

## Tesis Doctoral

# Reacciones hadrónicas inclusivas y el modelo multiperiférico

Ripa, Pedro M.

1972

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Físicas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en [digital.bl.fcen.uba.ar](http://digital.bl.fcen.uba.ar). Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the Master's and Doctoral Theses Collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in [digital.bl.fcen.uba.ar](http://digital.bl.fcen.uba.ar). It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

**Cita tipo APA:**

Ripa, Pedro M.. (1972). Reacciones hadrónicas inclusivas y el modelo multiperiférico. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.

[http://hdl.handle.net/20.500.12110/tesis\\_n1416\\_Ripa](http://hdl.handle.net/20.500.12110/tesis_n1416_Ripa)

**Cita tipo Chicago:**

Ripa, Pedro M.. "Reacciones hadrónicas inclusivas y el modelo multiperiférico". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 1972.

[http://hdl.handle.net/20.500.12110/tesis\\_n1416\\_Ripa](http://hdl.handle.net/20.500.12110/tesis_n1416_Ripa)

**EXACTAS** UBA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales



**UBA**

Universidad de Buenos Aires

Tesis  
1414

Ripa

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

REACCIONES HADRONICAS INCLUSIVAS Y EL MODELO MULTIPERIFERICO  
P. Ripa

Tesis para optar al título de Doctor en Física  
Buenos Aires  
1972

1110

UNIVERSIDAD NACIONAL DE BUENOS AIRES  
 Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

REACCIONES HADRONICAS INCLUSIVAS Y EL MODELO MULTIPERIFERICO  
 P. Ripa (\*)

Tesis para optar al título de Doctor en Física  
 Buenos Aires 1972

1416=4

(\*) Becario del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas  
 y Técnicas

FOE-BA

Director de Tesis:  
Dr. Alberto Pignotti

1.- INTRODUCCION

Nuestro conocimiento actual de las interacciones de las partículas elementales permite clasificarlas en cuatro grupos diferentes: fuertes, electromagnéticas, débiles y gravitatorias. No hay que excluir sin embargo la posibilidad de la existencia de otros tipos de fuerzas (como la superdébil, propuesta para explicar la violación de la invariancia CP en el decaimiento de los kaones neutros) y de que a energías muy superiores a las de los experimentos actuales el acoplamiento entre diferentes tipos de fuerzas sea tan grande que la distinción entre ellas pierda un significado preciso. De cualquier modo, en los experimentos realizados hasta la actualidad se han podido estudiar, en general, procesos dominados por cualquiera de estos tipos de fuerzas gracias a reglas de selección que prohíben la contribución de interacciones más fuertes que la estudiada.

En este trabajo nos dedicamos exclusivamente al estudio de la interacción fuerte y más particularmente al estudio de las colisiones de hadrones (es decir de las partículas que interactúan fuertemente) a altas energías (por encima de algunos GeV). Nuestro interés está en aquellos procesos donde se encuentra la información más global sobre la dinámica de estas colisiones (secciones eficaces total e inclusivas) y entre los modelos teóricos desarrollados hasta la actualidad usamos principalmente el multiperiférico (MP)<sup>1)</sup>.

En la sección 2 se discuten las características fenomenológicas de las colisiones hadrónicas a altas energías y se describen someramente los diferentes modelos propuestos.

La sección 3 está dedicada al estudio del modelo MP. Una versión simplificada del mismo es desarrollada en forma general en la sección 4 y en la sección 5 se la compara con los datos experimentales actuales. Las posibles mejoras del modelo son analizadas en la sección 6 y las conclusiones generales son discutidas en la sección 7.

La notación y funciones matemáticas utilizadas son definidas en el apéndice A. El apéndice B está dedicado a la cinemática y el apéndice C a la revisión del formalismo de la teoría de matriz S, con el objeto de darle un mayor grado de autoconsistencia a todo el trabajo, llevando en forma coherente el desarrollo del formalismo hasta la formulación de los teoremas ópticos para procesos inclusivos.

2.- FENOMENOLOGIA, MODELOS E HIPOTESIS

La mayor parte de la información sobre la interacción fuerte proviene del estudio de procesos iniciados por la colisión de dos hadrones. Llamamos exclusivos a procesos del tipo

$$a+b \rightarrow c_1 + \dots + c_k, \tag{1}$$

donde todos los hadrones salientes  $c_i$  son detectados; mientras que llamamos inclusivos a los procesos del tipo

$$a+b \rightarrow c_1 + \dots + c_k + X, \tag{2}$$

donde X simboliza la suma sobre todos los estados hadrónicos posibles (o, en forma equivalente, sólo las partículas  $c_1 \dots c_k$  son detectadas en el estado final). Estos últimos están descriptos por la densidad de probabilidad

$$\rho_{ab}^{c_1 \dots c_k}(s, \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_k) = d\sigma(a+b \rightarrow c_1 + \dots + c_k + X) / (d(1) \dots d(k) \sigma_{ab}^{TOT}(s)). \tag{3}$$

El caso más sencillo de sección eficaz inclusiva es la sección eficaz total, correspondiente al caso  $k=0$ .

Las secciones eficaces exclusivas tienen una información directa sobre los elementos de matriz del operador de transición T; las inclusivas, en cambio, tienen una información más global (debido a la suma implícita en X), lo que en algunos casos puede ser un dato más útil pues pone de manifiesto las características generales, eliminando detalles que en la etapa presente no pretendemos describir. Desde el punto de vista experimental, los procesos exclusivos son en general más difíciles de medir debido a que 1) las secciones eficaces son pequeñas, 2) los canales más importantes a altas energías involucran generalmente la producción de muchas partículas lo que aumenta considerablemente el número de

variables a medir, iii) algunas partículas en el estado final (las neutras, por ejemplo) pueden ser muy difíciles de medir. Por la misma razón se requiere una medición de los momentos muy precisa para poder excluir la posibilidad de que se hayan producido algunas partículas neutras además de las detectadas.

Por estas razones nos concentramos en el estudio de los procesos inclusivos, aunque desde el punto de vista estrictamente teórico los conjuntos de todas las secciones eficaces exclusivas o inclusivas son equivalentes, ya que

$$d\sigma(a+b \rightarrow c_1 + \dots + c_k + X) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} \sum_{i_1 \dots i_\ell} \int d\sigma(a+b \rightarrow c_1 + \dots + c_k + c_{i_1} + \dots + c_{i_\ell}) \quad (4.a)$$

$$d\sigma(a+b \rightarrow c_1 + \dots + c_k) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-)^\ell}{\ell!} \sum_{i_1 \dots i_\ell} \int d\sigma(a+b \rightarrow c_1 + \dots + c_k + c_{i_1} + \dots + c_{i_\ell} + X) \quad (4.b)$$

donde las sumatorias sobre  $i_j$  van sobre todas las partículas  $c_i$  posibles.

Finalmente podemos definir los procesos parcialmente inclusivos representados por la ecuación (2) pero donde X no simboliza la suma sobre todos los estados posibles sino sobre algún subconjunto infinito de estados; por ejemplo

$$\begin{aligned} K^+ + p &\rightarrow \Lambda + (\text{piones}) \\ \pi^+ + p &\rightarrow \pi^+ + \pi^+ + (\text{partículas neutras}) \end{aligned} \quad (5)$$

Pasamos ahora a dar un breve resumen sobre la información experimental y teórica sobre las colisiones hadrónicas.

Las características experimentales más sobresalientes de estos procesos a altas energías son:

a) Las secciones eficaces totales son aproximadamente independientes de la energía. El comportamiento a energías no asintóticas es decreciente; debemos mencionar, sin embargo, que ciertos datos de  $\frac{d\sigma}{dt}$  del acelerador de Serpukhov y datos preliminares



res de  $\sigma_{pp}^{TOT}$  del acelerador de Ginebra muestran un pequeño crecimiento de estas secciones eficaces; lo que podría indicar un comportamiento tipo  $(\log s)^n$  ( $n \leq 2$ ) o la existencia de correcciones absorptivas negativas que desaparecen lentamente con la energía.

b) Hay una gran producción de secundarios; sus multiplicidades medias crecen lentamente con la energía incidente, este crecimiento es compatible con una dependencia tipo  $\log(s)$ . Los secundarios producidos son principalmente piones; la producción de pares  $K\bar{K}$  y  $N\bar{N}$  son aproximadamente uno y dos órdenes de magnitud más bajas.

c) Los momentos transversales de las partículas salientes están fuertemente limitados y sus valores medios (entre 0,3 y 0,4 Gev/c) son prácticamente independientes de la energía y aproximadamente independientes de la naturaleza de la partícula emitida.

Las secciones eficaces exclusivas e inclusivas se calculan en base a los elementos de matriz del operador T. Las primeras están relacionadas con el módulo al cuadrado de un elemento de matriz (C.12) y para las segundas un teorema óptico generalizado permite expresar la suma (4.a) en función de la discontinuidad de un elemento de matriz (C.21).

$$d\sigma(a+b \rightarrow c_1 \dots c_n) = |T(a+b \rightarrow c_1 \dots c_n)|^2 dR_n S_n / I \quad (6.a)$$

$$d\sigma(a+b \rightarrow c_1 \dots c_k X) = -i \text{Disc}_{E^2} T(a+b \rightarrow c_1 \dots c_k) \prod_{i=1}^k d\omega_i / I \quad (6.b)$$

En contraste con el extraordinario éxito de la electrodinámica cuántica para el caso de la interacción electromagnética y de los promisorios resultados obtenidos para el caso de la inte-

racción débil, ninguna teoría lagrangiana de campos ha podido proveer una descripción satisfactoria de la interacción fuerte; razón por la que nos encontramos ahora ante la coexistencia de diferentes modelos e hipótesis (muchas veces contradictorios entre sí) y en general con una información experimental insuficiente para decidir por uno o unos de ellos.

Podemos clasificar a los cálculos de las secciones eficaces inclusivas en macroscópicas y microscópicas. En los primeros la teoría propone una forma determinada para la amplitud  $T_{n \rightarrow n}$  a partir de la cual la sección eficaz se calcula directamente mediante (6.b). En los segundos, en cambio, se tiene un modelo para  $T_{2 \rightarrow n}$  con lo que mediante (6.a) se calculan las secciones eficaces exclusivas y mediante la suma (4.a) las inclusivas. Este último cálculo es normalmente mucho más complicado ya requiere la suma de muchos términos, cada uno de los cuales es el resultado de una integral de un número elevado de dimensiones, razón por la que para obtener una solución analítica generalmente se tienen que hacer algunas aproximaciones.

En cuanto a los modelos e hipótesis, la división entre macroscópicas y microscópicas no es siempre clara (la hipótesis de comportamiento asintótico tipo Regge, por ejemplo, es un ingrediente de cálculos tanto macroscópicas como microscópicas) por lo que en su clasificación no los dividiremos en estos dos grupos.

### 1) Límites Inclusivos

Tres hipótesis han sido propuestas para el límite de la distribución inclusiva de una partícula  $p_{ab}^c$  (3), cuando  $s \rightarrow \infty$ :

los límites de fragmentación <sup>3)</sup>, pionización y escala <sup>1 y 4)</sup>. Los dos primeros están definidos en diferentes regiones del espacio de fases y pueden ser deducidos a partir del último.

La hipótesis de fragmentación de a en c expresa que  $\rho_{ab}^c$  tiende, para  $s \rightarrow \infty$ , a un límite independiente de b, cuando se mantienen constantes el momento transversal  $p_{\perp}$  y la rapidez relativa  $y-y_a$  (B.14), de la partícula observada

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \rho_{ab}^c(p_{\perp}, y-y_a, s) = \rho_a^c(p_{\perp}, y-y_a). \quad (7)$$

La hipótesis recíproca, para la fragmentación de b en c, es válida cuando  $y_b-y$  y  $p_{\perp}$  se mantienen fijos.

La hipótesis de pionización de c expresa que  $\rho_{ab}^c$  es función sólo de  $p_{\perp}$  y de la naturaleza de la partícula c, para  $s \rightarrow \infty$ , cuando  $y^*=y-y_{cm}$  se mantiene fijo.

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \rho_{ab}^c(p_{\perp}, y^*, s) = \rho^c(p_{\perp}). \quad (8)$$

La hipótesis de escala expresa que  $\rho_{ab}^c$  tiende, para  $s \rightarrow \infty$ , a una función de  $p_{\perp}$  y de la fracción longitudinal  $x=2p_{\perp}(s)^{-1/2}$ , es decir

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \rho_{ab}^c(p_{\perp}, x, s) = f_{ab}^c(p_{\perp}, x), \quad (9)$$

con

$$\begin{aligned} f_{ab}^c(p_{\perp}, x) &= f_b^c(p_{\perp}, x) & x > 0 \\ f_{ab}^c(p_{\perp}, 0) &= f^c(p_{\perp}) \\ f_{ab}^c(p_{\perp}, x) &= f_a^c(p_{\perp}, -x) & x < 0 \end{aligned} \quad (10)$$

Las hipótesis de fragmentación limitada y pionización pueden ser deducidas a partir de esta última. Las funciones límites (7, 8 y 10) se relacionan en la forma

$$\begin{aligned} \rho_a^c(p_{\perp}, y-y_a) &= f_a^c(p_{\perp}, w_c \exp(y_a-y)/m_a) \\ \rho^c(p_{\perp}) &= f^c(p_{\perp}). \end{aligned} \quad (11)$$

Algunas aclaraciones sobre el límite (9). Primero, el haber dividido por  $\sigma_{ab}^{\text{TOT}}$  en la definición de  $\rho_{ab}^c$  (3) hace posible la forma sencilla de las relaciones (10) y además permite que el límite (9) pueda ser cierto incluso en el caso de que  $\sigma_{ab}^{\text{TOT}}$  diverga o se anule cuando  $s \rightarrow \infty$ ; esto último puede verse de la relación

$$\sum_c \iint \rho_{ab}^c(p_{\perp}, x, s) dx d^2p_{\perp} = 2 \quad (12)$$

deducida a partir de la conservación de la energía.

Segunda, que el sentido físico del límite es menos amplio que el sentido estrictamente matemático. Con esto queremos decir, por ejemplo, que  $f(x)$  no es de la forma  $\delta(x-x_0)$  y también que la diferencia  $\rho_{ab}^c - f_{ab}^c$  no se hace pequeña a una energía tan grande que esté fuera de las posibilidades de cualquier experimento (en ese caso el límite sería sólo una curiosidad matemática). También la importancia física del límite radica en parte en haber elegido una variable conveniente; es decir que si el límite (9) es válido y  $f(x)$  tiene una cierta estructura y elegimos la variable de escala  $\tilde{x} = y^*/y_{\text{MAX}}^*(s)$  en vez de  $x$ , el límite sigue siendo válido pero  $\tilde{f}(\tilde{x})$  es independiente de  $\tilde{x}$ , para  $|\tilde{x}| \neq 1$  y  $f(\tilde{x}, s)$  no converge uniformemente a  $\tilde{f}(\tilde{x})$  en todo intervalo que

contenga a los puntos  $\tilde{x}=\pm 1$ .

Una consecuencia importante de la propiedad de escala (9) y de la limitación de los momentos transversales es el crecimiento logarítmico de la multiplicidad media de la partícula detectada, a valores muy grandes de  $s$ , es decir

$$\bar{n}_c = \int p_{ab}^c dx / \bar{x} d^2 p_{\perp} \sim a_c \ln(s/s_0) + b_{ab}^c \quad (13)$$

donde

$$\begin{aligned} \bar{x} &= 2 E_c^* (s)^{1/2} = (x^2 + 4w_c^2/s)^{1/2} \\ a_c &= \int d^2 p_{\perp} f^c(p_{\perp}) \\ b_{ab}^c &= \int d^2 p_{\perp} \left[ f^c(p_{\perp}) \ln(s_0/4w_c^2) + \int dx (f_{ab}^c(p_{\perp}, x) - f^c(p_{\perp})) / |x| \right] \end{aligned} \quad (14)$$

Para obtener la ec. (13) es suficiente suponer convergencia uniforme para el límite de la ecuación (9) y la existencia de las integrales (14). Ambas condiciones se cumplen en el modelo MP aunque  $dr_{ab}^G/dx$  diverge en  $x=0$ . En realidad a partir de las relaciones (10), es de esperar que  $r_{ab}^G$  no sea analítica en  $x=0$ , a menos que sea independiente de la naturaleza de las partículas  $a$  y  $b$  fuera del origen.

Estas hipótesis sobre los límites de los espectros inclusivos pueden generalizarse, dentro del marco del modelo MP, para el caso de detección de más de una partícula y de los procesos parcialmente inclusivos, siempre que estos últimos sean convenientemente normalizados. La predicción general es que las correlaciones entre partículas se anulan aproximadamente como  $\exp(-k|\Delta y|)$  con  $k \sim \frac{1}{2}$ ; de manera tal que las distribuciones factorizan a muy altas

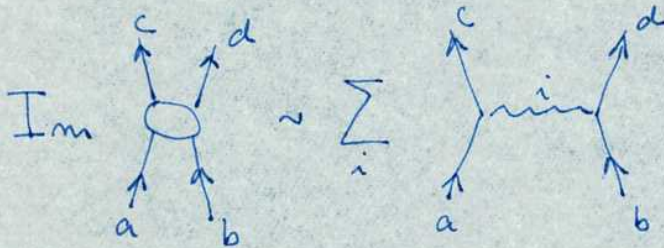
energías en términos de distribuciones de orden menor que dependen de las partículas cercanas en el espacio de rapideces.

ii) Polos de Regge

La hipótesis de comportamiento asintótico en polos de Regge expresa que para  $s \rightarrow \infty$  y  $t$  fijo,

$$\text{Im } T_{ab \rightarrow cd}(s+i0, t) \sim \sum_i \beta_{ac}^i(t) \beta_{bd}^i(t) S^{\alpha_i(t)} \quad (15)$$

lo que simbolizamos en la forma



Utilizando relaciones de dispersión, obtenemos para la amplitud total, para  $|s| \rightarrow \infty$  y  $t$  fijo

$$T_{ab \rightarrow cd} \sim \sum_i \beta_{ac}^i \beta_{bd}^i f_i(s, \mu) \quad (16)$$

donde

$$f_i(s, \mu) = (-\sin \pi \alpha_i)^{-1} \exp(-i\pi \alpha_i) (S^{\alpha_i} + \bar{t}_i \mu^{\alpha_i})$$

$$= \begin{cases} (-\sin \pi \alpha_i)^{-1} S^{\alpha_i} (\exp(-i\pi \alpha_i) + \bar{t}_i), & \pi > \arg s > 0 \\ (-\sin \pi \alpha_i)^{-1} \mu^{\alpha_i} (1 + \bar{t}_i \exp(-i\pi \alpha_i)), & 2\pi > \arg s > \pi. \end{cases} \quad (17)$$

es una función real analítica de  $s$  (C.15) con los dos cortes y la propiedad de cruce (dada por la signatura  $\bar{\epsilon}_i = \pm 1$ )

$$f_i(s, u) = \bar{\epsilon}_i f_i(u, s) \tag{18}$$

Una condición suficiente para la validez de la expansión (15) es que las distintas ondas parciales en el canal  $t$  puedan ser interpoladas por una función analítica del momento angular  $l$ , cuyas únicas singularidades, para  $\text{Re } l > -\frac{1}{2}$ , sean polos aislados en las posiciones

$$l = \alpha_i(t) \tag{19}$$

Esta propiedad puede ser demostrada en el problema, no relativista de dispersión por un potencial; pero en este caso la zona  $s \rightarrow \infty$   $t \leq 0$  carece de significado físico.

