



UNIVERSIDAD
DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

cap COMISIÓN
ACADEMICA
DE POSGRADO



ANII AGENCIA NACIONAL
DE INVESTIGACION
E INNOVACION



Universidad de la República

Facultad de Ingeniería

Instituto de Física

DESARROLLO DE ALGORITMOS DE PHASE-SHIFTING CON PASOS ARBITRARIOS

Gastón A. Ayubi

Tesis para optar al título de Doctor en Física

Orientador: Dr. José A. Ferrari

Resumen

En las últimas décadas, técnicas como la interferometría, la perfilometría por proyección de franjas o la deflectometría se han transformado en herramientas indispensables para la ciencia y la ingeniería. Estas técnicas tienen en común que la información buscada se encuentra en la fase de un patrón de franjas bidimensional. De las varias técnicas que existen para la extracción de la fase de los patrones de franjas, en la presente tesis se estudia el método conocido como phase-shifting.

Nuestro objetivo central fue el desarrollo de algoritmos de phase-shifting con pasos arbitrarios. Se desarrollaron algoritmos para superar diferentes fuentes de error como por ejemplo la presencia de armónicos, la mala determinación del desplazamiento asociado a cada imagen o la presencia de ruido aleatorio en las imágenes.

En el desarrollo de este trabajo, se obtuvo también un algoritmo que permite determinar el desfase entre interferogramas consecutivos cuando dicho desfase no es conocido, permitiendo recuperar la fase asociada a un sistema sin necesidad de calibrarlo.

Por último, con el objetivo de estudiar la calidad de los datos adquiridos, se propuso un procedimiento para determinar el contraste en el caso de interferogramas arbitrariamente desfasados.

En todos los casos se presentaron simulaciones y resultados experimentales.

Abstract

In recent decades, techniques such as interferometry, fringe projection profilometry or deflectometry have become indispensable tools for science and engineering. These techniques have in common that the information sought is in the phase of a two-dimensional fringe pattern. Of the various techniques that exist for the extraction of phase from fringe patterns, the method known as phase-shifting is studied in this thesis.

Our main objective was the development of phase-shifting algorithms with arbitrary steps. The algorithms were developed to overcome different sources of error such as the presence of harmonics, the poor determination of the displacement associated with each image or the presence of random noise in the images.

In the development of this work, we also obtained an algorithm that allows to determine the phase change between consecutive interferograms when the phase change is unknown, allowing the phase associated with a system to be recovered without needing to calibrate it.

Finally, to study the quality of the acquired data, a procedure was proposed to determine the contrast in the case of arbitrarily displaced interferograms.

Simulations and experimental results were presented in all cases.

Tabla de contenido

| | |
|--|-----------|
| 1. Introducción | 8 |
| 2. Algoritmos de phase-shifting | 10 |
| 2.1. Aplicaciones | 10 |
| 2.1.1. Aplicaciones en interferometría | 10 |
| 2.1.2. Aplicaciones en perfilometría 3D | 12 |
| 2.1.3. Aplicaciones en deflectometría | 15 |
| 2.2. Algoritmos de phase-shifting | 16 |
| 2.2.1. Algoritmo de cuatro pasos de Bruning et al. | 16 |
| 2.2.2. Algoritmo de Carré | 17 |
| 2.2.3. Algoritmo de Hariharan et al. | 18 |
| 2.2.4. Algoritmo de mínimos cuadrados | 19 |
| 2.3. Fuentes de error | 21 |
| 2.3.1. Errores en el salto de fase | 21 |
| 2.3.2. Errores por ruido aditivo y de fase | 22 |
| 2.3.3. Patrones no sinusoidales | 22 |
| 2.3.4. Errores por vibraciones | 23 |
| 3. Generación de algoritmos de phase-shifting con M saltos de fase arbitrarios | 25 |

| | |
|--|-----------|
| 3.1. Generación de algoritmos con M interferogramas | 26 |
| 3.1.1. Algoritmo general | 26 |
| 3.1.2. Algoritmo simplificado | 28 |
| 3.1.3. Ejemplos de algoritmos generalizados | 28 |
| 3.1.4. Conclusiones | 29 |
| | |
| 4. Algoritmos de phase-shifting óptimos en presencia de ruido de fase y ruido aditivo | 30 |
| 4.1. Algoritmo de phase-shifting con M pasos arbitrarios | 32 |
| 4.2. Modelado y estimación del error en la fase inducido por ruido aditivo | 33 |
| 4.3. Modelado y estimación del error en la fase inducido por ruido de fase | 36 |
| 4.4. Minimización del error en la fase calculada | 39 |
| 4.5. Simulaciones | 43 |
| 4.6. Resultados experimentales | 46 |
| 4.7. Conclusiones | 49 |
| Apéndice 4.A. Cálculo de $\langle N ^2 \rangle$ | 49 |
| Apéndice 4.B. Cálculo de fase a partir de interferogramas con armónicos | 50 |
| Apéndice 4.C. Algoritmos insensibles a mala calibración del salto de fase | 51 |
| Apéndice 4.D. Algoritmo de phase-shifting con matriz antisimétrica . . . | 53 |
| Apéndice 4.E. Simulaciones adicionales | 55 |
| | |
| 5. Cálculo de salto de fase para algoritmos de phase-shifting sintonizables | 58 |
| 5.1. Algoritmo de extracción del salto de fase entre interferogramas . . . | 60 |
| 5.2. Filtrado de imágenes previo al cálculo del salto de fase | 62 |
| 5.3. Promedio de interferogramas | 63 |
| 5.4. Simulaciones | 64 |
| 5.5. Comparación con otros métodos | 69 |

| | |
|--|------------|
| 5.6. Resultados experimentales | 69 |
| 5.7. Conclusiones | 73 |
| Apéndice 5.A. Filtros lineales | 73 |
| Apéndice 5.B. Comportamiento del algoritmo con interferogramas con ruido sal y pimienta | 74 |
| Apéndice 5.C. Comportamiento del algoritmo en presencia de vibraciones | 76 |
| 6. Algoritmos de phase-shifting sintonizables | 78 |
| 6.1. Algoritmo de phase-shifting | 79 |
| 6.2. Comparación con el algoritmo de Carré | 81 |
| 6.3. Conclusiones | 84 |
| 7. Algoritmos para cálculo de contraste | 85 |
| 7.1. Algoritmo para cálculo de contraste con M pasos arbitrarios | 86 |
| 7.2. Modelado y estimación del error en el cálculo del contraste inducido por ruido aditivo | 88 |
| 7.3. Modelado y estimación del error en el cálculo del contraste inducido por ruido de fase | 89 |
| 7.4. Minimización del error en el cálculo del contraste | 90 |
| 7.5. Simulaciones | 92 |
| 7.6. Resultados experimentales | 97 |
| 7.7. Conclusiones | 99 |
| Apéndice 7.A. Cálculo de contraste a partir de interferogramas con armóni- cos | 99 |
| 8. Discusión y conclusiones generales | 101 |
| Artículos publicados | 102 |

Capítulo 1

Introducción

En las últimas décadas, técnicas como la interferometría, la perfilometría por proyección de franjas o la deflectometría se han transformado en herramientas indispensables para la ciencia y la ingeniería. Técnicas similares pueden encontrarse aplicadas a escala microscópica en estudios biológicos, como también en la reconstrucción o el estudio de grandes superficies. Estas técnicas tienen en común que la información buscada se encuentra en la fase de un patrón de franjas bidimensional. De las varias técnicas que existen para la extracción de la fase de los patrones de franjas, en la presente tesis se estudia el método conocido como phase-shifting.

Se trabaja con imágenes (interferogramas) que tienen asociada determinada fase que se busca conocer, e.g. en interferometría se trataría de la fase acumulada por la luz en uno de los caminos del interferómetro. Mediante diferentes métodos es posible realizar un corrimiento global (corrimiento o salto de fase), conocido o no, de dicha fase, de forma que se puede adquirir un conjunto de imágenes desfasadas entre sí, e.g. en un interferómetro podrían adquirirse diferentes interferogramas variando la longitud de uno de sus caminos. Los algoritmos de phase-shifting permiten, a partir del conjunto de interferogramas adquiridos, calcular la fase asociada.

Típicamente en la literatura se ha trabajado con algoritmos donde las imágenes deben ser adquiridas con corrimientos de fase equiespaciados. El problema con los

algoritmos equiespaciados es que en la práctica no es posible controlar en forma precisa los desplazamientos de fase, por lo que no es sencillo adquirir un conjunto de imágenes con desfasajes exactamente iguales. Entonces, al aplicar un algoritmo diseñado para pasos equidistantes, la fase recuperada no coincide con la real. En nuestro trabajo se busca evitar este tipo de errores mediante el desarrollo de nuevos algoritmos con pasos de fase no equidistantes. Dado que los algoritmos de pasos arbitrarios son el caso general en algoritmos de desplazamiento de fase, también permiten el análisis teórico completo sobre el comportamiento de algoritmos equiespaciados y no equiespaciados. Se busca estudiar el comportamiento de los algoritmos desarrollados ante diferentes fuentes de error, como por ejemplo la presencia de armónicos, la mala determinación del desplazamiento asociado a cada imagen, o la presencia de ruido aleatorio en las imágenes.

Otro punto que nos proponemos estudiar es la obtención de algoritmos que permitan determinar el desfasaje entre interferogramas consecutivos cuando dicho desfasaje no es conocido, permitiendo recuperar la fase asociada a un sistema sin necesidad de calibrarlo.

En el desarrollo de esta tesis, primeramente se introducen los conceptos básicos sobre algoritmos de phase-shifting en el capítulo 2. Luego en los capítulos 3 y 4 se desarrollan algoritmos de phase-shifting para imágenes con saltos de fase arbitrarios. En los capítulos 5 y 6 se desarrollan algoritmos para el cálculo del salto de fase y algoritmos de phase-shifting sintonizables. Finalmente en el capítulo 7 se presenta un algoritmo para el cálculo del contraste en los interferogramas.

Capítulo 2

Algoritmos de phase-shifting

2.1. Aplicaciones

Previo a describir la generación de algoritmos de phase-shifting, se discuten tres aplicaciones en las que es necesaria su utilización. Se discutirán aplicaciones a la interferometría, a la reconstrucción 3D por proyección de franjas y a la deflectometría.

2.1.1. Aplicaciones en interferometría

En el caso de la interferometría, los algoritmos de phase-shifting permiten la reconstrucción de los frentes de onda en un interferómetro. Esto permite la visualización de objetos de fase que serían invisibles sin técnicas interferométricas u otras técnicas específicas. Para explicar la técnica se utiliza el interferómetro de Mach-Zehnder de la figura 2.1.

En el mismo se divide un haz de luz previamente filtrado en el primer divisor de haz (BS_1), para luego hacer pasar uno de los haces por el objeto de fase que se busca estudiar (PO) y el otro se mantiene como haz de referencia. Finalmente los dos haces se unen en BS_2 y se forma la imagen del objeto de fase en la cámara

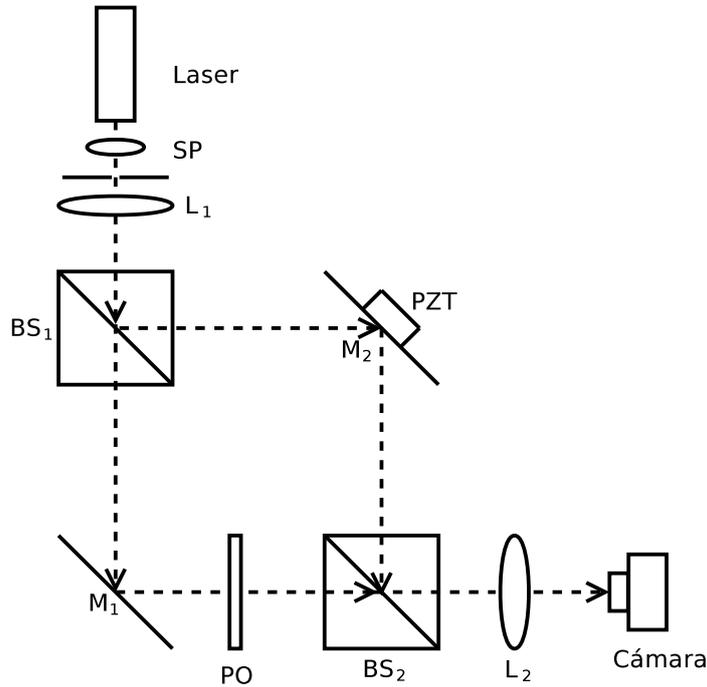


Figura 2.1: Interferómetro de Mach-Zehnder.

con la lente L_2 . De esta forma las imágenes que se obtienen, conocidas como interferogramas, son de la forma

$$I_m(x, y) = I_0(x, y) [1 + K(x, y) \cos(\phi(x, y) + \delta_m)], \quad (2.1)$$

donde (x, y) son coordenadas cartesianas, $I_0(x, y)$ es la intensidad media, $K(x, y)$ es el contraste o visibilidad, $\phi(x, y)$ es la fase que se busca calcular y δ_m es una fase global que representa la diferencia de fase entre los dos haces del interferómetro. En los métodos de phase-shifting se busca variar δ_m de forma de adquirir un conjunto de interferogramas con diferente desfase entre los haces de luz, para luego calcular la fase $\phi(x, y)$.

Existe una gran variedad de interferómetros que permiten generar el desfase variable necesario entre los dos haces de luz [1]. En el caso de la figura 2.1 el desfase se controla mediante el desplazamiento del espejo M_2 con un piezoeléctrico PZT . De esta forma, desplazando el espejo M_2 se consiguen interferogramas con

diferentes valores de δ_m . Por ejemplo, se pueden conseguir valores de desfasajes (δ_m) iguales a 0 , $\pi/2$, π y $3\pi/2$, obteniendo los interferogramas

$$I_1(x, y) = I_0(x, y) [1 + K(x, y) \cos(\phi(x, y))], \quad (2.2)$$

$$I_2(x, y) = I_0(x, y) [1 + K(x, y) \cos(\phi(x, y) + \pi/2)], \quad (2.3)$$

$$I_3(x, y) = I_0(x, y) [1 + K(x, y) \cos(\phi(x, y) + \pi)] \quad (2.4)$$

y

$$I_4(x, y) = I_0(x, y) [1 + K(x, y) \cos(\phi(x, y) + 3\pi/2)], \quad (2.5)$$

por lo que la fase ϕ se puede calcular como

$$\tan(\phi(x, y)) = \frac{I_4 - I_2}{I_1 - I_3}. \quad (2.6)$$

El interferómetro de Mach-Zehnder de la figura se eligió para ilustrar el principio del método, pero presenta serios problemas en la práctica, como la estabilidad del interferómetro, la dificultad para controlar en forma correcta el valor de δ_m y otros, por lo que para los resultados experimentales del resto de los capítulos se utilizaron interferogramas adquiridos con el interferómetro propuesto en [2].

2.1.2. Aplicaciones en perfilometría 3D

Existen diferentes métodos que permiten realizar la reconstrucción tridimensional de objetos sin entrar en contacto con ellos [3–5]. Los mismos pueden ser clasificados en tres categorías: En primer lugar, aquellos basados en la medición de retardos temporales [6, 7], en segundo lugar aquellos que utilizan características de las imágenes [8, 9], y por último aquellos que se basan en la triangulación de la posición [4, 10, 11]. Los primeros basan su funcionamiento en la emisión de una señal que es recibida luego de ser reflejada en el objeto de interés, se mide el tiempo entre que la señal fue emitida y que su reflejo fue recibido, estableciendo una relación

entre el tiempo de demora y la profundidad. Los segundos utilizan características de las imágenes que, bajo ciertas hipótesis, brindan información de la forma del objeto de interés. La última categoría utiliza un mínimo de dos elementos que le permiten obtener información geométrica del objeto a reconstruir. Dentro de esta última categoría existen técnicas de visión estereoscópica que utilizan dos cámaras y otras que utilizan una cámara y una fuente de luz, donde se incluyen las técnicas de luz estructurada. Una de las principales técnicas de luz estructurada es la de reconstrucciones a partir de proyección de franjas. Al observar las franjas proyectadas con una cámara desde una posición diferente a la de proyección éstas se ven deformadas. Modelando el sistema en forma correcta es posible extraer de dicha deformación las coordenadas de los puntos pertenecientes al objeto de interés. En la figura 2.2 se puede ver un esquema típico del montaje para un sistema de luz estructurada.

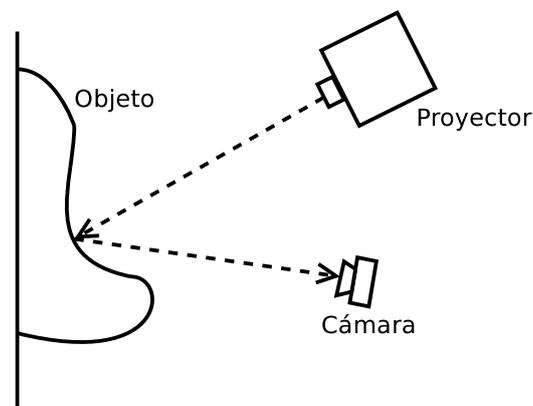


Figura 2.2: Esquema típico para un sistema de luz estructurada.

Es posible observar que, debido a que el sensor de la cámara y el sensor del proyector se encuentran en posiciones diferentes, las franjas se ven deformadas en función de la profundidad de la escena.

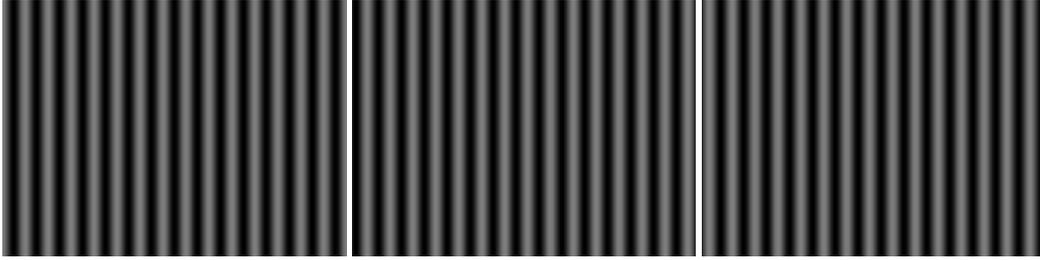


Figura 2.3: Ejemplos de patrones de franjas proyectados.

En nuestro caso la información necesaria para establecer la relación entre píxeles proyectados y adquiridos se encuentra codificada en la fase de sinusoides de patrones proyectados y de imágenes adquiridas. Las figuras 2.3 muestran ejemplos de patrones sinusoidales que se proyectan sobre una máscara de yeso y las figuras 2.4 ejemplos de imágenes adquiridas.



Figura 2.4: Ejemplos de patrones adquiridos.

Para la extracción de la fase se utilizan algoritmos de phase-shifting, por lo que para cada reconstrucción es necesaria la proyección de al menos tres patrones corridos en fase sobre el objeto. Por ejemplo, para tres patrones de la forma

$$I_1(x, y) = I_0(x, y) \left[1 + K(x, y) \cos \left(\phi(x, y) - \frac{2\pi}{3} \right) \right], \quad (2.7)$$

$$I_2(x, y) = I_0(x, y) [1 + K(x, y) \cos (\phi(x, y))] \quad (2.8)$$

y

$$I_3(x, y) = I_0(x, y) \left[1 + K(x, y) \cos \left(\phi(x, y) + \frac{2\pi}{3} \right) \right], \quad (2.9)$$

la fase $\phi(x, y)$ puede ser calculada como

$$\tan(\phi(x, y)) = \sqrt{3} \frac{I_1 - I_3}{-I_1 + 2I_2 - I_3}. \quad (2.10)$$

Finalmente con la información de la fase $\phi(x, y)$ es posible realizar la reconstrucción del objeto. La figura 2.5 corresponde a la reconstrucción de la máscara de los patrones anteriores.



Figura 2.5: Reconstrucción 3D de la máscara utilizada de ejemplo.

2.1.3. Aplicaciones en deflectometría

La deflectometría es una técnica de medida de la fase que se basa en la óptica geométrica para estudiar superficies reflectantes [12, 13] con luz incoherente. La figura 2.6 muestra un esquema típico utilizado. En el monitor se despliegan patrones sinusoidales que luego de ser reflejados por la superficie a estudiar, son adquiridos por la cámara.

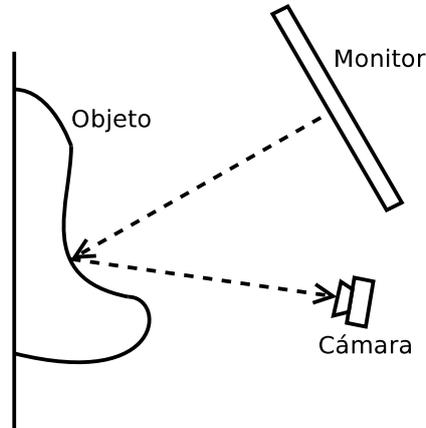


Figura 2.6: Esquema típico para un sistema de deflectometría.

Los patrones adquiridos verifican expresiones de la forma mostrada en (2.7), (2.8) y (2.9), por lo que aplicando algoritmos de phase-shifting es posible calcular la fase asociada a cada pixel. Finalmente se puede conocer la pendiente de cada punto en la superficie por triangulación al asociar determinado valor de fase en el monitor con el mismo en la imagen adquirida.

2.2. Algoritmos de phase-shifting

2.2.1. Algoritmo de cuatro pasos de Bruning et al.

Con el objetivo de introducir los algoritmos de phase-shifting a continuación se describe brevemente el llamado algoritmo de cuatro pasos de Bruning et al. [14].

En las secciones anteriores se mostró que en diferentes áreas se obtienen intensidades de la forma

$$I_m(x, y) = I_0(x, y) [1 + K(x, y) \cos(\phi(x, y) + \delta_m)], \quad (2.11)$$

donde (x, y) son coordenadas cartesianas, $I_0(x, y)$ es la intensidad media, $K(x, y)$ es el contraste, $\phi(x, y)$ es la fase que se busca calcular y δ_m son los saltos de fase entre interferogramas.

Para este algoritmo se trabaja con saltos de fase entre interferogramas iguales a 0 , $\pi/2$, π y $3\pi/2$, por lo que sustituyendo en (2.11) se tiene

$$I_1(x, y) = I_0(x, y) [1 + K(x, y) \cos(\phi(x, y))], \quad (2.12)$$

$$I_2(x, y) = I_0(x, y) [1 + K(x, y) \cos(\phi(x, y) + \pi/2)], \quad (2.13)$$

$$I_3(x, y) = I_0(x, y) [1 + K(x, y) \cos(\phi(x, y) + \pi)] \quad (2.14)$$

y

$$I_4(x, y) = I_0(x, y) [1 + K(x, y) \cos(\phi(x, y) + 3\pi/2)]. \quad (2.15)$$

A partir de identidades trigonométricas las ecuaciones (2.12)-(2.15) pueden reescribirse como

$$I_1(x, y) = I_0(x, y) [1 + K(x, y) \cos(\phi(x, y))], \quad (2.16)$$

$$I_2(x, y) = I_0(x, y) [1 - K(x, y) \sin(\phi(x, y))], \quad (2.17)$$

$$I_3(x, y) = I_0(x, y) [1 - K(x, y) \cos(\phi(x, y))] \quad (2.18)$$

y

$$I_4(x, y) = I_0(x, y) [1 + K(x, y) \sin(\phi(x, y))]. \quad (2.19)$$

A partir de las ecuaciones (2.16)-(2.19) es fácil calcular el valor de la fase $\phi(x, y)$ como

$$\tan(\phi(x, y)) = \frac{I_4 - I_2}{I_1 - I_3}. \quad (2.20)$$

2.2.2. Algoritmo de Carré

No siempre se conoce el desfase entre interferogramas como en el caso anterior. Esto se puede deber a que el salto de fase tiene determinado error. En 1966, Carré propuso un algoritmo para trabajar con un conjunto de cuatro interferogramas donde el salto de fase en entre interferogramas consecutivos es constante (2α)

pero desconocido [1, 15]. Para simplificar los cálculos, los saltos de fase se toman como -3α , $-\alpha$, α y 3α , por lo que los interferogramas pueden escribirse como

$$I_1(x, y) = I_0(x, y) [1 + K(x, y) \cos(\phi(x, y) - 3\alpha)], \quad (2.21)$$

$$I_2(x, y) = I_0(x, y) [1 + K(x, y) \cos(\phi(x, y) - \alpha)], \quad (2.22)$$

$$I_3(x, y) = I_0(x, y) [1 + K(x, y) \cos(\phi(x, y) + \alpha)] \quad (2.23)$$

y

$$I_4(x, y) = I_0(x, y) [1 + K(x, y) \cos(\phi(x, y) + 3\alpha)]. \quad (2.24)$$

El algoritmo para calcular la fase ϕ puede dividirse en dos etapas, una primera donde se calcula el salto de fase α y una segunda donde, conocido el valor de α , se aplica un algoritmo de phase-shifting para determinar el valor de ϕ . Aplicando identidades trigonométricas se puede deducir la siguiente ecuación para calcular α

$$\tan(\alpha) = \sqrt{\frac{-I_1 + 3I_2 - 3I_3 + I_4}{I_1 + I_2 - I_3 - I_4}}. \quad (2.25)$$

Luego de conocido el valor de α es posible calcular la fase como

$$\tan(\phi) = \tan(\alpha) \frac{I_1 + I_2 - I_3 - I_4}{-I_1 + I_2 + I_3 - I_4}. \quad (2.26)$$

2.2.3. Algoritmo de Hariharan et al.

Otro algoritmo muy utilizado es el algoritmo de Hariharan et al. propuesto en 1987 [16]. Consiste en un algoritmo para un conjunto de cinco interferogramas con saltos de fase iguales a -2α , $-\alpha$, 0 , α y 2α . El algoritmo busca ser lo menos sensible posible a errores en el cálculo del salto de fase α . Los interferogramas son de la forma

$$I_1(x, y) = I_0(x, y) [1 + K(x, y) \cos(\phi(x, y) - 2\alpha)], \quad (2.27)$$

$$I_2(x, y) = I_0(x, y) [1 + K(x, y) \cos(\phi(x, y) - \alpha)], \quad (2.28)$$

$$I_3(x, y) = I_0(x, y) [1 + K(x, y) \cos(\phi(x, y))], \quad (2.29)$$

$$I_4(x, y) = I_0(x, y) [1 + K(x, y) \cos(\phi(x, y) + \alpha)] \quad (2.30)$$

y

$$I_5(x, y) = I_0(x, y) [1 + K(x, y) \cos(\phi(x, y) + 2\alpha)]. \quad (2.31)$$

Entonces el algoritmo es

$$\tan(\phi) = 2 \sin(\alpha) \frac{I_2 - I_4}{-I_1 + 2I_3 - I_5}. \quad (2.32)$$

La sensibilidad al error en el valor de α es mínima para $\alpha = \pi/2$, por lo que en general se aplica el algoritmo para ese valor, siendo

$$\tan(\phi) = 2 \frac{I_2 - I_4}{-I_1 + 2I_3 - I_5}. \quad (2.33)$$

2.2.4. Algoritmo de mínimos cuadrados

En el siguiente caso se busca trabajar con interferogramas con saltos de fase (δ_m) no equiespaciados. El algoritmo fue propuesto por primera vez en 1984 por Greivenkamp [17]. Partiendo de la ecuación (2.11) se tiene

$$I_m = I_0 + I_0 K \cos(\phi) \cos(\delta_m) - I_0 K \sin(\phi) \sin(\delta_m) \quad (2.34)$$

Suponiendo que se conocen los valores de los saltos de fase δ_m , se puede aplicar el método de mínimos cuadrados para calcular los valores de I_0 , $I_0 K \cos(\phi)$ y $I_0 K \sin(\phi)$. Se define el error E como la diferencia entre las imágenes adquiridas y la imagen que se genera con (2.34), por lo que

$$E^2 = \sum_{m=1}^M [I_m - I_0 - I_0 K \cos(\phi) \cos(\delta_m) + I_0 K \sin(\phi) \sin(\delta_m)]^2 \quad (2.35)$$

Con el método de mínimos cuadrados se puede encontrar los valores que minimizan E . El resultado es

$$\begin{pmatrix} I_0 \\ I_0 K \cos(\phi) \\ I_0 K \sin(\phi) \end{pmatrix} = A^{-1} B, \quad (2.36)$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} M & \sum_{m=1}^M \cos(\delta_m) & \sum_{m=1}^M \sin(\delta_m) \\ \sum_{m=1}^M \cos(\delta_m) & \sum_{m=1}^M \cos^2(\delta_m) & \sum_{m=1}^M \cos(\delta_m) \sin(\delta_m) \\ \sum_{m=1}^M \sin(\delta_m) & \sum_{m=1}^M \cos(\delta_m) \sin(\delta_m) & \sum_{m=1}^M \sin^2(\delta_m) \end{pmatrix} \quad (2.37)$$

y

$$B = \begin{pmatrix} \sum_{m=1}^M I_m \\ \sum_{m=1}^M I_m \cos(\delta_m) \\ \sum_{m=1}^M I_m \sin(\delta_m) \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

Con los valores calculados en (2.36) es posible calcular los valores de $I_0(x, y)$, $K(x, y)$ y $\phi(x, y)$.

