Existencia y no unicidad de abordajes del cálculo infinitesimal escolar

Verónica Molfino[1] – Yacir Testa[2]

Resumen: presentamos aspectos relativos a la implementación de taller en el marco de la Escuela de Primavera de Didáctica de la Matemática, organizada en el Instituto de Profesores "Artigas" en 2010. El mismo tenía como objetivo proponer entre los asistentes una discusión acerca de diferentes abordajes del Cálculo infinitesimal. Se explicitaron características de lo que hemos denominado *modelo tradicional en la enseñanza del cálculo* y se propusieron actividades que invitaron a la reflexión sobre otro tipo de abordajes, específicamente en lo que hace a la construcción del concepto de derivada. A partir de ellas se presentaron los modelos teóricos que sustentan tales abordajes, así como algunas propuestas concretas para ser llevadas al aula.

Una aproximación sistémica

La aproximación socioepistemológica en Matemática Educativa enriquece la visión clásica de los procesos de enseñanza y aprendizaje de esta materia. Lejos de creer que aprender matemáticas sea una mera copia del exterior, considera que *"... los procesos mentales humanos poseen una relación esencial con los escenarios culturales, históricos e institucionales. De modo que se presenta un marco según el cual es posible hablar de distintas formas de pensar matemáticas al considerar que el escenario modifica dichos pensamientos*" (Alanís et al, 2000). Esto lleva a considerar la aproximación sistémica inserta en un escenario sociocultural que influye, y es influido, por tres dimensiones: epistemológica, didáctica y cognitiva.

Es desde esta perspectiva que se reconoce la diferencia entre el Cálculo, como saber construido en ámbitos científicos, y el Cálculo escolar, con una intencionalidad didáctica específica pero no siempre explícita; y que surge el interés por analizar el estatus del cálculo en las instituciones educativas. Esta perspectiva permite entender la coexistencia en el sistema escolar de por lo menos dos concepciones subyacentes al Cálculo escolar. Por un lado, aquélla más cercana a lo que es el Cálculo como saber, con conceptos y definiciones explícitas y centradas básicamente en los conceptos de continuidad, derivada e integral en base al de límite. Y por otro lado, aquella que enfatiza el carácter intencional didáctico, en la cual subyacen categorías implícitas y que se centra en los significados situacionales de los conceptos del anterior: predicción, graficación y analiticidad (Cordero, 2006).

Los análisis socioepistemológicos han demostrado que el abordaje algorítmico formal que responde a la primera de las concepciones señaladas, y que es tradicional en el ámbito

1 Profesora de Matemáticas. Docente de Topología y Geometría en el Instituto de Profesores "Artigas".
2 Profesora de Matemáticas. Docente de Didáctica I, II y III en el Instituto de Profesores "Artigas".

escolar, ha fracasado. Desde otras líneas de investigación se ha reportado el mismo fracaso, la diferencia de la perspectiva socioepistemológica radica en las alternativas que propone: en lugar de buscar abordajes diferentes del concepto, busca concepciones alternativas del Cálculo en su conjunto (Cordero, 2006).

El modelo tradicional en la enseñanza del Cálculo

Alanís (1996) distingue dos tipos tradicionales de enseñanza del cálculo. Un centrado en los conceptos, que asume que el aprendizaje se produce si se presentan los contenidos formal y rigurosamente. Y otro que se centra en la práctica algorítmica y algebraica. Ambos abordajes componen lo que Salinas y Alanís identifican como "*modelo tradicional de enseñanza del cálculo*" (Salinas y Alanís, 2009: 357). En este modelo el contenido matemático se presenta estructurado de manera formal –atendiendo a las formas, sin significados reales asociados con las nociones y procedimientos del cálculo– y rigurosa –organizados según la secuencia definición–teorema–demostración.

Esta presentación es muy parecida a la que encontramos en los libros de texto tradicionales. La estrategia de enseñanza se limita a una exhibición de la estructura por parte del profesor. Se cuida el orden lógico de la presentación: "…*para enseñar la derivada habrá que enseñar antes límites (porque la derivada es un límite) y para enseñar límites habrá que enseñar antes funciones (porque los límites son de funciones) y para enseñar funciones habrá que enseñar antes los números reales (porque son funciones de variable real)*." (Salinas y Alanís, 2009: 362). El estudiante ocupa un rol pasivo, y su aprendizaje es evaluado a través del dominio de técnicas: cálculo de límites y derivadas, aplicaciones rutinarias de la derivada, todas estas actividades que priorizan aspectos algorítmicos.

