbf{e}^0 \wedge \mathbf{e}^1 \wedge \mathbf{e}^2 \wedge \mathbf{e}^3 = e dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$, y $\partial_\mu (e T^\nu_\nu{}^\mu)$ es la cuadri-divergencia que en la literatura convencional, diferencia los Lagrangianos de RG y ETRG. Es decir, la relación entre ambos Lagrangianos es

$$-eR = eT - 2\partial_\rho (e T_\mu{}^{\mu\rho}). \quad (1.78)$$

El motivo de este término de borde puede ser trazado al siguiente hecho: el Lagrangiano de relatividad general está definido en términos de primeras y segundas derivadas del tensor métrico. Por otro lado, la gravedad teleparalela posee primeras y segundas derivadas en la tétrada. Pero notablemente, en el teleparalelismo equivalente todos los términos con derivadas segundas de la tétrada se encuentran dentro del término de borde [72].

1.3. Ecuaciones de movimiento y equivalencia

Las ecuaciones de movimiento de la gravedad teleparalela se obtienen variando la acción (1.74) con respecto a la tétrada e^α_μ . Considerando un Lagrangiano $\mathcal{L}_{TG} = eT$ y un Lagrangiano para la materia \mathcal{L}_m , las ecuaciones de movimiento serán

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{TG}}{\partial e^\alpha_\mu} - \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}_{TG}}{\partial (\partial_\nu e^\alpha_\mu)} = \Theta^\mu_\alpha. \quad (1.79)$$

Aquí se tiene un tensor de energía-momento definido por

$$\Theta_a^\mu = \frac{1}{e} \frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta e^a_\mu}. \quad (1.80)$$

Es preciso calcular dos variaciones del escalar de torsión con respecto a la tétrada. Estos cálculos otorgan

$$\frac{\partial T}{\partial(\partial_\nu e^a_\mu)} = -4S_a^{\mu\nu}, \quad (1.81)$$

$$\frac{\partial T}{\partial e^a_\mu} = -4T^b_{\nu a} S_b^{\nu\mu}, \quad (1.82)$$

donde se define $S_a^{\mu\nu} = e_a^\rho S_\rho^{\mu\nu}$ y $T^b_{\nu a} = e_\rho^b e_a^\mu T_{\nu\mu}^\rho$. Juntando todo esto, se obtiene que las ecuaciones de movimiento para la gravedad teleparalela son

$$e^{-1} \partial_\sigma (e e_a^\lambda S_\lambda^{\sigma\nu}) + e_a^\lambda \left(T^{\rho}_{\sigma\lambda} S_\rho^{\sigma\nu} - \frac{1}{4} \delta_\lambda^\nu T \right) = -\frac{1}{2} \kappa e_a^\lambda \Theta_\lambda^\nu. \quad (1.83)$$

Estas ecuaciones son equivalentes a las ecuaciones de Einstein para materia sin spin; esto puede mostrarse considerando la relación entre la conexión de Weitzenböck, la conexión de Levi-Civita, y la contorsión $\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \Gamma^L_{\mu\nu} + K^{\rho}_{\mu\nu}$. Luego de un cálculo extenso, pero sencillo, se demuestra que [72]

$$\begin{aligned} \partial_\sigma (e e_a^\lambda S_\lambda^{\sigma\nu}) + e_a^\lambda \left(T^{\rho}_{\sigma\lambda} S_\rho^{\sigma\nu} - \frac{1}{4} \delta_\lambda^\nu T \right) &\equiv \\ e_a^\sigma \left(g_{\sigma\mu} R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \delta_\sigma^\nu R \right) &= -\frac{1}{2} \kappa e_a^\lambda \Theta_\lambda^\nu. \end{aligned} \quad (1.84)$$

Es importante remarcar que en esta identidad, tanto el lado izquierdo como el derecho están utilizando diferentes conexiones: Weitzenböck y Levi-Civita, respectivamente. Apreciamos, además, que en ambas teorías el tensor de energía-momento aparece como fuente de diferentes propiedades geométricas. En relatividad general, la materia es fuente de la curvatura, mientras que en gravedad teleparalela, la materia es fuente de una torsión particular, aquella obtenida a partir de la conexión de Weitzenböck. Es correcto inferir que esta equivalencia muestra que la curvatura y la torsión describen los mismos grados de libertad del campo gravitacional.

Los efectos gravitatorios de la gravedad teleparalela pueden entenderse reescribiendo la ecuación de la geodésica en este formalismo. La ecuación de movimiento para una partícula libremente gravitante se escribe como

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\rho} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} = -K^\mu_{\nu\rho} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau}. \quad (1.85)$$

El lado izquierdo es equivalente a la ecuación de la geodésica de la relatividad general, salvo que la conexión ahora es la de Weitzenböck, no la de Levi-Civita, al comparar con la ecuación (1.39). No obstante, en el lado derecho de (1.85) aparece la contorsión, la cual puede interpretarse como una fuerza que desvía a las partículas de su trayectoria autoparalela. Esta ecuación implica una diferencia puramente conceptual, puesto que la ecuación de la geodésica es equivalente en ambos marcos teóricos y da origen a trayectorias idénticas para partículas de igual masa.

En esta Tesis nos interesa estudiar teorías de gravedad modificada con estructura teleparalela, es decir, teorías definidas en un espacio-tiempo equipado con la conexión de Weitzenböck, pero cuyo Lagrangiano es una generalización del Lagrangiano de la gravedad teleparalela. Introduciremos este tipo de teorías, sus propiedades y sus ecuaciones de movimiento en el siguiente Capítulo.

Capítulo 2

Teorías $f(T)$: Gravedad teleparalela modificada

2.1. Motivación teórica

Se han propuesto muchos modelos de gravedad modificada para enfrentar los problemas de la relatividad general. Dentro de estos problemas, nos encontramos con la existencia de singularidades [73, 74], la expansión acelerada del universo [75], y el problema de la gravedad cuántica [74]. Estos problemas requieren proponer deformaciones de la relatividad general tanto a pequeñas como a grandes escalas; es lo que se conoce en la literatura como deformaciones ultravioletas e infrarrojas, respectivamente. Las deformaciones a escalas pequeñas, o altas energías, podrían ayudar a esclarecer si existe alguna teoría que describa una transición entre la relatividad general clásica y la gravedad cuántica.

Existen diversos esquemas a partir de los cuales se puede comenzar a construir modificaciones a la gravedad. Son muchas las suposiciones que son susceptibles de ser modificadas, pero la mayoría consisten en diferentes tipos de modificaciones a la acción de RG. Éstas pueden clasificarse someramente como:

- reemplazo de la variable dinámica fundamental, esto es, reemplazar la métrica por la tétrada, por dos métricas como en teorías de bigravedad [76], o añadir otras variables fundamentales como la conexión de spin en teorías de Einstein-Cartan [10, 11, 12, 13],
- dimensiones extra, las cuales pueden compactificarse mediante el procedimiento de Kaluza-Klein [8, 9], o pueden aparecer en la forma de dimensiones extendidas como en teorías de branas [77] y análogas,

- modificaciones al Lagrangiano de relatividad general: el escalar de Ricci R puede ser reemplazado por una función de éste, como en las teorías $f(R)$ [78, 79], puede agregarse una dependencia en la traza del tensor de energía-momento \mathcal{T} , o agregarse términos topológicos en la acción, y
- adición de nuevos campos escalares, vectoriales y/o tensoriales; en esta categoría encontramos teorías TeVeS [80], MOG [81], Brans-Dicke [82], galileones [83], etc.

Esta clasificación es imprecisa en el sentido que habrán modificaciones de más de un tipo: por ejemplo una teoría bimétrica puede considerarse tanto como un reemplazo del tensor métrico (por dos métricas), como la añadidura de un campo tensorial adicional.

Una de las modificaciones posibles, que estudiaremos a continuación, puede entenderse como la composición de dos variaciones diferentes a la relatividad general. Por un lado, tomaremos a la tétrada como la variable dinámica en vez de la métrica. Por otro lado, utilizaremos a la gravedad teleparalela como base para construir un tipo de teorías de gravedad más generales, conocidas como gravedades $f(T)$, de la misma forma como la gravedad $f(R)$ es una generalización del Lagrangiano de Einstein–Hilbert.

2.2. Teorías $f(T)$ de gravedad

De manera análoga a las gravedades $f(R)$, [78, 79], en las cuales el Lagrangiano de relatividad general es modificado por una función f arbitraria del escalar de curvatura R , las teorías $f(T)$ corresponden a una modificación del Lagrangiano del equivalente teleparalelo de la relatividad general. La modificación ocurre en términos de una función arbitraria f del invariante de Weitzenböck $T \equiv S_\rho{}^{\mu\nu} T^\rho{}_{\mu\nu}$ [20, 21], que define una acción de la siguiente forma

$$S[\mathbf{e}_a] = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \ e \ f(T) . \quad (2.1)$$

Considerando un término para un campo de materia minimalmente acoplado en la acción, las ecuaciones dinámicas se calculan variando con respecto a la tétrada, obteniéndose que

$$e^{-1} \partial_\mu (e \ e_a^\lambda S_\lambda{}^{\mu\nu} f'(T)) + e_a^\lambda T^\rho{}_{\mu\lambda} S_\rho{}^{\mu\nu} f'(T) - \frac{1}{4} e_a^\nu f(T) = -\frac{1}{2} \kappa e_a^\lambda \Theta_\lambda{}^\nu , \quad (2.2)$$

donde $\Theta_\lambda{}^\nu$ es el tensor de energía-momento. Vemos que tanto a nivel del Lagrangiano como de las ecuaciones de movimiento, la dinámica de la gravedad

teleparalela se recupera restringiendo la teoría al caso particular $f(T) = T$. Las ecuaciones dinámicas son de segundo orden, lo cual no es común en la mayoría de las teorías de gravedad modificada, las cuales poseen ecuaciones dinámicas con derivadas de órdenes mayores. Efectivamente, debido a que las derivadas en el Lagrangiano de la gravedad teleparalela son de primer orden en la tétrada, las ecuaciones de movimiento siempre serán de segundo orden sin importar la forma de la función f , lo cual es una propiedad deseable en cualquier teoría física.

2.3. Soluciones de vacío en $f(T)$

Las soluciones de vacío en relatividad general imponen que el tensor de Einstein se anule, por tanto, el tensor de Ricci y el escalar de curvatura R también se anulan. Sin embargo, en gravedad teleparalela una solución de vacío de las ecuaciones de movimiento no anula el escalar de torsión T , dado que existe un término de borde que diferencia ambos escalares. La búsqueda de soluciones de vacío para la gravedad $f(T)$ se ve facilitada por el siguiente resultado [32]: si una solución de vacío de la gravedad $f(T)$ tiene escalar de torsión nulo ($T = 0$), entonces dicha solución resolverá también las ecuaciones de la gravedad teleparalela sin modificar. A modo general, si reemplazamos $T = T_c$ en las ecuaciones de movimiento de la gravedad $f(T)$, entonces se cumple que $\partial_\mu T = 0$. Por tanto, podemos reescribir (2.2) como sigue

$$G_\mu^\nu - \frac{1}{2}\delta_\mu^\nu T_c + \frac{1}{2}\delta_\mu^\nu \frac{f(T_c)}{f'(T_c)} = \frac{\kappa}{f'(T_c)}\Theta_\mu^\nu, \quad (2.3)$$

donde se define el tensor G_μ^ν como

$$G_\mu^\nu \equiv -2e_a^\lambda (e_a^\lambda T_\rho^\sigma S_\rho^{\sigma\nu} + e^{-1}\partial_\sigma(ee_a^\lambda S_\lambda^{\sigma\nu})) + \frac{1}{2}\delta_\mu^\nu T. \quad (2.4)$$

La parte simétrica de esta expresión corresponde al tensor de Einstein con un índice covariante y otro contravariante ¹. Notablemente, las ecuaciones (2.3) corresponden a las ecuaciones de Einstein en ETRG, para un tensor de energía-momento simétrico, y con una constante de Newton y constante cosmológica redefinidas como

$$\tilde{G} = \frac{G}{f'(T_c)}, \quad \Lambda = \frac{1}{2} \left(T_c - \frac{f(T_c)}{f'(T_c)} \right). \quad (2.5)$$

Esto quiere decir que, si $f(T = 0) = 0$, entonces las soluciones de ETRG que tengan $T = 0$ seguirán siendo soluciones de las ecuaciones de movimiento de

¹Si bajamos un índice coordinado, esta expresión puede escribirse como $G_{(\mu\nu)} = \dots$.

la gravedad $f(T)$. En el caso de soluciones que no son de vacío, es preciso ajustar la constante de Newton y la constante cosmológica. Incluso si $T_c \neq 0$, se puede considerar a una solución de ETRG con $T = T_c$ como una solución de las ecuaciones de $f(T)$, ajustando de manera apropiada la constante de Newton y la constante cosmológica. Este teorema es una estrategia muy útil para encontrar soluciones en este tipo de teorías, puesto que encontrar una tétrada que posea ecuaciones de movimiento consistentes es una tarea ardua en esta teoría si la geometría en cuestión posee pocas simetrías. Este hecho se encuentra relacionado con el asunto de la pérdida de la invariancia local de Lorentz, que revisaremos a continuación.

2.4. Invariancia local de Lorentz y simetrías remanentes

La gravedad $f(T)$, como otras teorías de gravedad modificada, posee grados de libertad extra al ser comparada con la gravedad teleparalela (o la relatividad general). Dejando de lado el caso trivial $f(T) = T$, las ecuaciones dinámicas (2.2) son sensibles a transformaciones locales de Lorentz en la tétrada

$$e_{\mu}^{a'} = \Lambda_a^{a'} e_{\mu}^a. \quad (2.6)$$

Podemos apreciar la pérdida de la invariancia local de Lorentz a nivel del Lagrangiano, pues bajo una transformación local de Lorentz el Lagrangiano cambia de la siguiente forma

$$e f(T) \longrightarrow e f(T + 4\text{-divergencia}) . \quad (2.7)$$

En esta ecuación la cuadri-divergencia queda encapsulada dentro de la función f en lugar de generar un término de borde, provocando la pérdida de la invariancia local de Lorentz. Esta pérdida puede interpretarse como una determinación por parte de la teoría de un marco de referencia global delimitado por las curvas autoparalelas de la variedad, que resuelven las ecuaciones de movimiento de manera consistente. En otras palabras, las ecuaciones (2.2) determinan no sólo la métrica, sino otras características de la tétrada que le otorgan una paralelización absoluta al espacio-tiempo. Las tétradas que están conectadas por transformaciones locales de Lorentz otorgan la misma métrica pero son diferentes con respecto al marco paralelo adecuado. Debido a esta característica esencial de las teorías $f(T)$, encontrar el *ansatz* para una tétrada adecuada a partir de las simetrías de la métrica es en general un procedimiento dificultoso. Las simetrías ayudan a encontrar las coordenadas

adecuadas para escribir la métrica en una forma simple, pero no dicen mucho respecto a cómo escoger la tétrada [66, 36, 29, 67, 68].

Como vimos en el Capítulo 1, es posible aislar el término de borde obtenido luego de variar la acción de la gravedad teleparalela con respecto a una transformación local de Lorentz infinitesimal. Si este término de borde se anula, podemos obtener la condición necesaria para que la gravedad $f(T)$ sea invariante local de Lorentz. Esta condición se expresa como

$$d(\epsilon_{abcd}\mathbf{e}^a \wedge \mathbf{e}^b \wedge \eta^{de}\Lambda^c_{f'}d\Lambda^{f'}_e) = 0. \quad (2.8)$$

Esta ecuación se satisface de manera trivial para transformaciones globales de Lorentz, es decir aquellas que cumplen $d\Lambda^{f'}_e = 0$. En [49] se ha propuesto que existe un sub-conjunto de transformaciones locales de Lorentz que dejan invariante la teoría, llamadas conjunto de *simetrías remanentes*, y denotadas por $\mathcal{A}(\mathbf{e}^a)$. Este conjunto de transformaciones existe siempre para un espacio-tiempo determinado por una tétrada \mathbf{e}^a , por tanto está definido *on-shell*. Este conjunto no cumplirá, en general, las propiedades de un grupo, pero si se encuentra un elemento dentro del conjunto, entonces su inversa también lo será. Esto en virtud de que la relación $\Lambda^c_{f'}\Lambda^{f'}_e = \delta^c_e$ implica que $\Lambda^c_{f'}d\Lambda^{f'}_e = -\Lambda^{f'}_e d\Lambda^c_{f'}$. Para saber bajo qué circunstancias este grupo se convierte en un grupo de Lie ², se escribe una transformación de Lorentz como una combinación lineal de los generadores σ^{ef} como

$$\Lambda^a_{b'} = \exp\left(\frac{1}{2}\sigma^{ef}(x)(M_{ef})^a_{b'}\right) \approx \delta^a_{b'} + \frac{1}{2}\sigma^{ef}(x)(M_{ef})^a_{b'} + O(\sigma^2), \quad (2.9)$$

donde, en la última expresión, estamos tomando una transformación infinitesimal a primer orden en los parámetros σ . En este caso, la expansión de las matrices Λ en (2.8) queda como $\Lambda^c_{f'}d\Lambda^{f'}_e \simeq \eta_{ge}d\sigma^{gc}$. Luego, obtenemos que la condición (2.8) es

$$d(\epsilon_{abcd}\mathbf{e}^a \wedge \mathbf{e}^b \wedge d\sigma^{cd}) = \epsilon_{abcd}d(\mathbf{e}^a \wedge \mathbf{e}^b) \wedge d\sigma^{cd} = 0. \quad (2.10)$$

Esta expresión es lineal en σ^{cd} , lo cual significa que una composición de dos transformaciones infinitesimales locales que pertenezcan a $\mathcal{A}(\mathbf{e}^a)$ satisfacen la ecuación anterior, a primer orden. Por lo tanto, las transformaciones infinitesimales de Lorentz que pertenecen a $\mathcal{A}(\mathbf{e}^a)$ forman un grupo de Lie.

Es posible realizar una clasificación de las soluciones a las ecuaciones de movimiento (2.2) de acuerdo al número n de 2-formas cerradas independientes que participan en la simetría local remanente. Es decir, una solución

²Es decir, que la composición de dos elementos del grupo pertenezca también al grupo.

\mathbf{e}^a de las ecuaciones de movimiento es llamada una n -CAF (*closed area frame*, por sus siglas en inglés) si es que satisface que la derivada exterior de la 2-forma $\mathbf{e}^a \wedge \mathbf{e}^b$ se anula, es decir $d(\mathbf{e}^a \wedge \mathbf{e}^b) = 0$, para n de los pares $a - b$, donde n oscila entre 0 y 6 en dimensión 4. Para una 6-CAF, todos los parámetros infinitesimales σ^{ab} permanecen libres. Un claro ejemplo de una 6-CAF es el espacio-tiempo de Minkowski, el cual puede ser representado por un marco Euclidiano $\mathbf{e}^a = \delta_b^a dx^b$. Ya que $T^a = d\mathbf{e}^a = 0$, el escalar de torsión es idénticamente nulo, y por tanto es una solución de vacío de las ecuaciones de $f(T)$ para cualquier función f en $T = 0$.

Volveremos a esta clasificación en el Capítulo 6, donde encontraremos soluciones de agujero negro en la gravedad $f(T)$, y tendremos interés en determinar si dos soluciones que describen la misma geometría están o no conectadas por un elemento del conjunto de simetrías remanentes. Algunos ejemplos de esta clasificación en el ámbito de la cosmología pueden encontrarse en [49].

2.5. Transformaciones conformes

Conviene mencionar brevemente el comportamiento de la acción de la gravedad $f(T)$ bajo una transformación conforme. Conocer el comportamiento de las teorías de gravedad modificada bajo este tipo de transformaciones es de interés general, ya que ayudaría a develar la naturaleza de los grados de libertad. A modo de ejemplo, es sabido que la gravedad $f(R)$ posee un único grado de libertad adicional, cuyo significado puede ser entendido a través de una transformación conforme. Es posible parafrasear esta teoría como una teoría escalar-tensorial con la siguiente acción

$$S[g_{\mu\nu}, \phi] = -\frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} [\phi R - V(\phi)]. \quad (2.11)$$

La variación con respecto a ϕ otorga $R = V'(\phi)$. El Lagrangiano contenido en la acción anterior es la transformada de Legendre de la función $V(\phi)$, por tanto podemos llamarlo $f(R) \equiv \phi R - V(\phi)$, mostrando que la teoría $f(R)$ en el formalismo métrico es dinámicamente equivalente a la acción (2.11). Es importante notar que esta acción es un caso particular de una acción de Brans-Dicke

$$S_{BD}[g_{\mu\nu}, \phi] = -\frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} \left(\phi R - \frac{\omega(\phi)}{\phi} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + V(\phi) \right), \quad (2.12)$$

con parámetro $\omega = 0$. A partir de la acción (2.11) es posible obtener una acción donde la teoría se escriba como el Lagrangiano de la relatividad general

más un Lagrangiano para un campo escalar. Esto se conoce como el *marco de Einstein*, y se obtiene por medio de las siguientes redefiniciones

$$\begin{aligned}\phi &\longrightarrow \tilde{\phi} = \sqrt{\frac{3}{2\kappa}} \ln(\phi), \\ g_{\mu\nu} &\longrightarrow \tilde{g}_{\mu\nu} = \phi g_{\mu\nu}, \quad \sqrt{-g} = \phi^{-2} \sqrt{-\tilde{g}},\end{aligned}\tag{2.13}$$

donde $\tilde{g}_{\mu\nu}$ se encuentra relacionado con $g_{\mu\nu}$ por medio de una transformación conforme a través del campo escalar ϕ . Realizando la transformación conforme en el escalar de Ricci R , puede mostrarse que la acción (2.11) es

$$S'[\tilde{g}_{\mu\nu}, \tilde{\phi}] = - \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[\frac{\tilde{R}}{2\kappa} - \frac{1}{2} \tilde{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \tilde{\phi} \partial_\nu \tilde{\phi} + U(\tilde{\phi}) \right],\tag{2.14}$$

donde el potencial $U(\tilde{\phi})$ está dado por

$$U(\tilde{\phi}) = - \frac{V(\phi)}{2\kappa\phi^2} = \frac{f(R) - Rf'(R)}{2\kappa f'(R)^2}.\tag{2.15}$$

Por medio de una transformación conforme hemos obtenido la acción (2.14), que describe un campo gravitacional $\tilde{g}_{\mu\nu}$ y un campo escalar $\tilde{\phi}$ minimalmente acoplado, la cual tiene dos grados de libertad asociados a la métrica y un grado de libertad representado por un campo escalar masivo $\tilde{\phi}$.

La pregunta natural que surge es si acaso para la gravedad $f(T)$ esto también es cierto. Es decir, si se cumple que la acción

$$S[e_\mu^a, \phi] = - \frac{1}{2\kappa} \int d^4x e [\phi T - V(\phi)]\tag{2.16}$$

puede ser reescrita como la acción de gravedad teleparalela más un campo escalar acoplado minimalmente. Para verificar la veracidad de esta hipótesis, debemos aplicar una transformación conforme en la tétrada, que es la variable fundamental de la teoría. Bajo una transformación conforme, la tétrada transforma como $\hat{e}_\mu^a = \Omega(x)e_\mu^a$, su inversa como $\hat{e}_a^\mu = \Omega^{-1}(x)e_a^\mu$, y el determinante de la tétrada como $\hat{e} = \Omega^4 e$. Por lo tanto, la torsión y el superpotencial transforman como

$$\begin{aligned}\hat{T}^\rho_{\mu\nu} &= T^\rho_{\mu\nu} + \Omega^{-1}[\delta_\nu^\rho \partial_\mu \Omega - \delta_\mu^\rho \partial_\nu \Omega], \\ \hat{S}^{\mu\nu}_\rho &= \Omega^{-2} S^{\mu\nu}_\rho + \Omega^{-3}(\delta_\rho^\mu \partial^\nu \Omega - \delta_\rho^\nu \partial^\mu \Omega).\end{aligned}\tag{2.17}$$

Usando estas expresiones, podemos mostrar que el escalar de torsión transformado \hat{T} y el escalar sin modificar T están relacionadas por la siguiente expresión [29]

$$T = \Omega^2 \hat{T} - 4\Omega^{-1} \partial^\mu \Omega \hat{T}^\rho_{\rho\mu} + 6\Omega^{-2} \partial_\mu \Omega \partial^\mu \Omega.\tag{2.18}$$

Notar que, ya que las coordenadas x^μ no se ven afectadas por la transformación conforme, las derivadas parciales permanecen inalteradas, es decir $\partial_\mu = \hat{\partial}_\mu$. Sin embargo, la derivada covariante depende de la conexión, la cual cambia bajo la transformación conforme Ω , por tanto no se cumplirá la igualdad $\hat{\nabla}_\mu = \nabla_\mu$, excepto para una función escalar en la cual $\nabla_\mu = \partial_\mu$. Dada la transformación conforme, podemos reescribir la acción para $f(T)$ (2.16) como

$$S_{EF} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \hat{E} \left[\hat{T} + 2F^{-3} \hat{\partial}^\mu F \hat{T}_{\rho\mu}^\rho - \frac{1}{2} \hat{g}^{\mu\nu} \hat{\nabla}_\mu \psi \hat{\nabla}_\nu \psi - U(\psi) \right] + S_m [F(\varphi)^{-1/2} \hat{e}_\mu^a], \quad (2.19)$$

donde se ha definido $F(\varphi) = \Omega^2$, $U(\psi) = 2V(\varphi)/F^2(\varphi)$, y

$$\left(\frac{d\psi}{d\varphi} \right)^2 = \frac{2\omega}{F} - 3 \frac{(F'(\varphi))^2}{F^4}. \quad (2.20)$$

La acción (2.19) es el equivalente del marco de Einstein para la gravedad teleparalela. Vemos que posee el escalar de torsión transformado y un sector dinámico para un campo escalar. Sin embargo, hay un término de acoplamiento de tipo escalar-tensorial dado por $2F^{-3} \hat{\partial}^\mu F \hat{T}_{\rho\mu}^\rho$ que no puede ser removido por transformaciones conformes. Este resultado fue encontrado por primera vez en [29], y muestra que la teoría $f(T)$ no posee un marco de Einstein que la describa, en la misma forma que la gravedad $f(R)$ lo posee. Cabe preguntarse por qué existe el marco de Einstein en una teoría y no en la otra, pero la equivalencia entre las teorías $f(R)$ y las $f(T)$ dista de ser completa, puesto que en estas últimas el objeto dinámico es la tetrada, y la violación local de Lorentz podría provocar un comportamiento diferente al de las $f(R)$ bajo transformaciones conformes. Hasta el momento, este es un tema abierto, aunque luego en el Capítulo 5 retomaremos este problema desde una arista diferente.

Capítulo 3

Sistemas Hamiltonianos con vínculos

La mayoría de las teorías que describen fenómenos físicos se caracterizan por poseer vínculos, es decir, son sistemas donde no todas las variables dinámicas son independientes las unas de las otras. Podemos pensar que las variables dinámicas se especifican con respecto a un marco de referencia cuya elección es arbitraria en cada instante de tiempo. Las variables que tienen importancia física serán, entonces, aquellas que son independientes de la elección del marco de referencia local. Una transformación de las variables inducida por un cambio en el marco de referencia arbitrario es llamada una transformación de *gauge* [84].

Hoy en día las teorías de gauge son de suma importancia en física, pues describen exitosamente la dinámica de las partículas elementales ¹. Por ejemplo, la electrodinámica cuántica es una teoría de gauge abeliana del grupo de simetría $U(1)$, y su campo de gauge es el cuadri-potencial electromagnético, siendo el fotón el bosón de gauge asociado. Esta teoría se ve enmarcada en el resto de las interacciones a microescala por medio del *modelo estándar de física de partículas*, el cual es una teoría de gauge no abeliana ² del grupo de simetría $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$, que posee doce bosones de gauge: el fotón, tres bosones de la interacción nuclear débil y ocho gluones.

En virtud del éxito de la descripción del modelo estándar de física de partículas en término de teorías de gauge, es razonable preguntarse si la interacción gravitacional también puede ser considerada dentro de este esquema. Debido a que la relatividad general es una teoría con invariancia ante

¹A pesar de esto, la teoría tiene cuestiones sin resolver, como por ejemplo las oscilaciones de neutrinos y sus masas, y los dilemas de materia y energía oscura, entre otras.

²Se dice que un grupo de Lie es no abeliano cuando sus elementos no satisfacen una regla de conmutación.

transformaciones generales de coordenadas, podría pensarse que la gravedad posee una invariancia de gauge producto de esta simetría local. Empero, la analogía no es completa, puesto que las transformaciones de coordenadas cambian tanto el argumento como las componentes del campo, mientras que una transformación de gauge usual deja el argumento inalterado. Aunque, adoptando una representación de la teoría en el espacio tangente, es posible encontrar una combinación correcta de los campos tal que un cambio de marco no cambie las coordenadas. No obstante, si queremos probar que la acción para la gravedad es invariante bajo el grupo de traslaciones locales (el análogo en el espacio tangente de un cambio local en las coordenadas del espacio-tiempo), la acción de la gravedad cambia por un término que se anula solamente cuando las ecuaciones de movimiento se satisfacen. Esto podría ser considerado, a lo más, una simetría *on-shell* [85]. El tema de si la gravedad es o no una teoría de gauge se encuentra lleno de sutilezas, y diferentes autores tienen opiniones divididas al respecto; mas para comprender estas cuestiones en profundidad, se sugiere estudiar la gravedad gaugeada desde la perspectiva de la teoría del fibrado tangente, lo cual excede las pretensiones de esta Tesis [71, 86].

Volviendo a términos más generales, en una teoría de gauge no todas las variables dinámicas quedan determinadas por las ecuaciones de movimiento, dadas ciertas condiciones iniciales. Esto pues siempre podemos cambiar el marco de referencia en el futuro, mientras se mantienen las condiciones iniciales fijas. Una evolución temporal diferente se derivará, por tanto, de las mismas condiciones iniciales. Entonces, es una propiedad clave de las teorías de gauge que la solución general de las ecuaciones de movimiento contenga funciones arbitrarias del tiempo. Es posible realizar un tratamiento completo de una teoría de gauge a través de la formulación Hamiltoniana, para lo cual es preciso definir el Lagrangiano de la teoría. Si bien es posible realizar el estudio de la estructura de vínculos en la formulación Lagrangiana, si se desea desarrollar un procedimiento válido de cuantificación canónica, es de suma importancia poseer una formulación Hamiltoniana consistente. Por otro lado, el procedimiento Hamiltoniano determina los grados de libertad independientes de la teoría, exhibiendo su consistencia interna y además estableciendo el número mínimo de condiciones iniciales independientes para resolver el problema de Cauchy.

Como establecimos anteriormente, la presencia de funciones arbitrarias del tiempo en la solución general de las ecuaciones de movimiento implica que las variables canónicas no son todas independientes. En cambio, hay relaciones entre ellas que llamamos vínculos. Entonces, un sistema de gauge es siempre un sistema Hamiltoniano con vínculos. Sin embargo, lo contrario no es cierto. No todos los vínculos concebibles de un sistema Hamiltoniano emer-

gen de una invariancia de gauge. En las próximas secciones comenzaremos con la formulación Lagrangiana de una teoría física para luego describir el procedimiento Hamiltoniano, y examinaremos el algoritmo de Dirac-Bergmann con el propósito de identificar los grados de libertad espurios de una teoría física con vínculos.

3.1. Formulación Lagrangiana

Comenzaremos a discutir la dinámica de los sistemas de gauge a partir del formalismo Lagrangiano que define la teoría física. En todo este Capítulo seguiremos principalmente las referencias [87, 84, 88]. Las ecuaciones de movimiento del sistema se obtienen haciendo estacionaria la acción S que define su dinámica, escrita en términos del Lagrangiano $L(q^k, \dot{q}^k)$ como

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q^k, \dot{q}^k) dt, \quad k = 1, \dots, N, \quad (3.1)$$

bajo variaciones $\delta q^k(t)$ de las variables dinámicas q^k tal que se anulan en los puntos extremos t_1 y t_2 . Con este procedimiento encontramos las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^k} = 0. \quad (3.2)$$

Si expandimos la derivada temporal, obtenemos con mayor detalle que

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^k \partial \dot{q}^j} \right) \ddot{q}^j + \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^k \partial q^j} \right) \dot{q}^j - \frac{\partial L}{\partial q^k} &= 0, \\ \longrightarrow V_k - W_{kj} \ddot{q}^j &= 0, \end{aligned} \quad (3.3)$$

donde hemos definido

$$V_k := \frac{\partial L}{\partial q^k} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^k \partial q^j} \dot{q}^j, \quad W_{kj} := \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^k \partial \dot{q}^j}. \quad (3.4)$$

La matriz W_{kj} es llamada a veces Hessiano, y tiene un rol crucial en el formalismo. La definición de los momentos canónicos se obtiene en virtud de la ecuación

$$p_k(q, \dot{q}) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}, \quad (3.5)$$

en la cual vemos que sólo en el caso regular donde $\det(W_{kj}) \neq 0$, todos los $p_k(q, \dot{q})$ pueden ser despejados en función de todas las velocidades $\dot{q}^j(q, p)$, al menos localmente.

A partir de (3.3) vemos que si $\det(W_{kj}) \neq 0$, podemos despejar \ddot{q}^k en función de \dot{q}^k y q^k , y el sistema se encontrará totalmente determinado. En caso contrario, el sistema posee arbitrariedad en su descripción dinámica. Dicho de otra forma, la matriz W_{kj} tendrá un rango $R < N$, lo cual dará origen a $P = N - R$ autovectores nulos ξ_ρ^k tales que

$$\xi_\rho^k W_{kj} = 0, \quad \rho = 1, \dots, P. \quad (3.6)$$

El rango del Hessiano es independiente de qué coordenadas generalizadas se escogen para el Lagrangiano. Los autovectores nulos serán de utilidad para identificar aquellas ecuaciones en (3.3) que no tienen términos de segundo orden \ddot{q}^k , pues si contraemos estos vectores con \ddot{q}^j , obtenemos P ecuaciones

$$\chi_\rho = \xi_\rho^k V_k(q, \dot{q}) = 0, \quad (3.7)$$

que en la formulación Lagrangiana pueden entenderse como *vínculos Lagrangianos primarios*, mientras que en la formulación Hamiltoniana correspondrán, como veremos más adelante, a vínculos primarios genuinos.

3.2. Vínculos primarios

Hemos visto que si el rango de W_{kj} es $R = N - P$, podremos *localmente* resolver R de las velocidades en función de las posiciones, momentos y las velocidades restantes en la Ec. (3.5). Esto es debido a la condición de no invertibilidad de esta matriz, es decir $\det(W_{kj}) = 0$. En otras palabras, no es posible despejar todos los \dot{q}^k en función de los (q^k, p_k) , pues la transformación no es invertible. En este caso particular, los momentos p_k no son todos linealmente independientes, sino que estarán relacionados con los q^k por medio de una relación del tipo

$$\phi_\rho(q, p) = 0, \quad \rho = 1, \dots, P. \quad (3.8)$$

Estos son llamados vínculos primarios, y aparecen de manera trivial a partir de la definición de los momentos canónicos, sin haber usado aún las ecuaciones de movimiento.

Por simplicidad, se asume que el rango de la matriz W_{kj} es constante a través de todo el espacio de fase Γ , y que por tanto las ecuaciones (3.8) definen una subvariedad $\Gamma_P \subset \Gamma$ inmersa en el espacio de fase. Esta subvariedad de dimensión P , es conocida como la *superficie de vínculos primarios*.

3.2.1. Equivalencias débiles y fuertes

La interpretación del resultado de un corchete de Poisson sobre Γ_P debe ser tratada con cautela, debido a la presencia de vínculos primarios que restringen en todo punto los momentos y posiciones canónicas. Es por ésto que Dirac introdujo los conceptos de equivalencias “débiles” y “fuertes”, cuya definición es como sigue. Si una función $F(q, p)$ definida en una vecindad de Γ_P es idénticamente cero cuando se restringe a la hipersuperficie Γ_P , es llamada débilmente cero, y denotada por $F \approx 0$,

$$F(q, p)|_{\Gamma_P} = 0 \quad \longleftrightarrow \quad F \approx 0. \quad (3.9)$$

Si el gradiente de F también es idénticamente cero en Γ_P , es decir, si se cumple

$$\left(\frac{\partial F}{\partial q^i}, \frac{\partial F}{\partial p_k} \right) |_{\Gamma_P} = 0, \quad (3.10)$$

entonces se dice que F es fuertemente cero, denotado por $F \simeq 0$.

Es posible mostrar que si F es débilmente cero, entonces es fuertemente equivalente a una combinación lineal de los vínculos que definen la superficie de vínculos Γ_P , es decir

$$F \approx 0 \quad \longleftrightarrow \quad F - f^\rho \phi_\rho \simeq 0. \quad (3.11)$$

En efecto, el subespacio Γ_P puede definirse a sí mismo por medio de las equivalencias débiles

$$\phi_\rho \approx 0, \quad (3.12)$$

debido a que los vínculos no se anulan fuertemente en éste.

3.3. Hamiltoniano canónico y total

Ya poseemos todas las herramientas para definir el Hamiltoniano canónico H_c , dada la definición de los momentos p_k en (3.5), se tendrá que

$$H_c = \dot{q}^k p_k - L(q, \dot{q}), \quad (3.13)$$

el cual es una función de q^k y \dot{q}^k , y depende exclusivamente de las variables q^k y p_k . Este hecho puede apreciarse realizando una variación en p y q , obteniéndose

$$\delta H_c = (\delta p_i) \dot{q}^i - \frac{\partial L}{\partial q^i} \delta q^i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta \dot{q}^i = \dot{q}^i \delta p_i - \frac{\partial L}{\partial q^i} \delta q^i. \quad (3.14)$$

En esta expresión ya se ha utilizado la definición de momento, y revela que H_c en efecto depende únicamente de q^k 's y p_k 's.

El Hamiltoniano canónico está determinado sólo en la subvariedad $\phi_\rho \approx 0$, $\rho = 1, \dots, P$, por lo tanto las predicciones de la teoría deben permanecer invariantes bajo el cambio

$$H_c \longrightarrow H_c + c^\rho(q, p)\phi_\rho(q, p), \quad (3.15)$$

con $c^\rho(q, p)$ funciones arbitrarias.

El principio de acción estacionaria en función del Hamiltoniano se escribe como

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (p_k \dot{q}^k - H) dt = 0, \quad (3.16)$$

con q y p sujetos a las condiciones de borde $\delta q^k(t_1) = \delta q^k(t_2) = 0$ y $\phi_\rho(q, p) \approx 0$. Los vínculos primarios pueden garantizarse desde el principio introduciendo multiplicadores de Lagrange $u^\rho(t)$ los cuales se varían de manera independiente a las variables canónicas p y q . Con éstos, el principio de acción se escribe como

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (p_k \dot{q}^k - H - u^\rho(t)\phi_\rho(q, p)) dt, \quad (3.17)$$

sujeto a las condiciones de borde $\delta q^k(t_1) = \delta q^k(t_2) = 0$. Por tanto, es posible remover los vínculos primarios incluyéndolos en el Hamiltoniano por medio de los multiplicadores de Lagrange.

Este Hamiltoniano construido en términos de los ϕ_ρ , es llamado **Hamiltoniano primario**, y generará la evolución temporal del sistema, como se deduce del principio variacional. Podemos resumir su construcción por medio de la Figura 3.1.

3.3.1. Corchete de Poisson

Calcularemos la ecuación de movimiento de una variable dinámica genérica $F(q, p)$, a través de su variación diferencial

$$dF(q, p) = \frac{\partial F}{\partial q^k} dq^k + \frac{\partial F}{\partial p_k} dp_k \longrightarrow \frac{dF(q, p)}{dt} = \frac{\partial F}{\partial q^k} \frac{dq^k}{dt} + \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{dp_k}{dt}. \quad (3.18)$$

De la variación de la acción obtenemos las siguientes ecuaciones dinámicas

$$\dot{q}^k = \frac{\partial H}{\partial p_k} + u^\rho \frac{\partial \phi_\rho}{\partial p_k}, \quad -\dot{p}_k = \frac{\partial H}{\partial q^k} + u^\rho \frac{\partial \phi_\rho}{\partial q^k}. \quad (3.19)$$

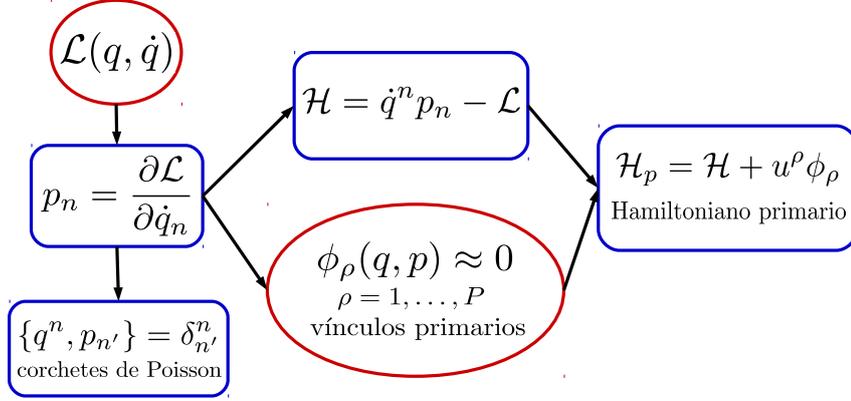


Figura 3.1: Construcción del Hamiltoniano primario a partir de la formulación Lagrangiana.

Poniendo esto de vuelta en (3.18), obtenemos que

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial q^k} \left(\frac{\partial H}{\partial p_k} + u^\rho \frac{\partial \phi_\rho}{\partial p_k} \right) - \frac{\partial F}{\partial p_k} \left(\frac{\partial H}{\partial q^k} + u^\rho \frac{\partial \phi_\rho}{\partial q^k} \right). \quad (3.20)$$

Reescribimos esta expresión como

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial q^k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q^k} + u^\rho \left(\frac{\partial \phi_\rho}{\partial p_k} \frac{\partial F}{\partial q^k} - \frac{\partial \phi_\rho}{\partial q^k} \frac{\partial F}{\partial p_k} \right). \quad (3.21)$$

Esto puede escribirse de manera más abreviada haciendo uso de la definición del paréntesis o corchete de Poisson $\{ , \}$, definidos como

$$\{F, G\} = \frac{\partial F}{\partial q^k} \frac{\partial G}{\partial p_k} - \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{\partial G}{\partial q^k}, \quad (3.22)$$

tal que la ecuación (3.21) se compacta como

$$\dot{F} = \{F, H\} + u^\rho \{F, \phi_\rho\}, \quad \phi_\rho = 0. \quad (3.23)$$

Las ecuaciones de movimiento que se obtienen son equivalentes a aquellas obtenidas a partir de la acción original sin los u^ρ . Este formalismo es claramente invariante ante cambios del Hamiltoniano de la forma

$$H \longrightarrow H + c^\rho \phi_\rho, \quad (3.24)$$

ya que esto sólo redefine las variables u^ρ . Si los u^ρ fueran arbitrarios, entonces la evolución de F también lo sería, dada su expresión en la ecuación (3.23). Sin embargo, los u^ρ están sujetos a la restricción de que los vínculos primarios se preserven en el tiempo. Esta condición la escribimos como $\dot{\phi}_\rho(q, p) \approx 0$, $\rho = 1, \dots, P$.

3.3.2. Consistencia de los vínculos

Estamos en condiciones de establecer la evolución de los vínculos primarios ϕ_ρ en el tiempo, la cual será, dadas las definiciones anteriores,

$$\dot{\phi}_\rho = \{\phi_\rho, H\} + u^\sigma \{\phi_\rho, \phi_\sigma\}. \quad (3.25)$$

Exigimos que esta expresión sea cero, lo cual impone la siguiente condición sobre los ϕ_ρ y los u^ρ

$$\{\phi_\rho, H\} + u^\sigma \{\phi_\rho, \phi_\sigma\} \stackrel{!}{\approx} 0. \quad (3.26)$$

En esta expresión nos convendrá definir $h_\rho = \{\phi_\rho, H\}$ y $C_{\rho\sigma} = \{\phi_\rho, \phi_\sigma\}$. Las soluciones para u^σ en (3.26) pueden ser separadas en dos pares de subgrupos: si h_ρ se anula débilmente (II) o no (I), y si $\det(C_{\rho\sigma})$ se anula débilmente (B) o no (A). De esta forma separamos cuatro subcasos

- **I.A)** (3.26) es un sistema de ecuaciones lineales inhomogéneo para u^σ , cuya solución es

$$u^\sigma = -(C_{\rho\sigma})^{-1} h_\rho. \quad (3.27)$$

Si los u^σ son fijados (débilmente), las ecuaciones de movimiento para cualquier función $F(q, p)$ del espacio de fases se convierte en

$$\dot{F} \approx \{F, H_c\} - \{F, \phi_\rho\} (C_{\rho\sigma})^{-1} \{\phi_\sigma, H_c\}. \quad (3.28)$$

Estas ecuaciones podrán ser resueltas de manera no ambigua luego de especificar condiciones iniciales para las coordenadas y los momentos, sujetos a las restricciones $\phi_\rho(q, p) \approx 0$.