En el caso relativista esta propiedad es muy difícil de demostrar y no podemos en general excluir la posibilidad de la existencia de singularidades más complicadas, como por ejemplo puntos de ramificación. Es sin embargo en este caso en que la hipótesis de polos de Regge tiene un sentido físico más atractivo ya que relaciona la expansión asintótica en un canal con los estados ligados y resonancias en el canal cruzado. Estos están dados por las soluciones de (19) con  $l$  entero par (impar), para  $\bar{\epsilon}_i = 1$  ( $\bar{\epsilon}_i = -1$ ); los estados ligados para  $t$  real positivo inferior al umbral y las resonancias y estados virtuales en la hoja no física.

Una consecuencia inmediata de la expansión (15) y del teo-

rama óptica (C.17) es

$$\sigma_{ab}^{\text{TOT}}(s) \sim \sum_i \beta_{a\bar{a}}^i(0) \beta_{b\bar{b}}^i(0) s^{\alpha_i(0)-1} \quad (20)$$

Como el límite de Froissart (deducido a partir de unitariedad y el corto alcance de la interacción) exige que, cuando  $s \rightarrow \infty$ ,  $\sigma_{ab}^{\text{TOT}}(s) \leq \text{const.} (\log s)^2$ , la expansión (20) implica que las secciones eficaces totales no pueden diverger, es decir,  $\text{Re } \alpha_i(0) \leq 1$ .

Las secciones eficaces totales experimentales son compatibles con la existencia de un polo con  $\alpha(0) \approx 1$  (el Pomerón,  $\mathbb{P}$ ) y varios polos con  $\alpha(0) \approx \frac{1}{2}$  ( $\mathbb{P}'$ ,  $\rho$ ,  $\omega$ ,  $A_2$ , etc.; los que simbolizaremos genéricamente por  $M$ ); en esa forma con (20) es

$$\sigma_{ab}^{\text{TOT}}(s) \sim \gamma_a^{\mathbb{P}} \gamma_b^{\mathbb{P}} + \bar{s}^{1/2} \sum_M \gamma_a^M \gamma_b^M \quad (21)$$

Como las secciones eficaces totales son positivas por definición, el  $\mathbb{P}$  tiene signature positiva y como se acopla a todos los pares hadrónicos de partícula-antipartícula tiene los números cuánticos del vacío.

En el resto del trabajo usamos la expansión (20) como esencialmente correcta, aunque la naturaleza detallada de la singularidad de Pomeronchuk es algo no claramente determinada todavía; podría ser un punto de ramificación o un par de polos muy cercanos que simularan un comportamiento tipo  $\log(s)$ . En particular, la relación de unitariedad sugiere que si hay un polo en  $\alpha_{\mathbb{P}}(0) = 1 - \epsilon$  ( $\epsilon \leq 0$ ) ha y puntos de ramificación en  $\alpha_c(0) = 1 - n\epsilon$  ( $n=1, 2, \dots$ ).

El proyecto de parametrización de las amplitudes experimentales  $T_{2 \rightarrow 2}$  en término de polos de Regge tuvo un desarrollo muy grande, lográndose reproducir componentes bastante pequeñas de las



secciones eficaces diferenciales y llegándose a descubrir, por otra parte, las limitaciones de este tipo de expansión (lo que llevó a la necesidad de introducir cortes, correcciones absolutas, etc)

La expansión (16) puede ser generalizada para amplitudes con más de dos partículas en el estado inicial y/o final, cuando ciertas subenergías tienden a infinito y ciertos momentos invariantes transferidos permanecen fijos. Esta hipótesis es desarrollada en particular en las secciones siguientes para el caso  $T_{2 \rightarrow 1}$  y aquí estudiamos sus consecuencias para el caso de la discontinuidad de la amplitud hacia adelante  $T_{3 \rightarrow 3}$ , utilizada en (6.21) para calcular la distribución inclusiva de una partícula,

$$p_{ab}^c = \text{Disc}_{H^2} T(ab\bar{c} \rightarrow ab\bar{c}) / \text{Disc}_S T(ab \rightarrow ab) = D_{33} / D_{22} \quad (22)$$

$D_{22}$  es función de una sola variable,  $s$ , y  $D_{33}$  es función de tres variables que podemos elegir sean

$$\xi_i = 2p_c \cdot p_i / w_c = 2m_i \text{ch}(y_c - y_i) \quad i = a, b$$

$$p_i^c$$

(23)

Estas variables cumplen la relación

$$(\xi_a + s y(y_c - y_a) (\xi_a^2 - 4m_a^2)^{1/2}) (\xi_b + s y(y_b - y_c) (\xi_b^2 - 4m_b^2)^{1/2}) = 4m_a m_b e^{y_b - y_a} \quad (24)$$

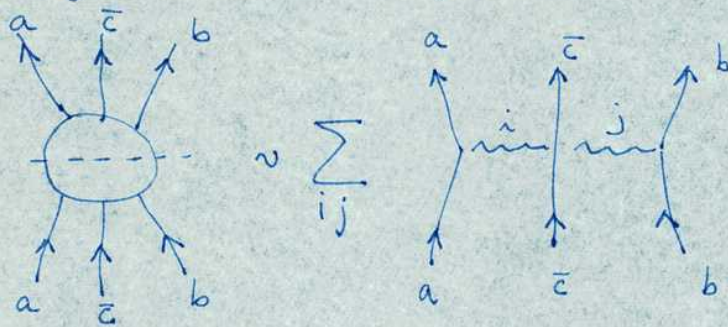
$$\simeq 4s$$

El límite de pionización está dado por

$$\xi_a \rightarrow \infty \quad \xi_b \rightarrow \infty \quad \therefore \xi_a \xi_b / s \rightarrow \infty$$

por lo que suponiendo que

$$D_{33} \sim \sum_{ij} \beta_{a\bar{a}}^i(0) (\xi_a)^{\alpha_i(0)} \Gamma_{ij}^c(p_{\perp}) (\xi_b)^{\alpha_j(0)} \beta_{b\bar{b}}^j(0) \quad (25)$$



tenemos

$$p_{ab}^c = \Gamma_{RR}^c(p_{\perp}) + \bar{s}^{1/4} \sum_M \left[ \frac{\delta_a^M}{\delta_R^a} \left( \frac{\xi_a}{\xi_b} \right)^{\alpha_i(0)} \Gamma_{RR}^c + \frac{\delta_b^M}{\delta_R^b} \left( \frac{\xi_b}{\xi_a} \right)^{\alpha_j(0)} \Gamma_{RM}^c \right] + O(\bar{s}^{1/2}) \quad (26)$$

Es decir que se tiende al límite de pionización, como  $\bar{s}^{-1/2}$ ,

con

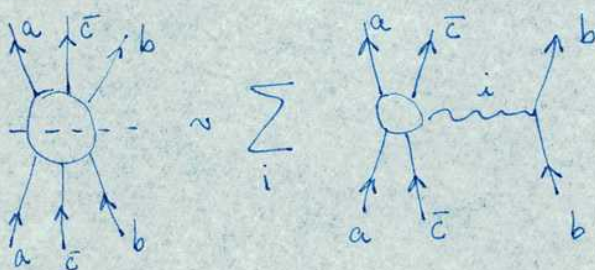
$$p^c(p_{\perp}) = \Gamma_{RR}^c(p_{\perp}) \quad (27)$$

Para la fragmentación de a en c tenemos, en cambio,

$$\xi_a = \text{const.} \quad \xi_b \rightarrow \infty \quad \xi_b / \bar{s} \rightarrow \text{const.}$$

por lo que suponiendo

$$D_{33} \sim \sum_i \Omega_{a_i}^c(\xi_a, p_{\perp}) (\xi_b)^{\alpha_i(0)} \beta_{b\bar{b}}^i(0) \quad (28)$$



tenemos

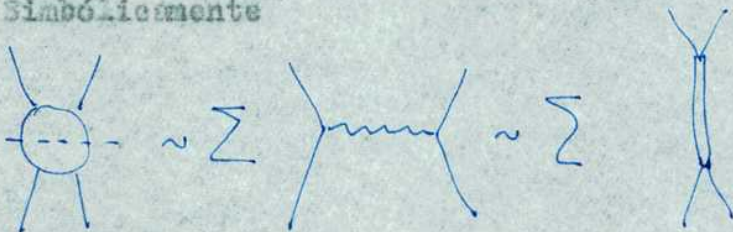
$$P_{ab}^c \sim \sum_{a \in \mathbb{R}} c_{\alpha} \exp(y_a - y_c) / (m_a \alpha_a^{\mathbb{R}}) + O(\bar{s}^{1/2}) \quad (29)$$

es decir que  $P_{ab}^c$  tiende al límite de fragmentación como  $s^{-1/2}$ .

iii) Dualidad

Este concepto introducido por Dalen, Horn y Schmidt <sup>5)</sup>, a partir de relaciones de dispersión, expresa que la expansión asintótica de  $\text{Im } T_{22}$  en término de polos de Regge y la expansión de bajas energías en término de resonancias más fondo son, en un cierto sentido promedio, equivalentes a toda energía.

Simbólicamente



El modelo de Veneziano incorporó esta propiedad en forma exacta con la dificultad, sin embargo, de tener infinitos polos sobre el eje real en vez de los cortes unitarios. Si se hace tender  $s$  a infinito evitando los polos se puede ver que la amplitud de Veneziano tiene el comportamiento tipo Regge (15). Lo mismo ocurre con amplitudes con más de cuatro partículas externas cuando se hace tender una subenergía a infinito.

<sup>6)</sup> Harari y Freund restringieron el sentido del concepto de dualidad postulando que la suma de resonancias equivale ("es dual") a la expansión en polos de Regge  $\alpha_M$  excluido el Pomeron el

que a su vez es dual al fondo que se suma a las resonancias.

Una consecuencia inmediata de esta hipótesis es que cuando un cierto canal  $ab$  no se acopla a ninguna resonancia ("es exótico") el coeficiente de  $s^{-1}$  en (21) es muy pequeño lo que hace que se alcance el régimen asintótico  $\sigma_{ab}^{TOT}(s) \sim \text{const.}$  a energías más bajas que para los casos en que el canal  $ab$  no es exótico.

#### iv) Modelo Termodinámico

La gran producción de secundarios en las colisiones hadrónicas a altas energías indujo a algunos investigadores a intentar un tratamiento estadístico de estas reacciones. El modelo termodinámico <sup>7)</sup> va aún más lejos al suponer que inmediatamente después del choque se produce un equilibrio termodinámico caracterizado por una temperatura  $T$ ; con lo que la probabilidad de encontrar a una partícula con impulso  $p$  es proporcional a  $d^3p / \exp(\sqrt{p^2 + m^2}/kT) \pm 1$ .

Sin embargo este tipo de ideas tropiezan con la inmediata dificultad de que la distribución de secundarios no es isotrópica sino que los momentos transversales están fuertemente limitados mientras que los longitudinales no; las partículas "recuerdan" la dirección de incidencia. Este problema se obvia en el modelo termodinámico mediante la introducción de una función desconocida que describe el movimiento longitudinal colectivo del fluido hadrónico.

Este modelo posee el límite de fragmentación pero no el de pionización o, en otras palabras, posee el límite de escala para todo  $x \neq 0$ . En las versiones originales del modelo, la multiplici-

dad media de secundarios crecía como una potencia de  $s$ . En una versión más reciente <sup>8)</sup>, sin embargo, ésta crece como  $\log(s)$ , aunque el modelo no posee el límite de pionización. Esto es así por que la distribución inclusiva  $d\sigma/dy$  posee un pozo, de ancho constante en  $y^*$ , alrededor de  $y^*=0$ ; lejos de este punto y de los extremos es  $d\sigma/dy \sim \text{const.}$

### V) Modelo Estadístico Unidimensional

En su versión original este modelo consistió en incorporar en forma "ad-hoc" a la amplitud de producción la característica más sobresaliente de los datos experimentales: la limitación de los momentos transversales, es decir

$$T_{2 \rightarrow n} = \prod_{i=1}^n f(p_{\perp i}^{\pm}) \quad (30)$$

donde  $f(p_{\perp})$  decrece rápidamente con  $p_{\perp}$ .

Los experimentos muestran, sin embargo, que la distribución longitudinal no es la misma para todas las partículas sino que, por ejemplo, frecuentemente se observa un par de partículas con los mismos números cuánticos que las incidentes y una alta elasticidad, por lo que se modificó (30) en la forma

$$T_{2 \rightarrow n} = F(t_{aa'}) \prod_{i=2}^{n-1} f(p_{\perp i}^{\pm}) F(t_{bb'}) \quad (31)$$

$$t_{ii'} = (p_i - p_{i'})^2 \quad i = a, b$$

donde  $F(t)$  decrece rápidamente con  $-t$  y  $a'$  y  $b'$  son las partículas salientes correspondientes a las entrantes (por ejemplo los dos nucleones en  $N+N \rightarrow N+N+n\pi$ ).

que esta amplitud reproduzca las características experimentales más sobresalientes no es de sorprenderse ya que éstas fueron incorporadas explícitamente a ella; pero por la misma razón sus posibilidades de predicción y desarrollo son muy limitadas.

La primera diferencia fundamental entre este modelo y el MP es probablemente que las únicas correlaciones longitudinales que el primero predice son las cinemáticas -debidas a la conservación de energía e impulso-, o sea que, por ejemplo, la correlación entre dos partículas con momento finito en el sistema baricentro se anula cuando  $s$  tiende a infinito.

vi) Modelo MP

El resto de este trabajo está dedicado a este modelo razón por la que no lo desarrollaremos aquí.

3.- MODELO MULTIPERIFERICO

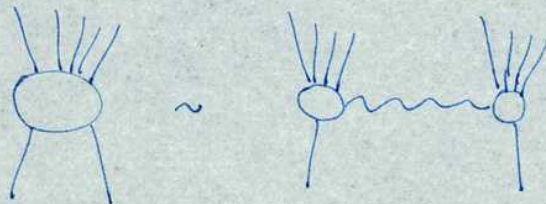
De acuerdo a la hipótesis de periferalismo, la amplitud  $T(ab \rightarrow cd)$  puede ser expresada, para grandes valores de  $s$ , como la suma de una función fuertemente decreciente con  $|t|$  más una función fuertemente decreciente con  $|u|$ .

De esta forma, la amplitud tiene un valor apreciable sólo en dos zonas pequeñas del espacio de fases -donde  $|t|$  o  $|u|$  es pequeño-. Como estas dos zonas son disjuntas, en el cálculo del módulo al cuadrado de la amplitud se puede despreciar la interferencia entre ambos términos.

Los modelos particulares con esta propiedad son el modelo de polos de Regge (2.15) y el modelo de intercambio de un pión

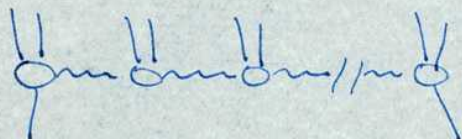
$$T_{ab \rightarrow cd} = \beta_{a\bar{c}}^{\pi} \frac{1}{t - m_{\pi}^2} \beta_{b\bar{d}}^{\pi} + \beta_{a\bar{d}}^{\pi} \frac{1}{u - m_{\pi}^2} \beta_{b\bar{c}}^{\pi} \quad (1)$$

Se puede extender la hipótesis de periferalismo para el caso de la amplitud de producción <sup>1)</sup>, en el sentido de que fundamentalmente son pobladas aquellas zonas del espacio de fases donde las partículas salientes se pueden agrupar en dos superpartículas de masa invariante y momentos transferidos pequeños, lo que podemos simbolizar en la forma



Esta puede ser una buena aproximación de la amplitud a energías

intermedias, donde la multiplicidad media es baja. A medida que crece la energía incidente, sin embargo, las multiplicidades más importantes son mayores y no se puede dividir a las partículas salientes en dos grupos de masas invariantes pequeñas. Podemos considerar que la estructura de la amplitud es tal que las zonas más pobladas son las que se obtienen al subdividir los grupos originales hasta lograr superpartículas de masas pequeñas y tales que los momentos invariantes transferidos entre ellas sean también pequeños; lo que podemos simbolizar en la forma



De esta manera llegamos a la formulación de las hipótesis del modelo MP: la amplitud  $T(a+b \rightarrow c_1 + \dots + c_n)$  está dada por la suma de  $n!$  amplitudes definidas para cada uno de los  $n!$  ordenamientos de las partículas salientes. La amplitud correspondiente a un determinado ordenamiento  $(a, c_{i_1}, c_{i_2}, \dots, c_{i_n}, b)$  es tal que

a) Factoriza en funciones de los momentos transferidos  $Q_j = p_a -$

$-\sum_{k=1}^j p_{c_{i_k}}$  "cercaños" en la cadena MP.

b) Los momentos invariantes transferidos  $t_1 = Q_1^2$  están limitados.

Se puede ver que la hipótesis (b) lleva a

- i) Limitación de los momentos transversales.
- ii) Un ordenamiento de los momentos longitudinales.

El efecto de la hipótesis (a) es, por otra parte, una falta de



correlación dinámica entre partículas lejanas en el espacio de rapidades.

La propiedad (ii) nos permite despreciar las interferencias en el cálculo del módulo al cuadrado de la amplitud total ("aproximación de ordenamiento fuerte") y esto, junto con (a), permite reducir la suma sobre infinitos diagramas a la resolución de una ecuación integral.

Concretamente, si en el estado final tenemos  $K$  grupos de partículas idénticas con  $n_i$  partículas cada uno, es

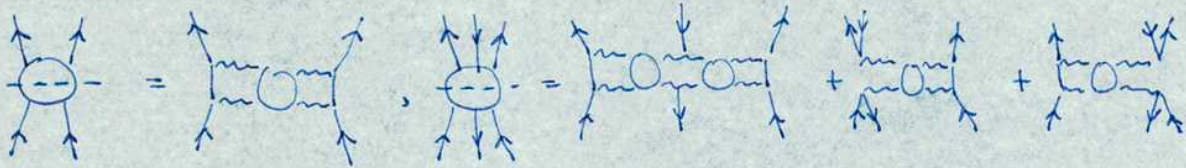
$$\begin{aligned} \sigma(a+b \rightarrow c_1 + \dots + c_m) &= (I n_1! \dots n_k!)^{-1} \int dR_m \left| \sum_{i=1}^{n_i} T_i \right|^2 \\ &\cong (I n_1! \dots n_k!)^{-1} \int dR_m \sum_{i=1}^{n_i} |T_i|^2 \cong I^{-1} \int dR_m \sum_{i=1}^{n_i} |T_i|^2 \end{aligned} \quad (2)$$

donde la sumatoria  $\sum'$  es sobre los  $n_d = n! / (n_1! \dots n_k!)$  diagramas topológicamente diferentes, es decir, que difieren por el intercambio de dos partículas idénticas.

