INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIA APLICADA Y TECNOLOGÍA AVANZADA

Procesos de institucionalización del concepto de límite: un análisis socioepistemológico

Tesis que para obtener el grado de
Doctora en Matemática Educativa

presenta:

Verónica Molfino Vigo

Directora de Tesis: **Dra. Gabriela Buendía Ábalos**

México DF, México Montevideo,Uruguay

Octubre 2010

SIP-14

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

ACTA DE REVISIÓN DE TESIS

En la Ciudad de México siendo las 11:00 horas del día ____ del mes de octubre de 2010 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de CICATA LEGARIA para examinar la tesis de grado titulada:

"Los procesos de institucionalización del límite: un análisis socioepistemológico"

Presentada por el(la) alumno(a):

Molfino	Vigo	Verónica
Apellido paterno	materno	nombre(s)

Con registro: | A | 0 | 8 | 0 | 4 | 1 | 6 |

aspirante al grado de:

Doctorado en Matemática Educativa

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron ***SU APROBACION DE LA TESIS***, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISION REVISORA

Director de tesis

Dra. Gabriela Buendía Ábalos

Dr. Francisco Javier Lezama Andalón

Dr. Gustavo Martínez Sierra

Dr. Apolo Castañeda Alonso

Dra. Gisela Montiel Espinosa

EL PRESIDENTE DEL COLEGIO

Dr. José Antonio Irán Díaz Góngora

CICATA IPN
Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politecnico Nacional

CARTA CESIÓN DE DERECHOS

En la Ciudad de México el día 26 del mes octubre del año 2010, el (la) que suscribe Verónica Molfino Vigo alumno (a) del Programa de Doctorado en Matemática Educativa con número de registro A080416, adscrito al Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada Unidad Legaria, manifiesta que es autor (a) intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección de la Dra Gabriela Buendía Ábalos y cede los derechos del trabajo intitulado Procesos de Institucionalización del concepto de límite: un análisis socioepistemológico, al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección: Enrique Guarnero 3973, CP 11700, Montevideo, Uruguay; ó veromolfino@gmail.com. Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

Nombre

Agradecimientos

A mi familia, especialmente a Javier sin quien habría sido imposible concretar este proyecto y tantos otros.

A los colegas, profesores de Matemática, que gentilmente permitieron que participara en sus clases y dispusieron tiempo para completar el cuestionario y las entrevistas en la investigación, así como a aquellos con quienes compartimos cuestionamientos y reflexiones.

A quienes se ofrecieron para leer y comentar partes de esta investigación.

A los revisores del proyecto, Dr. Javier Lezama, Dr. Apolo Castañeda, Dr. Gustavo Martínez y Dra. Avenilde Romo, quienes brindaron aportes y cuestionamientos fundamentales para el avance en la investigación.

Muy especialmente a la directora del proyecto, quien nunca dejó de confiar, la Dra. Gabriela Buendía Ábalos.

Índice temático

Relación de tablas, figuras y esquemas

Resumen

La Matemática Educativa se ocupa, entre otras cosas, de buscar herramientas que permitan explicar cómo se construye, adquiere y difunde el conocimiento matemático, en los diferentes ámbitos en los que se presenta. Esta investigación se centra específicamente en el concepto de límite, buscando responder por qué se lo enseña de la forma en que lo hacemos actualmente. Para ello, fue necesario dejar de considerar al conocimiento matemático –en este caso el concepto de límite- como un saber preexistente al sujeto que aprende y con un lugar predeterminado en un cuerpo de conocimientos socialmente legitimados para comenzar a considerar las prácticas que le dieron origen y promovieron su desarrollo y difusión.

Nos interesa particularmente describir cómo esas prácticas norman el quehacer de los actores involucrados tanto en la construcción como en la transmisión de ese concepto. Para ello distinguimos dos ámbitos: el científico, donde el saber se desarrolla a la interna de las comunidades matemáticas, y el escolar, con el fin de estudiar el papel de las prácticas en la institucionalización escolar.

Debido al interés por analizar las prácticas que dan origen y norman la construcción de conocimiento matemático, fue necesario la consideración de una perspectiva que atiende a las dimensiones cognitiva, epistemológica y didáctica del conocimiento matemático atravesadas por su componente social. Tal perspectiva es la socioepistemología, y nos basamos en su modelo de prácticas sociales, prácticas de referencia y actividades para estructurar los resultados de la investigación. Esta teoría reconoce particularmente el papel de los escenarios sociales en los que se desarrolla el saber; en particular esta investigación se centra en el escenario del sistema educativo uruguayo actual.

Observamos así que las prácticas sociales detectadas en el ámbito científico se reinterpretan de diferente forma según el paradigma correspondiente a cada momento y en cada ámbito –el científico y el escolar-, por lo que dan lugar a la identificación de diferentes prácticas de referencia y actividades. Este modelo permitió dar respuesta a la pregunta inicial a través de la consideración de todo un proceso de institucionalización del concepto de límite, en el que se identificaron varios momentos. Tal proceso ubica a cada uno de los actores como miembros cuyas prácticas norman el quehacer de otros, a la vez que se ven permeados por las prácticas de los demás actores.

Abstract

Mathematics Education is responsible, inter alia, to look for tools that explain how to build, acquire and diffuse mathematical knowledge in the different contexts in which it occurs. This research focuses specifically on the concept of limit, seeking to answer why it is teached as we do today. To this end, it was necessary to stop considering the mathematical knowledge -in this case the concept of limit-, as a pre-existing know and with a predetermined place in a socially legitimated body of knowledge to begin to consider the practices that gave rise and promoted its development and diffusion.

Our main purpose is to describe how these practices models the actions of the actors involved in both construction and transmission of that concept. To do this we distinguish two contexts: scientific, where knowledge is developed internally at the mathematical community, and schoolar context, to study the role of practices in the institutionalization at school.

Because of the interest in analyzing the origins and practices that models the construction of mathematical knowledge it was necessary the consideration of an approach that addresses the cognitive, epistemological and teaching dimensions of mathematical knowledge crossed by its social component. Such a perspective is the socioepistemology, and we base on its model of social practices, reference practices and activities to structure the results of the investigation. This theory recognizes the role of particular social settings in which knowledge is developed; in particular this research focuses on the scenario of the nowaday Uruguayan educational system.

We note as well that social practices identified in the scientific context are reinterpreted in different ways according to the paradigm for each moment and in each context, the scientist and the scholar, and therefore lead to the identification of different reference practices and activities. This model allowed answering the initial question through the consideration of a process of institutionalization of the concept of limit, which were identified several moments. This process places each of the actors as members whose practices models the actions of others while they are influenced by the practices of other actors.

Introducción

Muchas son las investigaciones desarrolladas en Matemática Educativa alrededor del concepto de límite de funciones, su enseñanza y su aprendizaje. Ellas han logrado explicaciones acerca de por qué los estudiantes no aprenden el concepto, cuáles son los procesos cognitivos y didácticos relacionados con el aprendizaje del límite y cuáles son las posibles alternativas de abordaje para el concepto de límite. También se han enfatizado los aspectos socio-históricos de la evolución del concepto para investigar cómo se ha ido constituyendo la construcción del concepto de límite[1].

En esta investigación proponemos también una investigación en torno al concepto de límite, pero desde una perspectiva diferente. Proponemos un estudio cuyo énfasis no esté en el límite como objeto preexistente en un cuerpo de conocimientos matemáticos validados socialmente, sino que trate con los fenómenos de producción, adquisición y difusión de ese conocimiento matemático. Planteamos una discusión sobre el límite en el paradigma actual de enseñanza del Cálculo en la que se reconozca el papel de los escenarios socio-histórico culturales en los que se desarrolló dicho saber. Ello reconoce al hombre haciendo matemáticas en un escenario cultural e históricamente situado, y nos permite analizar, entonces, el porqué enseñamos hoy el límite de la manera como lo hacemos, pregunta central de la investigación.

Buscamos una explicación acerca de cómo el saber matemático referido al límite de una función se volvió un saber institucionalizado; esto es, cómo se constituyó en un cuerpo de saber validado y aceptado social y culturalmente en el sistema escolar, entendido como una institución.

Para llevar a cabo un estudio de este tipo reconocemos la necesidad de analizar dos ámbitos que componen tal institucionalización: el ámbito científico, en el que el saber es acuñado de determinada manera por determinados grupos de actores –comunidades matemáticas-, y el ámbito escolar, en el que el saber es difundido de determinada manera, y responde a las necesidades de un determinado contexto sociocultural. Cada ámbito responde a paradigmas diferentes, que a su vez son dinámicos respecto del tiempo. La interacción entre ambos ámbitos conforma también dicha institucionalización, ya que uno se nutre del otro.

[1] Algunas de estas investigaciones se desarrollan en el capítulo 2, dedicado al Estado del Arte sobre el límite en Matemática Educativa.

Dado que nos importa reconocer el papel de los escenarios socioculturales y de la escuela como una institución, se ha decidido delimitar la investigación para el análisis de un escenario específico, que es el del contexto educativo uruguayo.

Una de las hipótesis que surge de tal análisis, es que la institucionalización es un proceso en el que además de los procesos de transposición del saber matemático en cuestión –el límite funcional- existen prácticas subyacentes como la formalización, la generalización y la difusión que dan cuenta de aquello que va constituyendo al concepto de límite. Parecería que estas prácticas estarían ejerciendo un rol normativo sobre las decisiones que se han ido tomando en la matemática escolar acerca de la enseñanza del concepto de límite, rol que es asumido más no comprendido por el docente. El proceso que finalmente proponemos debe entenderse como un "corte transversal" en el sistema en su conjunto, conformado por los dos ámbitos considerados en la investigación: el científico y el escolar. En lugar de pensar en un proceso desde un punto de vista cronológico (una etapa a continuación de otra), interesa analizar cómo aquéllas prácticas generan normas específicas para cada ámbito, que se plasman en prácticas y actividades explícitas de los actores de cada uno de ellos.

La teoría de la transposición didáctica (Chevallard, 1991) se dedica a explicar el tránsito del saber entre el ámbito científico y el escolar. Si bien es de capital importancia para comprender algunos de los procesos inherentes a la conformación del discurso escolar actual en torno al concepto de límite, no la consideramos adecuada para un análisis del tipo que estamos proponiendo, precisamente porque se ocupa del tránsito del saber sabio al saber a enseñar, pero no atiende a las prácticas de cada grupo de actores que son las que generan aquél saber.

Desentrañar el proceso de institucionalización del conocimiento matemático involucra el análisis de cómo se integra un determinado saber al cuerpo socialmente aceptado de conocimientos matemáticos y cómo se desarrolla dicho saber en las instituciones educativas. Esto implica estudiar qué es lo que favorece que se instituya un determinado conocimiento y no otro, qué prácticas norman la decisión de que ese conocimiento se torne central para una determinada teoría y qué factores socioculturales influyen en su difusión. El análisis de los procesos de institucionalización no sólo explicaría cómo un conocimiento se preserva en el tiempo, sino también cómo evoluciona e innova (Covián, 2005; Tuyub, 2008).

Un análisis de este tipo problematiza la enseñanza actual del límite de tal manera que abre la posibilidad de cuestionamientos en la comunidad escolar acerca de su tratamiento escolar, y de cómo y por qué los actores involucrados en la conformación de los programas deciden qué debemos enseñar y aprender de los conceptos del Cálculo, y del límite en particular. Se espera que este trabajo promueva una reflexión colectiva acerca de por qué cada docente prepara y lleva a la práctica los cursos de la manera en que lo hace y ello permita la búsqueda de propuestas alternativas y el compromiso con ellos. No solamente en la forma en que se enseña el concepto de límite sino especialmente en el rol que este contenido juega en la estructuración de los cursos de Cálculo.

A continuación presentamos una breve descripción de cada uno de los capítulos que compone la investigación:

Capítulo 1: Antecedentes y problemática de la situación

En este capítulo se desarrollan los antecedentes de la investigación, compuestos, por un lado, por una breve descripción del paradigma actual de la enseñanza de la Matemática en el contexto educativo uruguayo y un estudio específico sobre el concepto de límite realizado a estudiantes, y, por otro lado, por una descripción de otros paradigmas de enseñanza del Cálculo, que hemos dado en llamar “otros” cálculos. En el último apartado se desarrolla el planteamiento de la problemática a analizar.

Capítulo 2: Estado del arte: el límite en Matemática Educativa

Este capítulo se dedica a exponer algunas de las investigaciones relativas al concepto del límite, su enseñanza y aprendizaje en la Matemática Educativa. Se estructuran las investigaciones en cuatro grandes grupos: según el polo de la tríada didáctica en la cual se centran encontramos a los que enfatizan en los aspectos cognitivos (Tall, 1980, 1991 y 1992; Vinner, 1991, entre otros), en los aspectos epistemológicos (Cornu, 1986; Sierpinska, 1987; Dubinsky, 1991 y 2000, entre otros) o en los aspectos didácticos (Bokhari y Yushau, 2006; Bucari, Bertero y Trípoli, 2007, entre otros). Otro grupo de investigaciones se centran en los aspectos sociohistóricos: Bagni, 2005; Blázquez y Ortega, 2002; Hitt, 2003; Juter, 2006, entre otros.

Un último apartado incluye reflexiones acerca del tipo de explicaciones que se pueden brindar a la problemática en función de las investigaciones reportadas, así como acerca de por qué es necesario un abordaje diferente de la misma para lograr el objetivo de nuestra investigación.

Capítulo 3: Estado del arte: la institucionalización en la investigación en Matemática Educativa

En este capítulo se presentan los antecedentes de la Matemática Educativa en torno a la institucionalización y los procesos de institucionalización. En un primer apartado se presenta la teoría de Transposición Didáctica desarrollada por Chevallard a principios de los ’80. La misma permite explicar la transposición del saber entre los dos ámbitos considerados en la investigación: el científico y el escolar. En un segundo apartado se desarrolla la institucionalización desde diferentes perspectivas teóricas: la que aporta la sociología del conocimiento (Berger y Luckmann, 2001), la que aporta la Teoría de Situaciones Didácticas (Brousseau, 1997), y la que se aporta desde la socioepistemología, perspectiva teórica que se sigue en la investigación (Cordero, 2006, García Torres y Cantoral, 2007, entre otros).

Por último, en este capítulo se presentan las primeras apreciaciones sobre los procesos de institucionalización del concepto de límite, elaboradas en base a las consideraciones de los dos primeros apartados. En ellas se describen los rasgos generales de las etapas que transita el concepto de límite en el ámbito científico del proceso de institucionalización y los momentos que transita en el ámbito escolar.

Capítulo 4: Aspectos teóricos y metodológicos

Dedicamos este capítulo al desarrollo de los aspectos teóricos y metodológicos empleados en la investigación. En ambos casos se vio la necesidad de trabajar con herramientas diferentes que dieran respuesta a las necesidades específicas de cada ámbito –el científico y el escolar, por lo que se desarrollaron por separado dichas herramientas, explicando los vínculos entre ellas. En el último apartado de este capítulo se explica cómo se aplicaron los modelos teóricos y metodológicos descriptos para el caso específico de esta investigación, y en qué consistieron las herramientas utilizadas.