- **I.B)** $h_\rho \not\approx 0$, $\det(C_{\rho\sigma}) \approx 0$. Para que el sistema de ecuaciones para u^σ tenga soluciones, las componentes de h_ρ deben cumplir ciertas relaciones. Si el rango de la matriz $C_{\rho\sigma}$ es M , y ya que $C_{\rho\sigma}$ es una matriz de $P \times P$, esto implica la existencia de $P - M$ autovectores nulos linealmente independientes $\omega_\alpha^\rho C_{\rho\sigma} \approx 0$. Entonces en (3.26) resulta

$$\omega_\alpha^\rho h_\rho \approx 0. \quad (3.29)$$

Estas ecuaciones o se satisfacen de manera trivial o dan origen a un número S' de nuevos vínculos

$$\phi_{\bar{\rho}} \approx 0, \quad \bar{\rho} = P + 1, \dots, P + S', \quad (3.30)$$

que son llamados vínculos secundarios, y son independientes de los vínculos primarios ϕ_ρ .

- **II.A)** $h_\rho \approx 0$ y $\det(C_{\rho\sigma}) \not\approx 0$. En este caso existe una solución trivial $u^\sigma \approx 0$, es decir $H_p = H_c$. Si $h_\rho \approx 0$ debido a que $H_c \approx 0$, sería una situación difícil de interpretar, pues un Hamiltoniano nulo no permitiría ninguna dinámica desde el comienzo. Para evitar esta situación, es que se impone $\det(C_{\rho\sigma}) \approx 0$.
- **II.B)** $h_\rho \approx 0$ y $\det(C_{\rho\sigma}) \approx 0$. En este caso existe un sistema homogéneo de ecuaciones para los u^σ , que otorga soluciones no triviales. Ya que $C_{\rho\sigma}$ tiene rango M , entonces habrán $N - R - M$ multiplicadores que estarán débilmente determinados.

De todos estos escenarios posibles, concluimos que hay algunos casos en los cuales emergerán nuevos vínculos: ($\{\phi_\sigma, H_c\} \not\approx 0, \det(C_{\rho\sigma}) \approx 0$) y ($H_c = 0, \det(C_{\rho\sigma}) \not\approx 0$). En estos escenarios se dice que estamos en presencia de *vínculos secundarios*. A diferencia de los vínculos primarios, no son consecuencia de la definición de los momentos, sino que son derivados a partir de las ecuaciones de movimiento.

Está claro que este procedimiento debe iterarse con los vínculos secundarios, es decir, imponer que sean preservados en el tiempo. Esto podría dar origen a nuevos vínculos secundarios (llamados a veces vínculos terciarios), los cuales repiten el procedimiento.

El algoritmo termina cuando la siguiente situación ocurre: existe una hipersuperficie Γ_C en el espacio de fase de dimensión $2N$, definida por

$$\begin{aligned} \phi_\rho &\approx 0, & (\rho = 1, \dots, P) \\ \phi_{\bar{\rho}} &\approx 0, & (\bar{\rho} = P + 1, \dots, P + S). \end{aligned} \quad (3.31)$$

El primer conjunto $\{\phi_\rho\}$ contiene todos los P vínculos primarios, mientras que el otro conjunto $\{\phi_{\bar{\rho}}\}$ contiene los S vínculos secundarios, terciarios, etc. Será conveniente usar una notación en común para todos los vínculos, denotándolos por $\phi_{\hat{\rho}}$, con $\hat{\rho} = 1, \dots, P + S$. Con ésto, para cada autovector nulo $\omega_\alpha^{\hat{\rho}}$ de la matriz

$$C_{\hat{\rho}\rho} = \{\phi_{\hat{\rho}}, \phi_\rho\}, \quad (3.32)$$

se cumplen las condiciones

$$\omega_\alpha^{\hat{\rho}} \{\phi_{\hat{\rho}}, H_C\} \approx |_{\Gamma_C} 0. \quad (3.33)$$

Para los multiplicadores de Lagrange se cumplirán las siguientes ecuaciones

$$\{\phi_{\hat{\rho}}, H_C\} + u^\rho \{\phi_{\hat{\rho}}, \phi_\rho\} \approx |_{\Gamma_C} 0. \quad (3.34)$$

Notar que la última igualdad débil es con respecto a la hipersuperficie de vínculos final Γ_C .

3.4. Vínculos de primera y segunda clase

La búsqueda de los multiplicadores u^ρ en (3.34) nos lleva a la definición de vínculos de primera y segunda clase. Algunas de estas ecuaciones se cumplirán de manera idéntica, mientras que otras representarán verdaderas condiciones sobre los u^ρ . El caso en el cual nos encontremos dependerá del rango de la matriz $C_{\rho\sigma}$ definida en (3.32). Si su rango es P , entonces todos los multiplicadores quedarán fijados. Si su rango es $K < P$, entonces habrá $P - K$ soluciones a la ecuación

$$C_{\hat{\rho}\rho}V_\alpha^\rho = \{\phi_{\hat{\rho}}, \phi_\rho\}V_\alpha^\rho \approx 0, \quad \alpha = 1, \dots, P - K. \quad (3.35)$$

La solución más general al conjunto de ecuaciones (3.34) será

$$w^\rho = U^\rho + v^\alpha V_\alpha^\rho, \quad (3.36)$$

donde U^ρ será una solución particular y los v^α serán coeficientes arbitrarios que multiplican a las soluciones del sistema homogéneo (3.35). De modo que hay $P - K$ multiplicadores que no quedan determinados.

Se dice que una función del espacio de fase $\mathcal{F}(q, p)$ es de primera clase (PC), si tiene corchetes de Poisson débilmente cero con el resto de los vínculos de la teoría, es decir

$$\{\mathcal{F}(q, p), \phi_{\hat{\rho}}\} \approx 0. \quad (3.37)$$

Si una función del espacio de fase no es de primera clase, entonces es de segunda clase (SC). Dadas las definiciones de igualdades débil y fuerte, una función de primera clase satisface la siguiente igualdad fuerte

$$\{\mathcal{F}, \phi_{\hat{\rho}}\} \simeq f_{\hat{\rho}}^{\hat{\sigma}} \phi_{\hat{\sigma}}. \quad (3.38)$$

De esto se concluye la propiedad de que los vínculos de primera clase son preservados bajo la operación del corchete de Poisson. En otras palabras, el corchete de Poisson de dos funciones de primera clase es de primera clase. Esto se demuestra de la siguiente forma. Si \mathcal{F} y \mathcal{G} son dos funciones de primera clase, entonces ya que el corchete de Poisson sigue la identidad de Jacobi, se tiene que

$$\begin{aligned} \{\{\mathcal{F}, \mathcal{G}\}, \phi_{\hat{\rho}}\} &= \{\mathcal{F}, \{\mathcal{G}, \phi_{\hat{\rho}}\}\} - \{\mathcal{G}, \{\mathcal{F}, \phi_{\hat{\rho}}\}\} \\ &= \{\mathcal{F}, g_{\hat{\rho}}^{\hat{\sigma}} \phi_{\hat{\sigma}}\} - \{\mathcal{G}, f_{\hat{\rho}}^{\hat{\sigma}} \phi_{\hat{\sigma}}\} \\ &= \{\mathcal{F}, g_{\hat{\rho}}^{\hat{\sigma}}\} \phi_{\hat{\sigma}} + g_{\hat{\rho}}^{\hat{\sigma}} f_{\hat{\sigma}}^{\hat{\lambda}} \phi_{\hat{\lambda}} - \{\mathcal{G}, f_{\hat{\rho}}^{\hat{\sigma}}\} \phi_{\hat{\sigma}} - f_{\hat{\rho}}^{\hat{\sigma}} g_{\hat{\sigma}}^{\hat{\lambda}} \phi_{\hat{\lambda}} \approx 0. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Por tanto, queda demostrado que el corchete de ambas funciones también es de primera clase.

Será conveniente reformular la teoría en términos del número máximo de vínculos de primera clase independientes, y los restantes vínculos de segunda clase. Asumimos que el número máximo de vínculos de primera clase fue encontrado luego de construir combinaciones lineales adecuadas de vínculos. Denotamos a este conjunto de vínculos de primera clase Φ_I , ($I = 1, \dots, L$), y el resto de los vínculos de segunda clase como χ_A . Para asegurarnos de que hemos encontrado el número máximo de Φ_I 's, tendremos que chequear que la matriz construida a partir de los corchetes de Poisson de los vínculos de segunda clase

$$(\Delta_{AB}) = \{\chi_A, \chi_B\} \quad (3.40)$$

tiene determinante diferente de cero. Si esta matriz fuera singular, entonces existiría un vector nulo $e^A \Delta_{AB} \approx 0 \approx \{e^A \chi_A, \chi_B\}$, tal que el vínculo $e^A \chi_A$ conmutaría con todos los vínculos de segunda clase. Sin embargo, $e^A \chi_A$ estaría cumpliendo la definición de vínculo de primera clase, lo cual contradice la afirmación de que habíamos encontrado un conjunto completo e independiente de vínculos de segunda clase. Sin buscarlo, concluimos que el número de vínculos de segunda clase debe ser un número par, pues de otra forma $\det(\Delta_{AB}) = 0$.

El procedimiento que nos lleva a un conjunto linealmente independiente de vínculos de primera y segunda clase puede resumirse a partir del diagrama de flujo de la Figura (3.2).

Ahora reescribimos el Hamiltoniano total con la ayuda de (3.36), obteniendo

$$H_T = H' + v^\alpha \phi_\alpha, \quad (3.41)$$

con

$$H' = H_C + U^\rho \phi_\rho. \quad (3.42)$$

Observamos que H' es una función de primera clase, y que el Hamiltoniano total es la suma de un Hamiltoniano de primera clase y una combinación lineal de vínculos de primera clase primarios.

El sistema de ecuaciones (3.34) se cumplirá de manera trivial para los vínculos de primera clase, mientras que para los de segunda clase se escribe como

$$\{\chi_A, H_C\} + \Delta_{AB} u^B \approx 0. \quad (3.43)$$

Cabe considerar que los multiplicadores de Lagrange u^B para los vínculos secundarios de segunda clase no fueron definidos, pues sólo vínculos primarios forman parte del Hamiltoniano total. Por lo tanto, en la expresión (3.43) se ha adoptado la notación de que $u^B = 0$ si χ^B es un vínculo secundario. Haciendo esta salvedad, podemos resolver para el resto de los u^B asociados a

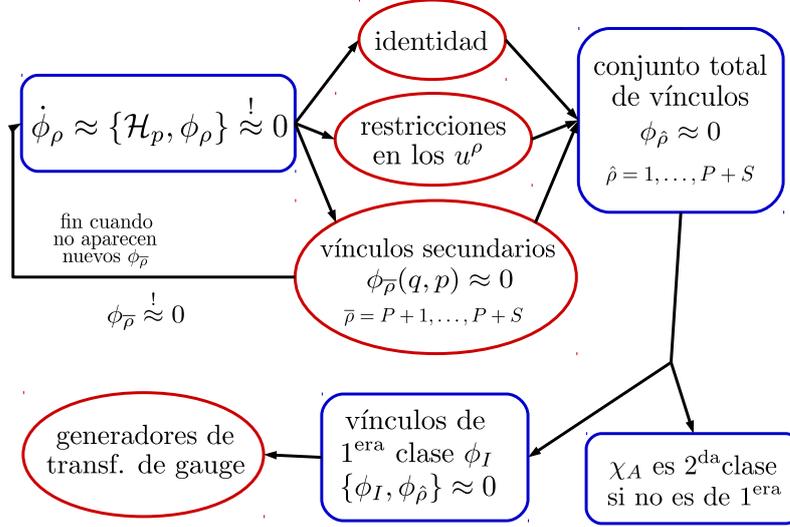


Figura 3.2: Diagrama de flujo que representa el algoritmo de Dirac–Bergmann. La clasificación en vínculos de primera y segunda clase se realiza una vez que ha terminado la búsqueda de vínculos secundarios.

un χ_B primario, usando la inversa $\bar{\Delta}^{AB}$ de la matriz de vínculos de segunda clase, obteniendo que

$$u^B = \bar{\Delta}^{BA} \{\chi_A, H_c\}. \quad (3.44)$$

El resultado de este procedimiento es que todos los multiplicadores asociados a vínculos primarios de segunda clase en H' están determinados unívocamente, y los únicos parámetros sin determinar son los v^α . Por tanto, habrán tantas funciones arbitrarias en el Hamiltoniano como vínculos primarios de primera clase hayan. Si ponemos (3.44) de vuelta en la ecuación de movimiento para una función genérica $F(q, p)$ del espacio de fase, pueden escribirse como

$$\dot{F}(q, p) \approx \{F, H_T\} \approx \{F, H_C\} + \{F, \phi_\alpha\} v^\alpha - \{F, \chi_A\} \bar{\Delta}^{AB} \{\chi_B, H_C\}. \quad (3.45)$$

3.5. La conjetura de Dirac y simetrías variacionales

Vimos con anterioridad la diferencia esencial entre sistemas regulares y singulares, en tanto que en los últimos habrán funciones arbitrarias que multiplicarán los vínculos primarios de primera clase. Se podría sospechar que

estos vínculos estarán relacionados con simetrías locales a nivel del Lagrangiano. Dirac, en sus famosas conferencias [89], introdujo un argumento de invariancia en el cual conjeturó que también los vínculos secundarios de primera clase originan invariancias. Esto dió lugar a la opinión generalizada de que los vínculos de primera clase son generadores de transformaciones de gauge. Sin embargo, como veremos, es necesario hacer una revisión completa a la estructura de los vínculos antes de realizar esta afirmación.

En el trabajo de Dirac, se estable que para una variable dinámica genérica g con valor inicial g_0 , su valor en un tiempo δt es

$$g(\delta t) = g_0 + \dot{g}\delta t = g_0 + \{g, H_T\}\delta t = g_0 + \delta t[\{g, H'\} + v^\alpha \{g, \phi_\alpha\}]. \quad (3.46)$$

Los coeficientes v son completamente arbitrarios, por tanto podemos tomar un valor diferente v' y calcular la diferencia $\Delta g(\delta t)$, la cual sería

$$\Delta g(\delta t) = \delta t(v'^\alpha - v^\alpha)\{g, \phi_\alpha\} = \Delta g(\delta t) = \epsilon^\alpha \{g, \phi_\alpha\}, \quad (3.47)$$

donde se define $\epsilon^\alpha = \delta t(v'^\alpha - v^\alpha)$ como un parámetro infinitesimal arbitrario. Aplicar este cambio a nuestra variable Hamiltoniana no debería afectar el estado físico descrito; este cambio equivale a aplicar una transformación infinitesimal de contacto con una función generatriz $\epsilon^\alpha \phi_\alpha$. Concluimos, por tanto, que los ϕ_α que encontramos en la teoría como vínculos primarios de primera clase, son *funciones generadoras de transformaciones infinitesimales de contacto, que llevan a cambios en las variables dinámicas q y p que no afectan el estado físico* [89]. Podemos calcular el conmutador de dos transformaciones de contacto con parámetros ϵ, ϵ' ,

$$(\Delta_\epsilon \Delta_{\epsilon'} - \Delta_{\epsilon'} \Delta_\epsilon)g = \epsilon^\alpha \epsilon'^\beta \{g, \{\phi_\alpha, \phi_\beta\}\}, \quad (3.48)$$

viéndose claramente que $\{\phi_\alpha, \phi_\beta\}$ es también una función generadora de transformaciones infinitesimales de contacto. Ya que los ϕ_α son vínculos de PC su corchete de Poisson es una equivalencia fuerte de una combinación lineal de vínculos de PC. Ya que en general, dentro de esta combinación lineal aparecerán también vínculos secundarios de PC, es posible conjeturar que todos los vínculos de PC daran orgien a cambios en los q y p que no afecten el estado físico. Esto es conocido como la *conjetura de Dirac*. Esto llevó a Dirac a introducir el Hamiltoniano extendido, el cual contiene todos los vínculos de PC

$$H_E = H_T + v^{\alpha'} \phi_{\alpha'} = H' + v^I \Phi_I, \quad (3.49)$$

y establece que la presencia de estos términos en el Hamiltoniano producirán cambios adicionales en g , pero no corresponderán a ningún cambio en el estado físico; por tanto también deberían ser incluidos en el formalismo.

3.5.1. Corchete de Dirac

Ya hemos visto que los vínculos de primera clase están relacionados con simetrías variacionales de la teoría física en análisis. Por otro lado, los vínculos de SC χ_A aparecen en las ecuaciones de movimiento Hamiltonianas sin multiplicadores arbitrarios. Si es que no existieran vínculos de PC, la dinámica estaría inequívocamente determinada por

$$\dot{F}(p, q) \approx \{F, H_T\} \approx \{F, H_C\} - \{F, \chi_A\} \bar{\Delta}^{AB} \{\chi_B, H_C\}. \quad (3.50)$$

Se introduce un nuevo corchete, llamado corchete de Dirac, y dado por

$$\{F, G\}^* = \{F, G\} - \{F, \chi_A\} \bar{\Delta}^{AB} \{\chi_B, G\}. \quad (3.51)$$

Notar que el corchete de Dirac se construye respecto a una matriz Δ en particular, lo cual podría estar indicado en la notación o no. El corchete de Dirac satisface las mismas propiedades que el corchete de Poisson, a saber: antisimetría, bilinealidad, y obedece la regla del producto y la identidad de Jacobi.

3.6. Conteo de grados de libertad

En una teoría que solo posea vínculos de SC, no habrá ninguna función arbitraria en el Hamiltoniano. Un conjunto de variables canónicas que satisfaga las ecuaciones de vínculos determina entonces uno y solo un estado físico. Ya que luego de fijar el gauge habrán sólo vínculos de SC, se llega a la siguiente fórmula para el conteo de grados de libertad físicos

$$\begin{aligned} 2 \times \binom{\text{n}^\circ \text{ de grados de}}{\text{libertad físicos}} &= \binom{\text{n}^\circ \text{ de variables}}{\text{canónicas independientes}} \\ &= \binom{\text{n}^\circ \text{ total de}}{\text{variables canónicas}} - \binom{\text{n}^\circ \text{ de vínculos}}{\text{de SC}} \\ &\quad - \binom{\text{n}^\circ \text{ de vínculos}}{\text{de PC}} - \binom{\text{n}^\circ \text{ de condic.}}{\text{de gauge}} \\ &= \binom{\text{n}^\circ \text{ total de}}{\text{variables canónicas}} - \binom{\text{n}^\circ \text{ de vínculos}}{\text{de SC}} - 2 \times \binom{\text{n}^\circ \text{ de vínculos}}{\text{de PC}} \end{aligned} \quad (3.52)$$

Ya que el número de vínculos de SC es siempre par, vemos que el número de variables canónicas independientes es siempre par, correspondiendo a un número entero de grados de libertad físicos.

El conteo de grados de libertad está bien definido y otorga un resultado no ambiguo para un número finito y contable de grados de libertad. Para grados de libertad fermiónicos, esto ya no será cierto [84], pero no será el caso que analizaremos en esta Tesis.

3.7. Ejemplos

Finalizaremos este Capítulo con el formalismo Hamiltoniano de un par de ejemplos de interés, a saber, el electromagnetismo y la relatividad general. Estos dos casos son importantes para ETRG pues, si bien la teoría ETRG es equivalente a la relatividad general, la estructura de su Lagrangiano se asemeja más a una teoría de Yang–Mills, de las cuales el electromagnetismo es un caso particular. Sin embargo, es preciso extender algunas definiciones para que sean aplicables en teorías de campos.

La formulación canónica para Lagrangianos singulares que hemos derivado en las secciones previas posee un número finito de grados de libertad. Sin embargo, hay algunas particularidades que conviene mencionar para teorías de campos, los sistemas de interés en física. Para comenzar, los vínculos en una teoría de campos serán función tanto de los campos del espacio de fase, como de sus derivadas espaciales. Es decir, sean Q y Π los campos y momentos canónicos asociados, los vínculos ϕ_ρ tendrán dependencias $\phi_\rho = \phi_\rho(Q, \Pi, \partial_i Q, \partial_i \Pi) \approx 0$. Por derivadas espaciales nos estamos refiriendo a las $n - 1$ dimensiones diferentes de la variable temporal. Por lo tanto, en las teorías de campos los vínculos no son puramente relaciones algebraicas entre las variables del espacio de fase, sino que serán ecuaciones diferenciales. Por tanto, si $\phi_\rho \approx 0$, entonces las derivadas espaciales e integrales de ϕ_ρ también son débilmente cero. Estos vínculos deben entenderse como un índice ρ que denota un continuo infinito de vínculos; uno por cada punto del espacio-tiempo. No obstante, para el conteo de grados de libertad consideraremos que existe un vínculo por cada valor que tome el índice ρ .

Con tal de identificar los vínculos y los multiplicadores de Lagrange, es preciso resolver ecuaciones lineales que están expresadas en términos de matrices, cuyas componentes son los corchetes de Poisson de los vínculos, es decir

$$P_{rs}(\bar{x}, \bar{y}) = \{\phi_r(x), \phi_s(y)\}_{x^0=y^0}, \quad (3.53)$$

donde los corchetes son calculados a tiempos iguales $x^0 = y^0$. Si P es una matriz no singular, entonces su inversa \bar{P}^{rs} no se encuentra definida de manera única por la expresión

$$\int dz P_{rs}(x, z) \bar{P}^{st}(z, y) = \delta_r^t \delta(x - y), \quad (3.54)$$

y si se cumple que $\det(P_{rs}) = 0$, los autovectores nulos de P_{rs} no estarán definidos de manera única. Sin embargo, siempre será posible encontrar un conjunto base del subespacio de autovectores, lo cual será particularmente importante en el caso de ETRG y gravedad $f(T)$. Pero primero, veremos un par de ejemplos útiles.

Electromagnetismo

La teoría de Maxwell para el electromagnetismo, en ausencia de fuentes, puede ser derivada a partir de la siguiente acción

$$S = \int d^4x L = -\frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x), \quad (3.55)$$

donde el tensor $F_{\mu\nu}$ se define en término del potencial A_μ como

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (3.56)$$

Los campos eléctrico y magnético escritos en función de este tensor, corresponden a

$$E_i = F_{i0} = -\frac{\partial A_i}{\partial t} - \partial_i \phi, \quad B_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} F_{jk} = \epsilon_{ijk} \frac{\partial A_k}{\partial x^j}. \quad (3.57)$$

A partir de estas definiciones, obtenemos dos de las ecuaciones de Maxwell

$$\frac{\partial B_i}{\partial t} = -\epsilon_{ijk} \frac{\partial E_k}{\partial x^j}, \quad \partial_i B_i = 0. \quad (3.58)$$

Si consideramos al campo A_μ como una coordenada canónica, la variación de la acción del electromagnetismo implica las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial A_\mu} - \partial_\nu \frac{\partial L}{\partial \partial_\nu A_\mu} = -\partial_\nu F^{\mu\nu} = 0. \quad (3.59)$$

Si escribimos estas ecuaciones en términos de los campos \vec{E} y \vec{B} , la expresión (3.59) contiene el resto de las ecuaciones de Maxwell

$$\dot{E}_i = \epsilon_{ijk} \frac{\partial B_k}{\partial x^j}, \quad \partial_i E^i = 0. \quad (3.60)$$

No es difícil ver que tanto las ecuaciones (3.59) como la acción (3.55) son invariantes bajo la transformación

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \epsilon, \quad (3.61)$$

donde ϵ es un campo escalar arbitrario, mejor conocido como campo de gauge. Representa la invariancia local de gauge de la electrodinámica, la cual se ve reflejada en los campos observables E_i y B_i . Por tanto, es natural esperar que la formulación Hamiltoniana posea vínculos.

Calculamos primeramente el Hessiano de la teoría,

$$W^{\nu\lambda} = \frac{\partial^2 L}{\partial(\partial_0 A_\nu)\partial(\partial_0 A_\lambda)} = g^{0\nu}g^{0\lambda} - g^{\nu\lambda}g^{00}. \quad (3.62)$$

Es posible escribir la densidad Lagrangiana en términos del formalismo de primer orden, en el cual A_μ y $F_{\mu\nu}$ son independientes y no relacionados por medio de la definición de F . Sin embargo, nos interesará la formulación de segundo orden, puesto que será la que usemos para la formulación Hamiltoniana de ETRG. El Hessiano se escribe como [87]

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.63)$$

El momento conjugado al campo A_μ será

$$\Pi^\mu = \frac{\partial L}{\partial(\partial_0 A_\mu)} = -F^{0\mu}, \quad (3.64)$$

por tanto es trivial ver que

$$\Pi^0(x) = 0 \quad (3.65)$$

es un vínculo primario, debido a la antisimetría de F . Lo contamos como un solo vínculo, pero representa un número infinito de vínculos, uno por cada punto del espacio. La densidad Lagrangiana puede ser escrita como

$$L = \frac{1}{2}\Pi_i\Pi_i - \frac{1}{4}F_{ik}F_{ik}. \quad (3.66)$$

La densidad Hamiltoniana canónica en este caso es

$$H_c = \Pi_i\dot{A}_i - \frac{1}{2}\Pi_i\Pi_i + \frac{1}{4}F_{ik}F_{ik}. \quad (3.67)$$

Las velocidades pueden despejarse en función de los momentos como

$$\dot{A}_i = \partial_0 A_i = F_{0i} + \partial_i A_0 = \Pi_i + \partial_i A_0. \quad (3.68)$$

Con ésto, escribimos el Hamiltoniano canonico como

$$H_c = \frac{1}{2}\Pi_i\Pi_i + \Pi_i\partial_i A_0 + \frac{1}{4}F_{ik}F_{ik}. \quad (3.69)$$

Vemos que no hay ninguna velocidad involucrada en esta expresión, únicamente derivadas espaciales del campo A . Luego de una integración por partes y despreciando los términos de borde, se obtiene para H_c que

$$H_c = \int d^3x \left(\frac{1}{2} \Pi_i \Pi_i - A_0 \partial_i \Pi_i + \frac{1}{4} F_{ik} F_{ik} \right). \quad (3.70)$$

Si añadimos a H_c el único vínculo primario $\Pi^0 \approx 0$ multiplicado por una función v_1 , obtenemos el Hamiltoniano primario

$$H_p = H_c + \int d^3x v_1(x) \Pi^0(x). \quad (3.71)$$

Los corchetes de Poisson fundamentales entre los A_μ y los Π^μ son

$$\{A_\mu(x), \Pi^\nu(y)\}_{x^0=y^0} = \delta_\mu^\nu \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \quad (3.72)$$

mientras que el resto son cero. Para imponer la conservación de los vínculos primarios en el tiempo, debemos exigir que

$$\{\Pi^0, H_p\} = -\{\Pi^0, \int d^3x A_0 \partial_i \Pi^i\} = \partial_i \Pi^i \approx 0, \quad (3.73)$$

por tanto obtenemos el vínculo secundario $\partial_i \Pi^i \approx 0$. Esto no es más que la ley de Gauss vista como una ecuación de vínculos débilmente cero, pues se tiene que $\Pi_i = -E_i$. El requerimiento de que este vínculo sea preservado en el tiempo no otorga nuevos vínculos, pues

$$\{\partial_i \Pi_i, H_p\} = \frac{1}{4} \{\partial_i \Pi_i, \int d^3x F_{jk} F_{jk}\} = 0 \quad (3.74)$$

de manera idéntica.

Consecuentemente, la teoría de Maxwell para el electromagnetismo tiene dos vínculos, uno primario $\phi = \Pi^0 \approx 0$ y otro secundario $\chi = \partial_i \Pi_i \approx 0$. Ambos son vínculos de primera clase y son incluidos en el Hamiltoniano extendido

$$H_E = H_c + \int d^3x (v_1 \phi + v_2 \chi) + \int d^3x \left(\frac{1}{2} \Pi_i \Pi_i + \frac{1}{4} F_{ik} F_{ik} + v_1 \Pi^0 + (v_2 - A_0) \partial_i \Pi_i \right) \quad (3.75)$$

Estos vínculos de primera clase generan transformaciones de gauge infinitesimales. En este caso, $\phi_1 \approx \Pi^0$ genera las siguientes transformaciones en las coordenadas

$$\begin{aligned} \delta_1 A_\mu(x) &= \int d^3y \epsilon_1(y) \{A_\mu(x), \Pi^0(y)\} = \delta_\mu^0 \epsilon_1(x), \\ \delta_1 \Pi^\mu(x) &= 0, \end{aligned} \quad (3.76)$$

mientras que $\phi_2 = \partial_i \Pi_i \approx 0$ genera

$$\begin{aligned}\delta_2 A_\mu(x) &= \int d^3 y \epsilon_2(y) \{A_\mu(x), \partial_i \Pi_i(y)\} = -\delta_\mu^i \partial_i \epsilon_2(x), \\ \delta_2 \Pi^\mu(x) &= 0.\end{aligned}\tag{3.77}$$

Ya que $\delta F_{ik} = 0$, el Hamiltoniano no se ve afectado por estas transformaciones. Finalmente, realizamos el conteo de grados de libertad por medio de la ecuación (3.52) de la siguiente forma: de los 4 pares de variables canónicas (A_μ, Π^μ) , descontamos 2 vínculos de primera clase ϕ_1, ϕ_2 , obteniéndose que el electromagnetismo clásico posee **dos grados de libertad** interpretados como los dos grados de polarización del campo electromagnético.

Relatividad General

El formalismo Hamiltoniano para la Relatividad General pone de manera explícita el hecho de que la teoría es invariante ante difeomorfismos (cambios generales de coordenadas), lo cual se aprecia en el formalismo 3+1 propuesto por Arnowitt, Deser y Misner (ADM, de ahora en adelante) [90]. Por tanto, cuando escribimos las ecuaciones de Einstein en términos de la métrica $g^{\mu\nu}$ estamos utilizando un subconjunto de variables redundantes, que reflejan el hecho de que relatividad general es una teoría cuya formulación Hamiltoniana posee vínculos.

Formalismo ADM

Para proceder con el formalismo Hamiltoniano, es necesario realizar una foliación en el espacio-tiempo por medio de hipersuperficies en tres dimensiones separadas por un intervalo infinitesimal dt en algún sistema de coordenadas. Etiquetamos la hipersuperficie más temprana Σ_t a tiempo t , por medio de las coordenadas

$$x^\alpha = x^\alpha(x^i),\tag{3.78}$$

donde $\alpha = 0, \dots, 3$, $i = 1, \dots, 3$. Además tendremos la hipersuperficie más tardía denotada por Σ_{t+dt} , y deseamos definir la geometría en cuatro dimensiones entre ellas, por medio de un objeto matemático apropiado que, como veremos, será la métrica ADM. Para describir este espacio-tiempo necesitaremos cuatro requisitos

1. la métrica en la hipersuperficie Σ_t : $h_{ij}(t, x, y, z) dx^i dx^j$ que mide la distancia entre dos puntos pertenecientes a ella,
2. la métrica en la hipersuperficie Σ_{t+dt} : $h_{ij}(t + dt, x, y, z) dx^i dx^j$,

3. una fórmula para el lapso de tiempo propio entre las dos hipersuperficies: $N(t, x, y, z)dt$, y
4. una fórmula para determinar la posición espacial en la hipersuperficie superior:

$$x_{\Sigma_{t+dt}}^i(x^j) = x^i - N^i(t, x, y, z)dt. \quad (3.79)$$

Todo esto puede entenderse también de la siguiente forma. En cada punto de la hipersuperficie Σ_t podemos definir una base de vectores tangentes $\chi_i^\mu = \partial_i x^\mu$ y un vector normal unitario n^μ tales que

$$n \cdot \chi_i = 0, \quad n^2 = -1. \quad (3.80)$$

En base a ésto, podemos definir el vector *deformación*

$$N^\mu = \partial_t x^\mu(x^i, t), \quad (3.81)$$

el cual conecta dos puntos con la misma coordenada x^i en las dos hipersuperficies próximas. Si descomponemos este vector en la base (n^μ, χ_i^μ) , obtenemos

$$N^\mu = Nn^\mu + N^i \chi_i^\mu. \quad (3.82)$$

En la última expresión, llamamos funciones de *lapso* y *corrimiento* a N y N^i , respectivamente.

Con todos los requisitos enumerados con anterioridad, podemos definir el intervalo propio entre dos puntos $x^\mu = (t, x^i)$ y $x^\mu + dx^\mu = (t + dt, x^i + dx^i)$ como

$$ds^2 = \left(\begin{array}{c} \text{dist. propia} \\ \text{en la hipersup.} \end{array} \right)^2 - \left(\begin{array}{c} \text{t. propio entre} \\ \Sigma_{t+dt} \text{ y } \Sigma_t \end{array} \right)^2, \quad (3.83)$$

lo cual puede expresarse en términos del elemento de línea

$$ds^2 = -(N^2 + h_{ij}N^iN^j)dt^2 + h_{ij}(dx^i + N^i dt)(dx^j + N^j dt). \quad (3.84)$$

En esta última expresión reconocemos la métrica ADM como

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{00} & g_{0j} \\ g_{i0} & g_{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -N^2 & N_j \\ N_i & h_{ij} \end{pmatrix}, \quad (3.85)$$

donde la notación es tal que $N^i = h^{ij}N_j$, $h^{ij} = (h_{ij})^{-1}$.

Curvatura intrínseca y extrínseca

La métrica en 3 dimensiones h_{ij} especifica la geometría intrínseca de la superficie $t = \text{cte}$. Es posible asociar a esta métrica una derivada espacial covariante D_i y una curvatura espacial ${}^{(3)}R_{ijkl}$. En este espacio, es posible pensar a las funciones lapso y corrimiento como un campo escalar y vectorial en la hipersuperficie, respectivamente. El cambio de la normal unitaria $\nabla_\nu n_\mu$ proyectada sobre la superficie $t = \text{cte}$ es

$$K_{\mu\nu} = h_\mu^\alpha h_\nu^\beta \nabla_\alpha n_\beta, \quad (3.86)$$

o también

$$K_{ij} = -\nabla_i n_j. \quad (3.87)$$

Este cambio representa la medida de cómo la superficie espacial está curvada en el espacio de 4 dimensiones. Se le denomina *curvatura extrínseca* y en términos de la métrica ADM (3.84) se escribe como

$$K_{ij} = \frac{1}{N} \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial h_{ij}}{\partial t} + D_{(i} N_{j)} \right). \quad (3.88)$$

Luego, la acción de relatividad general puede ser escrita en términos de la descomposición ADM como

$$S_E = \frac{1}{\ell^2} \int d^4x \sqrt{h} N (K_{ij} K^{ij} - K^2 + {}^{(3)}R - 2\Lambda), \quad (3.89)$$

donde se ha definido $K = K^i_i$ y ${}^{(3)}R$ es el escalar de curvatura en $n = 3$. Λ es una constante cosmológica que puede añadirse de manera genérica.

Está claro que la relatividad, escrita en el formalismo ADM, es una teoría con vínculos, puesto que las derivadas de N y N^i respecto a t no aparecen en la acción. Por tanto, éstas serían variables espurias, que son puro gauge y actúan como multiplicadores de Lagrange. Luego, las ecuaciones deberían expresarse completamente en términos de la métrica espacial h_{ij} y el momento conjugado π_{ij} . Se tiene que el momento conjugado es

$$\pi_{ij} = -\frac{1}{\ell^2} \sqrt{h} (K_{ij} - h_{ij} K). \quad (3.90)$$

Si variamos la acción (3.89) con respecto a N^i , obtenemos los siguientes vínculos

$$D_i \pi^{ij} = 0. \quad (3.91)$$

El vínculo faltante surge de la variación con respecto a N , de esta variación se obtiene que

$$\ell^2 G_{ijkl} \pi^{ij} \pi^{kl} + \ell^{-2} \sqrt{h} ({}^{(3)}R + 2\Lambda) = 0, \quad (3.92)$$

donde se ha definido

$$G_{ijkl} = \frac{1}{2\sqrt{h}}(h_{ik}h_{jl} + h_{il}h_{jk} - h_{ij}h_{kl}). \quad (3.93)$$

El vínculo de mayor importancia en el análisis Hamiltoniano de relatividad general es (3.92), y está asociado a la invariancia de la teoría bajo reparametrizaciones de la familia de hipersuperficies espaciales, e implica que la densidad Hamiltoniana \mathcal{H}

$$\mathcal{H} = \ell^2 G_{ijkl} \pi^{ij} \pi^{kl} + \ell^{-2} \sqrt{h} (-{}^{(3)}R + 2\Lambda) = 0 \quad (3.94)$$

es un vínculo.

Álgebra de vínculos

El álgebra de vínculos clásico puede expresarse en términos de los corchetes de Poisson básicos

$$\begin{aligned} \{g_{ij}(x), g_{kl}(y)\} &= 0, \\ \{\pi^{ij}(x), \pi^{kl}(y)\} &= 0, \\ \{g_{ij}(x), \pi^{kl}(y)\} &= \delta^{(3)}(x - y). \end{aligned} \quad (3.95)$$

La propiedad crucial del formalismo canónico radica en el hecho que los corchetes de Poisson de los vínculos super-Hamiltoniano y de super-momento forman un álgebra cerrada, lo cual equivale a decir que el conjunto de vínculos es de primera clase. Las relaciones fundamentales que contienen esta información corresponden a

$$\begin{aligned} \{\mathcal{H}_i(x), \mathcal{H}_j(y)\} &= -\mathcal{H}_j(x) \partial_i^y \delta(x, y) + \mathcal{H}_i(y) \partial_j^x \delta(x, y), \\ \{\mathcal{H}_i(x), \mathcal{H}(y)\} &= \mathcal{H}(x) \partial_i^x \delta(x, y), \\ \{\mathcal{H}(x), \mathcal{H}(y)\} &= g^{ij}(x) \mathcal{H}_i(x) \partial_j^y \delta(x, y) - g^{ij}(y) \mathcal{H}_i(y) \delta(x, y). \end{aligned} \quad (3.96)$$

Tomando este resultado como base, podemos decir que tanto \mathcal{H} como \mathcal{H}_i son vínculos de primera clase, los cuales generan transformaciones de gauge en la métrica. Por tanto, el conteo de los grados de libertad (3.52) en relatividad general va como sigue: los pares de variables canónicas (g_{ij}, π^{ij}) , ya que son simétricos en los índices $i - j$, otorgan $n(n - 1)/2$ grados de libertad (pues $i, j = 1, \dots, (n - 1)$). Removemos n grados de libertad con los n vínculos de primera clase H_μ , quedando los $n(n - 3)/2$ grados de libertad en relatividad general. En $n = 4$, obtenemos los dos grados de libertad asociados a las dos posibles polarizaciones de las ondas gravitacionales.

Capítulo 4

Formulación Hamiltoniana de la gravedad teleparalela

En la sección que sigue revisaremos la formulación Hamiltoniana del equivalente teleparalelo de la relatividad general. La coordenada canónica a utilizar en el formalismo Hamiltoniano es la tétrada, y ya que difiere del caso de relatividad general, donde se utiliza la métrica, es esperable obtener una formulación diferente en lo que respecta a la estructura de vínculos. Es posible anticipar, también, que el número de vínculos será mayor, dado que la métrica $g_{\mu\nu}$ tiene $n(n+1)/2$ grados de libertad, mientras que la tétrada E_μ^a no es simétrica en sus índices y por tanto tiene n^2 componentes libres. No obstante este hecho, el número de grados de libertad debería mantenerse igual, puesto que las ecuaciones de movimiento de ambas teorías describen dinámicas equivalentes.

Para comenzar el procedimiento Hamiltoniano necesitamos un Lagrangiano que muestre de manera explícita la dependencia en la tétrada E_μ^a , la variable canónica a utilizar. Esta motivación nace del hecho que, en trabajos previos, encontramos que el Lagrangiano está escrito en términos de la torsión, desarrollando todo el formalismo en términos de esta variable, que no obstante depende de la tétrada [91, 92, 93, 94]. Es sabido que formas diferentes del Lagrangiano dan origen a una estructura Hamiltoniana diferente; lo mismo ocurre si se toma un conjunto diferente de coordenadas canónicas. Por otro lado, la introducción de variables dinámicas adicionales, como lo sería la introducción de multiplicadores de Lagrange, cambia totalmente la formulación canónica de la teoría. Vemos estas diferentes consideraciones en trabajos previos que tratan acerca de la formulación Hamiltoniana de gravedad teleparalela genérica, por ejemplo véase [95] para una formulación donde se agregan multiplicadores de Lagrange que restringe cada componente de la curvatura a ser cero. En [96, 97] se estudia la formulación Hamiltoniana en

lenguaje geométrico. Para una formulación de primer orden en términos de la torsión de Weitzenböck, véase [93, 94]. La formulación que presentaremos a lo largo de este capítulo difiere cualitativamente de los trabajos anteriores, y posee ventajas comparativas, como lo es el hecho de que la forma de los vínculos se simplifica enormemente, el significado del álgebra de vínculos es patente, y se revelan aspectos interesantes de las simetrías del Lagrangiano de esta teoría. Todos estos resultados son nuevos y no se encuentran en trabajos previos; el contenido completo de este capítulo ha sido publicado en [98, 99].

4.1. Lagrangiano de la gravedad teleparalela

Comenzaremos reescribiendo el Lagrangiano de la gravedad teleparalela completamente en términos de e_a^μ, E_ν^a y las derivadas $\partial_\mu E_\nu^a$. De esta forma aislamos de manera explícita las velocidades $\partial_0 E_\mu^a$ y además removemos cualquier término que contenga la métrica en favor de la tétrada. De otra forma, tendríamos oculta una dependencia en la tétrada, que es precisamente nuestra coordenada canónica básica a utilizar para la formulación Hamiltoniana. El escalar de torsión puede escribirse en términos de la torsión de Weitzenböck como

$$T = \frac{1}{4} T_\rho^{\mu\nu} T_{\mu\nu}^\rho - \frac{1}{2} T_{\mu\nu}^\rho T^{\mu\nu}_\rho - T_{\mu\rho}^\rho T^{\nu\mu}_\nu. \quad (4.1)$$

Notamos que todos los términos en T son cuadráticos en el objeto antisimétrico $\partial_{[\mu} E_{\nu]}^a$, por tanto escribiremos cada término en función de esta combinación cuadrática de derivadas. A modo de ejemplo, reescribimos el primer término como

$$\frac{1}{4} T_\rho^{\mu\nu} T_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{4} g_{\rho\alpha} g^{\beta\mu} g^{\gamma\nu} T_{\beta\gamma}^\alpha T_{\mu\nu}^\rho; \quad (4.2)$$

luego escribimos tanto la torsión como la métrica en términos de la tétrada y su inversa

$$\frac{1}{4} T_\rho^{\mu\nu} T_{\mu\nu}^\rho = \eta_{ab} \eta^{c[d} \eta^{f]e} E \partial_\mu E_\nu^a \partial_\rho E_\lambda^b e_c^\mu e_e^\nu e_d^\rho e_f^\lambda. \quad (4.3)$$

Luego reemplazamos de vuelta esta expresión en (4.1), realizamos el mismo procedimiento con los dos términos restantes, obteniéndose que

$$T = \frac{1}{2} \partial_\mu E_\nu^a \partial_\rho E_\lambda^b e_c^\mu e_e^\nu e_d^\rho e_f^\lambda M_{ab}{}^{cdf}, \quad (4.4)$$

donde llamamos *supermétrica* al objeto emergente $M_{ab}{}^{cdf}$, que es un tensor invariante de Lorentz y está definido como

$$M_{ab}{}^{cdf} \doteq 2 \eta_{ab} \eta^{c[d} \eta^{f]e} - 4 \delta_a^{[d} \eta^{f][c} \delta_b^{e]} + 8 \delta_a^{[c} \eta^{e][d} \delta_b^{f]}. \quad (4.5)$$

Con esto, la densidad Lagrangiana será $L = E T$. Esta forma del escalar de torsión es equivalente a (4.1), con la salvedad de que se encuentra escrito en términos de la tétrada y su inversa de manera explícita. Incluso en esta forma, sigue siendo cierto que este Lagrangiano es equivalente al Lagrangiano de la relatividad general salvo por un término de borde que es integrado al introducirse en la acción.

Este objeto llamado supermétrica, que aparece de manera natural en el Lagrangiano de ETRG, tiene propiedades de antisimetría muy interesantes. Vemos sin dificultad que la supermétrica es antisimétrica en los pares de índices $c-e$ y $d-f$, lo cual implica que sólo las partes antisimétricas de $\partial_\mu E_\nu^a$ y $\partial_\lambda E_\rho^b$ formarán parte del Lagrangiano. Otras propiedades de la supermétrica que pueden probarse a partir de su definición son

$$M_{ab}{}^{aedf} = M_{ba}{}^{dfae} = 4(n-2)\eta^{e[d}\delta_b^{f]}, \quad (4.6)$$

$$M_{ab}{}^{dfae} = M_{ba}{}^{aedf} = 2(n-2)\eta^{e[f}\delta_b^{d]}, \quad (4.7)$$

$$M_{ab}{}^{aebf} = -2(n-1)(n-2)\eta^{ef}. \quad (4.8)$$

Más tarde, a medida que avancemos en el procedimiento de la formulación Hamiltoniana, descubriremos otras relaciones útiles de este objeto matemático ¹.

La estructura aparentemente complicada de los índices del espacio tangente en la supermétrica se ve justificada y es natural cuando reconocemos que en el Lagrangiano de ETRG aparecen los coeficientes de anholonomía $f^c{}_{ab}$ definidos tal que

$$[\mathbf{e}_a, \mathbf{e}_b] = f^c{}_{ab}\mathbf{e}_c. \quad (4.9)$$

De hecho, los coeficientes de anholonomía se escriben en términos de la tétrada y su inversa como

$$f^a{}_{bc} = -e_b^\mu e_c^\nu (\partial_\mu E_\nu^a - \partial_\nu E_\mu^a) = -2e_b^\mu e_c^\nu \partial_{[\mu} E_{\nu]}^a. \quad (4.10)$$

Podemos escribir este objeto en términos de la torsión de Weitzenböck como $f^a{}_{bc} = \mathbf{T}^a(\mathbf{e}_c, \mathbf{e}_b)$, así como también en términos la derivada de Lie de la tétrada, puesto que

$$f^a{}_{bc} = (\mathcal{L}_{\mathbf{e}_c} \mathbf{E}^a)(\mathbf{e}_b). \quad (4.11)$$

Finalmente, la densidad Lagrangiana puede escribirse de manera compacta y elegante en términos de los coeficientes de anholonomía como

$$L = \frac{1}{8} E f^a{}_{ce} f^b{}_{df} M_{ab}{}^{cedf}. \quad (4.12)$$

¹El procedimiento de remover la métrica del Lagrangiano se conoce como formalismo premétrico, y la supermétrica posee una equivalencia al tensor constitutivo, ver por ejemplo [100] y referencias citadas. Es importante mencionar que nuestro trabajo [99] es pionero en utilizar este formalismo premétrico en gravedad teleparalela con fines prácticos.