Esta aproximación la podemos simbolizar en la forma

$$\begin{aligned} | \text{Sun} |^2 &= | \text{Top-Right} |^2 = \text{Crossing} + \text{Non-Crossing} \\ &+ \text{Crossing} + \dots \cong \text{Non-Crossing} \end{aligned}$$

Las distintas sumas unitarias, utilizadas para el cálculo de las secciones eficaces inclusivas, están dadas por



donde

$$A = \text{Diagram} \equiv \text{Diagram} + \text{Diagram} + \text{Diagram} + \dots$$

satisface la ecuación integral (para correlaciones de un "enlabón" de alcance)

$$A = K + A g^2 K \quad (3)$$

$$\text{Diagram} = \text{Diagram} + \text{Diagram}$$

Esta ecuación tiene una integral sobre un lazo sujeta a la condición de que la partícula emitida esté en la capa de masas, siendo en consecuencia una ecuación integral en tres dimensiones continuas; lo que hace que sea normalmente bastante difícil resolverla, salvo en términos de expresiones asintóticas para  $s \rightarrow \infty$ .

Si hay  $N$  canales diferentes intercambiados  $\alpha = 1, \dots, N$  (determinados por los números cuánticos de ambos propagadores) y  $M$  tipos de partículas emitidas, la ecuación (3) debe entenderse en la forma

$$A_{\alpha\beta} = K_{\alpha} \delta_{\alpha\beta} + \sum_{\gamma=1, k=1}^{N, M} A_{\alpha\gamma} g_{\gamma\beta}^{2(k)} K_{\beta} \quad (4)$$

$$\text{Diagram} = \text{Diagram} \delta_{\alpha\beta} + \text{Diagram} \left( \text{Diagram} + \dots + \text{Diagram} \right) \left( \text{Diagram} + \dots + \text{Diagram} \right) \text{Diagram}$$

La solución de la ecuación (3) tiene en general un comportamiento asintótico expandible en término de polos de Regge con residuos factorizados, lo que simbolizamos en la forma

$$\text{Diagrama con un círculo} \sim \sum \text{Diagrama con líneas zigzag}$$

con lo que se obtienen las expansiones (2.20), (2.25) y (2.29) para las secciones eficaces inclusivas. En particular se predice que la distribución inclusiva de una partícula posee el límite de cascada.

Utilizando la expansión de  $A$  en polos de Regge en el cálculo de las distribuciones inclusivas con muchas partículas observadas se obtienen las propiedades límites de factorización y falta de correlaciones de largo alcance, descritas en el párrafo final de la pag. 9.

4.- MODELO MP UNIDIMENSIONAL

En la sección anterior esbozamos una formulación del modelo MP donde se tienen en cuenta los tres grados de libertad por partícula. Las secciones eficaces inclusivas se calculan en base a la solución de una ecuación integral de tres variables continuas.

Esta ecuación es considerablemente difícil de resolver por lo que para obtener una idea de las características generales de las predicciones del modelo MP, es conveniente comenzar desarrollando una versión aproximada para de fácil solución del mismo y luego ir la mejorando.

La primera aproximación en este sentido puede ser ignorar los grados de libertad transversales, ya que experimentalmente se observa que los momentos correspondientes están fuertemente limitados.

En esta sección desarrollamos un modelo <sup>2)</sup> en el que los momentos transversales son fijados en sus valores medios (independientes de la energía incidente). En la sección siguiente comparamos este modelo con los datos experimentales y en la sección 6 discutimos como mejorar el modelo.

La sección eficaz exclusiva

$$\sigma(a+b \rightarrow (0) + (1) + \dots + (n+1)) \quad (1)$$

se calcula mediante la ecuación aproximada (3.2), donde el flujo incidente y el espacio de fases longitudinal están dados por

$$I = 4 n_a n_b S h Y$$

$$dR_{m+2} = \delta(W^+ - \sum_{i=0}^{m+1} \omega_i^+) \delta(W^- - \sum_{i=0}^{m+1} \omega_i^-) \frac{1}{\prod_{i=0}^{m+1}} dy_i \quad (2)$$

con

$$Y = y_b - y_a > 0$$

$$\omega_i^\pm = E_i \pm p_i = \omega_i \exp(\pm y_i) \quad (5)$$

$$W^\pm = \omega_a^\pm + \omega_b^\pm = \sqrt{s} \exp(\pm y_{c.m.})$$

En el cálculo de las diferentes contribuciones a (3.2) correspondientes a los distintos ordenamientos, utilizamos las dos funciones delta (2) para integrar sobre las rapideces de las partículas emitidas en ambos extremos de la cadena MP. En particular, para el ordenamiento (a, 0, 1, ..., n-1, b) tenemos

$$dR_{n+2} = J^{-1} \delta(y_0 - y_a - \varepsilon_a) \delta(y_b - y_{n+1} - \varepsilon_b) \prod_{i=0}^{n+1} dy_i \quad (4)$$

donde en base a

$$W'^\pm = \omega_0^\pm + \omega_{n+1}^\pm = W^\pm - \sum_{i=1}^n \omega_i^\pm \equiv W' \exp(\pm Y') \quad (5)$$

es

$$J = \frac{\partial(W'^+, W'^-)}{\partial(y_0, y_{n+1})} = 2\omega_0 \omega_{n+1} \text{sh}(y_{n+1} - y_0) = \lambda^{1/2}(W'^2, \omega_0^2, \omega_{n+1}^2) \quad (6)$$

$$\text{Ch}(Y' - \omega_{n+1}') = (W'^2 \pm \omega_0^2 \mp \omega_{n+1}^2) / (2W' \omega_{n+1}')$$

La amplitud T, por otra parte, es una función de diferencias de rapideces ya que es un invariante longitudinal de Lorentz. Un alcance mínimo para la correlación dinámica entre las partículas emitidas hace que la correspondiente al ordenamiento citado tenga la forma

$$|T|^2 / (2m_a m_b J) = \sum_{j_0, j_{n+1}}^N G_a^2(y_0 - y_a)_{i_0 j_0} K(y_1 - y_0)_{i_0 j_0, i_1 j_0} g_{i_1 j_0, i_1 j_1}^2 \dots \quad (7)$$

$$\dots g_{i_n j_{n-1}, i_n j_n}^2 K_{i_n j_n, i_{n+1} j_n} \tilde{G}_b^2(y_b - y_{n+1})_{i_{n+1} j_n}$$

donde  $i_k$  indica el tipo de partícula emitida en la posición k de la cadena MP y  $j_k$  el canal intercambiado entre las posiciones k y k-1.

La sección eficaz para producir  $n$  partículas se obtiene integrando (7) con (4) y sumando sobre  $i_k$  desde 1 a  $N_k$ , donde  $n$  es el número de tipos de partículas producidas.

$$J_{ab}^n(\gamma) = (2 \operatorname{sh} \gamma)^{-1} \int G_a^2(\epsilon_a) K(z_1) g^2 K(z_2) \dots \tilde{G}_b^2(\epsilon_b) \delta(\gamma - \epsilon_a - \epsilon_b - \sum_{i=1}^{n+1} dz_i) \prod_{i=1}^{n+1} dz_i \quad (8)$$

En la expresión anterior  $G_a^2$  y  $G_b^2$  son vectores fila y columna respectivamente y  $K$  y  $g^2$  son matrices simétricas, en un espacio de  $l=N_k$  dimensiones. La matriz  $K$  es diagonal con respecto a los índices de canales ( $j_k$ ) y la matriz  $g^2$  es diagonal con respecto a los índices de partículas ( $i_k$ ). En la ecuación (8) y siguientes, por el producto matricial  $G_a^2(\epsilon_a) B(z - \epsilon_a - \epsilon_b) \tilde{G}_b^2$  debe entenderse  $\sum G_a^2(\epsilon_{ai})_{ij} B(z - \epsilon_{ai} - \epsilon_{bi})_{ij, i'j'} \tilde{G}_b^2(\epsilon_{bi})_{i'j'}$ .

En cuanto a  $\epsilon_{a0} = \gamma_0 - \gamma_a$  y  $\epsilon_{b_{n+1}} = \gamma_b - \gamma_{n+1}$  son funciones complicadas de los  $\gamma_i = \gamma_i - \gamma_{i-1}$  ( $i=1, \dots, n$ ) calculables a partir de las ecuaciones (5) y (6.b), pero sin embargo en la zona MP del espacio de fases se cumple que

$$\begin{aligned} W^{1+} &\cong \omega_a^+ \\ W^{1-} &\cong \omega_a^- \end{aligned} \quad (9)$$

lo que implica que  $\epsilon_{a0}$  y  $\epsilon_{b_{n+1}}$  no se alejan mucho del límite elástico (\*\*)

$$\begin{aligned} \epsilon_{a0} &\cong \ln \frac{\omega_a}{m_a} \\ \epsilon_{b_{n+1}} &\cong \ln \frac{\omega_{n+1}}{m_b} \end{aligned} \quad (10)$$

$$J \cong \omega_a \omega_{n+1} \exp(\gamma_{n+1} - \gamma_0)$$

(\*\*) En realidad toda amplitud con una limitación en  $t_0$  y  $t_{n-1}$  produce una fuerte limitación en  $\epsilon_a$  y  $\epsilon_b$ , ya que  $t_0 = m_a^2 + m_b^2 - 2 m_a \omega_a \operatorname{ch}(\epsilon_a)$ .

En esta forma tenemos

$$\mathcal{T}_{ab}^{\sim}(Y) = G_a^2(\bar{E}_a) A(Y - \bar{E}_a - \bar{E}_b) \tilde{G}_b^2(\bar{E}_b) \quad (11)$$

donde

$$A^n(z) = \int K(z_1) g^2 K(z_2) \dots K(z_{n+1}) \delta(z - \sum_{i=1}^{n+1} z_i) dz_i \quad (12)$$

satisface

$$A^n(z) = \int A^{n-1}(z') g^2 K(z-z') dz' \quad (13)$$

Esta relación de recurrencia nos permite calcular

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A^n(z) \quad (14)$$

por medio de la ecuación integral

$$A(z) = K(z) + \int A(z') g^2 K(z-z') dz' \quad (15)$$

Las secciones eficaces inclusivas se pueden calcular fácilmente en función de la matriz  $A(z)$ , en particular

$$\mathcal{T}_{ab}^{\text{TOT}}(Y) = G_a^2(\bar{E}_a) A(Y - \bar{E}_a - \bar{E}_b) \tilde{G}_b^2(\bar{E}_b), \quad (16)$$

$$d\sigma_{ab}^c / dy_c = G_a^2(\bar{E}_a) A(y_c - y_a - \bar{E}_a) g_c^2 A(y_b - y_c - \bar{E}_b) \tilde{G}_b^2(\bar{E}_b),$$

$$d\sigma_{ab}^{cd} / dy_c dy_d = G_a^2(\bar{E}_a) A(y_c - y_a - \bar{E}_a) g_c^2 A(y_d - y_c) g_d^2 A(y_b - y_d - \bar{E}_b) \tilde{G}_b^2(\bar{E}_b) + (c \leftrightarrow d),$$

donde

$$(g_c^2)_{ij, i'j'} = \delta_{ci} g_{cj, c'j'} \quad (17)$$

La ecuación integral (15) se puede resolver convirtiéndola en una ecuación matricial algebraica por medio de una transformada de

Laplace (si algún elemento de  $K(z)$  no es idénticamente nulo para  $z$  negativo, debe usarse transformada de Fourier), es decir

$$\begin{aligned} a(J) &= \int_0^{\infty} A(z) \exp(-Jz) dz = k(J) + a(J) g^2 k(J) \\ &= k(J) [1 - g^2 k(J)]^{-1} = [k^{-1}(J) - g^2]^{-1} \end{aligned} \quad (18)$$

donde  $k(J) = \int_0^{\infty} K(z) \exp(-Jz) dz$ .

El comportamiento asintótico de  $A(z)$  está controlado por las singularidades de  $a(J)$ . Por ejemplo, si  $a(J)$  tiene polos aislados en  $J=J_r$ , es decir

$$\begin{aligned} D(J_r) &= \det [k^{-1}(J_r) - g^2] \\ D'(J_r) &\neq 0 \end{aligned} \quad (19)$$

cercano  $J=J_r$  es

$$a(J) = \frac{C_r^T \otimes C_r}{J - J_r}$$

donde  $C_r$  es un vector constante. La factorización del residuo es una consecuencia de la simetría de la matriz  $k^{-1}(J) - g^2$ . En esta forma es, para  $z \rightarrow \infty$

$$A(z) \sim \sum_r C_r^T \otimes C_r \exp(J_r z) \quad (20)$$

Con esta expansión asintótica en (16) se obtienen las expansiones en polos de Regge (2.20), (2.25) y (2.28) con

$$\begin{aligned} \beta_{a\bar{a}}^i(0) &\propto G_a^2 \cdot C_i^T \\ \Gamma_{ij}^c(\bar{p}_\perp) &\propto C_i g_c^2 C_j^T \\ \Omega_{a_i}^c &\propto G_a^2 A(y_c - y_a - \bar{E}_a) g_c^2 C_i^T \end{aligned} \quad (21)$$

Es decir que la suma sobre cadenas multiperiférica es una forma microscópica de generar polos de Regge en la discontinuidad de



la amplitud  $T(n \rightarrow n)$ . En el caso  $T(2 \rightarrow 2)$ , la variable  $J$  es entonces el impulso angular complejo en el canal cruzado. Los polos que se generamos más arriba corresponden a un valor de  $t=0$  ( $\alpha_+(0) = J_+$ ), pero como en la suma sobre cadenas MP se conservan los números cuánticos en el canal  $t$ , con un modelo MP tridimensional se puede hacer lo mismo para  $t \neq 0$ , generando parte de la trayectoria  $\alpha(z)$ .

El espectro inclusivo de fragmentación está relacionado con la forma de  $\Lambda(z)$  para valores no asintóticos de  $z$ , la que a su vez está determinada por la forma de  $K(z)$ . Para determinar esta última tenemos en cuenta las siguientes consideraciones:

1) El comportamiento asintótico de las subenergías  $s_{i1}$ , cuando  $z \rightarrow \infty$ , es

$$S_{i1} = m_i^2 + m_{i1}^2 + 2\omega_i \omega_{i1} \ln(z) - 2 \vec{p}_i^+ \cdot \vec{p}_{i1}^+ \approx \omega_i \omega_{i1} \exp(z)$$

por lo que la hipótesis de comportamiento multi Regge requiere que

$$K_{ij} s_{i1} s_{j1} \sim \exp(\beta_j z) \quad (22)$$

donde  $\beta_j$  es la suma de las dos trayectorias intercambiadas en el canal  $j$  menos <sup>uno</sup> el valor de dichas trayectorias se fija en un cierto valor promedio.

2)  $K(z)$  debe anularse para  $z$  decreciente ya que la limitación de los impulsos transferidos produce un ordenamiento de las rapididades. La hipótesis de ordenamiento fuerte hace que una dependencia exponencial en

$$t_k = (\omega_a^+ - \sum_{e=0}^k \omega_e^+) (\sum_{e=k+1}^{n+1} \omega_e^- - \omega_b^-) - (\sum_{e=0}^k \vec{p}_e^+)^2 \quad (23)$$

lleve aproximadamente a la expresión

$$K_{ij, i'j'}(z) = \exp[\beta_j z - b \omega_i \omega_{i'} \exp(-z)] \quad (24)$$

Esta función se anula rápidamente para  $z$  decreciente. Su iteración es complicada por lo que usaremos en vez

$$K_{ij, i'j'}(z) = \bar{\Theta}(z - \gamma_i - \gamma_{i'}) \exp[\beta_j z] \quad (25)$$

donde  $\gamma_{i'} - \gamma_i \cong \ln(\omega_{i'}/\omega_i)$  y  $\bar{\Theta}(z)$  es una función escalón redondeada que simula el comportamiento de la ec. (24). El desplazamiento  $\gamma_i$  en (25) deprime la producción de partículas más pesadas.

Nótese, por otra parte, que el comportamiento de  $K(z)$  para valores no asintóticos de  $z$  depende de la forma en que se extrapola el comportamiento tipo Regge (25). Podríamos, por ejemplo, elegir

$$K_{ij, i'j'}(z) = \bar{\Theta}(z - \gamma_i - \gamma_{i'}) [2 \cosh z]^{\beta_j} \quad (26)$$

o

$$K_{ij, i'j'}(z) = \bar{\Theta}(z - \gamma_i - \gamma_{i'}) [2 \sinh |z|]^{\beta_j} \quad (27)$$

Para empezar estudiando los casos más sencillos tomamos el caso  $L=1$ , es decir, se produce un sólo tipo de partícula ( $M=1$ ) y hay un sólo canal intercambiado ( $K=1$ ). Esto puede utilizarse como un modelo muy grosero de las colisiones pión-pión donde sólo piones son producidos, se ignora la carga de éstos, y se intercambia un sólo canal.

Los espectros inclusivos son función de

$$A(z) = \bar{L}^{-1} [(\bar{K}^{-1}(J) - g^2)^{-1}] \quad (28)$$

que depende de  $g^2$  y de los parámetros que definen el kernel  $K(z)$  salvo  $\beta$ . El único efecto que se obtiene al variar  $\beta$  (para propagadores del tipo (25)) es desplazar simultáneamente todos los polos.

11) De Tar utilizó la forma más sencilla para  $K(z)$ , es decir

$$K(z) = \theta(z) \exp(\beta z) \quad (29)$$

que hace  $K^{-1}(J) = J - \beta$ , con lo que

$$A^n(z) = g^{2n} \mathcal{L}^{-1}[k^n(J)] = \theta(z) \frac{(g^2 z)^n}{n!} \exp(\beta z) \quad (30)$$

$$A(z) = \mathcal{L}^{-1}[(J - \beta - g^2)^{-1}] = \theta(z) \exp((\beta + g^2)z)$$

Es decir que se obtiene un sólo polo de salida. En forma más general es fácil ver que con el kernel (29) se obtiene el mismo número de polos de salida que de entrada. Esto es, sin embargo, una consecuencia de la sencillez del kernel utilizado. Por ejemplo para

$$K(z) = \theta(z) (2 \operatorname{sh} z)^\beta \quad (31)$$

es

$$k(J) = \frac{1}{2} B\left(\frac{J-\beta}{2}, 1+\beta\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{J-\beta}{2}\right) \Gamma(1+\beta)}{2 \Gamma\left(\frac{J+\beta}{2} + 1\right)} \quad (31)$$

y para

$$K(z) = \theta(z) (2 \operatorname{ch} z)^\beta \quad (32)$$

es

$$k(J) = \frac{1}{J-\beta} {}_2F_1\left(-\beta, \frac{J-\beta}{2}; \frac{J-\beta}{2} + 1; -1\right) \quad (34)$$

los que al iterarse producen un número infinito de polos. Lo mis-

no ocurre, como se muestra más abajo, cuando en (25) es  $\bar{\Theta}(z-y_1-y_2) \neq \Theta(z)$ .