Capítulo 5: Análisis de los procesos de institucionalización

Este capítulo es en el que se presenta el desarrollo de la implementación de los modelos descriptos en el capítulo anterior, así como los resultados a los que condujo tal implementación. Se describe, por un lado, el análisis socio-histórico-epistemológico al seno de la comunidad matemática, estudio que condujo a la elaboración de una epistemología de prácticas sobre el concepto de límite. Por otro lado, se realiza un análisis del discurso matemático escolar, específico para el contexto educativo uruguayo y desde una perspectiva que entiende al discurso como acción. Tal análisis se llevó a cabo utilizando como herramienta metodológica el Análisis Crítico del Discurso (ACD) (Van Dijk, 1999; Fairclough y Wodak, 2001) por lo que precisó una descripción de la evolución del contexto educativo uruguayo así como de una descripción de los elementos del discurso analizados. En el último apartado se describen los momentos en el ámbito escolar del proceso de institucionalización a través del análisis del discurso como acción social, utilizando como herramienta metodológica al ACD. Dicho análisis permitió concluir en la forma en que las prácticas sociales detectadas en la conformación del concepto en el ámbito científico, son reinterpretadas en cada momento del ámbito escolar, dando lugar a prácticas de referencia y actividades específicas para cada uno de esos momentos.

Capítulo 6: Reflexiones finales

En este capítulo se presentan los principales resultados y se desarrollan las reflexiones finales de la investigación, estructuradas en tres apartados. El primero hace referencia a los aportes desde lo teórico-metodológico, el segundo hace referencia a los resultados ‘experimentales’ de la investigación y el último nuclea las consideraciones recabadas a lo largo de toda la investigación para explicar el proceso de institucionalización del concepto de límite en el ámbito educativo uruguayo y dar respuesta al cuestionamiento original.

Capítulo 1 – Antecedentes y problemática de la investigación

1.1. Presentación

En este capítulo nos proponemos describir la problemática de la investigación. Para ello, en primer lugar presentamos, a través de los antecedentes de la investigación, una breve descripción de cómo fueron evolucionando los intereses de la investigación.

En un primer momento el interés del trabajo se focalizaba en buscar evidencias acerca del tratamiento escolar del concepto de límite en el contexto educativo uruguayo, desde el ámbito concreto del aula en el contexto actual. Para ello se realizó un estudio exploratorio que indagara sobre los aprendizajes de los estudiantes en torno al concepto de límite: su definición, sus aplicaciones a problemas prácticos y su aplicación a la demostración de teoremas.

Se presenta entonces como primer antecedente el análisis de una experiencia llevada a cabo entre estudiantes que tenían características muy especiales: estudiantes de último año de Bachillerato Nacional, opción Ingeniería (actual Físico-Matemática), de un colegio en Montevideo que les ofrece una doble escolarización, caracterizado por un nivel socioeconómico alto de sus estudiantes. Estos estudiantes, además de estar cursando el útlimo año de Bachillerato Nacional, ya habían cursado e incluso tenían aprobado el Bachillerato Internacional del programa de la Unversidad de Cambridge.

El análisis de las producciones de los estudiantes arrojó que muchos de ellos conocen la noción de límite y la utilizan para resolver problemas de contexto matemático como su cálculo o la interpretación de gráficas que atendieran a diferentes representaciones – analítica, gráfica, tabular o verbal– en el momento de aplicada la prueba. Sin embargo, la mayoría no fueron capaces de reproducir la definición del concepto ni utilizarla en la demostración de un teorema.

Es así que después de esta primera instancia, la investigación se abocó ya no en conocer qué o cómo aprenden los estudiantes, sino en cómo son las prácticas escolares asociadas al concepto de límite y cuáles son las causas que condujeron a que esas prácticas sean de esa manera.

Para ello, se entendió necesario presentar una breve descripción del contexto educativo uruguayo, específicamente en lo que hace a la enseñanza de la matemática, lo que constituye otro antecedente importante de la investigación. Se exponen allí elementos socio-histórico-culturales que caracterizan al país y a su contexto educativo. Por un lado ellos enmarcan la investigación en un contexto sociocultural determinado, pero a la vez la justifican, explican por qué es necesaria este tipo de investigación y en este contexto.

Con el fin de comprender la enseñanza del concepto de límite en particular, y del cálculo en general, desde un contexto amplio, es que se presentan como tercer y último antecedente una serie de propuestas para su enseñanza, que denominamos "otros" cálculos. Estos acercamientos son fruto de una de las líneas de investigación de la aproximación socioepistemológica: la del desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional. En este apartado discutimos los aportes de Cordero (2006), Alanís (1996), Cantoral y Montiel (2001), Salinas, Alanís, Pulido, Santos, Escobedo y Garza (2003) y Dolores (2007).

Por último se desarrolla el planteamiento del problema, donde se retoman las características señaladas en los apartados anteriores para problematizarlas en el marco de la investigación en Matemática Educativa. En este apartado se explicitan el objetivo y la pregunta central de la investigación, a la vez que se esbozan las primeras herramientas para el reconocimiento de un proceso de institucionalización del concepto de límite y la necesidad de un marco teórico y metodológico específico para su estudio.

1.2. Antecedentes

1.2.1. Estudio exploratorio con estudiantes

1.2.1.1. Descripción del estudio

En una primera instancia se realizó un estudio exploratorio que consistió en la aplicación de una serie de actividades para analizar los aprendizajes de un determinado grupo de estudiantes en torno al concepto de límite. En particular se buscaba detectar si los estudiantes utilizan la definición formal –tratada en clase– de límite para resolver actividades en torno a él o utilizan alguna otra herramienta cognitiva o aproximación diferente.

Es importante aclarar que este estudio fue realizado con otros objetivos, no específicamente el de la investigación, es por eso que no responde a las herramientas teórico-metodológicas desarrolladas más adelante sino a teorías de corte más cognitivo (Tall y Vinner, 1981). De todas formas, creemos necesario su presentación en el marco de la investigación ya que constituyó un antecedente relevante para el planteo del cuestionamiento central del trabajo.

En la prueba se proponen actividades diseñadas para analizar las producciones de los estudiantes en torno al concepto de límite en diferentes situaciones. Para resolverlas los estudiantes pueden evocar diferentes aspectos del concepto. Las cuatro primeras pueden ser abordadas por los alumnos utilizando aproximaciones intuitivas del concepto, en ellas interviene el concepto de límite desde sus diferentes registros de representación: analítico (actividad 1), gráfico (actividad 2), tabular (actividad 3) y verbal (actividad 4). En la actividad 5 se les pide a los estudiantes que evoquen explícitamente la definición de límite de funciones expuesta por su docente (en el caso del estudio era la definición formulada en términos de ε y δ[2]) y en la sexta actividad se pretende evaluar el entendimiento de la misma y la habilidad para aplicarla en la demostración de un teorema. En el anexo I se encuentra la propuesta completa de la actividad exploratoria.

1.2.1.2. Descripción del grupo de estudiantes

La prueba se aplicó en agosto de 2007 a un único grupo de diecinueve estudiantes de un grupo de orientación "Ingeniería" de 6º año de Bachillerato de una Institución de Educación Secundaria de Montevideo. A diferencia del resto de las Instituciones del país, en ésta los alumnos cursan siete años de primaria y seis de secundaria, por lo que tienen en promedio un año más que estudiantes de otros Institutos que cursan el mismo año escolar (18-19 años).

Es un colegio privado de Montevideo con la particularidad de que los estudiantes reciben una doble escolarización: cursan de manera paralela los Bachilleratos Nacional e Internacional, lo que suma un total de 8 horas diarias de clase. Todos los estudiantes con los que se trabajó en la experiencia aprobaron en mayo de 2007 los exámenes correspondientes al Bachillerato Internacional, entre ellos el de Maths (Standard o High Level). Este curso incluye una introducción al cálculo diferencial e integral: concepto, cálculo y aplicaciones de funciones, derivadas, integrales. A su vez, estos estudiantes aprobaron el examen de Matemática B de 5º Científico (Geometría Métrica), y en su mayoría también el de Matemática A (Precálculo), aunque algunos revalidaron esta última con la materia Maths del Bachillerato Internacional. Estos cursos de 5º año a los que hacemos referencia corresponden al plan del Bachillerato Nacional vigente en el momento en que fue desarrollada la experiencia (plan 1986).

---

[2] $\lim_{x \to a} f(x) = b$ si y sólo si para todo real $\varepsilon > 0$, existe un real $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta$ entonces $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Estos antecedentes, sumados al hecho de que se puede suponer por la opción realizada que los estudiantes tienen una buena disposición al aprendizaje en la materia, otorgan características particulares a este grupo. Se podría suponer que éste es un grupo de “buenos estudiantes”, desde la visión de lo que un profesor de Matemática espera de sus estudiantes. Precisamente se buscaba esto para analizar los obstáculos que, aún a pesar de estas “ventajas”, presenta la introducción del concepto en esta etapa de la formación matemática de los estudiantes.

Con respecto al curso, vale decir que esta orientación del plan 1986 tiene tres cursos de Matemática: Matemática “A” (Introducción al Análisis de Funciones de una variable real), Matemática “B” (Geometría Analítica) y Matemática “C” (Geometría Descriptiva). En el curso de Introducción al Análisis (Matemática A) se comenzó trabajando con sucesiones, se definió límite de sucesiones y se trabajó con álgebra de limites en ese contexto. Más adelante se comenzó el trabajo con funciones, límite de funciones (se utilizaron teoremas de pasaje para realizar la transferencia entre ambos conceptos), se demostraron teoremas relativos (especialmente el de conservación del signo) y se aplicaron al cálculo de límites (introduciendo el orden entre infinitos y entre infinitésimos, infinitos fundamentales, etc.). En el momento de la aplicación de la prueba en el curso se estaba trabajando con el concepto e interpretación gráfica de las derivadas primera y segunda.

A priori, se esperaba que los estudiantes demostraran una noción intuitiva correcta del concepto, la que les permitiera resolver exitosamente cierto tipo de actividades, pero que no lograran reproducir la definición formal, mostrando incluso que no les aporta entendimiento (y puede incluso conducir a mayores confusiones).

1.2.1.3. Análisis de las producciones de los estudiantes

Se dedicaron 50 minutos para resolver la actividad y no se registraron solicitudes de tiempo extra. Los estudiantes tenían disponible calculadoras científicas y/o gráficas, lápiz y papel. A continuación se presenta el resumen de las producciones de los estudiantes:

Actividad 1:

Halla $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2-5x+6}{x-3}$

Resolvieron correctamente con el planteo adecuado:	10	53%
Responden "Indeterminado"[3]	2	11%
Factorizan pero no llegan a resolver o resuelven mal	5	26%
Intentan cambio de variable pero no llegan	1	5%
Da respuesta correcta pero sin planteo	1	5%

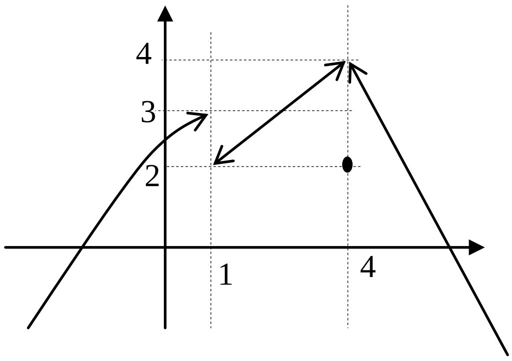
Tabla 1: Respuestas de estudiantes para la actividad 1

Actividad 2:

El siguiente es el bosquejo de una función h de dominio real:

Halla:

- $\lim_{x\to 1^-} h(x)$
- $\lim_{x\to 1^+} h(x)$
- $\lim_{x\to 1} h(x)$
- *h(1)*
- $\lim_{x\to 4^-} h(x)$
- $\lim_{x\to 4^+} h(x)$
- $\lim_{x\to 4} h(x)$
- *h(4)*



Límites laterales bien:	18	95%
Límites laterales mal o no responde:	1	5%
Límites bien[4]:	13	68%
Límites mal o no responde:	6	32%
Valores numéricos bien:	7	37%
Solo bien h(1)	8	42%
Valores numéricos mal o no responde:	4	21%

Tabla 2: Respuestas de estudiantes para la actividad 2

[3] Este es un término tradicionalmente aceptado y utilizado en las prácticas educativas en Uruguay para caracterizar aquellos límites que no se pueden calcular mediante la aplicación directa de propiedades relativas al álgebra de límites, como los casos: 0.∞, ∞/∞, 0/0, etc.

[4] Se consideró "Bien" el caso en que no respondían el lím para x→1, se sobreentiende que se dieron cuenta que no era igual y no supieron qué responder, pero es importante decir que es significativo la cantidad de estudiantes que no respondieron este ítem (8 de los 13 que respondieron supuestamente bien).

Actividad 3:

Dada la siguiente función: k : $\mathbb{R}-\{3\} \rightarrow \mathbb{R}$ / k (x) = $\dfrac{x+5}{x-3}$

a) Completa la siguiente tabla:

x	k(x)
2	
2.5	
2,8	
2,9	
2,99	
2,999	

x	k(x)
4	
3,5	
3,1	
3,01	
3,001	
3	

b) Halla:

- k(2)
- $\lim_{x\to 2} k(x)$
- k(3)
- $\lim_{x\to 3} k(x)$

Correcto[5]:	16	84%
Error en el límite para x→3:	2	11%
No responde	1	5%

Tabla 3: Respuestas de estudiantes para la actividad 3

Actividad 4:

La población N de una ciudad pequeña en t años a partir de ahora se predice que será:

$$N = 20000 + \frac{10000}{(t+2)^2}$$

Determina el número de habitantes de esta ciudad a largo plazo.

Correcto[6]:	17	89%
Plantea pero no termina o no responde:	2	11%

Tabla 4: Respuestas de estudiantes para la actividad 4

[5] Se admitió la respuesta "∞" para el límite de x→3, sin exigir límites naturales. La idea era investigar su idea intuitiva. Llama la atención que la mayoría no se fijan en la tabla sino que calculan el límite con las reglas conocidas.
[6] Excepto en un caso, en todos se plantea el límite y el cálculo con detalle.

Actividad 5:

Escribe la definición de límite finito de una función real en un punto *a* de su dominio.

Correcto:	3	16%
Responde algo incorrecto:	7	37%
No responde:	9	47%

Tabla 5: Respuestas de estudiantes para la actividad 5

Actividad 6:

Consiste en completar espacios en blanco con algunas justificaciones ausentes en una demostración que se presenta del teorema de conservación del signo (se puede ver la propuesta completa de la actividad en el anexo I)

Completan correctamente los espacios en blanco y las justificaciones:	6	32%
No reconocen la aplicación de la definición de límite pero completan correctamente el resto de las justificaciones:	4	21%
Completan en forma incorrecta los cuatro primeros espacios y no completan las restantes justificaciones	2	11%
No responden o solo escriben "por hipótesis" donde corresponde:	7	37%

Tabla 6: Respuestas de estudiantes para la actividad 6

Se puede apreciar cómo los estudiantes fueron capaces de resolver con relativo éxito las primeras actividades pero fracasaron en la definición de límite y en el reconocimiento de la misma en la demostración de un teorema. Los estudiantes parecen tener una "imagen conceptual" (en el sentido de Tall y Vinner, 1981) rica del concepto, y eso es lo que utilizan a la hora de resolver actividades. Solo muy pocos alumnos (16% en la actividad 5 y 32% en la actividad 6) tienen un manejo fluido de la definición formal del concepto, ya sea para reproducirla explícitamente o para aplicarla.

Esto nos condujo a reflexionar sobre la pertinencia de insistir, en cursos introductorios, en la formalización del concepto de límite. El tiempo dedicado, ¿es realmente fructífero? Por lo tanto, surgieron interrogantes acerca de cómo están abordando el tema los docentes en el contexto educativo uruguayo y por qué lo hacen de esa manera.

Es así que después de esta primera instancia, la investigación se abocó ya no en conocer qué aprenden los estudiantes sobre el concepto de límite, sino en cómo son las prácticas escolares asociadas y cuáles son las causas que condujeron a que esas prácticas sean de esa manera.