Un caso particular del algoritmo es cuando $\delta_m = m \frac{2\pi}{M}$ donde el resultado coincide con el algoritmo propuesto por Bruning et al. en 1974 [14], siendo

$$\tan(\phi) = \frac{-\sum_{m=1}^M I_m \sin(\delta_m)}{\sum_{m=1}^M I_m \cos(\delta_m)}. \quad (2.39)$$

En el caso que no se conozcan los saltos de fase previo a utilizar el algoritmo, se han desarrollado algoritmos para el cálculo de los saltos de fase δ_m como, por el ejemplo, el algoritmo de Farrell y Player en 1992 [18], Gao et al. en 2009 [19], Xu et al. en 2010 [20], Guo y Zhang en 2013 [21] o Li et al. en 2017 [22].

En 2004 Wang y Han [23,24] propusieron un algoritmo iterativo donde se calculan los saltos de fase δ_m por medio de mínimos cuadrados suponiendo conocido el valor de $I_0(x, y)$, $K(x, y)$ y $\phi(x, y)$, para luego calcular esos valores con el algoritmo de Greivenkamp. Este procedimiento se repite hasta que converja.

2.3. Fuentes de error

Existen variadas fuentes de error cuando se aplican técnicas de phase-shifting, por lo que, aunque en condiciones ideales diferentes algoritmos deberían dar el mismo resultado para un conjunto dado de interferogramas, la fase calculada varía según el algoritmo que se emplee. A continuación se presentan algunas de las fuentes de error más frecuentes en los sistemas estudiados.

2.3.1. Errores en el salto de fase

En los sistemas, ya sean interferómetros o sistemas de 3D, es importante el control del salto de fase (δ_m en (2.1)). Si el salto de fase que se realiza en el sistema difiere del deseado el resultado al aplicar el algoritmo de phase-shifting va a ser una fase que difiere de la real en cierto error [16, 25–27].

Cuando se trabaja con cuatro interferogramas o más el algoritmo que se puede emplear no es único, por lo que se pueden elegir soluciones que minimicen la propagación del error causado por un salto de fase incorrecto. Por ejemplo Schwider et al. [28] proponen un algoritmo que minimiza la propagación del error causado por el salto de fase cuando se trabaja con cuatro interferogramas con saltos de fase entre interferogramas en torno a $\pi/2$. En lugar de utilizar el algoritmo de la ecuación (2.20) proponen el algoritmo

$$\tan(\phi) = \frac{-I_1 + 3I_2 - I_3 - I_4}{I_1 + I_2 - 3I_3 + I_4}. \quad (2.40)$$

En el capítulo 4 se presenta un método sistemático para minimizar el error causado por desviaciones en el valor del salto de fase para un conjunto de M interferogramas.

Otro enfoque para minimizar el error consiste en aplicar un algoritmo que calcule el salto de fase antes de aplicar el algoritmo de phase-shifting (Como en el ejemplo del algoritmo de Carré). En el capítulo 5 se presenta un algoritmo para el cálculo del salto de fase cuando se trabaja con M interferogramas.

2.3.2. Errores por ruido aditivo y de fase

Dos de los principales tipos de ruido en interferometría son el ruido aditivo y el ruido de fase [29]. El ruido aditivo se debe al ambiente y a ruido electrónico, mientras que el de fase se debe a interferencia aleatoria o speckle debido a reflejos en superficies rugosas. Los interferogramas pueden modelarse como

$$I_m(x, y) = I_0(x, y) [1 + K(x, y) \cos(\phi(x, y) + \delta_m + n_m^{(p)}(x, y))] + n_m^{(a)}(x, y), \quad (2.41)$$

donde $n_m^{(p)}(x, y)$ es el ruido de fase y $n_m^{(a)}(x, y)$ es el ruido aditivo.

En los siguientes capítulos se describe como seleccionar los algoritmos de phase-shifting de modo que se minimice el error causado por el ruido en el cálculo de la fase.

2.3.3. Patrones no sinusoidales

Por diferentes razones las imágenes adquiridas no verifican la ecuación (2.1) debido a la presencia de armónicos. Las imágenes pueden modelarse como

$$I_m = I_0 \left[1 + \sum_{p=1}^{\infty} K_p \cos[(\phi + \delta_m) p] \right], \quad (2.42)$$

donde K_p es la amplitud del p -ésimo armónico. K_1 es el contraste K .

La presencia de armónicos se origina en el sistema utilizado o en la adquisición en la cámara. En el caso que se de en la cámara se debe al comportamiento no lineal del sensor. En general se modela el comportamiento del sensor con un modelo de corrección gamma [1] que consiste en relacionar la imagen detectada y la real según

$$I_{Detectada} = I_{Real}^{\gamma} \quad (2.43)$$

Trabajando en torno a un valor de intensidad el efecto de la no linealidad en el sensor disminuye, o sea con bajo contraste, pero esto genera otro tipo de problemas, por lo que se intenta compensar el efecto de la no linealidad o se busca trabajar con cámaras con respuesta lineal.

Los armónicos que se producen en los sistemas dependen mucho del montaje con el que se esté trabajando. Por ejemplo en interferometría puede generarse un segundo armónico por un tercer haz de luz. Esto puede ser intencional o por algún reflejo no deseado. Se puede corregir utilizando algoritmos de phase-shifting insensibles a dicho armónico. En un apéndice del capítulo 4 se muestra como generar algoritmos insensibles a determinados armónicos.

En el caso de aplicaciones para reconstrucción 3D se generan armónicos por la no linealidad en el proyector o el monitor. Esto puede corregirse con un modelo tipo gamma ($I_{Detectada} = I_{Real}^{\gamma}$) o en el caso de del proyector se puede trabajar con un patrón desenfocado de forma que se filtren los armónicos no deseados [4, 11].

2.3.4. Errores por vibraciones

En interferometría la vibración es una fuente no despreciable de error por lo que se busca minimizarla [30]. Para esto los interferómetros se montan sobre mesas que aíslen de la vibración externa, se alejan de fuentes de vibración, y se busca utilizar montajes con la menor cantidad posible de elementos sensibles a las vibraciones [1].

En presencia de vibraciones los patrones adquiridos difieren de (2.1) en una

dependencia temporal ($V_k(i, j, t)$) sumada a la fase $\phi(i, j)$,

$$I_k(i, j, t) = a(i, j) + b(i, j) \cos(\phi(i, j) + \delta_k + V_k(i, j, t)). \quad (2.44)$$

En el capítulo 5 se propone una técnica para minimizar el error causado en el cálculo de los saltos de fase debido a las vibraciones.

Capítulo 3

Generación de algoritmos de phase-shifting con M saltos de fase arbitrarios

Los algoritmos de phase-shifting requieren de la medida de una serie de intensidades de la forma

$$I_m(x, y) = I_0(x, y) [1 + K(x, y) \cos(\phi(x, y) + \delta_m)], \quad (3.1)$$

donde (x, y) son coordenadas cartesianas, $I_0(x, y)$ es la intensidad media, $K(x, y)$ es el contraste, $\phi(x, y)$ es la fase que se busca calcular y δ_m son los saltos de fase entre interferogramas.

En la práctica, en lugar de saltos de fase equidistantes, los saltos (δ_m) pueden tomar valores arbitrarios. Esto puede ocurrir porque se decide trabajar con saltos de fase arbitrarios o porque existe cierto error en los saltos con los que se decidió trabajar.

En este capítulo se presenta un método algebraico para generar algoritmos de phase-shifting con M pasos arbitrariamente espaciados que fue propuesto en [31] y se muestran ejemplos particulares de algoritmos con pasos arbitrarios.

3.1. Generación de algoritmos con M interferogramas

3.1.1. Algoritmo general

Se considera la combinación lineal de los interferogramas I_m de la forma,

$$S = \sum_{m=1}^M c_m I_m, \quad (3.2)$$

donde c_m son coeficientes complejos que verifican la condición

$$\sum_{m=1}^M c_m = 0. \quad (3.3)$$

Sustituyendo la ec. (3.1) en la ec. (3.2) y teniendo en cuenta la condición (3.3) se tiene

$$S = I_0 K \left[\cos(\phi) \sum_{m=1}^M c_m \cos(\delta_m) - \sin(\phi) \sum_{m=1}^M c_m \sin(\delta_m) \right], \quad (3.4)$$

y entonces

$$\operatorname{Re}(S) = I_0 K \left[\cos(\phi) \sum_{m=1}^M \operatorname{Re}(c_m) \cos(\delta_m) - \sin(\phi) \sum_{m=1}^M \operatorname{Re}(c_m) \sin(\delta_m) \right] \quad (3.5)$$

y

$$\operatorname{Im}(S) = I_0 K \left[\cos(\phi) \sum_{m=1}^M \operatorname{Im}(c_m) \cos(\delta_m) - \sin(\phi) \sum_{m=1}^M \operatorname{Im}(c_m) \sin(\delta_m) \right], \quad (3.6)$$

donde $\operatorname{Re}(\dots)$ y $\operatorname{Im}(\dots)$ son la parte real e imaginaria respectivamente.

Las ecuaciones (3.5) y (3.6) componen un sistema de ecuaciones donde las incógnitas son $\sin(\phi)$ y $\cos(\phi)$, donde $\operatorname{Im}(S)$ y $\operatorname{Re}(S)$ son dados por la ecuación (3.2), verificando la condición (3.3). Existe solución siempre que se verifique

$$\sum_{m=1}^M \operatorname{Im}(c_m) \sin(\delta_m) \sum_{m=1}^M \operatorname{Re}(c_m) \cos(\delta_m) \neq \sum_{m=1}^M \operatorname{Re}(c_m) \sin(\delta_m) \sum_{m=1}^M \operatorname{Im}(c_m) \cos(\delta_m). \quad (3.7)$$

Es claro que los coeficientes c_m no pueden ser todos reales o puramente imaginarios para verificar (3.7).

Asumiendo que se verifica la condición (3.7), al resolver el sistema de las ecuaciones (3.5) y (3.6) se obtiene

$$\sin(\phi) = \frac{1}{I_0 K} \frac{\operatorname{Im}(S) \sum_{m=1}^M \operatorname{Re}(c_m) \cos(\delta_m) - \operatorname{Re}(S) \sum_{m=1}^M \operatorname{Im}(c_m) \cos(\delta_m)}{\sum_{m=1}^M \operatorname{Re}(c_m) \sin(\delta_m) \sum_{m=1}^M \operatorname{Im}(c_m) \cos(\delta_m) - \sum_{m=1}^M \operatorname{Im}(c_m) \sin(\delta_m) \sum_{m=1}^M \operatorname{Re}(c_m) \cos(\delta_m)} \quad (3.8)$$

y

$$\cos(\phi) = \frac{1}{I_0 K} \frac{\operatorname{Im}(S) \sum_{m=1}^M \operatorname{Re}(c_m) \sin(\delta_m) - \operatorname{Re}(S) \sum_{m=1}^M \operatorname{Im}(c_m) \sin(\delta_m)}{\sum_{m=1}^M \operatorname{Re}(c_m) \sin(\delta_m) \sum_{m=1}^M \operatorname{Im}(c_m) \cos(\delta_m) - \sum_{m=1}^M \operatorname{Im}(c_m) \sin(\delta_m) \sum_{m=1}^M \operatorname{Re}(c_m) \cos(\delta_m)} \quad (3.9)$$

Entonces finalmente se tiene

$$\tan(\phi) = \frac{\operatorname{Im}(S) \sum_{m=1}^M \operatorname{Re}(c_m) \cos(\delta_m) - \operatorname{Re}(S) \sum_{m=1}^M \operatorname{Im}(c_m) \cos(\delta_m)}{\operatorname{Im}(S) \sum_{m=1}^M \operatorname{Re}(c_m) \sin(\delta_m) - \operatorname{Re}(S) \sum_{m=1}^M \operatorname{Im}(c_m) \sin(\delta_m)}, \quad (3.10)$$

o en forma equivalente utilizando la ecuación (3.2)

$$\tan(\phi) = \frac{\sum_{m=1}^M \operatorname{Im}(c_m) I_m \sum_{m=1}^M \operatorname{Re}(c_m) \cos(\delta_m) - \sum_{m=1}^M \operatorname{Re}(c_m) I_m \sum_{m=1}^M \operatorname{Im}(c_m) \cos(\delta_m)}{\sum_{m=1}^M \operatorname{Im}(c_m) I_m \sum_{m=1}^M \operatorname{Re}(c_m) \sin(\delta_m) - \sum_{m=1}^M \operatorname{Re}(c_m) I_m \sum_{m=1}^M \operatorname{Im}(c_m) \sin(\delta_m)}. \quad (3.11)$$

Por lo tanto aplicando el operador \tan^{-1} puede calcularse la fase deseada (ϕ) a partir de los interferogramas (I_m) con M saltos de fase arbitrarios (δ_m). Obviamente existen diferentes formas de elegir los coeficientes c_m para satisfacer la condición (3.3)

3.1.2. Algoritmo simplificado

Una versión simplificada del algoritmo para M saltos de fase arbitrarios se puede obtener si los coeficientes c_m verifican (3.3) y además

$$\sum_{m=1}^M c_m e^{-i\delta_m} = 0. \quad (3.12)$$

Tomando las ecuaciones (3.1), (3.3) y (3.12)

$$\sum_{m=1}^M c_m I_m = \frac{I_0 K}{2} e^{i\phi} \sum_{m=1}^M c_m e^{i\delta_m}. \quad (3.13)$$

Entonces tomando el argumento de los dos lados de la igualdad se obtiene

$$\phi = \arg \left(\sum_{m=1}^M c_m I_m \right) - \arg \left(\sum_{m=1}^M c_m e^{i\delta_m} \right), \quad (3.14)$$

donde $\arg(\dots)$ es la función argumento.

3.1.3. Ejemplos de algoritmos generalizados

Como ejemplo de aplicación de la ecuación (3.14) consideramos el caso en que se trabaja con tres saltos de fase arbitrarios ($M = 3$), entonces los coeficientes c_m son únicos y con valores

$$\begin{cases} c_1 = c_0 (e^{-i\delta_3} - e^{-i\delta_2}) \\ c_2 = c_0 (e^{-i\delta_1} - e^{-i\delta_3}) \\ c_3 = c_0 (e^{-i\delta_2} - e^{-i\delta_1}) \end{cases} \quad (3.15)$$

donde c_0 es un número real arbitrario. Este conjunto de coeficientes claramente satisfacen (3.3) y (3.12).

Sustituyendo las ecuaciones (3.15) en (3.14)

$$\phi = \arg \left[(I_2 - I_3) e^{-i\delta_1} + (I_3 - I_1) e^{-i\delta_2} + (I_1 - I_2) e^{-i\delta_3} \right] \pm \frac{\pi}{2}, \quad (3.16)$$

o en forma equivalente,

$$\tan(\phi) = \frac{(I_2 - I_3) \cos(\delta_1) + (I_3 - I_1) \cos(\delta_2) + (I_1 - I_2) \cos(\delta_3)}{(I_2 - I_3) \sin(\delta_1) + (I_3 - I_1) \sin(\delta_2) + (I_1 - I_2) \sin(\delta_3)}. \quad (3.17)$$

Esta formula genera un algoritmo general para tres pasos arbitrarios [31].

Otro caso particular se da al considerar que se trabaja con M pasos equiespaciados de la forma $\delta_m = \frac{2\pi m}{M}$ con $m = 1, \dots, M$ Eligiendo $c_m = e^{-\frac{i2\pi m}{M}}$ la expresión (3.14) se reduce a

$$\phi = \arg \left(\sum_{m=1}^M I_m e^{-\frac{i2\pi m}{M}} \right), \quad (3.18)$$

o en forma equivalente,

$$\tan(\phi) = -\frac{\sum_{m=1}^M I_m \sin \left(\frac{2\pi m}{M} \right)}{\sum_{m=1}^M I_m \cos \left(\frac{2\pi m}{M} \right)} \quad (3.19)$$

Este último algoritmo es el algoritmo propuesto por Bruning et al. [1, 14].

3.1.4. Conclusiones

Se presentó un método algebraico para generar algoritmos de phase-shifting con M pasos arbitrarios. En general se trabaja con pasos equiespaciados, condición que no siempre se verifica exactamente en los interferogramas. Por esta razón los algoritmos diseñados para saltos de fase equidistantes generan errores en la fase calculada. Esta fuente de errores puede ser reducida utilizando algoritmos generados para saltos de fase arbitrarios como los algoritmos que se presentaron en este capítulo.

Capítulo 4

Algoritmos de phase-shifting óptimos en presencia de ruido de fase y ruido aditivo

Como ya se desarrollo en capítulos anteriores los interferogramas libres de fuentes de error pueden modelarse como

$$I_m(x, y) = I_0(x, y) [1 + K(x, y) \cos(\phi(x, y) + \delta_m)], \quad (4.1)$$

donde (x, y) son coordenadas Cartesianas, I_0 es la intensidad media, K es el contraste y ϕ es la fase que se busca determinar con los algoritmos de phase shifting. δ_m son los saltos de fase con $m = 1 \dots M$.

En general los algoritmos de phase shifting pueden ser escritos como el cociente de dos combinaciones lineales de los interferogramas I_m

$$\tan(\phi) = \frac{\sum_{m=1}^M b_m I_m}{\sum_{m=1}^M a_m I_m}, \quad (4.2)$$

con a_m y b_m coeficientes reales.

La expresión (4.2) presupone que los saltos de fase son conocidos. Sin embargo en la práctica este requerimiento no es siempre posible cumplirlo debido a que por diferentes fuentes de error las fases de referencia pueden verse modificadas, por lo que los saltos de fase δ_m son sólo conocidos aproximadamente [31–35], o los saltos de fase deben calcularse a partir de los propios interferogramas [18,19,21,23,36,37].

El ruido en los interferogramas puede modelarse como una combinación de ruido aditivo y ruido de fase [29], por lo que los interferogramas pueden modelarse como

$$I_m(x, y) = I_0(x, y) [1 + K(x, y) \cos(\phi(x, y) + \delta_m + n_m^{(p)}(x, y))] + n_m^{(a)}(x, y), \quad (4.3)$$

donde $n_m^{(p)}(x, y)$ es el ruido de fase y $n_m^{(a)}(x, y)$ es el ruido aditivo.

Algoritmos para minimizar el error causado por la presencia de ruido aditivo y de fase cuando se trabaja con saltos de fase constante fueron estudiados en [38,39].

El objetivo del presente capítulo es determinar los algoritmos que minimizan la propagación del ruido de fase y aditivo en el caso que se trabaja con saltos de fase (δ_m) arbitrarios.

En la siguiente sección se determinan las condiciones que deben verificar los coeficientes a_m y b_m para que (4.2) devuelva la fase correcta. En las secciones 4.2 y 4.3 se modela la propagación del ruido aditivo y de fase respectivamente. Se optimiza la elección de a_m y b_m para minimizar el error en la sección 4.4. Finalmente en las secciones 4.5 y 4.6 se presentan simulaciones y resultados experimentales.

4.1. Algoritmo de phase-shifting con M pasos arbitrarios

Considerando que los coeficientes a_m y b_m son la parte real e imaginaria de un número complejo c_m ($c_m = a_m + ib_m$), se puede reescribir (4.2) como

$$\phi = \arg \left(\sum_{m=1}^M c_m I_m \right), \quad (4.4)$$

donde \arg es la función argumento.

Utilizando (4.1) se puede escribir

$$\sum_{m=1}^M c_m I_m = I_0 \sum_{m=1}^M c_m + \frac{I_0 K}{2} e^{i\phi} \sum_{m=1}^M c_m e^{i\delta_m} + \frac{I_0 K}{2} e^{-i\phi} \sum_{m=1}^M c_m e^{-i\delta_m}. \quad (4.5)$$

Es claro que para un conjunto de valores δ_m dados, para que la ecuación (4.4) sea válida, deben verificarse las siguientes condiciones para los coeficientes c_m

$$\sum_{m=1}^M c_m = 0, \quad (4.6)$$

$$\sum_{m=1}^M c_m e^{-i\delta_m} = 0, \quad (4.7)$$

y

$$\sum_{m=1}^M c_m e^{i\delta_m} = \alpha, \quad (4.8)$$

donde α es un número real positivo. En caso que α sea un complejo no real positivo, la fase calculada difiere de la real en una constante global.

En forma equivalente, en función de a_m y b_m , las condiciones (4.6), (4.7) y (4.8) pueden reescribirse como

$$\sum_{m=1}^M a_m = 0, \quad (4.9)$$

$$\sum_{m=1}^M b_m = 0, \quad (4.10)$$

$$\sum_{m=1}^M b_m \cos(\delta_m) = 0, \quad (4.11)$$

$$\sum_{m=1}^M a_m \sin(\delta_m) = 0, \quad (4.12)$$

$$\sum_{m=1}^M a_m \cos(\delta_m) = \alpha/2, \quad (4.13)$$

$$\sum_{m=1}^M b_m \sin(\delta_m) = -\alpha/2. \quad (4.14)$$

Entonces, cuando se trabaja con M saltos de fase, se tienen que definir $2M$ coeficientes reales $(a_1, \dots, a_M, b_1, \dots, b_M)$ que verifiquen las seis ecuaciones (4.9)-(4.14), por lo que se tienen $2M - 6$ coeficientes libres. Por ejemplo, en el caso en que se trabaja con tres interferogramas ($M = 3$), no se tienen parámetros libres y entonces el algoritmo para calcular la fase dado un conjunto de pasos δ_m es único (salvo por un factor multiplicativo global que se cancela en la ecuación (4.2)). Pero para $M > 3$, para cada conjunto de valores δ_m , el algoritmo no es único, y por lo tanto es posible optimizar la elección de los coeficientes de forma de minimizar el error en el cálculo de la fase causado por diferentes fuentes de error. Algunas de estas fuentes de error son la presencia de armónicos, el ruido aditivo o el ruido de fase. En las siguientes secciones se estudia la propagación de estas fuentes de error en los algoritmos y como minimizar dicha propagación.

4.2. Modelado y estimación del error en la fase inducido por ruido aditivo

Se modela un interferograma ruidoso como la adición de un interferograma sin ruido y una matriz de ruido. Entonces el m -ésimo interferograma es de la forma

$$I_m = I_0 [1 + K \cos(\phi + \delta_m)] + n_m^{(a)}, \quad (4.15)$$

donde $n_m^{(a)}(x, y)$ es el ruido aditivo. (Por el resto de esta sección se denota el ruido aditivo simplemente como n_m).

De la ecuación (4.16) se tiene

$$\sum_{m=1}^M c_m I_m = I_0 \sum_{m=1}^M c_m + \frac{I_0 K}{2} \sum_{m=1}^M c_m e^{i(\phi+\delta_m)} + \frac{I_0 K}{2} \sum_{m=1}^M c_m e^{-i(\phi+\delta_m)} + \sum_{m=1}^M c_m n_m \quad (4.16)$$

o, en forma equivalente (usando las ecuaciones (4.6), (4.7) y (4.8)),

$$\sum_{m=1}^M c_m I_m = \frac{I_0 K}{2} e^{i\phi} \alpha + \sum_{m=1}^M c_m n_m \quad (4.17)$$

Definiendo $S' = \sum_{m=1}^M c_m I_m$, $S = \frac{I_0 K}{2} e^{i\phi} \alpha$ y $N = \sum_{m=1}^M c_m n_m$ se tiene

$$S' = S + N. \quad (4.18)$$

Para minimizar el error causado por el ruido utilizamos algunas propiedades de N como variable aleatoria.