Una expresión similar para el Lagrangiano de ETRG puede encontrarse en [18]. En dicho trabajo, los coeficientes de anholonomía son interpretados como un campo tipo Yang-Mills; sin embargo la forma del Lagrangiano que se deriva en ese trabajo mezcla componentes del espacio tangente e índices de coordenadas. Mientras tanto, la expresión que hemos obtenido involucra únicamente índices del espacio tangente, mostrando que la supermétrica es un objeto geométrico relevante en la estructura del espacio tangente del espacio-tiempo.

4.2. Coordenadas y momentos canónicos

De acuerdo al procedimiento estándar que vimos en el capítulo anterior, para realizar la formulación Hamiltoniana debemos primero calcular los momentos canónicos a partir de la variación del Lagrangiano con respecto a la derivada temporal de las coordenadas canónicas. En este caso estas derivadas corresponden a $\partial_0 E_\mu^a$, por tanto si variamos (4.4) respecto a éstas, encontramos que los momentos canónicos Π_a^μ son

$$\begin{aligned}\Pi_a^\mu &= \frac{\partial L}{\partial(\partial_0 E_\mu^a)} = E \partial_\rho E_\lambda^b e_c^0 e_e^\mu e_d^\rho e_f^\lambda M_{ab}{}^{cedf} \\ &= -\frac{1}{2} E e_c^0 e_e^\mu f_{df}^b M_{ab}{}^{cedf} .\end{aligned}\quad (4.13)$$

En toda teoría de campos, el corchete de Poisson entre dos funciones de las variables canónicas $A(t, \mathbf{x})$ y $B(t, \mathbf{y})$ a tiempos iguales, se define como

$$\{A(t, \mathbf{x}), B(t, \mathbf{y})\} \doteq \int d\mathbf{z} \left(\frac{\delta A(t, \mathbf{x})}{\delta E_\lambda^a(\mathbf{z})} \frac{\delta B(t, \mathbf{y})}{\delta \Pi_a^\lambda(\mathbf{z})} - \frac{\delta A(t, \mathbf{x})}{\delta \Pi_a^\lambda(\mathbf{z})} \frac{\delta B(t, \mathbf{y})}{\delta E_\lambda^a(\mathbf{z})} \right) .\quad (4.14)$$

En particular, el corchete entre las variables canónicas fundamentales es

$$\{E_\mu^a(t, \mathbf{x}), \Pi_b^\nu(t, \mathbf{y})\} = \delta_b^a \delta_\mu^\nu \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) .\quad (4.15)$$

Vemos que hay objetos matemáticos en el Lagrangiano como E y e_a^μ que dependen de manera explícita de la variable canónica E_μ^a , y cuyos corchetes fundamentales con el momento canónico no serán triviales. Sin mucho esfuerzo podemos demostrar las siguientes expresiones

$$\begin{aligned}\{E(t, \mathbf{x}), \Pi_a^\mu(t, \mathbf{y})\} &= E e_a^\mu \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\ \{e(t, \mathbf{x}), \Pi_a^\mu(t, \mathbf{y})\} &= e e_a^\mu \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\ \{e_a^\mu(t, \mathbf{x}), \Pi_b^\nu(t, \mathbf{y})\} &= -e_b^\mu e_a^\nu \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\ \{\partial_j E_\mu^a(t, \mathbf{x}), \Pi_b^\nu(t, \mathbf{y})\} &= -\{E_\mu^a(t, \mathbf{x}), \partial_j \Pi_b^\nu(t, \mathbf{y})\} \\ &= \delta_b^a \delta_\mu^\nu \partial_\lambda^\mathbf{x} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) .\end{aligned}\quad (4.16)$$

Veremos más tarde que también hay corchetes que involucran derivadas parciales de ambas variables canónicas, cuyo resultado es

$$\{\partial_\mu E_\nu^b(t, \mathbf{x}), \partial_\lambda \Pi_c^\lambda(t, \mathbf{y})\} = \int d\mathbf{z} \delta_c^b \partial_\mu^x \delta(\mathbf{x} - \mathbf{z}) \partial_\nu^y \delta(\mathbf{y} - \mathbf{z}). \quad (4.17)$$

4.3. Vínculos primarios

Normalmente se esperaría que la relación (4.13) permita despejar las velocidades $\partial_0 E_\mu^a$ en función de los momentos canónicos. No obstante, veremos que esto no es posible para todas las velocidades, puesto que existen vínculos en la teoría. En la definición de los momentos canónicos (4.13), notamos que existen n vínculos primarios triviales para $\mu = 0$, que provienen del hecho que $e_c^0 e_e^0$ es simétrico en los índices $c - e$ pero la supermétrica M_{ab}^{cedf} es antisimétrica. Estos vínculos los denotaremos como

$$G_a^{(1)} \doteq \Pi_a^0 \equiv 0. \quad (4.18)$$

Notamos que estos vínculos son análogos al vínculo $\pi^0 \approx 0$ en la formulación Hamiltoniana del electromagnetismo clásico. Esta analogía nos dice que las componentes E_0^a son variables espurias que dependen de un gauge, y que podrían convertirse en multiplicadores de Lagrange si realizáramos una integración por partes en la acción.

Es esperable que el resto de los vínculos primarios estén relacionados de manera exclusiva con los índices del espacio tangente. Por lo tanto, parece lógico buscar los vínculos restantes en la combinación invariante $\Pi_a^\mu E_\mu^e$, la cual se puede escribir como

$$\Pi_a^\mu E_\mu^e = E C_{ab}{}^{ef} e_f^\lambda \partial_0 E_\lambda^b + E \partial_i E_\lambda^b e_c^0 e_d^i e_f^\lambda M_{ab}{}^{cedf}, \quad (4.19)$$

donde el objeto $C_{ab}{}^{ef}$ está definido como

$$C_{ab}{}^{ef} \doteq e_c^0 e_d^0 M_{ab}{}^{cedf}. \quad (4.20)$$

Con el propósito de encontrar nuevos vínculos entre las coordenadas y momentos canónicos, buscaremos coeficientes v_e^a que dependan de la tétrada, tal que $v_e^a \Pi_a^\mu E_\mu^e$ no contenga velocidades canónicas. En otras palabras, ya que la matriz e_f^λ en (4.19) es siempre invertible, para saber cuántas velocidades $\partial_0 E_\lambda^b$ se pueden despejar debemos encontrar los autovectores nulos v_e^a de la matriz $C_{ab}{}^{ef}$, los cuales deben cumplir la siguiente condición

$$v_e^a C_{ab}{}^{ef} = 0. \quad (4.21)$$

Notamos que incluso los vínculos primarios $G_a^{(1)} = \Pi_a^0$ pueden ser recuperados de esta forma. Basta con tomar n autovectores nulos de la forma $v_{|g|e}^a = e_e^0 \delta_g^a$ (donde la letra $|g|$ etiqueta los autovectores), para obtener

$$e_e^0 \delta_g^a \Pi_a^\mu E_\mu^e = \Pi_g^0. \quad (4.22)$$

Por otro lado, estos coeficientes satisfacen la ecuación (4.21), pues la supermétrica M_{gb}^{cedf} es antisimétrica en los índices $c - e$, por tanto es trivial que

$$v_{|g|e}^a C_{ab}^{ef} = e_e^0 e_c^0 e_d^0 M_{gb}^{cedf} \equiv 0. \quad (4.23)$$

Con el fin de encontrar nuevos vínculos, introduciremos un conjunto independiente de coeficientes v_e^a dado por

$$v_{|gh|e}^a = 2\delta_{[g}^a \eta_{h]e}, \quad (4.24)$$

que generarán vínculos denotados por los índices gh . Aplicando este vector en la expresión (4.21), obtenemos

$$v_{|gh|e}^a C_{ab}^{ef} = 2e_c^0 e_d^0 \eta_{e[h} M_{g]b}^{cedf} = 4e_c^0 e_d^0 \delta_{hg}^{cdf} \equiv 0. \quad (4.25)$$

En el producto antisimetrizado

$$\begin{aligned} \eta_{e[c} M_{a]b}^{ghf} &= 2(\delta_{[a}^h \delta_{c]}^f \delta_b^g + \delta_{[a}^g \delta_{c]}^h \delta_b^f + \delta_{[a}^f \delta_{c]}^g \delta_b^h) \\ &\doteq -2 \delta_{cab}^{ghf}, \end{aligned}$$

aparece la delta de Kronecker totalmente antisimétrica δ_{cab}^{ghf} . Los índices antisimetrizados gh denotan $n(n-1)/2$ nuevos vínculos. Combinando las ecuaciones (4.19), (4.25) y (4.26), se obtiene que

$$\begin{aligned} 0 &\equiv v_{|gh|e}^a (\Pi_a^\mu E_\mu^e - E \partial_i E_\lambda^b e_c^0 e_d^i e_f^\lambda M_{ab}^{cedf}) \\ &= 2\eta_{e[h} \Pi_{g]}^\mu E_\mu^e + 4E \partial_i E_\lambda^b e_{[h}^0 e_g^i e_{b]}^\lambda. \end{aligned}$$

En la última línea podemos reemplazar λ por un índice espacial j , debido a que el par $h - b$ se encuentra antisimetrizado y la contribución $\lambda = 0$ se anula. Además, se cumple que $\Pi_g^0 = 0$ en la superficie de vínculos, por tanto podemos obviar esta componente en la expresión anterior. Por lo tanto, los nuevos vínculos primarios quedan definidos como

$$G_{gh}^{(1)} \doteq 2\eta_{e[h} \Pi_{g]}^i E_i^e + 4E \partial_i E_j^b e_{[h}^0 e_g^i e_{b]}^j \approx 0. \quad (4.26)$$

Más adelante probaremos que estos $n(n-1)/2$ vínculos satisfacen el álgebra de Lorentz, y que además su derivada temporal es cero en la superficie de vínculos, que es la condición de consistencia que debe cumplir todo vínculo.

Para determinar si es que hemos agotado las soluciones a la ecuación (4.21), y por conveniencia para más adelante, reescribiremos el tensor $C_{ab}{}^{ef}$ como una matriz simétrica de $n^2 \times n^2$. Usaremos una notación que tome pares de índices a, b, \dots pertenecientes al espacio tangente, para definir un multi-índice $A = ()_e^a$ tal que la ecuación (4.21) puede ser escrita como [98]

$$v^A C_{AB} = 0. \quad (4.27)$$

Para realizar ésto, hemos usado las siguientes fórmulas de indexación para $A = ()_e^a$, $B = ()_f^b$

$$A = (a - 1)n + e, \quad B = (b - 1)n + f; \quad (4.28)$$

de tal forma que $A, B, \dots = 1, \dots, n^2$ cuando $a, b, e, f = 1, \dots, n$. Notar que al momento de descomponer los índices a, b, \dots en parte temporal y espacial estaremos usando la notación $a = 0$ y $a = 1, \dots, n - 1$, respectivamente. Las fórmulas (4.28) pueden adaptarse en concordancia con esta elección de la numeración.

Nótese que podemos invertir estas fórmulas con las siguientes expresiones

$$a = [A/n], \quad e = A - n[A/n] - 1,$$

donde $[]$ denota la parte entera de un número real. El resultado de este procedimiento es una matriz cuadrada de $n^2 \times n^2$, que satisface la condición de simetría

$$C_{AB} = C_{BA}, \quad (4.29)$$

debido a las propiedades de simetría de la supermétrica. La ecuación (4.27), junto con (4.19), indican que el número de vínculos primarios lineales en los momentos, y los autovectores nulos de C_{AB} , es el mismo. Los coeficientes $v^A = v_e^a$ de la combinación $v_e^a \Pi_a^\mu E_\mu^e$ son las componentes de los autovectores nulos respectivos. Hasta el momento hemos encontrado $n + n(n - 1)/2 = n(n + 1)/2$ de ellos, y como pronto veremos, los restantes $n(n - 1)/2$ autovectores tendrán autovalores diferentes de cero.

4.4. Hamiltoniano canónico de la gravedad teleparalela

Usaremos el potencial de la notación de multi-índices introducida en (4.28) con el propósito de encontrar una forma compacta para el Hamiltoniano canónico de ETRG. Con este fin será útil definir las siguientes expresiones,

$$\begin{aligned} \dot{E}^B &\equiv e_f^\lambda \dot{E}_\lambda^b, & E_0^B &\equiv e_f^i \partial_i E_0^b, \\ \Pi_A &\equiv \Pi_a^\mu E_\mu^e, & P_A &\equiv E \partial_i E_k^b e_c^0 e_d^i e_f^k M_{ab}{}^{cdf}, \end{aligned}$$

donde todos estos objetos pueden ser interpretados como vectores de dimensión n^2 . Descomponiendo la densidad Lagrangiana en parte temporal y espacial, y reescribiendo en términos de estas definiciones, encontramos que (4.4) puede escribirse como

$$L = \frac{1}{2}(\Pi_A + P_A)(\dot{E}^A - E_0^A) - U, \quad (4.30)$$

donde además se ha definido

$$U \equiv -\frac{1}{2} E \partial_i E_j^a \partial_k E_l^b e_c^i e_e^j e_d^k e_f^l M_{ab}{}^{cedf}. \quad (4.31)$$

Notar que esta última expresión depende únicamente de derivadas espaciales de la parte espacial de la tetrada E_i^a , y de la parte espacial de la tetrada inversa e_a^i . Por lo tanto, la densidad Hamiltoniana canónica se escribe como

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &\equiv \Pi_a^\mu \dot{E}_\mu^a - L = \Pi_A \dot{E}^A - L \\ &= \frac{1}{2} (\Pi_A - P_A) \dot{E}^A + \frac{1}{2}(\Pi_A + P_A)E_0^A + U. \end{aligned}$$

Vemos que en esta última expresión aún está presente la velocidad \dot{E}^A . Para escribir \mathcal{H} de manera canónica, debemos encontrar las velocidades \dot{E}^A en función de los momentos canónicos Π_A . La ecuación lineal que relaciona ambas variables es (4.19), la cual reescrita en términos de los multi-índices queda como

$$\Pi_A - P_A = E C_{AB}(\dot{E}^B - E_0^B). \quad (4.32)$$

Vemos que \dot{E}^B no puede despejarse de manera trivial en (4.32), puesto que C_{AB} es una matriz singular. Ya sabemos que esta matriz tiene $n(n+1)/2$ autovectores nulos, ya que hay $n(n+1)/2$ vínculos primarios que son lineales en el momento. Sin embargo, aunque C_{AB} no sea invertible, podemos resolver el subespacio de velocidades que es ortogonal al subespacio de autovectores nulos. Si usamos una base apropiada para separar el subespacio de autovalores nulos, la matriz C_{AB} se ve como

$$C'_{AB} = \left(\begin{array}{cc} \underbrace{\left(\begin{array}{ccc} 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 \end{array} \right)}_{n(n+1)/2} & \underbrace{\left(\begin{array}{ccc} 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 \end{array} \right)}_{n(n-1)/2} \end{array} \right) \cdot \quad (4.33)$$

En dicha base, podemos encontrar $n(n+1)/2$ vínculos $\Pi_A - P_A = 0$; además resolvemos trivialmente $n(n-1)/2$ velocidades que son relevantes,

$$\dot{E}^A - E_0^A = E^{-1} D'^{AB}(\Pi_B - P_B), \quad (4.34)$$

en donde la matriz D'^{AB} es

$$D'^{AB} = \left(\begin{array}{cc} \underbrace{\left(\begin{array}{cc} 0 \cdots 0 & 0 \cdots 0 \\ \ddots & \ddots \\ 0 \cdots 0 & 0 \cdots 0 \\ 0 \cdots 0 & \end{array} \right)}_{n(n+1)/2} & \underbrace{\left(\begin{array}{c} \ddots \\ \tilde{D} \\ \ddots \\ 0 \cdots 0 \end{array} \right)}_{n(n-1)/2} \end{array} \right) \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} n(n+1)/2 \\ \\ n(n-1)/2 \end{array}, \quad (4.35)$$

y satisface

$$D'C' = C'D' = \left(\begin{array}{cc} \underbrace{\left(\begin{array}{cc} 0 \cdots 0 & 0 \cdots 0 \\ \ddots & \ddots \\ 0 \cdots 0 & 1 \\ 0 \cdots 0 & \end{array} \right)}_{n(n+1)/2} & \underbrace{\left(\begin{array}{c} \ddots \\ \ddots \\ 1 \\ \ddots \\ 1 \end{array} \right)}_{n(n-1)/2} \end{array} \right) \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} n(n+1)/2 \\ \\ n(n-1)/2 \end{array}. \quad (4.36)$$

La ecuación (4.34) establece que las primeras $n(n+1)/2$ velocidades son nulas. Esto no tiene efecto alguno en el Hamiltoniano, puesto que las velocidades aparecen como los coeficientes de los vínculos primarios $\Pi_A - P_A = 0$. Por lo tanto, los valores de las primeras $n(n+1)/2$ velocidades son irrelevantes, ya que una elección diferente modifica el Hamiltoniano por términos que son proporcionales a los vínculos primarios, los cuales no modifican H en la hipersuperficie de vínculos. Además, estos términos proporcionales a los vínculos primarios $G^{(1)}$ se introducen en el Hamiltoniano primario, como veremos luego.

Podemos usar la matriz N de cambio de base para regresar a la base original $C' = NCN^{-1}$. Para ésto, multiplicamos en (4.36) con N^{-1} por la izquierda y con N por la derecha, obteniendo

$$N^{-1}D'NC = CN^{-1}D'N = N^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} N. \quad (4.37)$$

En esta última expresión, se subentiende la dimensionalidad de cada uno de los tres bloques de $\mathbf{0}$'s y el bloque diagonal de $\mathbf{1}$'s como matrices de $\frac{n(n+1)}{2} \times \frac{n(n+1)}{2}$, $\frac{n(n-1)}{2} \times \frac{n(n+1)}{2}$, $\frac{n(n+1)}{2} \times \frac{n(n-1)}{2}$ y $\frac{n(n-1)}{2} \times \frac{n(n-1)}{2}$, respectivamente. Vemos que el lado derecho de (4.37) es una matriz simétrica, diferente de la identidad. Además, reconocemos en la penúltima igualdad la matriz

$$D \doteq N^{-1} D' N, \quad (4.38)$$

la cual puede probarse que satisface

$$C D C = C, \quad D C D = D. \quad (4.39)$$

Las fórmulas en (4.39) son los requerimientos que debe cumplir D para ser la pseudoinversa de Moore-Penrose de C . Convendrá para más tarde usar la ecuación (4.34) en la base original, por tanto reemplazaremos D' por D en esta expresión. Entonces, substituiremos las ecuaciones (4.38) y (4.34) en (4.32) para obtener la siguiente forma canónica de la densidad Hamiltoniana

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} e (\Pi_A - P_A) D^{AB} (\Pi_B - P_B) + \Pi_A E_0^A + U, \quad (4.40)$$

donde se ha definido $e = E^{-1} = \det(e_a^\mu)$. El Hamiltoniano canónico H corresponderá a la integral de la densidad Hamiltoniana \mathcal{H} en todo el espacio, es decir

$$H = \int d^3x \mathcal{H}. \quad (4.41)$$

A continuación, aplicaremos de manera explícita el método de la pseudo-inversa, encontrando el subespacio de autovectores no nulos que definen las matrices de cambio de base N y N^{-1} . El procedimiento para encontrar este espacio vectorial se simplifica mucho para $n = 3$, por lo cual será expuesto a continuación, a modo de entrenamiento para el caso en dimensión arbitraria.

4.4.1. Autovectores no nulos de D para dimensión $n = 3$

Comenzamos el procedimiento de búsqueda de la pseudoinversa de la matriz C_{AB} en el caso simple donde $n = 3$. Será útil trabajar con la matriz C_B^A dada por

$$C_B^A = C_{eb}^a{}^f = e_c^0 e_d^0 M_{b e}^a{}^g{}^h{}^f, \quad (4.42)$$

donde $C_B^A = \eta^{AC} C_{CB}$, y $\eta_{AB} = \eta_{ab} \eta^{ef}$. Ambas matrices C_B^A y C_{AB} comparten los autovectores de autovalor nulo, pero tienen autovectores no nulos diferentes. En la definición (4.42) tenemos que $M_{b e}^a{}^g{}^h{}^f = \eta^{ac} \eta_{de} M_{cb}^{gdhf}$;

bajamos y subimos índices con la métrica del espacio tangente η_{ab} . Por otro lado, un cálculo simple muestra que los autovalores no nulos de C^A_B son

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \lambda_2 = 2 [(e_0^0)^2 - (e_1^0)^2 - (e_2^0)^2] = 2 g^{00} \doteq \lambda, \\ \lambda_3 &= -\lambda.\end{aligned}\quad (4.43)$$

El caso $n = 3$ es muy simple debido a que la matriz C^A_B satisface la siguiente identidad

$$C^A_B C^B_C C^C_D = \lambda^2 C^A_D. \quad (4.44)$$

Esto es consecuencia del hecho que todos los autovalores de esta matriz tienen el mismo valor absoluto. Esto significa que la pseudoinversa de C^A_B es la matriz $D^A_B = \lambda^{-2} C^A_B$. Por lo tanto, la matriz D^{AB} que definimos en la ecuación (4.40) es

$$D^{AB} = \lambda^{-2} C^{AB} = \lambda^{-2} e_g^0 e_h^0 M^{abg}{}^h{}_e{}_f. \quad (4.45)$$

A continuación veremos el caso general para dimensiones superiores.

4.4.2. Autovectores no nulos de D para dimensión $n \geq 4$

En dimensión $n = 4$, encontramos seis autovalores no nulos para la matriz C^A_B , los cuales son

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 \\ &= 2[(e_0^0)^2 - (e_1^0)^2 - (e_2^0)^2 - (e_3^0)^2] = 2g^{00} \doteq \lambda, \\ \lambda_6 &= -2\lambda.\end{aligned}\quad (4.46)$$

Ya que los valores absolutos de todos los autovalores no son iguales, no podemos inferir la forma de la matriz pseudo-inversa D^{AB} de manera tan fácil como en el caso $n = 3$. De hecho, se tiene que la matriz C^A_B no satisface la relación (4.44) cuando $n > 3$. El autovector relacionado con el autovalor diferente λ_6 es

$$w^B = w_f^b = -\frac{\lambda}{2} \delta_f^b + e_f^0 \eta^{bh} e_h^0. \quad (4.47)$$

En una dimensión arbitraria n , el vector w^B satisface la ecuación de autovalores

$$\begin{aligned}C^A_B w^B &= e_g^0 e_h^0 M^{a g}{}^h{}_e{}_f w_f^b \\ &= -(n-2)\lambda w_e^a = -(n-2)\lambda w^A.\end{aligned}\quad (4.48)$$

Realizamos un *ansatz* para la pseudo-inversa de C^A_B de la siguiente forma

$$D^A_B = \lambda^{-2}(C^A_B + \alpha w^A w_B), \quad (4.49)$$

la cual quedará justificada a continuación. El factor α será determinado de tal forma que D_B^A cumpla las condiciones de pseudo-inversa (4.39). Usaremos el proyector asociado al autovalor λ_6 para forzar a que la matriz C_B^A satisfaga la ecuación (4.44). Para que D_B^A sea la pseudo-inversa de C_B^A , el lado derecho de la siguiente ecuación:

$$C_C^A D_D^C C_B^D = \lambda^{-2} C_C^A C_D^C C_B^D + \alpha(n-2)^2 w^A w_B \quad (4.50)$$

debe ser equivalente a C_B^A . Para encontrar el valor de α que cumple con esto, introduciremos la matriz auxiliar

$$\tilde{C}_B^A = C_B^A + 4\lambda^{-1} w^A w_B, \quad (4.51)$$

que satisface

$$\begin{aligned} \tilde{C}_B^A w^B &= C_B^A w^B + 4\lambda^{-1} w^A w_B w^B \\ &= -(n-2)\lambda w^A + (n-1)\lambda w^A = \lambda w^A. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Es decir, el autovalor del autovector diferente ha cambiado, pues al aplicar \tilde{C}_B^A a w^B hemos obtenido λ en lugar de $\lambda_6 = -2\lambda$. Además se tiene que para cualquier vector ℓ^B que sea ortogonal a w^B se cumple que $\tilde{C}_B^A \ell^B = C_B^A \ell^B = \lambda \ell^A$. Por lo tanto, \tilde{C}_B^A es isotrópica en el subespacio de autovalores no nulos. Esto puede probarse no sólo para $n = 4$, sino que para un número arbitrario de dimensiones. Este chequeo lo hemos realizado con el programa de cómputo algebraico Cadabra [101, 102].

Ya que todos los autovalores no nulos de \tilde{C}_B^A son iguales a λ , entonces \tilde{C}_B^A satisface la ecuación (4.44). Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \lambda^2 (C_B^A + 4\lambda^{-1} w^A w_B) &= \lambda^2 \tilde{C}_B^A = \tilde{C}_C^A \tilde{C}_D^C \tilde{C}_B^D \\ &= C_C^A C_D^C C_B^D + 4\lambda (n^2 - 5n + 7) w^A w_B, \end{aligned} \quad (4.53)$$

es decir,

$$\lambda^{-2} C_C^A C_D^C C_B^D = C_B^A - 4\lambda^{-1} (n-3)(n-2) w^A w_B. \quad (4.54)$$

Si sustituimos este resultado en (4.50), obtenemos que D_B^A es la pseudo-inversa de la matriz C_B^A si α es igual a

$$\alpha = \lambda^{-1} \frac{4(n-3)}{(n-2)}. \quad (4.55)$$

En dimensión $n = 4$, tenemos que $\alpha = 2\lambda^{-1}$. Por tanto la matriz pseudo-inversa con índices contravariantes es

$$D^{AB} = \lambda^{-2} (C^{AB} + \alpha w^A w^B), \quad (4.56)$$

y para el α obtenido en $n = 4$, escrita en términos de la tétrada puramente, es

$$\begin{aligned}
D^{AB} &= D^{ab}_{ef} = \lambda^{-1} (\delta_f^{[a} \delta_e^{b]} + \frac{1}{2} \eta^{ab} \eta_{ef}) \\
&\quad - \lambda^{-2} (e_e^0 e_f^0 \eta^{ab} + 4 e_g^0 e_{[e}^0 \delta_{f]}^{[a} \eta^{b]g} \\
&\quad + e_g^0 e_h^0 \eta^{ag} \eta^{bh} \eta_{ef}) \\
&\quad + 2 \lambda^{-3} \eta^{ag} \eta^{bh} e_g^0 e_h^0 e_e^0 e_f^0 .
\end{aligned} \tag{4.57}$$

Mientras tanto, la expresión general será aquella dada por (4.55) y (4.56).

Con el fin de simplificar cálculos posteriores, conviene notar que la ecuación (4.47) puede ser reemplazada en el lado izquierdo de (4.48), obteniéndose

$$\frac{1}{2(n-2)} C^{a\ b}_{be} = w_e^a = w^A. \tag{4.58}$$

Esta expresión nos permite escribir la matriz D en (4.49) completamente en términos de la matriz C , pues

$$D^{ab}_{ef} = \lambda^{-2} C^{ab}_{ef} + \frac{\lambda^{-3}(n-3)}{(n-2)^3} C^{a\ c}_{ce} C^{b\ d}_{df}. \tag{4.59}$$

4.5. Vínculos secundarios: super-Hamiltoniano y super-momento

Una vez encontrado el Hamiltoniano canónico, podemos escribir el Hamiltoniano primario como la siguiente combinación lineal

$$\mathcal{H}_p = \mathcal{H} + u^c G_c^{(1)} + u^{ab} G_{ab}^{(1)}, \tag{4.60}$$

donde hemos introducido los multiplicadores de Lagrange u^c, u^{ab} que acompañan a los vínculos primarios. Este Hamiltoniano nos permite estudiar la consistencia en el tiempo de los vínculos primarios, por medio del conjunto de corchetes

$$\dot{G}^{(1)} = \{H_p, G^{(1)}\} \approx 0, \tag{4.61}$$

donde $G^{(1)}$ representa el conjunto de vínculos primarios $G^{(1)} = (G_a^{(1)}, G_{ab}^{(1)})$. Las ecuaciones (4.61) representan la imposición de que los vínculos primarios se satisfagan a todo tiempo. Es decir, si el sistema físico se encuentra en la superficie de vínculos a un tiempo inicial, debe permanecer constreñido a esta superficie al evolucionar temporalmente el sistema. Si este requerimiento no

se cumpliera, implicaría que existen nuevos vínculos, los cuales serán llamados vínculos secundarios, y serán denotados por $G^{(2)}$. En el caso de ETRG es posible encontrar los vínculos secundarios a través de las ecuaciones de movimiento, como mostraremos a continuación. Luego mostraremos que estos vínculos secundarios aparecen en las relaciones de consistencia (4.61).

4.5.1. Vínculos secundarios a través de las ecuaciones de movimiento

A diferencia de los vínculos primarios, los vínculos secundarios pueden encontrarse usando las ecuaciones de movimiento. En particular, podemos estudiar la evolución de las ecuaciones de Euler-Lagrange, escritas como ²

$$\partial_\mu \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu E_\nu^a)} - \frac{\partial L}{\partial E_\nu^a} = 0. \quad (4.62)$$

Si separamos la derivada del primer término en partes temporal y espacial, reconocemos el momento canónico. Reescribiendo en términos de éste, se obtiene

$$\partial_0 \Pi_a^\nu + \partial_i \frac{\partial L}{\partial(\partial_i E_\nu^a)} - \frac{\partial L}{\partial E_\nu^a} = 0. \quad (4.63)$$

A partir de esta expresión podemos imponer fácilmente que el vínculo $G_a^{(1)} = \Pi_a^0$ se satisfaga a todo tiempo, reemplazando $\nu = 0$. Esto implicará que existen n ecuaciones, que no contienen derivadas temporales de segundo orden, y corresponden a

$$\partial_i \frac{\partial L}{\partial(\partial_i E_0^a)} - \frac{\partial L}{\partial E_0^a} = 0. \quad (4.64)$$

Vemos que estas ecuaciones no contienen ninguna dinámica, de manera análoga a lo que ocurre en el electromagnetismo. Ya que las derivadas de la tetrada forman el Lagrangiano en combinaciones antisimétricas de índices espacio-temporales, encontramos la siguiente relación

$$\partial_i \left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_i E_0^a)} \right) = -\partial_i \left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_0 E_i^a)} \right) = -\partial_i \Pi_a^i. \quad (4.65)$$

Poniendo ésto en (4.64), encontramos n vínculos secundarios dados por

$$\partial_i \Pi_a^i + \frac{\partial L}{\partial E_0^a} = 0. \quad (4.66)$$

²Para el conteo de grados de libertad a través del método Lagrangiano, ver [103].

Podemos probar que estos vínculos son consistentes con la evolución, y no generan nuevos vínculos. Para ésto, podemos aplicar la derivada ∂_0 a (4.66), y usar la ecuación (4.63) para reemplazar $\partial_0 \Pi_a^i$, obteniendo

$$\begin{aligned} \partial_0 \left(\partial_i \Pi_a^i + \frac{\partial L}{\partial E_0^a} \right) &= -\partial_i \partial_j \frac{\partial L}{\partial (\partial_j E_i^a)} + \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial E_\mu^a} \\ &= -\partial_i \partial_j \frac{\partial L}{\partial (\partial_j E_i^a)} + \partial_\nu \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu E_\nu^a)} \equiv 0, \end{aligned}$$

donde en el penúltimo paso se usaron las ecuaciones de Euler-Lagrange. La última igualdad es cero puesto que $\partial_\mu E_\nu^a$ aparece en el Lagrangiano en combinaciones antisimétricas, pero se encuentran multiplicados por los operadores $\partial_i \partial_j$ y $\partial_\nu \partial_\mu$, los cuales son simétricos en los índices respectivos.

Por tanto, hemos obtenido en (4.66) un conjunto de vínculos que es consistente con la evolución temporal. Para escribirlos de manera canónica, debemos calcular la derivada $\partial L / \partial E_0^a$ y expresarla como función de los momentos canónicos, de la tétrada y de sus derivadas espaciales únicamente. Para realizar este cálculo notamos que, a diferencia del electromagnetismo, el término E_0^a aparece en el Lagrangiano no sólo en las derivadas espaciales $\partial_i E_0^a$, sino que como parte de e_a^μ y E . Comenzamos calculando $\partial e_c^\mu / \partial E_\lambda^a$, lo cual puede obtenerse a partir de la relación de dualidad de la tétrada

$$\delta_\nu^\mu = e_b^\mu E_\nu^b \quad \longrightarrow \quad 0 = \frac{\partial e_b^\mu}{\partial E_\lambda^a} E_\nu^b + e_a^\mu \delta_\nu^\lambda. \quad (4.67)$$

Esto implica que

$$\frac{\partial e_c^\mu}{\partial E_\lambda^a} = -e_a^\mu e_c^\lambda. \quad (4.68)$$

Necesitamos también la expresión $\partial E / \partial E_0^a$, la cual se obtiene a partir de la fórmula explícita del determinante en función de las componentes de la matriz que representa a la tétrada. Esta expresión, en dimensión arbitraria, está dada por

$$E = \epsilon_{abcd\dots g} E_0^a E_1^b \dots E_n^g. \quad (4.69)$$

Entonces se obtiene

$$E_\lambda^a \frac{\partial E}{\partial E_0^a} = \delta_\lambda^0 E \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial E}{\partial E_0^a} = E e_a^0. \quad (4.70)$$

De esta forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial E_0^a} &= \frac{1}{2} E (e_a^0 e_g^\mu e_e^\nu e_h^\rho e_f^\lambda - e_a^\mu e_g^0 e_e^\nu e_h^\rho e_f^\lambda - e_a^\nu e_g^\mu e_e^0 e_h^\rho e_f^\lambda \\ &\quad - e_a^\rho e_g^\mu e_e^\nu e_h^0 e_f^\lambda - e_a^\lambda e_g^\mu e_e^\nu e_h^\rho e_f^0) \partial_\mu E_\nu^c \partial_\rho E_\lambda^d M_{cd}{}^{ghf}. \end{aligned} \quad (4.71)$$

En la última expresión identificamos al Lagrangiano en el primer término, y diferentes combinaciones de los momentos canónicos. Reescribimos y manipulamos algebraicamente para obtener

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial E_0^a} &= e_a^0 L - \frac{1}{2} e_a^\mu \partial_\mu E_\nu^c \Pi_c^\nu + \frac{1}{2} e_a^\nu \partial_\mu E_\nu^c \Pi_c^\mu \\
&\quad - \frac{1}{2} e_a^\rho \partial_\rho E_\lambda^d \Pi_d^\lambda + \frac{1}{2} e_a^\lambda \partial_\rho E_\lambda^d \Pi_d^\rho \\
&= e_a^0 L + 2 e_a^\nu \partial_{[\mu} E_{\nu]}^c \Pi_c^\mu \\
&= e_a^0 L + 2 e_a^0 \partial_{[i} E_{0]}^c \Pi_c^i + 2 e_a^j \partial_{[i} E_{j]}^c \Pi_c^i.
\end{aligned} \tag{4.72}$$

La densidad Hamiltoniana puede ser extraída a partir de los primeros términos, obteniéndose

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial E_0^a} &= -e_a^0 \mathcal{H} + e_a^0 \partial_i E_0^c \Pi_c^i + 2 e_a^j \partial_{[i} E_{j]}^c \Pi_c^i \\
&= e_a^0 (\partial_i (E_0^c \Pi_c^i) - \mathcal{H}) - E_0^c e_a^0 \partial_i \Pi_c^i + 2 e_a^j \partial_{[i} E_{j]}^c \Pi_c^i.
\end{aligned} \tag{4.73}$$

Este resultado es reemplazado en la ecuación (4.66) para obtener n vínculos secundarios

$$E_j^c e_a^j \partial_i \Pi_c^i + e_a^0 (\partial_i (E_0^c \Pi_c^i) - \mathcal{H}) + 2 e_a^j \partial_{[i} E_{j]}^c \Pi_c^i \approx 0. \tag{4.74}$$

Notamos que sólo las derivadas espaciales están presentes, y que el Hamiltoniano canónico forma parte de los vínculos secundarios. Es posible aislar la contribución del Hamiltoniano contrayendo la expresión anterior con E_0^a ,

$$G_0^{(2)} = \mathcal{H} - \partial_i (E_0^c \Pi_c^i) \approx 0, \tag{4.75}$$

mientras que realizando la contracción con E_k^a , se obtiene

$$G_k^{(2)} = \partial_k E_i^c \Pi_c^i - \partial_i (E_k^c \Pi_c^i) \approx 0. \tag{4.76}$$

Los vínculos (4.75) y (4.76) son equivalentes a los vínculos de super-Hamiltoniano y de super-momento del formalismo ADM, respectivamente [90]. Mientras el Hamiltoniano de ADM se anula en la superficie de vínculos, el Hamiltoniano de ETRG no. El motivo de esta diferencia se debe al término de borde presente en el Lagrangiano de ETRG. De acuerdo a (4.75), la densidad Hamiltoniana \mathcal{H} es una divergencia diferente de cero, la cual puede convertirse a una divergencia espacial gracias a los vínculos (4.18). Es decir, podemos escribir el Hamiltoniano como

$$H = \int d\mathbf{x} \mathcal{H} = \int d\mathbf{x} G_0^{(2)} + \int E_0^c \Pi_c^i dS_i. \tag{4.77}$$

Esto muestra que el Hamiltoniano canónico es un vínculo más un término de borde. Como consecuencia de este hecho, veremos que todo el conjunto de vínculos será consistente con la evolución, y por tanto serán de primera clase.

4.5.2. Vínculos secundarios a través de la consistencia de los vínculos primarios

Si bien hemos obtenido un conjunto de vínculos secundarios a través de las ecuaciones de movimiento, es necesario estudiar la consistencia de los vínculos primarios en el tiempo para chequear que no existan vínculos secundarios adicionales. Debemos estudiar el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}\dot{G}_a^{(1)} &= \{G_a^{(1)}, \mathcal{H}_p\} = \{G_a^{(1)}, \mathcal{H}\} + u^{bc} \{G_a^{(1)}, G_{bc}^{(1)}\} + u^b \{G_a^{(1)}, G_b^{(1)}\} \approx 0, \\ \dot{G}_{ab}^{(1)} &= \{G_{ab}^{(1)}, \mathcal{H}_p\} = \{G_{ab}^{(1)}, \mathcal{H}\} + u^{cd} \{G_{ab}^{(1)}, G_{cd}^{(1)}\} + u^c \{G_{ab}^{(1)}, G_c^{(1)}\} \approx 0.\end{aligned}\tag{4.78}$$

Esto implica que tendremos que calcular el corchete de los vínculos primarios consigo mismos y con el Hamiltoniano. Sin embargo, la expresión (4.77) nos dice que calcular el corchete con la densidad Hamiltoniana equivale a calcularlo con el vínculo $G_0^{(2)}$, pues sólo difieren en un término de borde. Ya que este vínculo involucra a la matriz D^{AB} , podemos hacer uso de la expresión (4.59) donde escribimos D en términos de C , para simplificar los corchetes de esta matriz con los momentos canónicos.

Finalmente podemos proceder a calcular los corchetes entre todos los vínculos. Para el vínculo $G_a^{(1)}$ el conjunto de corchetes de interés corresponden a

$$\begin{aligned}\{G_b^{(1)}(t, \mathbf{x}), G_a^{(1)}(t, \mathbf{y})\} &= 0, \\ \{G_{ab}^{(1)}(t, \mathbf{x}), G_c^{(1)}(t, \mathbf{y})\} &= 0, \\ \{G_0^{(2)}(t, \mathbf{x}), G_a^{(1)}(t, \mathbf{y})\} &= \left(e_a^0 G_0^{(2)} + e_a^i G_i^{(2)} \right) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}).\end{aligned}\tag{4.79}$$

El último corchete requiere conocer el corchete entre el momento Π_a^0 y la matriz D^{AB} , el cual tiene una forma sencilla dada por

$$\{D^{AB}, \Pi_c^0\} = 2e_c^0 D^{AB}.\tag{4.80}$$

En la última expresión de (4.79) vemos que aparece la expresión $G_i^{(2)}$, la cual mostramos que era un vínculo secundario, pero cuya existencia habría pasado inadvertida si no hubiéramos utilizado las ecuaciones de Euler-Lagrange. Lo

mismo ocurre para $G_0^{(2)}$, por tanto hemos confirmado que ambos son vínculos secundarios a través del formalismo Hamiltoniano.

Los corchetes de los vínculos $G_{ab}^{(1)}$ con el resto de los vínculos son

$$\{G_{ac}^{(1)}(t, \mathbf{x}), G_{fe}^{(1)}(t, \mathbf{y})\} = \left(\eta_{ec} G_{af}^{(1)} + \eta_{af} G_{ce}^{(1)} - \eta_{cf} G_{ae}^{(1)} - \eta_{ae} G_{cf}^{(1)} \right) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (4.81)$$

$$\{G_0^{(2)}(t, \mathbf{x}), G_{ab}^{(1)}(t, \mathbf{y})\} = E_0^c \eta_{c[a} e_{b]}^0 G_0^{(2)} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (4.82)$$

Para la última ecuación en (4.82), necesitamos el corchete $\{D^{AB}, \Pi_c^i\}$, cuya expresión puede encontrarse en el Apéndice C, junto con ayuda adicional para reproducir los cálculos que conllevan a estos resultados.

A partir de los corchetes en (4.82) es posible obtener varias conclusiones. En primer lugar, la expresión (4.81) verifica que los vínculos $G_{ab}^{(1)}$ satisfacen el álgebra del grupo de Lorentz, como era de esperar dada su interpretación como generadores de transformaciones locales de Lorentz. Por otro lado, en el corchete (4.82) vemos reflejado el hecho que el Hamiltoniano de ETRG no es invariante ante transformaciones locales de Lorentz. Esto se debe, como era de esperar, al término de borde que diferencia ETRG de RG. A nuestro entender, esta observación parece haber sido ignorada o no calculada en absoluto en la literatura, encontrándose por primera vez en [99].

Aún queda por calcular los corchetes de Poisson entre los vínculos secundarios $G_\mu^{(2)}$, los cuales reproducen el álgebra de vínculos de la formulación ADM de la relatividad general, dada su equivalencia con los vínculos super-Hamiltoniano y de super-momento. El resultado que esperábamos es

$$\{G_i^{(2)}(t, \mathbf{x}), G_j^{(2)}(t, \mathbf{y})\} = -G_i^{(2)}(\mathbf{x}) \partial_j^y \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + G_j^{(2)}(\mathbf{y}) \partial_i^x \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (4.83)$$

$$\{G_0^{(2)}(t, \mathbf{x}), G_0^{(2)}(t, \mathbf{y})\} = g^{ij}(\mathbf{x}) G_i^{(2)}(\mathbf{x}) \partial_j^y \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - g^{ij}(\mathbf{y}) G_i^{(2)}(\mathbf{y}) \partial_j^x \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (4.84)$$

$$\{G_0^{(2)}(t, \mathbf{x}), G_i^{(2)}(t, \mathbf{y})\} = G_0^{(2)}(\mathbf{x}) \partial_i^y \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (4.85)$$

Finalmente, queda calcular los siguientes corchetes

$$\begin{aligned} \{G_a^{(1)}(t, \mathbf{x}), G_i^{(2)}(t, \mathbf{y})\} &= 0, \\ \{G_{ab}^{(1)}(t, \mathbf{x}), G_i^{(2)}(t, \mathbf{y})\} &= 0, \end{aligned} \quad (4.86)$$

los cuales muestran que no existen nuevos vínculos secundarios aparte de $G_\mu^{(2)}$, y que todos los vínculos son de primera clase.

En estricto rigor, el algoritmo de Dirac–Bergmann nos exige mostrar que la cantidad de autovectores por la derecha de la matriz $C_{\hat{\rho}\rho} = \{\phi_{\hat{\rho}}, \phi_{\rho}\}$ es igual al número de multiplicadores de Lagrange u^a, u^{bc} introducidos. Esto es cierto, como es fácil probar, pues todos los vínculos son de primera clase y todos los multiplicadores de Lagrange quedan indeterminados, por tanto son generadores de transformaciones de gauge arbitrarias.

La consistencia de los vínculos secundarios se estudia por medio de la matriz rectangular $C_{\hat{\rho}\rho}$, definida esquemáticamente como

$$C_{\hat{\rho}\rho} = \begin{pmatrix} \{G_{cd}^{(1)}, G_{ab}^{(1)}\} & \{G_a^{(1)}, G_{ab}^{(1)}\} \\ \{G_{cd}^{(1)}, G_b^{(1)}\} & \{G_a^{(1)}, G_b^{(1)}\} \\ \{G_{cd}^{(1)}, G_0^{(2)}\} & \{G_a^{(1)}, G_0^{(2)}\} \\ \{G_{cd}^{(1)}, G_i^{(2)}\} & \{G_a^{(1)}, G_i^{(2)}\} \end{pmatrix} \quad (4.87)$$

Ésta puede entenderse como una matriz de 10×16 que es débilmente cero en la superficie de vínculos. Posee 10 autovectores nulos por la derecha, implicando que los 10 multiplicadores de Lagrange λ^c, λ^{ab} quedan indeterminados. Esto viene a partir de multiplicar la ecuación

$$h_{\hat{\rho}} + u^{\rho} C_{\hat{\rho}\rho} \approx 0 \quad (4.88)$$

por los diez autovectores $\omega^{\hat{\rho}}$. Se obtienen las condiciones $h_{\hat{\rho}} \cdot \omega^{\hat{\rho}} \approx 0$, las cuales se satisfacen trivialmente.