1.2.2. La enseñanza de la Matemática en el contexto educativo uruguayo

1.2.2.1 – Uruguay y su relación con la región y con el mundo

Uruguay es un país Latinoamericano, ubicado específicamente al sur de Brasil y al este de Argentina, con una población de 3,2 millones de habitantes según el censo del año 2004 del Insituto Nacional de Estadística (2004). Además de su reducido tamaño y población (es el segundo país más chico de Sudamérica después de Surinam y el tercero menor en población, después de Surinam y Guyana), dos factores influyen fuertemente en que este país tenga características especiales dentro del continente: por un lado, prácticamente no existen habitantes nativos ya que los indígenas que sobrevivieron a la invasión española y portuguesa fueron exterminados en 1831 por el primer gobierno del Uruguay independiente. Por otro lado, este país albergó a muchos inmigrantes europeos, mayoritariamente españoles e italianos pero también de otras nacionalidades, que, huyendo de la Segunda Guerra Mundial, a mediados del siglo XX, se radicaron en Uruguay.

Ambos factores influyen en que éste sea un país cuya población está básicamente conformada por inmigrantes, con su consecuente influencia sobre los aspectos culturales generales de la sociedad, y particularmente sobre la educación. Otra de las consecuencias de este hecho es el fuerte vínculo que muchos de los habitantes de Uruguay aún mantienen con familiares o amigos en Europa, especialmente en España e Italia, e incluso el sentido de pertenencia y apego que se siente con dichos países, su cultura y su pueblo.

Es necesario indicar aún otro factor que influye sobre la peculiar característica del pueblo uruguayo, en lo que hace a la conformación de su juventud, lo que afecta fuertemente a la población, y es el referido a la emigración. Como primer antecedente cercano, podemos mencionar la fuerte emigración que se dio en la década del ’70, durante el período de facto ocurrido entre los años 1973 y 1984 en nuestro país, al igual que en muchos otros países de la región. En ese caso los emigrantes fueron principalmente jóvenes, muchos de ellos militantes en movimientos universitarios. Uno de los países donde estos jóvenes se erradicaron fue Argentina, pero varios de ellos emigraron a países europeos, favorecidos por un lado por los vínculos familiares y culturales previamente descriptos pero también por las políticas específicas de dichos países para recibir exiliados. Terminado el período de facto, algunos de ellos volvieron y se insertaron en la comunidad, trabajando y estudiando –lo que implicó una segunda influencia sobre la comunidad, incluida la comunidad escolar–, y muchos otros se mantuvieron radicados en otros países.

Otro segundo antecedente de emigración, aún más cercano, es el que se produjo a partir de la crisis económica ocurrida en la región sudamericana en 2002 (especialmente en Argentina y Uruguay). Esta fue una crisis que afectó a todos los grupos sociales y de todas las edades. Nuevamente los jóvenes, y especialmente los jóvenes con estudios superiores, al no encontrar lugares donde desempeñar un cargo acorde a sus estudios o en donde fueran bien remunerados, optaron por aceptar ofertas laborales o de estudio que les ofrecían en el extranjero. Este fenómeno ha comenzado a revertirse, lentamente, a raíz de la crisis económica sufrida en los países del bloque occidental de Europa y Asia comenzada en 2009 y de la prosperidad económica y social que se vive actualmente en Uruguay como país en vías de desarrollo.

Mencionamos estos hechos a modo de breve explicación y descripción de la coyuntura actual nacional de la población uruguaya, sin pretender con ello bosquejar un panorama completo de la situación, lo que implicaría un estudio que está fuera de los objetivos de esta investigación. Todos los mencionados son fenómenos que atienden a una multiplicidad de variables sociales, económicas, culturales, demográficas e históricas, cuyo análisis está lejos del alcance de nuestra investigación. Sin embargo, consideramos que explicitarlos brinda herramientas para una justificación de la problemática que se desea estudiar, en lo que hace específicamente a la enseñanza de la Matemática en Uruguay. Se detalla en el siguiente apartado la influencia que tiene cada uno de estos fenómenos en la enseñanza de la Matemática en el Uruguay.

1.2.2.2 – Influencia en el contexto educativo uruguayo

En primer lugar, el hecho de que Uruguay sea un país chico en relación a otros países del continente, en tamaño y en población, ha permitido que determinadas prácticas relacionadas con la enseñanza de la matemática se compartieran y difundieran "extraoficialmente". A su vez, características propias de la formación docente en Uruguay acentúan esta forma peculiar de difusión: durante dos de los cuatro años de la carrera de profesorado, por ejemplo, los estudiantes deben asistir regularmente durante un año lectivo al curso de un profesor egresado para observar sus prácticas y, ocasionalmente, preparar e implementar una unidad del programa o parte de ella. En el último año los estudiantes tienen a cargo un curso pero son guiados por un profesor de Didáctica de Matemática. En el caso de Matemática, los profesores egresados conforman sólo el 38% del total de profesores de Educación secundaria ejerciendo en el país (según datos del Censo Nacional Docente, Administración Nacional de Educación Pública (ANEP), 2007), lo que acentúa la situación. Esta situación se agrava si consideramos sólo al Ciclo Básico, compuesto por los tres primeros años de Educación Secundaria: en 2008, 14662 horas de un total de 15700 (93%) fueron cubiertas por profesores no titulados, según datos aportados por E. Moraes, directora del Consejo de Formación en Educación de la ANEP para un artículo publicado en un diario de la capital, El Observador (Orfila, 2010, 14 de agosto). Los profesores no titulados son o bien estudiantes de profesorado u otras carreras universitarias, o bien profesionales “con conocimientos en la asignatura, pero sin formación en didáctica y pedagogía, como por ejemplo ingenieros” (Orfila, 2010, 14 de agosto, p. 19).

Estos elementos favorecen que se haya consolidado una “tradición oral” que de alguna manera influye sobre qué temas abordar y de qué manera en los profesores, especialmente aquéllos que están comenzando sus prácticas. Esta influencia puede resultar aún más fuerte que su propia formación o lo que establecen las autoridades educativas a través de los lineamientos en los programas curriculares.

Por otro lado, la influencia europea se ha ido consolidando como un ejemplo a seguir, no sólo desde los lineamientos que proponen las autoridades (Inspección de Matemática) sino también desde las experiencias de los propios docentes. Las permanentes migraciones y emigraciones descriptas fomentaron que se tenga una “matriz cultural” compartida, lo que hace más natural la aceptación de dichos lineamientos por parte de los actores involucrados en el sistema didáctico, incluso a pesar de las enormes diferencias de necesidades sociales y económicas que se viven en una y otra región. El caso de la concepción del cálculo escolar y su enseñanza no escapa a dicha situación.

En muchos países predomina la concepción de un cálculo escolar estructurado alrededor de los conceptos de función, límite, derivación e integración. Existiría un supuesto implícito según el cual sin el tratamiento formal en la enseñanza de estos conceptos, en particular del de límite, no se puede enseñar cálculo (Alanís, 1996).

Entendemos al Discurso Matemático Escolar (DME) como la manifestación del conocimiento matemático, normada entre otras cosas por creencias del profesor y los estudiantes sobre lo que es la enseñanza y lo que es la matemática (este concepto se desarrolla con más precisión en el apartado 4.1.2). Como veremos, el discurso establece prioridades sobre aquello que debe estudiarse y de qué manera, favoreciendo que un determinado conocimiento –y no otro-se vuelva institucional.

Una de las hipótesis de la cual partimos es que el DME en Uruguay no escapa de lo descripto por Alanís (2000): se suele favorecer un tratamiento predominantemente algorítmico, sin considerar actividades con abordajes variacionales o predictivos. Tampoco se suelen considerar herramientas y argumentos propios de la génesis y evolución de los conceptos del Cálculo que apunten a considerar su significado dentro del escenario sociocultural específico en el que se está trabajando.

El reconocimiento de otros tipos de abordajes diseñados y llevados a cabo en otros países, que incluyen no sólo a una forma diferente de enseñar el cálculo sino una concepción diferente del mismo, hizo que se comenzara a pensar en la necesidad de explicitar la situación de la enseñanza del concepto de límite en Uruguay. Más allá de valoraciones positivas o negativas respecto de uno u otro abordaje, se considera necesaria una problematización del actual tratamiento del tema en el contexto educativo uruguayo, y así comenzar a pensar si es adecuado –y posible– un tratamiento diferenciado.

1.2.3. Consideraciones relativas a “otros” cálculos

Según Cordero (2006), para analizar un fenómeno didáctico es necesario explicitar la concepción del conocimiento que subyace a la intervención de los procesos de construcción. Plantea así dos opciones: prestar atención a los procesos cognitivos individuales o centrarse en el papel de las interacciones (entre individuos) para realizar tales procesos cognitivos donde los escenarios socioculturales proveen consideraciones sobre las distintas formas de los procesos. Esta última opción es la que permite explicar cómo un conocimiento se vuelve institucional -producto material social que debe ser enseñado y aprendido en las instituciones–, cómo los grupos se organizan, de qué se valen y qué métodos utilizan para constituir dicho conocimiento, ya que su foco no son los *procesos cognitivos* inherentes a los conceptos que componen cierto conocimiento sino las *prácticas* involucradas en su construcción.

Es desde esta perspectiva que se reconoce la diferencia entre el Cálculo como saber construido en ámbitos científicos y el Cálculo escolar, con una intencionalidad didáctica específica pero no siempre explícita, y que surge el interés por analizar el estatus del cálculo en las instituciones educativas. Esta perspectiva permite entender la coexistencia en el sistema escolar de por lo menos dos concepciones subyacentes al Cálculo escolar: por un lado, aquélla más cercana a lo que es el Cálculo como saber, con conceptos y definiciones explícitas y centrada básicamente en los conceptos de continuidad, derivada e integral en base al de límite. Y por otro lado aquélla que enfatiza el carácter intencional didáctico, en la cual subyacen categorías implícitas y que se centra en los significados situacionales de los conceptos del anterior: predicción, graficación y analiticidad (Cordero, 2006).

Los análisis socioepistemológicos han demostrado que el abordaje algorítmico formal que responde a la primera de las concepciones señaladas y que es tradicional en el ámbito escolar, ha fracasado. Desde otras líneas de investigación se ha reportado el mismo fracaso, la diferencia de la perspectiva socioepistemológica radica en las alternativas que propone: en lugar de buscar abordajes diferentes del concepto, busca concepciones alternativas del Cálculo en su conjunto (Cordero, 2006).

Alanís (1996) distingue entre dos tipos tradicionales de enseñanza del cálculo: una centrada en los conceptos, que asume que el aprendizaje se produce si se presentan los contenidos formal y rigurosamente, y otra que se centra en la práctica algorítmica y algebraica. Presenta antecedentes que comprueban el fracaso escolar de ambas aproximaciones.

Alanís (1996) presenta como alternativa una idea promovida por el grupo de trabajo del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (Cinvestav) en el IPN (Instituto Politécnico Nacional), y que en estos años se ha visto robustecida por un sinnúmero de investigaciones. Las premisas que guían al mismo son, en primer lugar, la consideración del estudiante como un usuario de la temática, lo que implica no sólo la consideración del contexto en el que está inmerso sino también la del contexto en el que surge el conocimiento y cómo ello puede favorecer para el diseño del discurso matemático escolar. En segundo lugar, se remarca la necesidad de una adecuada integración a la vida escolar de la historia de la matemática. También enfatiza la necesidad de analizar la historia de la *enseñanza* del cálculo y por último se hace hincapié en lo inapropiado de las aproximaciones teóricas formales, que sólo alejan al cálculo de su carácter instrumental que aparece como objetivo principal en los currículos.

Este movimiento fue el que dio pie para la conformación de lo que más recientemente se plantea como un abordaje alternativo del Cálculo en su conjunto, o la consideración de "otros" Cálculos, con referencia a la estructuración del Cálculo en torno a los mencionados significados situacionales de predicción, graficación y analiticidad (Cordero, 2006). El trabajo de Alanís (1996) es un ejemplo de cómo estructurar un curso en torno a la predicción, tomando en particular como hilo conductor la predicción de la posición de una partícula que se mueve a lo largo de una línea recta y trabajando en base a problemas extramatemáticos.

Atendiendo a esta última concepción es que se han venido desarrollando diversas aproximaciones dentro de la línea de investigación socioepistemológica del Desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional. Seleccionamos tres aportes que creemos representativos de tal línea de investigación, y que presentan propuestas educativas concretas. Dos de ellos (Cantoral y Montiel, 2001 y Salinas, Alanís, Pulido, Santos, Escobedo y Garza, 2003) se presentan como libros de texto para estudiantes, con explícitas recomendaciones para el docente. El tercero (Dolores, 2007) presenta toda una investigación cuyo objetivo es aportar los elementos fundamentales que puedan constituirse en una alternativa didáctica para el tratamiento del Cálculo Diferencial en el bachillerato (Dolores, 2007, p. 5). En el quinto capítulo se presentan elementos para esa propuesta alternativa y en el sexto y último se analiza una experiencia escolar concreta.

1.2.3.1. Propuesta de Cantoral y Montiel (2001)

Contoral y Montiel (2001) sostienen la tesis teórica de que "la matemática se ha constituido socialmente, en ámbitos no escolares, y en consecuencia su introducción al sistema de enseñanza le obliga a una serie de modificaciones que afectan directamente su estructura y funcionamiento". Para ello deben desarrollarse acercamientos metodológicos y teóricos específicos, sustentados en estudios que permitan entender los mecanismos de adaptación del saber a las prácticas de profesores y estudiantes. En el libro se presenta una forma de tratamiento escolar de las funciones con base en resultados de estudios de su grupo de investigación.

En esta propuesta se ubica a la visualización de las funciones reales de variable real como una herramienta para favorecer el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes y ayudar a los profesores en el diseño y análisis de actividades de aprendizaje. Así, la graficación no se presenta como un fin en sí mismo sino como una forma particular de visualización de procedimientos y conceptos matemáticos. Se entiende a la visualización como un proceso del pensamiento matemático.

En el capítulo 2 se introduce la noción de función desde una perspectiva múltiple, atendiendo a sus diversos aspectos: gráfico, tabular, algebraico, verbal, etc. y buscando reinterpretarla continuamente. En los siguientes capítulos se presentan diversas formas de análisis de las funciones mediante el empleo de una técnica particular de graficación: tabulación, transformaciones, operaciones y análisis matemático (en donde se utiliza el desarrollo de Taylor de las funciones). Esta propuesta se estructura en base a los significados situacionales mencionados por Cordero (2006): predicción, graficación y analiticidad.

Los conceptos que tradicionalmente estructuran un curso de Cálculo –límites, continuidad, derivabilidad, integrabilidad– no son tratados como tales en este libro, sino que se analizan sus consecuencias gráficas en función de los parámetros de las familias de funciones estudiadas: "inclinación", "abertura", "desplazamiento", "alargamiento", etc.

1.2.3.2. Propuesta de Salinas et al. (2003)

Salinas et al. (2003) proponen una reconstrucción de las ideas fundamentales del Cálculo Infinitesimal. Parten del convencimiento del fracaso de las propuestas tradicionales del cálculo, "basadas en los libros de texto de autores estadounidenses que han impuesto, desde hace por lo menos 50 años y en toda América Latina, una conciencia de lo que es la verdad en Matemáticas (filosofía, ideología), contribuyendo decididamente a crear el paradigma con respecto a la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo que padecemos actualmente" (Salinas et al., 2003, p. 5).

Dichos autores resumen sus críticas al paradigma tradicional en dos grandes aspectos. Por un lado, sostienen que el énfasis en el carácter lógico deductivo de la presentación, con un orden lógico creciente –definición en primer lugar de los conceptos más simples que permiten definir conceptos más complejos-, obstaculiza la comprensión cabal de los estudiantes por no permitir que ellos construyan aproximaciones iniciales al conocimiento, intente sus propios caminos de solución y en definitiva se apropie del conocimiento. A su vez, opinan que la poca comprensión por parte de los estudiantes provoca que el profesor recurra a "algoritmitizar" parte del contenido, reduciendo su enseñanza a las prácticas de derivar e integrar. Por último, este tipo de presentación produce que los estudiantes no puedan extraer las ideas fundamentales del Cálculo y su razón de ser, dificultando así la aplicación de los procesos aprendidos en la resolución de problemas.