La figura 4.1 representa con un círculo los puntos donde es más probable encontrar a S' . Calculando el radio del círculo es posible obtener la máxima desviación de la fase calculada respecto de la real.

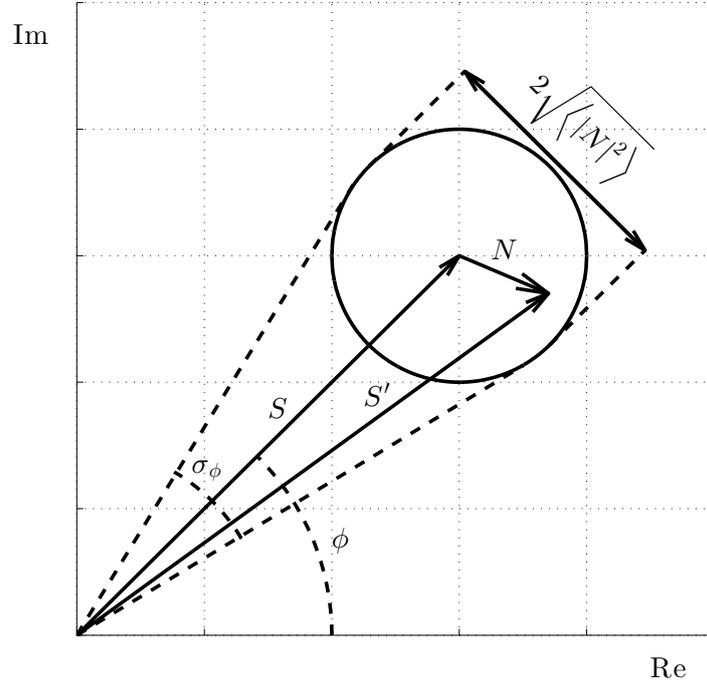


Figura 4.1: Representación de la ecuación (4.18) en el plano complejo. $\sigma_\phi/2$ es la máxima desviación de la fase calculada (ϕ') respecto a la fase real (ϕ).

Estimamos el radio del círculo como la raíz cuadrada del valor esperado de $|N|^2$. El valor esperado de $|N|^2$ viene dado por (Ver apéndice 4.A)

$$\langle |N|^2 \rangle = \sum_{m=1}^M \sigma_{n_m}^2 (a_m^2 + b_m^2) \quad (4.19)$$

donde a_m y b_m son la parte real e imaginaria de c_m respectivamente, $\langle \dots \rangle$ es el valor esperado y σ_{n_m} es la desviación estándar del ruido.

Como se puede ver en la figura 4.1 la desviación máxima ($\frac{\sigma_\phi}{2}$) de la fase calculada respecto a la real es tal que

$$\sin\left(\frac{\sigma_\phi}{2}\right) = \frac{\sqrt{\langle |N|^2 \rangle}}{|S|} \quad (4.20)$$

o, si σ_ϕ es pequeño,

$$\sigma_\phi^2 = 4 \frac{\langle |N|^2 \rangle}{|S|^2}. \quad (4.21)$$

De (4.19), (4.21) y la definición de S

$$\sigma_\phi^2 = \frac{16}{(KI_0\alpha)^2} \sum_{m=1}^M \sigma_{n_m}^2 (a_m^2 + b_m^2). \quad (4.22)$$

Como se esperaba σ_ϕ depende de la relación entre el desviación standard del ruido y del contraste en las imágenes. También depende de los coeficientes a_m y b_m por lo que es posible elegir estos coeficientes de forma de minimizar la propagación del ruido.

4.3. Modelado y estimación del error en la fase inducido por ruido de fase

Consideramos el caso en que se trabaja con interferogramas con ruido de fase, o sea,

$$I_m = I_0 [1 + K \cos(\phi + \delta_m + n_m^{(p)})], \quad (4.23)$$

donde $n_m^{(p)}(x, y)$ es el ruido de fase (Por el resto de esta sección se denota al ruido de fase simplemente como n_m).

Debido al ruido, la fase calculada utilizando la ecuación (4.2)($\phi'(x, y)$) no coincidirá exactamente con la fase real $\phi(x, y)$. A partir de la ecuación (4.23) se tiene

$$\sum_{m=1}^M c_m I_m = I_0 \sum_{m=1}^M c_m + \frac{I_0 K}{2} \sum_{m=1}^M c_m e^{i(\phi + \delta_m + n_m)} + \frac{I_0 K}{2} \sum_{m=1}^M c_m e^{-i(\phi + \delta_m + n_m)} \quad (4.24)$$

o, en forma equivalente (usando la ecuación(4.6)),

$$\sum_{m=1}^M c_m I_m = \frac{I_0 K}{2} e^{i\phi} \sum_{m=1}^M c_m e^{i(\delta_m + n_m)} + \frac{I_0 K}{2} e^{-i\phi} \sum_{m=1}^M c_m e^{-i(\delta_m + n_m)} \quad (4.25)$$

La última expresión se puede simplificar considerando que el ruido es pequeño, o sea $n_m \ll 1$. Entonces, a primer orden en n_m se tiene $e^{in_m} \approx 1 + in_m$ y $e^{-in_m} \approx$

$1 - in_m$, por lo que se tiene

$$\sum_{m=1}^M c_m I_m \approx \frac{I_0 K}{2} e^{i\phi} \sum_{m=1}^M c_m e^{i\delta_m} (1 + in_m) + \frac{I_0 K}{2} e^{-i\phi} \sum_{m=1}^M c_m e^{-i\delta_m} (1 - in_m). \quad (4.26)$$

A partir de (4.7) y (4.8) resulta

$$\sum_{m=1}^M c_m I_m \approx \frac{I_0 K}{2} \left[e^{i\phi} \alpha + e^{i\phi} i \sum_{m=1}^M n_m c_m e^{i\delta_m} - e^{-i\phi} i \sum_{m=1}^M n_m c_m e^{-i\delta_m} \right]. \quad (4.27)$$

Definiendo $S' = \sum_{m=1}^M c_m I_m$, $S = \frac{I_0 K}{2} e^{i\phi} \alpha$, $N^+ = i \frac{I_0 K}{2} e^{i\phi} \sum_{m=1}^M n_m c_m e^{i\delta_m}$ y $N^- = -i \frac{I_0 K}{2} e^{-i\phi} \sum_{m=1}^M n_m c_m e^{-i\delta_m}$ se tiene

$$S' = S + N^+ + N^-. \quad (4.28)$$

De las definiciones anteriores es claro que la fase real es dada por $\phi = \arg(S)$, mientras que la fase calculada a partir de los interferogramas adquiridos es $\phi' = \arg(S')$. Además se verifica que

$$|S| = \frac{I_0 K \alpha}{2} \quad (4.29)$$

La figura 4.2 muestra una representación en el plano complejo de la ecuación (4.28). El círculo representa los puntos donde es más probable encontrar a S' . Calculando el radio del círculo es posible obtener la máxima desviación de la fase calculada respecto a la fase real.

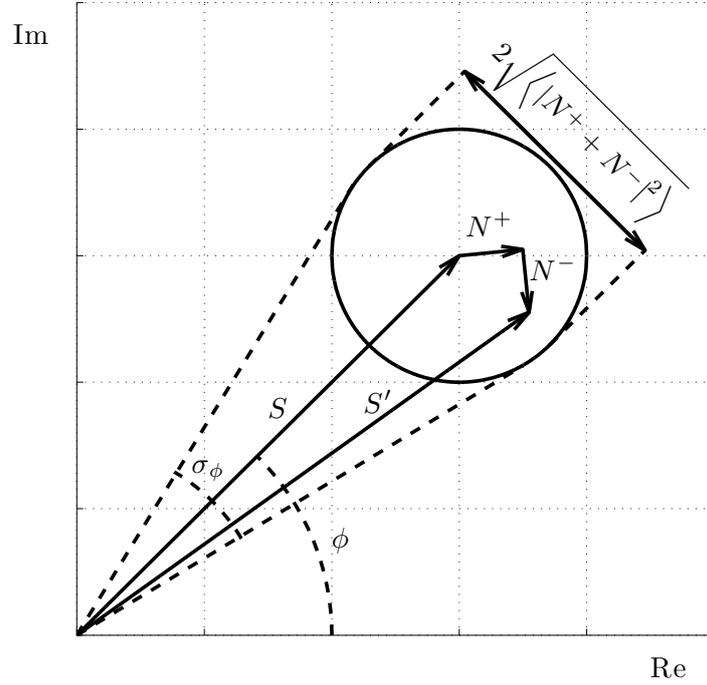


Figura 4.2: Representación de la ecuación (4.28) en el plano complejo. $\sigma_\phi/2$ es la máxima desviación de la fase calculada (ϕ') respecto a la fase real (ϕ).

Estimamos el radio del círculo como la raíz cuadrada del valor esperado de $|N^+ + N^-|^2$.

$\sigma_\phi/2$ es la máxima desviación de la fase calculada (ϕ') respecto a la fase real (ϕ).

De la figura 4.2 es claro que $\sin\left(\frac{\sigma_\phi}{2}\right) = \frac{\sqrt{\langle |N^+ + N^-|^2 \rangle}}{|S|}$, y por lo tanto, si σ_ϕ es pequeño se tiene

$$\sigma_\phi^2 \approx 4 \frac{\langle |N^+ + N^-|^2 \rangle}{|S|^2}. \quad (4.30)$$

Se puede acotar σ_ϕ utilizando la desigualdad triangular ($\langle |N^+ + N^-|^2 \rangle \leq \langle |N^+|^2 \rangle + \langle |N^-|^2 \rangle$),

$$\sigma_\phi^2 \leq 4 \frac{\langle |N^+|^2 \rangle + \langle |N^-|^2 \rangle}{|S|^2}. \quad (4.31)$$

Dado que $\langle |N^+|^2 \rangle = \left(\frac{I_0 K}{2}\right)^2 \left\langle \left| \sum_{m=1}^M n_m c_m e^{i\delta} \right|^2 \right\rangle$, podemos aplicar la desigualdad triangular nuevamente obteniendo

$$\langle |N^+|^2 \rangle \leq \left(\frac{I_0 K}{2}\right)^2 \sum_{m=1}^M \langle n_m^2 \rangle |c_m|^2. \quad (4.32)$$

Asumiendo que el valor esperado del ruido de fase es cero, $\sigma_{n_m}^2 = \langle n_m^2 \rangle$, donde σ_{n_m} es la desviación estándar de n_m . Tomando $c_m = a_m + ib_m$ se obtiene,

$$\langle |N^+|^2 \rangle \leq \left(\frac{I_0 K}{2}\right)^2 \sum_{m=1}^M \sigma_{n_m}^2 (a_m^2 + b_m^2). \quad (4.33)$$

En forma similar, para $\langle |N^-|^2 \rangle$ se tiene

$$\langle |N^-|^2 \rangle \leq \left(\frac{I_0 K}{2}\right)^2 \sum_{m=1}^M \sigma_{n_m}^2 (a_m^2 + b_m^2). \quad (4.34)$$

Finalmente sustituyendo las ecuaciones (4.29), (4.33) and (4.34) en la ecuación (4.31) se obtiene

$$\sigma_\phi^2 \leq \frac{8}{\alpha^2} \sum_{m=1}^M \sigma_{n_m}^2 (a_m^2 + b_m^2). \quad (4.35)$$

4.4. Minimización del error en la fase calculada

Dado un conjunto de pasos δ_m y la desviación estándar del ruido σ_{n_m} , con el objetivo de minimizar el error inducido en la fase calculada por el ruido aditivo o de fase (σ_ϕ), se debe elegir adecuadamente los parámetros a_m y b_m para minimizar la expresión en el lado derecho de (4.22) y (4.35),

$$f(a_1, \dots, a_M, b_1, \dots, b_M) = (1/2) \sum_{m=1}^M \sigma_{n_m}^2 (a_m^2 + b_m^2). \quad (4.36)$$

La función de la ecuación (4.36) debe ser minimizada teniendo en cuenta las restricciones planteadas en las ecuaciones (4.9)-(4.14) para que los coeficientes a_m

y b_m permitan calcular la fase. Esto puede realizarse utilizando el método de los multiplicadores de Lagrange. Definiendo

$$\left\{ \begin{array}{l} g_1(a_1, \dots, a_M, b_1, \dots, b_M) = \sum_{m=1}^M a_m \\ g_2(a_1, \dots, a_M, b_1, \dots, b_M) = \sum_{m=1}^M b_m \\ g_3(a_1, \dots, a_M, b_1, \dots, b_M) = \sum_{m=1}^M b_m \cos(\delta_m) \\ g_4(a_1, \dots, a_M, b_1, \dots, b_M) = \sum_{m=1}^M a_m \sin(\delta_m) \\ g_5(a_1, \dots, a_M, b_1, \dots, b_M) = \sum_{m=1}^M a_m \cos(\delta_m) - \alpha/2 \\ g_6(a_1, \dots, a_M, b_1, \dots, b_M) = \sum_{m=1}^M b_m \sin(\delta_m) + \alpha/2. \end{array} \right. \quad (4.37)$$

Las restricciones a satisfacer pueden escribirse como

$$g_k(a_1, \dots, a_M, b_1, \dots, b_M) = 0, \quad (4.38)$$

con $k = 1, \dots, 6$.

Aplicando el método de los multiplicadores de Lagrange se debe resolver el conjunto de ecuaciones,

$$\frac{\partial f}{\partial a_m} = \sum_{k=1}^6 \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial a_m}, \quad (4.39)$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial b_m} = \sum_{k=1}^6 \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial b_m}, \quad (4.40)$$

para $m = 1, \dots, M$, donde λ_k son constantes a determinar.

Entonces, de (4.36) y (4.39) se tiene

$$\sigma_{n_m}^2 a_m = \lambda_1 + \lambda_4 \sin(\delta_m) + \lambda_5 \cos(\delta_m), \quad (4.41)$$

y, de (4.36) y (4.40),

$$\sigma_{n_m}^2 b_m = \lambda_2 + \lambda_3 \cos(\delta_m) + \lambda_6 \sin(\delta_m), \quad (4.42)$$

para $m = 1, \dots, M$.

Sustituyendo las ecuaciones (4.41) y (4.42) en (4.38) se obtiene un sistema lineal de 6×6 para calcular los multiplicadores de Lagrange (λ_k),

$$\begin{pmatrix} S_1 & 0 & 0 & S_2 & S_3 & 0 \\ 0 & S_1 & S_3 & 0 & 0 & S_2 \\ 0 & S_3 & S_4 & 0 & 0 & S_5 \\ S_2 & 0 & 0 & S_6 & S_5 & 0 \\ S_3 & 0 & 0 & S_5 & S_4 & 0 \\ 0 & S_2 & S_5 & 0 & 0 & S_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \lambda_6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\alpha/2 \\ \alpha/2 \end{pmatrix} = 0, \quad (4.43)$$

donde

$$\left\{ \begin{array}{l} S_1 = \sum_{m=1}^M \frac{1}{\sigma_{nm}^2} \\ S_2 = \sum_{m=1}^M \frac{\sin(\delta_m)}{\sigma_{nm}^2} \\ S_3 = \sum_{m=1}^M \frac{\cos(\delta_m)}{\sigma_{nm}^2} \\ S_4 = \sum_{m=1}^M \frac{\cos^2(\delta_m)}{\sigma_{nm}^2} \\ S_5 = \sum_{m=1}^M \frac{\cos(\delta_m) \sin(\delta_m)}{\sigma_{nm}^2} \\ S_6 = \sum_{m=1}^M \frac{\sin^2(\delta_m)}{\sigma_{nm}^2} \end{array} \right. . \quad (4.44)$$

Las soluciones al sistema son

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = C (S_3 S_6 - S_2 S_5), \\ \lambda_2 = C (S_3 S_5 - S_2 S_4), \\ \lambda_3 = C (S_2 S_3 - S_1 S_5), \\ \lambda_4 = C (S_1 S_5 - S_2 S_3), \\ \lambda_5 = C (S_2^2 - S_1 S_6), \\ \lambda_6 = C (S_1 S_4 - S_3^2), \end{array} \right. \quad (4.45)$$

donde

$$C = \frac{\alpha/2}{S_4 S_2^2 - 2 S_2 S_3 S_5 + S_6 S_3^2 + S_1 S_5^2 - S_1 S_4 S_6}. \quad (4.46)$$

Por lo tanto, dado un conjunto de valores δ_m y σ_{n_m} , de las ecuaciones (4.44) es posible calcular S_{1-6} , y luego, de las ecuaciones (4.45) se obtiene λ_{1-6} .

Por último sustituyendo los valores de λ_{1-6} en (4.41) y (4.42) se calculan los parámetros a_m y b_m óptimos que minimizan el error en la fase calculada.

En el caso en que $\sigma_{n_m}^2$ son los mismos para todos los interferogramas, los valores de λ_{1-6} que se obtienen son

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = C \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^M [\sin(\delta_l) - \sin(\delta_k)] \cos(\delta_k) \sin(\delta_l), \\ \lambda_2 = C \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^M [\cos(\delta_l) - \cos(\delta_k)] \cos(\delta_k) \sin(\delta_l), \\ \lambda_3 = C \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^M [\cos(\delta_l) - \cos(\delta_k)] \sin(\delta_k), \\ \lambda_4 = C \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^M [\sin(\delta_l) - \sin(\delta_k)] \cos(\delta_l), \\ \lambda_5 = C \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^M [\sin(\delta_l) - \sin(\delta_k)] \sin(\delta_k), \\ \lambda_6 = C \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^M [\cos(\delta_l) - \cos(\delta_k)] \cos(\delta_l). \end{array} \right. \quad (4.47)$$

Finalmente sustituyendo en (4.41) y (4.42), a menos de una constante global, se tiene

$$a_m = \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^M [\sin(\delta_k) - \sin(\delta_l)] [\cos(\delta_k) \sin(\delta_l) + \cos(\delta_m) \sin(\delta_k) + \cos(\delta_l) \sin(\delta_m)] \quad (4.48)$$

y

$$b_m = \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^M [\cos(\delta_k) - \cos(\delta_l)] [\cos(\delta_k) \sin(\delta_l) + \cos(\delta_m) \sin(\delta_k) + \cos(\delta_l) \sin(\delta_m)]. \quad (4.49)$$

Entonces de (4.2) resulta

$$\tan(\phi) = \frac{\sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^M \sum_{m=1}^M I_m [\cos(\delta_k) - \cos(\delta_l)] [\cos(\delta_k) \sin(\delta_l) + \cos(\delta_m) \sin(\delta_k) + \cos(\delta_l) \sin(\delta_m)]}{\sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^M \sum_{m=1}^M I_m [\sin(\delta_k) - \sin(\delta_l)] [\cos(\delta_k) \sin(\delta_l) + \cos(\delta_m) \sin(\delta_k) + \cos(\delta_l) \sin(\delta_m)]}. \quad (4.50)$$

Esta última expresión permite calcular la fase (ϕ) del objeto a estudiar a partir de M interferogramas (I_m) adquiridos cambiando el salto de fase (δ_m), y simultáneamente minimiza el error inducido por ruido aditivo o de fase.

4.5. Simulaciones

Con el fin de simular el algoritmo propuesto consideramos los siguientes saltos de fase aleatoriamente seleccionados: $\delta_1 = 0$, $\delta_2 = \pi/3$, $\delta_3 = 8\pi/7$ y $\delta_4 = 13\pi/6$, de forma de sintetizar un conjunto de interferogramas con intensidad media (I_0) igual a la función que se grafica en la figura 4.3.a, modulación (I_0K) la función mostrada en la figura 4.3.b y fase mostrada en la figura 4.3.c. A los interferogramas sintetizados se les añade cierta cantidad de ruido aditivo y de fase Gaussiano.

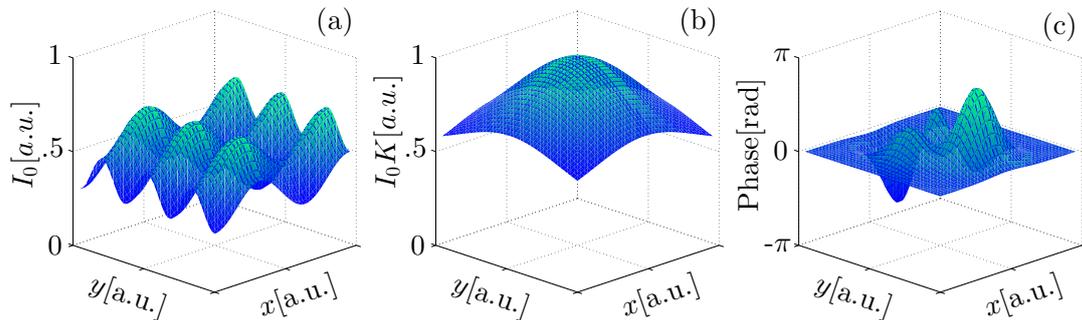


Figura 4.3: (a) Intensidad media (I_0); (b) modulación (I_0K); (c) y fase utilizadas para ilustrar el comportamiento del algoritmo.

Las figuras 4.4.a-4.4.c muestran la fase calculada para tres conjuntos diferentes de parámetros a_m y b_m que se pueden ver en la tabla 4.1. Todos los parámetros verifican las condiciones (4.9)-(4.14), de modo que en ausencia de ruido reproducen correctamente la fase, pero solo el tercer conjunto (c) se calcula a partir de (4.48) y (4.49). Como se esperaba la figura 4.4.c es la que muestra menor error.

| Coeficientes del numerador en (4.2) | | | |
|-------------------------------------|-----------|-----------|-----------|
| | Fig.3 (a) | Fig.3 (b) | Fig.3 (c) |
| b_1 | 1 | 1 | 1 |
| b_2 | -0,1317 | 0,0752 | -1,1869 |
| b_3 | 0,1031 | 0,0602 | 0,3217 |
| b_4 | -0,9714 | -1,1355 | -0,1347 |

| Coeficientes del denominador en (4.2) | | | |
|---------------------------------------|-----------|-----------|-----------|
| | Fig.3 (a) | Fig.3 (b) | Fig.3 (c) |
| a_1 | 6,7521 | 4,5106 | 0,7464 |
| a_2 | 6,2800 | 4,1025 | -0,4051 |
| a_3 | -1,1537 | -0,8070 | -0,5584 |
| a_4 | -11,8784 | -7,8060 | 0,2171 |

Tabla 4.1: Conjunto de valores de a_m y b_m para generar los algoritmos (ver ecuación (4.2)) utilizados en las simulaciones. Los resultados de la simulación se pueden ver en las figuras 4.4.a-4.4.c.

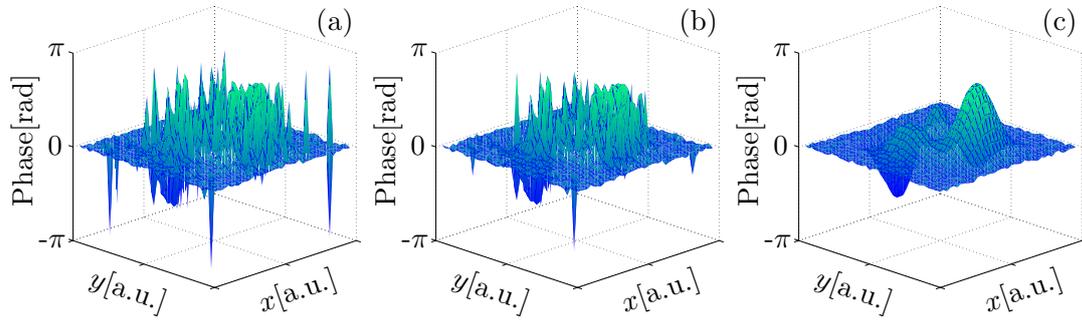


Figura 4.4: Fase calculada utilizando (4.2) a partir de los parámetros de la tabla 4.1.

Las figuras 4.5.a-4.5.c muestran la diferencia entre la fase de referencia y la fase calculada para los tres conjuntos de parámetros a_m y b_m . Es evidente que los parámetros que conducen a menor error son los deducidos a partir de (4.48) y (4.49). El error fue calculado definiendo $\phi_{Error} = W(\phi_{Ideal} - \phi_{Calculated})$, donde ϕ_{Ideal} es la fase de referencia utilizada para generar los interferogramas, $\phi_{Calculated}$ es la fase calculada y $W(x) = \arctan 2[\sin(x), \cos(x)]$.

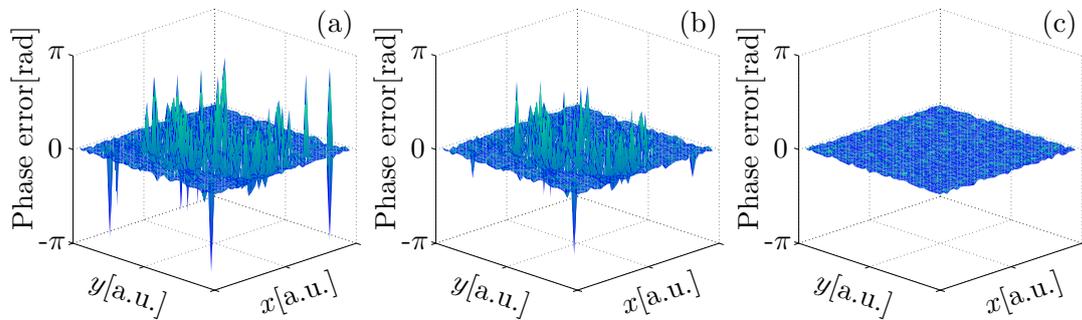


Figura 4.5: Diferencia entre la fase de referencia y la fase calculada. (a) y (b) son la diferencia para parámetros aleatoriamente seleccionados y (c) para los parámetros óptimamente seleccionados a partir de (4.48) y (4.49).