Volviendo a la solución (30), es el espectro inclusivo es rectangular

$$\rho = \frac{1}{\sigma_{ab}(y)} \frac{d\sigma_{ab}}{dy_c} = g^2 \Theta(y_c - y_a - \bar{\epsilon}_a) \Theta(y_b - y_c - \bar{\epsilon}_b) \quad (35)$$

con lo que

$$\begin{aligned} \bar{n}(y) &= \int \rho dy_s = \frac{g^2}{A(y)} \frac{\partial A(y)}{\partial g^2} = g^2 \bar{y} \\ \overline{n(n-1)}(y) &= \frac{g^4}{A(y)} \frac{\partial^2 A(y)}{\partial (g^2)^2} = (g^2 \bar{y})^2 \end{aligned} \quad (36)$$

$$\overline{n(n-1)\dots(n-k)}(y) = (g^2 \bar{y})^{k+1}$$

$$\bar{y} = y - \bar{\epsilon}_a - \bar{\epsilon}_b$$

La constancia de  $\rho$  es un resultado que esperamos sea cierto en la zona de pionización. Pero en (35)  $\rho$  es constante hasta los dos extremos (zonas de fragmentación) donde tiene una terminación muy abrupta, definitivamente en desacuerdo con los datos experimentales. La distribución de multiplicidades tipo Poisson (30 y 36) tampoco es totalmente correcta desde el punto de vista experimental.

Estos problemas provienen de utilizar un escalón mucho más abrupto que el de la ecuación (24). Para mejorar la aproximación, primero suavizamos y luego desplazamos al escalón.

Para

$$K(z) = \Theta(z) (1 - \exp(-z/a)) \exp(\beta z) \quad (37)$$

es  $k^{-1}(J) = (J - \beta)(a(J - \beta) + 1)$ , con lo que

$$A(z) = (1 + 4ag^2)^{-1/2} 2 \operatorname{Sh}[\sqrt{1 + 4ag^2} z/2a] \exp[(\beta - 1/2a)z] \quad (38)$$

lo que hace

$$g = N \frac{2 \operatorname{sh} [\gamma(y_c - y_a - \bar{e}_a)] \operatorname{sh} [\gamma(y_b - y_c - \bar{e}_b)]}{\operatorname{sh} [\gamma \bar{y}]}$$

$$\gamma = (1 + 4a g^2)^{1/2} / 2a$$

$$N = g^2 / (1 + 4a g^2)^{1/2} \tag{59}$$

$$\pi(y) = \frac{N}{\gamma} [\gamma \bar{y} \operatorname{cth} \gamma \bar{y} - 1] \rightarrow N(\bar{y} - 1/\gamma)$$

$$\overline{n(n-1)}(y) = \left(\frac{N}{\gamma}\right)^2 [(\gamma \bar{y})^2 - 3(\gamma \bar{y}) \operatorname{cth}(\gamma \bar{y}) + 3] \rightarrow N^2 [\bar{y}^2 - 3\bar{y}/\gamma + 3 / \gamma^2]$$

La distribución de multiplicidades no es más tipo Poisson. Por ejemplo calculamos

$$f_2 = \overline{n(n-1)} - \bar{n}^2 = - (N/\gamma)^2 [(\gamma \bar{y})^2 \operatorname{coth} \gamma \bar{y} + \gamma \bar{y} \operatorname{cth} \gamma \bar{y} - 2] \tag{40}$$

$$\sim - (N/\gamma) \bar{n} \rightarrow \infty,$$

y observamos que en cambio  $f_2$  es idénticamente nulo para una distribución tipo Poisson.

En forma general, en el modelo KP los momentos

$$g_k = \frac{\overline{n(n-1) \dots (n-k+1)}}{k!} \cong \int p(a+b \rightarrow 1 + \dots + k + X) d^k y \tag{41}$$

satisfacen asintóticamente la relación (que es exacta para una distribución tipo Poisson)  $g_k \cong (g_1)^k$ , ya que la principal contribución a la integral (41) proviene de la meseta de la zona de pionización; pero la parte no asintótica de  $g_k$  es del orden de  $(\log g_1)^{k-1}$  por lo que en diferencias del tipo (40) se observan grandes desviaciones de la ley de Poisson.

El crecimiento de  $A(z)$  en (38) es más suave que el originado por el kernel (29), pero aún es demasiado abrupto. Utilizando un escalón más suave

$$K(z) = \Theta(z) (1 - \exp(-z/a)(1+z/a)) \exp(\beta z) \quad (42)$$

$$K^{-1}(J) = (J-\beta) (a(J-\beta) + 1)^2$$

el polo dominante producido es real y hay dos polos complejos conjugados

$$J_1 = \beta + (\lambda_+ + \lambda_- - 2/3) / a$$

$$J_{2,3} = J_R \pm i J_I = \beta + (\lambda_+ + \lambda_- - 4/3 \pm i(\lambda_+ - \lambda_-)\sqrt{3}) / (2a) \quad (43)$$

donde

$$\lambda_{\pm} = \sqrt[3]{\eta \pm \sqrt{\eta^2 - (\frac{1}{27})^2}} \quad \eta = \frac{1}{27} + \frac{ag^2}{2} \quad (44)$$

Definiendo

$$\gamma = \frac{J_I}{J_1 - J_R} = \sqrt{3} (\lambda_+ - \lambda_-) / (\lambda_+ + \lambda_-) \leq \sqrt{3} \quad (45)$$

$$\bar{z} = (J_1 - J_R)z = (\lambda_+ + \lambda_-)z / 2a$$

tenemos

$$A(z) = (1 + \gamma^2)^{-1} \exp(J_1 z) [1 - \exp(-\bar{z}) (\cos(\gamma \bar{z}) + \sin(\gamma \bar{z}) / \gamma)] \quad (46)$$

que tiene un crecimiento más suave que (32) pero aún es algo empinado.

Si en cambio utilizamos un kernel con un escalón más suave que el de (24),

$$K(z) = \exp(\beta z) / (1 + \exp(-kz)) \quad (47)$$

y hacemos la aproximación de integrar en (15) desde  $-\infty$  a  $-\infty$ , obtenemos

tenemos

$$A(z) = \sec(\gamma\pi) \exp(\beta z) [\exp(\gamma k z) - \exp((1+\gamma)kz)] / [1 - \exp(-2kz)]$$

$$\bar{n}(\gamma) = k \frac{\operatorname{tg}(\pi\gamma)}{\pi} \bar{\gamma} \operatorname{cth}[(\gamma + 1/2)k\bar{\gamma}] + [\operatorname{tg}(\pi\gamma)]^2 \quad (48)$$

donde

$$g^2 = k \frac{\sin \pi \delta}{\pi} \quad (49)$$

El crecimiento de  $A(z)$  es ahora más suave que el de los datos experimentales. Del análisis de las distribuciones producidas por los tres escalones estudiados, se desprende que con el kernel (24) se tiene que poder hacer un ajuste muy bueno del espectro experimental de fragmentación.

Un detalle interesante con el kernel (47) es que no existe solución de la ecuación integral para valores de  $g^2$  mayores que  $k/\pi$ . Este tipo de restricciones aparecen siempre cuando  $K(z)$  no es idénticamente nulo para  $z$  negativo.

Para lograr una mejor aproximación del escalón en (24), no sólo debemos suavizar el escalón en (29) sino también desplazarlo ya que al variar  $b$  en (24) se obtiene el mismo escalón pero desplazado. Si para cualquier kernel de los descriptos hacemos

$$K(z) \rightarrow K(z-\delta) \quad (50)$$

se obtiene

$$k(J) \rightarrow k(J) \exp(-J\delta) \quad (51)$$

lo que produce la aparición de infinitos polos más.

Por ejemplo para

$$K(z) = \Theta(z-\delta) \exp(\beta z) \quad (52)$$

tenemos

$$\begin{aligned} A(z) &= \exp(\beta z) \sum_{n=0}^{\infty} g^{2n} \Theta(z-(n+1)\delta) [z-(n+1)\delta]^n / n! \\ &\sim \exp(\beta z) \sum_i \exp(x_i(z-\delta)) / (1+\delta x_i) \end{aligned} \quad (53)$$

donde  $x_1$  son las soluciones (la dominante es real y las infinitas restantes son complejas) de

$$g^2 = x \exp(\delta x) \quad (54)$$

Como se muestra en la próxima sección, para modelos más realistas se necesita considerar la posibilidad de intercambiar más canales ( $N > 1$ ) y producir más tipos de partículas ( $M > 1$ ), con lo que la dimensión  $N \cdot M$  de la ecuación integral (18) es mayor que uno.

Al aumentar el número de clases de partículas producidas en vértices internos de la cadena MP no aumenta el número de dimensiones de la ecuación integral si se utilizan propagadores del tipo

$$K_{ij, i'j'}(z) = \bar{K}_j(z - \eta_i - \eta_{i'}) \quad (55)$$

En el espacio transformado es

$$k_{ij, i'j'}(J) = \bar{K}_j(J) \exp[-J(\eta_i + \eta_{i'})] \quad (56)$$

de manera que definiendo

$$g^2_{ij, i'j'} = \bar{g}^2_{jj'}(J) \exp[2J\eta_i] \quad (57)$$

$$\bar{g}^2_{jj'}(J) = \sum_{i=1}^M \bar{g}^2_{jj'}(J)$$

$$a_{ij, i'j'}(J) = \bar{a}_{jj'}(J) \exp(-J(\eta_i + \eta_{i'}))$$

se obtiene la ecuación

$$\bar{a}_{jj'}(J) = \bar{K}_j(J) \delta_{jj'} + \sum_{j''=1}^N \bar{K}_j(J) \bar{g}^2_{jj''}(J) \bar{a}_{j''j'}(J) \quad (58)$$

es decir

$$\bar{a} = \bar{K} + \bar{K} \bar{g}^2 \bar{a} = [(\bar{K})^{-1} - \bar{g}^2]^{-1} \quad (59)$$

En función de  $z$  las ecuaciones (57) y (59) tienen la forma

$$(60)$$



$$\bar{g}_{jj}^{2i}(z) = g_{i'j, i'j}^2 \delta(z - 2\eta_{i'})$$

$$A_{ij, i'j'}(z) = \bar{A}_{jj'}(z - \eta_{i'} - \eta_{j'}) \quad (60)$$

$$\bar{A}(z) = \bar{K}(z) + \int \bar{K}(z_1) \bar{g}^2(z_2) A(z_3) \delta(z - z_1 - z_2 - z_3) dz_1 dz_2 dz_3,$$

donde  $\bar{A}$  y  $\bar{g}^2$  son matrices simétricas y  $\bar{K}$  es una matriz diagonal en un espacio de  $N$  dimensiones ( $N=L/M < L$ ).

Las complicaciones provenientes de aumentar el número de canales ( $N > 1$ ) pueden reducirse aprovechando el hecho de que en la suma de cadenas MP o, en forma equivalente, en la ecuación integral, se conservan los números cuánticos en el canal  $t$ . De manera que utilizando una base de canales con buenos números cuánticos en el canal  $t$  se obtienen varias ecuaciones desacopladas de dimensiones iguales al número de canales con los mismos números cuánticos. La matriz simétrica  $\bar{g}^2 = \sum \bar{g}^{2i}$  conecta canales con números cuánticos diferentes. En cambio las matrices  $\bar{g}^{2i}$  correspondientes a la emisión de la partícula  $e_i$  no son necesariamente simétricas y pueden conectar canales con diferentes números cuánticos.

En la próxima sección necesitamos el caso  $N=2$ , que desarrollamos a continuación. En el espacio transformado es

$$\bar{a}(J) = \begin{pmatrix} f_1(J) & -\bar{g}_{12}^2(J) \\ -\bar{g}_{12}^2(J) & f_2(J) \end{pmatrix} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} f_2 & \bar{g}_{12}^2 \\ \bar{g}_{12}^2 & f_1 \end{pmatrix} \quad (61)$$

donde

$$f_1(J) = [K_{11}(J)]^{-1} - \bar{g}_{11}^2(J) \quad (62)$$

$$D(J) = f_1(J) f_2(J) - \bar{g}_{12}^4(J)$$

Supongamos que se ajustan los parámetros de manera de generar dos polos reales en  $J=J_{\pm}$ , en la proximidad de estos polos es

$$\bar{a}(J) \cong \frac{\bar{C}_+^T \otimes C_+}{J-J_+} + \frac{\bar{C}_-^T \otimes \bar{C}_-}{J-J_-} \quad (63)$$

donde (a menos de un factor  $\pm i$  irrelevante)

$$\bar{C}_{\pm} = \left( \pm \sqrt{\frac{f_2(J_{\pm})}{D'(J_{\pm})}} \quad \sqrt{\frac{f_1(J_{\pm})}{D'(J_{\pm})}} \right) \quad (64)$$

La contribución de estos polos a la sección eficaz total y a inclusiva en la zona de pionización es

$$\sigma_{ab} \sim (2\text{sh}\gamma)^{-1} \sum_{i=+,-} \gamma_a^i \exp [J_i \gamma] \tilde{\gamma}_b^i \quad (65)$$

$$\frac{d\sigma_{ab}}{dy_c} \sim (2\text{sh}\gamma)^{-1} \sum_{i,i'} \gamma_a^i \exp (J_i (y_c - y_a)) \Gamma_{i,i'}^c \exp (J_{i'} (y_b - y_c)) \tilde{\gamma}_b^{i'}$$

donde

$$\gamma_a^r = \sum_{i=1}^M \exp [-J_r (\bar{E}_{a_i} + \eta_i)] \sum_j G_a^2 (\bar{E}_{a_i})_{ij} C_{r,j} = \sum_{i=1}^M \exp [-J_r (\bar{E}_{a_i} + \eta_i)] G_a^2 C_r^T \quad (66)$$

$$\Gamma_{rr'}^c = \exp [-\eta_c (J_r + J_{r'})] C_r g_c^2 C_{r'}^T$$

Tomemos por ejemplo el caso donde sólo se producen piones,

$\eta_{\pi} = 0$ , y se usa el kernel

$$\bar{K}_j(z) = \Theta(z) \exp \{ (2\alpha_j - 1) z \} \quad (67)$$

En este caso es  $f_j(J) = J - 2d_j + 1 - g_{jj}^2 = J - J_j$ , donde  $J_j$  son los polos generados por ambos canales cuando están desacoplados ( $g_{jj}^2 = 0$ ). El acoplamiento repela los polos a las posiciones

$$J_{\pm} = 1/2 (J_1 + J_2) \pm 1/2 \sqrt{(J_1 - J_2)^2 + 4 g_{12}^4} \quad (68)$$

Podemos suponer, sin perder generalidad, que  $J_1 \geq J_2$  con lo que

$J_+ \geq J_1 \geq J_2 \geq J_-$  y es

$$\gamma_a^\pm = \exp(-J_\pm \bar{\epsilon}_a) \left[ \pm G_{a,1}^2 \sqrt{\frac{1+\zeta}{2}} + G_{a,2}^2 \sqrt{\frac{1-\zeta}{2}} \right]$$

$$\Gamma_{\pm\pm}^\pi = \frac{1+\zeta}{2} g_{11}^2 \pi + \frac{1-\zeta}{2} g_{22}^2 \pi \pm \frac{1-\zeta^2}{2} \Delta J \quad (69)$$

$$\Gamma_{+-}^\pi = \Gamma_{-+}^\pi = 2(\alpha_1, -\alpha_2) g_{12}^2 \pi / \Delta J$$

donde

$$\Delta J = J_+ - J_-$$

$$\zeta = (J_1 - J_2) / \Delta J \leq 1. \quad (70)$$

### 5.- COMPARACION DEL MODELO CON LOS DATOS EXPERIMENTALES

El objeto de la presente sección es determinar el grado de compatibilidad de la versión aproximada del modelo MP desarrollada en la sección anterior, con las secciones eficaces inclusivas experimentales.

De las secciones eficaces totales nos interesa exclusivamente reproducir su comportamiento asintótico, por medio de expansiones tipo (2.20), ya que un ingrediente fundamental en la derivación del modelo fué la aproximación de ordenamiento fuerte, que sólo puede ser válida a altas energías.

Con respecto a las distribuciones inclusivas de una partícula, no sólo debemos tomar los datos a altas energías para comparar con el modelo, sino que tampoco podemos pretender, en general, reproducir ambos extremos del espectro  mediante la expresión (4.25) ya que todavía no hemos considerado la contribución de aquellos diagramas donde la partícula observada es emitida en un extremo de la cadena MP. En los casos donde esta última contribución es pequeña, sin embargo, se puede lograr un buen ajuste de todo el espectro con (4.16), lo que se discute cualitativamente en la sección anterior para el caso unicanal, y se hizo en particular en forma cuantitativa para el caso  $p+p \rightarrow \pi^+ + X$  a 50 GeV/c<sup>2</sup> <sup>2)</sup>.

Habiéndose mostrado capaz de reproducir los datos experimentales a energías del orden de los 50 GeV, una prueba importante para el modelo MP (y otros modelos) fué provista recientemente por los datos de  $\Delta\sigma(p+p \rightarrow e^+ + X)$  a energías muy superiores provenientes del CERN. Las características generales de estos datos son: en las se

nas de fragmentación se confirmó la hipótesis de escala (por lo que todos los modelos con esta propiedad que reproduzcan los espectros a energías inferiores lo siguen haciendo) y apareció la meseta en la zona de pionización, que no se había observado a más bajas energías.

Un dato importante que proveen estos experimentos es la dependencia energética del espectro de pionización. En esta sección comparamos esa dependencia con la expansión (2.35).

Consideremos cuatro tipos de modelos

MODELO	INTERCAMBIO		PARTICULAS PRODUCIDAS EN VERTICES INTERNOS					
	B	S						
1	0	0	$\pi$					
2	0 1	0 0	$\pi$	$N$	$\bar{N}$			
3	0 0	0 1	$\pi$	$K$	$\bar{K}$			
4	0 0 1	0 1 0	$\pi$	$N$	$\bar{N}$	$K$	$\bar{K}$	$\Lambda$

El modelo 1 nos sirve para una descripción sencilla de los procesos

$$\begin{aligned}
 a+b &\rightarrow X \\
 a+b &\rightarrow \pi + X
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

con  $ab=NN, NK$ . Para el caso  $ab=N\bar{N}$  hay una contribución considerable de los procesos de aniquilación

$$N\bar{N} \rightarrow \text{piones}
 \tag{2}$$

por lo que deberá ser descrito por un modelo tipo 2; el que además permite calcular los espectros

$$\begin{aligned} a+b &\rightarrow N+X \\ a+b &\rightarrow \bar{N}+X. \end{aligned} \quad (3)$$

En forma similar, en el caso  $ab \rightarrow N\bar{K}$  tenemos una contribución importante de los procesos

$$N+\bar{K} \rightarrow \Lambda + \text{piones} \quad (4)$$

por lo que deberá ser descripto por el modelo B. Este modelo, que no desarrollamos en detalle ya que es enteramente similar al 2, permite a su vez calcular los espectros

$$\begin{aligned} a+b &\rightarrow K+X \\ a+b &\rightarrow \bar{K}+X. \end{aligned} \quad (5)$$

Finalmente el modelo 4 tiene las propiedades del 2 y 3, permitiendo además calcular el espectro

$$a+b \rightarrow \Lambda + X. \quad (6)$$

Tomemos el caso  $ab \rightarrow NN$  que es sobre el que tenemos datos en un intervalo mayor de energías. Las secciones eficaces  $\sigma(NN \rightarrow X)$  son (por encima de  $\sim 2$  Gev) aproximadamente independientes de la carga de ambos nucleones, lo que significa que el par  $N\bar{N}$  se acopla *fundamentalmente* a polos de Regge isoescalares. De estos necesitamos por lo menos tres: uno con  $C=+$  y  $J \sim 1$  responsable del régimen asintótico  $\sigma^{\text{TOT}} \sim \text{const.}$  (el  $\mathbb{P}$ ) y dos con  $C=\pm$  y  $J \sim 5$  responsables el primero ( $\mathbb{P}'$ ) de que asintóticamente todas las secciones eficaces sean decrecientes y el segundo ( $\omega$ ) de la diferencia  $\sigma_{NN}^{\text{TOT}} - \sigma_{\bar{N}\bar{N}}^{\text{TOT}}$ .