El otro aspecto en el cual centran sus críticas Salinas et al. (2003) se centra en el bajo nivel de articulación entre lo que se enseña en los cursos de Cálculo y su relación con otras áreas de conocimiento, y señalan como ejemplo el caso del tratamiento de los diferenciales en la Física. Esto provoca dificultades para que el estudiante logre un adecuado aprendizaje de la ciencia, a la vez que se desanima por no entender el modo en que el Cálculo es utilizado en otras ramas del conocimiento.

Los autores proponen una reconstrucción en el sentido de incluir ideas y nociones ausentes del discurso tradicional del Cálculo, originadas en investigaciones epistemológicas que los condujeron a indagar sobre el ambiente problemático en el que se desarrollaron tales ideas y nociones. Así, su propuesta para el aprendizaje del Cálculo parte de la presentación de situaciones problemáticas, en ocasiones las mismas que se encuentran en la génesis de cada concepto. Su idea es que la reflexión, análisis y discusión de las ideas generadas en la búsqueda de soluciones permitan la construcción de un conocimiento relevante del Cálculo.

Proponen una secuencia de seis unidades que, recorridas en forma de espiral, permitan iniciar y terminar en un mismo lugar: la solución de problemas.

En el siguiente esquema sintetizan el desarrollo del libro:

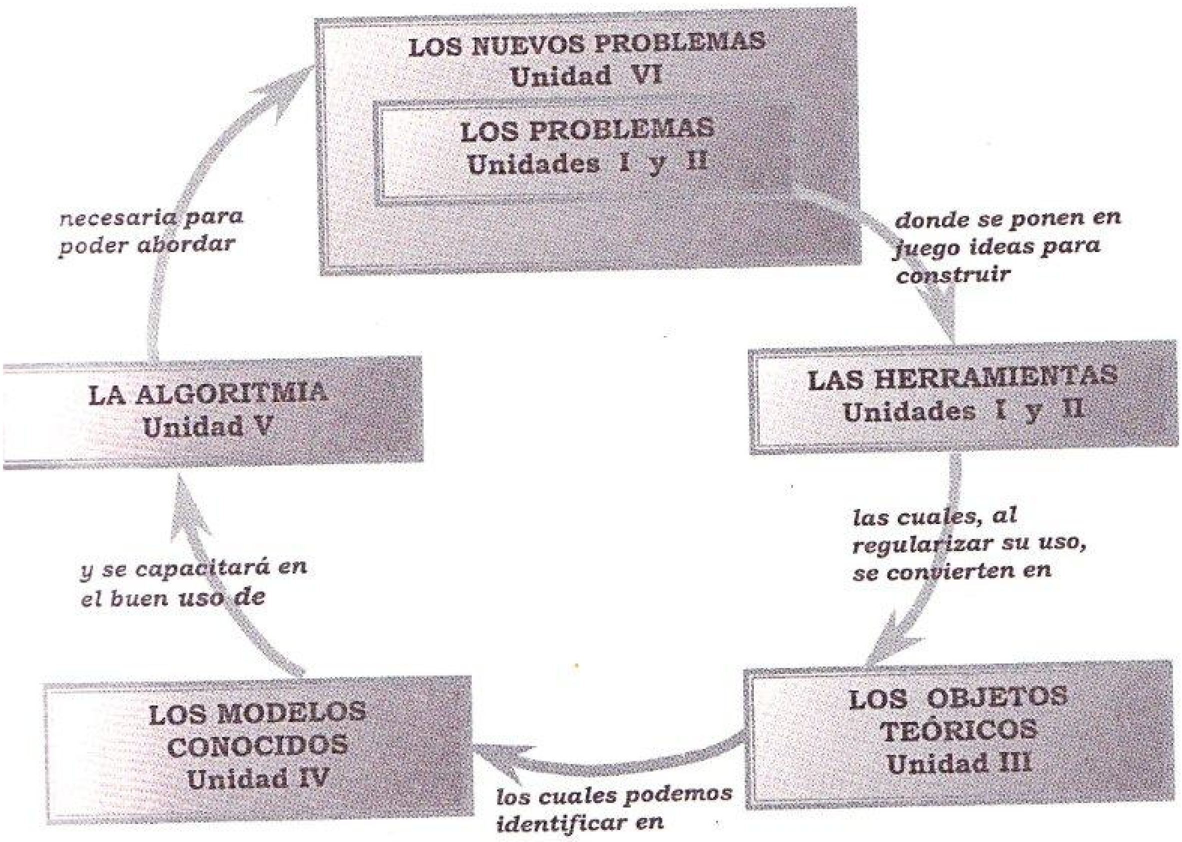


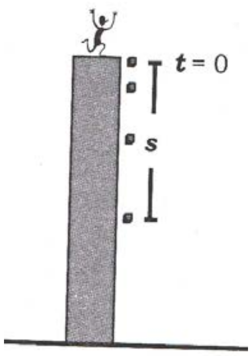
Figura 1: Desarrollo temático del libro *Elementos del cálculo. Reconstrucción conceptual para el aprendizaje y la enseñanza.* (Salinas et al., 2003, p. 7)

En las dos primeras unidades analizan dos problemáticas concretas que atienden, en el primer caso, a situaciones en las que la razón de cambio es constante, y en el segundo caso a situaciones en que la razón de cambio no es constante. El objetivo es estudiar situaciones en diferentes contextos (se comienza con el físico pero después se amplía a todo tipo de magnitudes cuyos valores dependen del tiempo), y a partir de un análisis cualitativo (gráfico) y cuantitativo (numérico) ellas generar modelos matemáticos que responden a las situaciones planteadas.

En la unidad tres, "Conceptualización de las ideas fundamentales" se introducen los "métodos infinitesimales", y ligados a ellos los conceptos de derivada, diferencial, antiderivada e integral. Se retoman situaciones propuestas en las unidades anteriores para lograr el propósito de la unidad: construir una representación algebraica para una magnitud cuando se conoce su razón de cambio, específicamente cuando ésta está dada por una expresión polinómica. La unidad culmina con la introducción del Teorema Fundamental, que surge de manera natural al conciliar las visiones del "cambio acumulado" de una magnitud con la visión de la "antiderivada". Esta aproximación difiere de los acercamientos tradicionales, en primer lugar porque generalmente no se hace uso del concepto del diferencial, propio del pensamiento físico, y además porque los conceptos de derivada e integral se trabajan en capítulos separados.

Es en esta unidad cuando se introduce por primera vez la noción y notación de límite, en el contexto del cálculo de la velocidad instantánea. El problema que da origen a la situación es el siguiente:

> *Un objeto se encuentra a una gran altura del suelo y se deja caer. Aceptamos que conocemos la fórmula que nos calcula la distancia recorrida en términos del tiempo:*
>
> $$s(t) = \frac{1}{2}gt^2 = 4.9t^2$$
>
> *donde la distancia s está en metros, el tiempo t en segundos y t = 0 cuando el cuerpo se suelta. Estamos interesados en aproximar el valor de la velocidad que lleva el cuerpo cuando ha transcurrido un segundo, la cual denotaremos v(1).*



(Salinas et al., 2003, p. 135)

Los autores señalan a continuación que el énfasis no está en calcular en sí el valor *v(1)*, que ya se conocía de la unidad anterior, sino en el método (de aproximaciones sucesivas) utilizado para ello. El método utilizado es el denominado método de Euler, consistente en:

- dividir el intervalo de tiempo en subintervalos de igual longitud Δt,
- considerar la razón de cambio en el extremo izquierdo de cada subintervalo,
- asumir que la razón de cambio es constante en cada subintervalo,
- multiplicar la razón de cambio por la longitud en cada subintervalo,
- producir así una aproximación al crecimiento o decrecimiento de la magnitud en cada subintervalo,
- sumar las aproximaciones en cada subintervalo para obtener una aproximación al cambio total que sufre la magnitud a lo largo de todo el intervalo.

Una vez lograda una aproximación aceptable, se generaliza el problema para conocer la velocidad instantánea para cualquier instante t, y después de un análisis general se concluye lo que insertamos a continuación:

Análisis 3 Una reflexión teórica

El proceso que hemos estado desarrollando, nos ha llevado a la expresión:

$$v(t_0) \cong \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$$

para calcular aproximaciones al valor de la velocidad v en el instante t_0

Estamos concientes de que, en términos generales, la expresión

$$\frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$$

aproximará mejor a $v(t_0)$ cuando Δt sea considerado cada vez con un valor numérico más pequeño.

Vamos a establecer una expresión para señalar ese proceso "potencial" de Δt consistente en ser "cada vez más pequeño". Afirmaremos que

"Δt tiende a cero"

y denotaremos esto mismo de manera compacta mediante el símbolo:

$$\Delta t \to 0$$

Utilizando esta notación, podemos asegurar ahora que, si $\Delta t \to 0$ entonces los valores de la expresión

$$\frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$$

se irán "estabilizando" en el **valor exacto** $v(t_0)$.

Este proceso lo denotaremos con la simbología:

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$$

Donde la notación compacta:

$$\lim_{\Delta t \to 0}$$

nos expresa aquel proceso numérico de estar obteniendo aproximaciones cada vez mejores al valor de $v(t_0)$ las cuales resultan al tomar el valor de Δt cada vez más pequeño, hasta reconocer que se llega a la "estabilización" que asegura la capturar del valor exacto de $v(t_0)$.

Unidad III Sesión 1 **141**
Elementos del Cálculo

Figura 2: Primera aproximación al concepto de límite en el libro *Elementos del cálculo. Reconstrucción conceptual para el aprendizaje y la enseñanza* (Salinas et al., 2003, p. 141).

Esta es la única explicación "teórica" que aparece en el libro respecto de la noción de límite. En adelante se la considera ya introducida, y se la utiliza para otros cálculos. Como vemos, el concepto de límite no es usado como constructo teórico que permite construir los otros, sino como herramienta práctica para alcanzar el objetivo: generalizar el método de Euler en un solo mecanismo.

La cuarta unidad se dedica a la consideración de otros modelos no polinómicos: el exponencial, el logarítmico y el trigonométrico.

Recién en la quinta unidad se introduce la algoritmia en el cálculo de derivadas y antiderivadas, con el objetivo de conformar un "catálogo de derivadas y antiderivadas" que permita hacer frente a las situaciones contextuales que se proponen, en donde se necesita el cálculo de una derivada o el planteamiento o cálculo de una integral.

Por último, en la unidad seis se presentan dos nuevas problemáticas y sus soluciones, relacionadas entre sí: la graficación de funciones y los problemas de optimización. Ambos ya fueron analizados en diferentes situaciones a lo largo del libro, pero en esta unidad se presentan procesos de solución basados en las herramientas propias del Cálculo Infinitesimal que se han ido construyendo en las unidades anteriores. Es interesante destacar cómo la graficación de funciones no es presentada como un objetivo en sí mismo, característica del acercamiento tradicional, sino que el énfasis está en revelar "el potencial que posee el concepto de derivada para precisar aspectos importantes de las gráficas de funciones. Este potencial lo podemos revalorar actualmente con paquetes computacionales o software que poseen capacidad de graficación y cuyo uso con este conocimiento resulta productivo para desarrollar la habilidad de analizar gráficas" (Salinas et al., 2003, p. 377). Es decir que desde esta visión, lejos de considerar que las nuevas tecnologías vuelven innecesario el estudio de la graficación de funciones, se las concibe como una herramienta con un gran potencial que redimensiona la enseñanza de los conceptos de derivada e integral, permitiendo profundizar en los conceptos y no en las técnicas algorítmicas.

1.2.3.3. Propuesta de Dolores (2007)

Por último, el libro de Dolores (2007) presenta todo el cuerpo de una investigación cuyo objetivo es brindar herramientas para una propuesta didáctica alternativa a las tradicionales para el tratamiento del Cálculo Diferencial (CD) en el bachillerato. El autor señala, al igual que Salinas et al. (2003), que después de terminar un curso tradicional de CD los estudiantes dominan adecuadamente la algoritmia del cálculo de límites y derivadas pero presentan dificultades significativas en la conceptualización de los procesos subyacentes al límite en la noción de derivada y en la aplicación de tales conceptos a la resolución de problemas. Esta es una problemática que según el autor no es característica de México, sino que se presenta también en otros países.

Dolores (2007) indica que una de las causas de esta problemática es la propia configuración de los programas: sus contenidos están organizados siguiendo la estructura formal del Análisis Matemático, con un enfoque abstracto y poca relación con los fenómenos físicos de variación. Según un estudio del Programa Iberoamericano de Enseñanza de las Ciencias y la Matemática en el Nivel Medio (IBERCIMA) de la Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura (OEI) sobre el currículum de Matemática en enseñanza media en 22 países, esta situación es extendible a muchos países de Iberoamérica y a otras ramas de la Matemática: la mayoría de los programas consiste en una lista de contenidos sin distinción de fundamentación, objetivos didácticos, contenidos de aprendizaje, orientaciones didácticas y procedimientos de evaluación correspondientes (Organización de Estados Iberoamericanos, Programa Iberoamericano de Enseñanza de las Ciencias y la Matemática en el Nivel Medio, 1992).

Por otro lado, Dolores (2007) centra en la ejecución de dichos programas otra de las causas de la problemática descripta: la mayoría de los programas no son vistos en su totalidad por falta de tiempo escolar, la presentación es principalmente expositiva y no se consideran métodos electrónicos. La enseñanza de la derivada se reduce a un método para su cálculo, alejado de interpretaciones geométricas, y la mayoría de los libros de texto no fueron diseñados para atender las necesidades específicas del contexto analizado en la investigación (el estado de Guerrero en México).

Por último, el autor señala que otra de las causas de la problemática se centra en los procesos de asimilación, específicamente en el ámbito epistemológico: la concepción estática de tangente que los estudiantes han construido en cursos anteriores, la comprensión de los procesos infinitos y de paso al límite, entre otros.

Ante este panorama, Dolores (2007) propone un abordaje alternativo que tiene como uno de sus puntos de partida a las investigaciones sobre historia de la Matemática. Se propone rescatar así, por un lado, el uso de los infinitesimales, "acercamiento geométrico a la derivada [que] incorpora las nociones básicas de la línea de trabajo iniciada por los griegos de la antigüedad, continuada por Descartes, Fermat, Barrow (entre otros) y culminada por Leibniz, considerado uno de los creadores del cálculo.” (Dolores, 2007, p. 5). Por otro lado, se utiliza como insumo para la construcción de conocimiento los aportes del campo de la mecánica, a través de sus estudios sobre los fenómenos de variación. En esta línea de trabajo el autor ubica a los trabajos de Galileo, Torricelli, Roverbal y finalmente Newton.

Después de una investigación de corte socioepistemológico que analiza específicamente la génesis y desarrollo histórico de la derivada, la derivada en los textos y programas, los resultados de la enseñanza de la derivada y las tendencias y enfoques sobre la enseñanza de la derivada, plantea, en el capítulo 5, elementos para una propuesta alternativa, fundada en el enfoque variacional de la aproximación socioepistemológica.

Específicamente Dolores (2007) propone:

> “elaborar introducciones intuitivas e informales al CD que no necesariamente se sujeten a la estructura lógico-formal del Análisis Matemático, que desarrollen ideas variacionales que posibiliten la comprensión de sus conceptos fundamentales; ubicar como *eje rector* de todo el curso de CD al estudio de la variación de modo que la derivada no venga siendo un concepto matemático abstracto sino un concepto desarrollado para cuantificar, describir y pronosticar la rapidez de la variación en fenómenos de la naturaleza o de la práctica.” (p. 54).