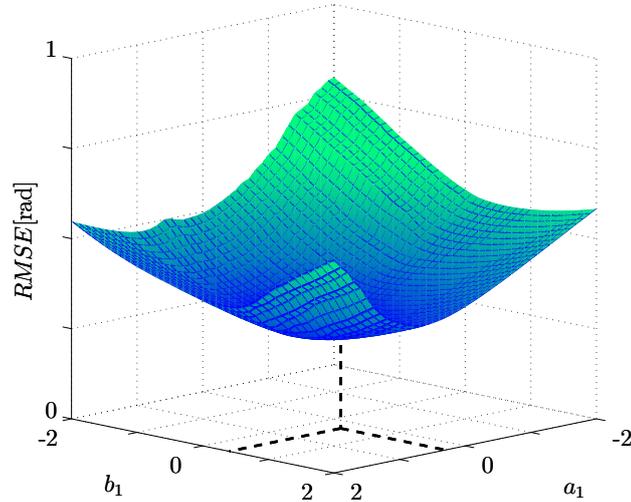


Figura 4.6: $RMSE$ de la fase calculada en función de a_1 y b_1 . Las líneas punteadas corresponden a las coordenadas del valor óptimo calculado.

La figura 4.6 muestra el $RMSE$ de la fase calculada como función de los valores de a_1 y b_1 , con un mínimo en los valores óptimos calculados.

4.6. Resultados experimentales

Se realizó una serie de experimentos usando imágenes adquiridas utilizando un interferómetro propuesto en [2]. Como objeto de fase se utilizó un patrón con letras gravadas en una placa recubierta con una capa de ITO.

Se adquirieron seis interferogramas con saltos de fase correspondientes a 0 rad , $0,525 \text{ rad}$, $1,225 \text{ rad}$, $2,8 \text{ rad}$, $4,025 \text{ rad}$, $5,6 \text{ rad}$. Los interferogramas utilizados se pueden ver en la figura 4.7. Las imágenes fueron adquiridas con una cámara digital monocromática de 8 bits con 1024×768 pixels (Modelo DC310, Thorlabs).

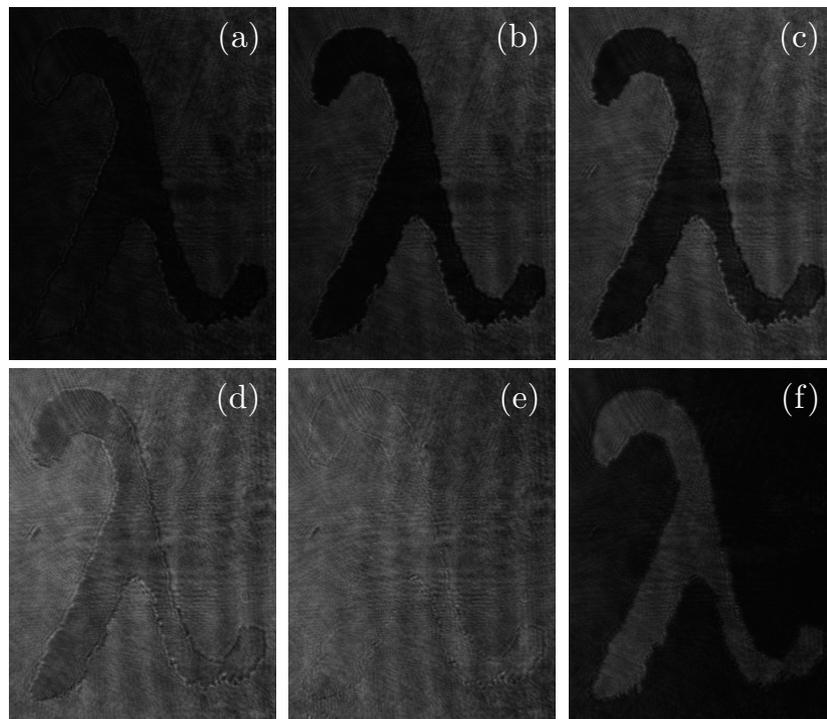


Figura 4.7: Interferogramas adquiridos con saltos de fase: (a) 0 rad ; (b) $0,525 \text{ rad}$; (c) $1,225 \text{ rad}$; (d) $2,8 \text{ rad}$; (e) $4,025 \text{ rad}$; (f) $5,6 \text{ rad}$.

Se aplicó el algoritmo propuesto sobre los interferogramas (ver ecuación 4.50). La figura 4.8 muestra la fase recuperada que es consistente con una lámina de ITO de 150 nm de espesor e índice de refracción igual a 1,7.

Coefficientes del numerador en ecuación (4.2)

| Coeficientes del numerador en ecuación (4.2) | | Coeficientes del denominador en ecuación (4.2) | |
|--|----------|--|----------|
| b_1 | 7,5617 | a_1 | -7,6854 |
| b_2 | 10,3913 | a_2 | 2,8749 |
| b_3 | 8,6019 | a_3 | 15,6064 |
| b_4 | -9,9652 | a_4 | 15,2117 |
| b_5 | -16,2360 | a_5 | -8,1912 |
| b_6 | -0,3537 | a_6 | -17,8165 |

Tabla 4.2: Tabla de coeficientes que minimizan el error en la fase calculada en caso de saltos de fase iguales a $\delta_1 = 0rad$, $\delta_2 = 0,525rad$, $\delta_3 = 1,225rad$, $\delta_4 = 2,8rad$, $\delta_5 = 4,025rad$, $\delta_6 = 5,6rad$.

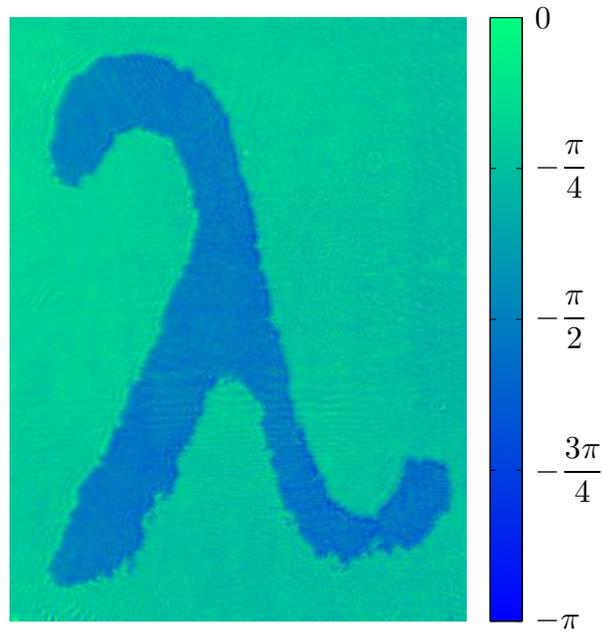


Figura 4.8: Fase calculada del objeto de fase utilizado.

4.7. Conclusiones

En el presente capítulo se consideró el cálculo de la fase de un objeto de prueba a partir de M interferogramas adquiridos con saltos de fase arbitrarios δ_m , con ruido aditivo $n_m^{(a)}$ y ruido de fase $n_m^{(p)}$. Se demostró que para un conjunto de M valores δ_m se tienen $2M - 6$ parámetros libres. A partir del método de multiplicadores de Lagrange se calculó el conjunto de parámetros (a_m, b_m) que minimizan la propagación de ruido aditivo o de fase. (Parámetros en las ecuaciones (4.48) y (4.49)) Con el objetivo de estudiar el algoritmo propuesto se realizaron simulaciones con los valores óptimos a_m y b_m , y con otros aleatoriamente elegidos. Finalmente se comprobó el correcto desempeño del algoritmo con datos experimentales.

Apéndice 4.A. Cálculo de $\langle |N|^2 \rangle$

Considerando el complejo $N = \sum_{m=1}^M c_m n_m$, siendo n_m un número real aleatorio y c_m un complejo. Escribiendo $c_m = a_m + b_m$, el módulo de N es

$$|N|^2 = \left(\sum_{m=1}^M a_m n_m \right)^2 + \left(\sum_{m=1}^M b_m n_m \right)^2, \quad (4.51)$$

por lo que su valor esperado es

$$\langle |N|^2 \rangle = \left\langle \left(\sum_{m=1}^M a_m n_m \right)^2 \right\rangle + \left\langle \left(\sum_{m=1}^M b_m n_m \right)^2 \right\rangle. \quad (4.52)$$

Por otro lado, la desviación estándar (σ_a) de $\sum_{m=1}^M a_m n_m$ verifica

$$\sigma_a^2 = \left\langle \left(\sum_{m=1}^M a_m n_m \right)^2 \right\rangle - \left\langle \left(\sum_{m=1}^M a_m n_m \right) \right\rangle^2. \quad (4.53)$$

Ya que $\left\langle \left(\sum_{m=1}^M a_m n_m \right) \right\rangle = \sum_{m=1}^M a_m \langle n_m \rangle$, asumiendo que el valor esperado del

ruido es nulo, se tiene $\left\langle \left(\sum_{m=1}^M a_m n_m \right) \right\rangle = 0$, y por lo tanto de (4.53) se obtiene

$$\sigma_a^2 = \left\langle \left(\sum_{m=1}^M a_m n_m \right)^2 \right\rangle. \quad (4.54)$$

Por otro lado, ya que σ_a es la desviación estándar de $\sum_{m=1}^M a_m n_m$, aplicando la fórmula de Bienaymé para la varianza se obtiene

$$\sigma_a^2 = \sum_{m=1}^M a_m^2 \sigma_{n_m}^2, \quad (4.55)$$

donde σ_{n_m} es la desviación estándar del ruido (n_m) presente en el m -ésimo interferograma.

Entonces de las ecuaciones (4.54) y (4.55)

$$\left\langle \left(\sum_{m=1}^M a_m n_m \right)^2 \right\rangle = \sum_{m=1}^M a_m^2 \sigma_{n_m}^2 \quad (4.56)$$

En forma similar se obtiene

$$\left\langle \left(\sum_{m=1}^M b_m n_m \right)^2 \right\rangle = \sum_{m=1}^M b_m^2 \sigma_{n_m}^2 \quad (4.57)$$

Finalmente, sustituyendo (4.56) y (4.57) en (4.52)

$$\langle |N|^2 \rangle = \sum_{m=1}^M (a_m^2 + b_m^2) \sigma_{n_m}^2, \quad (4.58)$$

o, en forma equivalente,

$$\langle |N|^2 \rangle = \sum_{m=1}^M c_m^2 \sigma_{n_m}^2. \quad (4.59)$$

Apéndice 4.B. Cálculo de fase a partir de interferogramas con armónicos

En el caso en que se trabaje con interferogramas no perfectamente sinusoidales, la intensidad puede escribirse como la superposición de armónicos de una

componente fundamental, o sea

$$I_m = I_0 \left[1 + \sum_{p=1}^{\infty} K_p \cos [(\phi + \delta_m) p] \right], \quad (4.60)$$

donde K_p es la amplitud del p -ésimo armónico. En nuestro caso K_1 es el contraste K .

Con el objetivo de eliminar el error causado por el p -ésimo armónico, es suficiente con que los coeficientes a_m y b_m satisfagan las condiciones (4.9) a (4.14), pero además satisfagan

$$\sum_{m=1}^M a_m \cos(p\delta_m) = 0, \quad (4.61)$$

$$\sum_{m=1}^M a_m \sin(p\delta_m) = 0, \quad (4.62)$$

$$\sum_{m=1}^M b_m \cos(p\delta_m) = 0 \quad (4.63)$$

y

$$\sum_{m=1}^M b_m \sin(p\delta_m) = 0. \quad (4.64)$$

Condiciones similares fueron propuestas por Hibino [39] con el fin de determinar a_m y b_m para un algoritmo de phase shifting insensible a la presencia de armónicos en el caso de saltos de fase equiespaciados.

Apéndice 4.C. Algoritmos insensibles a mala calibración del salto de fase

En la práctica, los interferogramas adquiridos experimentalmente, presentan desvíos en el salto de fase previsto en una cantidad ε_m , por lo que los interferogramas pueden modelarse como

$$I_m(x, y) = I_0(x, y) [1 + K(x, y) \cos (\phi(x, y) + \delta_m + \varepsilon_m)]. \quad (4.65)$$

Entonces la fase calculada utilizando la ecuación (4.4), que denotamos como $\phi'(x, y)$, no es exactamente la fase real $\phi(x, y)$, pero en el mejor de los casos se puede conseguir que difieran en una constante global independiente de la posición. A partir de (4.65) y (4.6) se tiene

$$\sum_{m=1}^M c_m I_m = \frac{I_0 K}{2} e^{i\phi} \sum_{m=1}^M c_m e^{i(\delta_m + \varepsilon_m)} + \frac{I_0 K}{2} e^{-i\phi} \sum_{m=1}^M c_m e^{-i(\delta_m + \varepsilon_m)}, \quad (4.66)$$

o en forma equivalente

$$\frac{2 \left| \sum_{m=1}^M c_m I_m \right|}{I_0 K} e^{i(\phi' - \phi)} = \sum_{m=1}^M c_m e^{i(\delta_m + \varepsilon_m)} + e^{-i2\phi} \sum_{m=1}^M c_m e^{-i(\delta_m + \varepsilon_m)}. \quad (4.67)$$

Si se busca que la fase calculada (ϕ') difiera de la fase verdadera (ϕ) en a lo sumo una constante global, el término que multiplica a $e^{-i2\phi}$ en (4.67) debe ser necesariamente cero, esto es,

$$\sum_{m=1}^M c_m e^{-i(\delta_m + \varepsilon_m)} = 0. \quad (4.68)$$

Esta última expresión puede ser simplificada considerando que los errores en el salto de fase son pequeños, esto es, $\varepsilon_m \ll 1$. Entonces, a primer orden en ε_m se tiene que $e^{-i\varepsilon_m} \approx 1 - i\varepsilon_m$. Por lo tanto, a partir de (4.7), la ecuación (4.68) se reduce a

$$\sum_{m=1}^M c_m \varepsilon_m e^{-i\delta_m} = 0. \quad (4.69)$$

Por otro lado, en una aproximación a primer orden, se puede reescribir el primer término del lado derecho de la ecuación (4.67) como

$$\sum_{m=1}^M c_m e^{i(\delta_m + \varepsilon_m)} \approx \sum_{m=1}^M c_m e^{i\delta_m} + i \sum_{m=1}^M c_m \varepsilon_m e^{i\delta_m}. \quad (4.70)$$

Por lo tanto es claro que $\phi'(x, y)$ va a ser independiente de la desviación de los saltos de fase (ε_m) si se verifica la condición

$$\sum_{m=1}^M c_m \varepsilon_m e^{i\delta_m} = 0. \quad (4.71)$$

Esta última condición puede ser importante en el caso que las desviación ε_m varíen en el espacio, esto es $\varepsilon_m = \varepsilon_m(x, y)$ [40, 41].

Error en el salto de fase lineal

Consideramos el caso en que el error en el salto de fase es lineal, esto es

$$\varepsilon_m = \varepsilon_0 \delta_m, \quad (4.72)$$

donde ε_0 es un parámetro determinado por el mecanismo que genera el desfase. El error lineal en el salto de fase suele suceder por mala calibración del sistema empleado, por ejemplo por un incremento en el voltaje entre interferogramas en el control de piezoeléctricos [1].

Sustituyendo la ecuación (4.72) en (4.69)

$$\sum_{m=1}^M c_m \delta_m e^{-i\delta_m} = 0, \quad (4.73)$$

y sustituyendo (4.72) en (4.71)

$$\sum_{m=1}^M c_m \delta_m e^{i\delta_m} = 0. \quad (4.74)$$

Equivalentemente, en términos de a_m y b_m , las condiciones (4.73) y (4.74) se pueden reescribir como

$$\sum_{m=1}^M \delta_m [a_m \cos(\delta_m) + b_m \sin(\delta_m)] = 0, \quad (4.75)$$

$$\sum_{m=1}^M \delta_m [b_m \cos(\delta_m) - a_m \sin(\delta_m)] = 0, \quad (4.76)$$

$$\sum_{m=1}^M \delta_m [a_m \cos(\delta_m) - b_m \sin(\delta_m)] = 0, \quad (4.77)$$

y

$$\sum_{m=1}^M \delta_m [b_m \cos(\delta_m) + a_m \sin(\delta_m)] = 0. \quad (4.78)$$

Apéndice 4.D. Algoritmo de phase-shifting con matriz antisimétrica

En este apéndice se discute un procedimiento alternativo para generar algoritmos de phase shifting teniendo en cuenta las condiciones (4.9)-(4.14).

Se considera la matriz antisimétrica γ_{ml} (con $m, l = 1, 2, \dots, M$), o sea que $\gamma_{ml} = -\gamma_{lm}$, que verifique

$$\sum_{m=1}^M \gamma_{ml} = 0. \quad (4.79)$$

Luego se define c_m como

$$c_m = i \sum_{l=1}^M \gamma_{ml} e^{-i\delta_l}, \quad (4.80)$$

y

$$S = i \sum_{l=1}^M \left(\sum_{m=1}^M I_m \gamma_{ml} e^{-i\delta_l} \right). \quad (4.81)$$

Ahora se debe demostrar que c_m verifica las condiciones (4.6)-(4.8).

De las ecuaciones (4.79) y (4.80), se tiene

$$\sum_{m=1}^M c_m = \sum_{l=1}^M i e^{-i\delta_l} \sum_{m=1}^M \gamma_{ml} = 0, \quad (4.82)$$

que es la condición (4.6).

De la ecuación (4.80) y de la antisimetría de γ_{ml} , se obtiene

$$\sum_{m=1}^M c_m e^{-i\delta_m} = i \sum_{l=1}^M \left(\sum_{m=1}^M \gamma_{ml} e^{-i(\delta_l + \delta_m)} \right) = 0, \quad (4.83)$$

que es la condición (4.7).

Por último se calcula $\alpha = \sum_{m=1}^M c_m e^{i\delta_m}$ de la ecuación (4.8)

$$\alpha = \sum_{m=1}^M i e^{i\delta_m} \sum_{l=1}^M \gamma_{ml} e^{-i\delta_l} = i \sum_{l=1}^M \left(\sum_{m=1}^M \gamma_{ml} e^{i(\delta_m - \delta_l)} \right), \quad (4.84)$$

o, en forma equivalente,

$$\alpha = i \sum_{l=1}^M \left[\sum_{m=1}^M \gamma_{ml} (\cos(\delta_m - \delta_l) + i \sin(\delta_m - \delta_l)) \right]. \quad (4.85)$$

Ya que γ_{ml} es antisimétrica y $\cos(\delta_m - \delta_l) = \cos(\delta_l - \delta_m)$, las sumas en m y l del primer término de (4.85) es cero, entonces

$$\alpha = - \sum_{l=1}^M \left[\sum_{m=1}^M \gamma_{ml} \sin(\delta_m - \delta_l) \right] \quad (4.86)$$

es un número real, que es la condición (4.8). En caso que α sea un complejo, la fase calculada difiere en una constante aditiva de la real.

Apéndice 4.E. Simulaciones adicionales

Se presentan simulaciones adicionales con el objetivo de mostrar la dependencia entre el nivel del ruido de fase y el error en la fase calculada. Con este objetivo, se utiliza como función para simular la intensidad media (I_0) la función graficada en la figura 4.9(a), para la modulación (I_0K) la función en la figura 4.9(b) y para la fase la función en la figura 4.9(c) mas un término lineal.

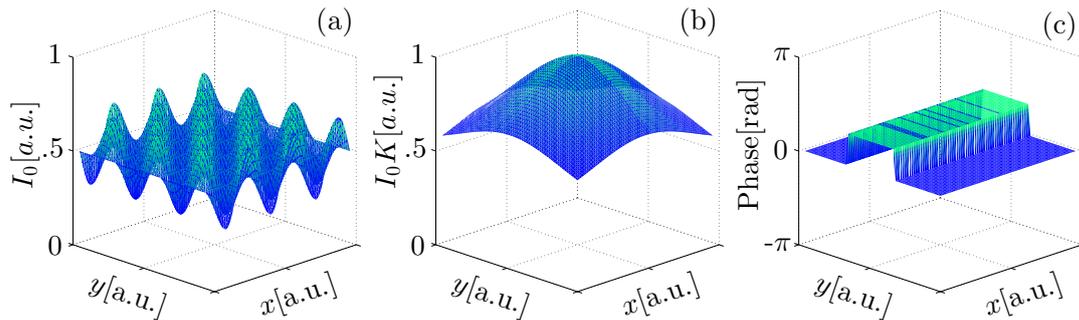


Figura 4.9: (a) Intensidad media (I_0), (b) modulación (I_0K) y (c) fase utilizadas para ilustrar el desempeño del algoritmo.

Se simula un conjunto de seis interferogramas con diferente nivel de ruido de fase gaussiano, con saltos de fase iguales a 0 rad , $0,1571 \text{ rad}$, $0,5411 \text{ rad}$, $2,7402$

rad, 4,9393 *rad* y 6,0912 *rad*. La desviación estándar σ_n del ruido va de $\sigma_n = 0$ *rad* a $\sigma_n = 0,25$ *rad*. La figura 4.10(a)-(f) muestra los interferogramas simulados para $\sigma_n = 0$ *rad*.

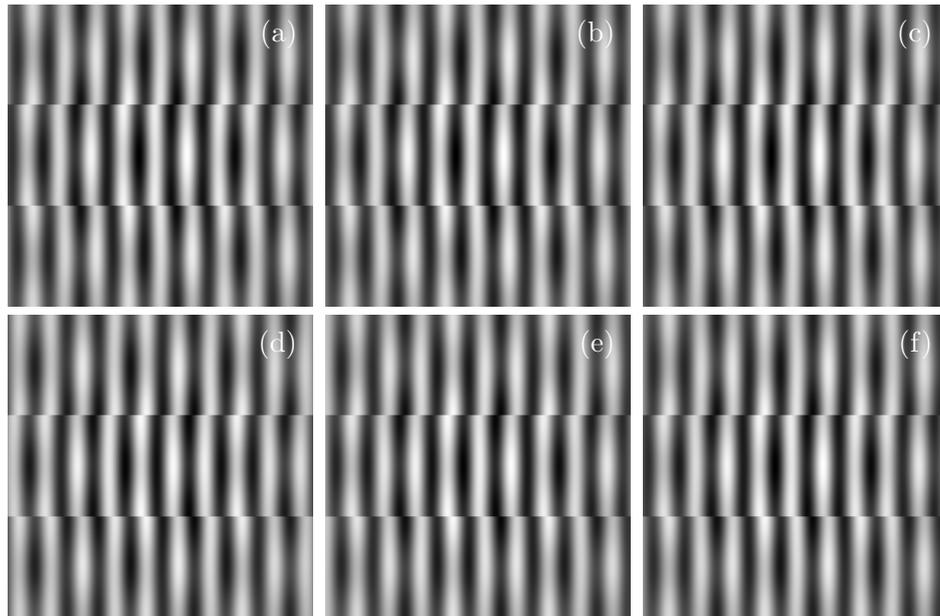


Figura 4.10: Interferogramas simulados para $\sigma_n = 0$ *rad*.

A partir de los saltos de fase utilizados, se calculan los coeficientes del algoritmo óptimo usando el algoritmo propuesto. Luego se aplica el algoritmo propuesto a cada conjunto de interferogramas para calcular la fase. La figura 4.11 muestra la raíz del error cuadrático medio (*RMSE*) en función de la desviación estándar del ruido de fase (σ_n), donde puede observarse claramente la relación lineal.

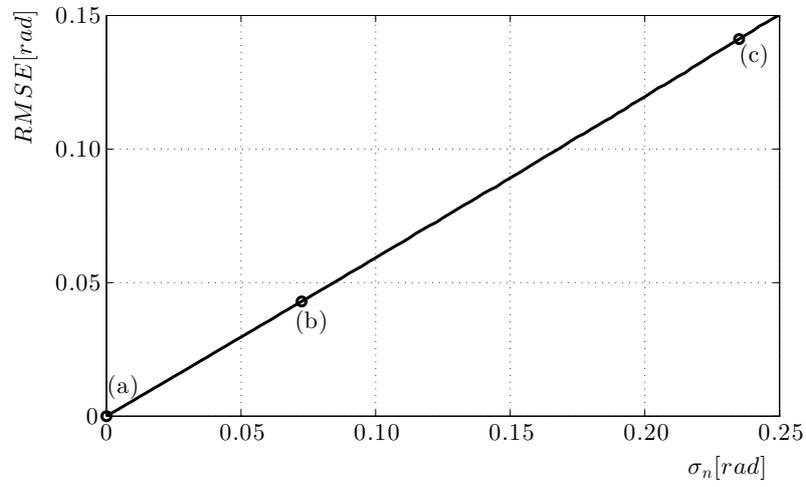


Figura 4.11: $RMSE$ de la fase reconstruida en función de la desviación estándar del ruido de fase (σ_n).

Las figuras 4.12(a)-(c) muestran la fase calculada para tres conjuntos de interferogramas con diferentes niveles de ruido. Las marcas en la figura 4.11 corresponden con los resultados en las figuras 4.12(a)-(c).

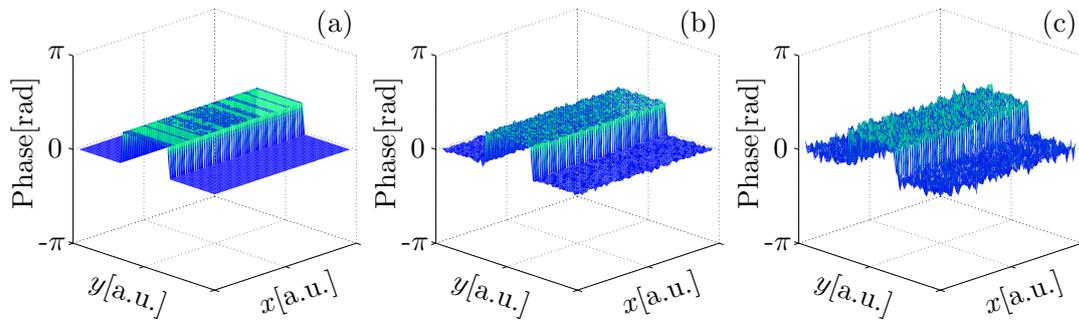


Figura 4.12: Fases calculadas para diferentes niveles de ruido.