Abordajes alternativos

Alanís (1996) presenta como alternativa una idea promovida por el grupo de trabajo del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (Cinvestav) en el Instituto Politécnico Nacional (IPN), y que en estos años se ha visto robustecida por un sinnúmero de investigaciones. Las premisas que guían al mismo son, en primer lugar, la consideración del estudiante como un usuario de la temática, lo que implica no sólo la consideración del contexto en el que está inmerso sino también la del contexto en el que surge el conocimiento y cómo ello puede favorecer para el diseño del discurso matemático escolar. En segundo lugar, se remarca la necesidad de una adecuada integración a la vida escolar de la historia de la matemática. También enfatiza la necesidad de analizar la historia de la enseñanza del cálculo y por último se hace hincapié en lo inapropiado de las aproximaciones teóricas formales, que sólo alejan al cálculo de su carácter instrumental que aparece como objetivo principal en los currículos.

Este movimiento fue el que dio pie para la conformación de lo que más recientemente se plantea como un abordaje alternativo del Cálculo en su conjunto, o la consideración de "otros" Cálculos, con referencia a la estructuración del Cálculo en torno a los mencionados significados situacionales de predicción, graficación y analiticidad (Cordero, 2006). El trabajo de Alanís (1996) es un ejemplo de cómo estructurar un curso en torno a la predicción, tomando en particular como hilo conductor la predicción de la posición de una partícula que se mueve a lo largo de una línea recta y trabajando en base a problemas extramatemáticos.

Atendiendo a esta última concepción es que se han venido desarrollando diversas aproximaciones dentro de la línea de investigación socioepistemológica del Desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional. Seleccionamos tres aportes que creemos representativos de tal línea de investigación, y que presentan propuestas educativas concretas. Dos de ellos (Cantoral y Montiel, 2001) y (Salinas et al, 2003) se presentan como libros de texto para estudiantes, con explícitas recomendaciones para el docente. El tercero (Dolores, 2007) presenta una investigación cuyo objetivo es aportar los elementos fundamentales que puedan constituirse en una alternativa didáctica para el tratamiento del Cálculo Diferencial en el bachillerato (Dolores, 2007: 5). En el quinto capítulo del libro se presentan elementos para esa propuesta alternativa y en el sexto y último se analiza una experiencia escolar concreta.

En Contoral y Montiel (2001) se presenta una forma de tratamiento escolar de las funciones con base en resultados de estudios de su grupo de investigación. Se ubica a la visualización de las funciones reales de variable real como una herramienta para favorecer el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes y ayudar a los profesores en el diseño y análisis de actividades de aprendizaje. Así, la graficación no se presenta como un fin en sí mismo sino como una forma particular de visualización de procedimientos y conceptos matemáticos. Se entiende a la visualización como un proceso del pensamiento matemático.

Los conceptos que tradicionalmente estructuran un curso de Cálculo –límites, continuidad, derivabilidad, integrabilidad– no son tratados como tales en este libro, sino que se analizan sus consecuencias gráficas en función de los parámetros de las familias de funciones estudiadas: “inclinación”, “abertura”, “desplazamiento”, “alargamiento”, etc.

Salinas et al. (2003) proponen una reconstrucción en el sentido de incluir ideas y nociones ausentes del discurso tradicional del Cálculo, originadas en investigaciones epistemológicas que los condujeron a indagar sobre el ambiente problemático en el que se desarrollaron tales ideas y nociones. Así, su propuesta para el aprendizaje del Cálculo parte de la presentación de situaciones problemáticas, en ocasiones las mismas que se encuentran en la génesis de cada concepto. Su idea es que la reflexión, análisis y discusión de las ideas generadas en la búsqueda de soluciones permitan la construcción de un conocimiento relevante del Cálculo.