El autor busca con este planteo que el conocimiento se genere en contextos prácticos o de aplicación, en lugar de construir conocimiento en forma abstracta para después buscarle su aplicación.

En esta propuesta se propone una primera fase “preparatoria” que busca que los estudiantes representen intervalos de variación, evalúen y grafiquen funciones, relacionen gráficas y sus propiedades y resuelvan problemas sobre la obtención de funciones. En la fase de “formación del concepto” es donde se hace necesaria la introducción de la noción de límite, en el contexto del cálculo de la razón de cambio instantánea (RCI) a partir de aproximaciones sucesivas de la razón de cambio promedio (RCP).

En principio se trabaja con magnitudes que tienen un comportamiento lineal, pero después se introducen situaciones problemáticas en donde el comportamiento no es lineal, lo que conduce a la necesidad de introducir los procesos infinitos como un nuevo método de cálculo que conduce a su vez a la noción de límite. Éste surge a partir de la reducción “infinitesimal” de los intervalos en los que se calcula la RCP, donde

$$\frac{d(t_0)-d(t)}{t_0-t}=\frac{\Delta d}{\Delta t}$$

Al reducir el intervalo se obtienen sucesiones numéricas de cocientes y a partir de ellas se infiere, por inducción completa, el límite, que constituye la velocidad o rapidez instantánea. Se realizan aproximaciones numéricas al t_0 para aportar más elementos sobre el cálculo de ese límite y apreciar su unicidad, planteando contraejemplos donde el límite no es único.

Finalmente se introduce la notación de límite para definir la RCI mediante el siguiente límite, siempre y cuando exista:

$$\lim_{t\to t_0}\frac{d(t_0)-d(t)}{t_0-t}=\frac{\Delta d}{\Delta t}$$

La atención en la noción de límite se centra sólo en este proceso de aproximación, no se propone un estudio exhaustivo del mismo ni de su algoritmia. No se presentan los teoremas de límites de las operaciones de funciones sino que se enfatiza en la relación entre las nociones de límite e infinitesimal y a partir de ellos se sustenta la algoritmia en el cálculo de razones de cambio instantáneas.

Dolores (2007) resume la propuesta presentada en el siguiente esquema:

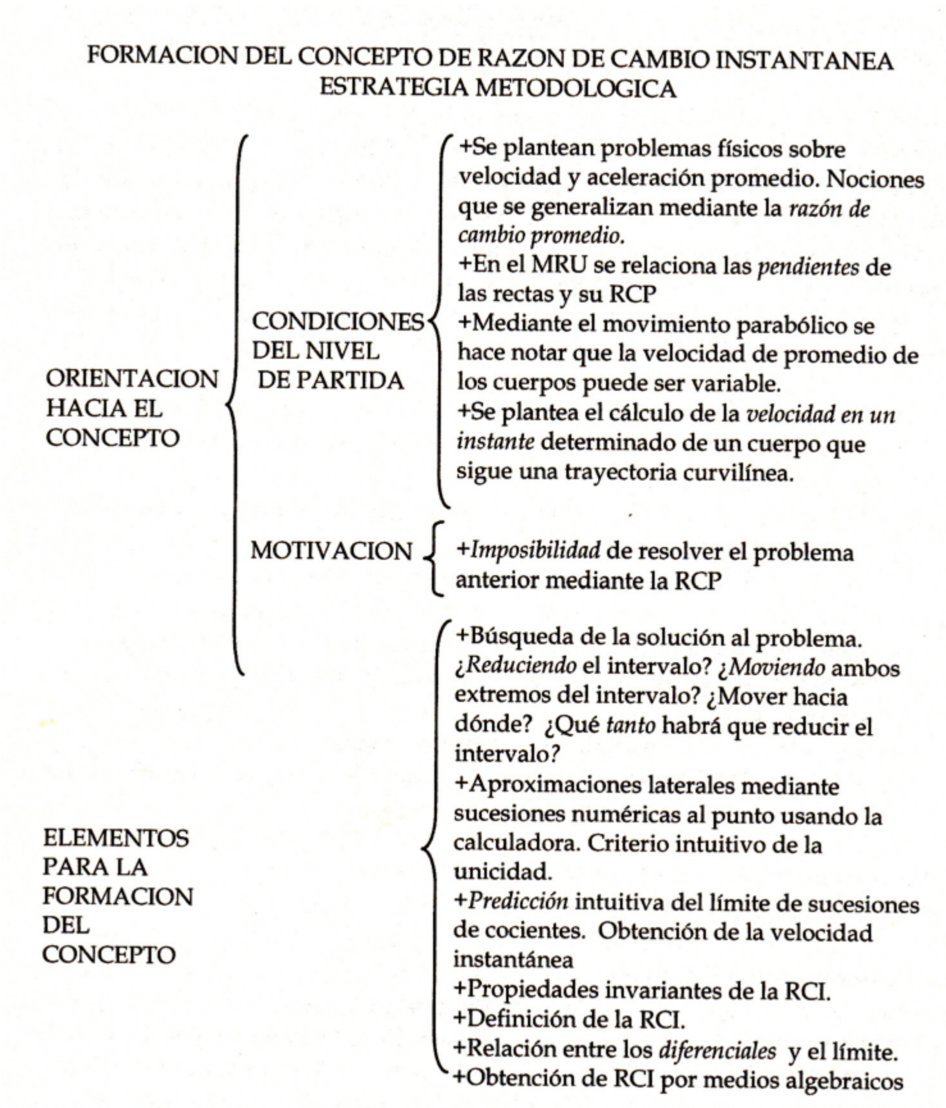


Figura 3: Esquema que explica la estrategia metodológica para la formación del concepto de razón de cambio instantánea (Dolores, 2007, p. 78)

La presentación de estas propuestas alternativas a la denominada “tradicional” nos brindan un panorama más amplio sobre las posibles aproximaciones al tratamiento escolar del Cálculo. El conocimiento previo de ellas fue uno de los móviles que motivaron la investigación, con cuestionamientos del tipo: ¿por qué en el contexto uruguayo el concepto de límite y el cálculo en general se presenta de una manera específica –y no de otra? ¿Es posible en el contexto educativo uruguayo la consideración de estas propuestas alternativas?

Es así que el foco de la investigación no es el análisis de estas propuestas, que ya fueron ampliamente experimentadas y reportadas en otras investigaciones. Esta investigación se propone más bien problematizar el tratamiento escolar del concepto de límite en el contexto educativo uruguayo, explicitar las características de ese tratamiento y buscar explicaciones acerca de por qué el límite se introduce en educación secundaria de la manera en que se hace.

Se justifica la pertinencia de la presente investigación desde la perspectiva socioepistemológica a pesar de que ella se opone a una estructuración del Cálculo en base al concepto de límite. Se entiende necesario el análisis de los procesos que condujeron al actual tratamiento escolar del concepto de límite para comprender precisamente por qué se hace tan difícil la introducción de estos "otros" Cálculos en la vida escolar.

En el siguiente apartado describimos con detalle el planteamiento de la problemática específica de la investigación y proponemos un modelo para la búsqueda de respuestas a estos cuestionamientos.

1.3. Planteamiento del problema

1.3.1 – Hacia la conformación del objetivo y la pregunta de investigación

La Matemática Educativa se ocupa, entre otras cosas, de estudiar los fenómenos didácticos que se producen en el seno del sistema didáctico cuando los saberes matemáticos constituidos socialmente en ámbitos no escolares se introducen en el sistema de enseñanza. La estructura y funcionalidad del saber se modifican, influyendo a su vez en las relaciones que se establecen entre profesor y estudiante (Cantoral y Farfán, 2003). En particular, esta investigación se nutre de cuestionamientos en torno a los fenómenos didácticos producidos cuando el concepto de límite finito de funciones de variable real se introduce en el sistema de enseñanza.

Partimos de la hipótesis de que el tratamiento escolar del concepto de límite en el contexto educativo uruguayo presenta características comunes a las descriptas por Alanís (2000), Salinas et al. (2003) y Dolores (2007) y denominada "aproximación tradicional": énfasis en los aspectos formales y algorítmicos, tratamiento prácticamente exclusivo de aspectos intramatemáticos y consideración del concepto de límite como el único camino posible para estructurar el resto de los conceptos introducidos en el curso (como continuidad y derivada).

Ante este panorama nos proponemos buscar argumentos que nutran una discusión sobre el límite en el paradigma actual de enseñanza del Cálculo en la que se reconozca el papel de los escenarios socio-histórico culturales en los que se desarrolló dicho saber. Esto es, proponemos un estudio cuyo énfasis no esté en el límite como objeto preexistente, sino que más bien trate con los fenómenos de producción, adquisición y difusión de ese conocimiento matemático desde una perspectiva múltiple incorporando las dimensiones epistemológica, cognitiva y didáctica. Ello reconoce al hombre haciendo matemáticas en un escenario cultural e históricamente situado, y nos permite analizar, entonces, el por qué enseñamos hoy el límite de la manera como lo hacemos.

Un análisis de este tipo robustecería la discusión acerca de la enseñanza actual del límite, y en el marco de esta discusión, abriría la posibilidad de cuestionamientos en la comunidad escolar acerca de su tratamiento escolar, y de cómo y por qué los actores involucrados en la conformación de los programas deciden qué debemos enseñar y aprender de los conceptos del Cálculo, y del límite en particular. Buscamos una explicación acerca de cómo el saber matemático referido al límite de una función se volvió un saber institucionalizado; esto es, cómo se constituyó en un cuerpo de saber validado y aceptado social y culturalmente en los ámbitos científicos y escolares. En particular, nos interesa analizar cómo se produce dicha constitución al seno del contexto educativo uruguayo.

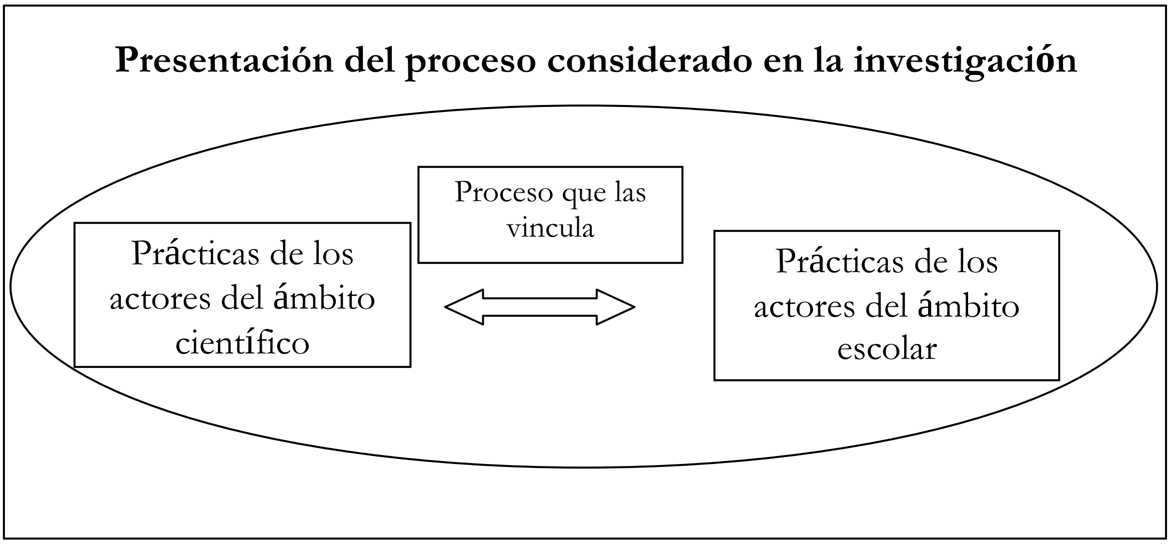
El objetivo central de la tesis consiste en analizar el proceso a través del cual el concepto de límite se ha constituido para explicitar las razones por las que se presenta en el ámbito escolar de la manera en que se hace actualmente. En el capítulo 4 explicamos que este proceso conforma lo que denominamos *proceso de institucionalización* del concepto de límite, y en el capítulo 5 llevamos adelante su análisis desde la perspectiva socioepistemológica.

La pregunta central del trabajo es: ¿por qué enseñamos hoy al concepto de límite de la forma en que lo hacemos?

1.3.2 – Hacia la conformación de las herramientas teóricas y metodológicas

Cuando hablamos de institucionalización, hacemos referencia a que un saber se legitima en una determinada institución. Podríamos pensar entonces en que el concepto de límite vive actualmente no sólo en la escuela o en ámbitos científicos, también está presente en otros ámbitos como los profesionales, o incluso de la vida cotidiana. Esto conduciría a analizar la institucionalización del concepto de límite en las instituciones propias de cada uno de esos ámbitos.

Sin embargo, nuestra pregunta de investigación nos conduce a concentrarnos en la institución escolar del concepto de límite, entendida tal cual se desarrolla en el apartado 3.2.1. Es por esto que responder la pregunta de investigación implica, por un lado, desentrañar cómo el concepto de límite se constituye como un saber validado, parte de un cuerpo ordenado de conocimientos social y culturalmente aceptados y ello implica analizar las prácticas inherentes a la evolución del concepto al seno de la comunidad científica matemática. Por otro lado, nos cuestionamos acerca de cómo las prácticas que norman el actuar de los actores del ámbito científico son vivenciadas por los actores del ámbito escolar, y cómo ello se refleja en las prácticas de dicha institución escolar. Resumimos esta propuesta en el esquema siguiente.



Esquema 1: Presentación del proceso considerado en la investigación

Llevar a cabo un estudio de este tipo desde una perspectiva socioepistemológica implica el análisis de las *prácticas sociales* que generan el conocimiento y norman su constitución.

Para ello es necesario reformular la componente epistemológica del sistema didáctico: deja de centrarse en el objeto en sí –concepto de límite– como un concepto matemático preestablecido para focalizarse en las prácticas que lo generan y determinan, en un contexto determinado.

Proponemos entonces la explicación de por qué se enseña el concepto de límite de la forma en que se hace actualmente a través del estudio de un proceso de institucionalización de dicho concepto. Si bien la palabra proceso puede sugerir la idea de observar algo en el transcurso del tiempo, en la investigación se propone un corte "transversal" del sistema en su conjunto, que no se caracterice necesariamente por etapas cronológicas sino que permita una explicación a través de las prácticas de los actores de cada ámbito. Desde esta perspectiva, un análisis de este tipo implica la conformación de un marco teórico y metodológico específico para cada ámbito, dado que en el ámbito científico pueden identificarse etapas de una evolución mientras en el ámbito escolar interesa más bien identificar los momentos que conviven simultáneamente y conforman la institucionalización del concepto en la escuela.

Con respecto al marco teórico, vemos necesaria la introducción de un nuevo modelo porque si bien en Matemática Educativa existen investigaciones que reconocen la presencia de procesos de institucionalización (García Torres y Cantoral, 2007 y Tuyub, 2008, entre otros), aún no se han desarrollado modelos teóricos que describan su naturaleza.

En cuanto a lo metodológico, por un lado, el modelo presentado por Montiel (2006) y desarrollado en el apartado 3.2.3 introduce a las *prácticas de referencia*, que son propias de cada ámbito y resultan del reflejo de cada paradigma, como las prácticas normadas por una determinada *práctica social*, en un sentido socioepistemológico y tal cual se describe en ese mismo apartado. Específicamente, el modelo metodológico de Buendía y Montiel (2009a y 2009b) permite explicar el tránsito entre las diferentes etapas que sufrió el concepto en su desarrollo al seno de la comunidad científica matemática, conformando una epistemología de prácticas. Así, otra de las hipótesis de trabajo es que la formalización y la generalización operarían como prácticas sociales en ese ámbito del proceso de institucionalización del concepto de límite. Según esta hipótesis, ambas prácticas estarían ejerciendo un rol normativo sobre la constitución del saber en el ámbito científico.