Capítulo 5

Cálculo de salto de fase para algoritmos de phase-shifting sintonizables

En este capítulo se estudian algoritmos enfocados a trabajar con interferogramas donde el salto de fase entre los mismos es fijo. En este caso los interferogramas pueden escribirse como,

$$I_m(i, j) = a(i, j) + b(i, j) \cos(\phi(i, j) + m\alpha), \quad (5.1)$$

donde $a(i, j)$ es la intensidad media, $b(i, j)$ es la modulación, $\phi(i, j)$ es la fase y $m = 1, \dots, M$, siendo M la cantidad de interferogramas adquiridos.

Es posible clasificar los algoritmos de phase-shifting en dos grupos, los algoritmos con coeficientes fijos (para un conjunto predeterminado de saltos de fase) y los algoritmos sintonizables que pueden utilizarse para un rango continuo de valores (funcionan para diferentes valores de α). Los primeros incluyen algoritmos para un salto de fase fijo como el algoritmo de cuatro pasos de Bruning con $\alpha = \pi/2$ [1, 14]. Por el otro lado están los algoritmos que funcionan para un rango continuo de saltos de fase como el algoritmo de Carré [15], Hariharan [1, 16], y Stoilov y Dra-

gostinov [42].

Para utilizar los algoritmos de phase-shifting sintonizables, es importante conocer o calcular previamente el valor del salto de fase (α). Incluso cuando se conoce el salto de fase, puede existir cierto error en el valor por mala calibración del sistema. Es por esto que es importante tener un método que permita calcular de la mejor forma posible el salto de fase entre interferogramas.

La intensidad de las imágenes adquiridas cuando tienen ruido aditivo pueden modelarse como

$$I_m(i, j) = a(i, j) + b(i, j) \cos(\phi(i, j) + m\alpha) + n_m(i, j), \quad (5.2)$$

donde $n_m(i, j)$ es el ruido aditivo.

En general, los algoritmos para el cálculo del salto de fase pueden dividirse en dos categorías: Los algoritmos iterativos y los no iterativos. Los iterativos [23,23,43] generalmente requieren de un consumo mayor de tiempo ya que el procedimiento debe repetirse muchas veces para conseguir una precisión aceptable. Además el número de iteraciones depende de el paso inicial de la iteración.

Por otro lado varios algoritmos no iterativos han sido propuestos en la literatura. Por ejemplo Farrell y Player [18] sugirieron utilizar un algoritmo por ajuste a figuras de Lissajous elípticas. El inconveniente del método es que es fácilmente afectado por la presencia de ruido y asume que la intensidad media y el contraste son uniformes en todo el interferograma.

Recientemente otros métodos menos sensibles al ruido fueron propuestos. Por ejemplo, Xu et al. [44] proponen un algoritmo basado en la norma euclidiana de matrices para extraer los saltos de fase desconocidos a partir de tres interferogramas. El método asume que el interferograma contiene un número considerable de franjas. Guo and Zhang [21] sugieren un algoritmo para estimar el salto de fase a partir de la varianza de la diferencia de patrones. Sin embargo la precisión de

este algoritmo depende, incluso sin presencia de ruido, del número de franjas en el interferograma.

Existen otros métodos en la literatura para el cálculo del salto de fase que asumen cierta homogeneidad (o cierto conocimiento previo) de la intensidad media y/o del contraste de los interferogramas (ver por ejemplo [19, 45]).

En el presente capítulo se presenta un método no iterativo que fue propuesto en [46] para la extracción del salto de fase (α) bajo la hipótesis de que los interferogramas son equiespaciados. A diferencia de otros algoritmos propuestos en la literatura, el algoritmo propuesto no asume ninguna restricción sobre la intensidad media ni el contraste. El algoritmo es fácil de implementar y funciona correctamente incluso con interferogramas con muy pequeña relación señal ruido (SNR), como por ejemplo $SNR \approx 0,1$.

Los detalles del método se discuten en las secciones 5.1-5.3. Simulaciones y comparaciones con otros métodos se presentan en las secciones 5.4 y 5.5. En la sección 5.6 se muestran resultados experimentales.

5.1. Algoritmo de extracción del salto de fase entre interferogramas

Se comienza definiendo $t_m = \phi(i, j) + m\alpha$, por lo que de (5.1) resulta,

$$I_m(i, j) = a(i, j) + b(i, j) \cos(t_m), \quad (5.3)$$

y por lo tanto

$$I_{m+1}(i, j) = a(i, j) + b(i, j) \cos(t_m + \alpha). \quad (5.4)$$

Las expresiones (5.3) y (5.4) corresponden a la ecuación paramétrica de una elipse centrada en el punto con coordenadas $(a(i, j), a(i, j))$, con sus semiejes orien-

tados a 45° y con razón entre semiejes igual a $\tan^2(\alpha/2)$,

$$x(t) - a(i, j) = b(i, j) \cos(t) \quad (5.5)$$

y

$$y(t) - a(i, j) = b(i, j) \cos(t + \alpha), \quad (5.6)$$

donde $(x(t), y(t))$ son coordenadas Cartesianas y t es un parámetro real.

De (5.3) y (5.4) es claro que en ausencia de ruido, para cada pixel de la imagen, cada valor de $m = 1, 2, \dots, M-1$ genera un punto $(I_m(i, j), I_{m+1}(i, j))$ perteneciente a la elipse definida por las ecuaciones (5.5) y (5.6), como se puede ver en la figura 5.1.

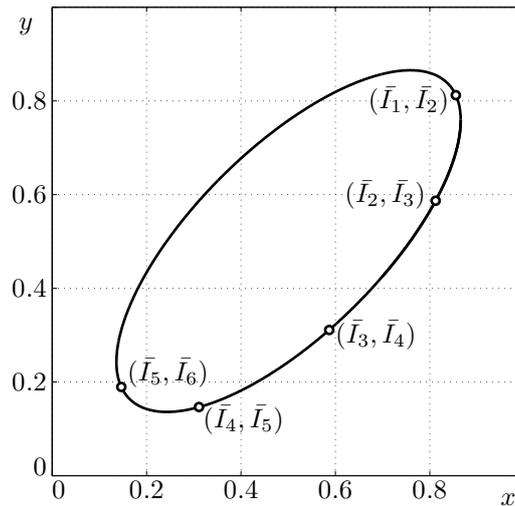


Figura 5.1

Aplicando un ajuste por mínimos cuadrados se puede calcular la elipse que mejor ajusta a los datos experimentales siempre que $M > 3$, y luego a partir de la razón entre semiejes es posible calcular el salto de fase (α). Una discusión sobre el ajuste por mínimos cuadrados de elipses puede encontrarse en [47].

Para realizar el ajuste pueden reescribirse las ecuaciones (5.5) y (5.6) como

$$C_1(x^2 + y^2) + C_2xy + C_3(x + y) = 1, \quad (5.7)$$

donde

$$\begin{cases} C_1 = \frac{1}{b^2 \sin^2(\alpha) + 2a^2 (\cos(\alpha) - 1)} \\ C_2 = \frac{-2 \cos(\alpha)}{b^2 \sin^2(\alpha) + 2a^2 (\cos(\alpha) - 1)} \\ C_3 = \frac{2a (\cos(\alpha) - 1)}{b^2 \sin^2(\alpha) + 2a^2 (\cos(\alpha) - 1)} \end{cases} \quad (5.8)$$

Luego de realizado el ajuste se calcula el salto de fase como

$$\alpha = \cos^{-1} \left(-\frac{C_2}{2C_1} \right). \quad (5.9)$$

5.2. Filtrado de imágenes previo al cálculo del salto de fase

En esta sección se demostrará que si se genera un nuevo conjunto de datos como combinación lineal de los pixeles de los interferogramas adquiridos, estos nuevos datos verifican la ecuación 5.1 con el mismo valor de salto de fase.

Cualquier combinación lineal de pixeles de un interferograma ($I'_m(u)$) puede expresarse como

$$I'_m(u) = \sum_{i,j} \beta_u(i,j) I_m(i,j), \quad (5.10)$$

donde $\beta_u(i,j)$ son coeficientes reales y $u = 1, \dots, U$ es un numero natural (Ver Apéndice 4.A).

Si los interferogramas I_m verifican (5.1), se obtiene,

$$I'_m(u) = A(u) + \sum_{i,j} \beta_u(i,j) b(i,j) \cos(\phi(i,j) + \delta_m), \quad (5.11)$$

donde $A(u) = \sum_{i,j} \beta_u(i,j) a(i,j)$.

Es fácil demostrar que (5.11) puede reescribirse como

$$I'_m(u) = A(u) + B(u) \cos(\Phi(u) + \delta_m), \quad (5.12)$$

donde $B(u)$ y $\Phi(u)$ puede calcularse como

$$B(u) = \sqrt{\sum_{i,j} \sum_{i',j'} \beta_u(i,j)b(i,j)\beta_u(i',j')b(i',j') \cos(\phi(i,j) - \phi(i',j'))}, \quad (5.13)$$

y

$$\tan(\Phi(u)) = \frac{\sum_{i,j} \beta_u(i,j)b(i,j) \sin(\phi(i,j))}{\sum_{i,j} \beta_u(i,j)b(i,j) \cos(\phi(i,j))}. \quad (5.14)$$

5.3. Promedio de interferogramas

Un caso particular de la combinación lineal de pixeles de interferogramas propuesta en la sección anterior es el promedio de los valores de todos los pixeles del interferograma.

Promediando en las coordenadas espaciales una imagen de P pixeles, de (5.2) se obtiene

$$\bar{I}_m = A + B \cos(\Phi + m\alpha) + \bar{N}_m \quad (5.15)$$

y equivalentemente

$$\bar{I}_{m+1} = A + B \cos(\Phi + (m+1)\alpha) + \bar{N}_{m+1}, \quad (5.16)$$

donde

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{I}_m = \frac{1}{M} \sum_{i,j} I_m(i,j) \\ A = \frac{1}{M} \sum_{i,j} a(i,j) \\ B = \frac{1}{M} \sqrt{\sum_{i,j} \sum_{i',j'} b(i,j)b(i',j') \cos(\phi(i,j) - \phi(i',j'))} \\ \tan(\Phi) = \frac{\sum_{i,j} b(i,j) \sin(\phi(i,j))}{\sum_{i,j} b(i,j) \cos(\phi(i,j))} \\ \bar{N}_m = \frac{1}{M} \sum_{i,j} n_m(i,j) \end{array} \right. \quad (5.17)$$

Cuando P es lo suficientemente grande, se puede aproximar el promedio del ruido \bar{N}_m por el valor esperado del ruido N .

Entonces $(\bar{I}_m, \bar{I}_{m+1})$, para $m = 1, 2, \dots, M - 1$, genera un conjunto de puntos sobre una elipse centrada en el punto de coordenadas $(A + N, A + N)$, con semiejes orientados a 45° , y con razón entre semiejes igual a $\tan^2(\alpha/2)$.

Realizando un ajuste por mínimos cuadrados es posible encontrar la elipse que mejor ajusta a los datos (con $M > 3$), y con la razón entre los semiejes de la elipse ajustada es posible calcular el salto de fase entre interferogramas (α).

5.4. Simulaciones

Con el objetivo de verificar el desempeño del algoritmo propuesto, en esta sección se presentan algunas simulaciones numéricas con diferentes niveles de ruido en los interferogramas, .

Se trabaja (arbitrariamente) con 6 interferogramas desfasados en $\alpha = \pi/4$ rad. Se toma como función para la fase $(\phi(i, j))$ la función peaks de MATLAB, y se define $a(i, j)$ y $b(i, j)$ como una combinación de funciones sinusoidales y exponenciales.

Las figuras 5.2(a)-5.2(f) muestran los seis interferogramas sin ruido $I_m(i, j)$ con $m = 1, 2, \dots, 6$. A partir de estos interferogramas se calculan los valores medios \bar{I}_m . La figura 5.3 muestra la elipse ajustada pasando por los puntos (\bar{I}_1, \bar{I}_2) , (\bar{I}_2, \bar{I}_3) , (\bar{I}_3, \bar{I}_4) , (\bar{I}_4, \bar{I}_5) y (\bar{I}_5, \bar{I}_6) . Por supuesto en este caso el salto de fase calculado a partir de la ecuación (5.9) es $\alpha = \pi/4$, ya que $(\bar{I}_m, \bar{I}_{m+1})$ satisfacen las ecuaciones (5.5) y (5.6) con $\bar{N}_m = N = 0$.

Las figuras 5.4(a)-5.4(f) muestran los seis interferogramas generados con ruido aditivo Gaussiano (valor medio nulo), y relación señal-ruido (SNR) $\approx 0,6$.

La figura 5.5 muestra la elipse ajustada a los puntos (\bar{I}_1, \bar{I}_2) , (\bar{I}_2, \bar{I}_3) , (\bar{I}_3, \bar{I}_4) ,

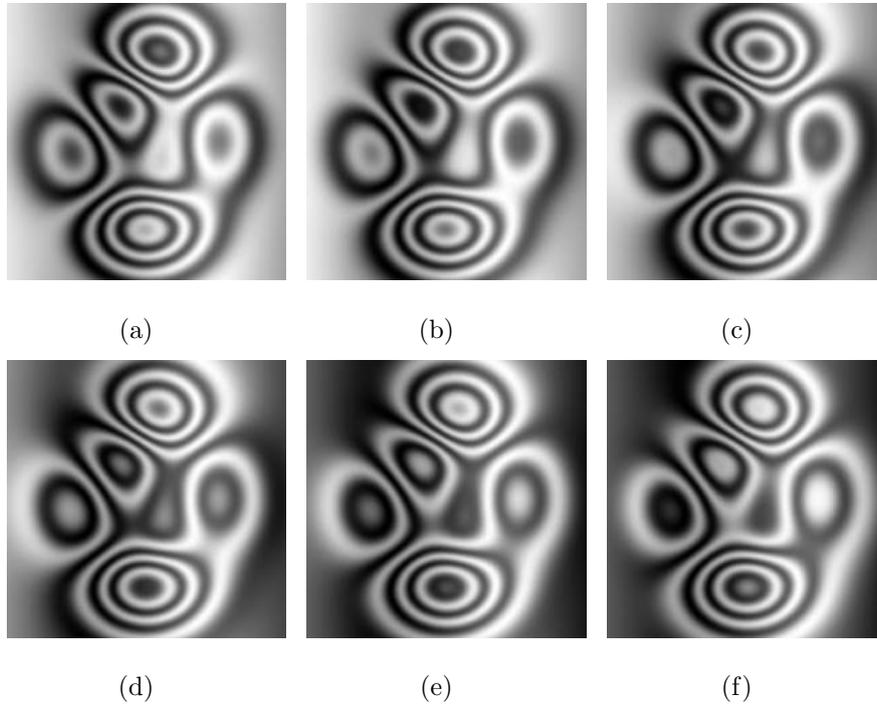


Figura 5.2: Interferogramas $I_m(i, j)$ sin ruido con $m = 1, 2, \dots, 6$.

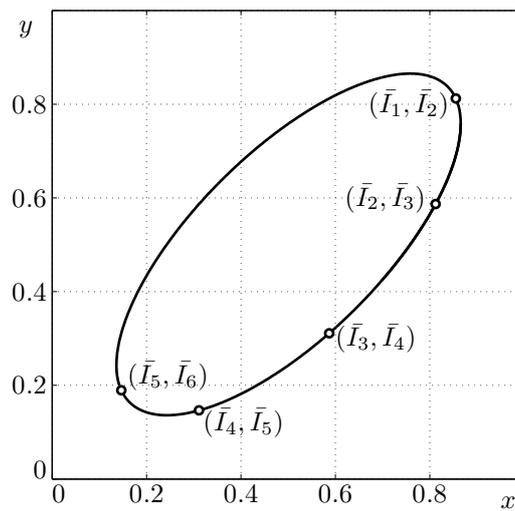


Figura 5.3: Elipse ajustada correspondiente a los interferogramas de la figura 5.2.

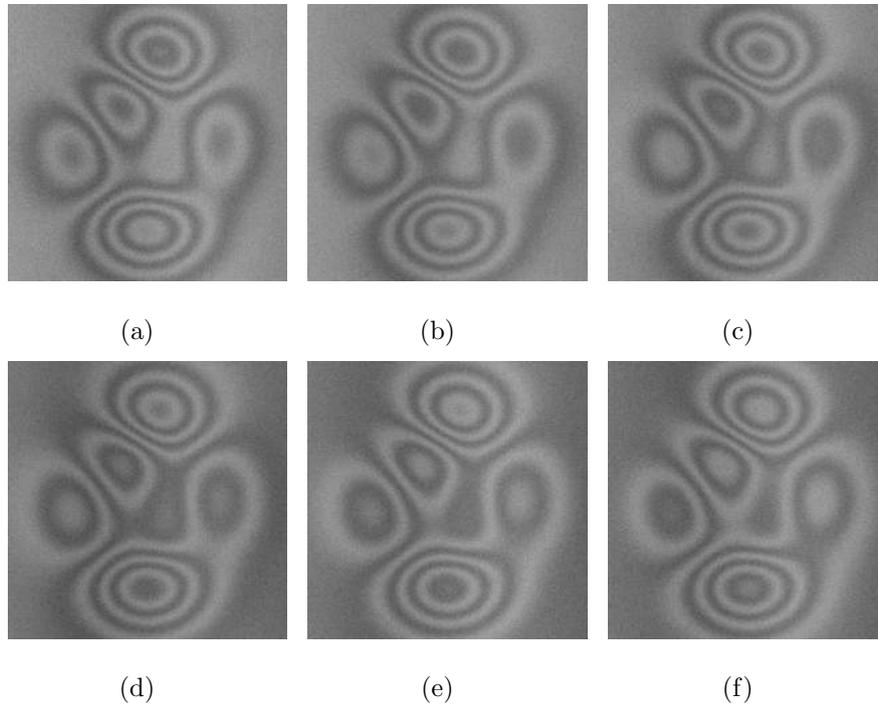


Figura 5.4: Interferogramas generados con ruido aditivo Gaussiano y relación señal-ruido $SNR \approx 0,6$.

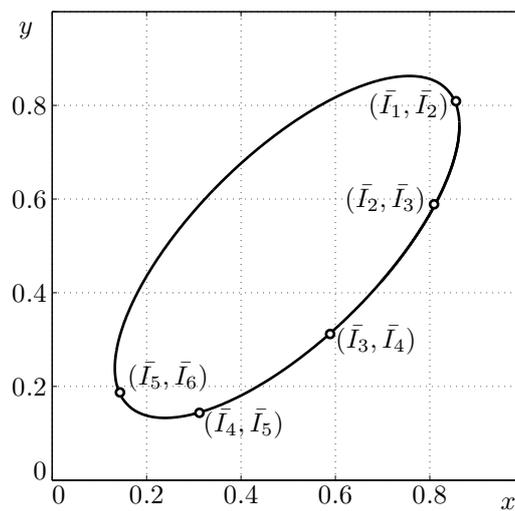


Figura 5.5: Elipse ajustada con los puntos (\bar{I}_1, \bar{I}_2) , (\bar{I}_2, \bar{I}_3) , (\bar{I}_3, \bar{I}_4) , (\bar{I}_4, \bar{I}_5) y (\bar{I}_5, \bar{I}_6) , donde \bar{I}_m es el promedio de los interferogramas de las figuras 5.4(a)-5.4(f)

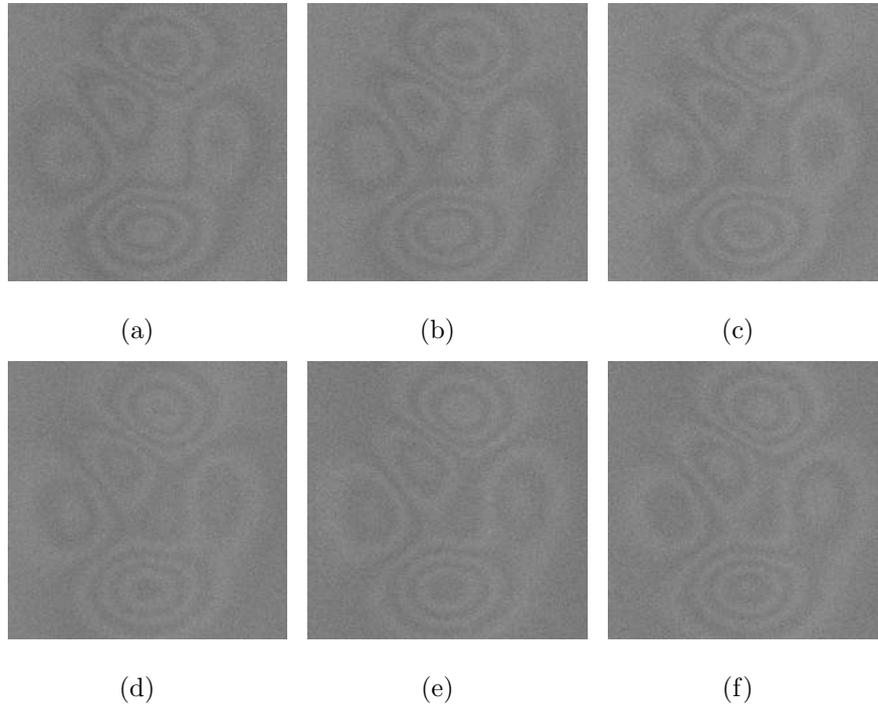


Figura 5.6: Interferogramas generados con ruido aditivo Gaussiano y relación señal-ruido $SNR \approx 0,1$.

(\bar{I}_4, \bar{I}_5) y (\bar{I}_5, \bar{I}_6) . De los parámetros de la elipse y la ecuación (5.9), se calcula un salto de fase $\alpha = \pi/4,02$, que presenta un error de $0,004rad$ ($SNR \approx 0,6$). Esto muestra que es posible calcular el salto de fase (α) con muy buena precisión pese al nivel de ruido.

Finalmente se repite la simulación con ruido aditivo Gaussiano con $SNR \approx 0,1$. Las figuras 5.6(a)-5.6(f) muestran los interferogramas simulados. La figura 5.7 grafica la elipse ajustada a los puntos (\bar{I}_1, \bar{I}_2) , (\bar{I}_2, \bar{I}_3) , (\bar{I}_3, \bar{I}_4) , (\bar{I}_4, \bar{I}_5) y (\bar{I}_5, \bar{I}_6) . De los parámetros de la elipse se calcula un salto de fase $\alpha = \pi/4,13$, que representa un error de $0,025rad$ para $SNR \approx 0,1$.

Con el objetivo de ilustrar la dependencia entre el error relativo en el salto de fase calculado y el SNR de los interferogramas, se simularon interferogramas con $1/SNR$ variando de 0 a 10. Para cada SNR se repitió la simulación 1000 veces y

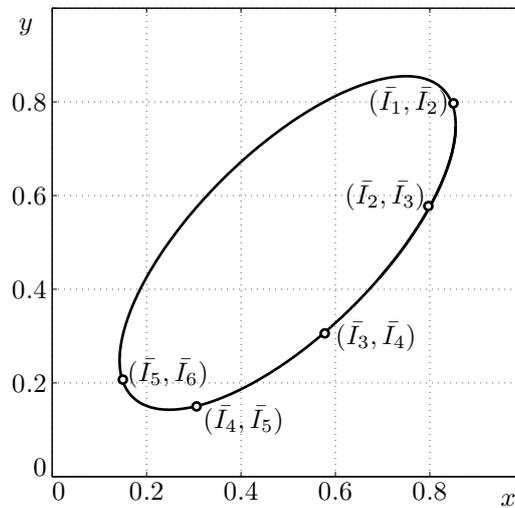


Figura 5.7: Elipse ajustada con los puntos (\bar{I}_1, \bar{I}_2) , (\bar{I}_2, \bar{I}_3) , (\bar{I}_3, \bar{I}_4) , (\bar{I}_4, \bar{I}_5) y (\bar{I}_5, \bar{I}_6) , donde \bar{I}_m es el promedio de los interferogramas de las figuras 5.6(a)-5.6(f).

se promediaron los resultados. La figura 5.8 grafica el error relativo calculado en función de $1/SNR$.

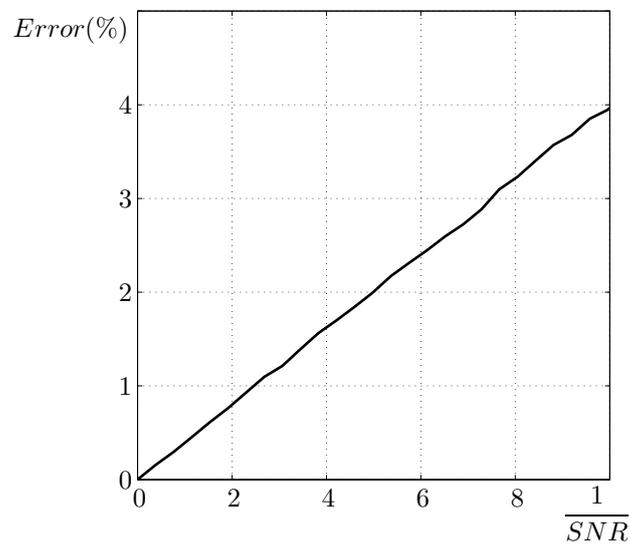


Figura 5.8: Error relativo calculado en función de $1/SNR$ en los interferogramas de la simulación.

Estos resultados muestran lo robusto que es el algoritmo cuando se trabaja

con patrones con niveles altos de ruido, interferogramas con bajo contraste (K) e intensidad media (I_0) no uniforme.

5.5. Comparación con otros métodos

Para comparar el desempeño del método propuesto en el presente trabajo, se implementaron los métodos propuestos por Farrell y Player (FP) [18] y por Gou y Zhang (GZ) [21].

Estas técnicas son representativas de varios métodos desarrollados bajo hipótesis similares.