Plantean una secuencia de seis unidades que, recorridas en forma de espiral, permitan iniciar y terminar en un mismo lugar: la solución de problemas. En el siguiente esquema sintetizan el desarrollo del libro:

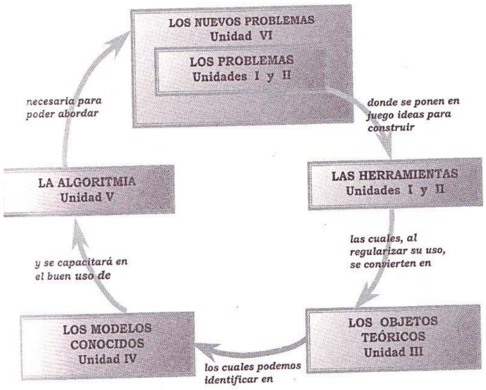


Figura 1: Desarrollo temático del libro Elementos del cálculo. Reconstrucción conceptual para el aprendizaje y la enseñanza. (Salinas et al., 2003: 7)

Por su parte, Dolores (2007) propone un abordaje alternativo que tiene como uno de sus puntos de partida a las investigaciones sobre historia de la Matemática. Se plantea rescatar así, por un lado, el uso de los infinitesimales, "*acercamiento geométrico a la derivada [que] incorpora las nociones básicas de la línea de trabajo iniciada por los griegos de la antigüedad, continuada por Descartes, Fermat, Barrow (entre otros) y culminada por Leibniz, considerado uno de los creadores del cálculo*." (Dolores, 2007: 5). Por otro lado, se utiliza como insumo para la construcción de conocimiento los aportes del campo de la mecánica, a través de sus estudios sobre los fenómenos de variación. En esta línea de trabajo el autor ubica a los trabajos de Galileo, Torricelli, Roverbal y finalmente Newton.

Específicamente Dolores (2007) propone: elaborar introducciones intuitivas e informales al CD que no necesariamente se sujeten a la estructura lógico–formal del Análisis Matemático, que desarrollen ideas variacionales que posibiliten la comprensión de sus conceptos fundamentales; ubicar como eje rector de todo el curso de CD al estudio de la variación de modo que la derivada no venga siendo un concepto matemático abstracto sino un concepto desarrollado para cuantificar, describir y pronosticar la rapidez de la variación en fenómenos de la naturaleza o de la práctica. (2007: 54).

El autor busca con este planteo que el conocimiento se genere en contextos prácticos o de aplicación, en lugar de construir conocimiento en forma abstracta para después buscarle su aplicación.

El taller

En el taller se trabajaron actividades con el fin de que los participantes vivenciaran otros acercamientos al Cálculo, en especial al concepto de derivada, para luego reflexionar sobre los procesos y aprendizajes que conllevan. Luego se presentó el marco teórico general que subyace en este nuevo enfoque, las aproximaciones realizadas por distintos investigadores en Matemática Educativa y resultados de distintos estudios e investigaciones realizadas en Uruguay sobre concepciones de los estudiantes respecto a distintos conceptos del Cálculo.

En una primera instancia se trabajó en la resolución de actividades en el contexto de las funciones cuadráticas con Geogebra, software dinámico que permite graficar funciones y observar distintas características de una familia de funciones, entre otros aspectos. Las actividades realizadas fueron diseñadas en base a actividades propuestas en el curso "Introducción a la derivada a partir de un tratamiento visual del concepto de función" de Gisela Espinosa y Hugo Mirón (México, 2001).

Estas propuestas están contenidas en la línea de investigación Pensamiento y Lenguaje Variacional (PyLV), la cual busca determinar elementos que no están presentes en el currículo, que permitan enriquecer el concepto "derivada" así como comprender este concepto desde el punto de vista del estudiante.

Consideramos imprescindible el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional de los estudiantes para trabajar en un ambiente enriqueciendo los contenidos de cálculo. Diversas investigaciones han mostrado que la noción de derivada se estabiliza en el pensamiento de los estudiantes sólo cuando la noción de derivada sucesiva aparece y se establece un tratamiento articulado entre la función y sus derivadas. (González, 1999 y Valero 2000).

Ya que compartimos que "el aprendizaje se basa en la actividad creadora y en el descubrimiento de las nociones por parte del alumno, que sea él quien descubra y proponga formas de resolver los problemas" (Alanís et al., 2000), las actividades propuestas buscan, entre otros aspectos, que quien las resuelva signifique gráficamente el concepto de función derivada en un ambiente de descubrimiento, argumentaciones y confrontaciones. Esto busca enriquecer el concepto de derivada al romper las dos asociaciones fundamentales que se han detectado (Testa, 2005): "derivada–fórmula" y "derivada segunda–estudio de signo de concavidad", al resignificar el concepto permitiendo una visión gráfica de él desde una óptica no tradicional.