Por otro lado, para el análisis de cómo estas prácticas normaron también las decisiones que se han ido tomando en la matemática escolar hasta concluir que se debía aprender determinado concepto de límite, con determinado papel en la estructura del cálculo y de determinada manera, es necesario utilizar otro tipo de herramienta metodológica. Dado que en ese caso lo que interesa analizar es el discurso que los diferentes actores del sistema educativo elaboran sobre la problemática y cómo ese discurso influye sobre la institucionalización del concepto de límite, se utilizan aportes de la herramienta "Análisis Crítico del Discurso" introducida por Van Dijk (1999), entre otros.

Así, puede explicitarse cómo las prácticas específicas que se desarrollan en cada ámbito norman el actuar de los actores de cada uno de ellos, que tiene a su vez necesidades e intereses específicos.

Confiamos en que el análisis del proceso de institucionalización del concepto de límite considerando estos dos ámbitos arroje luz sobre las diferentes "fases" que transcurren durante dicho proceso. En el caso del ámbito científico, estas "fases" las denominaremos "etapas", sugiriendo que en cierta medida se pueden entender como parte de una evolución cronológica. Por otro lado, esta denominación no sería adecuada para el caso del ámbito escolar, por lo que preferimos hablar de los diferentes “momentos” del proceso.

Capítulo 2 – Estado del arte: el límite en Matemática Educativa

Consideramos necesaria una revisión de las investigaciones en Matemática Educativa relativas al concepto de límite para conocer las conclusiones a las que se ha arribado y desde qué perspectiva teórica y metodológica fue estudiado el tema dentro de la disciplina.

Se presentan los artículos organizados según la dimensión de la tríada didáctica en la cual se enfatiza cada uno: cognitiva, epistemológica o didáctica. Las mismas han logrado explicaciones acerca de por qué los estudiantes no aprenden el concepto, cuáles son los procesos cognitivos y didácticos relacionados con el aprendizaje del límite y cuáles son las posibles alternativas de abordaje para el concepto de límite. Más adelante se consideran los trabajos que hacen referencia al desarrollo socio-histórico del concepto al seno de la comunidad matemática.

2.1. Investigaciones que enfatizan la dimensión cognitiva

A partir del constructo teórico *imagen conceptual-definición conceptual*, Tall y Vinner (1981) y Vinner (1991) han desarrollado una teoría que explica cómo un individuo adquiere un conocimiento, en este caso, el concepto de límite. Los autores denominan *imagen conceptual* a toda la estructura cognitiva en la mente de un individuo asociada a un concepto dado: todas las figuras mentales (pueden ser representaciones visuales, impresiones o experiencias asociadas al concepto), propiedades y procesos asociados, conscientes o inconscientes. Es propia de cada individuo y se desarrolla a medida que éste se encuentra con nuevos estímulos. Sus múltiples aspectos no tienen por qué ser coherentes entre sí en todo momento. Por otra parte, cada estudiante tiene para cada concepto su propia *definición conceptual*: conjunto de palabras usadas para explicar lo que él entiende por el concepto. Puede o no coincidir con la *definición formal*, que es la aceptada por la comunidad matemática en un momento determinado.

Según este constructo, adquirir un concepto es precisamente formar una imagen conceptual para él. Cuando una parte de la imagen conceptual o de la definición conceptual de un individuo es evocada simultáneamente con otra contradictoria, se genera un *conflicto cognitivo.*

Vinner (1991) propone evitar conflictos cognitivos innecesarios, e insiste en que los conflictos cognitivos se planteen a los estudiantes sólo cuando sean necesarios para conducirlos a un nivel intelectual superior, y sólo si la probabilidad de que este salto ocurra sea alta.

Este marco les sirve a los autores para explicar cómo la educación tradicional refuerza ciertas concepciones erróneas presentes en las imágenes conceptuales de los estudiantes: la confusión del concepto de límite con el de continuidad o derivada, la falta de identificación de números enteros con su aproximación decimal infinita (0.99... periódico es visto como menor a 1) –conflicto analizado en Tall y Schwarzenberger (1978)-, la convicción de que una sucesión convergente se aproxima a su límite sin nunca alcanzarlo o de que el límite es el último término de la sucesión, entre otros.

Los autores reportan cómo los estudiantes fueron capaces de dar justificaciones correctas para el cálculo de algunos límites, aún brindando una definición conceptual incorrecta (Tall y Vinner (1981)): no utilizaron la definición sino su imagen conceptual. Esta conclusión es también reportada en Tall (1980), Cornu (1991) y Juter (2005). Sin embargo, para otro tipo de actividades como las que involucran la utilización de cuantificadores o la demostración de un teorema, una imagen conceptual fuerte no es suficiente, se precisa una definición conceptual adecuada.

Bajo la convicción de que quienes diseñan el currículum deben prestar especial atención a las dificultades que surgen de los conflictos -tanto concientes como inconcientes-, Tall y Schwarzenberger (1978) sostienen que el rol del profesor es decisivo para resolver la compleja situación que se presenta en el aprendizaje de los conceptos mencionados, incluso más que la elección del contenido programático o los textos a utilizar. Este planteamiento muestra el énfasis que estos autores imprimen a las dimensiones cognitiva y didáctica, dejando de lado a la epistemológica y social.

Tall (1980, 1992) presenta nuevos aportes para comprender la problemática: la relación entre el concepto de límite y el de infinito. Se detiene en la construcción del concepto infinito: potencial y actual, proceso en el cual se manifiestan diversos conflictos cognitivos. Hitt (2003) aborda también este conflicto con un énfasis particular en la dimensión epistemológica. Tall (1980) concluye que a pesar de que en varios niños existe la intuición primaria del infinito potencial, la matemática moderna en la universidad promueve la intuición secundaria del infinito actual de conjuntos, contrastando con el infinito potencial de los procesos de límite. Consideraciones acerca de la velocidad de acercamiento pueden conducir a la intuición de diferentes infinitos y la construcción de una aritmética con ellos. Por lo tanto, el concepto de infinito no precisa ser globalmente coherente y puede presentar factores conflictivos, que solo serán percibidos si se evocan simultáneamente.

Tall (1992) insiste en la importancia de enseñar procesos, más que productos, y propone un acercamiento construido en base a *raíces cognitivas*: conceptos familiares para los estudiantes que a la vez brinden una base para el desarrollo formal posterior. La definición de límite tal cual se presenta hoy en los cursos tradicionales de cálculo está alejada de las experiencias previas de los estudiantes, y en general de sus imágenes conceptuales. En su lugar Tall presenta a la "aproximación lineal local" como una raíz cognitiva adecuada para el cálculo.

También con énfasis en la dimensión cognitiva se enmarcan los trabajos de Dubinsky, cuyo grupo de trabajo desarrolló la teoría denominada APOS (actions, processes, objects, schemas). Dubinsky (2000) parte del supuesto de que la Matemática que se debe enseñar es un conjunto de ideas que el pensamiento individual y colectivo ha creado y se basa en la teoría constructivista de Piaget para explicar los procesos de enseñanza y aprendizaje. En el contexto de los procesos de asimilación y acomodación concibe la reconstrucción del conocimiento matemático: el individuo comienza manipulando objetos previamente construidos, física o mentalmente, para convertirlos en *acciones*, las acciones son interiorizadas para formar *procesos*, los cuales son encapsulados para formar *objetos*, que pueden a su vez estructurarse en *esquemas*, y así sucesivamente.

En el caso particular del concepto de límite, Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K., & Vidakovic, D. (1996) aplican esta teoría para explicar las dificultades que se presentan en su enseñanza. Plantean que uno de los grandes obstáculos en el aprendizaje del concepto es la consideración de que el límite no es nunca alcanzado, ya que es visto como un *proceso* de aproximación (y en el cual subyace la noción de infinito potencial) pero no como un *objeto* en sí mismo.

Los autores proponen que el *esquema* formado por dos *procesos* coordinados (cuando $x \to a$, $f(x) \to L$) se reconstruye para obtener el *proceso* que dice: si $0 < |x - a| < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$. Éste, que es a su vez un *proceso* mental consistente en ir de la hipótesis a la tesis, es encapsulado en un *objeto* que permite construir un esquema en un segundo nivel (para todo ε positivo, existe δ positivo tal que si $0 < |x - a| < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$). Esta breve descripción de lo que los autores denominan "descomposición genética" del concepto de límite explica la manera en que lo conceptualizan, como un proceso dinámico, diferenciándose en este sentido de la concepción tradicional.

Puede apreciarse que todas las investigaciones que enfatizan la dimensión cognitiva del concepto de límite no cuestionan su pertinencia en el currículum como pilar fundamental para el aprendizaje del cálculo. Al igual que otras investigaciones que reportaremos a continuación (que enfatizan la dimensión epistemológica, o didáctica) asumen que en la enseñanza del cálculo es imprescindible el tratamiento de la definición del concepto de limite.

2.2 Investigaciones que enfatizan la dimensión epistemológica

Cornu (1991) afirma que la noción de limite fue introducida en la comunidad matemática para resolver tres tipos de problemas: geométricos (cálculo de áreas con método de exhaución, por ejemplo), convergencia de suma de series, y de diferenciación (relación entre dos cantidades que simultáneamente tienden a cero). Detecta, en relación a estos problemas, cuatro grandes obstáculos epistemológicos: la falta de vínculo entre el aspecto geométrico y el numérico (haciendo especial referencia a problemas clásicos de la Matemática Griega), la noción de las cantidades infinitamente pequeñas o grandes (¿existen cantidades que tengan un estado intermedio entre cero y lo que no es cero?), los aspectos metafísicos de la noción de límite, vinculados con los del infinito, y el debate sobre si el límite es o no alcanzado.

En Cornu (1986) se reportan otros obstáculos epistemológicos que no provienen estrictamente de la noción de límite matemático pero que están relacionados: la idea de que una suma infinita debe ser infinita, la idea de que toda convergencia es monótona y las ideas creadas por las concepciones espontáneas o por el empleo coloquial de la palabra 'límite' (generalmente como algo que no se puede alcanzar, aproximación sin sobrepasar o simplemente quedarse alejado, o incluso semejanza sin ninguna idea de variación, como en 'este azul tiende a violeta').

Según Cornu estos obstáculos no deben ser evitados en la enseñanza, sino que sirven para reconstruir los conceptos. Cornu (1991) plantea que para que los estudiantes comprendan la definición de límite no es suficiente una exposición clara y ordenada lógicamente del mismo por parte del profesor sino que es necesario hacer que los estudiantes sean concientes de la complejidad del concepto y permitir que reflexionen sobre sus propias ideas y sobre los obstáculos epistemológicos que se vayan presentando.

Sierspinka (1985, 1987) también investiga sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje del concepto de límite haciendo énfasis en aspectos epistemológicos, pero se centra en la definición topológica del concepto, a diferencia de Cornu, quien se centra en su definición numérica. Tomando también como marco teórico la noción de obstáculo epistemológico de Bachelard, afirma que para que se produzca aprendizaje es necesario superar los obstáculos epistemológicos, para lo cual se precisa evocar conflictos cognitivos.

Otra característica de esta teoría es que los obstáculos epistemológicos se repiten en la filogénesis y en la ontogénesis del concepto, lo que permite que puedan ser estudiados tanto en el desarrollo histórico del pensamiento científico como en la práctica educativa actual. Es por eso que Sierpinska brinda importancia a la integración del estudio histórico con el experimental. Concibe que para cada concepto matemático es posible determinar las causas de los problemas en su adquisición, que son específicas del concepto y cuya toma de conciencia es imprescindible para que se produzca el aprendizaje.

A partir de una experiencia realizada con estudiantes la autora presenta los obstáculos epistemológicos descubiertos. En un primer grupo denominado “Horror Infiniti” reúne los relativos al concepto del infinito en sí, al problema del pasaje al límite -rechazando el estatus de operación matemática-, razonamientos con falta de rigor, excesivo rigor o falso rigor, como la inducción incompleta, obstáculos de tipo algebraico –usar los mismos métodos para cantidades finitas que para infinitas–, el transferir propiedades de los términos de una sucesión convergente a su límite –típico en la convergencia de funciones de Cauchy– y el obstáculo consistente en asociar el pasaje al límite como un movimiento físico o aproximación indefinida, mientras que la noción de límite en la teoría formal es concebida de manera estática.

En un segundo grupo la autora reúne los obstáculos relativos al concepto de función, comparando las producciones de los estudiantes con las concepciones de D’Alembert, de Cauchy y de Weierstrass. Más adelante menciona los obstáculos relativos a la concepción geométrica de la noción de límite. En cuarto lugar se refiere a los obstáculos lógicos, en particular al uso adecuado de los cuantificadores: no surge como una necesidad natural el utilizarlos para resolver los problemas propuestos. Por último, plantea el obstáculo referido al símbolo de la operación de pasaje al límite. Estos dos últimos grupos de obstáculos pueden identificarse con la etapa de búsqueda de fundamentos y formalización en el desarrollo histórico del concepto.

Artigue (1998) reporta las dificultades de los estudiantes con el campo conceptual del Análisis. Una de las categorías presentadas es la de las dificultades ligadas a la conceptualización de la noción de límite y a su dominio técnico. Además de describir las dificultades ya reportadas en este escrito (Cornu, 1986 y 1991; Sierspinka, 1985 y 1987; Dubinsky, 2000), menciona la complejidad lógica de la definición formal del concepto y el hecho de que se necesita invertir la dirección del proceso función que va de la variable x a la imagen $f(x)$. Esta es una dimensión epistemológica del concepto cuya transposición didáctica en la enseñaza no es evidente.

En Hitt (2003) se reporta parte de una investigación sobre el concepto de funciones, límites y continuidad. Se hace referencia especialmente a las fases relativas al concepto de límite y se discute sobre la complejidad del concepto de infinito desde su doble perspectiva: *potencial* (posibilidad de ir más lejos, continuación indefinida) y *actual* (toma de conciencia simultánea de todos los elementos de un conjunto). Después de un breve desarrollo histórico, se concluye que la comunidad matemática sobrepasó un obstáculo epistemológico (en el sentido en que lo plantea Bachelard). Este obstáculo tuvo su origen en las paradojas de Zenón, que permanecieron sin resolverse durante muchos siglos, y se vio reforzado más recientemente en la utilización del infinito como proceso que en "el límite" mantiene las propiedades relativas a lo finito (especialmente la consideración de Cauchy de que la continuidad de los términos de una sucesión de funciones se traslada al límite). Para resolverlo fue necesario que el infinito actual fuera admitido en matemática como un concepto definido.

2.3 Investigaciones que enfatizan la dimensión didáctica

Bokhari y Yushau (2006) plantean una reformulación de la rigurosa definición de límite que tradicionalmente se enseña en los cursos introductorios de Cálculo, y proponen una similar a la presentada por Tall (1992): la aproximación local (L-ε).

Formalmente,

Para un $\varepsilon>0$ dado, un número $y = L$ es denominado aproximación local (L-ε) de una función f en un punto a si existe un intervalo P que contiene al punto a tal que

$$si\ x \in P \quad (x \neq a) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Los autores proponen interpretar una aproximación local (L,ε) de una función f en un punto dado a como una aproximación constante de f por L cerca de a.

L es límite de una función en un punto a si para todo ε, y = L es una aproximación local (L,ε) de f en a

Muestran entonces cómo pueden resolverse problemas tradicionales con esta definición, remarcando las ventajas encontradas en cuanto a la simplificación en los cálculos.