La tabla 5.1 muestra los errores relativos en la estimación del salto de fase entre interferogramas consecutivos para las figuras 5.2.a-5.2.f, 5.4.a-5.4.f y 5.6.a-5.6.a en función del SNR . En la tabla se puede observar que ante condiciones reales las técnicas de FP y GZ presentan un error bastante grande incluso para interferogramas sin ruido.

| SNR | FP | GZ | Ayubi et al. |
|--------------|------|-------|--------------|
| (noise free) | 37 % | 4 % | Despreciable |
| 0,6 | 64 % | 153 % | 0,5 % |
| 0,1 | 97 % | 163 % | 3 % |

Tabla 5.1: Errores relativos en las estimación del salto de fase entre interferogramas consecutivos. FP = Farrell y Player [18] ; GZ = Guo y Zhang [21]; Ayubi et al. = algoritmo propuesto.

5.6. Resultados experimentales

Se realizaron experimentos para mostrar el desempeño del método propuesto usando un sistema de proyección de franjas. El sistema está descrito en [4].

Se decidió utilizar este sistema porque permite conseguir buena precisión en los corrimientos de fase entre patrones.

Se utilizó un proyector LCD comercial (Modelo CP-RX80, Hitachi) con 1024×768 pixels para proyectar las franjas. Las imágenes fueron adquiridas con una cámara monocromática (Modelo DC310, Thorlabs) de 8 bits con 1024×768 pixels.

Se proyectaron seis patrones sinusoidales sobre una máscara de yeso que se utilizó como superficie de testeo con saltos de fase iguales a 60° entre patrones consecutivos. La figura 5.9 muestra los seis patrones adquiridos con la cámara.

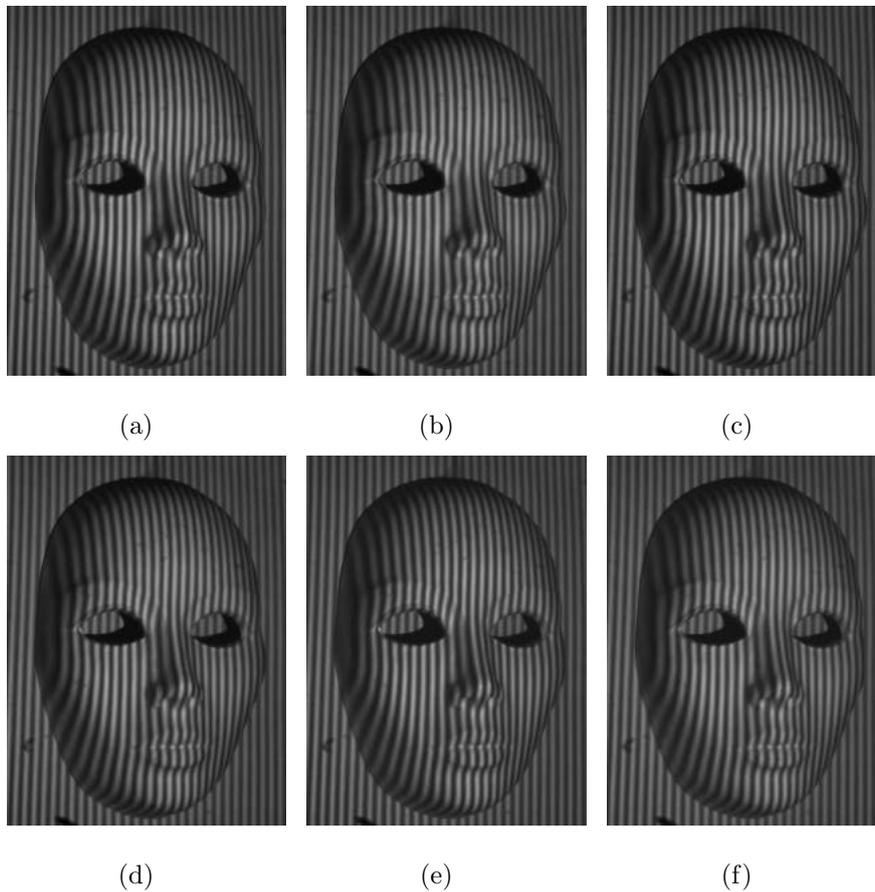


Figura 5.9: Patrones deformados adquiridos con la cámara cuando se proyectan patrones sinusoidales desfasados 60° sobre una máscara de yeso.

Luego se aplicó el procedimiento previamente descrito para estimar el salto de fase (α) entre los patrones adquiridos.

La figura 5.10 muestra un histograma con los saltos de fase calculados para los diferentes pixeles de los patrones. La distribución de los valores de α muestra un pico muy cercano a 60° , valor utilizado para generar los patrones proyectados. El corrimiento existente en el pico se debe a la presencia en los patrones adquiridos de diferentes fuentes de error como ruido aditivo o presencia de armónicos.

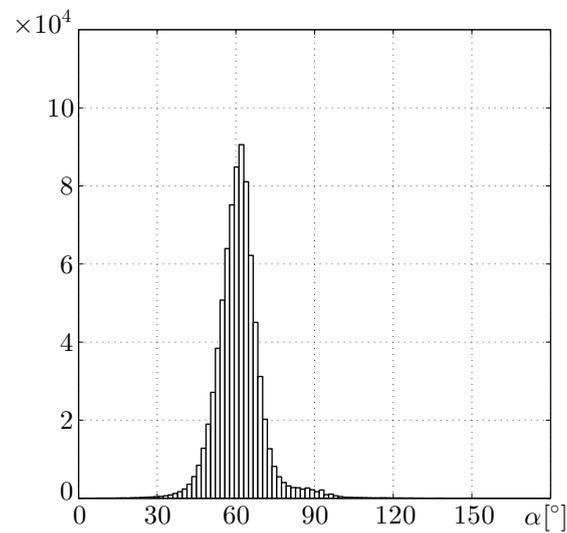


Figura 5.10: Histograma obtenido a partir de los saltos de fase calculados mostrando un pico cercano a los 60° .

En la tabla 5.2 se puede ver los saltos de fase calculados aplicando el método de Farrell y Player [18], de Guo y Zhang [21] y el pico en el histograma de la figura 5.10.

| FP | GZ | Ayubi et al. |
|--------------|--------------|--------------|
| $71,9^\circ$ | $52,4^\circ$ | $62,1^\circ$ |

Tabla 5.2: Saltos de fase entre patrones consecutivos calculados con el método de Farrell y Player (FP) [18], de Guo y Zhang (GZ) [21] y del método propuesto [46].

Con el fin de comprobar el desempeño del método propuesto cuando se aplica un filtro a los patrones adquiridos, se filtraron los patrones utilizando una matriz de Sobel en la dirección horizontal (Esto calcula la derivada en la dirección horizontal de los patrones) La figura 5.11 muestra las seis imágenes filtradas.

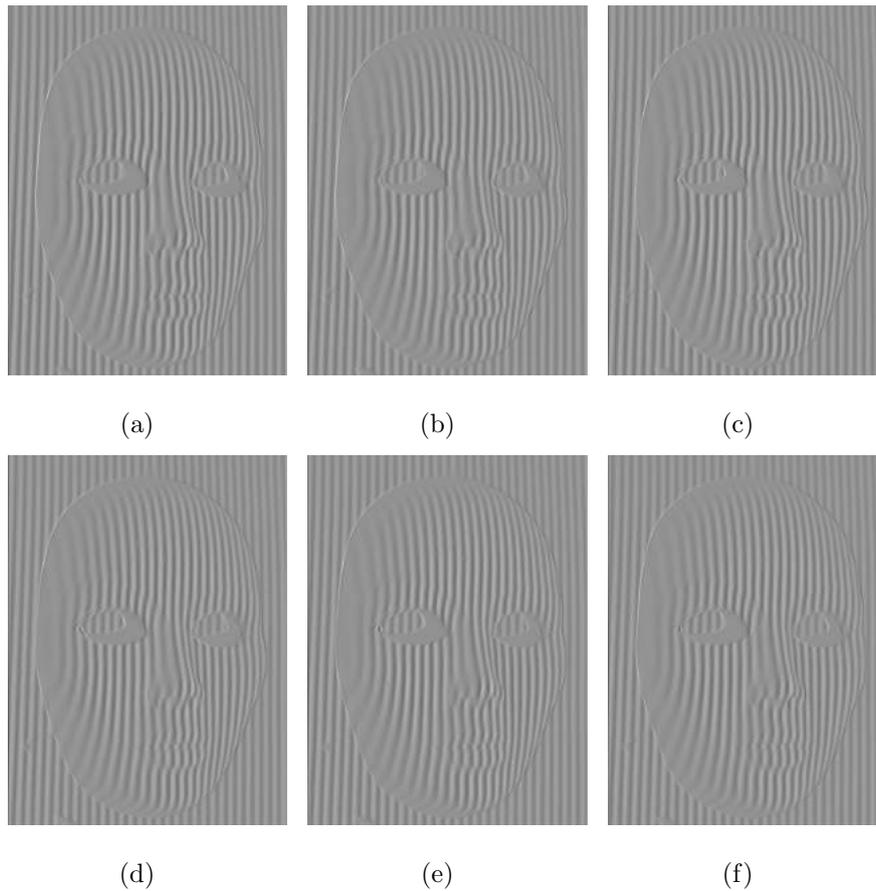


Figura 5.11: Imágenes filtradas. Se aplico un filtro de Sobel sobre los seis patrones de la figura 5.9.

El histograma obtenido muestra, como se esperaba, que la distribución de los saltos de fase no es alterada al aplicar el filtro de Sobel (Ver figura 5.12).

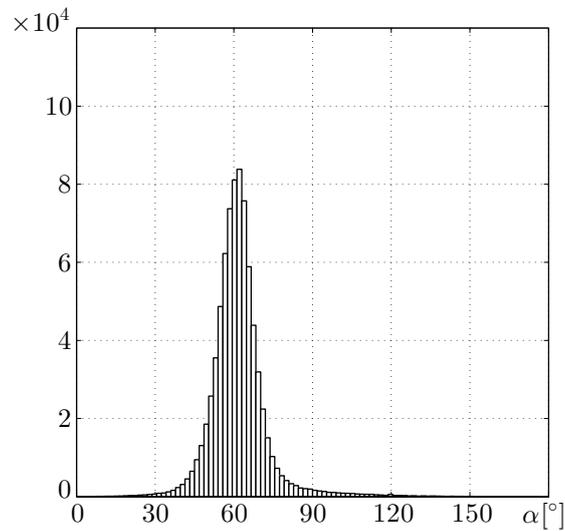


Figura 5.12: Histograma obtenido para los saltos de fase luego de aplicar el filtro de Sobel.

5.7. Conclusiones

Se presentó un método para calcular el salto de fase con aplicaciones a la interferometría, deflectometría y perfilometría 3D por proyección de franjas. A diferencia de otros métodos propuestos en la literatura, el método propuesto no requiere restricciones o conocimiento previo de la intensidad media o el contraste.

Se demostró que en caso de que los interferogramas tengan igual valor esperado de ruido ($\bar{N}_m = \frac{1}{M} \sum_{i,j} n_m(i,j)$) para $m = 1, 2, \dots, M$, los puntos $(\bar{I}_m, \bar{I}_{m+1})$ pertenecen a una elipse con relación de semiejes función del salto de fase (α). Como la magnitud relevante es el valor medio del ruido y no el ruido particular de cada imagen ($n_m(i,j)$), el algoritmo resulta muy robusto al ruido como puede observarse en las simulaciones.

Se demostró además que la aplicación de filtros lineales sobre los interferogramas no modifica el salto de fase.

Apéndice 5.A. Filtros lineales

En la ecuación (5.10), el parámetro u es un número natural arbitrario que numera las combinaciones lineales que se realizan con los pixeles. Se puede ordenar el conjunto de números $u = 1, \dots, U$ en forma de un conjunto bidimensional (u, v) , de forma que sin perder generalidad en vez de (5.10) se tiene

$$I'_k(u, v) = \sum_{i,j} \beta_{u,v}(i, j) I_k(i, j). \quad (5.18)$$

Considerando el caso particular en que (u, v) tiene el mismo tamaño que la matriz de pixeles (i, j) y $\beta_{u,v}(i, j)$ verificando

$$\beta_{u,v}(i, j) = \beta(u - i, v - j). \quad (5.19)$$

Entonces la ecuación (5.18) se puede reescribir como

$$I'_k(u, v) = \sum_{i,j} \beta(u - i, v - j) I_k(i, j). \quad (5.20)$$

La expresión anterior corresponde a la convolución de $\beta(i, j)$ y $I_k(i, j)$, operación característica de un filtro lineal. Entonces se concluye que al aplicar un filtro lineal sobre los interferogramas el salto de fase (δ_k) relativo entre interferogramas no cambia.

Apéndice 5.B. Comportamiento del algoritmo con interferogramas con ruido sal y pimienta

En este apéndice se demuestra que el salto de fase que se obtiene con el algoritmo propuesto no se modifica cuando los interferogramas poseen ruido de tipo sal y pimienta.

Como primer opción puede se puede intentar aplicar un filtro de mediana, como se suele proceder para reducir este tipo de ruido. Desafortunadamente es fácil

observar que la combinación de datos ruidosos entre pixeles vecinos es contraproducente y aumenta el error el el salto de fase que se obtiene con el algoritmo.

Sin embargo no es necesario aplicar el filtro. Dada la robustez del algoritmo, incluso bajo altos niveles de ruido, el salto de fase puede calcularse correctamente. En el siguiente ejemplo se simulan interferogramas con ruido sal y pimienta con una densidad igual a 0,2

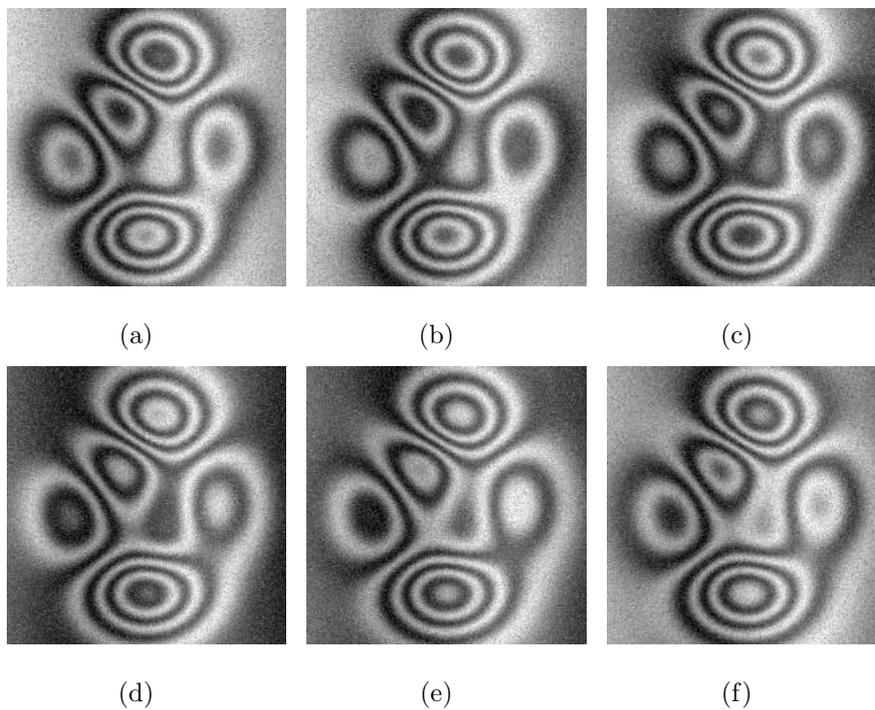


Figura 5.13: Interferogramas con ruido tipo sal y pimienta con densidad igual a 0,2.

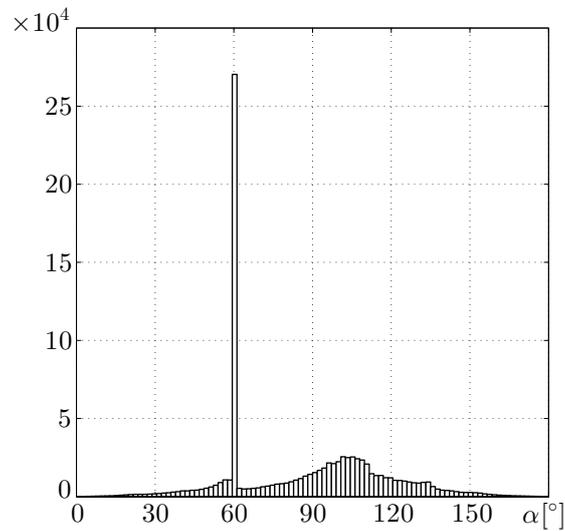


Figura 5.14: Histograma con los saltos de fase calculados para cada pixel con un pico en 60° .

La figura 5.14 muestra el histograma con los saltos de fase calculados. El pico que se observa corresponde al valor utilizado para la simulación rodeado de valores incorrectos con una frecuencia notoriamente menor.

Apéndice 5.C. Comportamiento del algoritmo en presencia de vibraciones

La vibración mecánica en el objeto a analizar puede disminuir la precisión de los algoritmos de phase-shifting [30]. Con el fin de tratar con en el caso de patrones de moiré se propuso una técnica de promediado de tiempo [48]. En el presente apéndice demostramos como al aplicar las técnicas de promediado temporal el salto de fase entre interferogramas no se modifica.

En presencia de vibraciones los patrones adquiridos difieren de (5.1) en una dependencia temporal ($V_k(i, j, t)$) sumada a la fase $\phi(i, j)$,

$$I_k(i, j, t) = a(i, j) + b(i, j) \cos(\phi(i, j) + \delta_k + V_k(i, j, t)), \quad (5.21)$$

donde se modela la vibración como una sinusoidal

$$V_k(i, j, t) = V_0(i, j) \sin(\omega t + \varphi_k(i, j)). \quad (5.22)$$

Promediando en el tiempo se tiene

$$\langle I_k(i, j) \rangle = \lim_{t' \rightarrow \infty} \frac{1}{t'} \int_0^{t'} I_k(i, j, t) dt, \quad (5.23)$$

o en forma equivalente ($I_k(i, j)$ es periódico)

$$\langle I_k(i, j) \rangle = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} I_k(i, j, t) dt, \quad (5.24)$$

donde T es el período de la vibración.

Entonces

$$\langle I_k(i, j) \rangle = a(i, j) + b(i, j) J_0(V_0(i, j)) \cos(\phi(i, j) + \delta_k), \quad (5.25)$$

donde J_0 es la función de Bessel de orden cero de primera especie

La ecuación anterior muestra que el salto de fase relativo no se modifica si se aplican técnicas de promediado temporal.

Capítulo 6

Algoritmos de phase-shifting sintonizables

Los algoritmos de phase shifting en general requieren de una serie de medidas de intensidad $I_m(i, j)$ (con $m = 1, 2, \dots, M$) con ciertos saltos de fase δ_m ,

$$I_m(i, j) = I_0(i, j) [1 + K(i, j) \cos(\phi(i, j) + \delta_m)], \quad (6.1)$$

donde (i, j) son las coordenadas espaciales y $\phi(i, j)$ es la fase que se busca calcular. Las funciones $I_0(i, j)$ y $K(i, j)$ son la intensidad media y el contraste del interferograma respectivamente.

Soluciones con valores de δ_m arbitrarios pueden encontrarse en los capítulos 3 y 4. En este capítulo se estudian algoritmos donde la diferencia de fase entre interferogramas es una constante (2α) arbitraria. A estos algoritmos se los conoce como algoritmos sintonizables (tunable phase shifting algorithms) [29].

Al trabajar con saltos de fase constantes, los mismos pueden escribirse como $\delta_m = 2\alpha \left(m - \frac{M+1}{2}\right)$. Esta expresión define los saltos de fase simétricos respecto a $\delta_m = 0$, permitiendo reducir la expresión del algoritmo como se verá en las secciones siguientes.

Usualmente se trabaja con algoritmos de phase shifting donde la diferencia de

fase entre interferogramas consecutivos es constante. En particular en este capítulo se estudian algoritmos donde la diferencia de fase entre interferogramas es una constante (2α) arbitraria.

Sustituyendo la expresión para δ_m en la ecuación (6.1) se tiene

$$I_m = I_0 \left[1 + K \cos \left(\phi + 2\alpha \left(m - \frac{M+1}{2} \right) \right) \right]. \quad (6.2)$$

El capítulo se compone de la siguiente forma: En la sección siguiente se presenta el algoritmo de phase shifting para M interferogramas. En la sección 6.2 se calcula el algoritmo para $M = 4$ y se lo compara con el algoritmo de Carré [15]. Finalmente se concluye el capítulo en la sección 6.3. El método fue propuesto en [49]

6.1. Algoritmo de phase-shifting

El presente algoritmo se basa en el resultado presentado en el capítulo 4, donde se propone un método para minimizar la propagación del ruido aditivo y de fase [34, 35, 50].

Las expresiones deducidas en el capítulo 4 para pasos arbitrarios son utilizadas para calcular el algoritmo óptimo para reducir el error por ruido aditivo o de fase cuando el desfajase entre interferogramas es constante.

Los coeficientes a_m y b_m que minimizan la propagación del ruido son

$$a_m = \lambda_1 + \lambda_4 \sin(\delta_m) + \lambda_5 \cos(\delta_m), \quad (6.3)$$

y

$$b_m = \lambda_2 + \lambda_3 \cos(\delta_m) + \lambda_6 \sin(\delta_m), \quad (6.4)$$

para $m = 1, \dots, M$, donde

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = C (S_3 S_6 - S_2 S_5), \\ \lambda_2 = C (S_3 S_5 - S_2 S_4), \\ \lambda_3 = C (S_2 S_3 - S_1 S_5), \\ \lambda_4 = C (S_1 S_5 - S_2 S_3), \\ \lambda_5 = C (S_2^2 - S_1 S_6), \\ \lambda_6 = C (S_1 S_4 - S_3^2) \end{array} \right. \quad (6.5)$$

y

$$\left\{ \begin{array}{l} S_1 = \sum_{m=1}^M 1 \\ S_2 = \sum_{m=1}^M \sin(\delta_m) \\ S_3 = \sum_{m=1}^M \cos(\delta_m) \\ S_4 = \sum_{m=1}^M \cos^2(\delta_m) \\ S_5 = \sum_{m=1}^M \cos(\delta_m) \sin(\delta_m) \\ S_6 = \sum_{m=1}^M \sin^2(\delta_m) \end{array} \right. \quad (6.6)$$

Si los saltos de fase son de la forma $\delta_m = 2\alpha \left(m - \frac{M+1}{2}\right)$, los coeficientes S_1 , S_2 , S_3 , S_4 , S_5 y S_6 son

$$\left\{ \begin{array}{l} S_1 = M \\ S_2 = 0 \\ S_3 = \frac{\sin(M\alpha)}{\sin(\alpha)} \\ S_4 = \frac{1}{2} \left(M + \frac{\sin(2M\alpha)}{\sin(2\alpha)} \right) \\ S_5 = 0 \\ S_6 = \frac{1}{2} \left(M - \frac{\sin(2M\alpha)}{\sin(2\alpha)} \right) \end{array} \right. \quad (6.7)$$

Entonces es posible calcular λ_m y con ellos los coeficientes a_m y b_m .

$$b_m = \left[2 \sin^2(M\alpha) \sin(2\alpha) - M^2 \sin^2(\alpha) \sin(2\alpha) - M \sin^2 \sin(2M\alpha) \right] \sin \left[2\alpha \left(m - \frac{M+1}{2} \right) \right] \quad (6.8)$$

y

$$a_m = \sin(\alpha) [M \sin(2\alpha) - \sin(2M\alpha)] \left[M \sin(\alpha) \cos \left[2\alpha \left(m - \frac{M+1}{2} \right) \right] - \sin(M\alpha) \right]. \quad (6.9)$$

Luego, simplificando la expresión, el nuevo algoritmo es

$$\tan(\phi) = \frac{2 \sin^2(M\alpha) \sin(2\alpha) - M^2 \sin^2(\alpha) \sin(2\alpha) - M \sin^2 \sin(2M\alpha)}{\sin(\alpha) [M \sin(2\alpha) - \sin(2M\alpha)]} \frac{\sum_{m=1}^M I_m \sin \left[2\alpha \left(m - \frac{M+1}{2} \right) \right]}{M \sin(\alpha) \sum_{m=1}^M I_m \cos \left[2\alpha \left(m - \frac{M+1}{2} \right) \right] - \sin(M\alpha) \sum_{m=1}^M I_m}. \quad (6.10)$$

6.2. Comparación con el algoritmo de Carré

Con el objetivo de ilustrar el desempeño del algoritmo propuesto comenzamos por la deducción del algoritmo con mínimo error causado por la presencia de ruido aditivo o de fase para el caso que se tengan un conjunto de cuatro imágenes ($M = 4$), para luego compararlo con el algoritmo de Carré. Se realiza la comparación con el algoritmo de Carré por ser un algoritmo bien conocido y utilizado bajo condiciones similares.

Sustituyendo $M = 4$ en la ecuación (6.10) el algoritmo que se obtiene es

$$\tan(\phi) = \frac{2 \cos(\alpha) \sin(\alpha)}{8 \sin^4(\alpha) - 12 \sin^2(\alpha) + 5} \left[\frac{(4 \cos^2(\alpha) - 1) I_1 + I_2 - I_3 - (4 \cos^2(\alpha) - 1) I_4}{-I_1 + I_2 + I_3 - I_4} \right]. \quad (6.11)$$

Se compara el algoritmo con la parte sintonizable del algoritmo de Carré dado por

$$\tan(\phi) = \tan(\alpha) \left[\frac{I_1 + I_2 - I_3 - I_4}{-I_1 + I_2 + I_3 - I_4} \right] \quad (6.12)$$

donde α es se calcula como

$$\tan(\alpha) = \sqrt{\frac{-I_1 + 3I_2 - 3I_3 + I_4}{I_1 + I_2 - I_3 - I_4}}. \quad (6.13)$$

Para las simulaciones se utilizó como fase de referencia la función graficada en la figura 6.1.

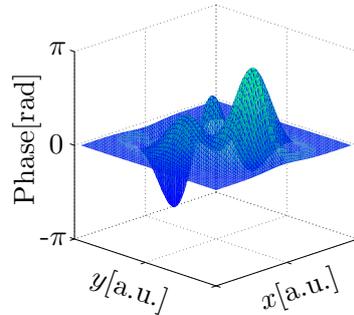


Figura 6.1: Función utilizada como fase de referencia para las simulaciones.