En una segunda instancia se propuso una reflexión acerca de actividades en contexto "físico–matemático", extraídas de Dolores (2007). Dicha reflexión se estructuró en base a las siguientes preguntas:

- ¿Qué tipo de análisis (cualitativo o cuantitativo) considera que se atiende?
- ¿Qué aspectos del concepto de derivada se ponen en juego?
- ¿En qué nivel o niveles la propondría?
- ¿Considera que este tipo de actividades se presentan habitualmente en libros de texto o cursos de Secundaria en Uruguay?
- ¿Qué tipo de actividades considera que generalmente se presentan en los cursos de secundaria para introducir y desarrollar el concepto de derivada?

Consideraciones finales

A partir de las actividades realizadas y de la posterior reflexión los talleristas coincidieron en que este tipo de propuesta permite abordar el concepto matemático 'derivada' desde una perspectiva que fomenta el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes, la generación de conjeturas, su puesta en práctica, la realización de debates, la validación o refutación de dichas conjeturas, así como la ruptura de la asociación "derivada–fórmula" y el desarrollo de la visualización. Esta perspectiva enriquecería el concepto, destacando sus aspectos variacionales. También consideraron pertinente y posible incluir este tipo de actividades en los cursos de análisis.

Algunas de las actividades propuestas se presentan en el anexo

- Alanís, Juan (1996). *La predicción: un hilo conductor para el rediseño del discurso escolar del Cálculo*. Tesis de doctorado no publicada. CICATA–IPN. México.
- Alanís, J., et al (2000). *Desarrollo del pensamiento matemático.* México: Editorial Trillas.
- Cantoral, Ricardo y Gisela Montiel (2001). *Funciones: visualización y pensamiento matemático*. México: Prentice Hall.
- Cordero, Francisco (2006). "El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar: una visión socioepistemológica". En Ricardo Cantoral et al (eds.). *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: un reporte iberoamericano* (pp. 265 – 286). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C. – Díaz de Santos.
- Dolores, Crisólogo (2007). *Elementos para una aproximación variacional a la derivada*. México: Ediciones Díaz de Santos.
- Espinosa, Gisela y Hugo Mirón (2001). *Curso Introducción a la derivada a partir de un tratamiento visual del concepto de función*, impartido en la V Escuela de Invierno y Seminario Nacional de Investigación en Didáctica de las Matemáticas en Oaxaca, México, 2001
- González, Rigoberto (1999). *La derivada como una organización de las derivadas sucesivas: Estudio de la puesta en funcionamiento de una ingeniería didáctica de resignificación.* Tesis de maestría no publicada. Cinvestav. México
- Salinas, Patricia et al (2003). *Elementos del cálculo. Reconstrucción conceptual para el aprendizaje y la enseñanza*. México: Trillas.
- Salinas, Patricia y Juan Alanís. (2009). "Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del cálculo dentro de una institución educativa". En *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 12(3), 355–382.
- Testa, Yacir. (2005). *Procesos de resignificiación del valor numérico de la función derivada segunda: un estudio en el sistema escolar uruguayo*. Tesis de maestría. CICATA – IPN. México.
- Valero, María. (2000). *La derivada como una organización de las derivadas sucesivas*. Tesis de maestría. ITESM. México.

ANEXO: Extracto de actividades propuestas en el taller

Actividades en el contexto de las funciones cuadráticas[3],[4]
Actividad 1

Sea la función $f: R \to R / f(x) = A(x+B)^2 + D$

¿Cómo afectan los parámetros A, B y D en la representación gráfica de la función? Para la investigación puedes utilizar tus conocimientos sobre los aspectos gráficos y analíticos de la función y también puedes utilizar un programa dinámico que te permita graficar diferentes funciones de esta familia.

Actividad 4

¿Qué valores se deben asignar a los parámetros A, B y C para que la gráfica de la función $f: R \to R / f(x) = Ax^2 + Bx + C$ sea tangente a la recta en el punto que se indica para cada uno de los incisos de esta actividad?

Para cada ensayo indica los valores de los parámetros y bosqueja la gráfica de la parábola obtenida.

a) Ecuación de la recta: y = x + 2 Punto de tangencia: (0, 2)

e) ¿Cuál es la familia de funciones $f: R \to R / f(x) = Ax^2 + Bx + C$ cuyas gráficas son tangentes a la recta y = 3x – 2 en el punto (0,–2)?

Actividad 5

¿Qué valores se deben asignar a los parámetros A, B y C para que la gráfica de la función $f: R \to R / f(x) = Ax^2 + Bx + C$ sea tangente a la recta en el punto que se te indica para cada uno de los incisos de esta actividad?