4.6. Conteo de grados de libertad en ETGR

El análisis de la consistencia de los vínculos arroja que tenemos

- n vínculos primarios triviales $G_a^{(1)}$,
- $n(n-1)/2$ vínculos primarios del álgebra de Lorentz $G_{ab}^{(1)}$, y
- n vínculos secundarios $G_{\mu}^{(2)}$.

Estos últimos son equivalentes a los vínculos super-Hamiltoniano y de supermomento del formalismo ADM. Los cálculos anteriores prueban que todos los vínculos son de primera clase, puesto que todos los corchetes calculados son débilmente cero en la superficie de vínculos. Por lo tanto, el conteo de grados de libertad de la teoría va como sigue

$$\begin{aligned} \# \text{ d.o.f.} &= \#(p, q) - \# \text{ f.c.c.} \\ &= n^2 - \frac{n(n+3)}{2} = \frac{n(n-3)}{2}. \end{aligned} \quad (4.89)$$

Para $n = 4$, el número de grados de libertad es 2, al igual que en relatividad general. En general, la expresión anterior es el número de grados de libertad de la relatividad general en una dimensión arbitraria.

4.7. Transformaciones de gauge

Ya que todos los vínculos de la teoría son de primera clase, puesto que los corchetes de todos los vínculos consigo mismos yacen en la superficie de vínculos, deben generar transformaciones en la tétrada que dejan invariante la teoría. En general, las transformaciones de gauge infinitesimales que genera un vínculo de primera clase G en la tétrada son

$$\delta E_\mu^a(t, \mathbf{x}) = \int d\mathbf{y} \epsilon(t, \mathbf{y}) \{E_\mu^a(t, \mathbf{x}), G(t, \mathbf{y})\}. \quad (4.90)$$

Una transformación en el vielbein va acompañada por una transformación en la base $\{\mathbf{e}_a\}$, con tal de respetar la relación de dualidad $\mathbf{E}^a(\mathbf{e}_b) = \delta_b^a$, lo cual puede escribirse como

$$\mathbf{E}^a(\delta \mathbf{e}_b) + \delta \mathbf{E}^a(\mathbf{e}_b) = 0, \quad (4.91)$$

o en términos de las componentes de tétradas, como

$$\delta e_b^\nu = -e_a^\nu e_b^\mu \delta E_\mu^a.$$

Entonces, siguiendo la ecuación (4.90), cualquier combinación lineal de los vínculos primarios $\epsilon^b(t, \mathbf{x}) G_b^{(1)}$ genera una transformación que afecta únicamente a la componente temporal de la 1-forma \mathbf{E}^a , es decir

$$\delta \mathbf{E}^a = \epsilon^a dt \longrightarrow \delta E_0^a(t, \mathbf{x}) = \epsilon^a(t, \mathbf{x}). \quad (4.92)$$

Esto también implica que $\delta e_b^\nu = -\epsilon^a e_a^\nu e_b^0$. También es posible probar que la combinación $e_h^0 E$ es invariante bajo esta transformación, puesto que $E = \epsilon_{a\dots g} E_0^a \dots E_{n-1}^g$, entonces $e_h^0 \delta E = e_h^0 \epsilon_{a\dots g} E_1^b \dots E_{n-1}^g = -E_{\nu'}^a \delta e_h^{\nu'} \epsilon_{a\dots g} E_1^b \dots E_{n-1}^g = -E \delta_h^e$.

En contraste, las transformaciones generadas por el conjunto de vínculos $G_\mu^{(2)}$ sólo afectan las componentes espaciales de las 1-formas \mathbf{E}^a . Dichas transformaciones infinitesimales son representadas por $\xi^0 G_0^{(2)}$ y $\xi^k G_k^{(2)}$, y son, respectivamente

$$\begin{aligned} \delta E_i^a(t, \mathbf{x}) &= \xi^0 \dot{E}_i^a(t, \mathbf{x}) + E_0^a \partial_i \xi^0 \\ &= \partial_i (\xi^0 E_0^a) + 2\xi^0 \partial_{[0} E_{i]}^a, \\ \delta E_i^a(t, \mathbf{x}) &= \xi^k \partial_k E_i^a + E_k^a \partial_i \xi^k \\ &= \partial_i (E_k^a \xi^k) + 2\xi^k \partial_{[k} E_{i]}^a. \end{aligned} \quad (4.93)$$

Estas transformaciones son análogas a las transformaciones de gauge del potencial electromagnético $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \xi$. Sin embargo, ambas van acompañadas de un término proporcional a la torsión de Weitzenböck $\mathbf{T}^a = d\mathbf{E}^a$. Ambos términos obtenidos son necesarios, puesto que el Lagrangiano de ETRG, a diferencia del Lagrangiano de Maxwell, depende tanto de la derivada exterior del campo \mathbf{E}^a como del campo en sí.

El resultado obtenido posee un contenido geométrico que puede ser evidenciado si acudimos a la definición de la derivada de Lie. Para una p -forma α , la derivada de Lie a lo largo de un vector ξ corresponde a

$$\mathcal{L}_\xi \alpha = d[\alpha(\xi)] + d\alpha(\xi). \quad (4.94)$$

Las transformaciones (4.93) pueden entenderse como las componentes espaciales de $\mathcal{L}_\xi \mathbf{E}^a$, donde ξ es un objeto geométrico que representa campo vectorial cuyas componentes son los parámetros infinitesimales ξ^0, ξ^k , es decir $\xi^\mu = (\xi, \xi^k)$. Estas transformaciones pueden extenderse también a la componente temporal de las 1-formas \mathbf{E}^a , puesto que cualquier cambio en E_0^a es una transformación de gauge. Esto implica que hemos obtenido que ETRG es insensible a $2n$ transformaciones de gauge independientes de la tetrada en la superficie de vínculos, dadas por (4.90) y por

$$\delta \mathbf{E}^a = \mathcal{L}_\xi \mathbf{E}^a. \quad (4.95)$$

Por otro lado, la transformación anterior puede aplicarse en la co-forma \mathbf{e}_a , usando (4.91), para encontrar que

$$\delta \mathbf{e}_b = \mathcal{L}_\xi \mathbf{e}_b = [\xi, \mathbf{e}_b]. \quad (4.96)$$

Esta última transformación implicará la siguiente transformación en los coeficientes de anholonomía

$$\delta f_{ab}^c = \mathcal{L}_\xi f_{ab}^c = \xi^\mu (f_{ab}^c), \quad (4.97)$$

puesto que por la identidad de Jacobi $\delta[\mathbf{e}_a, \mathbf{e}_b] = [\delta \mathbf{e}_a, \mathbf{e}_b] + [\mathbf{e}_a, \delta \mathbf{e}_b]$. Con esto podemos entender que la derivada de Lie del Lagrangiano (pensado como una n -forma $\mathbf{L} = L dx^0 \wedge \dots \wedge dx^{n-1}$, donde L es la densidad Lagrangiana) es siempre un término de borde. De hecho, para una n -forma α , la derivada de Lie $\mathcal{L}_\xi \alpha$ es la forma exacta $d[\alpha(\xi)]$. Pero en una teoría de gravedad como ETRG, este tipo de cuasi-invariancia del Lagrangiano proviene de la simetría de sus variables dinámicas, generadas por una combinación adecuada de los vínculos primarios triviales y los vínculos secundarios. De hecho, el cambio de la n -forma Lagrangiana para ETRG

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \frac{1}{8} E f_{ce}^a f_{df}^b M_{ab}^{cdf} dx^0 \wedge \dots \wedge dx^{n-1}, \\ &\frac{1}{8} f_{ce}^a f_{df}^b M_{ab}^{cdf} \mathbf{E}^0 \wedge \dots \wedge \mathbf{E}^{n-1} \end{aligned} \quad (4.98)$$

bajo una transformación de gauge \mathcal{L}_ξ equivale a su derivada de Lie, es decir

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{L} &= \frac{1}{4}f_{ce}^a f_{df}^b M_{ab}{}^{cedf} \mathbf{E}^0 \wedge \dots \wedge \mathbf{E}^{n-1} + \frac{1}{8}f_{ce}^a f_{df}^b M_{ab}{}^{cedf} \delta\mathbf{E}^0 \wedge \dots \wedge \mathbf{E}^{n-1} + \dots \\ &= \mathcal{L}_\xi \mathbf{L} = d[\mathbf{L}(\xi)].\end{aligned}\tag{4.99}$$

Finalmente, las transformaciones de gauge de la tétrada inducidas por los vínculos primarios asociados al grupo de Lorentz están asociadas al generador $\epsilon^{gh}G_{gh}^{(1)}$, y producen el siguiente cambio

$$\delta E_j^a(t, \mathbf{x}) = \int d\mathbf{y} \epsilon^{gh}(t, \mathbf{y}) \{E_j^a(t, \mathbf{x}), 2 \eta_{e[h} \Pi_{g]}^i(t, \mathbf{y}) E_i^e\}, \tag{4.100}$$

esto puede ser extendido a la componente E_0^a de la tétrada usando la transformación de gauge (4.92), otorgando la siguiente transformación local de Lorentz

$$\delta\mathbf{E}^a = \epsilon^{gh}(t, \mathbf{x}) (\eta_{eh}\delta_g^a - \eta_{eg}\delta_h^a) \mathbf{E}^e. \tag{4.101}$$

La transformación de la co-tétrada será

$$\delta\mathbf{e}_b\delta_c^a = -\epsilon^{gh}(\eta_{ch}\delta_g^a - \eta_{cg}\delta_h^a)\mathbf{e}_b \tag{4.102}$$

4.8. Conclusiones y discusión

El equivalente teleparalelo de la relatividad general es un sistema con vínculos, y como tal presenta la obstrucción de que no todas las velocidades canónicas pueden ser resueltas en función de los momentos canónicos. Esto es debido a que los momentos no son independientes, sino que satisfacen ecuaciones de vínculo, lo cual indica que algunas variables dinámicas son grados de libertad espurios. En el caso de ETRG, este impedimento se ve reflejado en el hecho que la matriz $C_{ab}{}^{ef}$ no posee inversa. Esta matriz está ligada a la supermétrica $M_{ab}{}^{cedf}$, un objeto que es invariante de Lorentz y refleja la estructura fundamental de la gravedad descrita en el espacio tangente. Para analizar la cantidad de vínculos que posee la teoría, se ha definido la matriz C_{AB} de dimensión $n^2 \times n^2$, que corresponde a un arreglo de multi-índices de la matriz $C_{ab}{}^{ef}$. Estudiando los autovalores de la matriz C_B^A , se ha encontrado que siguen un patrón muy sencillo: existen $n(n+1)/2$ autovalores nulos, $n(n-1)/2 - 1$ autovalores iguales a $\lambda = 2g^{00}$, y un autovalor igual a $(2-n)\lambda$. Los vínculos primarios se obtienen a partir de la contracción de la ecuación (4.32) con cada autovector con autovalor nulo. Con este procedimiento se

encuentran los n vínculos triviales $G_a^{(1)}$ y los $n(n-1)/2$ vínculos de Lorentz $G_{ab}^{(1)}$.

Para la construcción del Hamiltoniano canónico, debemos identificar cuántas velocidades canónicas pueden ser despejadas en términos de los momentos. Para ésto, hemos implementado un procedimiento que hace uso de la pseudoinversa de Moore-Penrose de la matriz C_{AB} . Esta nueva matriz D^{AB} se ha definido en (4.49) y ha sido construida a partir de la identificación de los autovalores de la matriz C . Con la matriz D podemos escribir el Hamiltoniano canónico, y calcular la consistencia de los vínculos primarios. Esta imposición arroja n vínculos secundarios $G_\mu^{(2)}$; vínculos relacionados con la invariancia de la teoría ante difeomorfismos, que garantizan que los vínculos primarios siguen siendo válidos a lo largo de la evolución dada por el Hamiltoniano primario H_p . Se encuentra que, al igual que relatividad general, el Hamiltoniano forma parte de un vínculo. No obstante, la diferencia fundamental entre ambas teorías proviene del hecho que $G_0^{(2)}$ es equivalente a la densidad Hamiltoniana canónica más un término de borde. Finalmente, ya que todos los vínculos son de primera clase, éstos son generadores de transformaciones de gauge, las cuales son ilustradas en la sección precedente. Finalmente, concluimos que hay $n(n+3)/2$ variables espurias, lo cual reduce el número de grados de libertad a $n(n-3)/2$.

En esta Tesis estamos interesados en estudiar teorías de gravedad basadas en modificaciones a la gravedad teleparalela. Un caso particular de estas teorías es la llamada gravedad $f(T)$, pero existen múltiples esquemas con estructura teleparalela diferentes que no caben en esta categoría. De hecho, la modificación más simple al Lagrangiano teleparalelo consiste en no otorgar valores numéricos a los coeficientes a_i que constituyen el Lagrangiano teleparalelo más general. Las técnicas desarrolladas en este Capítulo son aplicables simplemente modificando la supermétrica de manera que tenga coeficientes arbitrarios en su definición. Para Lagrangianos con alteraciones de mayor complejidad, será necesario recurrir a la introducción de variables auxiliares, como lo haremos a continuación con el caso de la gravedad $f(T)$. Los resultados presentados aquí tienen importancia en sí mismos, pero su importancia radica en el potencial para abarcar la formulación Hamiltoniana de un amplio espectro de teorías teleparalelas modificadas.

Capítulo 5

Formulación hamiltoniana de la gravedad teleparalela modificada

En este Capítulo estableceremos el formalismo Hamiltoniano para teorías teleparalelas de gravedad modificada o gravedad $f(T)$. Para ésto, usaremos los fundamentos desarrollados en el Capítulo 4, donde fue aplicado el algoritmo de Dirac–Bergmann para el equivalente teleparalelo de la relatividad general. El procedimiento y los resultados presentados aquí están basados en el trabajo [104].

Esperamos que el formalismo Hamiltoniano arroje alguna clave acerca de la naturaleza de los grados de libertad de la gravedad $f(T)$. En este camino, existe un único trabajo previo [68], que se basa en la formulación Hamiltoniana de la gravedad teleparalela desarrollada en [93]. Las conclusiones de [68] establecen que la gravedad $f(T)$ posee $\frac{n(n-3)}{2} + n - 1$ grados de libertad, es decir $n - 1$ grados de libertad extra con respecto a ETRG (o RG). Los autores sugieren que estos grados de libertad extra podrían corresponder a un campo vectorial masivo, o un campo escalar más un campo vectorial sin masa. Sin embargo, no otorgan claves concluyentes respecto a cuál sería el tipo de equivalencia que permite transformar la teoría para hacer patentes estos objetos físicos. En trabajos posteriores, no se encuentra tampoco alguna clave respecto a la equivalencia que permitiría entender estos $n - 1$ grados de libertad adicionales.

Como hemos visto en el Capítulo 2, no es posible obtener el marco de Einstein para la gravedad $f(T)$ por medio de una transformación conforme, lo cual sugiere que la teoría no tendría un único grado de libertad adicional. Se ha mostrado que la teoría es conformemente equivalente a un campo escalar fantasma con un acoplamiento no minimal al término de borde. Esto ha originado el interés por teorías más generales llamadas $f(T, B)$, donde la función depende también del término de borde B . En general, estas teorías

engloban a la gravedad $f(R)$ y la gravedad $f(T)$, pero no logran sobrellevar el problema de la pérdida de la invariancia local de Lorentz sin tener ecuaciones de movimiento de cuarto orden, producto de la intromisión del término de borde. No obstante, hay un caso de interés donde modelos de energía oscura teleparalela no minimalmente acoplados a un campo escalar son conformemente equivalentes a modelos $f(T, B)$ o modelos $T + f(B)$ [105].

Respecto al tema de la pérdida de la invariancia local de Lorentz, también han habido intentos de una formulación “covariante” [55], la cual consiste en definir una tétrada inercial en la cual la gravedad es apagada ($G \rightarrow 0$); luego esta tétrada delimitaría un espacio-tiempo asintóticamente Minkowskiano. Esta tétrada define una conexión llamada “inercial”, que es diferente a la conexión de Weitzenböck, y que satisface la condición de curvatura cero. Ya hemos visto que tanto en gravedad teleparalela como en gravedad $f(T)$, la conexión no está determinada por la teoría, puesto que la variación del Lagrangiano respecto a la conexión no define una ecuación dinámica para ésta. Por tanto, la elección de la conexión es arbitraria, siempre y cuando se respete la condición de curvatura cero. Es decir, cualquier elección es *a priori* una manifestación de la pérdida de la invariancia local. En el método definido en [55], hay ciertas geometrías para las cuales la tétrada inercial no está bien definida, como por ejemplo la métrica cosmológica de Friedman-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW). Estos problemas, junto con el procedimiento impreciso de apagar la gravedad para una determinada tétrada, nos desaniman para considerar adoptar esta formulación para la gravedad $f(T)$.

Con todo esto en mente, está claro que el asunto de la interpretación de los grados de libertad adicionales en este tipo de teorías es un tema abierto, el cual esperamos que se pueda esclarecer con el establecimiento de la formulación Hamiltoniana. Para esto, es necesaria la introducción de una variable auxiliar, que será un campo escalar (y su momento conjugado asociado). Este paso fue adoptado igualmente en [68], y es necesario para absorber la arbitrariedad de la función f y para simplificar el álgebra de vínculos. Si no añadiéramos esta variable auxiliar, el formalismo toma una forma complicada y presenta problemas, un hecho que mostraremos en la siguiente sección.

5.1. Formulación canónica

Llamaremos formulación canónica de la gravedad $f(T)$ al procedimiento Hamiltoniano que no recurre a la introducción de variables auxiliares. En la formulación canónica se trabaja con la siguiente densidad Lagrangiana

$$\mathcal{L} = Ef(T), \tag{5.1}$$

cuyo momento canónico estará definido como

$$\Pi_a^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 E_\mu^a)} = f'(T) \frac{\partial T}{\partial(\partial_0 E_\mu^a)} = f'(T) E \partial_\rho E_\lambda^b e_c^0 e_e^\mu e_d^\rho e_f^\lambda M_{ab}{}^{cedf}. \quad (5.2)$$

Notar que en este formalismo tenemos n^2 coordenadas dinámicas dadas por las componentes de la tétrada E_μ^a . Las relaciones fundamentales que satisfacen la tétrada y los momentos canónicos son

$$\{E_\mu^a(x), \Pi_b^\nu(y)\} = \delta_b^a \delta_\mu^\nu \delta^{(n-1)}(x-y). \quad (5.3)$$

Salta a la vista de (5.2) que el vínculo primario $G_a^{(1)} = \Pi_a^0 \approx 0$ también está presente en la gravedad $f(T)$. Removiendo esta contribución y recurriendo a la notación de multi-índices, podemos escribir la ecuación para el momento canónico generalizado $\Pi_A = E_i^e \Pi_a^i$ como

$$\Pi_A - f'(T) P_A = E f'(T) C_{AB} (\dot{E}^B - E_0^B). \quad (5.4)$$

La matriz C_{AB} se define de manera idéntica que en el caso de ETRG, por tanto posee los mismos autovectores $v_{|gh|e}^a = 2\delta_{[g}^a \eta_{h]e}$, que son un subconjunto del subespacio de autovectores nulos. Estos autovectores generan el siguiente conjunto de vínculos primarios (5.4)

$$G_{gh}^{(1)} = 2\eta_{e[h} \Pi_{g]}^i E_i^e + 4f'(T) E \partial_i E_j^b e_{[h}^0 e_g^i e_{b]}^j. \quad (5.5)$$

Estos vínculos son análogos a los vínculos del álgebra de Lorentz en ETRG, pero se encuentran ligeramente modificados por la presencia del término $f'(T)$, el cual complicará el cálculo del álgebra de vínculos. En particular, es posible que no todos estos vínculos sean vínculos de primera clase, por tanto no todas las transformaciones locales de Lorentz generarán transformaciones de gauge. Esto es esperable, dada la pérdida de la invariancia local de Lorentz de la teoría. Para intentar visualizar las complicaciones que aparecen, podemos calcular, a modo de ejemplo, el corchete de Poisson entre los vínculos primarios $G_a^{(1)}$ y $G_{bc}^{(1)}$. Vemos que

$$\{G_a^{(1)}(x), G_{bc}^{(1)}(y)\} = f''(T) E \partial_i^x E_j^d e_{[b}^0 e_c^i e_{d]}^j \frac{\partial T}{\partial E_0^a} \delta(x-y). \quad (5.6)$$

Esta expresión es diferente de cero, puesto que la derivada parcial $\frac{\partial T}{\partial E_0^a}$ es no trivial, esto en contraste con ETRG donde sí se anulaba debido a que $f''(T) = 0$. A partir de acá surgen muchas complicaciones que como veremos,

se solucionan con la introducción de una variable auxiliar. El término molesto $f'(T)$ continúa incluso en el Hamiltoniano canónico, el cual se escribe como

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \Pi_a^i \partial_0 E_i^a - Ef(T) \\ &= \frac{e}{f'(T)} (\Pi_A - f'(T)P_A) \Pi_B D^{AB} + \Pi_B E_0^B - Ef(T).\end{aligned}\quad (5.7)$$

Vemos que el término $f'(T)$ aparece en el denominador de una fracción, por tanto cada corchete de Poisson de H_p con el momento canónico arrojará términos diferentes de cero y cada vez más complejos, complicando los cálculos. Como es sabido, en la formulación canónica de una teoría puede escogerse convenientemente las coordenadas canónicas con tal de simplificar el álgebra de vínculos. En este caso, parece natural definir una variable que encierre la complejidad generada por el término $f'(T)$.

5.2. Equivalencia escalar

Reformularemos la gravedad $f(T)$ como una teoría escalar-tensorial, tomando la siguiente acción que contiene como variables dinámicas la tétrada E_μ^a y un campo escalar ϕ

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x E [\phi T - V(\phi)] + S_m(e_\mu^a, \Psi), \quad (5.8)$$

donde $V(\phi)$ es un potencial auxiliar para el campo ϕ , y $S_m(e_\mu^a, \Psi)$ es la acción para campos de materia. Ya que la acción no incluye términos cinéticos para ϕ , éste será un campo escalar sin dinámica. Si variamos la acción con respecto a ϕ se obtiene $T = V'(\phi)$, viendo que hay una relación directa entre el campo escalar y el escalar de torsión.

Esta relación entre T y el potencial del escalar auxiliar muestra que la acción (5.8) es dinámicamente equivalente a una acción definida por la densidad Lagrangiana (5.1). Es decir,

$$\mathcal{L} = Ef(T) = E(\phi T - V(\phi)) = E \left(\phi \frac{dV}{d\phi} - V(\phi) \right) \quad (5.9)$$

es la transformada de Legendre de la función $V(\phi)$. Para que dos variables estén relacionadas por una transformada de Legendre, sus derivadas deben ser funciones inversas la una de la otra. En este caso la transformación inversa está representada por $f'(T) = \phi$.

Es interesante ver que la acción (5.8) es un caso particular de la acción de Brans-Dicke

$$S_{JF} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x E [\phi T - \omega(\phi) g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - V(\phi)] + S_m(e_\mu^a, \Psi), \quad (5.10)$$

la cual representa una acción escalar-tensorial general con un campo ϕ no minimalmente acoplado al escalar de torsión. La acción (5.8) es un caso particular de la acción de Brans-Dicke para $\omega = 0$.

Se concluye que la gravedad $f(T)$ es dinámicamente equivalente a la acción (5.8), donde $f(T)$ y $V(\phi)$ están relacionados a través de la transformación de Legendre (5.9). Es importante mencionar que el límite de ETRG se obtiene de vuelta en (5.8) cuando se hace $\phi = 1$ y $V(\phi) = 0$.

5.3. Modelo de juguete: Lagrangiano pseudo-invariante rotacional

En esta sección desarrollaremos la formulación Hamiltoniana de un modelo de juguete que satisface características análogas a la gravedad $f(T)$. Es posible decir que la gravedad teleparalela tiene una pseudo-invariancia local de Lorentz, puesto que el Lagrangiano se construye a partir del escalar de torsión T , el cual difiere de un invariante local de Lorentz por un término de borde. Por otro lado, la gravedad $f(T)$ es la teoría que se obtiene luego de modificar una teoría con pseudo-invariancia local de Lorentz, lo cual se realiza tomando una función del escalar de torsión que rompe esta pseudo-invariancia.

El ejemplo de juguete que tomaremos consiste en una teoría con pseudo-invariancia rotacional. Primero desarrollaremos el formalismo Hamiltoniano para la teoría pseudo-invariante rotacional, y luego vemos cómo se ve alterado este formalismo producto de la modificación al Lagrangiano. De manera análoga a la gravedad $f(T)$, tomaremos una función general del pseudo-invariante rotacional y luego aplicaremos la equivalencia escalar de la sección anterior para desarrollar la formulación Hamiltoniana de este modelo.

Desarrollaremos una teoría con pseudo-invariancia rotacional a partir de dos coordenadas (x, y) , a partir de las cuales definimos la coordenada canónica $z = x + iy$. Bajo una rotación parametrizada por el factor $e^{i\alpha(t)}$, la derivada de la coordenada canónica transforma como $\dot{z} \rightarrow e^{i\alpha(t)}(\dot{z} + i\dot{\alpha}z)$. Por tanto, el cociente

$$\frac{\dot{z}}{z} \rightarrow \frac{\dot{z}}{z} + i\dot{\alpha} \quad (5.11)$$

tiene una pseudo-invariancia ante rotaciones, al igual que el cociente $\frac{\dot{\bar{z}}}{\bar{z}}$, por tanto un Lagrangiano construido a partir de estas dos variables tendrá también pseudo-invariancia local ante rotaciones. Este Lagrangiano puede escogerse como

$$L = A \frac{\dot{z}}{z} + B \frac{\dot{\bar{z}}}{\bar{z}} + U(z\bar{z}). \quad (5.12)$$

Bajo una rotación, este Lagrangiano adquiere un término de borde, siempre y cuando $A \neq B$. Calculamos el formalismo Hamiltoniano de esta teoría definiendo los momentos canónicos, que están dados por

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} \equiv p_z = \frac{A}{z}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\bar{z}}} \equiv p_{\bar{z}} = \frac{B}{\bar{z}}. \quad (5.13)$$

Ya que los momentos canónicos son función únicamente de las coordenadas canónicas y no de las velocidades, decimos que los momentos forman parte de vínculos primarios, que serán denotados por $G_z^{(1)}$ y $G_{\bar{z}}^{(1)}$, y estarán definidos por

$$G_z^{(1)} \equiv p_z - \frac{A}{z} \approx 0, \quad G_{\bar{z}}^{(1)} \equiv p_{\bar{z}} - \frac{B}{\bar{z}} \approx 0. \quad (5.14)$$

Escribimos el Hamiltoniano asociado a (5.12)

$$H = p_z \dot{z} + p_{\bar{z}} \dot{\bar{z}} - L = U(z\bar{z}), \quad (5.15)$$

y con él, obtenemos el Hamiltoniano primario

$$H_p = U(z\bar{z}) + u^z \left(p_z - \frac{A}{z} \right) + u^{\bar{z}} \left(p_{\bar{z}} - \frac{B}{\bar{z}} \right). \quad (5.16)$$

La consistencia en el tiempo de los vínculos primarios se logra por medio de la imposición de que $\dot{G}^{(1)} = \{G^{(1)}, H_p\} \stackrel{!}{\approx} 0$. Esto da origen a las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} \{G_z^{(1)}, H_p\} &= -U' \bar{z} \stackrel{!}{\approx} 0 \equiv G_z^{(2)}, \\ \{G_{\bar{z}}^{(1)}, H_p\} &= -U' z \stackrel{!}{\approx} 0 \equiv G_{\bar{z}}^{(2)}, \end{aligned} \quad (5.17)$$

donde hemos definido $U' = \frac{\partial U}{\partial(z\bar{z})}$. Vemos que los dos vínculos secundarios dependen el uno del otro a través de la relación

$$zG_z^{(2)} = \bar{z}G_{\bar{z}}^{(2)}, \quad (5.18)$$

por tanto nos encontramos en el caso de un sistema reducible [84]. En estos casos se debe escoger un conjunto mínimo de vínculos secundarios que sean linealmente independientes. En nuestro caso tenemos un único vínculo secundario independiente, que definimos como $G^{(2)} = z\bar{z}U'$. Estudiamos su consistencia en el tiempo por medio de la ecuación

$$\dot{G}^{(2)} = \{G^{(2)}, H_p\} = u^z(\bar{z}U' + z\bar{z}^2U'') + u^{\bar{z}}(zU' + z^2\bar{z}U'') \approx 0. \quad (5.19)$$

La ecuación anterior no impone nuevas condiciones, sino que restringe los multiplicadores de Lagrange a satisfacer la siguiente relación

$$u^z = -\frac{z}{\bar{z}}u^{\bar{z}}. \quad (5.20)$$

Esto implica una relación de dependencia entre ambos multiplicadores, lo cual sugiere que uno de los vínculos primarios $G^{(1)}$ debe ser de primera clase, mientras que el vínculo restante debe ser de segunda clase. El corchete de ambos vínculos primarios con $G^{(2)}$ no es débilmente cero, por tanto estos serían de segunda clase. Esta presunta inconsistencia nos dice que debemos escoger otra base para el subespacio de vínculos primarios. Si escogemos la siguiente combinación lineal de vínculos primarios

$$\begin{aligned} G_a^{(1)} &\equiv \frac{1}{2} \left(zG_z^{(1)} - \bar{z}G_{\bar{z}}^{(1)} \right) = \frac{1}{2} (zp_z - \bar{z}p_{\bar{z}} + (B - A)), \\ G_b^{(1)} &\equiv \frac{1}{2} \left(zG_z^{(1)} + \bar{z}G_{\bar{z}}^{(1)} \right) = \frac{1}{2} (zp_z + \bar{z}p_{\bar{z}} - (B + A)), \end{aligned} \quad (5.21)$$

obtenemos el siguiente álgebra de vínculos

$$\begin{aligned} \{G_a^{(1)}, G_b^{(1)}\} &= 0, \\ \{G_a^{(1)}, G^{(2)}\} &= 0, \\ \{G_b^{(1)}, G^{(2)}\} &= -z\bar{z}U' - z^2\bar{z}^2U'' \approx -z^2\bar{z}^2U''. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Vemos que $G_a^{(1)}$ es de primera clase, pues conmuta con el resto de los vínculos, y $G_b^{(1)}$, $G^{(2)}$ son de segunda clase.

El conteo de grados de libertad es como sigue: tenemos dos pares canónicos (z, p_z) , $(\bar{z}, p_{\bar{z}})$ que generan dos grados de libertad. Uno de ellos es removido por el vínculo de primera clase $G_a^{(1)}$, el otro por el par de vínculos de segunda clase $G_b^{(1)}$, $G^{(2)}$, dejando a la teoría con ningún grado de libertad.

Finalmente, queda determinar los multiplicadores de Lagrange asociados a la nueva definición de vínculos primarios $G_a^{(1)}$ y $G_b^{(1)}$. El Hamiltoniano primario se escribe como

$$H_p = U(z\bar{z}) + \frac{u^a}{2} (zp_z - \bar{z}p_{\bar{z}} + (B - A)) + \frac{u^b}{2} (zp_z + \bar{z}p_{\bar{z}} - (B + A)), \quad (5.23)$$

mientras que las ecuaciones de consistencia son triviales para $G_a^{(1)}$ y $G_b^{(1)}$, a excepción del vínculo $G^{(2)}$, cuya ecuación es

$$\dot{G}^{(2)} = -u^b (z^2\bar{z}^2U'') \stackrel{!}{\approx} 0. \quad (5.24)$$

La única solución posible a esta ecuación es que $u^b = 0$. Por otro lado, las ecuaciones no fijan el multiplicador u^a , que queda indeterminado, y por tanto da origen a una transformación de gauge que es generada por el vínculo $G_a^{(1)}$.

Ahora estudiaremos el efecto sobre la formulación Hamiltoniana de una teoría con pseudo-invariancia local modificada, es decir cuyo Lagrangiano sea una función $f\left(A\frac{\dot{z}}{z} + B\frac{\dot{\bar{z}}}{\bar{z}} + U(z\bar{z})\right)$. Es fácil demostrar que tal teoría puede reescribirse de manera equivalente por medio del siguiente Lagrangiano

$$L = \phi \left(A\frac{\dot{z}}{z} + B\frac{\dot{\bar{z}}}{\bar{z}} + U(z\bar{z}) \right) - V(\phi). \quad (5.25)$$

Hemos añadido una nueva coordenada canónica auxiliar ϕ para absorber el efecto de la función arbitraria. Los momentos canónicos quedan como

$$\begin{aligned} p_z = \frac{A\phi}{z} &\longrightarrow G_z^{(1)} \equiv p_z - \frac{A\phi}{z} \approx 0, \\ p_{\bar{z}} = \frac{B\phi}{\bar{z}} &\longrightarrow G_{\bar{z}}^{(1)} \equiv p_{\bar{z}} - \frac{B\phi}{\bar{z}} \approx 0, \\ \pi = 0 &\equiv G_\pi^{(1)}, \end{aligned} \quad (5.26)$$

donde π es el momento canónico conjugado a ϕ . El Hamiltoniano canónico corresponde a $H = \phi U(z\bar{z}) + V(\phi)$; con éste escribimos el Hamiltoniano primario como

$$H_p = \phi U(z\bar{z}) + V(\phi) + u^z \left(p_z - \frac{A\phi}{z} \right) + u^{\bar{z}} \left(p_{\bar{z}} - \frac{B\phi}{\bar{z}} \right) + u^\pi \pi. \quad (5.27)$$

La consistencia de los vínculos primarios da origen al siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \dot{G}_z^{(1)} &= \{G_z^{(1)}, H\} + u^z \{G_z^{(1)}, G_z^{(1)}\} + u^{\bar{z}} \{G_z^{(1)}, G_{\bar{z}}^{(1)}\} + u^\pi \{G_z^{(1)}, G_\pi^{(1)}\}, \\ \dot{G}_{\bar{z}}^{(1)} &= \{G_{\bar{z}}^{(1)}, H\} + u^z \{G_{\bar{z}}^{(1)}, G_z^{(1)}\} + u^{\bar{z}} \{G_{\bar{z}}^{(1)}, G_{\bar{z}}^{(1)}\} + u^\pi \{G_{\bar{z}}^{(1)}, G_\pi^{(1)}\}, \\ \dot{G}_\pi^{(1)} &= \{G_\pi^{(1)}, H\} + u^z \{G_\pi^{(1)}, G_z^{(1)}\} + u^{\bar{z}} \{G_\pi^{(1)}, G_{\bar{z}}^{(1)}\} + u^\pi \{G_\pi^{(1)}, G_\pi^{(1)}\}, \end{aligned} \quad (5.28)$$

o también

$$\begin{aligned} \dot{G}_z^{(1)} &= -\phi \bar{z} U' - u^\pi \frac{A}{z} \approx 0, \\ \dot{G}_{\bar{z}}^{(1)} &= -\phi z U' - u^\pi \frac{B}{\bar{z}} \approx 0, \\ \dot{G}_\pi^{(1)} &= -U - \frac{dV}{d\phi} + u^z \frac{A}{z} + u^{\bar{z}} \frac{B}{\bar{z}} \approx 0. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Este sistema puede escribirse como un sistema matricial de la forma

$$h_{\rho'} + u^\rho C_{\rho'\rho} \approx 0. \quad (5.30)$$

Usamos esta forma para escribir el sistema (5.29), obteniendo que

$$\begin{pmatrix} -\phi\bar{z}U' \\ -\phi zU' \\ -U - \frac{dV}{d\phi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -A/z \\ 0 & 0 & -B/\bar{z} \\ A/z & B/\bar{z} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^z \\ u^{\bar{z}} \\ u^\pi \end{pmatrix} \approx 0. \quad (5.31)$$

Los autovectores nulos de la matriz $C_{\rho'\rho}$ determinarán condiciones sobre los multiplicadores de Lagrange, o darán lugar a nuevos vínculos. En nuestro caso tenemos un solo autovector nulo $V_{(1)}^{\rho'} = (zB, -\bar{z}A, 0)$, el cual da origen a la condición

$$V^{\rho'} \cdot h_{\rho'} = -\phi z \bar{z} U' (B - A) \stackrel{!}{\approx} 0. \quad (5.32)$$

Esta condición corresponde a un vínculo secundario genuino

$$G^{(2)} = \phi z \bar{z} U' (B - A) = 0. \quad (5.33)$$

Este vínculo existe cuando $B - A \neq 0$. Si $B - A = 0$ el Lagrangiano de partida ya no es pseudo-invariante sino que invariante, que no es el caso que queremos considerar. Asumiendo que estamos en el primer caso, el vínculo secundario puede escribirse como $G^{(2)} = \phi z \bar{z} U'$, y podemos calcular su consistencia en el tiempo, obteniendo

$$\begin{aligned} \dot{G}^{(2)} &= \{G^{(2)}, H_p\} \\ &= u^z \phi \bar{z} (U' + z \bar{z} U'') + u^{\bar{z}} \phi z (U' + z \bar{z} U'') + u^\pi z \bar{z} U' \stackrel{!}{\approx} 0. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Esta condición añade una fila adicional a la matriz C , luego el sistema se escribe como

$$h_{\hat{\rho}} + u^\rho C_{\hat{\rho}\rho} \approx 0, \quad (5.35)$$

y de manera explícita como el siguiente sistema

$$\begin{pmatrix} -\phi\bar{z}U' \\ -\phi zU' \\ -U - \frac{dV}{d\phi} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -A/z \\ 0 & 0 & -B/\bar{z} \\ A/z & B/\bar{z} & 0 \\ \phi\bar{z}(U' + z\bar{z}U'') & \phi z(U' + z\bar{z}U'') & z\bar{z}U' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^z \\ u^{\bar{z}} \\ u^\pi \end{pmatrix} \approx 0. \quad (5.36)$$

La matriz $C_{\hat{\rho}\rho}$ posee un autovector por la izquierda dado por

$$\omega_{(1)}^{\hat{\rho}} = (U' + z\bar{z}U'') \left(\frac{\phi}{\bar{z}} B(A - B), -\frac{\phi}{z} A(A - B), 0, 0 \right). \quad (5.37)$$

Este autovector impone la condición $\omega^{\hat{\rho}} \cdot h_{\hat{\rho}} \stackrel{!}{\approx} 0$. En este caso, esta condición es idénticamente cero, cerrando la posibilidad a que existan nuevos vínculos secundarios. Por lo tanto, el formalismo Hamiltoniano termina aquí y podemos realizar el conteo de grados de libertad. Tenemos cuatro vínculos secundarios que remueven dos grados de libertad que generan los pares canónicos $(\phi, \pi), (z, p_z), (\bar{z}, p_{\bar{z}})$, dejando un solo grado de libertad para la teoría.

Queda encontrar los multiplicadores de Lagrange, los cuales pueden obtenerse a partir del sistema

$$\begin{aligned}
\dot{G}_z^{(1)} &= -u^\pi \frac{A}{z} \approx 0, \\
\dot{G}_{\bar{z}}^{(1)} &= -u^\pi \frac{B}{\bar{z}} \approx 0, \\
\dot{G}_\pi^{(1)} &= -U - \frac{dV}{d\phi} + u^z \frac{A}{z} + u^{\bar{z}} \frac{B}{\bar{z}} \approx 0, \\
\dot{G}^{(2)} &= u^z \phi \bar{z} (U' + z \bar{z} U'') + u^{\bar{z}} \phi z (U' + z \bar{z} U'') + u^\pi z \bar{z} U' \stackrel{!}{\approx} 0.
\end{aligned} \tag{5.38}$$

Para que este sistema sea consistente debe cumplirse que $u^\pi = 0$. En este caso nos quedamos con el sistema

$$\begin{aligned}
u^z &= -\frac{z}{\bar{z}} u^{\bar{z}}, \\
U + \frac{dV}{d\phi} + \frac{A}{z} u^{\bar{z}} - u^{\bar{z}} \frac{B}{\bar{z}} &= 0,
\end{aligned} \tag{5.39}$$

el cual se resuelve para los siguientes valores de los multiplicadores

$$u^z = -\frac{z}{B-A} \left(U + \frac{dV}{d\phi} \right), \quad u^{\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{B-A} \left(U + \frac{dV}{d\phi} \right). \tag{5.40}$$

Este ejemplo nos otorga varias lecciones que deberemos tener en cuenta para el caso de la gravedad $f(T)$. Si bien es un caso simplificado, muestra de manera clara cómo debe realizarse el planteamiento y la resolución de las ecuaciones para los multiplicadores de Lagrange en términos de los autovectores nulos por la izquierda y la derecha. En el caso de la gravedad $f(T)$, la dimensión de las matrices y sus autovectores será notablemente más grandes, y por tanto el procedimiento tendrá una mayor complejidad.

5.4. Momentos canónicos y vínculos primarios

El punto de partida de la formulación Hamiltoniana de la gravedad $f(T)$ será el Lagrangiano que estudiamos con anterioridad en ETRG, el cual fue

escrito explícitamente en términos de la tétrada. De acuerdo al procedimiento descrito en [99], el escalar de torsión se escribe en términos de derivadas de la tétrada E_μ^a y la tétrada inversa e_a^μ . Esto, sumado a la equivalencia escalar, permiten escribir el Lagrangiano de la gravedad $f(T)$ como

$$\mathcal{L} = E \left[\frac{1}{2} \phi \partial_\mu E_\nu^a \partial_\rho E_\lambda^b e_c^\mu e_e^\nu e_d^\rho e_f^\lambda M_{ab}^{cedf} - V(\phi) \right]. \quad (5.41)$$

La formulación Hamiltoniana considerará n^2 coordenadas canónicas provenientes de las componentes de la tétrada E_μ^a , y 1 coordenada canónica asociada al campo escalar auxiliar, por tanto tendremos $n^2 + 1$ coordenadas canónicas en este formalismo. A partir de la observación que el Lagrangiano (5.41) no tiene derivada temporal en las variables ϕ y E_0^a , podemos obtener algunos vínculos primarios de la teoría. Es decir, ya que

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)} = 0, \quad (5.42)$$

$$\Pi_a^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 E_0^a)} = 0, \quad (5.43)$$

se obtienen los siguientes $n + 1$ vínculos primarios

$$\begin{aligned} G_\pi^{(1)} &= \pi \approx 0, \\ G_a^{(1)} &= \Pi_a^0 \approx 0, \end{aligned} \quad (5.44)$$

donde π es el momento conjugado de ϕ , y Π_a^0 es el momento conjugado de E_0^a . Es simple ver que, removiendo los Π_a^0 de la definición de los momentos canónicos (5.2), el resto de los momentos canónicos estarán definidos por

$$\Pi_a^i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 E_i^a)} = \phi E \partial_\rho E_\lambda^b e_c^0 e_e^i e_d^\rho e_f^\lambda M_{ab}^{cedf}. \quad (5.45)$$

El formalismo Hamiltoniano continúa con la definición de los corchetes de Poisson de la teoría, el cual se calcula entre dos campos $A(t, \mathbf{x})$ y $B(t, \mathbf{y})$ a tiempos iguales como

$$\begin{aligned} \{A(t, \mathbf{x}), B(t, \mathbf{y})\} &= \int d\mathbf{z} \left(\frac{\delta A(t, \mathbf{x})}{\delta E_i^a(\mathbf{z})} \frac{\delta B(t, \mathbf{y})}{\delta \Pi_a^i(\mathbf{z})} - \frac{\delta A(t, \mathbf{x})}{\delta \Pi_a^i(\mathbf{z})} \frac{\delta B(t, \mathbf{y})}{\delta E_i^a(\mathbf{z})} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\delta A(t, \mathbf{x})}{\delta \phi(\mathbf{z})} \frac{\delta B(t, \mathbf{y})}{\delta \pi(\mathbf{z})} - \frac{\delta A(t, \mathbf{x})}{\delta \pi(\mathbf{z})} \frac{\delta B(t, \mathbf{y})}{\delta \phi(\mathbf{z})} \right). \end{aligned} \quad (5.46)$$

Por tanto, los corchetes fundamentales en esta teoría estarán dados por

$$\begin{aligned} \{E_\mu^a(\mathbf{x}), \Pi_b^\nu(\mathbf{y})\} &= \delta_b^a \delta_\nu^\mu \delta^{(n-1)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\ \{\phi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y})\} &= \delta^{(n-1)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \end{aligned} \quad (5.47)$$

mientras que el resto de los corchetes cruzados entre momentos y variables canónicas son cero.

La diferencia entre los corchetes fundamentales (5.47) y aquellos que definimos en la gravedad teleparalela radica en la presencia de la nueva coordenada canónica ϕ . Podemos reescribir la expresión para el momento canónico Π_a^i en notación de multi-índices, tomando la combinación $\Pi_a^i E_i^e \equiv \Pi_A$, la cual se escribe como

$$\Pi_A - \phi P_A = E \phi C_{AB} (\dot{E}^B - E_0^B). \quad (5.48)$$

La notación que hemos usado en esta ecuación se introdujo en el Capítulo 4 en el conjunto de ecuaciones (4.30).