A partir de la fase de referencia se sintetizaron cuatro interferogramas con saltos de fase iguales a -3α , $-\alpha$, α y 3α , con valores de α desde $\alpha = 0$ hasta $\alpha = \pi/2$. A estos interferogramas se le adicionó cierta cantidad arbitraria de ruido aditivo.

La figura 6.2 muestra el *MSE* de la fase calculada como función del valor de α , para el algoritmo de Carré (Curva continua) y para el algoritmo propuesto (Curva discontinua). Como se esperaba el error en la fase reconstruida es menor en el algoritmo propuesto. Un caso particular es para $\alpha = \pi/4$ donde los dos algoritmo coinciden exactamente.

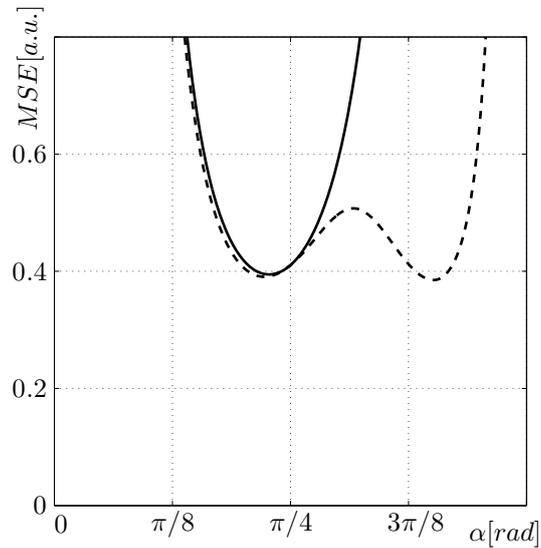


Figura 6.2: MSE de la fase calculada como función de α .

Para observar la diferencia entre las fases calculadas con los dos algoritmos, se grafica en la figura 6.3 el resultado del algoritmo de Carré para $\alpha = \frac{5}{12}\pi$ y en la figura 6.4 el resultado con el algoritmo propuesto.

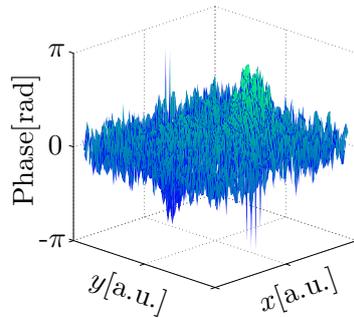


Figura 6.3: Fase calculada con el algoritmo de Carré para $\alpha = \frac{5}{12}\pi$.

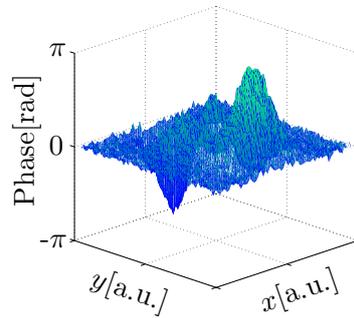


Figura 6.4: Fase calculada con el algoritmo propuesto para $\alpha = \frac{5}{12}\pi$.

Las simulaciones previamente expuestas son representativas de una larga serie de simulaciones realizadas con diferentes algoritmos de phase-shifting sintonizables. Es importante destacar que cuando se utiliza el algoritmo propuesto con imágenes que poseen ruido aditivo o de fase, el resultado tiene mínima propagación del ruido.

6.3. Conclusiones

Presentamos un método algebraico sistemático para generar algoritmos de phase-shifting sintonizables para un número arbitrario M de interferogramas. Los algoritmos son diseñados de forma que minimizan la propagación de ruido aditivo o de fase. Como ejemplo se realizó una comparación con el algoritmo de Carré para el caso de $M = 4$ obteniéndose resultados notoriamente superiores.

Capítulo 7

Algoritmos para cálculo de contraste

A pesar de que el objetivo de los algoritmos de phase shifting es calcular la fase $\phi(x, y)$, tanto en el caso de interferogramas con saltos de fase constantes [1, 29, 51] o arbitrarios [23, 31–36, 50], el contraste $K(x, y)$ es un factor importante para determinar la calidad de los datos en determinado punto [1, 26, 52–54]. Una primera aproximación al uso de la información en el contraste es excluir del análisis los puntos que tienen un valor de contraste menor a cierto umbral, ya que estos puntos tienen baja relación señal-ruido [1].

En la literatura pueden encontrarse algunas técnicas para el cálculo del contraste en caso que el desfase entre interferogramas sea constante [1], pero no existe, hasta donde sabemos, ningún tratamiento riguroso cuando el desfase es arbitrario.

En este capítulo se propone un procedimiento para determinar el contraste en el caso de interferogramas arbitrariamente desfasados. Se estudia como diferentes fuentes de error se propagan en el algoritmo y se muestra como el cálculo del contraste puede ayudar a mejorar las técnicas de reconstrucción de fase.

El capítulo se organiza de la siguiente forma. En la sección 7.1 se presenta un procedimiento generalizado para determinar el contraste en el caso de tener M interferogramas arbitrariamente desfasados. En las secciones 7.2, 7.3 y 7.4 se estudia la presencia de ruido aditivo y ruido de fase en los interferogramas, y como determinar el algoritmo óptimo para minimizar la propagación de error. En la sección 7.5 se muestran algunas simulaciones. Finalmente en la sección 7.6 se presentan resultados experimentales.

7.1. Algoritmo para cálculo de contraste con M pasos arbitrarios

Se parte de considerar los coeficientes reales a_m , b_m y c_m con $m = 1, \dots, M$, siendo M la cantidad total de interferogramas. El objetivo de esta sección es determinar las restricciones que deben verificar los coeficientes a_m , b_m y c_m para poder calcular el contraste K .

Tomando las combinaciones lineales de interferogramas $\sum_{m=1}^M (a_m + ib_m)I_m$ y $\sum_{m=1}^M c_m I_m$, y a partir de la ecuación (4.1), se obtiene

$$\sum_{m=1}^M (a_m + ib_m)I_m = I_0 \sum_{m=1}^M (a_m + ib_m) + \frac{I_0 K}{2} e^{i\phi} \sum_{m=1}^M (a_m + ib_m) e^{i\delta_m} + \frac{I_0 K}{2} e^{-i\phi} \sum_{m=1}^M (a_m + ib_m) e^{-i\delta_m} \quad (7.1)$$

y

$$\sum_{m=1}^M c_m I_m = I_0 \sum_{m=1}^M c_m + \frac{I_0 K}{2} e^{i\phi} \sum_{m=1}^M c_m e^{i\delta_m} + \frac{I_0 K}{2} e^{-i\phi} \sum_{m=1}^M c_m e^{-i\delta_m}. \quad (7.2)$$

Imponiendo que a_m , b_m y c_m verifiquen

$$\sum_{m=1}^M a_m = 0, \quad (7.3)$$

$$\sum_{m=1}^M b_m = 0, \quad (7.4)$$

$$\sum_{m=1}^M c_m = \alpha, \quad (7.5)$$

$$\sum_{m=1}^M a_m \sin(\delta_m) = 0, \quad (7.6)$$

$$\sum_{m=1}^M b_m \sin(\delta_m) = -\alpha/2, \quad (7.7)$$

$$\sum_{m=1}^M c_m \sin(\delta_m) = 0, \quad (7.8)$$

$$\sum_{m=1}^M a_m \cos(\delta_m) = \alpha/2, \quad (7.9)$$

$$\sum_{m=1}^M b_m \cos(\delta_m) = 0 \quad (7.10)$$

y

$$\sum_{m=1}^M c_m \cos(\delta_m) = 0. \quad (7.11)$$

Luego, imponiendo las condiciones (7.3)-(7.11) en las ecuaciones (7.1) y (7.2), el contraste K puede calcularse como

$$K = 2 \frac{\sqrt{\left(\sum_{m=1}^M a_m I_m\right)^2 + \left(\sum_{m=1}^M b_m I_m\right)^2}}{\sum_{m=1}^M c_m I_m}. \quad (7.12)$$

Por lo tanto, cuando se trabaja con M saltos de fase, se pueden seleccionar $3M$ coeficientes reales (a_m , b_m y c_m) que verifiquen las nueve condiciones (7.3)-(7.11), por lo que se tienen $3M - 9$ coeficientes libres. Por ejemplo en el caso de algoritmos con tres interferogramas ($M = 3$) no se tienen parámetros libres para elegir (salvo por un factor multiplicativo que se cancela en (7.12)), por lo que para un conjunto

dato de interferogramas con saltos de fase δ_m , el algoritmo es único. Pero para $M > 3$, para cada conjunto de valores δ_m , el algoritmo de cálculo de contraste no es único, y por esto, es posible elegir los coeficientes para minimizar la propagación de diferentes fuentes de error.

7.2. Modelado y estimación del error en el cálculo del contraste inducido por ruido aditivo

Modelando un interferograma con ruido $I'_m(x, y)$ como la suma de ruido $n_m^{(a)}(x, y)$ a un interferograma libre de ruido $I_m(x, y)$, se tiene

$$I'_m(x, y) = I_m(x, y) + n_m^{(a)}(x, y). \quad (7.13)$$

Calculando $\sum_{m=1}^M a_m I'_m$ se obtiene

$$\sum_{m=1}^M a_m I'_m = \sum_{m=1}^M a_m I_m + \sum_{m=1}^M a_m n_m^{(a)}, \quad (7.14)$$

entonces, para minimizar la propagación del ruido, asumiendo que el ruido tiene valor esperado nulo, se tiene que minimizar la desviación estándar de $\sum_{m=1}^M a_m n_m^{(a)}$, o en forma equivalente se debe minimizar

$$f_a(a_1, \dots, a_M) = (1/2) \sum_{m=1}^M a_m^2, \quad (7.15)$$

ya que por la fórmula de Bienaymé la varianza de $\sum_{m=1}^M a_m n_m^{(a)}$, es $\sigma_n^2 \sum_{m=1}^M a_m^2$, donde σ_n es la desviación estándar del ruido n_m .

En forma similar, para $\sum_{m=1}^M b_m I'_m$, se debe minimizar

$$f_b(b_1, \dots, b_M) = (1/2) \sum_{m=1}^M b_m^2, \quad (7.16)$$

y para $\sum_{m=1}^M c_m I'_m$,

$$f_c(c_1, \dots, c_M) = (1/2) \sum_{m=1}^M c_m^2. \quad (7.17)$$

7.3. Modelado y estimación del error en el cálculo del contraste inducido por ruido de fase

Al considerar el caso de interferogramas con ruido de fase se tiene,

$$I'_m(x, y) = I_0(x, y) [1 + K(x, y) \cos(\phi(x, y) + \delta_m + n_m^{(p)}(x, y))], \quad (7.18)$$

donde $n_m^{(p)}(x, y)$ es el ruido de fase.

La última expresión puede simplificarse si se considera que el ruido de fase es pequeño, o sea que $n_m^{(p)} \ll 1$. Entonces, a primer orden en $n_m^{(p)}$ se tiene

$$I'_m(x, y) = I_0(x, y) [1 + K(x, y) \cos(\phi(x, y) + \delta_m) - K(x, y) \sin(\phi(x, y) + \delta_m) n_m^{(p)}(x, y)], \quad (7.19)$$

por lo tanto calculando $\sum_{m=1}^M a_m I'_m$ se obtiene

$$\sum_{m=1}^M a_m I'_m = \sum_{m=1}^M a_m I_m - K \cos(\phi) \sum_{m=1}^M a_m \sin(\delta_m) n_m^{(p)} - K \sin(\phi) \sum_{m=1}^M a_m \cos(\delta_m) n_m^{(p)}. \quad (7.20)$$

Definiendo $N_s = \sum_{m=1}^M a_m \sin(\delta_m) n_m^{(p)}$ y $N_c = \sum_{m=1}^M a_m \cos(\delta_m) n_m^{(p)}$,

$$\sum_{m=1}^M a_m I'_m = \sum_{m=1}^M a_m I_m - K \cos(\phi) N_s - K \sin(\phi) N_c. \quad (7.21)$$

Con el objetivo de minimizar la propagación del error, asumiendo que el ruido tiene valor esperado nulo, se debe minimizar N_s y N_c . En caso que el valor esperado del ruido no sea nulo, la fase calculada difiere de la real únicamente en una constante global.

La varianza de N_s se puede calcular utilizando la fórmula de Bienaymé como

$$\sigma_{N_s}^2 = \sum_{m=1}^M a_m^2 \sin^2(\delta_m) \sigma_n^2 \quad (7.22)$$

y la de N_c como

$$\sigma_{N_c}^2 = \sum_{m=1}^M a_m^2 \cos^2(\delta_m) \sigma_n^2, \quad (7.23)$$

donde σ_n es la desviación estándar de $n_m^{(p)}$.

Ambos, $\sigma_{N_s}^2$ y $\sigma_{N_c}^2$, pueden ser acotados por $\sum_{m=1}^M a_m^2 \sigma_n^2$, entonces se debe minimizar

$$f_a(a_1, \dots, a_M) = (1/2) \sum_{m=1}^M a_m^2. \quad (7.24)$$

En forma similar, para $\sum_{m=1}^M b_m I'_m$, se debe minimizar

$$f_b(b_1, \dots, b_M) = (1/2) \sum_{m=1}^M b_m^2, \quad (7.25)$$

y para $\sum_{m=1}^M c_m I'_m$,

$$f_c(c_1, \dots, c_M) = (1/2) \sum_{m=1}^M c_m^2. \quad (7.26)$$

7.4. Minimización del error en el cálculo del contraste

Como se discutió anteriormente, para un conjunto dado de saltos de fase δ_m , con el objetivo de minimizar el error causado por el ruido aditivo y de fase, se deben seleccionar correctamente los coeficientes a_m de forma que minimicen la expresión

$$f(a_1, \dots, a_M) = (1/2) \sum_{m=1}^M a_m^2. \quad (7.27)$$

La función dada por la ecuación (7.27) se debe minimizar a la vez que se verifican las condiciones (7.3), (7.6) y (7.9), lo que se puede realizar aplicando el método de los multiplicadores de Lagrange definiendo

$$\begin{cases} g_1(a_1, \dots, a_M, b_1, \dots, b_M) = \sum_{m=1}^M a_m \\ g_2(a_1, \dots, a_M, b_1, \dots, b_M) = \sum_{m=1}^M a_m \sin(\delta_m) \\ g_3(a_1, \dots, a_M, b_1, \dots, b_M) = \sum_{m=1}^M a_m \cos(\delta_m) - \alpha/2. \end{cases} \quad (7.28)$$

Las restricciones son

$$g_k(a_1, \dots, a_M) = 0, \quad (7.29)$$

con $k = 1, 2, 3$.

Aplicando el método de los multiplicadores de Lagrange se tiene que resolver el conjunto de ecuaciones

$$\frac{\partial f}{\partial a_m} = \sum_{k=1}^3 \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial a_m}, \quad (7.30)$$

para $m = 1, \dots, M$.

Entonces, de (7.27) y (7.30) se tiene

$$a_m = \lambda_1 + \lambda_2 \sin(\delta_m) + \lambda_3 \cos(\delta_m), \quad (7.31)$$

para $m = 1, \dots, M$.

Sustituyendo la ecuación (7.31) en la ecuación (7.29) se obtiene un sistema lineal 3×3 que permite calcular los multiplicadores de Lagrange.

$$\begin{pmatrix} M & \sum_{m=1}^M \sin(\delta_m) & \sum_{m=1}^M \cos(\delta_m) \\ \sum_{m=1}^M \sin(\delta_m) & \sum_{m=1}^M \sin^2(\delta_m) & \sum_{m=1}^M \sin(\delta_m) \cos(\delta_m) \\ \sum_{m=1}^M \cos(\delta_m) & \sum_{m=1}^M \sin(\delta_m) \cos(\delta_m) & \sum_{m=1}^M \cos^2(\delta_m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\alpha/2 \end{pmatrix} = 0. \quad (7.32)$$

Resolviendo el sistema y sustituyendo λ_{1-3} en la ecuación (7.31), difiriendo únicamente por una constante multiplicativa global se obtiene

$$a_m = \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^M [\sin(\delta_k) - \sin(\delta_l)] [\cos(\delta_k) \sin(\delta_l) + \cos(\delta_m) \sin(\delta_k) + \cos(\delta_l) \sin(\delta_m)]. \quad (7.33)$$

En forma similar, para b_m se tiene

$$b_m = \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^M [\cos(\delta_k) - \cos(\delta_l)] [\cos(\delta_k) \sin(\delta_l) + \cos(\delta_m) \sin(\delta_k) + \cos(\delta_l) \sin(\delta_m)] \quad (7.34)$$

y para c_m

$$c_m = 2 \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^M [\cos(\delta_k) \sin(\delta_l) - \sin(\delta_k) \cos(\delta_l)] [\cos(\delta_k) \sin(\delta_l) + \cos(\delta_m) \sin(\delta_k) + \cos(\delta_l) \sin(\delta_m)]. \quad (7.35)$$

Los coeficientes calculados en las ecuaciones (7.33), (7.34) y (7.35) minimizan la propagación del error en el caso de interferogramas sin armónicos. En caso de que se busque eliminar determinados armónicos, se debe agregar a las condiciones (7.3) - (7.11) otras condiciones que se estudian en un apéndice de este capítulo.

7.5. Simulaciones

Con el objetivo de verificar el correcto funcionamiento del algoritmo propuesto, en esta sección se presentan algunas simulaciones numéricas.

En nuestras simulaciones consideramos como función de testeo para la intensidad media (I_0) la función de la figura 7.1(a), para el contraste (K) la función en 7.1(b) y para la fase la función en 7.1(c)

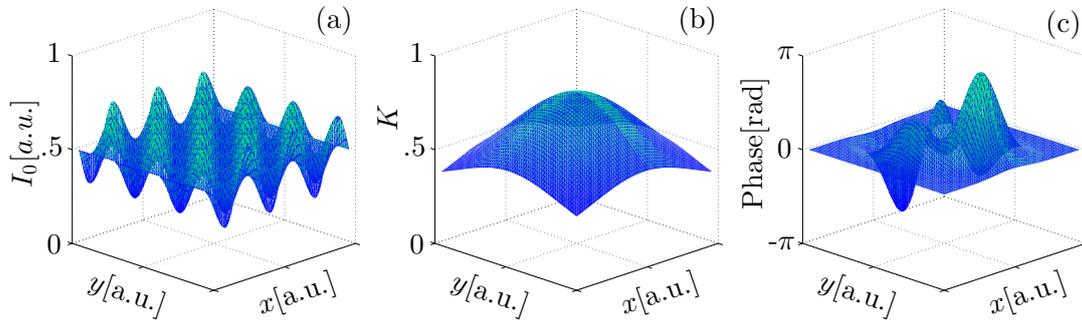


Figura 7.1: (a) Intensidad media (I_0), (b) contraste (K) y (c) fase utilizadas para demostrar el desempeño del algoritmo propuesto.

Luego se simulan interferogramas con paso arbitrariamente elegidos de valores $\delta_1 = 0$, $\delta_2 = 1,3rad$, $\delta_3 = 2,9rad$, $\delta_4 = 4,6rad$, $\delta_5 = 5,7rad$, y $\delta_6 = 6,1rad$, con cierta cantidad de ruido aditivo.

Para calcular el contraste a partir de los interferogramas simulados, se determina el conjunto de coeficientes a_m , b_m y c_m a partir de las ecuaciones (7.33), (7.34) y (7.35). La tabla 7.1 muestra los coeficientes calculados.

| | | | | | |
|-------|----------|-------|----------|-------|---------|
| a_1 | 9,2213 | b_1 | -2,8905 | c_1 | 7,8194 |
| a_2 | 1,1628 | b_2 | -18,9253 | c_2 | 15,9973 |
| a_3 | -17,0807 | b_3 | -3,3606 | c_3 | 25,4568 |
| a_4 | -7,8353 | b_4 | 17,3111 | c_4 | 15,6771 |
| a_5 | 5,8954 | b_5 | 7,4197 | c_5 | 8,2393 |
| a_6 | 8,6365 | b_6 | 0,4456 | c_6 | 7,6273 |

Tabla 7.1: Tabla de coeficientes para el caso de saltos de fase con valores $\delta_1 = 0 rad$, $\delta_2 = 1,3 rad$, $\delta_3 = 2,9 rad$, $\delta_4 = 4,6 rad$, $\delta_5 = 5,7 rad$, $\delta_6 = 6,1 rad$.

Finalmente se calcula el contraste a partir de la ecuación 7.12 para interferogramas con diferente nivel de ruido. Las figuras 7.2(a)-(c) muestran el contraste calculado para interferogramas con ruido aditivo con desviación estándar igual a

$\sigma_n = 0$ en la figura 7.2(a), $\sigma_n = 0,02$ en la figura 7.2(b) y $\sigma_n = 0,05$ en la figura 7.2(c).

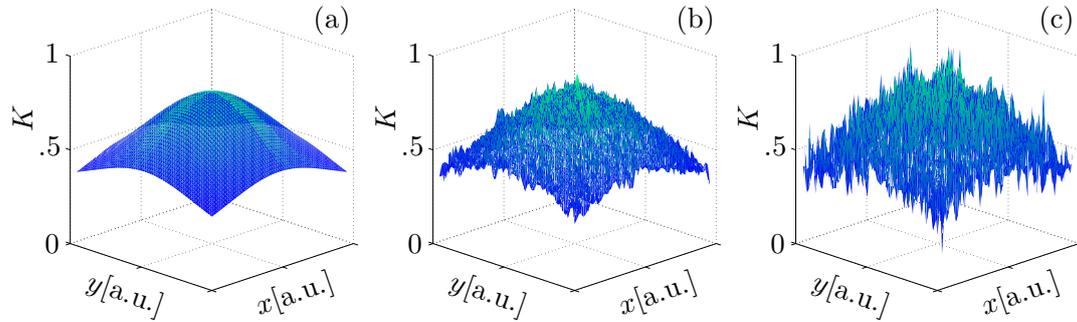


Figura 7.2: Reconstrucción del contraste para diferentes niveles de ruido. Las desviaciones estándar son $\sigma_n = 0$ (a), $\sigma_n = 0,02$ (b) y $\sigma_n = 0,05$ (c)

Por otro lado se estudia la calidad de la fase calculada por los algoritmos de phase shifting para diferentes valores de contraste. Se parte por simular interferogramas con la misma intensidad media (I_0) y fase que se muestra en las figuras 7.1, pero utilizando para el contraste una función de valor uniforme. Se calcula la raíz del error cuadrático medio ($RMSE$) en la fase calculada utilizando el algoritmo propuesto en [34, 50] en el caso de interferogramas con ruido aditivo con $\sigma_n = 0,05$. La figura 7.3 muestra el $RMSE$ como función del contraste desde $K = 0$ hasta $K = 1$. Como se esperaba [34] el error y el contraste tienen una relación inversamente proporcional.

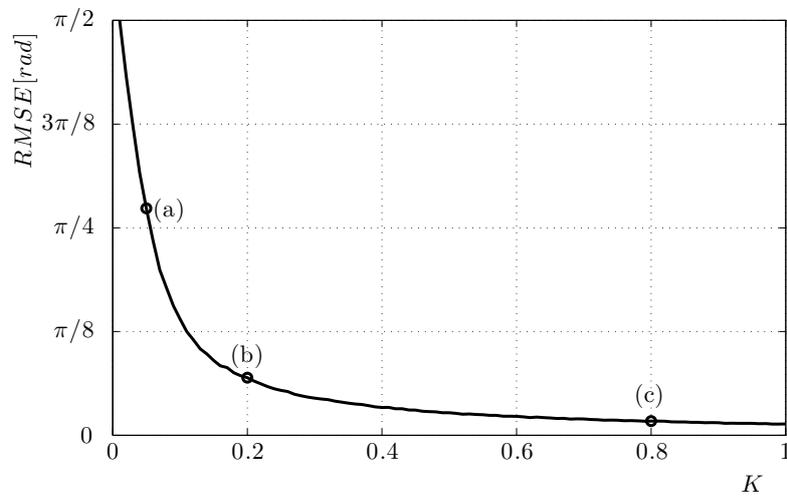


Figura 7.3: *RMSE* de la fase reconstruida en función del contraste (K) en el caso de ruido aditivo.

Las figuras 7.4(a)-(c) muestran la fase calculada para tres conjuntos de interferogramas con diferente contraste. Las marcas en la figura 7.3 corresponden a los resultados de las figuras 7.4(a)-(c).

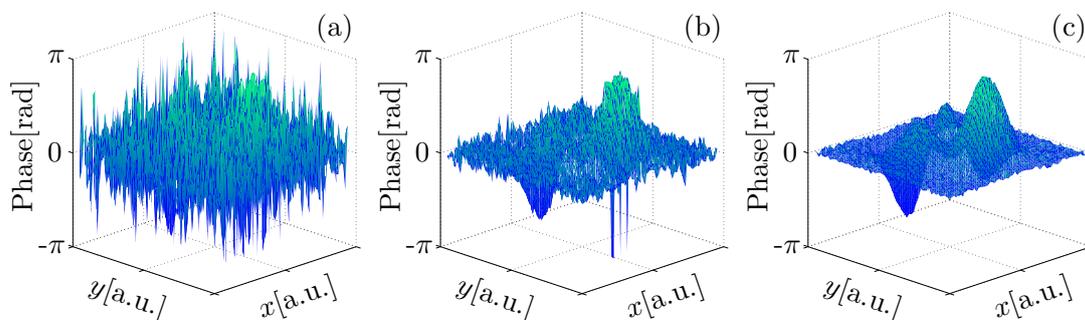


Figura 7.4: Fases calculadas para diferentes valores de contraste. (a) $K = 0,05$; (b) $K = 0,2$; (c) $K = 0,8$.

Por último se sintetizan interferogramas con ruido de fase. La figura 7.5 muestra el *RMSE* en función del contraste desde $K = 0$ hasta $K = 1$.