De un ajuste <sup>(1)</sup> de los datos de  $\sigma_{PP}^{\text{TOT}}$  y  $\sigma_{P\bar{P}}^{\text{TOT}}$  por encima de

(1) Todos los ajustes mencionados se realizan encontrando el valor de los parámetros  $a_i$  que minimiza  $\chi^2$ . El error estimado de estos parámetros es  $\epsilon_{a_i}^2 = H_{ii}^{-1}$ , donde  $H_{ij} = \partial^2 \chi^2 / \partial a_i \partial a_j$ . Si  $\chi^2$  resulta mayor que el número de grados de libertad se incrementan los errores en un factor  $\sqrt{\chi^2 / n_{\text{dof}}}$ .

unos 5 Gev <sup>12)</sup> mediante las expresiones

$$\sigma(p^+ + p^{\pm} \rightarrow X) = A + B_{\pm} \exp(-1/2 Y) \quad (7)$$

resulta

$$\begin{aligned} A &= 36.83 \pm 1.4 && (\text{mb}) \\ B_+ &= 14.2 \pm 0.7 && (\text{mb}) \\ B_- &= 77.7 \pm 1.6 && (\text{mb}) \\ \chi^2 &= 83.7 && \text{para } n_{gl} = 75, \end{aligned} \quad (8)$$

con lo que en la expresión  $\sigma_{ab}^{TOT}(Y) \sim (2shY)^{-1} \sum \chi_a^r \exp(\pm r Y) \chi_b^r$  es (Los signos de los  $\chi$  son arbitrarios y los elegimos positivos)

$$\begin{aligned} \chi_N^R &= 6.069 \pm 0.012 \\ \chi_N^{R'} &= 6.78 \pm 0.06 \\ \chi_N^W &= 5.63 \pm 0.08 \end{aligned} \quad (9)$$

Por otra parte del ajuste de las secciones eficaces  $d\sigma_{pp}^{\pi^{\pm}}(0)/dy^*$  <sup>13)</sup> mediante las expresiones  $A + B_{\pm} \exp(-kY)$  resulta

k	A	B+	B-	$\chi^2$	$n_{gl}$
$\frac{1}{2}$	$29.0 \pm 0.9$	$-33.8 \pm 2.8$	$-43.2 \pm 2.2$	26.2	10
$\frac{1}{4}$	$28.0 \pm 0.7$	$-31.2 \pm 2.2$	$-39.2 \pm 2.0$	13.5	9
$\frac{1}{8}$	$23.6 \pm 0.5$	$-48.7 \pm 4.2$	$-68.6 \pm 2.8$	17.9	10
1	$19.8 \pm 1.1$	$-144. \pm 53.$	$-202. \pm 24.$	140.	10

donde los dos valores para  $k = \frac{1}{2}$  corresponden a incluir o no un dato a 6.6 Gev/c.

En este caso los datos experimentales son pocos y los errores relativamente grandes (en algunos casos debido a que han sido obtenidos de la literatura en forma más o menos indirecta) razón por la que aunque podemos excluir el valor  $k=1$ , no podemos decidir entre  $k=\frac{1}{2}$  y  $k=\frac{1}{4}$ .

Si en la expansión

$$d\sigma_{ab}^c / dy \sim (2\sinh Y)^{-1} \sum_{r,r'} \gamma_a^r \exp(\gamma_r (y-y_a)) \Gamma_{rr'}^c \exp(\gamma_{r'} (y_b-y)) \tilde{\gamma}_b^r \quad (11)$$

hacemos  $J_R = 1$   $J_F = 5$  obtenemos

$$d\sigma_{pp}^c(0) / dy^* \sim (\gamma_N^R)^2 \left[ \Gamma_{RR}^c + \exp(-1/4 Y) \sum_M 2r^M \Gamma_{RM}^c + \right. \\ \left. + \exp(-1/2 Y) \sum_{MM'} r^M \Gamma_{MM'}^c \tilde{r}^{M'} \right] \quad (12)$$

con

$$r^M = \gamma_N^M / \gamma_N^R \\ \tilde{r}^M = \tilde{\gamma}_N^M / \gamma_N^R. \quad (13)$$

El término con  $k=$  domina sobre el de  $k=$  a partir de un cierto valor de  $Y$  que depende de los coeficientes respectivos. Si consideramos por simplicidad que se puede despreciar el término con  $k=$  por encima de unos 12 Gev, tenemos con (10)

$$\Gamma_{RR}^\pi = 3 \Gamma_{RR}^{\pi^i} = 2.28 \pm .06 \quad (i=t, 0, -) \\ \Gamma_{RR'}^\pi = 3 \Gamma_{RR'}^{\pi^i} = 1.28 \pm .06 \quad (14)$$

$$r^p \Gamma_{R_p}^\pi = \pm 2 r^p \Gamma_{R_p}^{\pi^i} = .11 \pm .04$$

veamos bajo que condiciones podemos reproducir estos números con el modelo II.

### Modelo I

La forma más sencilla es con un sólo canal intercambiado, que puede interpretarse como un promedio sobre los pares  $\pi\pi$  acoplados al vacío. El kernel  $K(z)$  tiene la forma

$$K(z) = \bar{\Theta}(z-2\eta_\pi) \exp(\beta z) \quad (15)$$

donde  $\beta = 2\alpha_\pi - 1$  se fija en algún valor entre 0 y -1 y  $\bar{\Theta}(x)$  es idéntico



ticamente nula para  $x$  negativo.

Para  $\eta_{\pi} \geq 0$  la ecuación integral puede ser resuelta empleando transformadas de Laplace (4.18). Los polos de Regge están dados por las raíces de

$$k^{-1}(J) - g^2 = 0 \quad (16)$$

donde

$$k(J) = \int_{2\eta_{\pi}}^{\infty} \bar{\Theta}(z - 2\eta_{\pi}) \exp(-(J-\beta)z) dz \quad (17)$$

y el vértice  $\Gamma_{RR}^{\pi}$  está dado por

$$\Gamma_{RR}^{\pi} = -k(J_R) / k'(J_R) \quad (18)$$

El caso  $\eta_{\pi} < 0$  requiere un tratamiento más cuidadoso: la ecuación integral se debe resolver empleando transformadas de Fourier, habiendo previamente multiplicado ambos miembros por  $\exp(-zW)$  con  $W$  suficientemente grande de manera que estas transformadas existan. Una vez hecho esto se puede ver que los polos de Regge están dados por las mismas ecuaciones (16) (17) y (18) que en el caso  $\eta_{\pi} \geq 0$ , con la condición adicional de que  $\text{Re}(J) < W$ .

De las ecuaciones (16) (17) y (18) se pueden obtener cuatro propiedades generales del caso unicanal:

i) Hay un sólo polo real con  $J > \beta$ ; ya que para  $J$  real mayor que  $\beta$  es  $k''(J) > 0$ .

De manera que con  $\beta \leq 0$ , no se puede generar el  $R'$

ii) El polo dominante (con mayor  $\text{Re } J$ ) es real; ya que para  $\text{Re } J > \beta$  es  $|k(J)| \leq k(\text{Re } J)$ .

iii) Para  $\eta_{\pi} < 0$  todos los polos satisfacen  $\text{Re } J < R$ , donde  $k'(R) = 0$ . Para valores de  $g^2$  mayores que  $1/k(R)$  no existe solución de la ecuación integral.

iv) El vértice  $\Gamma_{RR}^{\pi}$  satisface

$$\begin{aligned} \Gamma_{RR}^{\pi} &= J_R - \beta && \text{para } \eta_{\pi} = 0, \bar{\Theta}'(z) = 0 \quad (z > 0) \\ \Gamma_{RR}^{\pi} &< J_R - \beta && \text{para } \eta_{\pi} > 0, \bar{\Theta}' \geq 0 \quad \text{ó } \eta_{\pi} > 0, \bar{\Theta}' > 0 \\ \Gamma_{RR}^{\pi} &> J_R - \beta && \text{para } \eta_{\pi} < 0, \bar{\Theta}' \leq 0 \quad \text{ó } \eta_{\pi} < 0, \bar{\Theta}' < 0 \end{aligned} \quad (19)$$

De manera que para lograr un valor de  $\Gamma_{RR}^{\pi}$  de 2.28 con un escalón  $\bar{\Theta}(z)$  creciente es necesario utilizar  $\eta_{\pi} \leq 0$ . Aparte de esta restricción es claro que se puede ajustar el valor de  $\Gamma_{RR}^{\pi}$  con cualquier kernel.

Estudiamos ahora el caso bicanal para ver si se pueden reproducir las trayectorias (en  $v=0$ ) y los residuos del  $R$  y  $R'$ .

Del análisis del formalismo desarrollado en la sección anterior se desprende con un modelo bicanal con parámetros totalmente arbitrarios se pueden reproducir prácticamente cualquier valor de los residuos y trayectorias de salida; pero no es este nuestro objetivo sino ver si los valores experimentales de estos parámetros pueden ser obtenidos con modelos más o menos realistas.

Un modelo bicanal propuesto en la literatura <sup>14) es el que se obtiene agregando la</sup> posibilidad de difracción (intercambio de Pomeron) en la amplitud unicanal descrita más arriba. Con los canales  $PP$  y  $MM$  es

$$g^{2\pi} = \begin{pmatrix} 0 & g_{PM}^2 \\ g_{PM}^2 & g_{MM}^2 \end{pmatrix} \quad K(z) = \begin{pmatrix} K_P(z) & 0 \\ 0 & K_M(z) \end{pmatrix} \quad (20)$$

donde

$$K_i(z) = \bar{\Theta}(z - 2\eta_{\pi}) \exp(\beta_i z) \quad i = P, M. \quad (21)$$

En el espacio transformado tenemos

$$a(J) = (K' - g^{2\pi})^{-1} = N(J) / D(J)$$

$$N = \begin{pmatrix} K'_M(J) - g_{MM}^2 & g_{MP}^2 \\ g_{MP}^2 & K'_P(J) \end{pmatrix}, \quad D = K'_P(J) (K'_M(J) - g_{MM}^2) - g_{MP}^4 \quad (22)$$

de manera que para obtener dos polos de salida en  $J = J_{\pm}$  debemos hacer

$$g_{mm}^2 = \frac{P_+ M_+ - P_- M_-}{P_+ - P_-}$$

$$g_{MP}^4 = \frac{P_+ P_- (M_- - M_+)}{P_+ - P_-} \quad (23)$$

donde

$$P_{\pm} = K_P^{-1} (J_{\pm})$$

$$M_{\pm} = K_M^{-1} (J_{\pm}) \quad (24)$$

Los residuos, externos e internos, de Regge están dados por

$$\gamma_a^{\pm} = G_a^2 \cdot C_{\pm} \exp(-J_{\pm} (\epsilon_a + \gamma_{a1} - \gamma_{a\pi}))$$

$$\Gamma_{ij}^{\pi} = C_i g^2 C_j^T \quad (25)$$

Los vectores  $C_{\pm}$  están definidos a menos de un factor  $\pm 1$  común a todas las componentes. Esto implica que el signo de los residuos (25) no está unívocamente definido. Las secciones eficaces, sin embargo, dependen de expresiones tipo  $\gamma_a^i \tilde{\gamma}_b^j$  o  $\gamma_a^i \Gamma_{ij} \tilde{\gamma}_b^j$  cuyo signo está bien definido. Nosotros elegimos aquí

$$C_{\pm} = \Delta_{\pm}^{-1/2} (g_{MP}^2 \quad P_{\pm}) \quad (26)$$

con  $\Delta_{\pm} = P_{\pm} D'(J_{\pm}) \equiv P_{\pm}^2 g_{MP}^4 + P_{\pm}^2 M_{\pm}^2$ , con lo que

$$\Gamma_{ij} = \Delta_i^{-1/2} \Delta_j^{-1/2} [g_{MP}^4 (P_i + P_j) + g_{mm}^2 P_i P_j], \quad (27)$$

es decir

$$\Gamma_{++} = P_+^2 \Delta_+^{-1} (P_+ - P_-)^{-1} (P_+ M_+ - 2P_+ M_+ + P_- M_-) > 0$$

$$\Gamma_{+-} = P_+ P_- \Delta_+^{-1/2} \Delta_-^{-1/2} (P_+ - P_-)^{-1} (P_+ M_- - P_- M_+) \quad (28)$$

$$\Gamma_{--} = P_-^2 \Delta_-^{-1} (P_+ - P_-)^{-1} (2P_+ M_- - P_+ M_+ - P_- M_-)$$

Los vértices externos  $G_a^2$  son elegidos de manera de reproducir

el valor experimental de  $\chi_a^+$ , haciendo

$$G_{a,N}^2 / G_{a,P}^2 = g_{\pi p}^2 (\sqrt{\Delta_+} - \sqrt{\Delta_-}) / (r_a P_+ \sqrt{\Delta_-} - P_- \sqrt{\Delta_+}) \quad (29)$$

donde

$$r_a = \frac{\chi_a^{P'}}{\chi_a^P} \exp[(J_{P'} - J_P)(E_a + \eta_a - \eta_\pi)] \approx \frac{\chi_a^{P'}}{\chi_a^P} \left( \frac{\omega_a^2}{m_a \omega_\pi} \right)^{J_{P'} - J_P} \quad (30)$$

Para  $a = \pi$  es  $r \sim 1$  para  $\langle p_\perp \rangle \sim 0.350$  GeV/c.

Realizando un ajuste de  $\eta_\pi$  y  $a$  para escalones del tipo

$$\bar{\Theta}(z) = \Theta(z) (1 - \exp(-z/a) \sum_{n=0}^K (z/a)^n / n!) \dots \quad (31)$$

se pueden reproducir los valores (14) de  $\Gamma_{\pi\pi}^+$  y  $\Gamma_{\pi\pi}^-$  con  $\beta_M \sim 0$  y  $0.9 < \beta_p < 1$ , siempre que se permitan valores negativos de  $\eta_\pi$ . En los casos estudiados, para reproducir el cociente  $\chi_N^P / \chi_N^{P'}$  (9) se requieren valores grandes de  $G_{N,P}^2 / G_{N,N}^2$  (29).

### Modelo B

El paso siguiente en el estudio de las reacciones originadas por el choque de  $\pi\pi$  y  $\pi\bar{N}$  es el considerar intercambios con carga bariónica. Estos son necesarios para poder describir los procesos de aniquilamiento de  $\pi\bar{N}$ , la producción de nucleones y el exceso de  $\pi^+$  sobre  $\pi^-$  en ambos extremos del espectro longitudinal  $pp \rightarrow \pi^+ X$ . 15)

En la discusión del modelo 1 usamos canales ( $\pi\pi$  y  $\pi\bar{N}$ ) con los números cuánticos del  $\pi$  ( $I^G = 0^{++}$ ). Si se tienen en cuenta los números cuánticos del  $\pi$  de los mesones intercambiados, se pueden generar polos con diferentes números cuánticos. Por ejemplo un par de mesones isovectoriales contribuyen a la formación de polos isoescales ( $\rho, \rho', \omega$ ), isovectoriales ( $\rho, A_2$ , etc.) e isotensoriales los

que resultan con trayectorias más bajas y residuos más pequeños que los anteriores.

Este último proyecto es más ambicioso a la par que más laborioso y cálculos hechos con propagadores muy sencillos permiten pensar que pueda tener éxito.

Aquí, sin embargo, por simplicidad, seguiremos considerando los pares de reggeones acoplados a isoscalares y utilizaremos el par  $B\bar{B}$  para generar polos con  $I^G = 0^\pm$ .

Como hay tres canales intercambiados ( $MM, B\bar{B}, \bar{B}B$ ) y tres clases de partículas producidas ( $\pi, \bar{B}, \bar{B}$ ), la ecuación integral tiene en principio nueve dimensiones. Las complicaciones provenientes del hecho de que hay diferentes tipos de partículas producidas se pueden obviar en la forma explicada en la ecuación (4.35) y siguientes, es decir produciendo un desplazamiento  $\delta \sim \ln \frac{\omega_B}{\omega_\pi}$  por cada nucleón o antinucleón emitido haciendo

$$\begin{aligned} g^{2\pi} &\rightarrow g^{2\pi} \\ g^{2B} &\rightarrow g^{2B} \exp(-\delta J) \\ g^{2\bar{B}} &\rightarrow g^{2\bar{B}} \exp(-\delta J) \end{aligned} \quad (32)$$

De esta forma nos queda una ecuación integral en tres dimensiones que podemos escribir como dos ecuaciones desacopladas de una (C -) y dos (C +) dimensiones respectivamente, trabajando en la base de canales

$$\begin{aligned} \begin{array}{l} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} &= \text{---} \\ \begin{array}{l} \text{---} \\ \text{---} \end{array} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \begin{array}{c} \rightarrow \\ \leftarrow \end{array} + \begin{array}{c} \leftarrow \\ \rightarrow \end{array} \right] \} \quad C + \\ \begin{array}{l} \text{---} \\ \text{---} \end{array} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \begin{array}{c} \rightarrow \\ \leftarrow \end{array} - \begin{array}{c} \leftarrow \\ \rightarrow \end{array} \right] \} \quad C - \end{aligned} \quad (33)$$

En esta base, los vértices externos e internos y el kernel están dados por

$$G_N^2 = (\tilde{G}_N^2)^T = \begin{pmatrix} G_{N,M}^2 & \frac{1}{\sqrt{2}} G_{N,B}^2 & -\frac{1}{\sqrt{2}} G_{N,B}^2 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{G}_N^2 = (G_N^2)^T = \begin{pmatrix} G_{N,M}^2 & \frac{1}{\sqrt{2}} G_{N,B}^2 & \frac{1}{\sqrt{2}} G_{N,B}^2 \end{pmatrix}$$

$$K^{-1}(J) = \begin{pmatrix} M(J) & 0 & 0 \\ 0 & B(J) & 0 \\ 0 & 0 & B(J) \end{pmatrix} \quad g^{2\pi} = \begin{pmatrix} g_{\pi\pi}^2 & 0 & 0 \\ 0 & g_{\pi B}^2 & 0 \\ 0 & 0 & g_{BB}^2 \end{pmatrix}$$

(34)

$$g^{2B} = \frac{g_{\pi B}^2}{\sqrt{2}} \exp(-\delta J) \begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad g^{2\bar{B}} = \frac{g_{\pi B}^2}{\sqrt{2}} \exp(-\delta J) \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde  $M(J) = k^{-1}(J)_{\pi\pi, \pi\pi}$  y  $B(J) = k^{-1}(J)_{\pi B, \pi B}$ .