Para cada ensayo indica los valores de los parámetros y bosqueja la gráfica de la parábola obtenida.

c) Ecuación de la recta: y = –2x + 2 Punto de tangencia: (1, 0)

d) ¿Qué regularidades puedes constatar en esta actividad? Describe detalladamente tus observaciones.

¿Cuál es la familia de parábolas cuyas gráficas "se abren hacia abajo" y son tangentes a la recta y = –2x +4 en el punto (–1, 6)?

---

3 Presentamos aquí, a modo de ejemplo, sólo algunas de las actividades de esta sección del taller.

4 Estas actividades fueron diseñadas en base a actividades propuestas en el curso "Introducción a la derivada a partir de un tratamiento visual del concepto de función" de Gisela Espinosa y Hugo Mirón, impartido en la V Escuela de Invierno y Seminario Nacional de Investigación en Didáctica de las Matemáticas en Oaxaca, México, 2001.

Actividad 6

Dada la función $f : R \to R / f(x) = 0,25x^2 + 2x$

Parte 1

Determina la recta tangente a la función f en el punto de abscisa 0. Sea m1 el coeficiente angular de dicha recta.

Marca el punto (0, m1).

Parte 2

Determina la recta tangente a la función f en el punto de abscisa 2. Sea m_2 el coeficiente angular de dicha recta.

Marca el punto (2, m_2).

Parte 3

Determina la recta tangente a la función f en el punto de abscisa 4. Sea m_3 el coeficiente angular de dicha recta.

Marca el punto (4, m_3).

Parte 4

Determina la recta tangente a la función f en el punto de abscisa –2. Sea m_4 el coeficiente angular de dicha recta.

Marca el punto (–2, m_4).

Parte 5

Determina la recta tangente a la función f en el punto de abscisa 6. Sea m_5 el coeficiente angular de dicha recta.

Marca el punto (6, m_5).

Parte 6

Observa que los puntos anteriores están alineados. Halla la expresión analítica de la función polinómica de primer grado (f´) a la cual pertenecen los puntos anteriores. A dicha función le llamaremos función derivada de f.

Parte 7

¿Qué información sobre la función f te ofrece la función f´?

Utiliza lo analizado anteriormente para hallar la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función f en los puntos de abscisa:

x_1 =1,5

x_2 =8

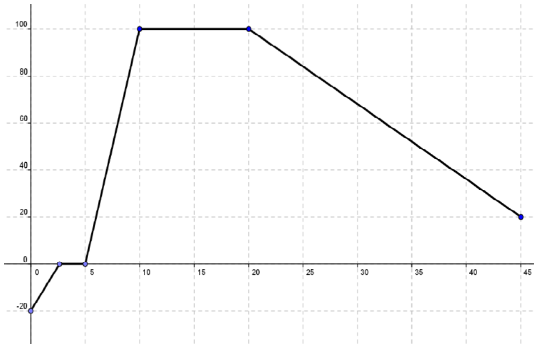
x_3 =–3

Verifica lo obtenido en un programa que te permita graficar funciones.

Parte 8

¿Qué relación observas entre los coeficientes de las expresiones analíticas de las funciones f y f´? ¿Y entre sus grados?

Actividades en contexto físico – matemático[5]



Actividad 1 (Temperatura: rapidez de variación)

En el gráfico siguiente se muestra la variación de la temperatura el cierto volumen de agua desde el estado sólido hasta que ebulle, para después enfriarse y estabilizarse a la temperatura ambiente.

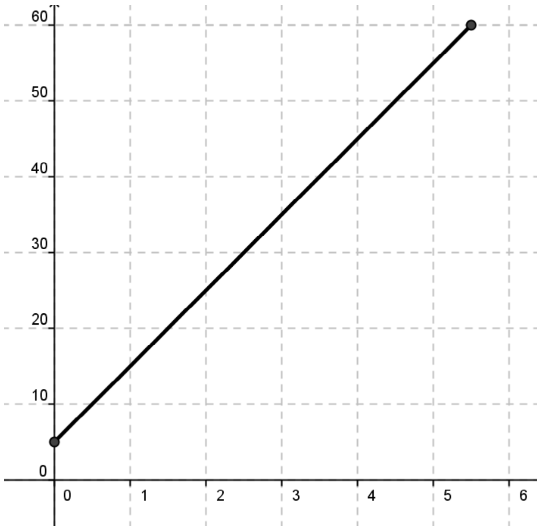
¿En qué intervalo la variación de la temperatura del agua es mayor?

i) (0,2.5) ii) (5,10) iii) (20,40) iv) (10,20)

¿En qué intervalos de tiempo la temperatura no experimentó variación?

i) (2.5,5) ii) (5,10) iii) (20,40) iv) (10,20)

¿Qué fenómeno sucedió con mayor rapidez: calentamiento o enfriamiento? Justifica.