La expresión (5.48) nos facilita la derivación de los vínculos primarios de la teoría debido a la aparición de la matriz C_{AB} , cuyos autovectores nulos son idénticos al caso de la gravedad teleparalela. Ya hemos visto que el vínculo $G_a^{(1)} = \Pi_a^0 \approx 0$ aparece en la gravedad $f(T)$, pero puede obtenerse también observando que corresponde a aplicar el autovector $v_{|g|e}^a = e_e^0 \delta_g^a$ en la expresión (5.48). El resto de los autovectores nulos dados por $v_{|gh|e}^a$, generan vínculos que son análogos a los vínculos del álgebra de Lorentz (5.5), y están dados por

$$G_{ab}^{(1)} = 2\eta_{e[b} \Pi_{a]}^i E_i^e + 4\phi E \partial_i E_j^c e_{[b}^0 e_a^i e_c^j \approx 0. \quad (5.49)$$

Estos serán $\frac{n(n-1)}{2}$ vínculos primarios que han sido obtenidos de la misma forma que en el caso de la gravedad teleparalela. Sin embargo, se observa una diferencia que ya anticipamos en la formulación canónica, que corresponde a la intromisión de ϕ en el segundo término de la expresión $G_{ab}^{(1)}$.

En conclusión, hemos obtenido un conjunto de $\frac{n(n-1)}{2} + n + 1$ vínculos primarios ($G_{ab}^{(1)}, G_c^{(1)}, G_\pi^{(1)}$), los cuales definen una hipersuperficie Γ en el espacio de fase de la teoría. Con los vínculos primarios ya podríamos construir el Hamiltoniano primario y estudiar la consistencia de éstos, pero aún queda escribir el Hamiltoniano en la forma canónica.

5.5. Consistencia a través del formalismo Lagrangiano

Antes de proceder al estudio de la consistencia a través del formalismo Hamiltoniano, en un paso previo podemos intentar estudiar la consistencia del vínculo $\Pi_a^0 \approx 0$ a través de las ecuaciones de Euler–Lagrange en el formalismo Lagrangiano. Esta digresión nos ayudará luego a identificar correctamente

los vínculos de segunda clase en la teoría, permitiendo anticipar algunos resultados.

De la misma forma que hicimos para la gravedad teleparalela, en la gravedad $f(T)$ las ecuaciones de Euler–Lagrange se escriben como

$$\begin{aligned} \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu E_\nu^a)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial E_\nu^a} &= 0, \\ \longrightarrow \partial_0 \Pi_a^\nu + \partial_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i E_\nu^a)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial E_\nu^a} &= 0. \end{aligned} \quad (5.50)$$

Notar que ahora las definiciones de Π_a^ν y \mathcal{L} que rigen son aquellas dadas por (5.45) y (5.41), respectivamente. Al igual que en la gravedad teleparalela, las ecuaciones de Euler–Lagrange (5.50) arrojan una expresión para la derivada temporal del momento canónico como

$$\partial_0 \Pi_a^\nu + \partial_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i E_\nu^a)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial E_\nu^a} = 0. \quad (5.51)$$

Si imponemos que los vínculos Π_a^0 deben satisfacerse a todo tiempo, obtenemos n ecuaciones para $\nu = 0$, que nos dicen que debe cumplirse $\partial_0 \Pi_a^0 \approx 0$, es decir

$$\partial_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i E_\nu^a)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial E_\nu^a} = 0. \quad (5.52)$$

El primer término de esta expresión puede escribirse en función de Π_a^i , quedando n vínculos secundarios dados por

$$\partial_i \Pi_a^i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial E_0^a} = 0. \quad (5.53)$$

El cálculo de la expresión $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial E_0^a}$ nos lleva al resultado

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial E_0^a} = e_a^0 \mathcal{L} + 2e_a^0 \partial_{[i} E_{0]}^c \Pi_c^i + 2e_a^j \partial_{[i} E_{j]}^c \Pi_c^i. \quad (5.54)$$

Notamos que esta variación no depende de ϕ , lo cual se explica por medio de la observación que tanto \mathcal{L} como Π_a^i han absorbido un factor ϕ en sus definiciones respectivas. La densidad Hamiltoniana puede ser extraída de los primeros términos, por tanto poniendo este resultado de vuelta en (5.51) obtenemos los vínculos secundarios

$$\begin{aligned} G_0^{(2)} &= \mathcal{H} - \partial_i (E_0^c \Pi_c^i) \approx 0, \\ G_k^{(2)} &= \partial_k E_i^c \Pi_c^i - \partial_i (E_k^c \Pi_c^i) \approx 0. \end{aligned} \quad (5.55)$$

Por otro lado, las ecuaciones de Euler–Lagrange para la variable ϕ son

$$\partial^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0. \quad (5.56)$$

Si imponemos que el vínculo primario π se preserve en el tiempo, es decir $\partial_0 \pi \approx 0$, obtenemos la condición

$$\partial_0 \pi + \partial_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_i \phi} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \quad \longrightarrow \quad T - V'(\phi) \approx 0. \quad (5.57)$$

Esta condición es precisamente la transformada de Legendre que definimos para la equivalencia escalar. Esta condición puede ser pensada como un vínculo secundario, pero más adelante veremos que la ecuación anterior forma parte de las soluciones para los multiplicadores de Lagrange.

5.6. Hamiltoniano canónico

En esta sección obtendremos el Hamiltoniano canónico \mathcal{H} , que luego nos servirá para imponer la consistencia de los vínculos primarios, pues \mathcal{H} forma parte del Hamiltoniano primario \mathcal{H}_p . Con la ayuda del procedimiento de pseudoinversas y la notación multi-índice desarrollada en el Capítulo 4, esta es una tarea simple. Comenzamos reescribiendo la expresión (5.45) para el momento canónico en la notación de multi-índices como

$$\Pi_A - \phi P_A = \phi E C_{AB} (\dot{E}^B - E_0^B). \quad (5.58)$$

Ya sabemos que existe una inversa para la matriz C_{AB} denotada por D^{AB} , con la cual resolvemos $\frac{n(n-1)}{2}$ velocidades, que quedan

$$\dot{E}^B = \frac{e}{\phi} D^{AB} (\Pi_A - \phi P_A) + E_0^B. \quad (5.59)$$

Por otro lado, reescribimos la densidad Lagrangiana en términos de los momentos canónicos y las velocidades como

$$\mathcal{L} = \phi ET - EV(\phi) = \frac{1}{2} (\Pi_A + \phi P_A) (\dot{E}^A - E_0^A) - \phi U - EV(\phi), \quad (5.60)$$

donde, al igual que ETRG, se define

$$U = -\frac{1}{2} E \partial_i E_j^a \partial_k E_l^b e_c^i e_e^j e_d^k e_f^l M_{ab}^{cdef}.$$

Si reemplazamos las velocidades (5.59) en el Lagrangiano (5.60), obtenemos

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2\phi}(e\Pi_A\Pi_B D^{AB} - \phi^2 e P_A P_B D^{AB}) - \phi U - EV(\phi). \quad (5.61)$$

De aquí vemos también que hay una expresión sencilla para el escalar de torsión en términos de los momentos canónicos

$$T = \frac{e^2}{2} \left(\frac{1}{\phi^2} \Pi_A \Pi_B D^{AB} - P_A P_B D^{AB} \right) - eU. \quad (5.62)$$

La densidad Hamiltoniana está definida como

$$\mathcal{H} = \pi \dot{\phi} + \Pi_a^i \dot{E}_i^a - \mathcal{L}, \quad (5.63)$$

pero usando las velocidades (5.59) y el Lagrangiano (5.61) que ya están en la forma canónica, se encuentra que el Hamiltoniano canónico es

$$\mathcal{H} = \frac{e}{2\phi} (\Pi_A - \phi P_A) (\Pi_B - \phi P_B) D^{AB} - \Pi_A E_0^A + \phi U + EV(\phi). \quad (5.64)$$

Finalmente, el Hamiltoniano primario es

$$\mathcal{H}_p = \mathcal{H} + u^\pi G_\pi^{(1)} + u^c G_c^{(1)} + u^{ab} G_{ab}^{(1)}. \quad (5.65)$$

En esta definición hemos introducido $\frac{n(n-1)}{2}$ multiplicadores de Lagrange u^{ab} , que tienen la propiedad de antisimetría $u^{ab} = -u^{ba}$, n multiplicadores u^c y 1 multiplicador u^π asociado al vínculo primario $G_\pi^{(1)}$.

5.7. Consistencia de los vínculos primarios

Por medio de las ecuaciones del formalismo Lagrangiano fue posible estudiar la consistencia en el tiempo del vínculo $G_c^{(1)}$; este análisis reveló la existencia de los vínculos secundarios $G_0^{(2)}$ y $G_i^{(2)}$. Esta es una buena forma de chequear de manera independiente parte de nuestros resultados, sin embargo es deseable obtener la consistencia de todos los vínculos por medio del procedimiento Hamiltoniano. Estudiaremos las relaciones de consistencia para los vínculos primarios $G_\rho^{(1)}$ (donde ρ denota el par de índices ab , los subíndices c y el subíndice π), las cuales se escriben genéricamente como

$$\{G_{\rho'}^{(1)}, \mathcal{H}\} + \{G_{\rho'}^{(1)}, G_\rho^{(1)}\} u^\rho \approx 0, \quad (5.66)$$

donde $u^\rho = \{u^{ab}, u^c, u^\pi\}$ denota el conjunto de $\frac{n(n-1)}{2} + n + 1$ multiplicadores de Lagrange. El resultado final requiere efectuar el cálculo de varios sub-corchetes, los cuales analizamos a continuación.

Vínculo primario $G_\pi^{(1)}$

El cálculo del corchete de Poisson con el vínculo $G_\pi^{(1)} = \pi \approx 0$ equivale, a nivel matemático, a aplicar la derivada $-\partial/\partial\phi$ a la expresión que se encuentre en la segunda entrada del corchete de Poisson respectivo (el signo $-$ va en concordancia con la definición en (5.47)). Por tanto, sólo serán diferentes de cero aquellos corchetes que involucren expresiones dependientes de ϕ , que en este caso son $G_{ab}^{(1)}$ y \mathcal{H} . Se han obtenido los siguientes resultados

$$\begin{aligned} \{G_\pi^{(1)}(\mathbf{x}), G_c^{(1)}(\mathbf{y})\} &= 0, \\ \{G_\pi^{(1)}(\mathbf{x}), G_\pi^{(1)}(\mathbf{y})\} &= 0, \\ \{G_\pi^{(1)}(\mathbf{x}), G_{ab}^{(1)}(\mathbf{y})\} &= F_{ab}\delta^{(n-1)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\ \{G_\pi^{(1)}(\mathbf{x}), \mathcal{H}(\mathbf{y})\} &= -F_\phi\delta^{(n-1)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \end{aligned} \tag{5.67}$$

donde se ha definido

$$\begin{aligned} F_\phi &= \frac{e}{2} \left(\frac{1}{\phi^2} \Pi_A \Pi_B D^{AB} - P_A P_B D^{AB} \right) - U - E \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi} \\ &= E \left(T - \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi} \right), \end{aligned} \tag{5.68}$$

y también se tiene que

$$\begin{aligned} F_{ab} &= 4E \partial_i E_j^c e_{[b}^0 e_a^i e_{c]}^j \\ &= \frac{4}{3} E (T_j (e_b^0 e_a^j - e_b^j e_a^0) + e_b^i e_a^j T_{ij}^0) \end{aligned} \tag{5.69}$$

con $T_j = T_{ij}^i$, $T_{ij}^0 = e_c^0 (\partial_i e_j^c - \partial_j e_i^c)$. Ya que tenemos $\frac{n(n-1)}{2}$ pares de F_{ab} , usaremos una notación para alinear las componentes en un vector $F_{\bar{a}}$ tal que los sub-índices se ordenen de manera creciente como sigue

$$F_{\bar{a}} = (F_{01}, F_{02}, \dots, F_{(n-2)(n-1)}) \equiv (F_1, F_2, \dots, F_{\frac{n(n-1)}{2}}). \tag{5.70}$$

Usaremos de manera indistinta ambas notaciones de acuerdo al contexto de las ecuaciones.

En lo que respecta a los corchetes de $G_\pi^{(1)}$ con el resto de los vínculos, vemos que sólo los vínculos $G_{ab}^{(1)}$ y el Hamiltoniano involucran expresiones con el campo escalar ϕ , por tanto son los únicos corchetes cuyo cálculo no es trivial. Vemos que el vínculo asociado al álgebra de Lorentz tiene corchete diferente de cero con $G_\pi^{(1)}$, y la diferencia se reduce a los coeficientes $F_{\bar{a}}$ que dependen de la tétrada y sus derivadas, en particular de las componentes T_j

y T^0_{ij} de la torsión. Este hecho nos lleva de inmediato a pensar en la característica de la pérdida de la invariancia local de Lorentz en la gravedad $f(T)$, sin embargo es necesario tener cautela. Al completar el cálculo del álgebra de vínculos, será posible escribir combinaciones de vínculos que hacen este corchete cero. El número de combinaciones que logren esto será el indicador del número de vínculos $G_{ab}^{(1)}$ que serán de primera o segunda clase.

Vínculo primario $G_c^{(1)}$

Ahora calcularemos los corchetes correspondientes a $G_c^{(1)}$. Este vínculo no debería verse afectado por la presencia del campo ϕ , como es sencillo de probar. Por otro lado, los resultados que fueron obtenidos en ETRG no deberían variar, es decir, este vínculo debería conmutar con el resto de los vínculos. Los cálculos correspondientes dan

$$\begin{aligned} \{G_c^{(1)}(t, \mathbf{x}), G_d^{(1)}(t, \mathbf{y})\} &= 0, \\ \{G_c^{(1)}(t, \mathbf{x}), G_{ab}^{(1)}(t, \mathbf{y})\} &= 0, \\ \{G_c^{(1)}(t, \mathbf{x}), \mathcal{H}(t, \mathbf{y})\} &= -(e_c^0 G_0^{(2)} + e_a^i G_i^{(2)}) \delta^{(n-1)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \end{aligned} \quad (5.71)$$

Intuimos que no habrá restricciones sobre los n multiplicadores de Lagrange u^c , y por lo tanto podrán escogerse de manera arbitraria.

Vínculo primario $G_{ab}^{(1)}$

El álgebra de vínculos que falta calcular para establecer la consistencia total de los vínculos primarios se resume a los siguientes corchetes, los cuales son

$$\begin{aligned} \{G_{ab}^{(1)}(t, \mathbf{x}), G_{ef}^{(1)}(t, \mathbf{y})\} &= (\eta_{eb} G_{af}^{(1)} + \eta_{af} G_{be}^{(1)} - \eta_{ae} G_{bf}^{(1)} - \eta_{bf} G_{ae}^{(1)}) \delta^{(n-1)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\ \{G_{ab}^{(1)}(t, \mathbf{x}), \mathcal{H}(t, \mathbf{y})\} &= E_0^e \eta_{e[b} e_{a]}^0 G_0^{(2)} \delta^{(n-1)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \end{aligned} \quad (5.72)$$

Vemos que los vínculos $G_{ab}^{(1)}$ satisfacen el álgebra del grupo de Lorentz, sin embargo se encuentran alterados por la presencia del campo escalar auxiliar. El corchete con el Hamiltoniano canónico es proporcional a la expresión $G_0^{(2)}$ que, como ya mostramos en el formalismo Lagrangiano y mostraremos a continuación, es un vínculo secundario que difiere del Hamiltoniano sólo por un término de borde.

Ecuaciones de consistencia

Con todo esto ya podemos escribir el conjunto de ecuaciones que determina los multiplicadores de Lagrange, el cual queda como

$$\begin{aligned}
\dot{G}_c^{(1)} &= -(e_c^0 G_0^{(2)} + e_a^i G_i^{(2)}) \approx 0, \\
\dot{G}_{ab}^{(1)} &= E_0^c \eta_{c[b} e_{a]}^0 G_0^{(2)} + u^{fe} (\eta_{eb} G_{af}^{(1)} + \eta_{af} G_{be}^{(1)} - \eta_{bf} G_{ae}^{(1)} - \eta_{ae} G_{bf}^{(1)}) + u^\pi F_{ab} \approx 0, \\
&= E_0^c \eta_{c[b} e_{a]}^0 G_0^{(2)} + u^\pi F_{ab} \approx 0, \\
\dot{G}_\pi^{(1)} &= F_\phi - u^{ab} F_{ab} \approx 0.
\end{aligned} \tag{5.73}$$

En la segunda ecuación usamos el hecho que los $G_{ab}^{(1)}$ son débilmente cero en la superficie de vínculos.

La notación que estamos usando para las expresiones $G^{(2)}$ (el superíndice $^{(2)}$) mostrará no haber sido en vano. Con esta notación estamos indicando que estas expresiones serán vínculos secundarios, cosa que aún no hemos probado en el formalismo Hamiltoniano, pero sí en el Lagrangiano. Para hacerlo, reescribimos el sistema de ecuaciones (5.66) en forma matricial como

$$h_{\rho'} + C_{\rho'\rho} u^\rho \approx 0, \tag{5.74}$$

donde se ha definido $C_{\rho'\rho} = \{\phi_{\rho'}, \phi_\rho\}$ como la matriz que contiene los corchetes de Poisson entre todos los vínculos primarios, y $h_{\rho'} = \{\phi_{\rho'}, \mathcal{H}\}$.

Esta matriz debe trabajarse en la superficie de vínculos, y chequear si se cumple que $\det(C_{\rho\rho'}) \approx 0$. El ordenamiento de vínculos que usaremos será tal que la matriz $C_{\rho'\rho}$ está definida esquemáticamente como

$$C_{\rho'\rho} = \begin{pmatrix} \{G_{cd}^{(1)}, G_{ab}^{(1)}\} & \{G_a^{(1)}, G_{ab}^{(1)}\} & \{G_\pi^{(1)}, G_{ab}^{(1)}\} \\ \{G_{cd}^{(1)}, G_b^{(1)}\} & \{G_a^{(1)}, G_b^{(1)}\} & \{G_\pi^{(1)}, G_b^{(1)}\} \\ \{G_{cd}^{(1)}, G_\pi^{(1)}\} & \{G_a^{(1)}, G_\pi^{(1)}\} & \{G_\pi^{(1)}, G_\pi^{(1)}\} \end{pmatrix}. \tag{5.75}$$

Si escribimos los resultados que hemos obtenido en términos de componentes,

encontramos que la matriz puede diagramarse como

$$C_{\rho'\rho} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & -F_1 \\ & & \ddots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & -F_{\frac{n(n-1)}{2}} \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & & \ddots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \hline \underbrace{F_1 \cdots F_{\frac{n(n-1)}{2}}}_{\frac{n(n-1)}{2}} & & & \underbrace{0 \cdots 0}_n & & & 0 \end{array} \right) \left. \begin{array}{l} \vphantom{\left(\right.} \right\} \frac{n(n-1)}{2} \\ \vphantom{\left(\right.} \right\} n \end{array} \right) \quad (5.76)$$

Vemos que las únicas entradas diferentes de cero de esta matriz corresponden a las filas de $\frac{n(n-1)}{2}$ componentes con entradas denotadas por $F_1, \dots, F_{\frac{n(n-1)}{2}}$, que están organizadas tal que la matriz es antisimétrica, como era de esperar.

Por otro lado, el vector h_ρ puede descomponerse en tres partes: $\frac{n(n-1)}{2}$ componentes que denotan el resultado $\{G_{ab}^{(1)}, \mathcal{H}\} = e_{0[b}e_a^0 G_0^{(2)}$, n expresiones que representan $\{G_c^{(1)}, \mathcal{H}\} = -e_c^0 G_0^{(2)} - e_c^i G_i^{(2)}$, y la última componente del vector $\{G_\pi^{(1)}, \mathcal{H}\} = F_\phi$, quedando

$$h_\rho = (e_{0[0}e_{1]}^0 G_0^{(2)}, \dots, e_{0[0}e_{[n-1]}^0 G_0^{(2)}, e_{0[1}e_{2]}^0 G_0^{(2)}, \dots, e_{0[1}e_{[n-1]}^0 G_0^{(2)}, \dots, e_{0[(n-2)}e_{[n-1]}^0 G_0^{(2)}, -e_0^\mu G_\mu^{(2)}, \dots, -e_{n-1}^\mu G_\mu^{(2)}, F_\phi). \quad (5.77)$$

Nuestra misión es encontrar los autovectores nulos de la matriz (5.76), en particular los autovectores por la izquierda $\omega_{(\beta)}^{\rho'}$. Estos autovectores son de importancia porque impondrán la condición $\omega_{(\beta)}^{\rho'} \cdot h_{\rho'} \approx 0$ sobre las componentes de h_ρ . Consideremos un autovector que posea la forma

$$\omega_{(\beta)}^{\rho'} = (\omega^1, \dots, \omega^{\frac{n(n-1)}{2}}, \omega^{\frac{n(n-1)}{2}+1}, \dots, \omega^{\frac{n(n-1)}{2}+n}, \omega^{\frac{n(n-1)}{2}+n+1}). \quad (5.78)$$

Aquí denotamos en el superíndice cada una de las componentes del autovector. (β) etiqueta un autovector ω específico del conjunto de autovectores nulos que posee $C_{\rho'\rho}$. Si multiplicamos el vector ω a la matriz (5.76) por la izquierda, e imponemos que el vector resultante sea cero en todas sus componentes, se obtienen las siguientes condiciones sobre las componentes

de (5.78)

$$\begin{aligned}
F_1 \cdot \omega^{\frac{n(n-1)}{2}+n+1} &= 0, \\
F_2 \cdot \omega^{\frac{n(n-1)}{2}+n+1} &= 0, \\
&\vdots \\
F_{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \omega^{\frac{n(n-1)}{2}+n+1} &= 0,
\end{aligned} \tag{5.79}$$

$$-F_1 \cdot \omega^1 - F_2 \cdot \omega^2 - \dots - F_{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \omega^{\frac{n(n-1)}{2}} = 0. \tag{5.80}$$

Para que se cumplan las primeras $\frac{n(n-1)}{2}$ condiciones, es necesario que la última componente de los β autovectores $\omega'_{(\beta)}$ sea cero. Por otro lado, las condiciones (5.79) no ponen restricción alguna sobre las n componentes $\omega^{\frac{n(n-1)}{2}+1}, \dots, \omega^{\frac{n(n-1)}{2}+n}$, por lo tanto tendremos n autovectores que serán de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
\omega'_{\beta=1} &= (\underbrace{0, \dots, 0}_{\frac{n(n-1)}{2}}, \underbrace{1, 0, \dots, 0}_n, 0), \\
&\vdots \\
\omega'_{\beta=n} &= (\underbrace{0, \dots, 0}_{\frac{n(n-1)}{2}}, \underbrace{0, \dots, 0}_n, 1, 0).
\end{aligned} \tag{5.81}$$

La condición (5.80) impone una única restricción sobre las $\frac{n(n-1)}{2}$ primeras componentes de los autovectores $\omega'_{(\beta)}$. Si escogemos pares de componentes de ω que formen un autovector y a la vez satisfagan (5.80), podremos formar $\frac{n(n-1)}{2} - 1$ autovectores con esta condición. Podemos elegir estos autovectores de muchas formas, pero si escogemos el primero, por ejemplo, con las primeras dos componentes que valen $\omega^1 = F_2$ y $\omega^2 = -F_1$, mientras que el resto de las componentes del autovector sean cero, tendremos el primer autovector que tiene $\beta = n + 1$. El segundo autovector $\beta = n + 2$ tendrá como componentes diferentes de cero $\omega^1 = F_3$, $\omega^3 = -F_1$. Finalmente el último autovector $\beta = n + \frac{n(n-1)}{2} - 1$ tendrá componentes no nulas $\omega^1 = F_{\frac{n(n-1)}{2}}$, $\omega^{\frac{n(n-1)}{2}} = -F_1$. Escribimos los $\frac{n(n-1)}{2} - 2$ autovectores provenientes de la condición (5.80) de

una forma más esquemática, por medio de las siguientes expresiones

$$\begin{aligned}
\omega_{\beta=n+1}^{\rho'} &= (\underbrace{F_2, -F_1, 0, \dots, 0}_{\frac{n(n-1)}{2}}, \underbrace{0, \dots, 0}_n), \\
&\vdots \\
\omega_{\beta=n+\frac{n(n-1)}{2}-1}^{\rho'} &= (\underbrace{F_{\frac{n(n-1)}{2}}, 0, \dots, 0}_{\frac{n(n-1)}{2}}, \underbrace{-F_1, 0, \dots, 0}_n).
\end{aligned} \tag{5.82}$$

Cada uno de estos autovectores impone una condición en h_ρ , pero es fácil ver que todas las condiciones restringen una única expresión, a saber, $G_0^{(2)}$. Por ejemplo, si tomamos $\beta = n + 1$, se impone la siguiente condición

$$(\omega^1 \cdot e_{0[0}e_{1]}^0 + \omega^2 \cdot e_{0[0}e_{1]}^0)G_0^{(2)} \approx 0, \tag{5.83}$$

la cual no se cumple de otra forma que no implique que $G_0^{(2)} \approx 0$. Usando este hecho en las condiciones impuestas por los n autovectores (5.81) es sencillo ver que si $G_0^{(2)} \approx 0$, entonces $G_i^{(2)} \approx 0$. Por tanto, hemos mostrado que los $G_\mu^{(2)}$ aparecen como vínculos secundarios en el formalismo Hamiltoniano, y en consecuencia debemos calcular su evolución en el tiempo. Es importante notar que la expresión F_ϕ , es decir la última componente en $h_{\rho'}$, no ha quedado fijada por el formalismo Hamiltoniano, por tanto no corresponde a un vínculo secundario, aunque en el formalismo Lagrangiano aparecía como una ecuación de vínculos. Esta característica aparece también, hasta cierto punto, en el modelo de juguete.

Queda remarcar el hecho de que, a raíz de que la matriz (5.76) es cuadrada, los autovectores nulos por la derecha V y por la izquierda ω coinciden, por tanto los $\omega_{(\beta)}^\rho$ son equivalentes a los $V_{(\alpha)}^\rho$. Esto no será cierto en el próximo paso, pues la matriz $C_{\rho'\rho}$ será rectangular.

5.8. Consistencia de los vínculos secundarios

El paso siguiente en el algoritmo radica en estudiar la consistencia de los vínculos secundarios ($G_0^{(2)}, G_i^{(2)}$). Para ésto necesitamos calcular los corchetes de Poisson de estos vínculos con el Hamiltoniano primario. Ya vimos que era equivalente calcular los corchetes con $G_0^{(2)}$ en lugar de \mathcal{H} , pues sólo difieren por una cuadri-divergencia; por otro lado queda calcular los corchetes de Poisson asociados al vínculo $G_i^{(2)}$, en los cuales se obtienen los siguientes

resultados

$$\begin{aligned}
\{G_i^{(2)}(t, \mathbf{x}), G_\pi^{(1)}(t, \mathbf{y})\} &= 0, \\
\{G_i^{(2)}(t, \mathbf{x}), G_c^{(1)}(t, \mathbf{y})\} &= 0, \\
\{G_i^{(2)}(t, \mathbf{x}), G_{ab}^{(1)}(t, \mathbf{y})\} &= 0, \\
\{G_i^{(2)}(t, \mathbf{x}), G_0^{(2)}(t, \mathbf{y})\} &= -G_0^{(2)}(\mathbf{y})\partial_i^{\mathbf{x}}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\
\{G_0^{(2)}(t, \mathbf{x}), G_0^{(2)}(t, \mathbf{y})\} &= g^{ij}(\mathbf{x})G_i^{(2)}(\mathbf{x})\partial_j^{\mathbf{y}}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - g^{ij}(\mathbf{y})G_i^{(2)}(\mathbf{y})\partial_j^{\mathbf{x}}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\
\{G_i^{(2)}(t, \mathbf{x}), G_j^{(2)}(t, \mathbf{y})\} &= -G_i^{(2)}(\mathbf{x})\partial_j^{\mathbf{y}}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + G_j^{(2)}(\mathbf{y})\partial_i^{\mathbf{x}}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}).
\end{aligned} \tag{5.84}$$

Esto puede escribirse como el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}
\dot{G}_0^{(2)} &= g^{ij}(\mathbf{x})G_i^{(2)}(\mathbf{x})\partial_j^{\mathbf{y}}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - g^{ij}(\mathbf{y})G_i^{(2)}(\mathbf{y})\partial_j^{\mathbf{x}}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + u^{ab}E_0^c\eta_{c[b}e_a^0G_0^{(2)} \\
&\quad + u^a(e_a^0G_0^{(2)} + e_a^iG_i^{(2)}) + u^\pi F_\phi \approx 0, \\
\dot{G}_i^{(2)} &= -G_0^{(2)}\partial_i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \approx 0.
\end{aligned} \tag{5.85}$$

Si juntamos estas condiciones con aquellas dadas por (5.73), y las evaluamos en la nueva superficie de vínculos que incluye tanto vínculos primarios como secundarios, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones para los u^ρ

$$\begin{aligned}
\dot{G}_c^{(1)} &\approx 0, \\
\dot{G}_{ab}^{(1)} &= u^\pi F_{ab} \approx 0, \\
\dot{G}_\pi^{(1)} &= F_\phi - u^{ab}F_{ab} \approx 0, \\
\dot{G}_0^{(2)} &= u^\pi F_\phi \approx 0, \\
\dot{G}_i^{(2)} &\approx 0.
\end{aligned} \tag{5.86}$$

Estas ecuaciones pueden entenderse como un sistema matricial extendido que hemos evaluado en la nueva superficie de vínculos donde se añaden $G_0^{(2)} \approx 0$ y $G_i^{(2)} \approx 0$. Estos vínculos añaden n filas a la matriz $C_{\hat{\rho}\rho}$; la matriz estará definida esquemáticamente como

$$C_{\hat{\rho}\rho} = \begin{pmatrix} \{G_{cd}^{(1)}, G_{ab}^{(1)}\} & \{G_a^{(1)}, G_{ab}^{(1)}\} & \{G_\pi^{(1)}, G_{ab}^{(1)}\} \\ \{G_{cd}^{(1)}, G_b^{(1)}\} & \{G_a^{(1)}, G_b^{(1)}\} & \{G_\pi^{(1)}, G_b^{(1)}\} \\ \{G_{cd}^{(1)}, G_\pi^{(1)}\} & \{G_a^{(1)}, G_\pi^{(1)}\} & \{G_\pi^{(1)}, G_\pi^{(1)}\} \\ \{G_{cd}^{(1)}, G_0^{(2)}\} & \{G_a^{(1)}, G_0^{(2)}\} & \{G_\pi^{(1)}, G_0^{(2)}\} \\ \{G_{cd}^{(1)}, G_i^{(2)}\} & \{G_a^{(1)}, G_i^{(2)}\} & \{G_\pi^{(1)}, G_i^{(2)}\} \end{pmatrix}. \tag{5.87}$$

Las condiciones en (5.90) indican que las componentes $V^{\frac{n(n-1)}{2}+1}, \dots, V^{\frac{n(n-1)}{2}+n}$ quedan indeterminadas, y darán lugar a n autovectores nulos de la forma

$$\begin{aligned} V_{\alpha=1}^{\rho} &= (\underbrace{0, \dots, 0}_{\frac{n(n-1)}{2}}, \underbrace{1, 0, \dots, 0}_n, 0), \\ &\vdots \\ V_{\alpha=n}^{\rho} &= (\underbrace{0, \dots, 0}_{\frac{n(n-1)}{2}}, \underbrace{0, \dots, 0}_n, 1, 0). \end{aligned} \quad (5.92)$$

La condición (5.91) es una condición extra que restringe las componentes de $V_{(\alpha)}^{\rho}$ de tal forma que existirán $\frac{n(n-1)}{2} - 1$ autovectores nulos extra que tendrán la forma

$$\begin{aligned} V_{\alpha=n+1}^{\rho} &= (\underbrace{F_2, -F_1, 0, \dots, 0}_{\frac{n(n-1)}{2}}, \underbrace{0, \dots, 0}_n, 0), \\ &\vdots \\ V_{\alpha=n+\frac{n(n-1)}{2}-1}^{\rho} &= (\underbrace{F_{\frac{n(n-1)}{2}}, 0, \dots, 0}_{\frac{n(n-1)}{2}}, \underbrace{-F_1, 0, \dots, 0}_n, 0). \end{aligned} \quad (5.93)$$

Luego no existen más restricciones sobre las componentes de los $V_{(\alpha)}^{\rho}$. Hemos obtenido que existen $\frac{n(n-1)}{2} + n - 1$ autovectores nulos por la derecha para la matriz $C_{\hat{\rho}\rho}$.

Ahora veremos las condiciones que deben cumplir las componentes de los autovectores nulos por la izquierda

$$\omega_{(\beta)}^{\hat{\rho}} = (\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^{\frac{n(n-1)}{2}+2n+1}).$$

Notar que la búsqueda de los autovectores por la izquierda de la matriz (5.88) equivale a buscar los autovectores por la derecha de la matriz transpuesta. En ambos casos, las condiciones que deben cumplir las componentes del vector se resumen a

$$\begin{aligned} \omega^{\frac{n(n-1)}{2}+n+1} \cdot F_1 &= 0, \\ &\vdots \\ \omega^{\frac{n(n-1)}{2}+n+1} \cdot F_{\frac{n(n-1)}{2}} &= 0, \end{aligned} \quad (5.94)$$

y

$$-F_1 \cdot \omega^1 - \dots - F_{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \omega^{\frac{n(n-1)}{2}} + F_\phi \cdot \omega^{\frac{n(n-1)}{2}+n+2} = 0. \quad (5.95)$$

Las ecuaciones (5.94) imponen que $\omega^{\frac{n(n-1)}{2}+n+1} = 0$, puesto que no es correcto imponer que $F_{\hat{a}} = 0$ (ya que estaríamos fijando la t etra). Por tanto, las componentes que quedan libres generan el siguiente subespacio de autovectores nulos

$$\begin{aligned} \omega_{\beta=1}^{\rho'} &= (\underbrace{0, \dots, 0}_{\frac{n(n-1)}{2}}, \underbrace{1, 0, \dots, 0}_n, \underbrace{0, 0, 0, \dots, 0}_{n-2}), \\ &\vdots \\ \omega_{\beta=n}^{\rho'} &= (\underbrace{0, \dots, 0}_{\frac{n(n-1)}{2}}, \underbrace{0, \dots, 0}_n, \underbrace{0, 1, 0, 0, \dots, 0}_{n-2}), \\ \omega_{\beta=n+1}^{\rho'} &= (\underbrace{0, \dots, 0}_{\frac{n(n-1)}{2}}, \underbrace{0, \dots, 0}_n, \underbrace{0, 0, 1, 0, \dots, 0}_{n-2}), \\ &\vdots \\ \omega_{\beta=2n-1}^{\rho'} &= (\underbrace{0, \dots, 0}_{\frac{n(n-1)}{2}}, \underbrace{0, \dots, 0}_n, \underbrace{0, 1, 0, 0, \dots, 0}_{n-2}, 0, 0, 1). \end{aligned} \quad (5.96)$$

Mientras tanto, las condiciones (5.95) definen los siguientes autovectores nulos adicionales

$$\begin{aligned} \omega_{\beta=2n}^{\hat{\rho}} &= (\underbrace{F_2, -F_1, 0, \dots, 0}_{\frac{n(n-1)}{2}}, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{2n}), \\ &\vdots \\ \omega_{\beta=2n+\frac{n(n-1)}{2}-2}^{\hat{\rho}} &= (\underbrace{F_{\frac{n(n-1)}{2}-1}, 0, \dots, -F_1, 0, 0, \dots, 0}_{\frac{n(n-1)}{2}}, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{2n}), \\ \omega_{\beta=2n+\frac{n(n-1)}{2}-1}^{\hat{\rho}} &= (\underbrace{0, \dots, 0}_{\frac{n(n-1)}{2}}, \underbrace{-F_\phi, 0, \dots, 0}_n, \underbrace{0, F_{\frac{n(n-1)}{2}}, 0, \dots, 0}_{n-2}). \end{aligned} \quad (5.97)$$

Ya que la componente del autovector nulo en la posición $\frac{n(n-1)}{2} + n + 1$ se anula, la expresión F_ϕ no se ve restringida cuando imponemos $\omega_{(\beta)}^{\hat{\rho}} \cdot h_{\hat{\rho}} = 0$. Por tanto, no tenemos nuevos vínculos secundarios y el algoritmo termina aquí.

5.8.1. Autovectores nulos en $n = 4$

A modo de ejemplo, y con el fin de aplicar la notación abstracta desarrollada en dimensión arbitraria, es que mostraremos las matrices $C_{\rho'\rho}$, $C_{\hat{\rho}\rho}$ y sus autovectores nulos en dimensión $n = 4$. La matriz $C_{\rho'\rho}$ tiene dimensión 11×11 y contiene únicamente los corchetes con los vínculos primarios. La expresión explícita para esta matriz es

$$C_{\rho'\rho} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -F_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -F_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -F_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -F_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -F_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -F_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & F_5 & F_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.98)$$

Esta matriz tiene el siguiente conjunto de autovectores nulos

$$V_{(\alpha)}^\rho = \omega_{(\beta)}^{\rho'} = \{(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0), \\ (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0), \\ (F_2, -F_1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), (F_3, 0, -F_1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), \\ (F_4, 0, 0, -F_1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), (F_5, 0, 0, 0, -F_1, 0, 0, 0, 0, 0, 0), \\ (F_6, 0, 0, 0, 0, -F_1, 0, 0, 0, 0, 0)\}. \quad (5.99)$$

Estos son autovectores nulos tanto por la derecha como por la izquierda, ya que la matriz $C_{\rho'\rho}$ es cuadrada. Los últimos 5 vectores puede escogerse de manera arbitraria, siempre y cuando todas sus componentes satisfagan la condición

$$F_1 \cdot V^1 + F_2 \cdot V^2 + F_3 \cdot V^3 + F_4 \cdot V^4 + F_5 \cdot V^5 + F_6 \cdot V^6 = 0. \quad (5.100)$$

Los autovectores que encontramos en (5.99) definen las condiciones $\omega_{(\beta)}^{\rho'} h_{\rho'} \approx 0$. Ya que

$$h_{\rho'} = (e_{0[0}e_{1]}^0 G_0^{(2)}, e_{0[0}e_{2]}^0 G_0^{(2)}, e_{0[0}e_{3]}^0 G_0^{(2)}, e_{0[1}e_{2]}^0 G_0^{(2)}, e_{0[1}e_{3]}^0 G_0^{(2)}, e_{0[2}e_{3]}^0 G_0^{(2)}, \\ -e_0^\mu G_\mu^{(2)}, -e_1^\mu G_\mu^{(2)}, -e_2^\mu G_\mu^{(2)}, -e_3^\mu G_\mu^{(2)}, F_\phi), \quad (5.101)$$

estas condiciones nos dicen que existen 4 nuevos vínculos secundarios dados por $G_0^{(2)} \approx 0$, $G_i^{(2)} \approx 0$. Estos vínculos continúan el algoritmo, pues ahora debemos estudiar su consistencia en el tiempo.

La matriz $C_{\hat{\rho}\rho}$ aumentada que incluye los nuevos vínculos secundarios es una matriz de dimensión 11×15 y poseerá autovectores por la izquierda $\omega_{(\beta)}^{\hat{\rho}}$ y autovectores por la derecha $V_{(\alpha)}^{\rho}$ de diferente número de componentes. Tanto para la matriz $C_{\hat{\rho}\rho}$ como para su transpuesta, obtenemos que $\text{Rango}(C_{\hat{\rho}\rho}) = 2$. De esto se concluye que existen 9 autovectores nulos $V_{(\alpha)}^{\rho}$, $\alpha = 1, \dots, 9$, que corresponderán a (5.99), como es fácil de probar.

Por otro lado existen 13 autovectores nulos por la izquierda $\omega_{(\beta)}^{\hat{\rho}}$, $\beta = 1, \dots, 13$, que poseen 15 componentes, es decir $\omega_{(\beta)}^{\hat{\rho}} = (\omega^1, \dots, \omega^{15})$. Para que $\omega_{(\beta)}^{\hat{\rho}}$ sea un autovector nulo por la izquierda, sus componentes deben satisfacer las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} \omega^{11} \cdot F_1 &= 0, \\ \vdots & \\ \omega^{11} \cdot F_6 &= 0, \end{aligned} \tag{5.102}$$

y

$$-F_1 \cdot \omega^1 - \dots - F_6 \cdot \omega^6 + F_\phi \cdot \omega^{12} = 0. \tag{5.103}$$

Está claro a partir de las ecuaciones (5.102) que la componente ω^{11} debe ser cero en todos los autovectores nulos. Luego, con las condiciones (5.102) y (5.103) vemos que los 13 autovectores nulos están dados por

$$\begin{aligned} \omega_{(\beta)}^{\hat{\rho}} = & \\ \{ & (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1), (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0), \\ & (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0), \\ & (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), \\ & (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 0, 0, 0, -F_\phi, 0, 0, 0, 0, 0, 0, F_6, 0, 0, 0), \\ & (F_2, -F_1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), (F_3, 0, -F_1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), \\ & (F_4, 0, 0, -F_1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), (F_5, 0, 0, 0, -F_1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), \\ & (F_6, 0, 0, 0, 0, -F_1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \}. \end{aligned} \tag{5.104}$$

Estos autovectores impondrán condiciones sobre $u^{\hat{\rho}}$ que darán origen a nuevos vínculos secundarios o serán identidades triviales. Debido a que $h_{\hat{\rho}}$ es

$$h_{\hat{\rho}} \approx (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, F_\phi, 0, 0, 0, 0, 0), \tag{5.105}$$

las condiciones

$$\omega_{(\beta)}^{\hat{\rho}} \cdot u_{\hat{\rho}} \approx 0 \quad (5.106)$$

indican igualdades triviales del tipo $0 \approx 0$, y lo más importante aún, no imponen ninguna condición sobre la única componente diferente de cero en $h_{\hat{\rho}}$, que es la expresión F_{ϕ} .

5.9. Multiplicadores de Lagrange

Nos queda resolver el sistema para los multiplicadores de Lagrange (5.86). Se propone una solución que es una combinación de la solución homogénea y una solución particular

$$u^{\rho} = U^{\rho} + v^{\alpha} V_{(\alpha)}^{\rho}. \quad (5.107)$$

Los autovectores por la derecha corresponden a la solución homogénea, mientras que la solución particular U^{ρ} se encuentra a partir del sistema de ecuaciones completo. Ya hemos encontrado en (5.92) y (5.93) la solución homogénea al sistema de ecuaciones para los u^{ρ} , la cual determina los multiplicadores de Lagrange de la siguiente forma:

- Los n primeros autovectores $V_{(\alpha)}^{\rho}$, con $\alpha = 1, \dots, n$, determinan que los multiplicadores u^c asociados al vínculo primario $G_c^{(1)}$ no se encuentran fijados y pueden tomar cualquier valor arbitrario.
- De los $n + \frac{n(n-1)}{2} - 1$ autovectores nulos por la derecha, ninguno posee componente diferente de cero en la última entrada (asociada a u^{π}). Por lo tanto, este multiplicador queda fijado a $u^{\pi} \approx 0$, como era de esperar por la forma de las ecuaciones de consistencia.
- Finalmente, los $\frac{n(n-1)}{2} - 1$ autovectores otorgan las siguientes relaciones entre los multiplicadores u^{ab}

$$\begin{aligned} u^{01} &= v_2 F_2 + v_3 F_3 + \dots + v_{\frac{n(n-1)}{2}} F_{\frac{n(n-1)}{2}}, \\ u^{02} &= -v_2 F_1, \\ u^{03} &= -v_3 F_1, \\ &\vdots \\ u^{(n-1) n} &= -v_{\frac{n(n-1)}{2}} F_1. \end{aligned} \quad (5.108)$$

Hasta este punto, ninguno de los u^{ab} ha sido determinado por completo, pues queda encontrar la solución particular U^{ab} en el sistema (5.86). Luego

de reemplazar $u^\pi = 0$ en ese sistema de ecuaciones, y reemplazar también la expresión (5.107), el sistema se resume a una única ecuación

$$F_\phi - U^{ab}F_{ab} \approx 0. \quad (5.109)$$

Vemos que podemos escoger cualquier componente U^{ab} de la solución particular para que satisfaga esta ecuación. En concreto, podemos escoger U^{01} tal que cumpla

$$U^{01}F_1 = F_\phi. \quad (5.110)$$

Si esta es nuestra elección para la solución particular, los únicos multiplicadores que quedan determinados serán u^π y u^{01} . Notamos que aún hay una parte arbitraria para u^{01} que es proporcional a los $V_{(\alpha)}^\rho$, como puede verse en (5.108), no obstante la determinación del u^{01} ocurre a nivel de la elección de la solución particular U^{01} . Esta determinación indica que el vínculo asociado a este multiplicador pasará a ser un vínculo de segunda clase.

Enfatizamos nuevamente el hecho que la elección de U^{01} en (5.109) es completamente arbitraria, es decir, pudimos haber fijado cualquiera de los U^{ab} , o incluso una combinación de dos o más ¹. No obstante, continuaremos con esta elección por simplicidad, teniendo en cuenta que la solución particular de los multiplicadores de Lagrange está restringida, en el caso más general posible, a un hiperplano que está delimitado por la ecuación $U^{ab}F_{ab} = F_\phi$. El algoritmo no especifica cuál de todos los U^{ab} queda determinado, por lo tanto cualquier elección es igualmente correcta.

5.10. Grados de libertad en las teorías $f(T)$

Para realizar el conteo de grados de libertad, aún queda encontrar el número de vínculos de primera y segunda clase. Para ésto, buscaremos escribir la matriz de corchetes entre todos los vínculos en dos bloques: uno cuyas componentes sean únicamente ceros, y otro bloque que sea una sub-matriz cuyo determinante sea diferente de cero. Esta matriz será denotada por Δ_{AB} , y está compuesta de los corchetes de Poisson entre todos los vínculos de segunda clase.