La iteración de los mesones únicamente produce polos con  $I^G = 0^+$  en las raíces de  $\Delta(J) = M(J) - g_{\pi\pi}^2$ ; el dominante es real y está en  $J = J_2$ . La iteración de los bariones, por otra parte, produce un par de polos degenerados con  $I^G = 0^+$  por cada raíz de  $B(J) = g_{\pi B}^2$ ; el par dominante es real y está en  $J = J_2$ .

El acoplamiento  $\sqrt{2} g_{\pi B}^2 \exp(-\delta J)$  entre ambos tipos de intercambio rompe esta degeneración al correr los polos con  $I^G = 0$  a las posiciones de las raíces de  $\Delta(J) = M \cdot B - 2g_{\pi B}^4 \exp(-2\delta J)$ . En particular los polos en  $J_1$  y  $J_2$  se repelen a las posiciones  $J_+ = J_2$  y  $J_- = J_1$ . Como la contribución de los polos secundarios a  $\sigma(pp \rightarrow \lambda)$  es pequeña tiene que haber aproximadamente degeneración de intercambio entre  $\mathbb{R}'$  y  $\omega$ . Dentro del marco de este modelo para lograr  $J_2 \sim J_\omega$  se necesita que  $g_{\pi B}^2$  sea pequeño con lo que la producción de pares  $B\bar{B}$  tiene que ser pequeña, lo que es observado experimentalmente.

En resumen tenemos

$$\hat{A}(J_1) = A(J_1) - g_{NM}^2 = 0$$

$$\hat{B}(J_2) = B(J_2) - g_{NB}^2 = 0$$

(35)

$$\hat{A}(J_{\pm}) \hat{B}(J_{\pm}) - 2g_{BM}^4 \exp(-2\delta J_{\pm}) = 0$$

con  $J_+ = J_E \geq J_1$ ;  $J_- = J_{E'} \leq J_2 = J_{\omega}$ .

Para  $Y \gg 1$  es, a menos  $O(s^{-1})$ ,

$$\sigma(NN \rightarrow X) = \sigma(\bar{N}\bar{N} \rightarrow X) \sim \sigma_E + \sigma_{E'} - \sigma_{\omega} \quad (36)$$

$$\sigma(N\bar{N} \rightarrow X) = \sigma(\bar{N}N \rightarrow X) \sim \sigma_E + \sigma_{E'} + \sigma_{\omega}$$

donde

$$\sigma_i = (2 \operatorname{sh} Y)^{-1} \exp [J_i Y] (\gamma_N^i)^2 \quad (37)$$

Para las secciones eficaces inclusivas, como sólo tenemos los inescalares, definimos

$$d\sigma_{ab}^c = d\sigma(a+b \rightarrow c+X) = \sum_{i=1}^{2J_c+1} d\sigma(a+b \rightarrow c_i+X) \quad (38)$$

las que resultan para  $Y \gg 1$  y  $|y^*| \ll 1/Y$ , a menos de  $O(s^{-1})$ ,

$$d\sigma_{NN}^{\pi} / dy^* = d\sigma_{\bar{N}\bar{N}}^{\pi} / dy^* = d\sigma_{N\bar{N}}^{\pi} / dy^* = d\sigma_{\bar{N}N}^{\pi} / dy^* = \binom{\pi}{E E} + \binom{\pi}{E E'} 2 \operatorname{ch} [\delta_{EE'} Y^*]$$

$$d\sigma_{NN}^N / dy^* = d\sigma_{\bar{N}\bar{N}}^N / dy^* = \binom{N}{E E} + \binom{N}{E E'} 2 \operatorname{ch} [\delta_{EE'} Y^*] + \binom{N}{E \omega} 2 \operatorname{ch} [\delta_{E\omega} Y^*]$$

$$d\sigma_{N\bar{N}}^{\bar{N}} / dy^* = d\sigma_{\bar{N}N}^{\bar{N}} / dy^* = \quad " \quad + \quad " \quad - \quad " \quad (39)$$

$$d\sigma_{\bar{N}\bar{N}}^N / dy^* = d\sigma_{N\bar{N}}^N / dy^* = \quad " \quad + \quad " \quad + \binom{N}{E \omega} 2 \operatorname{sh} [\delta_{E\omega} Y^*]$$

$$d\sigma_{N\bar{N}}^N / dy^* = d\sigma_{\bar{N}\bar{N}}^{\bar{N}} / dy^* = \quad " \quad + \quad " \quad - \quad " \quad ,$$

donde  $\delta_{ij} = J_i - J_j$  y

$$\binom{c}{i j} = \exp [(J_i + J_j) Y/2] (2 \operatorname{sh} Y)^{-1} \gamma_N^i \Gamma_{ij}^c \gamma_N^j \quad (40)$$

Los residuos de Regge están dados por

$$\chi_N^\pm = G_{N,M}^2 (\hat{B}(J_\pm) / \Delta'(J_\pm))^{1/2} \exp(J_\pm (\epsilon_N^\pm + \delta)) \pm G_{N,B}^2 (\hat{M}(J_\pm) / 2\Delta'(J_\pm))^{1/2} \exp(J_\pm \epsilon_N^\pm)$$

$$\chi_N^\omega = G_{N,B}^2 (2\hat{B}(J_\omega))^{-1/2} \exp(J_\omega \epsilon_N^\omega)$$

$$\Gamma_{RR}^\pi = g_{HM}^2 \hat{B}(J_+) / \Delta'(J_+) + g_{BB}^2 \hat{M}(J_+) / \Delta'(J_+)$$

$$\Gamma_{RR'}^\pi = g_{HM}^2 (\hat{B}(J_+) \hat{B}(J_-) / \Delta'(J_+) \Delta'(J_-))^{1/2} - g_{BB}^2 (\hat{M}(J_+) \hat{M}(J_-) / \Delta'(J_+) \Delta'(J_-))^{1/2}$$

$$\Gamma_{RR}^B = g_{BM}^2 \exp[-2J_R \delta] (2\hat{B}(J_+) \hat{M}(J_+))^{1/2} / \Delta'(J_+)$$

(41)

$$\Gamma_{RR'}^B = g_{BM}^2 \exp[-(J_R + J_{R'}) \delta] \left[ (\hat{B}(J_+) \hat{M}(J_-) / \Delta'(J_-) \Delta'(J_+))^{1/2} - (\hat{B}(J_-) \hat{M}(J_+) / \Delta'(J_-) \Delta'(J_+))^{1/2} \right]$$

$$\Gamma_{R\omega}^N = g_{BM}^2 \exp[-(J_R + J_\omega) \delta] \left[ \hat{B}(J_+) / 2\Delta'(J_+) \hat{B}(J_\omega) \right]^{1/2}$$

Las expresiones (36) y (37) han sido comparadas con los datos experimentales en (7) a (9) y los datos de  $d\sigma_{pp}^{\pi^+}$  han sido discutidos de (10) a (14). Con respecto a  $d\sigma_{pp}^{\pi^+}(s) / dy^*$  la información experimental es mucho más escasa y tenemos solo tres datos para  $p$  y dos para  $\bar{p}$  obtenidos de la bibliografía en forma bastante indirecta. A 1.800 Gev se obtuvo un dato para  $p$  y uno para  $\bar{p}$  integrando analíticamente sobre  $d\vec{p}_\perp$  una expresión dada por los autores para un intervalo no muy grande de  $p_\perp$ ; a 30 Gev se obtuvo un dato de  $p$  en forma similar y a 19.8 Gev se obtuvo un dato para  $p$  y uno para  $\bar{p}$  integrando numéricamente, a partir de tablas dadas por los autores, sobre  $d\vec{p}_\perp$  para valores fijos de  $x$  entre  $\sim .13$  y  $\sim .52$  y luego se extrapola gráficamente a  $x=1$ .

Todo esto introduce bastante error en los cálculos. Por otra parte a nosotros nos interesa el comportamiento asintótico (39) y



y dada la gran variación del espectro de  $\bar{p}$  entre 19 y 1500 Gev, no se puede tomar muy seriamente expansiones asintóticas a energías del orden de los 19 Gev. Finalmente a 19 Gev puede haber una contribución apreciable a  $d\sigma_{pp}^p$  de los protones emitidos en ambos extremos de la cadena MP.

De todos modos, del ajuste de los cinco datos experimentales mediante las expresiones

$$d\sigma_{pp}^{p\pm}(0)/dy^* = A + B_{\pm} \exp(-kY) \quad (42)$$

resulta

k	A	B <sub>+</sub>	B <sub>-</sub>	$\chi^2$	n <sub>gl</sub>
$\frac{1}{2}$	3.18 ± .53	8.3 ± 3.9	-7.8 ± 1.3	.12	2
$\frac{1}{3}$	2.96 ± .47	51. ± 14.	-18.4 ± 5.0	3.34	2
1	2.58 ± .67	130 ± 156	-119 ± 27	8.9	2

(43)

Al igual que en el caso de los piones, la posibilidad k=1 puede excluirse. Si a título de hipótesis (dado lo relativo de estos ajustes) tomamos la expresión con k= $\frac{1}{2}$  como correcta, obtenemos

$$\begin{aligned} \Gamma_{\pi\pi}^N &= .17 \pm .03 \\ \Gamma_{\pi\omega}^N &= .006 \pm .05 \\ \Gamma_{\omega\omega}^N &= .24 \pm .06 \end{aligned} \quad (44)$$

Cálculos hechos con la expresiones (41) utilizando un kernel muy sencillo muestran que estos valores junto con (14) pueden ser reproducidos con el modelo en discusión. Este es solo una indicación aproximada de la bondad del modelo. Un cálculo más definitivo en este sentido es la reproducción de todo el espectro (no solo en  $x=0$ ), resolviendo exactamente la ecuación integral (no mediante expresiones asintóticas), pero esto exige facilidades de computación superiores a las actualmente disponibles.

Modelo 3

En el estudio de las reacciones originadas por el choque de  $K\bar{N}$  y  $\bar{K}N$  se encuentran ciertas similitudes con el caso  $\bar{K}N$  y  $K\bar{N}$ , por lo que en principio podrían describirse, en primera aproximación, con un modelo similar al 2 pero en donde se intercambia extrañeza en vez de número bariónico.<sup>18)</sup> En forma similar al modelo 2, la ausencia de secundarios en  $K^+$  requiere degeneración entre estos polos lo que se logra si el acoplamiento entre los canales de mesones no extraños y kaones es débil, lo que a su vez hace que la producción de pares  $K\bar{K}$  sea baja.

En realidad en el caso  $K^+N$ , a diferencia de  $K^+\bar{N}$ , el acoplamiento a polos de Regge isoescalares ( $\rho$  y  $A_2$ ) es apreciable, por lo que si no se suma sobre los estados de carga de las partículas incidentes y observadas, es necesario desarrollar la ecuación integral en el subespacio  $I_3=1$ . Los coeficientes de acoplamiento para  $I_3=1$  están relacionados con los mismos para  $I_3=0$  por el principio de conservación de isospín, de manera que para poder desarrollar las ecuaciones integrales para ambos valores de  $I_3$  es necesario conocer el valor de isospín de los mesones intercambiados. Si las partículas emitidas son piones, es entonces necesario intercambiar por lo menos dos clases de mesones no extraños (con paridad  $G=\pm 1$ ), lo que hace que la ecuación integral para  $I_3=0$  sea por lo menos de dimensión tres.

Las partículas  $\Lambda$  provenientes de la reacción parcialmente inclusiva  $\bar{K}^+N \rightarrow \Lambda + (\text{piones})$  se distribuyen fundamentalmente en el hemisferio del nucleón.<sup>19)</sup> Esto sugiere que la contribución de este

modelo (con intercambio de K) a este proceso es más importante que la del modelo 2 (con intercambio de B). La distribución experimental es sin embargo más ancha que la que podría corresponder a un  $\Lambda$  emitido en un extremo de la cadena MP; un modelo más apropiado para su descripción es el 4 que pasamos a discutir.

#### Modelo 4

En el modelo 1 no se intercambian kaones ni bariones y sirve fundamentalmente para describir el espectro de piones. En el modelo 2 se agrega la posibilidad de intercambio bariónico y permite describir además el espectro de nucleones; en forma similar en el modelo 3 se agrega el intercambio de extrañeza permitiendo describir el espectro de kaones. En el modelo 4 además de mesones no extraños intercambiamos kaones y bariones, lo que en principio debe permitirnos describir el espectro de piones, kaones, nucleones y  $\Lambda$ .

En forma muy vaga podemos decir que respecto de la de piones, las producciones de kaones, bariones y  $\Lambda$  son un factor  $g_{MK}^{VK}$  más bajas. Además debe incluirse el efecto del corrimiento del "umbral" de los propagadores  $K(B)$  que deprime la producción de partículas más pesadas.

El proyecto de ajustar todos estos espectros experimentales con este modelo es un problema bastante laborioso de cálculo numérico, que exige facilidades de computación de que actualmente no se dispone.

Dos consideraciones antes de terminar la discusión de este modelo: primera que el modelo así planteado tiene muchos grados de libertad dados por todos los parámetros utilizados. Esto se puede

reducir considerablemente exigiendo autoconsistencia entre los polos de entrada y salida, pero esto debe hacerse con una versión menos aproximada que la aquí desarrollada en la que se tenga en cuenta la dependencia en  $t$  de las trayectorias.

Segunda que para el caso de las secciones eficaces  $\sigma(a_1+b \rightarrow X)$  y  $\sigma(\bar{a}_1+b \rightarrow X)$  hay menos diagramas que contribuyen cuando el canal de entrada tiene números cuánticos exóticos (2.iii), con lo que esas secciones eficaces son menores que las correspondientes a números cuánticos no exóticos. Esto puede ser un principio de una explicación microscópica de la hipótesis "débil" de Harari-Freund. En este contexto, la hipótesis "fuerte" de Harari-Freund (es decir  $\sigma(\text{exótico} \rightarrow X) \sim \text{const.}$ ) es una consecuencia de la preeminencia de producción de piones que como ya vimos está asociada a la degeneración de intercambio entre los polos secundarios.

## 6.- MEJORAS AL MODELO

En el cálculo de las distribuciones inclusivas, sec. 4, se hacen dos grandes aproximaciones:

- a) Ignorar los momentos transversales.
- b) No considerar la contribución de las partículas emitidas en ambos extremos de la cadena MP.

Estas aproximaciones permiten escribir los espectros longitudinales inclusivos y las secciones eficaces totales en términos de la solución de una ecuación integral con una sola variable continua y en la que el término homogéneo es una convolución. Esto hace que se puedan calcular estas secciones eficaces en forma rápida y sencilla, condiciones importantes para poder realizar un ajuste de los datos experimentales con una computadora.

La aproximación (b) no afecta en general la parte central del espectro, como ya se mencionó en la sección anterior.

La forma en que se realizó la aproximación (a) fue fijar todos los momentos transversales de las partículas salientes en su valor medio, suponiendo que esto produce una dependencia de la amplitud de producción en las rapididades de las partículas, equivalente a la que se obtiene al integrar sobre estos momentos.

Para estudiar la dependencia de los espectros inclusivos en el momento transversal de la o las partículas detectadas, podemos regular la aproximación descrita en el párrafo anterior para todas las partículas salvo las observadas. Para hacer esto necesitamos estudiar la dependencia del kernel  $K_{1j,1'j}$  en los momentos transversales.

La ecuación (4.23) lleva aproximadamente a una dependencia de los  $t_i$  de la forma

$$t_i \approx -\omega_i \omega_{i+1} \exp(-z_i) - \vec{q}_i^2 \quad (1)$$

donde los  $\vec{q}_i = \sum_{j=0}^i \vec{p}_j$  son los momentos transversales transferidos. De manera que una amplitud que factoriza en funciones de los  $t_i$  es aproximadamente a un producto de funciones de  $(z_i, \vec{q}_{i-1}, \vec{q}_i, \vec{q}_{i+1})$  y no factoriza en términos de funciones de los  $\vec{p}_i$ . El término  $q_i^2$  en (1) produce una limitación de los  $\vec{p}_i = \vec{q}_i - \vec{q}_{i-1}$  y el primer término produce un escape en la variable  $z_i$  cuya posición depende de las masas longitudinales  $\omega_i = (\mu_i^2 + (\vec{q}_i - \vec{q}_{i-1})^2)^{1/2}$  (Este efecto ya discutí en la sección para tener en cuenta la posibilidad de diferentes  $m_i$  con  $(\vec{p}_i)$  similares).

Fijando todos los momentos transversales menos el observado en su valor medio obtenemos, en vez de (4.13)

$$\frac{d\sigma_{ab}^c}{dy d^2p_\perp} = \int G_a^2(\bar{\epsilon}_a) \tilde{A}(y, y_a - \bar{\epsilon}_a - \ln \frac{\omega_c}{\omega_a}, \vec{q}_1^2) g^{abc} \tilde{A}(y_b, y - \bar{\epsilon}_b - \ln \frac{\omega_c}{\omega_b}, \vec{q}_2^2) \tilde{G}_b^2(\bar{\epsilon}_b) \delta^{(2)}(\vec{q}_2 - \vec{q}_1 - \vec{p}_\perp) d^2\vec{q}_1 d^2\vec{q}_2, \quad (2)$$

donde  $\tilde{A}$  satisface

$$\tilde{A}(z, \vec{q}^2) = K^0(z, \vec{q}^2) + \int K(z, z') g^2 \tilde{A}(z-z', \vec{q}^2) dz'. \quad (3)$$

Por ejemplo tomando una dependencia exponencial en  $t_i$ , como en (4.24)

$$K^0(z, \vec{q}^2)_{ij, i'j'} = \exp [-b \bar{\omega}_i \bar{\omega}_{i'} \exp(-z) - b \vec{q}^2 - \beta_j z]$$

$$K(z)_{ij, i'j'} = \exp [-b \bar{\omega}_i \bar{\omega}_{i'} \exp(-z) - \beta_j z]$$

(4)

obtenemos

$$\frac{d\sigma_{ab}}{dy d^2p_{\perp}} = (2 \operatorname{Sh} Y)^{-1} G_a^2(\bar{E}_a) A(y_c - y_a - \bar{E}_a - \ln \omega_c / \bar{\omega}_c) g_c^2 A(y_b - y_c - \ln \omega_c / \bar{\omega}_c - \bar{E}_b) \tilde{G}_b^2(\bar{E}_b) \exp [-b p_{\perp}^2 / z] \quad (2 / \pi b) \quad (5)$$

donde  $A(z)$  es la solución de la ecuación (4.15) usada anteriormente.