Velocidad (m/s)

Actividad 2 (Concentración medicamento en sangre: rapidez de variación)

Al ser inyectado un medicamento, la concentración del mismo en sangre se comporta según la función que se representa a continuación:

¿En qué intervalo la variación de la concentración es positiva? ¿Y negativa? Justifica.

¿En qué intervalo la rapidez con que varía la concentración es mayor?

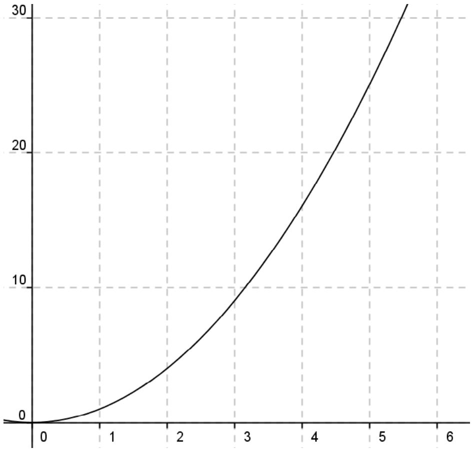
¿Existe algún intervalo en el que no haya variación de la concentración? Justifica.

Actividad 3 (Caída libre: Velocidad – aceleración)

Desde la cima de un risco de 45m de altura es lanzada, hacia abajo, una piedra con una velocidad de 5 m/s. Por la gravedad su velocidad se aumenta 10 m/s por cada t segundos,

5 Estas actividades fueron extraídas de Dolores, C. (2007). Elementos para una aproximación variacional a la derivada. México D.F.: Díaz de Santos.

de modo que su velocidad V está dada por la fórmula: V(t) = 10t + 5 (t en segundos y V en metros por segundo). Observe la gráfica:



¿Cuál es la velocidad de la piedra en t = 2 s?

¿Cuál es la variación de la velocidad entre los instantes t = 2s y t = 3s?

¿Cuál es su aceleración promedio de los 2 a los 2.01 segundos?

¿Cuál es su aceleración exactamente a los 2s?

Actividad 4 (Caída libre en la luna: distancia – velocidad)

La distancia que recorren los cuerpos en caída libre sobre la superficie de la luna está dada aproximadamente por la fórmula d(t) = t2, en donde d está medida en metros y el tiempo t en segundos. Supóngase que se deja caer un cuerpo en superficie lunar desde una altura de 30m.

¿Qué distancia recorre el cuerpo hasta los 3s?

¿Qué distancia recorre el cuerpo entre los 3 y 4 s?

¿Cuál será la velocidad promedio a la que se desplaza el cuerpo entre los 3 y 3.01 segundos después de su caída?

¿Cuál es la velocidad del cuerpo exactamente a los 3 segundos?

Actividad 5 (Cohete: distancia – velocidad)

Un cohete es lanzado verticalmente hacia el espacio y la altura d que alcanza está dada por la fórmula d(t) = 160t – 16t2. Se quiere calcular la velocidad instantánea del cohete a los 4 segundos.

Intentemos primero una aproximación numérica completando estas tablas:

Acercamiento por la derecha

Intervalo	Δt	Δd/Δt
4≤t≤4.1 ?≤t≤? ?≤t≤?		

Acercamiento por la izquierda

Intervalo	Δt	Δd/Δt
3.9≤t≤4 ?≤t≤? ?≤t≤?		

Ahora intentemos generalizar el cálculo realizado en la tercera columna para un intervalo Δt arbitrario.

¿Cuál crees debería ser el procedimiento para calcular la velocidad instantánea en el tiempo 4s a partir de lo hallado en la parte anterior? Explícalo.

Implementa tu procedimiento y concluye acerca de la velocidad en el tiempo $t = 4$s.

Desarrolla un procedimiento que te permita calcular la velocidad instantánea en el tiempo $t = a$ segundos.