A partir del álgebra de vínculos que hemos calculado en las secciones anteriores, está claro que los vínculos $G_a^{(1)}$ y $G_i^{(2)}$ son de primera clase, puesto que su corchete de Poisson es débilmente cero con el resto de los vínculos. Por

¹A pesar de ésto, el número de vínculos que pasan a ser de segunda clase es siempre el mismo, como veremos a continuación.

otra parte, los únicos corchetes de Poisson diferentes de cero corresponden a

$$\begin{aligned}\{G_{ab}^{(1)}(t, \mathbf{x}), G_{\pi}^{(1)}(t, \mathbf{y})\} &= F_{ab}, \\ \{G_0^{(2)}(t, \mathbf{x}), G_{\pi}^{(1)}(t, \mathbf{y})\} &= F_{\phi}.\end{aligned}\quad (5.111)$$

Es evidente que la matriz que forman estos vínculos tiene determinante cero, por tanto hay vínculos de primera clase escondidos en estas expresiones. Para encontrarlos, tendremos que realizar un cambio de base en el subespacio que determinan estos vínculos, con el fin de hacer patente la clasificación de primera y segunda clase. Podemos formar pares de vínculos $G_{ab}^{(1)}$ tales que el corchete de todos ellos con $G_{\pi}^{(1)}$ se anule, excepto por uno, que corresponderá a un vínculo de segunda clase. Esto puede verse recomblando los vínculos $G_{ab}^{(1)}$ en una nueva base $\tilde{G}_{ab}^{(1)}$ dada por

$$\begin{aligned}\tilde{G}_{01}^{(1)} &= G_{01}^{(1)}, \\ \tilde{G}_{02}^{(1)} &= F_{01}G_{02}^{(1)} - F_{02}G_{01}^{(1)}, \\ \tilde{G}_{03}^{(1)} &= F_{02}G_{03}^{(1)} - F_{03}G_{01}^{(1)}, \\ &\vdots \\ \tilde{G}_{(n-2)(n-1)}^{(1)} &= F_{01}G_{(n-2)(n-1)} - F_{(n-2)(n-1)}G_{01}.\end{aligned}\quad (5.112)$$

Esta redefinición tiene como resultado que cualquier corchete de los $\tilde{G}^{(1)}$ con $G_{\pi}^{(1)}$ es cero en la superficie de vínculos, a excepción del vínculo $\tilde{G}_{01}^{(1)}$, con el que se tiene que

$$\{\tilde{G}_{01}^{(1)}, G_{\pi}^{(1)}\} = F_{01}.\quad (5.113)$$

Aun queda otra redefinición que efectuar, pues el resultado $\{G_0^{(2)}, G_{\pi}^{(1)}\} = F_{\phi}$ implicaría que $G_0^{(2)}$ es de segunda clase. Por tanto, es claro que debemos redefinir el vínculo de super-Hamiltoniano también para convertirlo en uno de primera clase. Reescribimos por medio de una combinación lineal los vínculos $G_0^{(2)}$ y $G_{01}^{(1)}$ tal que

$$\tilde{G}_0^{(2)} = F_{01}G_0^{(2)} - F_{\phi}G_{01}^{(1)}.\quad (5.114)$$

Este nuevo vínculo de super-Hamiltoniano $\tilde{G}_0^{(2)}$ satisface ser de primera clase, pues $\{\tilde{G}_0^{(2)}, G_{\pi}^{(1)}\} = 0$. Por otro lado, aún tenemos que $\{\tilde{G}_{01}^{(1)}, G_{\pi}^{(1)}\} = F_{01}$, por tanto $\tilde{G}_{01}^{(1)}$ continua siendo de segunda clase. Ya que este corchete es el único que sigue siendo diferente de cero luego de la redefinición realizada, la matriz de vínculos de segunda clase Δ_{AB} será

$$\Delta_{AB} = \begin{pmatrix} \{G_{\pi}^{(1)}, G_{\pi}^{(1)}\} & \{\tilde{G}_{01}^{(1)}, G_{\pi}^{(1)}\} \\ \{G_{\pi}^{(1)}, \tilde{G}_{01}^{(1)}\} & \{\tilde{G}_{01}^{(1)}, \tilde{G}_{01}^{(1)}\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & F_{01} \\ -F_{01} & 0 \end{pmatrix}.\quad (5.115)$$

El sistema de ecuaciones $h_{\hat{\rho}} + C_{\hat{\rho}\rho}u^\rho \approx 0$ es una identidad trivial para los vínculos de primera clase, mientras que para los vínculos de segunda clase $\chi_A = (G_\pi^{(1)}, \tilde{G}_{01}^{(1)})$ puede verse como el sistema

$$\{\chi_A, H_c\} + \Delta_{AB}u^B \stackrel{!}{\approx} 0. \quad (5.116)$$

Para $G_\pi^{(1)}$ se tiene que

$$\begin{aligned} \{G_\pi^{(1)}, H_c\} + \Delta_{\pi B}u^B &\approx -F_\phi + F_{01}u^{01} \stackrel{!}{\approx} 0 \\ &\longrightarrow F_{01}u^{01} \approx F_\phi. \end{aligned} \quad (5.117)$$

Por otro lado, para $\tilde{G}_{01}^{(1)}$ se tiene que

$$\begin{aligned} \{\tilde{G}_{01}^{(1)}, H_c\} + \Delta_{(01)B}u^B &\approx -F_{01}u^\pi \stackrel{!}{\approx} 0 \\ &\longrightarrow u^\pi \approx 0. \end{aligned} \quad (5.118)$$

Hemos determinado ambos multiplicadores de Lagrange asociados a los vínculos de segunda clase, por lo tanto hemos terminado el algoritmo y podemos realizar el conteo de grados de libertad.

En resumen, hemos encontrado

- n vínculos de primera clase $G_c^{(1)}$,
- $n - 1$ vínculos de primera clase $G_i^{(2)}$,
- $\frac{n(n-1)}{2} - 1$ vínculos de primera clase $\tilde{G}^{(1)}$,
- 1 vínculo de primera clase $\tilde{G}_0^{(2)}$,
- 2 vínculos de segunda clase $G_\pi^{(1)}$ y $\tilde{G}_{01}^{(1)}$.

Estos resultados son válidos para gravedad $f(T)$ en dimensión arbitraria. De acuerdo a la fórmula (3.52) introducida en el Capítulo 3, el número de grados de libertad (g.d.l.) es como sigue

$$\begin{aligned} \text{g.d.l.} &= n^2 + 1 - \left(2n - 1 + \frac{n(n-1)}{2} - 1 + 1 \right) - \frac{2}{2} \\ &= \frac{n(n-3)}{2} + 1. \end{aligned} \quad (5.119)$$

Es decir, la teoría posee un único grado de libertad extra en comparación con la gravedad teleparalela, o con relatividad general.

Este resultado sugiere que el único grado extra de libertad de la gravedad $f(T)$ podría estar asociado a un campo escalar, o algún otro ente físico que posea un único grado de libertad. La conclusión de que la gravedad $f(T)$ no posee un marco de Einstein, expuesto en [29], debería ser revisada a la luz de nuestro resultado. El hecho que la gravedad $f(T)$ es una teoría que no preserva todas las transformaciones de Lorentz como simetrías de la teoría, sugiere que el marco de Einstein podría existir para un cierto conjunto de transformaciones locales de Lorentz, fijadas por la teoría. Exploraremos brevemente esta posibilidad en la siguiente sección, pero está claro que se debe realizar investigación adicional para comprender esta materia, pues la existencia del marco de Einstein no es la única forma en la cual se podría manifestar un grado extra de libertad.

Otro aspecto que requiere atención es la forma en la cual se produce la pérdida de la invariancia local de Lorentz. La elección del vínculo de Lorentz que pasa a ser de segunda clase no está determinada por el formalismo Hamiltoniano. Lo que especifica el formalismo es que siempre será una única transformación de Lorentz que estará fijada por la teoría, determinando un hiperplano que fija una combinación de boosts y rotaciones. Este aspecto de la gravedad $f(T)$ no era conocido con anterioridad y requiere investigación adicional. La preservación del vínculo super-Hamiltoniano requiere que su definición incluya un vínculo de Lorentz de una forma tal que la combinación es de primera clase, lo cual puede entenderse también como un mecanismo de ruptura de una de las simetrías de Lorentz.

Nuestro resultado está en desacuerdo con lo obtenido en [68], lo cual puede entenderse revisando el procedimiento que llevaron los autores a cabo a la luz del algoritmo de Dirac–Bergmann. Los autores definen en las ecuaciones (34) y (35) (según la notación de [68]) un sistema de ecuaciones para los multiplicadores de Lagrange en base a su propia definición de vínculos, a saber $M\Lambda = 0$, con M una matriz de 8×8 . Las definiciones de los vínculos no son exactamente las mismas, pues hemos empezado de formalismos para la gravedad teleparalela diferentes, sin embargo se llega al mismo número de vínculos primarios y secundarios, al menos hasta la ecuación (35) de [68]. Los autores establecen que, ya que el sistema de ecuaciones para los multiplicadores de Lagrange debería tener una solución diferente de cero, el determinante de la matriz M debería ser cero. No obstante, el sistema no tendría por qué determinar *todos* los multiplicadores de Lagrange, pues como hemos mostrado, es posible reescribir los vínculos primarios y secundarios para separar un conjunto de vínculos de primera y segunda clase. Por lo tanto, la afirmación

de que $\pi_1 = \det(M) \stackrel{!}{\approx} 0$ (de acuerdo a su notación), es equivocada. Esta aseveración lleva a los autores a trabajar con un vínculo extremadamente complicado, e incluso, para simplificar los cálculos, a asumir que $g_{\mu\nu}$ es diagonal. Esto no corresponde a un *técnica de cálculo* como ellos afirman, sino una fijación de las coordenadas, que implica la adición de más vínculos, lo cual no es una estrategia correcta.

5.11. Transformaciones conformes extendidas

Una de las estrategias propuestas para entender el comportamiento del grado extra de libertad de la gravedad $f(T)$ consiste en realizar una transformación local de Lorentz junto a una transformación conforme en la tétrada, y estudiar la variación que produce esta transformación en el Lagrangiano de la teoría. Es decir, estudiaremos el efecto en la gravedad $f(T)$ de la transformación

$$\hat{e}^a{}_\mu = \Omega(x)\Lambda_{a'}^a(x)e_{\mu}^{a'}, \quad (5.120)$$

donde $\hat{e}^a{}_\mu$ representa la tétrada transformada conformemente y transformada por una matriz de Lorentz, al mismo tiempo. Esto implica una transformación inversa del tipo

$$\hat{e}_b{}^\nu = \Omega^{-1}(x)\Lambda_b^{b'}(x)e_{b'}^\nu. \quad (5.121)$$

Bajo este par de transformaciones, la torsión de la conexión de Weitzenböck está dada por

$$\hat{T}^\rho{}_{\mu\nu} = T^\rho{}_{\mu\nu} + \Omega^{-1}(\delta_\nu^\rho \partial_\mu \Omega - \delta_\mu^\rho \partial_\nu \Omega) + e_a^\rho (\partial_\mu \Lambda_{a'}^a e_\nu^{a'} - \partial_\nu \Lambda_{a'}^a e_\mu^{a'}). \quad (5.122)$$

Con ésto se calcula que la contorsión transformada equivale a

$$\begin{aligned} \hat{K}^{\mu\nu}{}_\rho &= \Omega^{-2} K^{\mu\nu}{}_\rho - \Omega^{-3} [\delta_\rho^\mu \partial^\nu \Omega - \delta_\rho^\nu \partial^\mu \Omega] \\ &\quad - \frac{\Omega^{-2}}{2} \left(e_a^\mu [\partial^\nu \Lambda_{a'}^a e_\rho^{a'} - \partial_\rho \Lambda_{a'}^a e^{a'\nu}] - e_a^\nu [\partial^\mu \Lambda_{a'}^a e_\rho^{a'} - \partial_\rho \Lambda_{a'}^a e^{a'\mu}] \right. \\ &\quad \left. - e_{\rho a} [\partial^\mu \Lambda_{a'}^a e^{a'\nu} - \partial^\nu \Lambda_{a'}^a e^{a'\mu}] \right), \end{aligned} \quad (5.123)$$

lo cual permite encontrar el superpotencial transformado

$$\begin{aligned} 2\hat{S}_\rho{}^{\mu\nu} &= \hat{K}^{\mu\nu}{}_\rho + \delta_\rho^\mu \hat{T}^{\theta\nu}{}_\theta - \delta_\rho^\nu \hat{T}^{\theta\mu}{}_\theta \\ &= 2\Omega^{-2} S_\rho{}^{\mu\nu} + (n-2)\Omega^{-3} (\delta_\rho^\mu \partial^\nu \Omega - \delta_\rho^\nu \partial^\mu \Omega) - \frac{1}{2}\Omega^{-2} [e_a^\mu (\partial^\nu \Lambda_{a'}^a e_\rho^{a'} \\ &\quad - \partial_\rho \Lambda_{a'}^a e^{a'\nu}) - e_a^\nu (\partial^\mu \Lambda_{a'}^a e_\rho^{a'} - \partial_\rho \Lambda_{a'}^a e^{a'\mu}) - e_{\rho a} (\partial^\mu \Lambda_{a'}^a e^{a'\nu} - \partial^\nu \Lambda_{a'}^a e^{a'\mu})] \\ &\quad + \Omega^{-2} [\delta_\rho^\mu (\partial^\nu \Lambda_a^a - e^{a'\nu} e_a^\theta \partial_\theta \Lambda_{a'}^a) - \delta_\rho^\nu (\partial^\mu \Lambda_a^a - e^{a'\mu} e_a^\theta \partial_\theta \Lambda_{a'}^a)]. \end{aligned} \quad (5.124)$$

Las expresiones anteriores permiten obtener una expresión para el escalar de torsión, que tendrá varios términos adicionales en comparación al caso donde sólo está la transformación conforme. La expresión completa para \hat{T} es

$$\begin{aligned}
2\hat{T} = & 2\Omega^{-2}T + 4(2-n)\Omega^{-3}T^\rho_{\rho\mu}\partial^\mu\Omega + 2(n-2)(n-1)\Omega^{-4}\partial^\mu\Omega\partial_\mu\Omega \\
& + 2\Omega^{-2}T^\rho_{\rho\mu}(\partial^\mu\Lambda_a^a - e^{a'\mu}e_a^\theta\partial_\theta\Lambda_{a'}^a) + \\
& - \frac{\Omega^{-2}}{2}T^\rho_{\mu\nu}[e_a^\mu(\partial^\nu\Lambda_{a'}^a e_\rho^{a'} - \partial_\rho\Lambda_{a'}^a e^{a'\nu}) - e_a^\nu(\partial^\mu\Lambda_{a'}^a e_\rho^{a'} - \partial_\rho\Lambda_{a'}^a e^{a'\mu}) \\
& - e_{\rho a}(\partial^\mu\Lambda_{a'}^a e^{a'\nu} - \partial^\nu\Lambda_{a'}^a e^{a'\mu})] \\
& + 2(2-n)\Omega^{-3}\partial_\mu\Omega(\partial^\mu\Lambda_a^a - e^{a'\mu}e_a^\theta\partial_\theta\Lambda_{a'}^a) \\
& + \Omega^{-2}e_b^\rho(\partial_\mu\Lambda_{b'}^b e_\nu^{b'} - \partial_\nu\Lambda_{b'}^b e_\mu^{b'}) \left(-\frac{1}{2}(T^{\mu\nu}_\rho - T^{\nu\mu}_\rho - T_\rho^{\mu\nu}) + \delta_\rho^\mu T^{\theta\nu}_\theta - \delta_\rho^\nu T^{\theta\mu}_\theta \right) \\
& - 2(n-2)\Omega^{-3}\partial^\mu\Omega(\partial_\mu\Lambda_b^b - e_\mu^{b'}e_b^\nu\partial_\nu\Lambda_{b'}^b) \\
& + 2\Omega^{-2}(e_b^\mu e_\nu^{b'}\partial_\mu\Lambda_{b'}^b\partial^\nu\Lambda_a^a - \eta^{a'b'}e_b^\mu e_a^\theta\partial_\mu\Lambda_{b'}^b\partial_\theta\Lambda_{a'}^a - \partial_\mu\Lambda_b^b\partial^\mu\Lambda_a^a) \\
& - \Omega^{-2}(2e_a^\mu e^{b'\nu}\partial_\mu\Lambda_{b'}^b\partial_\nu\Lambda_b^a - 2\partial_\mu\Lambda_a^b\partial^\mu\Lambda_b^a - \eta^{a'b'}e_a^\mu e_b^\rho\partial_\mu\Lambda_{b'}^b\partial_\rho\Lambda_{a'}^a \\
& + \eta_{ab}e^{a'\mu}e^{b'\nu}\partial_\mu\Lambda_{b'}^b\partial_\nu\Lambda_{a'}^a).
\end{aligned} \tag{5.125}$$

Esta expresión, si bien complicada, está formada por tres partes principales. La primera línea corresponde al resultado ya conocido en gravedad $f(T)$, que está asociado únicamente a la transformación conforme. Los términos restantes provienen de la aplicación de la transformación local de Lorentz a la tétrada. Dentro de estos términos, la mayoría poseen dependencia en Ω^{-2} , pero existen dos términos que son proporcionales Ω^{-3} . La suma de estos términos, a saber

$$4(2-n)\Omega^{-3}\partial^\mu\Omega(\partial_\mu\Lambda_b^b - e_\mu^{b'}e_b^\nu\partial_\nu\Lambda_{b'}^b), \tag{5.126}$$

tiene una dependencia en Ω idéntica al término que es proporcional a $T^\rho_{\rho\mu}$ y que impedía la existencia del marco de Einstein, como vimos en el Capítulo 2. Si escogemos la torsión de tal forma que

$$T^\rho_{\rho\mu} = -\partial_\mu\Lambda_b^b + e_\mu^{b'}e_b^\nu\partial_\nu\Lambda_{b'}^b, \tag{5.127}$$

entonces existe la posibilidad de obtener un marco de Einstein. El resto de los términos pueden ser eliminados por medio de una redefinición más general de la torsión

$$T^\rho_{\mu\nu} = e_b^\rho(e_\mu^{b'}\partial_\nu\Lambda_{b'}^b - e_\nu^{b'}\partial_\mu\Lambda_{b'}^b), \tag{5.128}$$

mediante la cual apreciamos que (5.127) es un caso particular de (5.128). Queda pendiente entender el significado físico de la elección en (5.128), y

explorar diferentes métodos para entender el significado del grado de libertad extra de la gravedad $f(T)$. Estas cuestiones serán exploradas en trabajo futuro [106].

5.12. Conclusiones

En este Capítulo hemos desarrollado el formalismo Hamiltoniano para la teoría de gravedad $f(T)$, a través de la equivalencia matemática de la acción con una acción tipo escalar-tensorial. Esta formulación añade una coordenada canónica asociada a un campo escalar ϕ , el cual modifica la estructura de vínculos en comparación al caso de la gravedad teleparalela. En particular, la presencia de un vínculo primario adicional $G_\pi^{(1)}$ altera los vínculos asociados a las transformaciones locales de Lorentz y al vínculo de super-Hamiltoniano. Esta alteración requiere definir una nueva base para los vínculos $G_{ab}^{(1)}$ y $G_0^{(2)}$ que permita identificar los vínculos de primera y segunda clase.

Dentro del conjunto de $\frac{n(n-1)}{2}$ vínculos $G_{ab}^{(1)}$ hemos podido esclarecer que sólo uno de ellos pasa a ser de segunda clase, mientras que los restantes $\frac{n(n-1)}{2} - 1$ vínculos primarios son de primera clase. El vínculo de Lorentz de segunda clase $\tilde{G}_{|ab|}^{(1)}$ es necesario para redefinir el vínculo de super-Hamiltoniano y convertirlo a uno de primera clase. Con ésto, se obtiene un conjunto linealmente independiente de vínculos de primera clase, que consta de los vínculos $G_a^{(1)}$, $G_i^{(2)}$, $\tilde{G}_0^{(2)}$, y los $\frac{n(n-1)}{2} - 1$ vínculos de Lorentz $\tilde{G}_{ab}^{(1)}$. Los dos vínculos de segunda clase son $\tilde{G}_{ab}^{(1)}$ y $G_\pi^{(1)}$. Con ésto hemos determinado que la gravedad $f(T)$ posee $\frac{n(n-3)}{2} + 1$ grados de libertad en n dimensiones.

La pérdida de la invariancia local de Lorentz de la teoría puede entenderse como una restricción en las transformaciones locales de Lorentz permitidas por la teoría. En particular, existe un hiperplano que restringe una única combinación de boosts y rotaciones, que especifican un marco preferencial para la teoría. Este aspecto debe ser estudiado en mayor detalle en trabajos futuros. Por otro lado, el hecho que la teoría tenga un grado extra de libertad, sugiere que debe existir una equivalencia escalar-tensorial que permita reescribir la teoría como la gravedad teleparalela más un campo escalar minimalmente acoplado. En este camino es que se ha hecho un intento de encontrar el marco de Einstein para la teoría introduciendo una transformación local de Lorentz en añadidura a una transformación conforme en la tétrada, y se ha analizado brevemente las condiciones que deben cumplirse para eliminar términos de acoplamiento indeseados con la parte $T^\rho_{\rho\mu}$ de la torsión. Deberían existir otras formas de manifestar el grado extra de libertad de la

teoría, las cuales serán exploradas en trabajos futuros.

Capítulo 6

Soluciones exactas para la gravedad teleparalela modificada

La tarea de encontrar soluciones a las ecuaciones de movimiento de la gravedad $f(T)$ puede ser ardua, debido al problema de la pérdida de la invariancia local de Lorentz que posee esta teoría. Es posible intentar un *ansatz* ingenuo que consista en la “raíz cuadrada” de la métrica, pero no necesariamente resuelve las ecuaciones de movimiento de la teoría, como ha sido mostrado en el contexto de soluciones cosmológicas [20, 31]. Este hecho motiva a buscar estrategias que permitan facilitar esta búsqueda de soluciones. En este capítulo introduciremos el método de la tetrada nula, un procedimiento que mostrará ser útil para encontrar con facilidad soluciones que anulen el escalar de torsión. Por tanto, permitirá encontrar geometrías que resuelvan las ecuaciones de Einstein-Hilbert y que también sean solución de las ecuaciones de la gravedad $f(T)$. En particular, nos hemos concentrado en dos tipos de soluciones: la geometría de Kerr y la geometría de McVittie, cuyos resultados se encuentran publicados en [107, 108] y [109], respectivamente, y serán sintetizados a lo largo de este capítulo. Las tétradas encontradas solucionan de manera consistente las ecuaciones de movimiento de las $f(T)$ y se caracterizan por poseer escalar de torsión $T = 0$. Como hemos visto en capítulos anteriores, si obtenemos una tetrada cuyo escalar de torsión se anula, las ecuaciones de movimiento de las teorías $f(T)$ son equivalentes a las ecuaciones de Einstein en ETRG vía una redefinición de la constante de Newton y la constante cosmológica. Notamos que estas soluciones no se ven modificadas por la introducción de una teoría $f(T)$ genérica. Aunque esto va en contra del espíritu que fue la inspiración inicial para proponer modificaciones al teleparalelismo equivalente, ya que originalmente se deseaba modificar soluciones que posean singularidades o un mal comportamiento, es notorio que ciertas soluciones de relatividad general sólo son deformables en

un contexto de teleparalelismo modificado más general [21, 31]

6.1. Método de la tétrada nula

El método de la tétrada nula será útil para encontrar tétradas que posean $T = 0$, en caso que éstas existan, para una determinada métrica. Para lograr este objetivo, definiremos a partir de una tétrada ortonormal $\{\mathbf{e}^a\}$ una tétrada nula $\{\mathbf{n}^a\} = \{\mathbf{l}, \mathbf{n}, \mathbf{m}, \bar{\mathbf{m}}\}$, que definiremos como

$$\mathbf{l} = \frac{(\mathbf{e}^0 + \mathbf{e}^1)}{\sqrt{2}}, \quad \mathbf{n} = \frac{(\mathbf{e}^0 - \mathbf{e}^1)}{\sqrt{2}}, \quad \mathbf{m} = \frac{(\mathbf{e}^2 + i\mathbf{e}^3)}{\sqrt{2}}, \quad \bar{\mathbf{m}} = \frac{(\mathbf{e}^2 - i\mathbf{e}^3)}{\sqrt{2}}. \quad (6.1)$$

Esta tétrada forma una base nula, pues se satisface

$$\mathbf{l} \cdot \mathbf{l} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{m} \cdot \mathbf{m} = 0, \quad \bar{\mathbf{m}} \cdot \bar{\mathbf{m}} = 0, \quad (6.2)$$

sin embargo no es ortonormal, puesto que el producto interno cruzado entre las bases es

$$\mathbf{l} \cdot \mathbf{n} = 1, \quad \mathbf{m} \cdot \bar{\mathbf{m}} = -1, \quad \mathbf{l} \cdot \mathbf{m} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{m}} = 0. \quad (6.3)$$

Es posible resolver $\{\mathbf{e}^a\}$ en términos de \mathbf{n}^a en la ecuación (6.1), y luego reemplazar el resultado en la métrica $g_{\mu\nu}$, de tal forma que se obtenga la métrica en términos de la tétrada nula como

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab} n_\mu^a n_\nu^b, \quad (6.4)$$

por medio de la definición de una nueva métrica de Minkowski η_{ab} definida como

$$\eta_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.5)$$

Con esta expresión podemos escribir la métrica en términos de las tétradas base como sigue

$$\mathbf{g} = \mathbf{n} \otimes \mathbf{l} + \mathbf{l} \otimes \mathbf{n} - \mathbf{m} \otimes \bar{\mathbf{m}} - \bar{\mathbf{m}} \otimes \mathbf{m}. \quad (6.6)$$

Es posible modificar la tétrada $\{\mathbf{e}^a\}$ que describe una solución de vacío de ETRG, para buscar una tétrada que tenga $T = 0$ por medio de una transformación en el vector $\{\mathbf{n}^a\}$ que no altere la métrica. Un cambio plausible

que deje invariante tanto la métrica (6.6) como las relaciones (6.2), (6.3) es posible mediante la introducción de una función $\lambda(x)$ tal que

$$\mathbf{l} \longrightarrow \exp[\lambda(\mathbf{x})] \mathbf{l}, \quad \mathbf{n} \longrightarrow \exp[-\lambda(\mathbf{x})] \mathbf{n}. \quad (6.7)$$

Este cambio implica un *boost* local de Lorentz a lo largo de la dirección \mathbf{e}^1 por medio de un parámetro $\gamma(\mathbf{x}) = \cosh[\lambda(\mathbf{x})]$.

Ya que para soluciones de vacío en relatividad general se tiene que $R = 0$, y al mismo tiempo buscamos soluciones que tengan $T = 0$, entonces la cuadri-divergencia que relaciona ambos escalares se anulará, es decir se cumplirá que

$$\partial_\rho(e T^\mu{}_\mu{}^\rho) = 0. \quad (6.8)$$

Notablemente, la conexión de Weitzenböck no cambia bajo transformaciones lineales globales de la base. Esto implica que podemos usar la tétrada nula para calcular $T^\mu{}_\nu{}^\rho$, como sigue

$$T^\mu{}_\nu{}^\rho = n_a^\mu (\partial_\nu n_\rho^a - \partial_\rho n_\nu^a). \quad (6.9)$$

Bajo la transformación (6.7), el sector vectorial de la torsión, que aparece en la cuadri-divergencia, cambia como

$$T^\mu{}_\mu{}^\rho \longrightarrow T^\mu{}_\mu{}^\rho + (l^\mu l^\rho - n^\mu n^\rho) \partial_\mu \lambda(\mathbf{x}). \quad (6.10)$$

6.2. Geometría de Kerr

Estudiaremos el método de la tétrada nula en la geometría de Kerr, con el propósito de averiguar si esta solución sigue preservándose en la gravedad $f(T)$. Esta métrica corresponde a una generalización de un agujero negro de Schwarzschild, y describe la geometría del espacio-tiempo vacío alrededor de un agujero negro rotante con simetría axial, no cargado, y que posee una compleja estructura causal con dos horizontes de eventos y una ergósfera. Esta solución fue descubierta en 1963 por Roy Kerr [110], y su elemento de línea está dado por [111, 112]

$$\begin{aligned} ds^2 = & \left(1 - \frac{2mr}{\Sigma}\right) dt^2 + \frac{4mr}{\Sigma} dt dr + \frac{4amr s^2(\theta)}{\Sigma} dt d\varphi - \left(1 + \frac{2mr}{\Sigma}\right) dr^2 \\ & - 2as^2(\theta) \left(1 + \frac{2mr}{\Sigma}\right) dr d\varphi - \Sigma d\theta^2 - \left[\Sigma s^2(\theta) + \left(1 + \frac{2mr}{\Sigma}\right) a^2 s^4(\theta)\right] d\varphi^2, \end{aligned} \quad (6.11)$$

donde m denota la masa del agujero negro, y se define $\Sigma = r^2 + a^2 c^2\theta$, con a el momento angular por unidad de masa (notar que $s(\theta) = \sin(\theta)$, $c(\theta) =$

$\cos(\theta)$). El escalar de curvatura está indeterminado para $\Sigma = 0$, por tanto se tiene una singularidad con forma de anillo para $r^2 + a^2 \cos^2(\theta) = 0$. En la expresión (6.11) es posible relacionar las coordenadas $x^\mu = (t, r, \theta, \phi)$ con las coordenadas de Boyer-Lindquist $\tilde{x}^\mu = (\tilde{t}, r, \theta, \tilde{\phi})$ por medio de las relaciones

$$d\tilde{t} = dt + \frac{2mr}{r^2 + a^2 - 2mr} dr \quad \text{y} \quad d\tilde{\phi} = d\phi + \frac{a}{r^2 + a^2 - 2mr} dr. \quad (6.12)$$

Esta solución ha sido estudiada en teorías de gravedad modificada, como por ejemplo en la gravedad $f(R)$ [113, 114, 115], sin embargo deseamos encontrar esta solución en gravedad $f(T)$. Para esto, describiremos la geometría de Kerr por medio de la forma (6.6), para lo cual necesitamos un ansatz para la tétrada nula. Probamos con la siguiente combinación

$$\mathbf{n}^a{}_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^\lambda \left(1 - \frac{2mr}{\Sigma}\right) & e^\lambda \left(1 + \frac{2mr}{\Sigma}\right) & 0 & e^\lambda \left(1 + \frac{2mr}{\Sigma}\right) as^2(\theta) \\ e^{-\lambda} & -e^{-\lambda} & 0 & -e^{-\lambda} as^2(\theta) \\ 0 & 0 & r + iac(\theta) & (r + iac(\theta))is(\theta) \\ 0 & 0 & r - iac(\theta) & -(r - iac(\theta))is(\theta) \end{pmatrix}, \quad (6.13)$$

donde $\lambda = \lambda(t, r, \theta)$, que reproduce la métrica (6.11). Para esta tétrada calculamos el escalar de torsión, obteniendo

$$T = \frac{2}{\Sigma^3} (\Sigma^2 - 4a^2 \cos^2 \theta (\Sigma + mr) - 2r \Sigma^2 \partial_t \lambda). \quad (6.14)$$

Entonces hay una familia de funciones $\lambda(t, r, \theta)$ que puede ser escogida tal que anula T , dada por

$$\lambda(t, r, \theta) = \frac{t}{2r} \left(1 - 4a^2 \cos^2 \theta \frac{\Sigma + mr}{\Sigma^2}\right) + \lambda_1(r, \theta), \quad (6.15)$$

donde λ_1 es una función arbitraria que depende de r y θ . Este resultado significa que la geometría de Kerr es una solución de las ecuaciones de movimiento de la gravedad $f(T)$. Si bien ya se encontraban documentadas, hasta cierto punto, soluciones para una tétrada con simetría axial que poseen T nulo [116], el procedimiento de la tétrada nula permite encontrar este tipo de soluciones de manera más directa y fácil. La tétrada en [116] no coincide necesariamente con la tétrada que hemos encontrado, debido a que tienen una clasificación diferente en lo que respecta a las n -CAF relacionadas con las simetrías remanentes que caracterizan las soluciones de la gravedad $f(T)$ [49].

Es importante señalar que la función λ no está bien definida en $r = 0$. En la geometría de Kerr, la región $r = 0$ es un círculo, donde θ cumple el rol de

la coordenada radial. El borde del círculo, de coordenadas $r = 0$ y $\theta = \pi/2$, corresponde a la singularidad de anillo de la métrica de Kerr, sin embargo su región interna no es singular. La solución en esta región debe ser elaborada nuevamente en concordancia con el significado radial de la coordenada θ . No obstante, la métrica de Schwarzschild se encuentra libre de este problema ya que la singularidad en $r = 0$ es únicamente un punto. En este caso, la función λ se convierte en

$$\lambda(t, r) = \frac{t}{2r} + \lambda_1(r) . \quad (6.16)$$

Por lo tanto, hemos encontrado también que la solución de Schwarzschild se preserva en gravedad $f(T)$. Este hecho ya era sabido de trabajos anteriores [31], pero la forma de la tétrada encontrada aquí es relativamente más simple que aquella presentada por los autores. Además, el procedimiento que realizamos es notoriamente más sencillo. Ambas soluciones deben estar relacionadas por una transformación perteneciente al grupo de simetrías remanentes de la teoría $f(T)$, puesto que ambas poseen $T = 0$.

En lo que respecta al método de la tétrada nula, cabe destacar que la simplicidad en la búsqueda de la solución de Kerr se debe a una buena elección de la tétrada nula. Hemos comenzado a partir de la tétrada nula asociada con la forma de Kerr-Schild de la métrica de Kerr, dada por [111, 112]

$$\begin{aligned} \mathbf{g} &= \mathbf{n}_o \otimes (\mathbf{l}_o + f \mathbf{n}_o) + (\mathbf{l}_o + f \mathbf{n}_o) \otimes \mathbf{n}_o - \mathbf{m}_o \otimes \bar{\mathbf{m}}_o - \bar{\mathbf{m}}_o \otimes \mathbf{m}_o \\ &= \mathbf{g}_o + 2f \mathbf{n}_o \otimes \mathbf{n}_o, \end{aligned} \quad (6.17)$$

es decir, corresponde a una redefinición del vector \mathbf{l} tal que se hace el reemplazo $\mathbf{l} = \mathbf{l}_o + f \mathbf{n}_o$. Se tiene que la base $\{\mathbf{n}_o^a\}$ es una tétrada adecuada para describir la métrica de Minkowski \mathbf{g}_o . El objetivo de la forma (6.17) de la métrica es aislar por completo los efectos gravitatorios de la solución de Kerr en la función f . Es decir, se reescribe la métrica como la suma de la métrica de Minkowski \mathbf{g}_o más un término que contiene los efectos gravitatorios de la métrica de Kerr en el término $2f \mathbf{n}_o \otimes \mathbf{n}_o$, donde la función f es

$$f(r, \theta) = -\frac{2mr}{\Sigma}. \quad (6.18)$$

Luego de obtener esta tétrada se ha aplicado el ansatz (6.7), y hemos obtenido una ecuación diferencial para λ por medio de la imposición de que el escalar de torsión T se anule. Esta ecuación es particularmente simple, ya que hemos realizado una buena elección de coordenadas. Hemos usado la carta empleada en el algoritmo de Newman-Janis para pasar desde la solución de Schwarzschild a la solución de Kerr [117].

6.3. Geometría de McVittie

La solución de McVittie en relatividad general es conocida desde 1933 [118, 119], y describe una solución de agujero negro situada en un universo FLRW en expansión. La solución original asume que la curvatura del espacio-tiempo es cero en la región que es asintóticamente FLRW; éste es el caso en el cual nos enfocaremos en este capítulo. Sin embargo, la solución puede ser generalizada para incluir curvatura espacial positiva o negativa. Es razonable asumir que la curvatura espacial no influye de manera significativa en la dinámica de la masa central, si se cumple que el radio de curvatura sea mucho más grande que el radio gravitacional de la masa central. Bajo estas condiciones, es posible escribir la geometría de McVittie mediante el siguiente elemento de línea

$$ds^2 = \left(\frac{1 - \mu}{1 + \mu} \right)^2 dt^2 - (1 + \mu)^4 a^2(t) d\mathbf{x}^2, \quad (6.19)$$

donde se ha definido

$$\mu = \frac{m}{2a(t)|\mathbf{x}|} \quad (6.20)$$

como un parámetro que combina la propiedad de masa m de un agujero negro de Schwarzschild, y el factor de escala $a(t)$ de un universo en expansión. Se define el centro de la simetría esférica en $\mathbf{x} = 0$. Esta métrica es solución de las ecuaciones de Einstein-Hilbert para m arbitrario, cuando $a(t)$ es solución de la ecuación de Friedman para un fluido perfecto con densidad de energía ρ y presión p . Esta métrica es el caso más general de tres soluciones conocidas de las ecuaciones de Einstein

- para $m = 0$, tenemos inmediatamente $\mu = 0$, y la geometría se reduce a un espacio-tiempo en expansión con curvatura espacial plana, es decir la solución de FLRW plana,
- $a(t) = 1$ reduce la métrica (6.19) a una solución de agujero negro de Schwarzschild en coordenadas isotrópicas ¹, donde $r = |\mathbf{x}| \left(1 + \frac{m}{2|\mathbf{x}|}\right)^2$,
- para $a(t) \sim e^{H_0 t}$ (donde $H_0 = cte$), la métrica anterior se reduce a la métrica de Schwarzschild-de Sitter, adoptando una constante cosmológica positiva.

¹Las coordenadas isotrópicas buscan escribir la métrica de Schwarzschild en una forma donde las hipersuperficies espaciales sean lo más cercanas posibles a una geometría Euclidiana $ds^2 = -A^2(r)dt^2 + B^2(r)[dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2)]$.

La métrica de McVittie posee una singularidad inhomogénea y tipo espacial en $\mu = 1$, lo cual equivale a $a(t)|\mathbf{x}| = m/2$. La superficie delimitada por esta condición yace en el pasado causal de todos los eventos del espacio-tiempo, por lo tanto puede interpretarse como una singularidad cosmológica tipo Big-Bang.

La densidad de energía ρ del fluido presente en la geometría de McVittie es una función del factor de escala, y va como

$$\rho = \frac{3H^2(t)}{\kappa}, \quad (6.21)$$

donde $\kappa = 8\pi G$ y $H(t) = \dot{a}(t)/a(t)$ es el parámetro de Hubble. Por tanto, esta densidad de energía dirige la tasa de expansión del universo. Esta expresión muy simple contrasta con el hecho de que, si bien la densidad de energía es constante para hipersuperficies con $t = cte$, la presión no lo es, y está determinada por

$$p = \frac{1}{\kappa} \left(-3H^2(t) + 2\dot{H}^2(t) \left[\frac{m + 2|\mathbf{x}|a(t)}{m - 2|\mathbf{x}|a(t)} \right] \right). \quad (6.22)$$

Una presión inhomogénea puede interpretarse como una fuerza de origen no gravitacional, que compensa la atracción gravitacional de la masa central, en tanto la masa sea constante y la densidad de energía ρ sea espacialmente homogénea.

Las coordenadas que hemos empleado en la métrica (6.19) son tales que $|\mathbf{x}|$ mapea el exterior del agujero negro dos veces, es decir, el rango $m/2 < |\mathbf{x}| < \infty$ mapea la misma región exterior que el rango $0 < |\mathbf{x}| < m/2$. Para una nueva coordenada que defina, de manera análoga a Schwarzschild, una región interior y exterior por separado, es necesario definir una nueva coordenada radial dada por

$$\mathbf{R} = (1 + \mu)^2 a(t) \mathbf{x}, \quad (6.23)$$

donde $|\mathbf{R}| = R$ representa la coordenada de “área esférica”. La transformación inversa que va de \mathbf{R} a $|\mathbf{x}|$ implica invertir una expresión cuadrática en $|\mathbf{x}|$, por tanto se obtienen dos soluciones dadas por

$$a(t)|\mathbf{x}| = \frac{m}{2} \left(\frac{R}{m} - 1 \pm \sqrt{\left(\frac{R}{m} - 1 \right)^2 - 1} \right). \quad (6.24)$$

Aplicando esta transformación, la métrica de McVittie se convierte en

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{R} - H^2 R^2 \right) dt^2 + \frac{2HR}{\sqrt{1 - \frac{2m}{R}}} dRdt - \frac{dR^2}{1 - \frac{2m}{R}} - R^2 d\Omega^2, \quad (6.25)$$

donde $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ y $H = H(t)$. Si ponemos $H = cte$ en esta expresión, obtenemos la métrica de Schwarzschild-de Sitter en coordenadas análogas a las coordenadas de Eddington-Finkelstein. Para esta forma de la métrica, buscaremos una tétrada adecuada que satisfaga las ecuaciones dinámicas de la gravedad $f(T)$.

6.4. Geometría de McVittie en gravedad $f(T)$

Proponemos una tétrada nula asociada a la métrica de McVittie (6.25) descrita por las coordenadas (t, R, θ, ϕ) , dada por

$$n^a_{\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-\lambda} \left(\sqrt{1 - \frac{2m}{R}} + RH(t) \right) & -\frac{e^{-\lambda}}{\sqrt{1 - \frac{2m}{R}}} & 0 & 0 \\ e^{\lambda} \left(\sqrt{1 - \frac{2m}{R}} - RH(t) \right) & \frac{e^{\lambda}}{\sqrt{1 - \frac{2m}{R}}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R & iRs(\theta) \\ 0 & 0 & R & -iRs(\theta) \end{pmatrix}, \quad (6.26)$$

la cual involucra un boost radial parametrizado por la función $\lambda = \lambda(t, R, \theta)$, que será determinada tal que satisfaga la condición $T = 0$. Para esta tétrada nula calculamos el escalar de torsión, obteniéndose

$$T = -6H(t)^2 + 2R^{-2} - 4R^{-1}\partial_t\lambda. \quad (6.27)$$

Si imponemos que el escalar de torsión se anule, la expresión anterior se convierte en una ecuación diferencial cuya solución es

$$\lambda(t, R) = \frac{t}{2R} - \frac{3R}{2} \int H^2(t) dt. \quad (6.28)$$

El resultado $T = 0$ continúa vigente si agregamos una función que dependa únicamente de las coordenadas R y θ a la función λ . Por tanto, hemos concluido que la gravedad $f(T)$ no permite modificar la geometría de McVittie, pues encontramos una solución que lleva a un escalar de torsión que se anula y que resuelve de manera consistente las ecuaciones dinámicas

$$\begin{aligned} 2\kappa\rho &= f(T=0) + 6H^2(t)f'(T=0), \\ 2\kappa(p+\rho) &= -4f'(T=0)\dot{H}(t)\frac{1}{\sqrt{1-2m/R}}. \end{aligned} \quad (6.29)$$

Para escribir estas ecuaciones hemos utilizado el siguiente tensor de energía-momento

$$T^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} \rho & (\rho+p) & R H(t)\sqrt{1-2m/R} & 0 & 0 \\ 0 & & -p & 0 & 0 \\ 0 & & 0 & -p & 0 \\ 0 & & 0 & 0 & -p \end{pmatrix}, \quad (6.30)$$

donde ρ es la densidad de energía y p es la presión de un fluido perfecto [120].

6.5. Solución cosmológica con $T = 0$

Un resultado interesante que podemos derivar del desarrollo anterior es que para $m = 0$, se encuentra una solución cosmológica descrita por una métrica FLRW que posee $T = 0$. Las tétradas que describen una solución de este tipo han sido estudiadas extensivamente desde la formulación de la teoría $f(T)$, y es sabido que una cosmología plana puede describirse con una tétrada diagonal en coordenadas cartesianas que posee $T = -6H^2(t)$ [20, 31]. Ya que nos será útil posteriormente, escribimos esta tétrada diagonal en coordenadas esféricas, para las cuales obtenemos que

$$e^{a'}_{\mu'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a(t) \sin \theta \cos \varphi & a(t) r \cos \theta \cos \varphi & -a(t) r \sin \theta \sin \varphi \\ 0 & a(t) \sin \theta \sin \varphi & a(t) r \cos \theta \sin \varphi & a(t) r \sin \theta \cos \varphi \\ 0 & a(t) \cos \theta & -a(t) r \sin \theta & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.31)$$

En efecto, ya que la solución de McVittie se reduce a la solución FLRW para $m = 0$, hemos obtenido otra tétrada apropiada para la métrica FLRW, pero que tiene $T = 0$. Dicha tétrada nula se escribe como

$$n^a_{\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-\lambda(t,R)} (1 + RH(t)) & -e^{-\lambda(t,R)} & 0 & 0 \\ e^{\lambda(t,R)} (1 - RH(t)) & e^{\lambda(t,R)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R & iR \sin \theta \\ 0 & 0 & R & -iR \sin \theta \end{pmatrix}, \quad (6.32)$$

la cual también es solución de las ecuaciones de movimiento (6.29) para $m = 0$, es decir satisface el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2\kappa\rho &= f(T = 0) + 6H^2(t)f'(T = 0), \\ 2\kappa(p + \rho) &= -4f'(T = 0)\dot{H}(t). \end{aligned} \quad (6.33)$$

Esto es cierto si usamos la misma función $\lambda(t, R)$ obtenida en (6.28) la cual, notablemente, no depende de la masa. Por tanto se tienen dos soluciones que representan la misma geometría, para un mismo tensor métrico FLRW, pero con diferentes escalares de torsión. Este resultado sugiere que los grados de libertad de la teoría podrían tener algún rol, desconocido hasta el momento, en la aparición de tétradas con métrica equivalente pero que otorguen diferentes geometrías descritas por las ecuaciones dinámicas de la teoría $f(T)$.