De los argumentos de las funciones  $\tilde{\lambda}$  en (2) se desprende que se tiende más lentamente a los límites inclusivos para valores mayores de  $p_{\perp}^2$ .

El ejemplo de las ecuaciones (4) y (5) lleva a una función de escala factorizada en la forma

$$f_a^c(p_{\perp}, x) = f_a^c(x) \exp (-b p_{\perp}^2 / z) \quad 2 / \pi b \quad (6)$$

donde

$$f_a^c(x) = G_a^2(\bar{E}_a) A(\ln \frac{\bar{\omega}_c}{\omega_{\max}} - \bar{E}_a) g_c^2 C_{\mathbb{R}}^T \frac{x m_a}{\omega_c \gamma_a^2} \quad (7)$$

Para valores finitos de la energía incidente  $f_{ab}^c(p_{\perp}, x, s)$  no factoriza en una función de  $x$  y  $p_{\perp}$  (ni tampoco de  $y_c$  y  $p_{\perp}$ ), pero hay una factorización aproximada para valores de  $x^2 \gg 4(m_c^2 + p_{\perp}^2) / s$ . La factorización asintótica (6) puede no ser correcta ya que es una consecuencia de la propiedad de los propagadores (4)  $K^0(z, \vec{q}^2) = K(z) \exp(-b \vec{q}^2)$ , válida solo para residuos del tipo  $\exp(b t_1)$ .

Esta "receta" para incluir la dependencia de los espectros inclusivos en los momentos transversales debe tomarse solo como

una forma sencilla pero aproximada que nos permite tener una idea de la estructura de  $d\sigma/dy d^2p_{\perp}$ . Una forma más correcta de hacerlo es desarrollar una ecuación integral en la que la integración se realiza sobre las tres variables  $(y, \vec{p}_{\perp})$  o  $(y, \vec{k})$ , pero entonces el nivel de dificultad del cálculo es tal que no tiene sentido elegir la variable rapidez y hacer las aproximaciones de la sección 4, sino es más lógico utilizar una versión menos aproximada del modo <sup>(20)</sup> lo MP, como las desarrolladas en la literatura.

Finalmente discutimos como mejorar la aproximación (b), es decir, como incluir el espectro de las partículas emitidas en ambos extremos de la cadena MP. En la sección 4 integramos sobre  $dy_0$  y  $dy_{n+1}$  haciendo uso de las funciones delta de conservación de energía e impulso longitudinal y argumentamos que en la región MP del espacio de fases  $y_0$  ( $y_{n+1}$ ) depende fundamentalmente de  $y_n$  ( $y_1$ ) y no de los  $y_i$  restantes ( $i=1, \dots, n$ ). En forma similar aquí integramos sobre  $dy_1$  y  $dy_{n+1}$  y argumentamos que, en la zona MP,  $y_{n+1}$  depende fundamentalmente de  $y_0$  mientras que  $y_0$  en solo función  $y_n$  e  $y_1$  a través de la relación

$$\bar{\omega}_1 \exp(-y_n) = m_a \exp(-y_n) - \omega_0 \exp(-y_0) \tag{8}$$

Integrando (4.6) sobre las rapididades de las otras partículas y sumando sobre  $n$  se obtiene

$$\frac{d\bar{\omega}_0}{dy_0 d^2p_{\perp}^2} = (2s(y))^{-1} G_a^2(y_0 - y_n, p_{\perp}^2) \exp(-b p_{\perp}^2) K(\bar{y}_1 - y_0) g^2 A(y_0 - \bar{y}_n - \bar{\epsilon}_0) \bar{G}_b^2(\bar{\epsilon}_0) \tag{9}$$

$$\omega_0 \exp(+y_1 - y_0) / \bar{\omega}_1$$

Otro par de variables usadas comúnmente son  $M^2 = (p_a + p_b - p_c)^2$  y  $t = (p_a - p_c)^2$ . El límite de triple Regge se define por:  $t$  fijo,  $M^2 \rightarrow \infty$ ,



$s/M^2 \rightarrow \infty$ . En este límite es

$$y_b - \bar{y}_1 \sim \ln \frac{M^2}{\bar{\omega}_1 m_b} \quad y_1 - y_a \sim \ln \frac{s \bar{\omega}_1}{M^2 m_a} \quad t \sim -p_0^+{}^2 \quad (10)$$

y la expresión (9) tiende a

$$\frac{d\sigma_{ab}}{dt dM^2} = \frac{\pi}{s} \frac{d\sigma_{ab}}{dy_0 d^2 p_0^+} \approx \frac{1}{16\pi s^2} \sum_{i,r} |\beta_{q_{i,r}}(\tau)|^2 \left(\frac{s}{M^2}\right)^{2\alpha_i(\tau)} g_{r,ii}(\tau) \left(\frac{M^2}{s_0}\right)^{\alpha_r(0)} \gamma_b^r, \quad (11)$$

donde el vértice de tres reggeones  $g_{r,ii}$  es proporcional a  $\sum_j C_{r,j} g_{j,i}^2$

La expansión (11) ha sido utilizada por diversos autores en estudios fenomenológicos de los espectros inclusivos cerca del límite cinemático (cf. De Tar en ref. 20).

7.- CONCLUSIONES

Se mostró que el modelo MP predice las características más sobresalientes de las colisiones hadrónicas a altas energías: la limitación de los momentos transversales, comportamiento asintótico tipo Regge para  $\ln T(E \rightarrow s)$  y los límites inclusivos de pionización, fragmentación y suela.

Se desarrolló una versión aproximada del modelo, en la que se ignoran los grados transversales de libertad, con la que se efectuó una comparación cuantitativa con las secciones eficaces inclusivas experimentales, encontrándose acuerdo entre teoría y experimento si se realiza una elección apropiada de los parámetros. Los espectros inclusivos más importantes pueden ser reproducidos por un modelo <sup>cm</sup> intercambiable de mesones extraños y no extraños y bariones. La iteración del intercambio de  $P$  no parece ser necesaria en los ajustes realizados.

Debemos hacer notar, sin embargo, que la compatibilidad del modelo con los datos experimentales, en los casos estudiados, no es necesariamente un éxito particular del modelo MP; ya que los mismos datos pueden en general reproducirse con modelos "ad-hoc" como el estadístico unidimensional y los modelos que parten de hipótesis muy diferentes a las del MP, como el sermónístico. La razón de esto es que los modelos mencionados tienen demasiada "libertad de predicción" (dentro de las características generales mencionadas en el primer párrafo) y los experimentos realizados no pueden discriminar unívocamente entre uno u otro modelo.

Por esta razón, para mejorar nuestra concepción de las int

reacciones fuertes, deberían realizarse experimentos que apunten a ciertas características generales (y no detalles) de las predicciones de los diferentes modelos, que sean excluyentes entre sí.

El modelo MP, por ejemplo, predice que los espectros inclusivos factorizan en términos de espectros de orden menor que dependen de los momentos de las partículas cercanas en el espacio de rapididades: la evidencia de correlaciones de largo alcance pondría seriamente en peligro al modelo.

El modelo estadístico unidimensional, por otra parte, predice la ausencia de correlaciones entre partículas alejadas de los límites cinemáticos: si se observan correlaciones entre dos piones con momento pequeño en el sistema de centro de masa, a energías del orden de la del acelerador del CERN, este modelo va estar con problemas.

Con respecto a la relación entre el modelo MP y el concepto de dualidad, se encontró, para ejemplos con un número finito de clases de partículas, una explicación microscópica de la hipótesis "débil" de Harari-Freund. Esta hipótesis en su forma más fuerte lleva a la necesidad de una degeneración entre los polos secundarios, la que, desde el punto de vista microscópico, está relacionada con la <sup>baja</sup> producción de partículas que no sean piones.

Apéndice A. Notación

En todo el trabajo se utilizarán unidades tales que  $\hbar=c=1$ .

La métrica utilizada es  $G_{00} = -G_{11} = -G_{22} = -G_{33} = 1$ ,  $G_{\alpha\beta} = 0$  para  $\alpha \neq \beta$ .

En los diagramas una línea recta simboliza una partícula estable, una línea doble simboliza una resonancia y una oscilante un reggeón.

Las funciones  $\theta(x)$  y  $\lambda(x_1, x_2, x_3)$  están definidas por

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$\lambda(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3.$$

Esta función es positiva cuando los tres  $x_i$  no son del mismo signo o cuando son del mismo signo y se cumple que  $\sqrt{|x_j|} > \sqrt{|x_i|} + \sqrt{|x_k|}$   $i \neq j \neq k$ , para un cierto  $i$ .

### Apéndice B. Cinemática

A continuación discutimos la cinemática relativista en un espacio de una dimensión temporal y  $k$  dimensiones espaciales, con miras a aplicaciones en los casos  $k=3$  y  $k=1$  (sec. 4).

En un determinado sistema de coordenadas (SC) un vector está representado por sus componentes

$$A = (A^0, \vec{A}) = (A^0, A^1, \dots, A^k). \quad (1)$$

Las transformaciones de los vectores de un SC a otro pueden ser descompuestas en traslaciones

$$A \rightarrow A' = A + C \quad (2)$$

(donde el vector  $C$  es el mismo para todo  $A$ ), rotaciones de un ángulo  $\theta$  en el plano  $(i, j)$

$$\begin{aligned} A'_i &= A_i \cos \theta - A_j \sin \theta \\ A'_j &= A_i \sin \theta + A_j \cos \theta \end{aligned} \quad (3)$$

y transformaciones de Lorentz (TL) a lo largo del eje  $i$  con una velocidad  $v = th(\xi)$

$$\begin{aligned} A'_0 &= A_0 \operatorname{ch} \xi + A_i \operatorname{sh} \xi \\ A'_i &= A_0 \operatorname{sh} \xi + A_i \operatorname{ch} \xi. \end{aligned} \quad (4)$$

Se dice que un vector  $A$  es de tipo espacial (temporal) cuando  $A^2 = A \cdot A$  es negativo (positivo). Es fácil ver que la suma de vectores temporales (con primera componente positiva) es un vector temporal y que para todo vector temporal existe un conjunto de SC, que llamaremos sistemas en reposo (SR), en los que su parte

espacial es nula.

Dados dos vectores temporales  $A_a$  y  $A_b$  en los 3R de su suma tenemos

$$\begin{aligned} A &= A_a + A_b = (\sqrt{A^2}, \vec{0}), \\ |\vec{A}_a| &= |\vec{A}_b| = (\gamma A^2)^{-1/2} \lambda^{1/2} (A^2, A_a^2, A_b^2), \\ A_a^0 &= (\gamma A^2)^{-1/2} (A^2 \pm A_a^2 \mp A_b^2), \end{aligned} \quad (5)$$

de donde se deduce la relación

$$\sqrt{A^2} \geq \sqrt{A_a^2} + \sqrt{A_b^2} \quad (6)$$

que es independiente del 3R.

La energía e impulso de las partículas físicas están representadas por el vector momento

$$p = (E, \vec{p}) \quad (7)$$

que satisface la relación de Einstein

$$p^2 = m^2 \quad (8)$$

donde  $m$  es la masa de la partícula.

Designamos con el nombre de "superpartícula" al conjunto de una o más partículas. La relación (8) define la masa invariante de una superpartícula en función de su momento total  $p$ .

Como elemento de volumen en el espacio de fases para una partícula nos interesa entre  $\vec{p}_1$  y  $\vec{p}_1 + d\vec{p}_1$ , en vez de  $d\vec{p}_1$  es más conveniente utilizar la expresión covariante

$$d(i) = d\vec{p}_i / (2 p_i^0 (2\pi)^k) = d^{k+1} p_i \Theta(p_i^0) \delta(p_i^2 - m_i^2) / (2\pi)^k \quad (9)$$

El volumen invariante de espacio de fases de  $n$  partículas de masas  $m_i$  producto del decaimiento de una superpartícula de masa  $M$ , es

$$R_n(M; m_1, \dots, m_n) = (2\pi)^{k+1} \int \delta^{(k+1)} \left( P - \sum_{i=1}^n p_i \right) \prod_{i=1}^n d^3(i), \quad (10)$$

donde  $P^2 = M^2$ . La función delta de conservación de energía-impulso junto con (8) hacen  $R_n$  sea idénticamente nulo si  $M < \sum_{i=1}^n m_i$ .

El caso  $n=2$  es fácilmente calculable en el SR de P dando

$$R_2(M; m_1, m_2) = \frac{g^{k-2}}{4M(2\pi)^{k+1}} \int d\Omega_k = \frac{\lambda^{k-2} (M^2, m_1^2, m_2^2)}{2(4\pi M)^{k-1}} \frac{k\pi^{k/2}}{\Gamma(\frac{k+2}{2})} \quad (11)$$

en particular para  $k=1$  y  $k=3$  tenemos

$$k=1 \quad R_2 = \lambda^{-1/2} (M^2, m_1^2, m_2^2)$$

$$k=3 \quad R_2 = \frac{g}{4M(2\pi)^2} \int d\Omega = \frac{\lambda^{1/2} (M^2, m_1^2, m_2^2)}{8\pi M^2} \quad (12)$$

El caso  $n>2$  se puede calcular utilizando las descomposiciones

$$R_n(M; m_1, \dots, m_n) = (2\pi)^{2} \int dM_i^2 dM_{n-i}^2 R_2(M; M_i, M_{n-i}) \\ R_i(M_i; m_1, \dots, m_i) R_{n-i}(M_{n-i}; m_{i+1}, \dots, m_n) \quad 2 \leq i \leq n-2; \\ \text{y} \quad (13)$$

$$R_n(M; m_1, \dots, m_n) = (2\pi)^{-1} \int dM_i^2 R_i(M_i; m_1, \dots, m_i) R_{n-i+1}(M; M_i, m_{i+1}, \dots, m_n) \\ 2 \leq i \leq n-1.$$

En el estudio de las reacciones iniciadas por dos partículas  $a$  y  $b$  llamamos dirección longitudinal a la de  $\vec{p}_a - \vec{p}_b$  y sistemas longitudinales (SL) a aquellos en que  $\vec{p}_a$  y  $\vec{p}_b$  son paralelos. Los diferentes SL están conectados por TL a lo largo de la dirección longitudinal y rotaciones alrededor de ese eje. Esas TL dejan invarian-

tes a los momentos transversales; en cuanto a los momentos longitudinales, en vez de utilizar  $y_{||}$  es más conveniente usar la variable  $y = \text{th}^{-1}(v_{||})$ , que llamamos "rapidez".

Si sea como

$$(E, p_{||}) = \omega (c h y, s h y) \quad (14)$$

donde  $\omega = (m^2 + p_{\perp}^2)^{1/2}$  es la masa longitudinal. La TL (4) es simplemente

$$y \rightarrow y' = y + \xi \quad dp_{||} / E = dy \rightarrow dy. \quad (15)$$

A veces es más útil utilizar la base "rotada"

$$[\omega^+, \omega^-] = [E + p_{||}, E - p_{||}] = \omega [e^y, \bar{e}^y] \quad (16)$$

$$\omega^2 = \omega^+ \omega^- \quad y = 1/2 \ln(\omega^+ / \omega^-).$$

Por ejemplo las condiciones (5) para  $k=1$  son

$$P = P_1 + P_2$$

$$\omega_{12}^{\pm} = \omega_1^{\pm} + \omega_2^{\pm}$$

$$\omega_2 \text{sh}(y_2 - y_{12}) = \omega, \text{sh}(y_{12} - y_1) = \pm \lambda^{1/2} (\omega_{12}^2, \omega_1^2, \omega_2^2) / 2\omega_{12} \quad (17)$$

$$2\omega, \omega_2 \text{sh}(y_2 - y_1) = \pm \lambda^{1/2} (\omega_{12}^2, \omega_1^2, \omega_2^2)$$

$$2\omega, \omega_2 \text{ch}(y_2 - y_1) = \omega_{12}^2 - \omega_1^2 - \omega_2^2.$$

Para el proceso  $a+b \rightarrow c+d$  definimos los invariantes de Mandelstam

$$s = (p_a + p_b)^2 = (p_c + p_d)^2$$

$$t = (p_a - p_c)^2 = (p_b - p_d)^2 \quad (18)$$

$$u = (p_a - p_d)^2 = (p_b - p_c)^2,$$



relacionados por

$$s+t+u = m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + m_d^2. \quad (19)$$

Para el caso  $a+b \rightarrow (1)+(2)+\dots+(n)$  definimos

$$s = (p_a + p_b)^2 = (p_1 + \dots + p_n)^2, \quad (20)$$

las subenergías

$$s_{ij} = (p_i + p_j)^2 \quad (21)$$

$$s_{ijk} = (p_i + p_j + p_k)^2, \text{ etc}$$

y los momentos invariantes transferidos

$$t_i = (p_a - \sum_{i=1}^i p_i)^2. \quad (22)$$

Apéndice C. Matriz S. Secciones eficaces

Para la representación de los estados de un sistema de partículas interactuantes utilizamos los vectores de un espacio de Hilbert. Postulamos la existencia de dos bases: los estados "entrantes" (en) y "salientes" (sal). El vector  $|\alpha; \text{en}\rangle$  ( $|\alpha; \text{sal}\rangle$ ) representa un estado que para  $t \rightarrow -\infty$  ( $t \rightarrow +\infty$ ) tiende a un estado de varias partículas estables en movimiento libre (es decir, a grandes distancias espaciales), descrito por el conjunto de números cuánticos  $\{\alpha\}$ . A los efectos del estudio de las interacciones fuertes consideraremos como estables también a las partículas que decaen electromagnética o débilmente.

Definimos como

$$|0\rangle \equiv |0; \text{en}\rangle \equiv |0; \text{sal}\rangle, \quad \langle 0|0\rangle = 1 \quad (1)$$

al vacío o estado de ninguna partícula. El estado (entrante o saliente) de  $n$  partículas con momentos  $\vec{p}_i$  y números cuánticos  $\alpha_i$  es está dado por

$$|\alpha_1 \vec{p}_1 \alpha_2 \vec{p}_2 \dots \alpha_n \vec{p}_n\rangle = a_{\alpha_1}^+(\vec{p}_1) \dots a_{\alpha_n}^+(\vec{p}_n) |0\rangle, \quad (2)$$

donde los operadores  $a$  (todos "en" o "sal") satisfacen

$$\begin{aligned} [a_i, a_j]_{\pm} &= [a_i^+, a_j^+]_{\pm} = 0 \\ [a_i, a_j^+]_{\pm} &= \delta_{ij} 2 E_i \delta^{(3)}(\vec{p}_i - \vec{p}_j) (2\pi)^3, \end{aligned} \quad (3)$$

$$a_i |0\rangle = 0$$

con el signo + solo para el caso en que ambos sean operadores de fermiones.

Postulamos la completitud de ambas bases, es decir

$$\sum_{\alpha} |\alpha; en\rangle \langle \alpha; en| = \sum_{\alpha} |\alpha; sal\rangle \langle \alpha; sal| = 1 \quad (14)$$

donde dada la normalización de los estados (1 a 3), en cada suaman do de  $\sum_{\alpha}$  están implícitos la integración sobre  $\prod_{i \in \alpha} d^3 p_i / (2 E_i (2\pi)^3)$  y un factor  $3_{\alpha} = (n_1! n_2! \dots n_k!)^{-1}$  si en el estado  $\alpha$  hay  $k$  grupos con  $n_i$  partículas cada uno.