Blázquez y Ortega (2002) desarrollan una definición del concepto de límite denominada *aproximación óptima*:

El límite de la función f en x = a es L si para cualquier aproximación K de L, K ≠ L, existe una aproximación H de a, H ≠ a, tal que las imágenes de todos los puntos que están más cerca de a que H están más próximas a L que a K.

Blázquez, S. y Ortega,T. (2006, pp. 195).

Esta definición se basa en la presentada por D'Alembert, y prioriza el aspecto dinámico del concepto en términos de aproximación, que según los autores constituye el paso previo a la definición estática y formal de la definición de Weierstrass.

Bucari, Bertero y Trípoli (2007) presentan otro abordaje alternativo al tradicional para un curso de Cálculo. El mismo tiene por objetivo acercar a los estudiantes a los problemas que le dieron origen, para lo cual utilizan el análisis desarrollado en Bertero y Trípoli (2006). Así, se propone comenzar con una secuencia de contenidos fundada en torno al concepto de variación promedio e instantánea, que conduce al concepto de derivada, sin jerarquizarse el concepto de límite como una herramienta previa. Más adelante, completado el estudio de las reglas de derivación, se introduce el concepto de límite, introduciéndolo como el "valor esperado" de cierta cantidad variable. Esta propuesta representa una excepción respecto de las restantes, dado que no se le atribuye al concepto de límite un rol central en la enseñanza del cálculo.

2.4 Investigaciones en torno al desarrollo socio histórico del concepto

En Blázquez y Ortega (2002) se realiza una revisión histórica de la evolución del concepto de límite desde la época clásica hasta la formulación métrica debida a Weierstrass. Entendiendo que esta definición métrica es demasiado formalista para los alumnos de bachillerato de ciencias sociales, presentan una definición alternativa inspirada en la presentada por D'Alembert. Conservando el rigor, esta definición introduce el concepto como un proceso de aproximación, presentando la ventaja de ser menos formalista que la métrica, más dinámica y por ello más apropiada para dichos alumnos.

Los autores distinguen cuatro etapas en la evolución histórica del concepto de límite. La primera se extiende desde Eudoxo de Cnido (S. IV a.C.) al siglo XVII y se caracteriza por los métodos infinitesimales (las aportaciones de Newton y Leibniz se encuentran dentro de dicho período). La segunda se desarrolla entre la segunda mitad del siglo XVII y el siglo XVIII y se caracteriza por la transformación de los fundamentos del análisis infinitesimal. Los autores destacan en esta época los trabajos de Euler, D'Alembert y Lagrange. La tercera etapa se desarrolla entre el siglo XIX y principios del XX, y se caracteriza por la aritmetización del análisis. La cuarta etapa transcurre en el siglo XX, caracterizada por la generalización del concepto a otros espacios, concibiendo al límite desde su dimensión topológica.

Bagni (2005) centra su estudio sobre el desarrollo histórico del concepto de límite en el análisis de sus registros de representación, y en particular en la transición del carácter dinámico al estático. Al igual que Hitt (2003) hace referencia a la distinción entre infinito potencial y actual. Menciona que si bien esta distinción era ya reconocida por los antiguos griegos, y que puede relacionarse el principio de exhausión de Eudoxo con algunas ideas del infinito actual, ellos concebían sólo al potencial como el verdadero infinito matemático. Bagni sostiene que en el argumento de exhausión intervienen los registros de representación verbal y visual, con vínculos con otros (espacial, temporal). Afirma que a pesar de que el principio de exhausión puede referirse a una situación infinitesimal, plantear un paralelismo con el concepto actual de límite es una noción histórica y epistemológicamente débil. Ello respondería a una visión según la cual se interpretan los conceptos del pasado en términos de los modernos, pero no considera a la matemática como una componente de la cultura correspondiente a una sociedad determinada.

La oposición implícita entre ambos tipos de infinito se hizo evidente recién después del nacimiento del Cálculo, con Newton y Leibniz. Así, Bagni propone un recorrido entre las concordancias y discrepancias entre ambas maneras de concebir al infinito según diversos matemáticos: Leibniz, Robinson, Euler, d'Alembert, Rolle y Berkeley. Una de las preguntas que guió la discusión fue la existencia y el tratamiento de las cantidades infinitas e infinitesimales. Newton y Leibniz, así como sus antecesores, lograron muchos resultados importantes para el desarrollo del Cálculo infinitesimal basándose en "cantidades evanescentes" o "infinitésimos", cantidades menores que cualquiera dada pero distintos de cero. Según Bagni (2005), las críticas de sus sucesores a este argumento confuso fueron las que promovieron la formalización del concepto de límite.

Por último, el autor expone el desarrollo del concepto de límite y la definición formal desde el siglo XVII. Las concepciones de Wallis, Mengoli, Gregory, Newton, Gregory of St. Vincent y Vitali eran generalmente relacionadas con sucesiones y series, y tenían en común el considerar al límite como una aproximación que no se alcanza, concepción errónea bastamente reportada como obstáculo epistemológico o conflicto cognitivo en diferentes experiencias con estudiantes durante el presente estado del arte (Cornu, 1991; Sierpinska, 1985; Tall y Shwarzenberger, 1978; Tall y Vinner, 1981; Cottrill et al., 1996). Encontramos en el trabajo de Bagni la constatación de que también en el desarrollo histórico, el *proceso* de llegar al límite se trabaja antes que el concepto de límite como *objeto*.

Estas concepciones comparten además su forma de expresión: principalmente verbal, incluida la concepción de Cauchy. El autor destaca que en la obra de Cauchy existen indicios de considerar al límite como un objeto y no sólo como el resultado de un proceso en las definiciones de número irracional y de superficie de círculo:

"... un nombre irrationnel est la limite des diverses fractions qui en fournissent des valeurs de plus en plus approchées. En géométrie, la surface du cercle est la limite vers laquelle convergent les surfaces des polygones inscrits, tandis que le nombre de leurs côtés croit de plus en plus... "

Cauchy (1821, p. 4)

Es recién con Weierstrass (1815-1897) que se introduce el uso de los registros de representación simbólica, con la definición ε-δ[7]. Weierstrass realiza un esfuerzo por evitar el uso de la expresión "la variable se aproxima al límite" porque sugería –ambiguas- ideas de tiempo y movimiento. Esto provocó un cambio entre la idea dinámica de límite (como un proceso) hacia la idea estática de límite (como un objeto).

Otro punto de vista del desarrollo histórico del concepto lo podemos encontrar en la tesis presentada por Bertero y Trípoli (2006), cuyo objetivo es analizar los trabajos del matemático Abraham Robinson. Este matemático propone, a finales de los años 60, una teoría –denominada *teoría de los hiperreales*– en la cual el sistema numérico real puede ampliarse a los números infinitesimales e infinitamente grandes. Esto daría un fundamento matemático formal a la teoría de los infinitesimales utilizada en los inicios del cálculo y que hasta ahora había sido rechazada por su falta de fundamento.

[7] Nos referimos a la definición propuesta por Weierstrass, que actualmente se formula de la siguiente manera: $\lim_{x\to a} f(x) = b$ si y sólo si para todo real $\varepsilon > 0$, existe un real $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta$ entonces $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Para ello, las autoras analizan la evolución del concepto de límite a lo largo de la historia, con el fin de resaltar la importancia de los números infinitesimales en el desarrollo del cálculo. Distinguen tres etapas: el período antiguo (Antigua Grecia: siglo II a V a.C.), el período moderno (siglo XVII) y el período contemporáneo (siglo XIX). En el primer período distinguen los trabajos de Zenón, Aristóteles, Eudoxo de Cnido y Arquímedes. En el segundo período se dedican principalmente a los trabajos de Newton y Leibniz, así como a las críticas de Berkeley y a las definiciones propuestas por Lagrange y D'Alembert. En el tercer período comparan los desarrollos de Cauchy y Weierstrass.

Otra investigación interesante en este sentido es la de Aizpuru y Pérez-Fernández (1999), dedicada específicamente a la obra de Cauchy. En ella se analiza el contenido de su obra y el contexto en la que fue escrita. Los autores sostienen que el objetivo que impulsó a Cauchy a escribir su obra era su preocupación por la debilidad lógica de los fundamentos del Cálculo. En el apartado 5.5.1 desarrollamos específicamente los aspectos de dicha investigación vinculados al concepto de límite.

Por último, describimos la investigación de Juter (2006) que compara el desarrollo cognitivo de estudiantes en una experiencia particular con el desarrollo histórico del concepto de límite. Concluye que efectivamente existen ciertas semejanzas, como lo son el problema del rigor y el de si el límite es alcanzado o no por las imágenes de la variable. Sólo algunos de los estudiantes presentaron un desarrollo en su pensamiento similar al que se dio en el desarrollo histórico de la humanidad respecto al concepto de límite. Esto es, que en un principio eran capaces de resolver tareas antes de poder explicar la teoría –etapas 1 y 2 según la descripción de Blázquez y Ortega (2002)-, pero después la teoría se fue aclarando para ellos –etapa 3-. En general, la definición de límite representó un problema durante todo el curso para muchos de los estudiantes. Sólo cuatro alumnos fueron capaces de explicar el rol de los cuantificadores en la definición formal, lo que puede compararse a la dificultad que tuvieron los matemáticos a lo largo de la historia para llegar a tal formulación.

La autora plantea la necesidad de proponer a los alumnos problemas que no se puedan resolver sin la aplicación de la definición formal para que encuentren la necesidad de aprenderla. En esta investigación también observamos la consideración de la enseñanza de la definición del concepto de límite como un item ineludible para la enseñanza del cálculo.

2.5 Reflexiones

Las investigaciones reportadas permiten explicar, cada una desde su perspectiva particular, algunas de las interrogantes que se han planteado en Matemática Educativa en torno al aprendizaje y enseñanza del concepto de límite.

En la experiencia realizada con estudiantes y reportada en el apartado 1.2, una de las conclusiones a las que se arribó fue que la mayoría de las actividades propuestas eran resueltas por los estudiantes sin utilizar la definición formal, sino utilizando exclusivamente su imagen conceptual. Aquellos estudiantes que no lograron conceptualizar la definición ε-δ no respondieron correctamente a las últimas dos actividades, una en la que debían reproducir la definición y otra que requería completar la demostración del teorema de conservación del signo para una función de dominio real. Esto mismo se reporta en Tall (1980) y Tall y Vinner (1981), entre otros.

La idea de "conflicto cognitivo" introducida por Tall y Vinner (1981) permitiría además describir la influencia de las críticas a los trabajos de Newton y Leibniz y de sus antecesores sobre el desarrollo posterior del concepto, en el que se enfatizaron aspectos formales. Por otro lado, la mayoría de las investigaciones analizadas señalan que las aproximaciones que tradicionalmente se presentan actualmente en la escuela están teñidas de un formalismo excesivo que no permite la construcción de significados que den sentido al conocimiento que se está construyendo, y dan cuenta del fracaso al que han conducido. Precisamente uno de los cuestionamientos de nuestra investigación es si puede pensarse que esa exigencia de formalización que vivió la comunidad matemática se trasladó, en algún sentido, a las prácticas escolares.

Por otra parte, es importante señalar cómo los obstáculos epistemológicos reportados por Cornu (1986, 1991) y Sierpinska (1985, 1987) se presentaron también en el desarrollo histórico del concepto: la noción de las cantidades infinitamente pequeñas con un estatus intermedio entre cero y lo que no es cero, la confusión entre monotonía y convergencia, la relación con el concepto de infinito, la creencia de que el límite no puede ser alcanzado, entre otros.

Sin embargo, en las investigaciones reportadas puede apreciarse cómo el énfasis en las dimensiones cognitiva y didáctica, dejando de lado la epistemológica y la social, puede conducir a consideraciones "ingenuas". Ejemplo de ello es el planteo de Tall y Schwarzenberger (1978) según el cual los problemas relacionados al aprendizaje y enseñanza del concepto de límite se podrían resolver con "profesores sensibles". Creemos necesario un rediseño del discurso matemático escolar que no sólo atienda al cómo enseñar, sino también el qué enseñar, por qué y para qué, basado en un análisis de las prácticas sociales que dieron origen al concepto, así como las que actualmente se desarrollan en el ámbito escolar.

La mayoría de las investigaciones reportadas se centran en cómo enseñar el concepto de límite, o cuáles son las dificultades cognitivas en su aprendizaje, bajo el supuesto de que el límite debe estar presente en el discurso matemático. Asumen que el aprendizaje del cálculo implica ineludiblemente el aprendizaje de la definición del concepto de límite, sin cuestionarse por la pertinencia de otro tipo de abordajes.

Es decir, estas investigaciones no se cuestionan acerca de por qué se trabaja en el aula el concepto de límite de la manera en que se hace, cuáles fueron las demandas sociales, intereses, prácticas que condujeron a que se estructurara una determinada concepción –y no otra- y a la decisión de que esa fuera la concepción que se difundiría. Estas investigaciones no brindan explicaciones de por qué el conocimiento se construye de la manera en que se construye, se lo asume como un conocimiento preexistente al sujeto que aprende y construye conocimiento. Es decir, no se han realizado investigaciones referentes al proceso de institucionalización escolar del límite.

Dado que las investigaciones descriptas no logran explicaciones acerca de tal constitución, se entiende necesaria la conformación de un aparato teórico y metodológico que nos permita realizar este análisis. Dedicamos el siguiente apartado a una revisión de aproximaciones teóricas que permitirán conformar dicho aparato.

Capítulo 3 – Estado del arte: la institucionalización en la investigación en Matemática Educativa

Este capítulo lo dedicaremos a una revisión de las teorías que se han venido desarrollando respecto de la institucionalización, de un saber o de prácticas, específicamente en el contexto de la Matemática Educativa.

Presentamos en primer lugar la teoría de Transposición Didáctica desarrollada por Chevallard (1991). La misma brinda importantes herramientas para entender procesos inherentes al sistema educativo en su conjunto, y específicamente la transición del saber entre los ámbitos científico y escolar, mediados por los actores de lo que él denomina noósfera.

En segundo lugar presentamos algunos aportes relativos a la institucionalización y los procesos de institucionalización. En este apartado no solamente se consideran estudios propios de la Matemática Educativa: por tratarse de un tema con múltiples componentes sociales vimos necesario considerar aportes de las ciencias sociales en general. De esa forma logramos una descripción de la institucionalización y los procesos de institucionalización, entendidos desde diferentes marcos teóricos.

En ese apartado discutimos los aportes que desde la sociología del conocimiento brindan Berger y Luckmann (2001), así como consideraciones generales de Frigerio, G., Poggi; M, Tiramonti, G. Aguerrondo, I. (1994). A continuación presentamos teorías propias de la Matemática Educativa que utilizan a la institucionalización o a los procesos de institucionalización como una herramienta para explicar algunos de los fenómenos que estudian.

3.1. Transposición Didáctica como explicación de la transición del saber entre diferentes ámbitos

La transposición didáctica y el concepto de noósfera, introducidos por Chevallard a principios de la década del ’80, son de capital importancia para comprender algunos de los procesos inherentes a la conformación del discurso escolar actual en torno al concepto de límite.

Chevallard (1991) parte del reconocimiento de que todo proyecto social educativo identifica y designa determinados saberes como contenidos a enseñar. Esta designación es explícita a través de los programas, pero también implícita a través de la tradición evolutiva de la interpretación de los mismos. Considera que en general los saberes designados como contenidos a enseñar preexisten al movimiento que los designa, pero en ocasiones son creaciones didácticas justificadas por las necesidades de la enseñanza.

La ***transposición didáctica*** se refiere al conjunto de transformaciones adaptativas que sufre un saber desde que es designado como saber a enseñar hasta que se convierte en un objeto de enseñanza. Explica el tránsito del saber sabio al saber susceptible de ser enseñado, tránsito que ocurre en lo que el autor denomina ***noósfera***: el entorno del sistema de enseñanza, conformado por los representantes del sistema didáctico (docentes) y los representantes de la sociedad (padres, especialistas de la disciplina, autoridades políticas). "Allí se produce todo conflicto entre sistema y entorno y allí encuentra [la transposición didáctica] su lugar privilegiado de expresión" (Chevallard, 1991, p. 34).