6.5.1. Simetrías remanentes en cosmología

Es claro que las dos tétradas (6.31) y (6.32), que describen cosmologías con escalar de torsión diferentes, están relacionadas por una transformación local de Lorentz. La búsqueda de esta transformación consta de dos pasos. Primero debemos obtener la tétrada ortonormal $e^a{}_\mu$ asociada a la tétrada nula dada en (6.32), y luego escribiremos esta tétrada ortonormal en la carta original de coordenadas $(t, |\mathbf{x}|)$. Si realizamos la transformación de coordenadas inversa dada en (6.24), la cual se reduce a $R = a(t)|\mathbf{x}| = a(t)r$ para $m = 0$, obtendremos $e^a{}_{\mu'}$, en términos de la coordenada esférica radial r .

El primer paso mediante el cual se obtiene la tétrada ortonormal $e^a{}_\mu$ en términos de la tétrada nula, lo logramos por medio de una transformación lineal $L^a{}_b$ tal que

$$\begin{aligned}
 e^a{}_\mu &= L^a{}_b n^b{}_\mu \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -i & i \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e^{-\lambda}(1+RH(t)) & -e^{-\lambda} & 0 & 0 \\ e^\lambda(1-RH(t)) & e^\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R & iRs(\theta) \\ 0 & 0 & R & -iRs(\theta) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cosh \lambda - RH(t) \sinh \lambda & \sinh \lambda & 0 & 0 \\ \sinh \lambda - RH(t) \cosh \lambda & \cosh \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Rs(\theta) \end{pmatrix},
 \end{aligned} \tag{6.34}$$

donde $\lambda \equiv \lambda(t, R)$.

El segundo paso consta en realizar una transformación de coordenadas en la tétrada, que tome en cuenta el paso desde $x^\mu = (t, R, \theta, \phi)$ a $x^{\mu'} = (t, r, \theta, \phi)$. Representamos a la tétrada por la 1-forma \mathbf{e}^a ; ya que este objeto geométrico es independiente de la elección particular de coordenadas, se cumple que la expresión

$$\mathbf{e}^a = e^a{}_\mu dx^\mu = e^a{}_{\mu'} dx^{\mu'}. \tag{6.35}$$

se preserva tras dicho cambio. La transición de coordenadas $x^\mu \rightarrow x^{\mu'}$ expresada en la ecuación (6.24) implicará que las 1-formas dx^μ y $dx^{\mu'}$ sean iguales, excepto por la 1-forma base dR , que está relacionada con las 1-formas $dx^{\mu'}$ por medio de $dR = \dot{a}r dt + a dr$. Tomando en cuenta estas consideraciones, se obtiene que la tétrada transformada es

$$e^a{}_{\mu'} = \begin{pmatrix} \cosh \lambda & a(t) \sinh \lambda & 0 & 0 \\ \sinh \lambda & a(t) \cosh \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a(t)r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a(t)r \sin \theta \end{pmatrix}. \tag{6.36}$$

Está claro que existe una transformación local de Lorentz que conecta a las tétradas (6.36) y (6.31), la matriz que representa esta transformación tiene por componentes

$$\Lambda_b^{a'} = \begin{pmatrix} \cosh \lambda & \sinh \lambda & 0 & 0 \\ \sinh \lambda \sin \theta \cos \phi & \cosh \lambda \sin \theta \cos \phi & \cos \theta \cos \phi & -\sin \phi \\ \sinh \lambda \sin \theta \sin \phi & \cosh \lambda \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \sin \phi & \cos \phi \\ \sinh \lambda \cos \theta & \cosh \lambda \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.37)$$

las cuales satisfacen $\mathbf{e}^{a'} = \Lambda_b^{a'} \mathbf{e}^b$. Esta matriz puede separarse como el producto de dos rotaciones y un *boost*, las cuales son representadas, respectivamente, por el siguiente producto de matrices

$$\Lambda_b^{a'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c(\phi) & -s(\phi) \\ 0 & 0 & s(\phi) & c(\phi) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c(\theta) & -s(\theta) & 0 \\ 0 & s(\theta) & c(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh \lambda & \sinh \lambda & 0 & 0 \\ \sinh \lambda & \cosh \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.38)$$

Sabemos que cualquier solución de las ecuaciones dinámicas de la teoría $f(T)$ permite un conjunto de simetrías remanentes locales de Lorentz [49]. Tales simetrías son generadas por transformaciones de Lorentz que cumplen la condición

$$d(\epsilon_{abcd} \mathbf{e}^a \wedge \mathbf{e}^b \wedge \eta^{de} \Lambda_{f'}^c d\Lambda_e^{f'}) = 0. \quad (6.39)$$

El par $(\mathbf{e}^a, \Lambda_b^{a'})$ encontrado no satisface esta relación. Esto se debe a que, aunque ambas tétradas tienen ecuaciones de movimiento consistentes, el escalar de torsión que tienen asociadas es diferente, por lo tanto la transformación (6.37) no es una simetría de la teoría. También poseen una clasificación diferente en lo que concierne a la distinción en n-CAFs. En este caso particular es posible probar que la tétrada (6.36) es una 1-CAF, ya que la única combinación que es cero es aquella dada por los elementos de la base $(\mathbf{e}^0, \mathbf{e}^1)$. Por otro lado, la tétrada (6.31) es una 3-CAF, como puede encontrarse en [49]. Esto significa que la segunda tétrada admite tres transformaciones locales de Lorentz que dejan T inalterado, mientras que la primera solución admite un *boost* local asociado con el grado de libertad de la función λ . Entonces, la transformación (6.37) no es una simetría remanente de las ecuaciones dinámicas de la gravedad $f(T)$ ya que cambian el escalar de torsión T .

6.6. Conclusiones

Uno de los propósitos para los cuales fue elaborada la gravedad $f(T)$ corresponde a modificar soluciones de relatividad general con el objetivo de

encontrar deformaciones a energías altas y bajas por medio de un enfoque geométrico. A partir del método de la tetrada nula hemos mostrado que es relativamente fácil encontrar soluciones de la gravedad teleparalela con un escalar de torsión nulo o constante. Estas soluciones son también soluciones de la gravedad $f(T)$, que tienen asociadas una constante de Newton y constante cosmológica modificadas, siempre que se cumpla que $f(T = 0) \neq 0$ y $f'(T = 0) \neq 1$. De esta forma, hemos encontrado que la geometría de Kerr y la de McVittie también son soluciones de la gravedad $f(T)$, ya que admiten una tetrada para la cual el escalar de torsión se anula. Este argumento fue utilizado en [31] para mostrar que la geometría de Schwarzschild es también una solución de las $f(T)$, sin embargo hemos probado que geometrías con simetría axial como las métricas de Kerr y McVittie, también son solución de las ecuaciones dinámicas. Además, en el caso de McVittie, cuando se toma $m = 0$ se obtiene una tetrada que describe una cosmología de FLRW. Ya que era conocida otra solución cosmológica para las $f(T)$ con $T = -6H^2$. El hecho de encontrar, en el contexto cosmológico, dos tétradas con diferente escalar de torsión, podría estar evidenciando el grado de libertad adicional de la teoría $f(T)$. Por otro lado, sería de interés conocer si el método de la tetrada nula puede ser aplicado a otros tipos de geometrías más generales. La existencia de soluciones de relatividad general que no son modificables por la teoría $f(T)$ puede tener relación con puntos de equilibrio de soluciones cosmológicas [64]. No obstante, aún queda mucho espacio para trabajo futuro en lo que respecta a la búsqueda de soluciones en gravedad $f(T)$, para lo cual el método de la tetrada nula presentado en este capítulo es una buena herramienta. Para otro tipo de geometrías sin simetría axial, es preciso buscar métodos alternativos que simplifiquen la búsqueda.

Conclusiones generales y trabajo futuro

En esta Tesis hemos estudiado modificaciones al equivalente teleparalelo de la relatividad general que definen un espectro de teorías de gravedad conocidas como gravedad $f(T)$, con el propósito de desarrollar métodos que nos permitan comprender sus grados de libertad y la interpretación física de éstos. Para emprender esta tarea, comenzamos en el Capítulo 1 con una introducción teórica a la geometría diferencial, a los conceptos de torsión y curvatura, y cómo a partir de estos conceptos se define la gravedad teleparalela. El Capítulo 2 contiene una introducción a los fundamentos de la gravedad $f(T)$, y algunos tópicos de interés relacionados con los grados de libertad de la teoría. Puesto que fue utilizado el algoritmo de Dirac–Bergmann para sistemas Hamiltonianos con vínculos como método principal para el conteo de los grados de libertad, es que hemos realizado una introducción teórica a este procedimiento en el Capítulo 3.

El trabajo original realizado en esta Tesis comienza en el Capítulo 4, donde se ha estudiado el formalismo Hamiltoniano de la gravedad teleparalela, desarrollando un método original para la obtención de los vínculos primarios y secundarios y el cálculo del álgebra de vínculos. El contenido expuesto en este Capítulo está fuertemente basado en [99]. En un primer paso, hemos reescrito el Lagrangiano de la gravedad teleparalela en un formalismo que prescinde de la métrica y lo reescribe en términos de derivadas antisimétricas de la tétrada, la tétrada misma, y un objeto matemático que hemos llamado *supermétrica*. La supermétrica, que ha sido introducida por primera vez en este trabajo, depende únicamente de los invariantes de Lorentz η_{ab} y δ_b^a , y revela ser un objeto importante en la estructura Lagrangiana de la teoría. Este formalismo nos permite encontrar los vínculos primarios por medio de los autovectores nulos de la matriz que aparece en la relación lineal entre los momentos canónicos y las velocidades. Se obtienen n vínculos primarios

$G_c^{(1)} \approx \Pi_c^0 \approx 0$ asociados al hecho de que el Lagrangiano no depende de $\partial_0 E_0^a$. Por otro lado, se encuentran $\frac{n(n-1)}{2}$ vínculos $G_{ab}^{(1)}$ que están asociados a transformaciones locales de Lorentz. Hemos estudiado la consistencia en el tiempo de estos vínculos utilizando el Hamiltoniano primario, el cual depende del Hamiltoniano canónico. Para hallar este último introdujimos una notación de multi-índices, la cual transforma objetos matemáticos con pares de índices $(\)_a^e$ a un único índice $(\)_A$. Esto permite manejar de manera sencilla el despeje de los momentos canónicos en función de las velocidades. Una vez encontrado el Hamiltoniano canónico y primario, estudiamos la consistencia de los vínculos primarios, lo cual otorga n vínculos secundarios $G_0^{(2)}$ y $G_i^{(2)}$. Estos vínculos se corresponden a los vínculos de super-Hamiltoniano y super-momento de la formulación ADM de la relatividad general. Por otro lado, los vínculos $G_{ab}^{(1)}$ satisfacen el álgebra de Lorentz. Se ha demostrado que todos los vínculos son de primera clase, y hemos encontrado las transformaciones de gauge que todos los vínculos de primera clase producen en la tetrada. Se concluye que los grados de libertad de la gravedad teleparalela son $\frac{n(n-3)}{2}$, el mismo número que para la relatividad general.

Continuamos en el Capítulo 5 desarrollando la formulación Hamiltoniana de la gravedad $f(T)$ a partir del formalismo desarrollado para la gravedad teleparalela. La mayor parte del contenido de este Capítulo está basado en [104]. Hemos reescrito el Lagrangiano de la gravedad $f(T)$ en una forma matemáticamente equivalente con la ayuda de un campo escalar $\phi = f'(T)$ que añade una coordenada canónica adicional al formalismo. La presencia de esta coordenada genera un vínculo primario adicional $G_\pi^{(1)}$ que altera por completo la estructura de vínculos. Otros vínculos primarios presentes en la formulación son los vínculos $G_c^{(1)}$ y los vínculos $G_{ab}^{(1)}$ asociados a transformaciones locales de Lorentz. Estos últimos se ven modificados por un término que es proporcional a ϕ . Como fue mostrado, este término modifica por completo el álgebra de vínculos en comparación con el caso de la gravedad teleparalela, puesto que el corchete de Poisson $\{G_\pi^{(1)}, G_{ab}^{(1)}\}$ es diferente de cero. Al estudiar la consistencia temporal de todos estos vínculos, se encuentran los vínculos secundarios $G_0^{(2)}$ y $G_i^{(2)}$ que son análogos a los vínculos de super-Hamiltoniano y super-momento de ADM. La presencia del vínculo $G_\pi^{(1)}$ y el hecho que $G_0^{(2)}$ depende de ϕ dan como resultado que el corchete $\{G_\pi^{(1)}, G_0^{(2)}\}$ es también diferente de cero. La estructura de la matriz que contiene los corchetes de Poisson de los vínculos primarios con el resto de los vínculos, denotada por $C'_{\hat{\rho}\rho}$, indica que debemos redefinir la base de vínculos para encontrar un subconjunto de vínculos de segunda clase, cuya sub-matriz de corchetes Δ_{AB} tenga determinante diferente de cero. La estructura de los autovectores nulos

de la matriz $C_{\hat{\rho}\rho}$ muestra que podemos tomar uno de los vínculos de Lorentz y combinarlo con $G_0^{(2)}$ para obtener un super-Hamiltoniano $\tilde{G}_0^{(2)}$ que es de primera clase, a cambio de que un vínculo de Lorentz pase a ser de segunda clase. En otras palabras, el conjunto de vínculos $G_\pi^{(1)}$, $G_0^{(2)}$ y $G_{ab}^{(1)}$ puede ser reescrito como un conjunto de $\frac{n(n-1)}{2} - 1$ vínculos de primera clase $\tilde{G}_{ab}^{(1)}$ más el vínculo $\tilde{G}_0^{(2)}$, y el conjunto de vínculos de segunda clase $\tilde{G}_{|ab|}^{(1)}$, $G_\pi^{(1)}$ (donde $|ab|$ denota un único par de subíndices). El conteo de grados de libertad indica que la gravedad $f(T)$ posee $\frac{n(n-3)}{2} + 1$ grados de libertad, esto significa que posee un grado de libertad extra en comparación con la gravedad teleparalela (y la relatividad general). Este número es diferente a resultados previos obtenidos por otros autores, no obstante hemos explicado las fuentes del error cometido por ellos. El resultado de que la teoría tendría un grado de libertad extra sugiere que la teoría debería poseer un marco de Einstein, sin embargo la pérdida de la invariancia local de Lorentz en esta teoría restringe las transformaciones que posibilitan la existencia de este marco.

En la parte final de este trabajo, que constituye el Capítulo 6, hemos estudiado soluciones de vacío en gravedad $f(T)$ que también son solución de la relatividad general. Las soluciones estudiadas corresponden a la geometría de agujero negro rotante de Kerr [108], y la solución de agujero negro cosmológico de McVittie [109]. La búsqueda de una tétrada que es solución de las ecuaciones de movimiento de la gravedad $f(T)$ se ve facilitada por medio del método de la tétrada nula. Este procedimiento es posible de realizar cuando tenemos soluciones con simetría axial, y permite dejar la métrica invariante por medio de la redefinición de dos vectores nulos base por medio de un parámetro que caracteriza un boost radial. Para ambas geometrías hemos encontrado valores para el parámetro libre que se corresponden con tétradas que resuelven las ecuaciones de movimiento de manera consistente. En el caso particular de McVittie con $m = 0$, encontramos una solución cosmológica con $T = 0$. Esto es notable, pues ya son conocidas soluciones cosmológicas, con idéntica métrica, que poseen $T = -6H^2$. Probablemente estemos ante un indicio del grado de libertad adicional de la teoría; este tema debe ser estudiado en profundidad a futuro.

La importancia del trabajo realizado en esta Tesis radica en las herramientas desarrolladas para estudiar nuevas teorías de gravedad con estructura teleparalela. La gravedad teleparalela posee un amplio potencial como teoría base para construir modelos de gravedad más complejos. Para todos estos modelos que tengan aplicaciones interesantes en cosmología y pretendan ser una descripción realística de la naturaleza, siempre es necesario estudiar

su consistencia interna, y para ésto el procedimiento Hamiltoniano es de utilidad. El resultado acerca de los grados de libertad de la gravedad $f(T)$ es novedoso, así como el mecanismo de violación de simetrías de Lorentz. La forma en la cual esta teoría provoca la pérdida de la invariancia local de Lorentz es un tema abierto, y si bien nuestro trabajo implica que es sólo un generador de transformaciones de Lorentz que deja de ser simetría de la teoría, es preciso entender qué significa esto y si es posible enmarcar este resultado por medio del acoplamiento de un campo escalar, o un campo vectorial que posea un único grado de libertad.

Existen muchas formas de continuar el trabajo realizado en esta Tesis. En lo que respecta al formalismo Hamiltoniano de la gravedad teleparalela, es posible aplicar los métodos desarrollados para una gran variedad de teorías teleparalelas extendidas que no forman parte del paradigma de la gravedad $f(T)$. La extensión más fácil corresponde a aquella para la cual dejamos libres los parámetros a_i del Lagrangiano teleparalelo más general posible. Por otro lado, es posible estudiar extensiones más generales como la teoría teleparalela tipo Born-Infeld [20], la gravedad teleparalela determinantal [22], extensiones tipo Lovelock [54], extensiones tipo Gauss-Bonnet [51], entre otras. En estas últimas, esperamos que los métodos desarrollados en el Capítulo 5 sean de utilidad, sin embargo nuevas estrategias deberán ser desarrolladas para cada caso en particular. El estudio de las transformaciones conformes y la pérdida de la invariancia local de Lorentz en estas teorías es también un problema abierto que puede ser confrontado utilizando las herramientas desarrolladas en esta Tesis. Finalmente, el método de la tetrada nula es extendible a otras soluciones de relatividad general que poseen simetría axial, y las soluciones FLRW con diferente escalar de torsión sugieren estudiar la estabilidad de soluciones cosmológicas como medio para entender este comportamiento. Está claro que el estudio de las teorías de gravedad basadas en el teleparalelismo es un campo de investigación reciente, y hay mucho que queda por hacer, no obstante serán las observaciones actuales y futuras las que nos ayuden a discernir los modelos de gravedad viables y que correspondan a una descripción certera de la naturaleza.

Bibliografía

- [1] **Supernova Search Team** Collaboration, A. G. Riess *et al.*, “Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant”, *Astron. J.* **116** (1998) 1009–1038, [arXiv:astro-ph/9805201](#).
- [2] **Supernova Search Team** Collaboration, B. P. Schmidt *et al.*, “The High Z supernova search: Measuring cosmic deceleration and global curvature of the universe using type Ia supernovae”, *Astrophys. J.* **507** (1998) 46–63, [arXiv:astro-ph/9805200](#).
- [3] V. C. Rubin and W. K. Ford, Jr., “Rotation of the Andromeda Nebula from a Spectroscopic Survey of Emission Regions”, *Astrophys. J.* **159** (1970) 379–403.
- [4] **Virgo, LIGO Scientific** Collaboration, B. P. Abbott *et al.*, “Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger”, *Phys. Rev. Lett.* **116** (2016), no. 6, 061102, [arXiv:1602.03837](#).
- [5] **Virgo, LIGO Scientific** Collaboration, B. P. Abbott *et al.*, “GW151226: Observation of Gravitational Waves from a 22-Solar-Mass Binary Black Hole Coalescence”, *Phys. Rev. Lett.* **116** (2016), no. 24, 241103, [arXiv:1606.04855](#).
- [6] A. Einstein *Preuss. Akad. Wiss.* **414** (1925).
- [7] H. Weyl *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wissensch.* **465** (1918).
- [8] T. Kaluza, “Zum Unitätsproblem der Physik”, *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)* **1921** (1921) 966–972, [arXiv:1803.08616](#).
- [9] O. Klein, “Quantum Theory and Five-Dimensional Theory of Relativity. (In German and English)”, *Z. Phys.* **37** (1926) 895–906, [76 (1926)].

- [10] E. Cartan *C. R. Acad. Sci. Paris* **174** (1922) 593.
- [11] E. Cartan *C. R. Acad. Sci. Paris* **174** (1922) 734.
- [12] E. Cartan, “Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée. (première partie)”, *Annales Sci. Ecole Norm. Sup.* **40** (1923) 325–412.
- [13] E. Cartan, “Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée. (première partie) (Suite).”, *Annales Sci. Ecole Norm. Sup.* **41** (1924) 1–25.
- [14] F. W. Hehl, “Spin and torsion in general relativity: I. foundations”, *General relativity and gravitation* **4** (1973), no. 4, 333–349.
- [15] C. Møller, “C. møller, k. dan. vidensk. selsk. mat. fys. skr., 1, 10 (1961).”, *K. Dan. Vidensk. Selsk. Mat. Fys. Skr.* **1** (1961) 10.
- [16] C. Pellegrini and J. Plebański *K. Dan Vidensk. Selsk. Mat. Fys. Skr.* **2** (1962) 2.
- [17] K. Hayashi and T. Nakano, “Extended translation invariance and associated gauge fields”, *Prog. Theor. Phys.* **38** (1967) 491–507, [354(1967)].
- [18] Y. M. Cho, “Einstein Lagrangian as the Translational Yang-Mills Lagrangian”, *Phys. Rev.* **D14** (1976) 2521.
- [19] K. Hayashi and T. Shirafuji, “New General Relativity”, *Phys. Rev.* **D19** (1979) 3524–3553, [409(1979)].
- [20] R. Ferraro and F. Fiorini, “Modified teleparallel gravity: Inflation without inflaton”, *Phys. Rev.* **D75** (2007) 084031, [arXiv:gr-qc/0610067](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0610067).
- [21] R. Ferraro and F. Fiorini, “On Born-Infeld Gravity in Weitzenböck spacetime”, *Phys. Rev.* **D78** (2008) 124019, [arXiv:0812.1981](https://arxiv.org/abs/0812.1981).
- [22] R. Ferraro and F. Fiorini, “Born-Infeld Determinantal gravity and the taming of the conical singularity in 3-dimensional spacetime”, *Phys. Lett.* **B692** (2010) 206–211, [arXiv:0910.4693](https://arxiv.org/abs/0910.4693).
- [23] G. R. Bengochea and R. Ferraro, “Dark torsion as the cosmic speed-up”, *Phys. Rev.* **D79** (2009) 124019, [arXiv:0812.1205](https://arxiv.org/abs/0812.1205).

- [24] K. Bamba, C.-Q. Geng, and C.-C. Lee, “Comment on ‘Einstein’s Other Gravity and the Acceleration of the Universe’”, [arXiv:1008.4036](#).
- [25] E. V. Linder, “Einstein’s Other Gravity and the Acceleration of the Universe”, *Phys. Rev.* **D81** (2010) 127301, [arXiv:1005.3039](#), [Erratum: *Phys. Rev.*D82,109902(2010)].
- [26] K. Bamba, C.-Q. Geng, C.-C. Lee, and L.-W. Luo, “Equation of state for dark energy in $f(T)$ gravity”, *JCAP* **1101** (2011) 021, [arXiv:1011.0508](#).
- [27] G. R. Bengochea, “Observational information for $f(T)$ theories and Dark Torsion”, *Phys. Lett.* **B695** (2011) 405–411, [arXiv:1008.3188](#).
- [28] P. Wu and H. W. Yu, “The dynamical behavior of $f(T)$ theory”, *Phys. Lett.* **B692** (2010) 176–179, [arXiv:1007.2348](#).
- [29] R.-J. Yang, “Conformal transformation in $f(T)$ theories”, *EPL* **93** (2011), no. 6, 60001, [arXiv:1010.1376](#).
- [30] R. Zheng and Q.-G. Huang, “Growth factor in $f(T)$ gravity”, *JCAP* **1103** (2011) 002, [arXiv:1010.3512](#).
- [31] R. Ferraro and F. Fiorini, “Non trivial frames for $f(T)$ theories of gravity and beyond”, *Phys. Lett.* **B702** (2011) 75–80, [arXiv:1103.0824](#).
- [32] R. Ferraro and F. Fiorini, “Spherically symmetric static spacetimes in vacuum $f(T)$ gravity”, *Phys. Rev.* **D84** (2011) 083518, [arXiv:1109.4209](#).
- [33] Y.-P. Wu and C.-Q. Geng, “Primordial Fluctuations within Teleparallelism”, *Phys. Rev.* **D86** (2012) 104058, [arXiv:1110.3099](#).
- [34] C.-Q. Geng, C.-C. Lee, E. N. Saridakis, and Y.-P. Wu, ““Teleparallel” dark energy”, *Phys. Lett.* **B704** (2011) 384–387, [arXiv:1109.1092](#).
- [35] S.-H. Chen, J. B. Dent, S. Dutta, and E. N. Saridakis, “Cosmological perturbations in $f(T)$ gravity”, *Phys. Rev.* **D83** (2011) 023508, [arXiv:1008.1250](#).
- [36] T. P. Sotiriou, B. Li, and J. D. Barrow, “Generalizations of teleparallel gravity and local Lorentz symmetry”, *Phys. Rev.* **D83** (2011) 104030, [arXiv:1012.4039](#).

- [37] H. Wei, X.-P. Ma, and H.-Y. Qi, “ $f(T)$ Theories and Varying Fine Structure Constant”, *Phys. Lett.* **B703** (2011) 74–80, arXiv:1106.0102.
- [38] P. A. González, E. N. Saridakis, and Y. Vásquez, “Circularly symmetric solutions in three-dimensional Teleparallel, $f(T)$ and Maxwell– $f(T)$ gravity”, *JHEP* **07** (2012) 053, arXiv:1110.4024.
- [39] Y.-F. Cai, S.-H. Chen, J. B. Dent, S. Dutta, and E. N. Saridakis, “Matter Bounce Cosmology with the $f(T)$ Gravity”, *Class. Quant. Grav.* **28** (2011) 215011, arXiv:1104.4349.
- [40] C.-Q. Geng, C.-C. Lee, and E. N. Saridakis, “Observational Constraints on Teleparallel Dark Energy”, *JCAP* **1201** (2012) 002, arXiv:1110.0913.
- [41] R. Ferraro, “ $f(R)$ and $f(T)$ theories of modified gravity”, *AIP Conf. Proc.* **1471** (2012) 103–110, arXiv:1204.6273.
- [42] K. Izumi and Y. C. Ong, “Cosmological Perturbation in $f(T)$ Gravity Revisited”, *JCAP* **1306** (2013) 029, arXiv:1212.5774.
- [43] D. Liu, P. Wu, and H. Yu, “Gödel-type universes in $f(T)$ gravity”, *Int. J. Mod. Phys.* **D21** (2012) 1250074, arXiv:1203.2016.
- [44] L. Iorio and E. N. Saridakis, “Solar system constraints on $f(T)$ gravity”, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **427** (2012) 1555, arXiv:1203.5781.
- [45] F. Fiorini, P. A. González, and Y. Vásquez, “Compact extra dimensions in cosmologies with $f(T)$ structure”, *Phys. Rev.* **D89** (2014), no. 2, 024028, arXiv:1304.1912.
- [46] F. Fiorini, “Nonsingular Promises from Born-Infeld Gravity”, *Phys. Rev. Lett.* **111** (2013) 041104, arXiv:1306.4392.
- [47] S. Nesseris, S. Basilakos, E. N. Saridakis, and L. Perivolaropoulos, “Viable $f(T)$ models are practically indistinguishable from Λ CDM”, *Phys. Rev.* **D88** (2013) 103010, arXiv:1308.6142.
- [48] P. A. González, J. Saavedra, and Y. Vásquez, “Three-Dimensional Hairy Black Holes in Teleparallel Gravity”, *Astrophys. Space Sci.* **357** (2015), no. 2, 143, arXiv:1411.2193.

- [49] R. Ferraro and F. Fiorini, “Remnant group of local Lorentz transformations in $f(T)$ theories”, *Phys. Rev.* **D91** (2015), no. 6, 064019, [arXiv:1412.3424](#).
- [50] P. Chen, K. Izumi, J. M. Nester, and Y. C. Ong, “Remnant Symmetry, Propagation and Evolution in $f(T)$ Gravity”, *Phys. Rev.* **D91** (2015), no. 6, 064003, [arXiv:1412.8383](#).
- [51] G. Kofinas and E. N. Saridakis, “Teleparallel equivalent of Gauss-Bonnet gravity and its modifications”, *Phys. Rev.* **D90** (2014) 084044, [arXiv:1404.2249](#).
- [52] F. Fiorini, “Primordial brusque bounce in Born-Infeld determinantal gravity”, *Phys. Rev.* **D94** (2016), no. 2, 024030, [arXiv:1511.03227](#).
- [53] Y.-F. Cai, S. Capozziello, M. De Laurentis, and E. N. Saridakis, “ $f(T)$ teleparallel gravity and cosmology”, *Rept. Prog. Phys.* **79** (2016), no. 10, 106901, [arXiv:1511.07586](#).
- [54] P. A. González and Y. Vásquez, “Teleparallel Equivalent of Lovelock Gravity”, *Phys. Rev.* **D92** (2015), no. 12, 124023, [arXiv:1508.01174](#).
- [55] M. Krššák and E. N. Saridakis, “The covariant formulation of $f(T)$ gravity”, *Class. Quant. Grav.* **33** (2016), no. 11, 115009, [arXiv:1510.08432](#).
- [56] S. Bahamonde and M. Wright, “Teleparallel quintessence with a nonminimal coupling to a boundary term”, *Phys. Rev.* **D92** (2015), no. 8, 084034, [arXiv:1508.06580](#), [Erratum: *Phys. Rev.* **D93**, no. 10, 109901 (2016)].
- [57] F. Fiorini and N. Vattuone, “An analysis of Born–Infeld determinantal gravity in Weitzenböck spacetime”, *Phys. Lett.* **B763** (2016) 45–51, [arXiv:1608.02622](#).
- [58] S. Bahamonde and C. G. Böhm, “Modified teleparallel theories of gravity: Gauss–Bonnet and trace extensions”, *Eur. Phys. J.* **C76** (2016), no. 10, 578, [arXiv:1606.05557](#).
- [59] S. Bahamonde and S. Capozziello, “Noether Symmetry Approach in $f(T, B)$ teleparallel cosmology”, *Eur. Phys. J.* **C77** (2017), no. 2, 107, [arXiv:1612.01299](#).

- [60] A. Golovnev, T. Koivisto, and M. Sandstad, “On the covariance of teleparallel gravity theories”, *Class. Quant. Grav.* **34** (2017), no. 14, 145013, [arXiv:1701.06271](#).
- [61] J. M. Nester and Y. C. Ong, “Counting Components in the Lagrange Multiplier Formulation of Teleparallel Theories”, [arXiv:1709.00068](#).
- [62] S. Bahamonde, C. G. Böhm, and M. Krššák, “New classes of modified teleparallel gravity models”, *Phys. Lett.* **B775** (2017) 37–43, [arXiv:1706.04920](#).
- [63] Z.-F. Mai and H. Lu, “Black Holes, Dark Wormholes and Solitons in $f(T)$ Gravities”, *Phys. Rev.* **D95** (2017), no. 12, 124024, [arXiv:1704.05919](#).
- [64] M. A. Skugoreva and A. V. Toporensky, “On Kasner solution in Bianchi I $f(T)$ cosmology”, [arXiv:1711.07069](#).
- [65] M. Hohmann, L. Järv, and U. Ualikhanova, “Covariant formulation of scalar-torsion gravity”, [arXiv:1801.05786](#).
- [66] B. Li, T. P. Sotiriou, and J. D. Barrow, “ $f(T)$ gravity and local Lorentz invariance”, *Phys. Rev.* **D83** (2011) 064035, [arXiv:1010.1041](#).
- [67] B. Li, T. P. Sotiriou, and J. D. Barrow, “Large-scale Structure in $f(T)$ Gravity”, *Phys. Rev.* **D83** (2011) 104017, [arXiv:1103.2786](#).
- [68] M. Li, R.-X. Miao, and Y.-G. Miao, “Degrees of freedom of $f(T)$ gravity”, *JHEP* **07** (2011) 108, [arXiv:1105.5934](#).
- [69] M. Krššák and J. G. Pereira, “Spin Connection and Renormalization of Teleparallel Action”, *Eur. Phys. J.* **C75** (2015), no. 11, 519, [arXiv:1504.07683](#).
- [70] V. A. Penas, “Deformed Weitzenböck Connections and Teleparallel Gravity”, [arXiv:1706.09008](#).
- [71] T. Ortín, “Gravity and strings”, Cambridge University Press, 2007.
- [72] R. Aldrovandi and J. G. Pereira, “Teleparallel Gravity”, Springer, Dordrecht, 2013.
- [73] R. Penrose, “Gravitational collapse and space-time singularities”, *Phys. Rev. Lett.* **14** (1965) 57–59.

- [74] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler, “Gravitation”, W. H. Freeman, San Francisco, 1973.
- [75] P. J. E. Peebles and B. Ratra, “The Cosmological constant and dark energy”, *Rev. Mod. Phys.* **75** (2003) 559–606, [arXiv:astro-ph/0207347](#), [,592(2002)].
- [76] N. Rosen, “A bi-metric theory of gravitation”, *General Relativity and Gravitation* **4** (1973) 435–447.
- [77] V. A. Rubakov and M. E. Shaposhnikov, “Extra Space-Time Dimensions: Towards a Solution to the Cosmological Constant Problem”, *Phys. Lett.* **125B** (1983) 139.
- [78] H. A. Buchdahl, “Non-linear Lagrangians and cosmological theory”, *MNRAS* **150** (1970) 1.
- [79] T. P. Sotiriou and V. Faraoni, “f(R) Theories Of Gravity”, *Rev. Mod. Phys.* **82** (2010) 451–497, [arXiv:0805.1726](#).
- [80] J. D. Bekenstein, “Relativistic gravitation theory for the MOND paradigm”, *Phys. Rev.* **D70** (2004) 083509, [arXiv:astro-ph/0403694](#), [Erratum: *Phys. Rev.*D71,069901(2005)].
- [81] J. W. Moffat, “Scalar-tensor-vector gravity theory”, *JCAP* **0603** (2006) 004, [arXiv:gr-qc/0506021](#).
- [82] C. Brans and R. H. Dicke, “Mach’s principle and a relativistic theory of gravitation”, *Phys. Rev.* **124** (1961) 925–935, [,142(1961)].
- [83] A. Nicolis, R. Rattazzi, and E. Trincherini, “The Galileon as a local modification of gravity”, *Phys. Rev.* **D79** (2009) 064036, [arXiv:0811.2197](#).
- [84] M. Henneaux and C. Teitelboim, “Quantization of gauge systems”, Princeton, USA: Univ. Pr. (1992) 520 p, 1992.
- [85] J. Zanelli, “Lecture notes on Chern-Simons (super-)gravities. Second edition (February 2008)”, in “Proceedings, 7th Mexican Workshop on Particles and Fields (MWPF 1999): Merida, Mexico, November 10-17, 1999”. 2005. [arXiv:hep-th/0502193](#).
- [86] Y. Guttman and H. Lyre, “Fiber bundle gauge theories and ’Field’s dilemma””, [arXiv:physics/0005051](#).

- [87] K. Sundermeyer, “Constrained dynamics with applications to Yang-Mills theory, general relativity, classical spin, dual string model”, *Lect. Notes Phys.* **169** (1982) 1–318.
- [88] K. Sundermeyer, “Symmetries in fundamental physics”, Springer, Cham, Switzerland, 2014.
- [89] P. A. M. Dirac, “Lectures on Quantum Mechanics”, New York: Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University, 1964.
- [90] R. L. Arnowitt, S. Deser, and C. W. Misner, “The Dynamics of general relativity”, *Gen. Rel. Grav.* **40** (2008) 1997–2027, [arXiv:gr-qc/0405109](#).
- [91] J. W. Maluf, “Hamiltonian formulation of the teleparallel description of general relativity”, *J. Math. Phys.* **35** (1994) 335–343.
- [92] J. W. Maluf and J. F. da Rocha-Neto, “General relativity on a null surface: Hamiltonian formulation in the teleparallel geometry”, *Gen. Rel. Grav.* **31** (1999) 173–185, [arXiv:gr-qc/9808001](#).
- [93] J. W. Maluf and J. F. da Rocha-Neto, “Hamiltonian formulation of general relativity in the teleparallel geometry”, *Phys. Rev.* **D64** (2001) 084014.
- [94] J. F. da Rocha Neto, J. W. Maluf, and S. C. Ulhoa, “Hamiltonian formulation of unimodular gravity in the teleparallel geometry”, *Phys. Rev.* **D82** (2010) 124035, [arXiv:1101.2425](#), [Erratum: *Phys. Rev.* **D87**, no. 6, 069909 (2013)].
- [95] M. Blagojevic and I. A. Nikolic, “Hamiltonian structure of the teleparallel formulation of GR”, *Phys. Rev.* **D62** (2000) 024021, [arXiv:hep-th/0002022](#).
- [96] A. Okolów, “ADM-like Hamiltonian formulation of gravity in the teleparallel geometry”, *Gen. Rel. Grav.* **45** (2013) 2569–2610, [arXiv:1111.5498](#).
- [97] A. Okolów, “ADM-like Hamiltonian formulation of gravity in the teleparallel geometry: derivation of constraint algebra”, *Gen. Rel. Grav.* **46** (2014) 1636, [arXiv:1309.4685](#).
- [98] R. Ferraro and M. J. Guzmán, “Hamiltonian formalism for modified teleparallel gravity”, in “Proceedings, 2nd Argentinian-Brazilian

Meeting on Gravitation, Relativistic Astrophysics and Cosmology (GRACo II): Buenos Aires, Argentina, April 22-25, 2014”, pp. 99–104. 2015.

- [99] R. Ferraro and M. J. Guzmán, “Hamiltonian formulation of teleparallel gravity”, *Phys. Rev.* **D94** (2016), no. 10, 104045, [arXiv:1609.06766](#).
- [100] Y. Itin, F. W. Hehl, and Y. N. Obukhov, “Premetric equivalent of general relativity: Teleparallelism”, *Phys. Rev.* **D95** (2017), no. 8, 084020, [arXiv:1611.05759](#).
- [101] K. Peeters, “A Field-theory motivated approach to symbolic computer algebra”, *Comput. Phys. Commun.* **176** (2007) 550–558, [arXiv:cs/0608005](#).
- [102] K. Peeters, “Introducing Cadabra: A Symbolic computer algebra system for field theory problems”, [arXiv:hep-th/0701238](#).
- [103] B. Díaz, D. Higueta, and M. Montesinos, “Lagrangian approach to the physical degree of freedom count”, *J. Math. Phys.* **55** (2014) 122901, [arXiv:1406.1156](#).
- [104] R. Ferraro and M. J. Guzmán, “Hamiltonian formalism for $f(T)$ gravity”, [arXiv:1802.02130](#).
- [105] M. Wright, “Conformal transformations in modified teleparallel theories of gravity revisited”, *Phys. Rev.* **D93** (2016), no. 10, 103002, [arXiv:1602.05764](#).
- [106] R. Ferraro and M. J. Guzmán, “Work in preparation”, 2018.
- [107] C. Bejarano, R. Ferraro, and M. J. Guzmán, “Kerr geometry in modified teleparallel gravity”, in “Proceedings, 2nd Argentinian-Brazilian Meeting on Gravitation, Relativistic Astrophysics and Cosmology (GRACo II): Buenos Aires, Argentina, April 22-25, 2014”, pp. 185–188. 2015.
- [108] C. Bejarano, R. Ferraro, and M. J. Guzmán, “Kerr geometry in $f(T)$ gravity”, *Eur. Phys. J.* **C75** (2015) 77, [arXiv:1412.0641](#).
- [109] C. Bejarano, R. Ferraro, and M. J. Guzmán, “McVittie solution in $f(T)$ gravity”, *Eur. Phys. J.* **C77** (2017), no. 12, 825, [arXiv:1707.06637](#).

- [110] R. P. Kerr, “Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics”, *Phys. Rev. Lett.* **11** (1963) 237–238.
- [111] R. P. Kerr and A. Schild, “Republication of: A new class of vacuum solutions of the Einstein field equations”, *General Relativity and Gravitation* **41** (2009) 2485–2499.
- [112] G. C. Debney, R. P. Kerr, and A. Schild, “Solutions of the Einstein and Einstein-Maxwell Equations”, *J. Math. Phys.* **10** (1969) 1842.
- [113] S. Capozziello, M. De laurentis, and A. Stabile, “Axially symmetric solutions in $f(R)$ -gravity”, *Class. Quant. Grav.* **27** (2010) 165008, [arXiv:0912.5286](#).
- [114] Y. S. Myung, “Instability of a Kerr black hole in $f(R)$ gravity”, *Phys. Rev.* **D88** (2013), no. 10, 104017, [arXiv:1309.3346](#).
- [115] Y. S. Myung, “Instability of rotating black hole in a limited form of $f(R)$ gravity”, *Phys. Rev.* **D84** (2011) 024048, [arXiv:1104.3180](#).
- [116] G. G. L. Nashed, “Exact Axially Symmetric Solution in $f(T)$ Gravity Theory”, *Adv. High Energy Phys.* **2014** (2014) 857936.
- [117] R. Ferraro, “Untangling the Newman-Janis algorithm”, *Gen. Rel. Grav.* **46** (2014) 1705, [arXiv:1311.3946](#).
- [118] G. C. McVittie, “The mass-particle in an expanding universe”, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **93** (1933) 325–339.
- [119] G. C. McVittie, “An Example of Gravitational Collapse in General Relativity”, *ApJ* **143** (1966) 682.
- [120] N. Sakai and P. Haines, “Peculiar velocities of nonlinear structure: Voids in McVittie space-time”, *Astrophys. J.* **536** (2000) 515, [arXiv:astro-ph/9909183](#).

Apéndice A

Geometría diferencial

Vectores

En relatividad general el espacio-tiempo se considera como una variedad diferenciable \mathcal{M} , en la cual cada punto está asociado a un punto en \mathbb{R}^n a través de una *carta*. Diferentes asignaciones o *cartas* se diferencian entre sí por una transformación de coordenadas que llevan de la variedad \mathcal{M} a \mathbb{R}^n . Si la transformación es diferenciable, entonces la variedad también lo es. Toda variedad puede cubrirse a lo largo de su extensión por medio de conjuntos abiertos. Los conjuntos abiertos corresponden a una generalización del intervalo abierto en la línea de los números reales. En una variedad de n dimensiones, los conjuntos abiertos corresponden a *bolas*, pero cuando aún no se tiene un concepto de distancia para definirlos ¹, esto se realiza por medio de la definición de una topología en la variedad. Con el fin de establecer un constructo matemático para definir una variedad en física, es que introduciremos el concepto de vector en \mathcal{M} . Para ésto, recurrimos al concepto de curva, que siempre es posible de definir incluso en la ausencia de la noción de distancia. Una curva se define por medio de n ecuaciones paramétricas de la forma

$$x^i = x^i(\lambda), \tag{A.1}$$

donde una definición de λ distinta dará lugar a una curva diferente, puesto que la velocidad con la cual se recorre no será igual en ambas curvas. La noción de velocidad está directamente relacionada con el concepto de vector tangente a la curva. Si ponemos una función f sobre la variedad \mathcal{M} , y

¹Una bola es un conjunto de puntos que distan de otro igual o menos que una distancia particular, llamada radio.

tomamos la derivada sobre una curva $x^i(\lambda)$ en un punto \mathcal{P} , obtenemos

$$\left. \frac{df}{d\lambda} \right|_{\mathcal{P}} = \left. \frac{d}{d\lambda} f(x^i(\lambda)) \right|_{\mathcal{P}} = \left. \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{dx^i}{d\lambda} \right|_{\mathcal{P}}. \quad (\text{A.2})$$

Si nos abstraemos de la función f , es posible establecer que $V^i = \frac{dx^i}{d\lambda}$ son las componentes del vector tangente a la curva en el punto \mathcal{P} , es decir que podemos escribir

$$\left. \frac{d}{d\lambda} \right|_{\mathcal{P}} = V^i \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_{\mathcal{P}}. \quad (\text{A.3})$$

En el lado izquierdo de esta igualdad, el vector que define la derivación depende únicamente del parámetro λ , por tanto un vector es un objeto geométrico que no depende de la carta. Denotaremos un vector por $\bar{V} = \frac{d}{d\lambda} = V^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, donde el conjunto $\left[\frac{\partial}{\partial x^i} \right]$ forma una base en el espacio vectorial tangente en el punto \mathcal{P} . Este espacio tangente lo denotaremos por $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$, y corresponde a una buena aproximación de la variedad \mathcal{M} en un intervalo abierto en la vecindad de \mathcal{P} .

Vemos que $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \right\}$ es una base coordenada, sin embargo podríamos definir una base $\{\bar{E}_a\}$, $a = 1, \dots, n$ más general. A estas bases las llamaremos *anholónomas*. En particular, en una base coordenada se tiene que $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\} = 0$, es decir las derivadas parciales conmutan. Por otro lado, en una base anholónoma esto no es necesariamente cierto, o sea $\{\bar{E}_a, \bar{E}_b\} \neq 0$. Si representamos un cambio de base por medio de una matriz $\Lambda_a^{a'}$ tal que $\bar{E}_a = \Lambda_a^{a'} \bar{E}_{a'}$, estaremos induciendo una transformación $V^{a'} = \Lambda_a^{a'} V^a$ en las componentes de un vector.