La relación (4) implica que ambas bases están conectadas mediante el operador unitario  $S = \sum_{\alpha} |\alpha; en\rangle \langle \alpha; sal|$ , es decir

$$S S^{\dagger} = S^{\dagger} S = 1 \quad (5.a)$$

$$|\alpha; en\rangle = S |\alpha; sal\rangle$$

$$|\alpha; sal\rangle = S^{\dagger} |\alpha; en\rangle \quad (5.b)$$

El elemento de matriz

$$S_{fi} = \langle f; sal | S | i; sal \rangle = \langle f; en | S | i; en \rangle \equiv \langle f; sal | i; en \rangle \quad (6)$$

es la amplitud de probabilidad para la transición  $i \rightarrow f$ .

Si las partículas no interactuaren sería  $S=1$ , por otra parte en  $S_{fi}$  está contenida la información de conservación de energía e impulso. Definimos al operador de transición  $T$  mediante

$$S_{fi} = \delta_{fi} + i (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) T_{fi} \quad (7)$$

En  $T_{fi}$  está contenida la información "dinámica" sobre el proceso  $i \rightarrow f$ . Tenemos en consiguiente que estudiar la conexión entre  $T_{fi}$  y los observables físicos; en forma más particular nos limitamos a los procesos con dos partículas iniciales, es decir, calculamos las secciones eficaces  $\sigma(a+b \rightarrow f)$ .

En este cálculo nos encontramos con las expresiones  $\delta^{(3)}(0)$  y  $\delta^{(4)}(0)$ , como consecuencia con estados de partículas con momento bien definido (ondas planas) en vez de con paquetes de onda. En vez de hacer un tratamiento más riguroso, para sortear esta dificultad suponemos formalmente que trabajamos en un volumen finito de espacio-tiempo  $V\tau$  que posteriormente hacemos tender a infinito. En esa forma tenemos

$$\delta^{(3)}(0) = V / (2\pi)^3, \quad \delta^{(4)}(0) = V\tau / (2\pi)^4. \quad (8)$$

La probabilidad para la transición  $i \rightarrow f$  en el tiempo  $\tau$  está dada por

$$P_{i \rightarrow f} = \frac{|S_{fi}|^2}{\langle i|i \rangle} \quad (9)$$

de manera que, con (5.a),  $\sum_f P_{i \rightarrow f} = 1$ . Para el caso en que  $|i\rangle = |\vec{p}_a \vec{p}_b\rangle$  tenemos

$$\langle i|i \rangle = 2E_a (2\pi)^3 \delta^{(3)}(0) 2E_b (2\pi)^3 \delta^{(3)}(0) = 4E_a E_b V^2. \quad (10)$$

El flujo incidente, por unidad de área y de tiempo, está dado por

$$f_i = |\vec{v}_a - \vec{v}_b| / V = |\vec{p}_a / E_a - \vec{p}_b / E_b| / V. \quad (11)$$

En consecuencia, por definición de sección eficaz,

$$\begin{aligned} d\sigma(a+b \rightarrow f) &= \frac{P_{ab \rightarrow f} / \tau}{f_i} = \frac{(2\pi)^8 \delta^{(4)}(p_f - p_i) \delta^{(4)}(0) |T_{fab}|^2 \prod_{i \in f} \frac{\pi d(i) \omega_f}{\tau}}{4 E_a E_b V^2 |\vec{v}_a - \vec{v}_b| / V} = \\ &= dR_f |T_{fab}|^2 S_f / I, \end{aligned} \quad (12)$$

con  $I = 4E_a E_b |\vec{v}_a - \vec{v}_b|$ .

Nótese que la normalización es tal que  $\sigma(i \rightarrow f) = \int d\sigma(i \rightarrow f)$  pero para el cálculo de la sección eficaz observada hay que sumar sobre las contribuciones de todas las partículas idénticas.

El factor  $1/I$  tiene las propiedades relativistas de una superficie normal a la dirección longitudinal, ya que  $\vec{I} = E_a \vec{p}_a - E_b \vec{p}_b$  es invariante ante TL longitudinales y se transforma en la forma  $\vec{I} \rightarrow \vec{I} \cosh \xi_{\perp}$  ante una TL transversal desde un SL. En cualquier SL es

$$I = 4 E_{cm} g_{fab}^{c.m.} = 2 \lambda^{1/2}(s, m_a^2, m_b^2) = 4 m_a m_b |\text{Sh}(y_b - y_a)|. \quad (13)$$

Si exigimos que  $d\sigma$  tenga las propiedades relativistas de una superficie normal a la dirección de incidencia, la invariancia de  $dR_f$  implica la de  $|T_{fi}|$ ; vamos a elegir la fase de  $T_{fi}$  de manera que también sea invariante.  $T_{fi}$  depende solo de los  $3(n_f - n_i) - 10$  invariantes cinemáticos independientes y de los números cuánticos discretos de ambos estados.

Otras propiedades de  $T_{fi}$  pueden ser deducidas de escribir la relación de unitariedad (5.a), en términos de  $T$ .

$$\begin{aligned} T_{fi} - T_{if}^* &= i \sum_{\tilde{m}} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_m) T_{mf}^* T_{mi} = \\ &= i \sum_{\tilde{m}} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_m) T_{fm} T_{im}^* . \end{aligned} \quad (14)$$

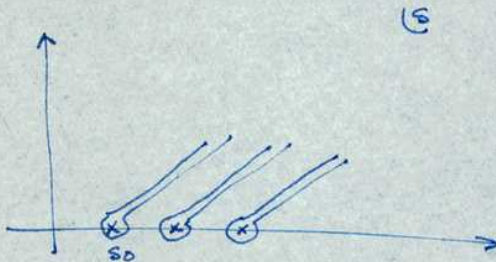
Postulamos que  $T_{fi}$  es una función analítica de los momentos de las partículas en ambos estados, con las únicas singularidades requeridas por la ecuación de unitariedad (14).

En particular si todas las partículas externas son escalares o si la interacción es invariante ante PT se puede demostrar que  $T_{if} = T_{fi}$  (21), por lo que (14) implica que  $\text{Im } T_{if} = 0$  para  $s - p_i^2 - p_f^2 < s_0$ , donde  $s_0$  es el umbral para los estados intermedios que contribuyen al miembro derecho de (14). Pero entonces en un cierto dominio del

plano complejo  $s$ , con  $\text{Re}(s) < s_0$ , se cumple que  $T_{if}(s)$  es real analítica, es decir

$$T_{if}(s) = T_{if}^*(s^*) \quad (15)$$

con lo que  $T(s)$  es real para  $s$  real mayor que  $s_0$ , salvo que  $s_0$  sea un punto de ramificación de  $T(s)$ . En general esperamos tener un punto de ramificación en el umbral de cada término que contribuye a la suma unitaria (14), es decir que en un hoja de Riemann vendrá que haber cortes en la forma



Vamos a elegir los cortes a lo largo del eje real de manera que la propiedad (15) se cumpla en toda la primera hoja de Riemann, que llamamos "hoja física".

Pero entonces hay una ambigüedad en la definición de  $T(s)$  para  $s$  real mayor que  $s_0$  porque podemos tender al eje real por encima o por debajo de cada corte: para definir el valor físico de  $T(s)$  tomamos la convención de hacerlo por encima, es decir que por  $s$  real entendemos  $s+i0$ . Del mismo modo, dada la propiedad (15), el valor físico para  $T^*(s)$  está dado por  $T(s-i0)$ .

Con esta convención para todas las energías en  $T_{if}, T_{in}$  y  $T_{out}$  podemos simbolizar la ecuación de unitariedad (14) en la forma:

$$\begin{array}{c} \text{---} \oplus \text{---} \\ \text{---} \ominus \text{---} \end{array} - \begin{array}{c} \text{---} \ominus \text{---} \\ \text{---} \oplus \text{---} \end{array} = i \sum \begin{array}{c} \text{---} \oplus \text{---} \\ \text{---} \oplus \text{---} \end{array} - i \sum \begin{array}{c} \text{---} \ominus \text{---} \\ \text{---} \oplus \text{---} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{---} \oplus \text{---} \\ \text{---} \oplus \text{---} \end{array} - \begin{array}{c} \text{---} \ominus \text{---} \\ \text{---} \oplus \text{---} \end{array} = i \sum \begin{array}{c} \text{---} \oplus \text{---} \\ \text{---} \oplus \text{---} \end{array} + i \sum \begin{array}{c} \text{---} \oplus \text{---} \\ \text{---} \oplus \text{---} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{---} \oplus \text{---} \\ \text{---} \oplus \text{---} \end{array} - \begin{array}{c} \text{---} \ominus \text{---} \\ \text{---} \oplus \text{---} \end{array} = i \sum \begin{array}{c} \text{---} \oplus \text{---} \\ \text{---} \oplus \text{---} \end{array} + i \sum \begin{array}{c} \text{---} \oplus \text{---} \\ \text{---} \oplus \text{---} \end{array} \\ + i \sum \begin{array}{c} \text{---} \oplus \text{---} \\ \text{---} \oplus \text{---} \end{array} + i \sum \begin{array}{c} \text{---} \oplus \text{---} \\ \text{---} \oplus \text{---} \end{array}$$

Donde los círculos representan la parte conectada de T (es decir libre de funciones  $\delta^{(4)}(P-P_f)$  que indican partes que contribuyen solo cuando una o varias partículas no cambian su momento entre los estados inicial y final) y el signo  $\pm$  indica que esa amplitud se calcula por encima o por debajo de los cortes.

Analizemos por ejemplo el caso  $|i\rangle = |f\rangle = |ab\rangle$ :

$$\begin{array}{c} a \\ \text{---} \oplus \text{---} \\ b \end{array} - \begin{array}{c} a \\ \text{---} \ominus \text{---} \\ b \end{array} = 2i \mathcal{I}_m \begin{array}{c} a \\ \text{---} \oplus \text{---} \\ b \end{array}$$

es decir

$$2 \mathcal{I}_m T_{ab \rightarrow ab}(s+i0) = \sum_n |T_{ab \rightarrow n}(s+i0)|^2 dR_n S_n. \quad (16)$$

Reemplazando en (12) obtenemos el teorema óptico

$$\sigma_{ab}^{\text{TOT}}(s) = \sigma_{ab \rightarrow X}(s) = 2 \mathcal{I}_m T_{ab}^{\text{el}}(s+i0) / \mathcal{I} = -i \text{Disc } T_{ab}^{\text{el}}(s+i0) / \mathcal{I}, \quad (17)$$

lo que muestra el poder de la ecuación de unitariedad: la sección eficaz total es la suma de las secciones eficaces para muchos procesos que pueden ser muy complicados pero se relaciona en forma

muy simple con la parte imaginaria de la amplitud para el proceso elástico ab-ab en la dirección hacia adelante.

Para una energía tal que hay N canales abiertos para (16), si  $\text{Im } T(s-i0) - T(s-i0) - T(s-i0)$  es la discontinuidad de  $T(s)$  a través de N cortes. Se puede ver que cada término en el miembro derecho de la ecuación (16) es precisamente la discontinuidad de  $T(s)$  a través del corte correspondiente.

Como se vé en las figuras de la página anterior, cuando en el estado inicial y/o final hay más de dos partículas,  $2i\text{Im } T_{if}$  es la discontinuidad de  $T_{if}$  no solo a través del corte en s, sino también a través de los cortes en las subenergías y los momentos transferidos. Por ejemplo los estados intermedios que entran en el cálculo de  $2i\text{Im } T(123-1'2'3')$  muestran explícitamente que ésta es la discontinuidad de  $T(123-1'2'3')$  a través de los cortes en  $(p_1-p_2-p_3)^2$ ,  $(p_1-p_j)^2$ ,  $(p_1-p_j)^2$ , y  $(p_1-p_j-p_k)^2$ .

Si en cambio se calcula la discontinuidad de  $T_{if}$  a través del corte en el plano complejo de una subenergía en particular, en el miembro derecho se obtiene una suma sobre estados intermedios cuya energía total es dicha subenergía. Este hecho, junto con la propiedad de cruce de la amplitud y la posibilidad de continuar analíticamente la ecuación de unitariedad, nos permite deducir teoremas ópticos para procesos inclusivos con detección de k partículas.

La propiedad de cruce relaciona la amplitud de un cierto proceso con la del que se obtiene al quitar una partícula del estado final (inicial) y agregar la correspondiente antipartícula al estado inicial (final), en la forma

$$T_{i-f_0}(p_0 \dots) = T_{i\bar{0}-2}(-p_0 \dots) \quad (18)$$



En cuanto a la ecuación de unitariedad (14), a primera vista parecería que no se puede prolongar analíticamente ya que  $T_{if}$  no es una función analítica, <sup>pero sin embargo</sup> justo por encima del eje real es

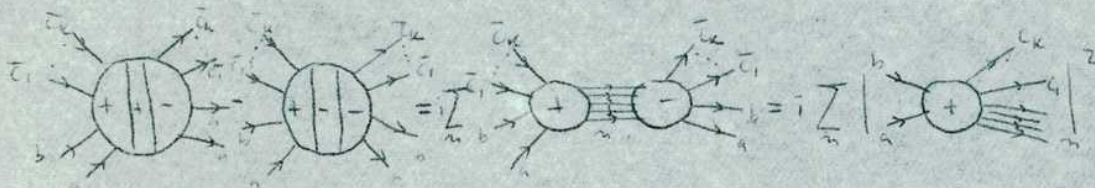
$$T_{if}^*(s_1 + i0) = T_{if}(s_1 - i0) = T_{if}^{n.f.}(s_1 + i0) \quad (19)$$

donde  $T_{if}^{n.f.}$  está definida en una hoja de Riemann "no física" a la que se llega por continuidad atravesando los cortes desde  $s_1 + i0$  hasta  $s_1 - i0$ . De esta manera la ecuación (14) se puede escribir en la forma

$$T_{if} - T_{if}^{n.f.} = i(2\pi)^4 \sum_{\alpha} \delta^{(4)}(p_{\alpha} - p_f) T_{\alpha f}^{n.f.} T_{\alpha i}, \quad (20)$$

ecuación que relaciona funciones analíticas evaluadas en el mismo punto ( $s_1 - i0$ ) y que puede prolongarse analíticamente.

De esta manera, calculando la discontinuidad a través del corte en  $M^2 = (p_a + p_b - \bar{c}_1 - \dots - \bar{c}_k)^2$  de la amplitud en la dirección hacia adelante  $T(ab\bar{c}_1 \dots \bar{c}_k \rightarrow ab\bar{c}_1 \dots \bar{c}_k)$  y prolongando analíticamente hasta la zona física del proceso  $ab \rightarrow c_1 \dots c_k X$



y utilizando (12) se obtiene el teorema óptico

$$\frac{d\sigma(a+b \rightarrow c_1, \dots, c_k+X)}{d(c_1) \dots d(c_k)} = -i \text{Disc}_{M^2} T(a+b+\bar{c}_1 \dots \bar{c}_k \rightarrow a+b+\bar{c}_1+\dots+\bar{c}_k) / I \quad (21)$$

En el miembro izquierdo de la figura, los signos centrales se refieren a la posición con respecto al corte en  $M^2$ ; los otros caracterizan la posición en los planos de los demás invariantes formados con los momentos entrantes o salientes.

REFERENCIAS

- 1) D. Amati, S. Fubini y A. Stanghellini, *Nuovo Cimento* 26(1968)896.
- 2) A.H. Mueller, *Physical Review*, D2(1970)2963.
- 3) J. Benecke, T.T. Chou, C.N. Yang y E. Yen, *Phys. Rev.* 188(1969)1139.
- 4) R.P. Feynmann, *Phys. Rev. Letters*, 23(1969)1415.
- 5) E. Dolen, D. Horn y G. Schmidt, *Phys. Rev.*, 166(1968)2768.
- 6) H. Harari, *Phys. Rev. Lett.* 20(1968)1395 y P.G.O. Freund, *Phys. Rev. Lett.* 20(1968)235.
- 7) R. Hagedorn, *Suppl. Nuovo Cimento* 3(1968)147.
- 8) R. Hagedorn y J. Ranft, "Inclusive Single Particle Spectra and the Strong Thermodynamic Bootstrap Solution", TH-1440-GERM.
- 9) P. Ripa, *Nuclear Physics*, B45(1972)217.
- 10) A.C. Aitken, "Determinants and Matrices" (Oliver and Boyd, London 1956) p.48.
- 11) C. De Tar, *Phys. Rev.* D3(1971)138.
- 12) Los datos de  $\sigma_{p^+p^-}$  fueron tomados de G. Giammelli, Cern/HERA 69-3
- 13) Los datos de  $d\sigma_{pp}^{n^+}/d\eta/dy^*$  hasta 30 GeV fueron calculados a partir de: Gellert-LBL-784 Feb.1972; Muck, *Physics Letters* 39E(1972)303; Bøggild, *Nuclear Physics* B27(1971)1; Panvini, *Nuclear Physics* B41(1972)317. Los datos de ISR (GERM) fueron calculados a partir de fórmulas citadas por J.C. Sens (Fourth International Conference on High Energy Collisions, Oxford 5-7 abril, 1972) provenientes del experimento de la Colaboración Saclay-Strasbourg.
- 14) G.F. Chew y D.R. Snider, *Phys. Rev.* D1(1970)3453.
- 15) L. Caneschi y A. Pignotti, *Phys. Rev. Lett.* 22(1969)1219.
- 16) P.D. Ting, *Phys. Rev.* 181(1969)1942.

- 17) Los datos de  $d\sigma_{pp}^{p\pm}(0)/dy^*$  provenientes de ISR (CERN) fueron calculados en la misma forma que para los piones (13). A energías inferiores fueron calculados a partir de las de Allaby <sup>tablas</sup> (CERN-70-12) y de una fórmula dada por Anderson, Phys. Rev. Lett. 19(1967)198.
- 18) I. Gyuk y D.R. Snider, UMM-4867-71-5 y D. Snider UMM-4867-71-10.
- 19) Los espectros de  $\bar{K}+N \rightarrow \Lambda + (\text{piones})$  están publicados en CERN/DPH.II 71-26(1971)
- 20) G. Chew, "Multiperipheral Dynamics" (Gordon and Breach Science Publishers, London 1971) y publicaciones allí citadas.
- 21) R.J. Eden et al., "The analytic S-Matrix" (Cambridge, At the University Press)

Quisiera expresar mi agradecimiento al Dr. Alberto Pignotti por su guía y ayuda continuas durante el transcurso de este trabajo.

Asimismo debo agradecer innumerables discusiones esclarecedoras con mis colegas de la Universidad de Washington, la Comisión Nacional de Energía Atómica y del Grupo de Altas Energías de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales.

Expreso mi reconocimiento a la Comisión Nacional de Energía Atómica y al Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas que me otorgaron becas de investigación sin las cuales no podría haber realizado este trabajo.

Debra Irene Lyon me ayudó y alentó en todo momento a pesar de no saber mucho de Física.