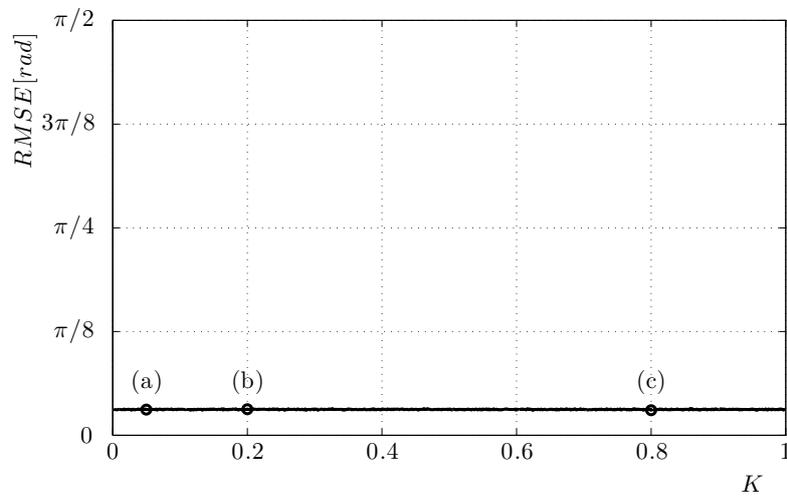


Figura 7.5: *RMSE* de la fase reconstruida en función del contraste (K) en el caso de ruido de fase.

Las figuras 7.6(a)-(c) muestran la fase calculada para tres conjuntos de interferogramas con diferente contraste. Las marcas en la figura 7.5 corresponden a los resultados de las figuras 7.6(a)-(c).

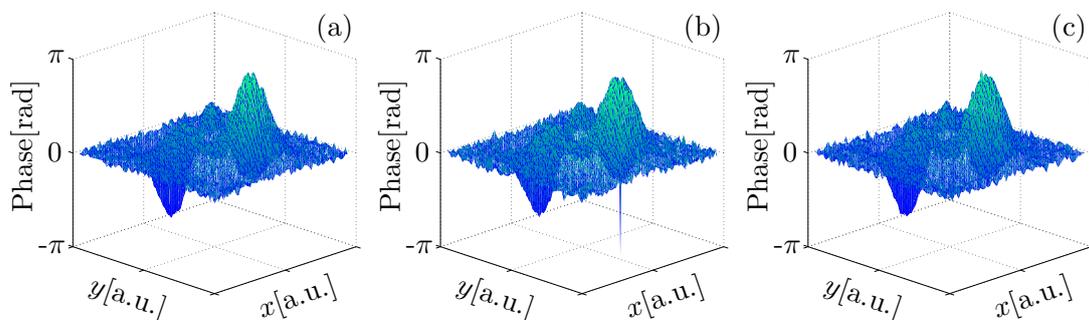


Figura 7.6: Fases calculadas para diferentes valores de contraste. (a) $K = 0,05$; (b) $K = 0,2$; (c) $K = 0,8$.

Como se esperaba [50] el error y el contraste no tienen relación en el caso de ruido de fase dando como resultado un error de valor constante en la figura 7.5.

7.6. Resultados experimentales

Se capturaron imágenes de un interferómetro propuesto en [2]. Estos interferogramas se muestran en las figuras 7.7(a)-(h). Las imágenes fueron adquiridas con una cámara monocromática de 8 bits (Model DC310, Thorlabs) con 1024×768 pixels. Como objeto de fase se utilizó un patrón con letras grabadas en una placa recubierta con una capa de ITO. Se adquirieron ocho patrones con saltos de fase 0 rad , $0,8727 \text{ rad}$, $1,5708 \text{ rad}$, $2,9671 \text{ rad}$, $3,6652 \text{ rad}$, $3,8397 \text{ rad}$, $5,0615 \text{ rad}$ y $5,7596 \text{ rad}$.

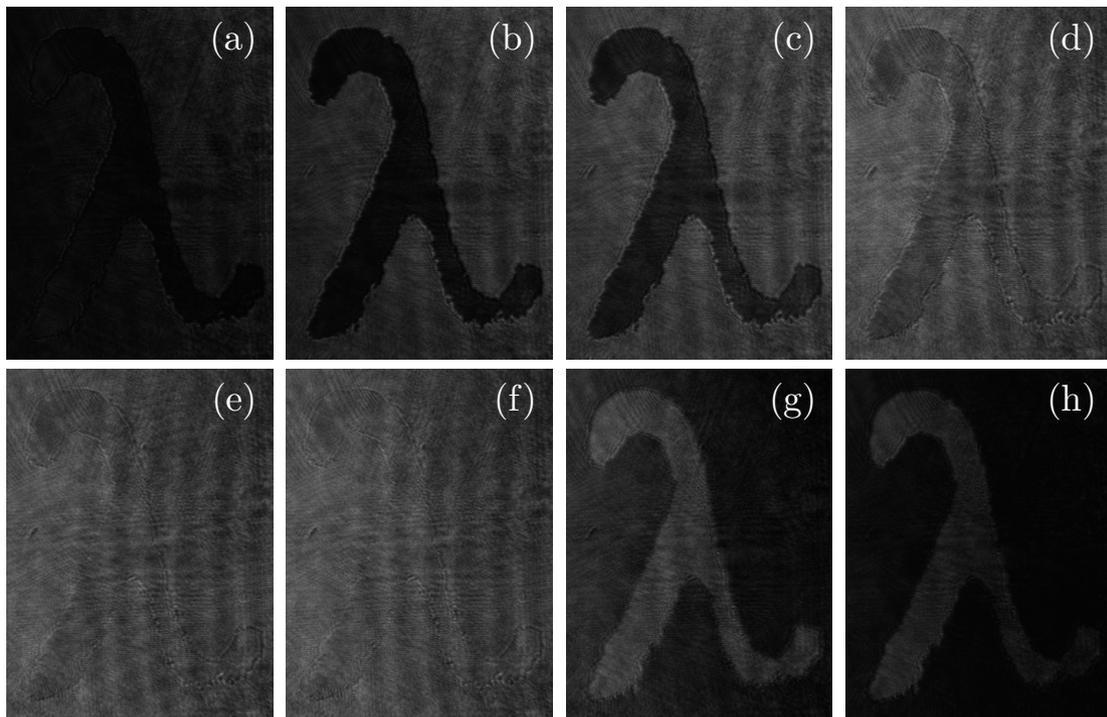


Figura 7.7: Interferogramas adquiridos con saltos de fase: (a) 0 rad ; (b) $0,8727 \text{ rad}$; (c) $1,5708 \text{ rad}$; (d) $2,9671 \text{ rad}$; (e) $3,6652 \text{ rad}$; (f) $3,8397 \text{ rad}$; (g) $5,0615 \text{ rad}$; (h) $5,7596 \text{ rad}$.

Con el objetivo de calcular el contraste de los interferogramas se determinan los conjuntos de coeficientes a_m , b_m y c_m . La tabla 7.2 muestra los coeficientes calculados.

| | | | | | |
|-------|----------|-------|----------|-------|---------|
| a_1 | -21,8107 | b_1 | -13,7772 | c_1 | 28,5963 |
| a_2 | -25,5426 | b_2 | 18,1649 | c_2 | 34,0865 |
| a_3 | -15,3443 | b_3 | 36,9865 | c_3 | 36,9535 |
| a_4 | 17,7895 | b_4 | 25,8055 | c_4 | 34,0865 |
| a_5 | 25,2213 | b_5 | 1,0346 | c_5 | 29,6941 |
| a_6 | 25,2074 | b_6 | -5,4866 | c_6 | 28,5963 |
| a_7 | 6,0548 | b_7 | -34,3385 | c_7 | 24,3060 |
| a_8 | -11,5753 | b_8 | -28,3892 | c_8 | 25,8315 |

Tabla 7.2: Tabla de coeficientes que minimizan el error en el contraste calculado en el caso de saltos de fase iguales a 0 rad , $0,8727 \text{ rad}$, $1,5708 \text{ rad}$, $2,9671 \text{ rad}$, $3,6652 \text{ rad}$, $3,8397 \text{ rad}$, $5,0615 \text{ rad}$, $5,7596 \text{ rad}$.

Se aplicó el algoritmo propuesto a los interferogramas adquiridos. La figura 7.8 muestra el contraste calculado (izquierda) y la fase calculada (derecha) que es consistente con una lámina de ito de 150 nm e índice de refracción igual a 1,7.

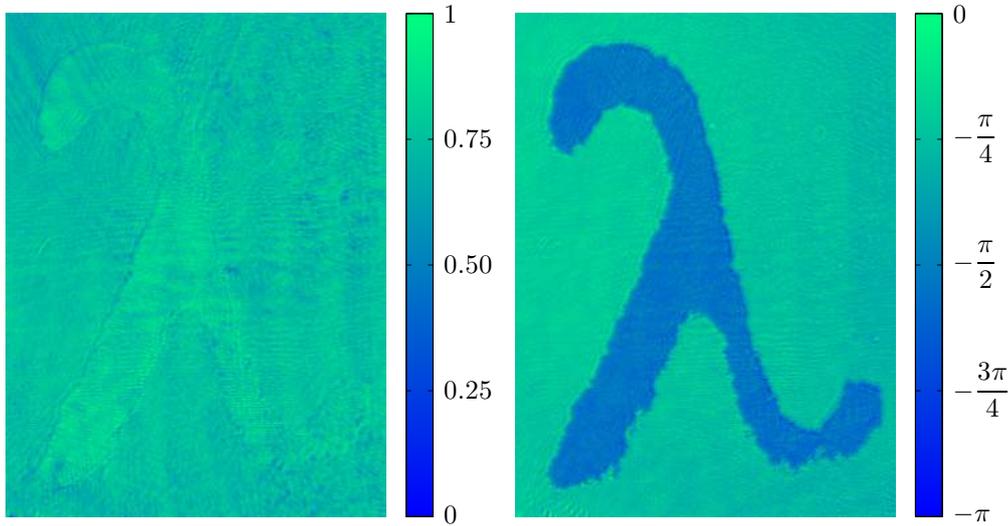


Figura 7.8: Contraste (izquierda) y fase (derecha) calculados del objeto de fase utilizado.

7.7. Conclusiones

Se presentó un método para calcular el contraste a partir de M interferogramas arbitrariamente desfasados. Se estudió como propaga el error para el caso de interferogramas con ruido aditivo y con ruido de fase. Luego se optimizó la elección de los coeficientes del algoritmo para minimizar la propagación del error. Se realizaron simulaciones con diferente nivel de ruido para mostrar el desempeño del algoritmo. Finalmente se utilizó el algoritmo propuesto para calcular el contraste de una serie de datos experimentales.

Apéndice 7.A. Cálculo de contraste a partir de interferogramas con armónicos

En el caso de interferogramas no sinusoidales, la intensidad puede ser descrita como la superposición de armónicos de una componente fundamental,

$$I_m = I_0 \left[1 + \sum_{p=1}^{\infty} K_p \cos[(\phi + \delta_m) p] \right], \quad (7.36)$$

donde K_p es la amplitud del p -ésimo armónico. En nuestro caso K_1 es el contraste que se desea determinar.

Con el objetivo de eliminar el error causado por el p -ésimo armónico, es suficiente con que los coeficientes a_m , b_m y c_m verifiquen las condiciones (7.3) - (7.11), pero también

$$\sum_{m=1}^M a_m \cos(p\delta_m) = 0, \quad (7.37)$$

$$\sum_{m=1}^M a_m \sin(p\delta_m) = 0, \quad (7.38)$$

$$\sum_{m=1}^M b_m \cos(p\delta_m) = 0, \quad (7.39)$$

$$\sum_{m=1}^M b_m \sin(p\delta_m) = 0, \quad (7.40)$$

$$\sum_{m=1}^M c_m \cos(p\delta_m) = 0 \quad (7.41)$$

y

$$\sum_{m=1}^M c_m \sin(p\delta_m) = 0. \quad (7.42)$$

Condiciones similares fueron propuestas por Hibino [39] con el propósito de determinar a_m y b_m para calcular la fase con un algoritmo insensible a armónicos en el caso de interferogramas equiespaciados.

Capítulo 8

Discusión y conclusiones generales

Como se propuso desde un comienzo, en esta tesis se presenta un método algebraico para generar algoritmos de phase-shifting con M pasos arbitrarios, permitiendo trabajar con interferogramas con saltos de fase no constantes. Esto permite evitar errores causados al trabajar con algoritmos diseñados para saltos de fase equidistantes.

Se estudió como elegir en forma óptima un algoritmo de pasos arbitrarios para minimizar la propagación del ruido de fase y ruido aditivo en la fase calculada. Se verificó mediante simulaciones y experimentos el correcto funcionamiento del algoritmo. Adicionalmente se planteó como lidiar con error en el salto de fase y la presencia de armónicos.

Se presentó un método para calcular el salto de fase con aplicaciones a la interferometría, deflectometría y perfilometría 3D por proyección de franjas. A diferencia de otros algoritmos previamente presentados en la literatura, el propuesto no requiere hipótesis sobre los valores de la intensidad media ($I_0(x, y)$), el contraste ($K(x, y)$) o la cantidad de franjas en los interferogramas. Se estudió como el filtrado de las imágenes adquiridas afecta el salto de fase, demostrándose que los interferogramas filtrados poseen el mismo salto de fase que las imágenes no filtradas.

Se presentó un algoritmo sintonizable para M interferogramas que minimiza la propagación del ruido de fase y aditivo.

Finalmente se presentó un método para calcular el contraste de la interferencia a partir de M interferogramas arbitrariamente desfasados. El contraste permite evaluar la calidad de los datos adquiridos. Se optimizó la elección de los coeficientes del algoritmo para minimizar la propagación del error causado por el ruido aditivo y el ruido de fase.

En un futuro trabajo se buscará seguir investigando con el objetivo de desarrollar un nuevo algoritmo que permita calcular, en forma analíticamente exacta, la fase y los saltos de fase cuando se trabaja con saltos arbitrarios. Esto permitiría evitar la calibración previa de los sistemas para ajustar el desfase generado.

Artículos publicados

Artículos Publicados en el contexto de la tesis

El trabajo presentado en esta tesis fue publicado en las siguientes revistas arbitrarias.

1-“Generation of phase-shifting algorithms with N arbitrarily spaced phase-steps”, Gastón A. Ayubi, César D. Perciante, Jorge L. Flores, J. Matías Di Martino and José A. Ferrari. Applied Optics 53(30), 7168-7176 (2014).

2-“Generalized phase-shifting algorithms: error analysis and minimization of noise propagation”, Gastón A. Ayubi, César D. Perciante, J. Matías Di Martino, Jorge L. Flores and José A. Ferrari. Applied Optics 55(6), 1461-1469 (2016).

3-“Phase-step retrieval for tunable phase-shifting algorithms”, Gastón A. Ayubi, Ignacio Duarte, César D. Perciante, Jorge L. Flores and José A. Ferrari. Optics Communications 405, 334-342 (2017).

4-“Optimal phase-shifting algorithm for interferograms with arbitrary steps and phase noise”, Gastón A. Ayubi, Ignacio Duarte and José A. Ferrari. Optics and Lasers in Engineering 114, 129-135 (2019).

Publicación de trabajos presentados en eventos

Se realizaron las siguientes presentaciones del trabajo.

1-“Generalized phase-shifting algorithms: error analysis”, Gastón A. Ayubi. SPIE Optical Metrology, Munich, Alemania (2015).

2-“Additive random noise in generalized phase-shifting algorithms”, Gastón A. Ayubi and José A. Ferrari. OSA Frontiers in Optics, Rochester, USA (2016).

3-“Self-Tunable phase shifting algorithm for images with additive noise”, Gastón A. Ayubi. SPIE Optical Metrology, Munich, Alemania (2017).

4-“Phase-step retrieval for phase-shifting algorithms by ellipse fitting”, Gastón A. Ayubi. OSA Latin America Optics & Photonics Conference, Lima, Perú (2018).

5-“Contrast determination in phase-shifting algorithms for interferograms with arbitrary steps and additive noise”, Gastón A. Ayubi. SPIE Optical Metrology, Munich, Alemania (2019).

Referencias

- [1] D. Malacara. *Optical Shop Testing*. Wiley, 2007.
- [2] José A. Ferrari, Jorge L. Flores, Gastón A. Ayubi, and Erna Frins. Robust interferometer with external phase-shift control. *Optics Express*, 25(24):29965–29970, 2017.
- [3] J. M. Di Martino. *One-shot three-dimensional scene analysis*. PhD thesis, Facultad de Ingeniería - Universidad de la República, 2015.
- [4] Song Zhang. *Handbook of 3D Machine Vision: Optical Metrology and Imaging*. Taylor & Francis Group, 2013.
- [5] R. Hartley and A. Zisserman. *Multiple View Geometry in Computer Vision*. Cambridge University Press, 2003.
- [6] M. Marks. *System and devices for time delay 3d*. 1992.
- [7] G. Marshall and G. Stutz. *Handbook of Optical and Laser Scanning*. CRC Press, 2011.
- [8] H. Hayakawa. Photometric stereo under a light source with arbitrary motion. *JOSA A*, 1994.
- [9] R. Szeliski. *Fast shape from shading*. CVGIP: Image Understanding, 1991.

-
- [10] S. Seitz, B. Curless, J. Diebel, D. Scharstein, and R. Szeliski. A comparison and evaluation of multi-view stereo reconstruction algorithms. *Computer Vision and Pattern Recognition*, 2006.
- [11] G. A. Ayubi, J. A. Ayubi, J. M. Di Martino, and J. A. Ferrari. Pulse-width modulation in defocused three-dimensional fringe projection. *Optics Letters*, 35(21):3682–3684, 2010.
- [12] Markus C. Knauer, Jurgen Kaminski, and Gerd Hausler. Phase measuring deflectometry: a new approach to measure specular free-form surfaces. *Proceedings of SPIE*, 5457:366–376, 2004.
- [13] Shekhar Kumar Patra, Jonas Bartsch, Michael Kalms, and Ralf B. Bergmann. Phase measurement deviations in deflectometry due to properties of technical surfaces. *Proceedings of SPIE*, 11102, 2019.
- [14] J. H. Bruning, D. R. Herriott, J. E. Gallagher, D. P. Rosenfeld, A. D. White, and D. J. Brangaccio. Digital wavefront measuring interferometer for testing optical surfaces and lenses. *Applied Optics*, 13:2693–2703, 1974.
- [15] P. Carré. Installation et utilisation du comparateur photoelectrique es interferetiel du bureau international des poids et mesures. *Bureau International des Poids et Measures*, 2:13–23, 1966.
- [16] P. Hariharan, B. F. Oreb, and T. Eiju. Digital phase-shifting interferometry: a simple error-compensating phase calculation algorithm. *Applied Optics*, 26:2504–2506, 1987.
- [17] J. E. Greivenkamp. Generalized data reduction for heterodyne interferometry. *Optical Engineering*, 23(4):350–352, 1984.
-

-
- [18] C. T. Farrell and M. A. Player. Phase step measurement and variable step algorithms in phase-shifting interferometry. *Measurement Science and Technology*, 3:953–958, 1992.
- [19] P. Gao, B. Yao, N. Lindlein, K. Mantel, I. Harder, and E. Geist. Phase-shift extraction for generalized phase-shifting interferometry. *Optics Letters*, 34(22):3553–3555, 2009.
- [20] J. Xu, Y. Li, H. Wang, L. Chai, and Q. Xu. Phase-shift extraction for phase-shifting interferometry by histogram of phase difference. *Optics Express*, 18(23), 2010.
- [21] H. Guo and Z. Zhang. Phase shift estimation from variances of fringe pattern differences. *Applied Optics*, 52(26):6572–6578, 2013.
- [22] J. Li, L. Zhong, S. Liu, Y. Zhou, J. Xu, J. Tian, and X. Lu. An advanced phase retrieval algorithm in n-step phase-shifting interferometry with unknown phase shifts. *Scientific Reports*, 2017.
- [23] Z. Wang and B. Han. Advanced iterative algorithm for phase extraction of randomly phase-shifted interferograms. *Optics Letters*, 29:1671–1673, 2004.
- [24] Z. Wang and B. Han. Advanced iterative algorithm for randomly phase-shifted interferograms with intra- and inter-frame intensity variations. *Optics and Lasers in Engineering*, 45:274–280, 2007.
- [25] J. Schwider, R. Burow, K.-E. Elssner, J. Grzanna, R. Spolaczyk, and K. Merkel. Digital wave-front measuring interferometry: Some systematic error sources. *Applied Optics*, 22, 1983.
- [26] K. Kinnstaetter, A. W. Lohmann, J. Schwider, and N. Streibl. Accuracy of phase shifting interferometry. *Applied Optics*, 27(24):5082–5089, 1988.
-

-
- [27] N. Ohyama, S. Kinoshita, A. Cornejo-Rodriguez, T. Honda, and J. Tsujiuchi. Accuracy of phase determination with unequal reference phase shift. *Journal of the Optical Society of America*, 5, 1988.
- [28] J. Schwider, O. Falkenstoerfer, H. Schreiber, A. Zoeller, and N. Streibl. New compensating four-phase algorithm for phase-shift interferometry. *Optical Engineering*, 32:1883–1885, 1993.
- [29] M. Servin, J. A. Quiroga, and J. M. Padilla. *Fringe pattern analysis for optical metrology*. Wiley-VCH, 2014.
- [30] Peter J. de Groot. Vibration in phase-shifting interferometry. *Journal of the Optical Society of America A*, 12(2):354–365, 1995.
- [31] G. A. Ayubi, C. D. Perciante, J. L. Flores, J. M. Di Martino, and J. A. Ferrari. Generation of phase-shifting algorithms with n arbitrarily spaced phase-steps. *Applied Optics*, 53:7168–7176, 2014.
- [32] G. Lai and T. Yatagai. Generalized phase-shifting interferometry. *Journal of the Optical Society of America A*, 8:822–827, 1991.
- [33] A. Téllez-Quinones and D. Malacara-Doblado. Inhomogeneous phase shifting: an algorithm for nonconstant phase displacements. *Applied Optics*, 49:6224–6231, 2010.
- [34] G. A. Ayubi, C. D. Perciante, J. M. Di Martino, J. L. Flores, and J. A. Ferrari. Generalized phase-shifting algorithms: error analysis and minimization of noise propagation. *Applied Optics*, 55(6):1461–1469, 2016.
- [35] G. A. Ayubi, C. D. Perciante, J. M. Di Martino, J. L. Flores, and J. A. Ferrari. Generalized phase-shifting algorithms: error analysis and minimization of noise propagation: erratum. *Applied Optics*, 55(28):7763, 2016.
-

-
- [36] Katsuyuki Okada, Atsushi Sato, and Jumpei Tsujiuchi. Simultaneous calculation of phase distribution and scanning phase shift in phase shifting interferometry. *Optics Communications*, 84(3):118–124, 1991.
- [37] Haifei Ding and Hongwei Guo. Estimating phase shifts from three fringe patterns by use of cross spectrum. *Applied Optics*, 56(4), 2017.
- [38] C. Rathjen. Statistical properties of phase-shift algorithms. *Journal of the Optical Society of America A*, 12(9):1997–2008, 1995.
- [39] Kenichi Hibino. Susceptibility of systematic error-compensating algorithms to random noise in phase-shifting interferometry. *Applied Optics*, 36(10):2084–2093, 1997.
- [40] H. Bi, Y. Zhang, K. V. Link, and C. Wen. Class of 4+1 phase algorithm with error compensation. *Applied Optics*, 43:4199–4207, 2004.
- [41] R. Juarez-Salazar, C. Robledo-Sanchez, F. Guerrero-Sanchez, and A. Rangel-Huerta. Generalized phase-shifting algorithm for inhomogeneous phase shift and spatio-temporal fringe visibility variation. *Optics Express*, 22:4738–4750, 2014.
- [42] G. Stoilov and T. Dragostinov. Phase-stepping interferometry: Five-frame algorithm with an arbitrary step. *Optics and Lasers in Engineering*, 28:61–69, 1997.
- [43] Q. Kemao, H. Wang, W. Gao, L. Feng, and S. Hock Soon. Phase extraction from arbitrary phase-shifted fringe patterns with noise suppression. *Optics and Lasers in Engineering*, 48:684–689, 2010.
-

-
- [44] Y. Xu, Y. Wang, Y. Ji, H. Han, and W. Jin. Three-frame generalized phase-shifting interferometry by a euclidean matrix norm algorithm. *Optics and Lasers in Engineering*, 84:89–95, 2016.
- [45] L. Z. Cai, Q. Liu, and X. L. Yang. Simultaneous digital correction of amplitude and phase errors of retrieved wave-front in phase-shifting interferometry with arbitrary phase shift errors. *Optics Communications*, 233:21–26, 2004.
- [46] G. A. Ayubi, I. Duarte, C. D. Perciante, J. L. Flores, and J. A. Ferrari. Phase-step retrieval for tunable phase-shifting algorithms. *Optics Communications*, 2017.
- [47] A. Fitzgibbon, M. Pilu, and R. B. Fisher. Direct least square fitting of ellipses. *IEEE Trans. Pattern Analysis and Mach. Intell.*, 21(5):476–480, 1999.
- [48] M. Ragulskis and Z. Navickas. Interpretation of fringes produced by time-averaged projection moiré. *Strain*, 47:e357–e370, 2011.
- [49] G. A. Ayubi. Self-tunable phase shifting algorithm for images with additive noise. *Proceedings of SPIE*, 10329, 2017.
- [50] G. A. Ayubi, I. Duarte, and J. A. Ferrari. Optimal phase-shifting algorithm for interferograms with arbitrary steps and phase noise. *Optics and Lasers in Engineering*, 114:129–135, 2018.
- [51] M. Servin, J. C. Estrada, and J. A. Quiroga. The general theory of phase shifting algorithms. *Optics Express*, 17:21867–21881, 2009.
- [52] K. Creath. Phase-shifting speckle interferometry. *Applied Optics*, 24(18):3053–3058, 1985.
- [53] J. Schwider. Detection of undersampling from measured phase-shifting data. *Optics Letters*, 19(3):231–233, 1994.
-

- [54] Y. Kim, K. Hibino, N. Sugita, and M. Mitsuishi. Design of phase shifting algorithms: fringe contrast maximum. *Optics Express*, 22(15), 2014.
-