Formas diferenciales

Definimos una 1-forma $\tilde{\omega}$ como una aplicación lineal que toma un vector desde el espacio tangente y lo lleva a los números reales, tal que $\tilde{\omega} : \mathcal{T}_{\mathcal{P}} \rightarrow \mathbb{R}$. Posee linealidad en el sentido que, siendo α y β dos números reales, satisface que

$$\tilde{\omega}(\alpha \bar{V} + \beta \bar{W}) = \alpha \tilde{\omega}(\bar{V}) + \beta \tilde{\omega}(\bar{W}). \quad (\text{A.4})$$

Así mismo, podemos definir combinaciones lineales de 1-formas

$$(\alpha \tilde{\omega} + \beta \tilde{\eta})(\bar{V}) = \alpha \tilde{\omega}(\bar{V}) + \beta \tilde{\eta}(\bar{V}), \quad (\text{A.5})$$

que nos permite definir el espacio vectorial cotangente o dual $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}^*$. Las bases coordenadas de este espacio vectorial serán definidas a partir de la acción de

un diferencial d de una función prueba f aplicada sobre un vector, es decir

$$df(\bar{V}) = V^i \frac{\partial f}{\partial x^i}. \quad (\text{A.6})$$

En particular, cuando $f = x^j$, tenemos que $dx^j(\bar{V}) = V^i \frac{\partial x^j}{\partial x^i} = V^j = V^k \delta_k^j$. Por tanto, podemos pensar en la acción del diferencial dx^j sobre la base de vectores como una relación de completitud, es decir $dx^j \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \right) = \delta_k^j$. Por tanto, el conjunto de n 1-formas $\{\tilde{d}x^j\}$ forma una base del espacio cotangente. Cualquier 1-forma $\tilde{\omega}$ puede ser escrita como la combinación lineal $\tilde{\omega} = \omega_j dx^j$.

Sea $\{\bar{E}_a\}$ una base anholónoma del espacio tangente \mathcal{T}_P , podemos definir la base anholónoma del espacio dual \mathcal{T}_P^* como $\{\bar{E}^a\}$, tal que satisfaga la relación de completitud $\bar{E}^a(\bar{E}_b) = \delta_b^a$.

Debido a la relación de dualidad que satisfacen 1-formas y vectores base, si realizamos un cambio de base en las 1-formas de la forma $\tilde{E}^b = \Lambda_{b'}^b \tilde{E}^{b'}$, las componentes ω^a de una 1-forma $\tilde{\omega} = \omega_a \tilde{E}^a$ se verán transformadas como $\omega_{b'} = \Lambda_{b'}^b \omega_b$.

Tensores

Los tensores son objetos geométricos que generalizan la noción de vectores y 1-formas. Un tensor de tipo $\binom{r}{s}$ es una aplicación lineal $\mathbf{T} : \mathcal{T}_P^* \times \cdots \times \mathcal{T}_P^* \times \mathcal{T}_P \times \cdots \times \mathcal{T}_P \rightarrow \mathbb{R}$, la cual toma r 1-formas y s vectores para otorgar un número real. Con este fin, es que debemos descomponerlo en una base de r vectores y s 1-formas tal que

$$\mathbf{T} = T^{a_1 \dots a_r}_{b_1 \dots b_s} \bar{E}_{a_1} \otimes \dots \otimes \bar{E}_{a_r} \otimes \tilde{E}^{b_1} \otimes \dots \otimes \tilde{E}^{b_s}. \quad (\text{A.7})$$

Bajo esta definición, los vectores son tensores de tipo $\binom{1}{0}$, y las 1-formas son tensores de tipo $\binom{0}{1}$. Los tensores poseen las mismas propiedades de linealidad que vectores y 1-formas, es decir satisfacen

$$\mathbf{T}(\dots, \alpha\tilde{\omega} + \beta\tilde{\eta}, \dots) = \alpha\mathbf{T}(\dots, \tilde{\omega}, \dots) + \beta\mathbf{T}(\dots, \tilde{\eta}, \dots), \quad (\text{A.8})$$

donde la 1-forma $\alpha\tilde{\omega} + \beta\tilde{\eta}$ se aplica en alguna de las primeras r entradas del tensor. Una relación idéntica se cumple si aplicamos el tensor en una combinación lineal de vectores $\alpha\bar{V} + \beta\bar{W}$, en alguna de las últimas s entradas. Finalmente, el espacio de tensores tipo $\binom{r}{s}$ es un espacio vectorial, y posee

todas las propiedades de un espacio vectorial. En particular, se satisface además la propiedad distributiva

$$(\alpha\mathbf{T} + \beta\mathbf{T}')(\tilde{\omega}^1, \dots, \tilde{\omega}^r, \bar{V}_1, \dots, \bar{V}_s) \equiv \alpha\mathbf{T}(\tilde{\omega}^1, \dots, \tilde{\omega}^r, \bar{V}_1, \dots, \bar{V}_s) + \beta\mathbf{T}'(\tilde{\omega}^1, \dots, \tilde{\omega}^r, \bar{V}_1, \dots, \bar{V}_s). \quad (\text{A.9})$$

Es de interés en el cálculo exterior un tipo particular de tensores: las p -formas, definidas como un tensor $\binom{0}{p}$ totalmente antisimétrico. Es decir, sea una p -forma

$$\tilde{\omega} = \omega_{[ab\dots c]} \tilde{E}^a \otimes \tilde{E}^b \otimes \dots \otimes \tilde{E}^c, \quad (\text{A.10})$$

donde los p -índices a, b, \dots, c se encuentran totalmente antisimetrizados. Por tanto, las únicas componentes que sobreviven son aquellas en las cuales ninguno de los índices a, b, \dots, c se repite. Si los índices $a = 1, \dots, n$ y $p > n$, entonces al menos uno de los índices estará repetido, por tanto la p -forma es inmediatamente cero, es decir no existen p -formas con dimensión mayor a la del espacio en la cual están definidas. Mientras que si $p \leq n$, habrán $\binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)!p!}$ componentes independientes.

Producto wedge

Ahora definiremos una operación entre p -formas, que permite incrementar su dimensionalidad. El producto *wedge* de dos 1-formas α y β es la 2-forma denotada por

$$\alpha \wedge \beta = \alpha \otimes \beta - \beta \otimes \alpha. \quad (\text{A.11})$$

De esta definición se identifica inmediatamente el carácter antisimétrico de esta operación, es decir

$$\alpha \wedge \beta = -\beta \wedge \alpha, \quad (\text{A.12})$$

lo cual implica también que el producto *wedge* entre dos 1-formas idénticas es cero

$$\alpha \wedge \alpha = 0. \quad (\text{A.13})$$

Es posible obtener p -formas de órdenes superiores tomando productos *wedge* sucesivos de 1-formas, de tal forma que una p -forma arbitraria puede ser escrita en términos de productos *wedge* de 1-formas de la base \tilde{E}^a de la siguiente forma

$$\alpha = \frac{1}{p!} \alpha_{a_1 a_2 \dots a_p} \tilde{E}^{a_1} \wedge \tilde{E}^{a_2} \wedge \dots \wedge \tilde{E}^{a_p}. \quad (\text{A.14})$$

Si tenemos una p -forma $\tilde{\omega}$ y una q -forma $\tilde{\theta}$, es posible demostrar la siguiente identidad

$$\tilde{\omega} \wedge \tilde{\theta} = (-1)^{pq} \tilde{\theta} \wedge \tilde{\omega}. \quad (\text{A.15})$$

Por tanto, el producto *wedge* de una q -forma consigo misma $\tilde{\theta} \wedge \tilde{\theta} = (-1)^{q^2} \tilde{\theta} \wedge \tilde{\theta}$ será cero si q es impar, y diferente de cero para q par.

Derivada exterior

La derivada exterior corresponde a una aplicación lineal cuya característica primordial es que mapea una p -forma en una $p + 1$ -forma; estará denotada con el símbolo d . Para una función común f (una 0-forma), se define la derivada exterior como

$$\tilde{d}f = \frac{\partial f}{\partial x^i} \tilde{d}x^i, \quad (\text{A.16})$$

donde se subentiende una suma implícita en el índice i . Para formas de órdenes superiores, por ejemplo para una p -forma $\tilde{\omega}$, se tiene que su derivada exterior es

$$\begin{aligned} d\tilde{\omega} &= \frac{1}{p!} \tilde{d}\omega_{i_1 \dots i_p} \wedge \tilde{d}x^{i_1} \wedge \dots \wedge \tilde{d}x^{i_p}, \\ &= \frac{1}{p!} \omega_{i_1 \dots i_p, l} \tilde{d}x^l \wedge \tilde{d}x^{i_1} \wedge \dots \wedge \tilde{d}x^{i_p}. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Por otro lado, puede demostrarse que si $\tilde{\alpha}$ es una p -forma y $\tilde{\beta}$ una q -forma, la derivada exterior del producto *wedge* de ambas será

$$d(\tilde{\alpha} \wedge \tilde{\beta}) = \tilde{d}\tilde{\alpha} \wedge \tilde{\beta} + (-1)^p \tilde{\alpha} \wedge \tilde{d}\tilde{\beta}. \quad (\text{A.18})$$

Es simple ver de (A.16) que aplicando dos veces la derivada exterior a una 0-forma, el resultado es cero, pues en

$$d(df) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} dx^j \wedge dx^i = 0, \quad (\text{A.19})$$

se obtiene una expresión simétrica multiplicando un producto antisimétrico, lo cual se anula. Esta propiedad, llamada de *nilpotencia*, es extendible a formas de órdenes superiores.

Una forma α es *cerrada* si $d\alpha = 0$, mientras que una forma α es *exacta* si es que $\alpha = d\beta$, donde β es una forma de un orden inferior que α . Se concluye que toda forma exacta es cerrada, mas no toda forma cerrada es exacta. Esto último es cierto localmente, pero no a nivel global puesto que depende de la topología de la variedad definida.

Derivada de Lie y derivada covariante

Definiremos la derivada de un vector \bar{V} en la dirección de un vector \bar{U} como

$$\mathcal{L}_{\bar{U}}\bar{V} = [\bar{U}, \bar{V}]. \quad (\text{A.20})$$

Esta es conocida como la derivada de Lie, y evalúa el cambio del vector \bar{V} a lo largo de otro vector \bar{U} . Esta definición geométrica es independiente de las coordenadas, y puede definirse en cualquier variedad diferenciable. Si escribimos la derivada de Lie en términos de coordenadas, obtenemos

$$\mathcal{L}_{\bar{U}}\bar{V} = (U^k \partial_k V^j - V^k \partial_k U^j) \frac{\partial}{\partial x^j}, \quad (\text{A.21})$$

donde vemos que el resultado es una combinación lineal de los vectores $\frac{\partial}{\partial x^j}$. El segundo término $V^k \partial_k U^j$ involucra una derivada de las componentes del vector que indica la dirección de derivación, lo cual indica que la derivada de Lie no es una derivada direccional. Este hecho motiva la definición de la derivada covariante.

La derivada covariante de \bar{V} en la dirección de \bar{U} será denotada por la expresión $\nabla_{\bar{U}}\bar{V}$. Exigimos que satisfaga las siguientes propiedades de distribución y asociatividad

$$\begin{aligned} \nabla_{\bar{U}}(f\bar{V}) &= (\nabla_{\bar{U}}f)\bar{V} + f\nabla_{\bar{U}}\bar{V}, \\ \nabla_{\bar{U}}(\bar{V} + \bar{W}) &= \nabla_{\bar{U}}\bar{V} + \nabla_{\bar{U}}\bar{W}, \\ \nabla_{\bar{U}+\bar{S}}\bar{V} &= \nabla_{\bar{U}}\bar{V} + \nabla_{\bar{S}}\bar{V}, \\ \nabla_{f\bar{U}}\bar{V} &= f\nabla_{\bar{U}}\bar{V}. \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

La última propiedad garantiza que la derivada covariante $\nabla_{\bar{U}}\bar{V}$ es direccional. Si descomponemos la derivada covariante $\nabla_{\bar{U}}\bar{V}$ en una base anholónoma, obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \nabla_{\bar{U}}\bar{V} &= \nabla_{U^a \bar{E}_a}(V^b \bar{E}_b) = U^a \nabla_{\bar{E}_a}(V^b \bar{E}_b) \\ &= U^a \nabla_{\bar{E}_a}(V^b \bar{E}_b) = U^a \bar{E}_a(V^b) \bar{E}_b + U^a V^b \nabla_{\bar{E}_a} \bar{E}_b. \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

De esta expresión vemos que el único objeto que aún no está definido es $\nabla_{\bar{E}_a} \bar{E}_b$. Corresponde a un nuevo objeto geométrico que dará cuenta de la variación de un vector base a lo largo de otro vector base.

Apéndice B

Las matrices C y D en gravedad teleparalela

Presentamos la expresión completa para la matriz C^A_B en $n = 4$, la cual aparece en la definición de los momentos canónicos en el Capítulo 4. Realizando la asignación por medio de la notación multi-índice definida ahí, transformamos el objeto tensorial C^{ab}_{ef} en una matriz cuadrada C^A_B cuyas componentes son

$$C^A_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2c_6 & -2d_4 & -2d_5 & 0 & -2d_4 & 2c_5 & -2d_6 & 0 & -2d_5 & -2d_6 & 2c_4 \\ 0 & -c_6 & d_4 & d_5 & c_6 & 0 & -d_2 & -d_3 & -d_4 & -d_2 & 2d_1 & 0 & -d_5 & -d_3 & 0 & 2d_1 \\ 0 & d_4 & -c_5 & d_6 & -d_4 & 2d_2 & -d_1 & 0 & c_5 & -d_1 & 0 & -d_3 & -d_6 & 0 & -d_3 & 2d_2 \\ 0 & d_5 & d_6 & -c_4 & -d_5 & 2d_3 & 0 & -d_1 & -d_6 & 0 & 2d_3 & -d_2 & c_4 & -d_1 & -d_2 & 0 \\ 0 & c_6 & -d_4 & -d_5 & -c_6 & 0 & d_2 & d_3 & d_4 & d_2 & -2d_1 & 0 & d_5 & d_3 & 0 & -2d_1 \\ 2c_6 & 0 & -2d_2 & -2d_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2d_2 & 0 & -2c_3 & -2d_6 & 2d_3 & 0 & -2d_6 & -2c_2 \\ -2d_4 & d_2 & d_1 & 0 & -d_2 & 0 & c_3 & d_6 & -d_1 & c_3 & 0 & d_5 & 0 & d_6 & d_5 & -2d_4 \\ -2d_5 & d_3 & 0 & d_1 & -d_3 & 0 & d_6 & c_2 & 0 & d_6 & -2d_5 & d_4 & -d_1 & c_2 & d_4 & 0 \\ 0 & -d_4 & c_5 & -d_6 & d_4 & -2d_2 & d_1 & 0 & -c_5 & d_1 & 0 & d_3 & d_6 & 0 & d_3 & -2d_2 \\ -2d_4 & d_2 & d_1 & 0 & -d_2 & 0 & c_3 & d_6 & -d_1 & c_2 & 0 & d_5 & 0 & d_6 & d_5 & -2d_4 \\ 2c_5 & -2d_1 & 0 & -2d_1 & 2d_1 & -2c_3 & 0 & -2d_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2d_3 & -2d_1 & 0 & -2c_1 \\ -2d_6 & 0 & d_3 & d_2 & 0 & -2d_6 & d_5 & d_4 & -d_3 & d_5 & 0 & c_1 & -d_2 & d_4 & c_1 & 0 \\ 0 & -d_5 & -d_6 & c_4 & d_5 & -2d_3 & 0 & d_1 & d_6 & 0 & -2d_3 & d_2 & -c_4 & d_1 & d_2 & 0 \\ -2d_5 & d_3 & 0 & d_1 & -d_3 & 0 & d_6 & c_2 & 0 & d_6 & -2d_5 & d_4 & -d_1 & c_2 & d_4 & 0 \\ -2d_6 & 0 & d_3 & d_2 & 0 & -2d_6 & d_5 & d_4 & -d_3 & d_5 & 0 & c_1 & -d_2 & d_4 & c_1 & 0 \\ 2c_4 & -2d_1 & -2d_2 & 0 & 2d_1 & -2c_2 & -2d_4 & 0 & 2d_2 & -2d_4 & -2c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.1})$$

donde hemos realizado las siguientes definiciones

$$\begin{aligned} c_1 &= (e_0^0)^2 - (e_1^0)^2, & c_2 &= (e_0^0)^2 - (e_2^0)^2, \\ c_3 &= (e_0^0)^2 - (e_3^0)^2, & c_4 &= (e_1^0)^2 + (e_2^0)^2, \\ c_5 &= (e_1^0)^2 + (e_3^0)^2, & c_6 &= (e_2^0)^2 + (e_3^0)^2, \\ d_1 &= e_0^0 e_1^0, & d_2 &= e_0^0 e_2^0, & d_3 &= e_0^0 e_3^0, \\ d_4 &= e_1^0 e_2^0, & d_5 &= e_1^0 e_3^0, & d_6 &= e_2^0 e_3^0. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Escribimos esta matriz en términos de componentes sólo con propósitos ilustrativos, puesto que los cálculos de los corchetes de Poisson fueron realizados con la expresión tensorial $C_{ef}^{ab} = e_c^0 e_d^0 M_{ab}^{cedf}$.

Es posible obtener las matrices C_{AB} y C^{AB} a partir de esta expresión por medio de la aplicación de la super-métrica de Minkowski η_{AB} , tal que $C_{AB} = \eta_{AC} C_B^C$, $C^{AB} = \eta^{BC} C_C^A$. La matriz D_B^A se obtiene por medio de la expresión

$$D_B^A = \lambda^{-2}(C_B^A + \alpha w^A w_B).$$

Apéndice C

Corchetes de Poisson y álgebra de vínculos

En este Apéndice resumiremos algunos cálculos intermedios en lo que concierne al álgebra de vínculos de la gravedad teleparalela. Esto con el fin de facilitar la reproducción de los cálculos presentados en los Capítulos 4 y 5. Debido a que varios de los vínculos en gravedad $f(T)$ son idénticos o poseen ligeras modificaciones a los vínculos en ETRG, es que la mayoría de los cálculos aquí presentados son válidos para calcular el álgebra de vínculos de ambas teorías.

En ETRG tenemos los vínculos primarios $G_c^{(1)} = \Pi_c^0 \approx 0$ y $G_{ab}^{(1)} = 2\eta_{e[b}\Pi_{a]}^i E_i^e + 4E\partial_i E_j^e e_{[b}^i e_{c]}^j$. El corchete $\{G_a^{(1)}, G_b^{(1)}\}$ se anula de manera trivial, puesto que es un corchete entre dos momentos canónicos. El corchete entre ambos vínculos primarios se anula, puesto que

$$\begin{aligned} & \{\Pi_d^0(x), 2\eta_{e[b}\Pi_{a]}^i E_i^e + 4E\partial_i E_j^e e_{[b}^i e_{c]}^j\} \\ &= \{\Pi_d^0(x), 4Ee_{[b}^0 e_{c]}^i e_{a]}^j\} \partial_i^y E_j^c \\ &= (-4e_d^0 E e_{[b}^0 e_{c]}^i e_{a]}^j + 4Ee_d^0 e_{[b}^0 e_{c]}^i e_{a]}^j) \partial_i^y E_j^c = 0. \end{aligned} \quad (C.1)$$

El corchete entre los vínculos primarios del álgebra de Lorentz queda como

$$\begin{aligned} \{G_{ac}^{(1)}(x), G_{ef}^{(1)}(y)\} &= \{2\eta_{d[c}\Pi_{a]}^i E_i^d + 4E\partial_i E_j^d e_{[c}^i e_{a]}^j, 2\eta_{g[f}\Pi_{e]}^k E_k^g + 4E\partial_k E_l^g e_{[f}^k e_{e]}^l\} \\ & \quad 2\eta_{ec} E_i^d \eta_{d[a}\Pi_{f]}^i + 2\eta_{af} E_i^d \eta_{d[c}\Pi_{e]}^i - 2\eta_{cf} E_i^d \eta_{d[a}\Pi_{e]}^i - 2\eta_{ac} E_i^d \eta_{d[c}\Pi_{f]}^i \\ & \quad + 4E\partial_j E_k^b (\eta_{ce} e_{[a}^0 e_{b]}^j e_{f]}^k + \eta_{af} e_{[c}^0 e_{b]}^j e_{e]}^k - \eta_{cf} e_{[e}^0 e_{a]}^j e_{b]}^k - \eta_{ae} e_{[f}^0 e_{c]}^j e_{b]}^k) \\ &= \eta_{ec} G_{fa}^{(1)} + \eta_{af} G_{ec}^{(1)} - \eta_{cf} G_{ea}^{(1)} - \eta_{ae} G_{fc}^{(1)}. \end{aligned} \quad (C.2)$$

Esta es el álgebra que satisfacen los generadores del grupo de Lorentz. En los resultados que presentemos en este Apéndice, se subentiende que hay un

factor $\delta(x - y)$ que multiplica el resultado final. Por ejemplo, este factor va al final de la expresión (C.2) pero lo hemos omitido porque no se presta para confusión. Haremos esto por comodidad, no obstante cuando tengamos derivadas espaciales de la delta de Dirac las pondremos de manera explícita. Además, es necesario indicar respecto a qué coordenada se está derivando, por lo tanto adoptaremos la notación ∂_μ^x y ∂_ν^y para indicar esto. Estaremos indicando la dependencia en (x) , (y) , ∂^x y ∂^y de acuerdo a si existe conflicto o no con el resto de los campos involucrados en el cálculo.

Continuamos con los vínculos secundarios en gravedad teleparalela, los cuales son el vínculo de super-momento

$$G_i^{(2)} = \partial_i E_j^c \Pi_c^j - \partial_j (E_i^c \Pi_c^j) \approx 0, \quad (\text{C.3})$$

y el vínculo de super-Hamiltoniano

$$G_0^{(2)} = \mathcal{H} - \partial_i (E_0^c \Pi_c^i) = \frac{1}{2} e (\Pi_A - P_A) (\Pi_B - P_B) D^{AB} - \partial_i \Pi_c^i E_0^c + U \approx 0, \quad (\text{C.4})$$

donde se han realizado las siguientes definiciones

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} E \partial_i E_j^a \partial_k E_l^b e_c^i e_e^j e_d^k e_f^l M_{ab}^{cedf}, \\ P_A &= E \partial_i E_k^b e_c^i e_d^k M_{ab}^{cedf}, \\ E_0^B &= e_f^i \partial_i E_0^b. \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

Calcularemos el corchete de Poisson del vínculo primario $G_c^{(1)}$ con estos dos vínculos secundarios. El corchete $\{G_c^{(1)}, G_i^{(2)}\}$ es trivialmente cero, pues la expresión $G_i^{(2)}$ no tiene dependencia con E_0^a o e_μ^a , que son las únicas expresiones que conmutan con Π_c^0 . Por otro lado, el corchete $\{G_c^{(1)}, G_0^{(2)}\}$ es algo más complicado, y puede escribirse como

$$\{G_c^{(1)}(t, \mathbf{x}), G_0^{(2)}(t, \mathbf{y})\} = \{\Pi_c^0(x), \frac{1}{2} e (\Pi_A - P_A) D^{AB} (\Pi_B - P_B) - \partial_i^y \Pi_a^i E_0^a + U(y)\}. \quad (\text{C.6})$$

En este corchete, hay varios sub-corchetes que son diferentes de cero. A saber, $\{\Pi_c^0, e\}$, $\{\Pi_c^0, P_A\}$, $\{\Pi_c^0, D^{AB}\}$, $\{\Pi_c^0, U(y)\}$ y, por supuesto, $\{\Pi_c^0, E_0^a\}$. No es difícil mostrar que

$$\begin{aligned} \{\Pi_c^0, P_A\} &= E \partial_j E_k^d C_{ad}^{ef} (e_c^j e_f^k - e_c^k e_f^j), \\ \{\Pi_c^0, D^{AB}\} &= -2e_c^0 D^{AB}. \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

Además, tenemos que

$$\begin{aligned} \{\Pi_c^0(x), U(y)\} &= -e_c^0 U - \frac{1}{2} E \partial_i^y E_j^b \partial_k^y E_l^a M_{ab}^{gehf} (e_c^i e_h^0 e_f^j e_g^k e_e^l + e_c^j e_h^i e_f^0 e_g^k e_e^l \\ &\quad + e_c^k e_h^i e_f^j e_g^0 e_e^l + e_c^l e_h^i e_f^j e_g^k e_e^0). \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

Poniendo todas estas expresiones en (C.6), se obtiene la expresión

$$\begin{aligned} \{\Pi_c^0(x), G_0^{(2)}(y)\} &= \partial_i^y \Pi_c^i - e_c^0 U \\ &\quad - \frac{1}{2} E \partial_i^y E_j^b \partial_k^y E_l^a M_{ab}^{gehf} (e_c^i e_h^0 e_f^j e_g^k e_e^l + e_c^j e_h^i e_f^0 e_g^k e_e^l + e_c^k e_h^i e_f^j e_g^0 e_e^l + e_c^l e_h^i e_f^j e_g^k e_e^0) \\ &\quad - \frac{1}{2} e e_c^0 (\Pi_A - P_A) D^{AB} (\Pi_B - P_B) - \Pi_B D^{AB} \partial_j^y E_k^d C_{ad}{}^{eg} (e_c^j e_g^k - e_g^j e_c^k) \\ &\quad + P_B(y) D^{AB} \partial_j^y E_k^d C_{ad}{}^{eg} (e_c^j e_g^k - e_g^j e_c^k). \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

Es necesario tener en cuenta que las matrices C y D , al ser pseudo-inversas la una de la otra, satisfacen la siguiente relación

$$D_{ef}^{ab} C_{ad}{}^{eg} = \delta_d^b \delta_f^g, \quad (\text{C.10})$$

la cual nos permite escribir

$$\begin{aligned} -P_B \partial_j E_k^b (e_c^j e_f^k - e_f^j e_c^k) &= -E \partial_m E_l^a e_g^0 e_h^m e_e^l M_{ba}^{gfhe} \partial_j E_k^b (e_c^j e_f^k - e_f^j e_c^k) = \\ &= -e_c^j E \partial_m E_l^a e_h^0 e_g^m e_f^i e_e^l M_{ab}^{gehf} (\partial_j E_i^b - \partial_i E_j^b). \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

Por otro lado, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} E \partial_i E_j^b \partial_k E_l^a M_{ab}^{gehf} (e_c^i e_h^0 e_f^j e_g^k e_e^l + e_c^j e_h^i e_f^0 e_g^k e_e^l + e_c^k e_h^i e_f^j e_g^0 e_e^l + e_c^l e_h^i e_f^j e_g^k e_e^0) = \\ e_c^j E \partial_m E_l^a e_h^0 e_g^m e_f^i e_e^l M_{ab}^{gehf} (\partial_j E_i^b - \partial_i E_j^b). \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

Juntando estos resultados de vuelta en (C.6), se tiene finalmente que

$$\begin{aligned} \{\Pi_c^0, G_0^{(2)}\} &= \partial_i \Pi_a^i (E_0^a e_c^0 + E_i^a e_c^i) - e_c^0 U \\ &\quad - \frac{1}{2} e e_c^0 (\Pi_A - P_A) D^{AB} (\Pi_B - P_B) - e_c^j \Pi_b^i (\partial_j E_i^b - \partial_i E_j^b) \quad (\text{C.13}) \\ &= -(e_c^0 G_0^{(2)} + e_c^i G_i^{(2)}) \delta(x - y). \end{aligned}$$

Ahora calcularemos los corchetes de Poisson del vínculo primario $G_{ab}^{(1)}$ con los dos vínculos secundarios. El cálculo más simple corresponde a $\{G_{ac}^{(1)}(x), G_j^{(2)}(y)\}$, que se puede ver como

$$\{G_{ac}^{(1)}(x), G_j^{(2)}(y)\} = \{2\eta_{d[c}\Pi_a^i E_i^d + 4E\partial_i^x E_k^b e_{[c}^0 e_a^i e_{b]}^k, E_j^g \partial_l^y \Pi_g^l + \Pi_g^l (\partial_l^y E_j^g - \partial_j^y E_l^g)\}. \quad (C.14)$$

Esto puede expandirse en cuatro partes, las cuales son todas cero de manera independiente. A saber,

$$\begin{aligned} \{2\eta_{d[c}\Pi_a^i E_i^d(x), E_j^g \partial_l^y \Pi_g^l(y)\} &= -(\eta_{dc}\partial_l \Pi_a^l(y) - \eta_{da}\partial_l \Pi_c^l(y))E_j^d(x)\delta(x-y) \\ &+ (\eta_{dc}\Pi_a^i(x) - \eta_{da}\Pi_c^i(x))E_j^d(y)\partial_i^y \delta(x-y) = 0, \end{aligned} \quad (C.15)$$

$$\begin{aligned} \{2\eta_{d[c}\Pi_a^i E_i^d(x), \Pi_g^l (\partial_l^y E_j^g - \partial_j^y E_l^g)\} &= 2\eta_{d[c}\Pi_a^i (\partial_i E_j^d(y) - \partial_j E_i^d(y))\delta(x-y) \\ &- 2\eta_{d[c}\Pi_a^i (y)\partial_i^x E_j^d(x)\delta(x-y) + 2\eta_{d[c}\Pi_a^i (y)\partial_j^x E_i^d(x)\delta(x-y) = 0, \end{aligned} \quad (C.16)$$

$$\begin{aligned} \{4E\partial_m E_k^b(x)e_{[c}^0 e_a^m e_{b]}^k(x), E_j^g(y)\partial_l \Pi_g^l(y)\} &= -4E\partial_j^x E_k^b(x)e_{[c}^0 e_a^k e_{b]}^l(x)\partial_l^y \delta(x-y) \\ &+ 4E\partial_k^y E_j^b(y)e_{[c}^0 e_a^k e_{b]}^l(x)\partial_l^y \delta(x-y) \\ &+ 4(E(x)\partial_j E_k^b(x)e_{[c}^0 e_a^k e_{b]}^l - E(x)\partial_k E_j^b(x)e_{[c}^0 e_a^k e_{b]}^l)\partial_l^y \delta(x-y) = 0, \end{aligned} \quad (C.17)$$

$$\begin{aligned} \{4E\partial_m E_k^b(x)e_{[c}^0 e_a^m e_{b]}^k(x), \Pi_g^l(y)(\partial_l E_j^g(y) - \partial_j E_l^g(y))\} &= \\ &= \frac{4}{3}E(-e_g^l e_{[c}^0 e_a^m + e_g^l e_{[a}^m e_{c]}^0)(x)(\partial_l E_j^g(y) - \partial_j E_l^g(y))\partial_m^x \delta(x-y) \\ &+ 4Ee_{[c}^0 e_a^m e_{b]}^k(x)(\partial_k E_j^b(y) - \partial_j E_k^b(y))\partial_m^x \delta(x-y) \\ &+ \frac{4}{3}E(\partial_l E_j^g(y) - \partial_j E_l^g(y))(e_g^0 e_{[a}^l e_{c]}^m - e_g^m e_{[c}^0 e_a^l + e_g^l e_{[c}^0 e_a^m])\partial_m^x \delta(x-y) = 0. \end{aligned} \quad (C.18)$$

El corchete de $G_{ab}^{(1)}$ con el vínculo $G_0^{(2)}$ está dado por la expresión

$$\{2\eta_{d[c}\Pi_a^i E_i^d + 4E\partial_i^x E_k^b e_{[c}^0 e_a^i e_{b]}^k, \frac{1}{2}e(\Pi_A - P_A)D^{AB}(\Pi_B - P_B) - \partial_i^y \Pi_a^i E_0^a + U(y)\}. \quad (C.19)$$

El desarrollo de este cálculo es complicado y tiene muchos pasos intermedios que requieren de simplificación algebraica y tensorial, por lo tanto sólo presentaremos algunas expresiones claves que ayudarán a aligerar este cómputo. A pesar de ésto, hay algunas observaciones que nos permiten intuir el resultado final, partiendo del hecho que el corchete de una expresión lineal en Π con una cuadrática en Π debería otorgar como resultado una expresión

cuadrática en los momentos Π . Si queremos que todos los vínculos sean de primera clase, con tal de mantener la equivalencia entre ETRG y RG, entonces la única opción es que este corchete sea cero, o sea proporcional a $G_0^{(2)}$, que es el único vínculo cuadrático en los momentos disponible. Por otro lado, el resultado debe ser proporcional a alguna expresión en la tétrada en los índices $(\)_{ab}$, donde ab están antisimetrizados, puesto que corresponden a los únicos dos índices libres en la expresión (C.19). Para determinar esta expresión, notamos que uno de los muchos fragmentos que constituyen (C.19) consiste en

$$2E_i^d \eta_{d[c} \{ \Pi_{a]}^i, e \} \frac{1}{2} (\Pi_A - P_A) D^{AB} (\Pi_B - P_B). \quad (\text{C.20})$$

No obstante, $\{ \Pi_{a]}^i, e \} = -e e_{a]}^i$, por lo cual (C.20) queda

$$- 2E_i^d \eta_{d[c} e_{a]}^i \frac{1}{2} e (\Pi_A - P_A) D^{AB} (\Pi_B - P_B). \quad (\text{C.21})$$

Es posible reescribir esto notando que

$$\begin{aligned} E_i^d e_a^i &= \delta_a^d - E_0^d e_a^0, \\ \longrightarrow E_i^d \eta_{d[c} e_{a]}^i &= \eta_{d[c} \delta_{a]}^d - E_0^d \eta_{d[c} e_{a]}^0 = -e_{0[c} e_{a]}^0. \end{aligned} \quad (\text{C.22})$$

Con esto, obtenemos la siguiente expresión para (C.20)

$$- 2e_{0[c} e_{a]}^0 \frac{1}{2} (\Pi_A - P_A) D^{AB} (\Pi_B - P_B). \quad (\text{C.23})$$

El resultado obtenido corresponde al factor $e_{0[c} e_{a]}^0$ multiplicado por una parte de $G_0^{(2)}$. Esta observación permite intuir el resultado que se obtiene luego de trabajar con todos los términos y unificarlos, el cual es

$$\{ G_{ab}^{(1)}, G_0^{(2)} \} = E_0^c \eta_{c[b} e_{a]}^0 G_0^{(2)}. \quad (\text{C.24})$$

El cálculo de esta expresión se verá simplificado si, desde el comienzo, favorecemos aquellos factores que dependan del coeficiente antisimétrico $E_0^c \eta_{c[b} e_{a]}^0$.

Es preciso tener en cuenta algunos corchetes de Poisson intermedios que serán útiles para calcular (C.19). Por ejemplo,

$$\begin{aligned} \{ D^{AB}, \Pi_c^i \} &= 8e_c^0 g^{0i} \lambda^{-3} (C^{AB} + \alpha w^A w^B) - \lambda^{-2} e_c^0 (e_g^i e_h^0 + e_h^i e_g^0) M_{e f}^{abg h} \\ &- \frac{\alpha \lambda^{-2} e_c^0}{2(n-2)} (e_g^i e_h^0 + e_h^i e_g^0) (M_{d e}^a g^{hd} w^B + M_{d f}^b g^{hd} w^A) + 4\alpha \lambda^{-3} e_c^0 g^{0i} w^A w^B, \end{aligned} \quad (\text{C.25})$$

el cual también puede escribirse como

$$\begin{aligned} \{\Pi_q^i, D_{ef}^{ab}\} = & \\ & - 4\lambda^{-1}e_q^0g^{0i}(2\lambda^{-2}e_g^0e_h^0M_{ef}^{abg\ h} + 3\lambda^{-3}\alpha e_c^0e_d^0e_g^0e_h^0M_{oe}^{a\ c\ do}M_{pf}^{b\ g\ hp}) \\ & + e_q^0(e_g^ie_h^0 + e_g^0e_h^i)(\lambda^{-2}M_{ef}^{abg\ h} + \lambda^{-3}\alpha e_c^0e_d^0(M_{oe}^{a\ c\ do}M_{pf}^{b\ g\ hp})) \end{aligned} \quad (C.26)$$

usando una forma diferente para el tensor D_{ef}^{ab} :

$$D_{ef}^{ab} = \lambda^{-2}e_g^0e_h^0M_{ef}^{abg\ h} + \lambda^{-3}\alpha e_c^0e_d^0e_g^0e_h^0M_{oe}^{a\ c\ do}M_{pf}^{b\ g\ hp}. \quad (C.27)$$

Queda finalmente calcular el álgebra entre vínculos secundarios consigo mismos. El resultado final de esto debe corresponder al álgebra de ADM, ya extensamente conocido en la literatura. A pesar de que en ETRG el vínculo de super-Hamiltoniano se escribe de una manera muy diferente al caso de RG, es notable (pero esperable) que se satisfaga de todas formas. El cálculo más sencillo de la categoría de vínculos secundarios versus secundarios corresponde a

$$\begin{aligned} \{G_k^{(2)}(x), G_j^{(2)}(y)\} = & \{E_k^a(x)\partial_i^x\Pi_a^i + \Pi_a^i(\partial_i^x E_k^a - \partial_k^x E_i^a), E_j^b(y)\partial_l^y\Pi_b^l \\ & + \Pi_b^l(\partial_l^y E_j^b - \partial_j^y E_l^b)\} \end{aligned} \quad (C.28)$$

Para este cómputo es importante mantener y preservar la dependencia espacial de las derivadas parciales. Mediante el uso reiterativo de las propiedades básicas de la delta de Dirac

$$\begin{aligned} [\partial_x + \partial_y]\delta(x - y) &= 0, \\ [f(x) - f(y)]\delta(x - y) &= 0, \\ [f(y) - f(x)]\partial_x\delta(x - y) &= \delta(x - y)\partial_x f(x), \end{aligned} \quad (C.29)$$

es posible encontrar que

$$\begin{aligned} \{G_k^{(2)}(x), G_j^{(2)}(y)\} = & E_j^a(y)\partial_i\Pi_a^i(x)\partial_k^y\delta(x - y) - E_k^a(x)\partial_i\Pi_a^i(y)\partial_j^x\delta(x - y) \\ & + \partial_i\Pi_a^i(x)(\partial_k E_j^a(y) - \partial_j E_k^a(y))\delta(x - y) + \Pi_a^l(y)\partial_l E_k^a(x)\partial_j^y\delta(x - y) \\ & - \partial_i\Pi_a^i(y)(\partial_j E_k^a(x) - \partial_k E_j^a(x))\delta(x - y) + \Pi_a^l(x)\partial_l E_j^a(y)\partial_k^x\delta(x - y) \\ & - \Pi_a^i(y)(\partial_j E_k^a(x) - \partial_k E_j^a(x))\partial_i^y\delta(x - y) + \Pi_a^i(y)(\partial_i E_k^a(x) - \partial_k E_i^a(x))\partial_j^y\delta(x - y) \\ & + \Pi_a^i(x)(\partial_k E_j^a(y) - \partial_j E_k^a(y))\partial_i^x\delta(x - y) - \Pi_a^i(x)(\partial_i E_j^a(y) - \partial_j E_i^a(y))\partial_k^x\delta(x - y) \end{aligned} \quad (C.30)$$

Realizando las integraciones por partes pertinentes y reagrupando términos, se obtiene el resultado conocido

$$\{G_k^{(2)}(x), G_j^{(2)}(y)\} = -G_k^{(2)}\partial_j^y\delta(x - y) + G_j^{(2)}\partial_k^x\delta(x - y). \quad (C.31)$$

Debemos calcular también

$$\{G_i^{(2)}(t, \mathbf{x}), G_0^{(2)}(t, \mathbf{y})\} = \{\Pi_c^j \partial_i^x E_j^c - \Pi_c^j \partial_j^x E_i^c - E_i^c \partial_j^x \Pi_c^j, \frac{1}{2} e(\Pi_A - P_A)(\Pi_B - P_B) D^{AB} - \partial_i^y \Pi_c^i E_0^c + U\} \quad (\text{C.32})$$

Se obtiene que este corchete se anula. El cálculo no es trivial, pero no posee tanta dificultad como los anteriores. Es necesario aplicar reiteradamente las fórmulas (C.25) y las identidades para las delta de Dirac.

Finalmente tenemos que calcular

$$\{G_0^{(2)}(x), G_0^{(2)}(y)\} = \left\{ \frac{e(x)}{2} D^{AB} (\Pi_A - P_A)(\Pi_B - P_B)(x) - \partial_i^x \Pi_a^i E_0^a(x) + U(x), \frac{e(y)}{2} D^{AB} (\Pi_A - P_A)(\Pi_B - P_B)(y) - \partial_i^y \Pi_a^i E_0^a(y) + U(y) \right\}. \quad (\text{C.33})$$

Este cálculo consta de siete partes, las cuales calculamos usando las herramientas ya descritas. Para el primer término se obtiene que

$$\begin{aligned} \{-\partial_m^x \Pi_g^m E_0^g(x), U(x)\} &= E_0^g(x) \int dz \partial_m^x \delta(x-z) \left[e_g^m U(y) \delta(y-z) \right. \\ &- \frac{1}{2} E(\partial_i^y \delta(y-z)) \delta_g^a \delta_j^m \partial_i^y E_k^b + \partial_l^y \delta(y-z) \delta_g^b \delta_k^m \partial_i^y E_j^a e_c^i e_e^j e_d^l e_f^k(y) M_{ab}^{cedf} \\ &\left. - \frac{1}{2} E \partial_i^y E_j^a \partial_l^y E_k^b ((e_c^m e_g^i e_e^j + e_e^m e_g^j e_c^i) e_d^l e_f^k + (e_d^m e_g^l e_f^k + e_f^m e_g^k e_d^l) e_c^i e_e^j) M_{ab}^{cedf} \right], \end{aligned} \quad (\text{C.34})$$

Para el segundo término, se tiene que

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{e(x)}{2} D^{AB} (\Pi_A - P_A)(\Pi_B - P_B)(x), U(y) \right\} &= e(x) D^{AB} (\Pi_B - P_B)(x) E_m^e(x) \times \\ &\left[e_a^m(x) U(y) \delta(x-y) - \frac{1}{2} E(\partial_i^y \delta(x-y)) \delta_a^g \delta_j^m \partial_i^y E_k^b(y) + \right. \\ &\partial_l^y \delta(x-y) \delta_a^b \delta_k^m \partial_i^y E_j^g(y) e_c^i e_h^j e_d^l e_f^k(y) M_{gb}^{chdf} \\ &\left. - \frac{1}{2} E \partial_i^y E_j^g(y) \partial_l^y E_k^b(y) ((e_c^m e_a^i e_h^j + e_h^m e_a^j e_c^i) e_d^l e_f^k + (e_d^m e_a^l e_f^k + e_f^m e_a^k e_d^l) e_c^i e_h^j) M_{gb}^{chdf} \right], \end{aligned} \quad (\text{C.35})$$

El tercer y cuarto término se combinan para formar la expresión

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}e(x)D^{AB}(\Pi_B - P_B)(x)E(y)e_c^i e_h^j e_d^l e_f^k(y)[E_j^e M_{ab}^{chdf} \partial_i^y \delta(x-y) \partial_l^y E_k^b(y) \\
& + E_k^e M_{ga}^{chdf} \partial_l^y \delta(x-y) \partial_i^y E_j^g(y)] \\
& + \frac{1}{2}e(y)D^{AB}(\Pi_B - P_B)(y)E(x)e_c^i e_h^j e_d^l e_f^k(x)[E_j^e M_{ab}^{chdf} \partial_i^x \delta(x-y) \partial_l^x E_k^b(x) \\
& + E_k^e M_{ga}^{chdf} \partial_l^x \delta(x-y) \partial_i^x E_j^g(x)]
\end{aligned} \tag{C.36}$$

El quinto término $\{-\partial_i^x \Pi_a^i E_0^a(x), \frac{e(y)}{2} D^{AB}(\Pi_A - P_A)(\Pi_B - P_B)(y)\}$ y el sexto término $\{\frac{e(x)}{2} D^{AB}(\Pi_A - P_A)(\Pi_B - P_B)(x), -\partial_i^y \Pi_a^i E_0^a(y)\}$ pueden ser expandidos y sumados, otorgando

$$\begin{aligned}
& -E_0^g(x)e(y)D^{AB}(\Pi_B - P_B)(y) \int dz \partial_m^x \delta(x-z)[\delta(y-z)e_g^m P_A \\
& + \delta(y-z)E(y)\partial_i^y E_k^b(y)(e_c^m e_g^0 e_d^i e_f^k + e_d^m e_c^0 e_g^i e_f^k + e_f^m e_c^0 e_d^i e_g^i)(y)M_{ab}^{cdf} \\
& + \partial_i^y \delta(y-z)\delta_g^b E(y)e_c^0 e_d^i e_f^m(y)M_{ab}^{cdf}] \\
& + E_0^g(y)e(x)D^{AB}(\Pi_B - P_B)(x) \int dz \partial_m^y \delta(y-z)[\delta(x-z)e_g^m P_A + \\
& \delta(x-z)E(x)\partial_i^x E_k^b(x)(e_c^m e_g^0 e_d^i e_f^k + e_d^m e_c^0 e_g^i e_f^k + e_f^m e_c^0 e_d^i e_g^k)(x)M_{ab}^{cdf} \\
& + \partial_i^x \delta(x-z)\delta_g^b E(x)e_c^0 e_d^i e_f^m(x)M_{ab}^{cdf}].
\end{aligned} \tag{C.37}$$

La última parte que queda es cero, puesto que

$$\left\{ \frac{e(x)}{2} D^{AB}(\Pi_A - P_A)(\Pi_B - P_B)(x), \frac{e(y)}{2} D^{AB}(\Pi_A - P_A)(\Pi_B - P_B)(y) \right\} = 0. \tag{C.38}$$

Es fácil ver que este término se anula, pues es un término simétrico en la dependencia de los campos y no involucra derivadas parciales de las delta de Dirac.

Todos los términos que hemos presentado deben sumarse y simplificarse, lo cual no es una tarea sencilla. Sin embargo, luego de realizar este trabajo, puede mostrarse que dan el conocido resultado

$$\{G_0^{(2)}(x), G_0^{(2)}(y)\} = g^{ij}(x)G_i^{(2)}(x)\partial_j^y \delta(x-y) - g^{ij}(y)G_i^{(2)}(y)\partial_j^x \delta(x-y). \tag{C.39}$$