En la comunidad matemática, como actores de la noósfera, se produce la primera etapa de la transposición didáctica: la transición del saber sabio al saber a enseñar. En esta etapa se produce, por un lado, lo que Chevallard denomina la *desincretización* del saber. En este proceso el saber es desprovisto de las explicaciones, usos o instrumentos específicos de una cultura y de una época determinada con los cuales está originalmente ligado; resulta así un saber atemporal y acultural. Por otro lado, se produce una *despersonalización* del saber, es decir, se le desasocia de las problemáticas y situaciones originales que le dan sentido y razón de ser. Pierde el contacto con el trabajo intelectual del creador y los problemas, situaciones y significados que le dieron origen, a través de este proceso el saber queda desprovisto de su génesis epistemológica, reduciéndose a un conjunto de definiciones, axiomas y teoremas que presentan sólo el resultado final de un –posiblemente largo- proceso de conjeturas y significados originales. Este proceso se produce a la interna misma de la comunidad científica, a medida que el conocimiento es compartido.

En una segunda etapa el saber es transformado con el fin de atender a las necesidades específicas de una institución educativa. Se produce entonces la *programabilidad* de la adquisición del saber, que es la manipulación del conocimiento original para secuenciarlo de manera acorde con los tiempos escolares. Este proceso está mediado por la noósfera: sus miembros son quienes toman las decisiones sobre qué contenidos deben integrar el currículum formal y cómo debe ser estructurado.

Una tercera etapa se produce a la interna de la tríada saber-profesor-estudiante, es la transición del saber a enseñar al saber enseñado y está influenciada por las características propias del ámbito en el que se encuentra dicha tríada. Esa transmisión del saber supone, por un lado, la *publicidad del saber*, en el sentido de hacerlo público: definirlo explícitamente.

Por otro lado, la transmisión también supone el *control social de los aprendizajes*, proceso que autoriza la certificación de los conocimientos expertos. En esta etapa juegan un papel fundamental los docentes, así como los libros de texto. Ambos actores, los docentes y los autores de libros de texto, transmitirán a los estudiantes una determinada concepción de la Matemática y su enseñanza, así como los aspectos epistemológicos de los contenidos designados como saberes a ser enseñados.

Según Chevallard (1991), en la transposición didáctica, esos procesos o requisitos (desincretización del saber, despersonalización del saber, programabilidad de la adquisición del saber, publicidad del saber y control social de los aprendizajes) "se encuentran tendencialmente satisfechos a través de un proceso de "*preparación*" *didáctica* que he denominado la *puesta en texto del saber*." (p. 69).

Por un lado, la textualización del saber conduce a la delimitación de saberes parciales, expresados en discursos supuestamente autónomos, que produce precisamente su desincretización. Chevallard (1991) sostiene que esta autonomía es ficticia ya que no es posible delimitar un mismo saber en saberes parciales independientes unos de otros.

Por otro lado, la textualización conduce a una disociación entre el pensamiento y sus producciones discursivas, que es lo que describimos como despersonalización. La textualización, como forma de publicitar el saber, es otra forma de despersonalización; los libros de texto desproveen al saber de las problemáticas y situaciones que le dieron origen y sentido.

"Los libros de texto posibilitan además el control social de los aprendizajes, dado que tienen un reconocimiento social y cultural importante, los libros funcionan como una autoridad moral con un estatus de verdad en cuanto al contenido que tratan y a la forma de cómo plantean problemas o aplican conceptos." (Castañeda, 2004, p. 16). La textualización al publicitar el saber, estipula una cierta concepción de qué significa "saber", lo que posibilita un control social de los aprendizajes. Los textos ponen en evidencia las concepciones epistemológicas de sus autores e incluso de la comunidad matemática a la cual pertenecen.

Por último, Chevallard (1991) critica una afirmación usual respecto de los libros de texto: *el texto tiene un principio y procede secuencialmente*. En primer lugar, todo texto precisa de prerrequisitos, aunque no sean objetos de saber explícitos, aunque sea nociones implícitas como puede ser el proceso de abstraer o de extraer conclusiones. En segundo lugar, sostiene que un saber no puede ser explicado secuencialmente en la forma en que fue desarrollado: "es muy necesario que el proceso de aprendizaje sea *secuencial*: pero el orden de aprendizaje no es isomorfo en relación con el orden de exposición del saber; el aprendizaje del saber no es el calco del texto del saber" (Chevallard, 1991, p. 74).

A pesar de la importancia de la transposición didáctica y la noósfera para explicar algunos procesos referidos a la conformación del discurso escolar actual del concepto de límite, no parecen dar cuenta de cómo ahí se entretejen las diferentes prácticas de sus actores. Cada uno de los grupos considerados en este trabajo –las comunidades científicas de cada época en el desarrollo histórico del concepto de límite, la comunidad de docentes del sistema educativo uruguayo, las autoridades que escriben los programas, dan normativas y deciden qué libros de texto recomendar, los autores de libros de texto-, tiene su actuar normado por sus propias prácticas sociales, aquellas que conducen a la decisión de que un determinado conocimiento se convierta en un saber a enseñar. Por otra parte, también está presente la naturaleza social del propio saber en cuestión y que discutimos en las secciones anteriores: reconocer que el límite es producto del quehacer de grupos humanos específicos cuyo actuar es también normado por sus propias prácticas sociales.

Castañeda (2006, p. 257) considera que "la formulación del discurso escolar del cálculo no sólo proviene de la transposición didáctica del saber erudito, sino que involucra otros factores ajenos a la noosfera para la selección y conformación de un saber a enseñar; entre ellas, están las prácticas socialmente compartidas que se toman en cuenta para adaptar un saber a su versión didáctica." Asumiendo esta aproximación, los procesos de institucionalización que se proponen y estudian en esta investigación buscan reconocer la constitución social del saber normada por las prácticas que le dieron origen y las prácticas socialmente compartidas al seno de los grupos de actores en la noosfera.

Como vimos, la transposición didáctica permite analizar la transposición del saber, pero para analizar cómo evolucionan las *prácticas* y cómo ello norma el desarrollo del concepto dentro de los ámbitos científicos y escolares, se hace necesario la consideración de una aproximación teórica que entienda a la construcción del conocimiento matemático como un proceso social, y que desde esta perspectiva resignifique a las demás dimensiones del sistema didáctico: la cognitiva, la didáctica y la epistemológica. Esa aproximación teórica es la socioepistemología, de la cual iremos dando cuenta en apartados posteriores.

3.2. Institucionalización desde diferentes marcos teóricos

En la búsqueda por responder ¿por qué es posible que un determinado concepto se construya como se construye?, nos encontramos con la necesidad de considerar dominios científicos extramatemáticos donde las prácticas de referencia se desarrollan, resignificando el conocimiento matemático (Cordero, 2006). Al considerarlos, es posible reconocer que la construcción social del conocimiento no depende exclusivamente de uno o varios individuos, sino que se da a través de las *instituciones* en las que se desarrolla, lo que nos conduce a la necesidad de estudiar qué se entiende por *institución* e *institucionalización*.

3.2.1. Institución e institucionalización

El término *institución* tiene diferentes acepciones: "forma social establecida que remite a lo reglado, lo normado; sinónimo de establecimiento u organización; procesos por los cuales las sociedades e individuos se organizan; o incluso proceso de institucionalización, resultante del interjuego y tensión entre lo instituido y lo instituyente" (Frigerio, G., Poggi; M, Tiramonti, G. Aguerrondo, I., 1994, p. 34). Pueden apreciarse cómo algunas acepciones destacan su aspecto estático y otras su aspecto dinámico.

Algunas investigaciones socioepistemológicas (García-Torres y Cantoral, 2007; Tuyub, 2008), consideran una concepción de institución que tiene orígenes en la sociología del conocimiento. Según Berger y Luckmann (2001), las instituciones son entidades que posibilitan la conservación de saberes en las sociedades a través del tiempo, como formas organizadas que establecen roles a los participantes, en los cuales existen prescripciones (restricciones) y licencias. Son formas de actuar que norman la conducta de los individuos de una sociedad y se vuelven externas al individuo (despersonalizadas) por los procesos institucionales. Implican *historicidad* en el sentido de que son el producto de un proceso de construcción al seno de una historia compartida a través del tiempo, y *control*: las instituciones ejercen en definitiva un control social sobre el comportamiento humano, al establecer pautas definidas que lo canalizan en una dirección determinada en oposición a muchas otras que podrían darse teóricamente. De ellas se desprenden mecanismos de sanción establecidos para el sostén de la institución.

En este sentido se podrían considerar como ejemplos de institución a la vestimenta, un género literario, una religión, la matemática misma o incluso un profesor. En particular, Cordero (2006) retoma la concepción de Durkheim (1982): reconoce al saber como un producto material continuo, y señala que dicho "continuo" está garantizado "porque hay ciertas formas de actuar impuestas o sugeridas *desde afuera* del individuo" (Cordero, 2006, p. 271). Tales formas, que son encarnadas en sucesos individuales, son las *instituciones*.

Los actores de toda institución desarrollan prácticas que la caracterizan, y al legitimarse en un contexto y grupo social específicos, resultan en normas y visiones determinadas. Así, las prácticas cumplen una función normativa, permitiendo explicar por qué los actores de esa institución actúan de determinada manera.

Según Berger y Luckmann (2001) una institución es toda tipificación recíproca de acciones habitualizadas por tipos de actores. A su vez, en relación a lo que denominan proceso de habituación, sostienen que "todo acto que se repite con frecuencia, crea una pauta que luego puede reproducirse con economía de esfuerzos, y que *ipso facto* es aprehendida como pauta por el que lo ejecuta. Además, la habituación implica que la acción de que se trata puede volver a ejecutarse en el futuro de la misma manera y con idéntica economía de esfuerzos" (Berger y Luckman, 2001, p.74). Estos procesos anteceden a toda institucionalización, para que se produzca la clase de tipificación recíproca debe existir una situación social continua en la que las acciones de dos o mas individuos se entrelacen, se convierten en instituciones históricas y de esto adquirir la objetividad. Dado que tipificar implica ajustar varias cosas semejantes bajo una norma común, este concepto de institución explicita la importancia de la consideración de las acciones (prácticas humanas) que por determinada razón se tornan habituales para un determinado grupo en un contexto específico.

Desde esta visión, "la *institucionalización* aparece cada vez que se da una tipificación recíproca de acciones habitualizadas por tipos de actores" (Berger y Luckmann, 2001, p. 76).

Si bien existen diferentes tipos de instituciones, en esta investigación nos interesa reconocer el papel de la escuela como una institución. Interesa entender a la escuela como una institución para analizar cómo allí se institucionaliza el concepto de límite, permitiendo explicar por qué se lo enseña de la forma en que se lo enseña. Entendemos que la escuela es efectivamente una entidad que permite la conservación de saberes a través del tiempo, a la vez que las prácticas que en ella se desarrollan imponen cierta forma de actuar externa a los individuos.

El término *institucionalización*, considerado en este sentido amplio, se puede entender de diferentes maneras dependiendo del contexto en el que se produce. Nos interesa presentar algunas de las formas que este término ha tomado en diferentes teorías de la Matemática Educativa.

3.2.2. Institucionalización en la Teoría de Situaciones Didácticas

Durante la década del ’70 comienza a desarrollarse, especialmente en Francia, lo que se denomina “didáctica fundamental”. Constituye un paradigma de la didáctica de la matemática que provocó una ampliación de la problemática su problemática de estudio, incluyendo el conocimiento matemático entre sus objetos de estudio. Este paradigma condujo a un cuestionamiento sobre la transparencia del conocimiento matemático y a su problematización (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997). La teoría de situaciones didácticas, de Guy Brousseau, es el primer ejemplo de una teoría didáctica en el marco de la didáctica fundamental, y se ha visto robustecida por los aportes que señaláramos de Chevallard respecto de la Transposición Didáctica.

Esta teoría sostiene que “saber matemáticas” implica ocuparse –y resolver- problemas, lo que centra la actividad de aula en el estudiante. Se propone que el estudiante intervenga en la actividad matemática: “que formule enunciados e intente probarlos, que construya modelos, lenguajes, conceptos y teorías, que los ponga a prueba e intercambie con otros, que reconozca los que están conformes con la cultura matemática y que tome los que le son útiles para continuar su actividad.” (Chevallard et al., 1997). Esta teoría propone que para que esto se lleve a cabo el docente debe diseñar y proponer a sus estudiantes lo que Brousseau (1997) denomina “situaciones didácticas”, situaciones que refieran a genuinos problemas matemáticos, en las cuales el conocimiento a enseñar aparezca como la solución óptima a dichos problemas y a su vez que ese conocimiento resulte construible por los estudiantes.

Sin entrar en detalles del desarrollo de una situación didáctica, que no es el interés específico de esta investigación, nos detendremos en una de sus componentes, la *institucionalización* de los saberes.

Según la teoría de situaciones didácticas, una vez que grupo de estudiantes ha logrado generar estrategias de resolución a la situación planteada, es necesario que alguien del exterior venga a dilucidar cuáles de entre sus actividades tienen un estatuto cultural, esto es, un interés científico para la comunidad matemática. Esa es la función de la *institucionalización* (Brousseau, 1997) y es responsabilidad del docente llevarla a cabo. Él es quien puede brindar un estatuto cultural a las producciones que los estudiantes elaboraron a partir de la situación propuesta, colocándolas en el núcleo de una problemática más amplia y relacionándolas con otras cuestiones y saberes. La institucionalización tiene por objetivo lograr que el estudiante reconozca el conocimiento que está aprendiendo como un “objeto de saber” ya establecido en la estructura matemática, que a su vez el docente tenía previsto como un “saber a enseñar”.

Sin embargo, resulta necesario reconocer que el propio profesor está inmerso en todo un proceso que trasciende al profesor y a su trabajo en el aula, y tiene que ver con cómo llega ese conocimiento a su aula, a través de qué mecanismos y por qué. Desde la perspectiva que se adopta en la investigación, consideramos que ese saber que se instituye en el aula ha atravesado previamente por al menos otras dos instancias de institucionalización en el ámbito de la noósfera que lo constituyen como un saber necesario a ser tratado en clase y aprendido por los estudiantes: la institucionalización al seno de la comunidad matemática (cuando determinadas acciones son habitualizadas entre los miembros de un determinado grupo de matemáticos por responder a la práctica social que norma dichas acciones) y la institucionalización en el tránsito de ese saber constituido como un "saber sabio" hacia la dimensión escolar (tránsito que se explicita en una relación dialéctica entre programas y libros de texto y que se presenta en el ámbito de la noósfera).

Resulta viable entonces que al querer dar cuenta de cómo el límite se constituyó en un cuerpo de saber validado y aceptado social y culturalmente, tenemos que hablar de un *proceso de institucionalización* que considere diferentes momentos, en las cuales las prácticas de los actores reflejan los paradigmas vigentes en cada uno de ellos. Para ello vemos necesario la consideración de otro paradigma en Matemática Educativa, que incluya precisamente al estudio de las prácticas como centro de la actividad matemática.

Describiremos a continuación la teoría socioepistemológica, deteniéndonos específicamente en sus aportes sobre la institucionalización y el estudio sobre los procesos de institucionalización.

3.2.3. Socioepistemología como aproximación teórica

Cordero (2006) distingue en la evolución de la matemática educativa como disciplina dos programas de investigación: los que prestan especial atención a los procesos cognitivos individuales y los que analizan la construcción del conocimiento en los escenarios socioculturales. Sin embargo, plantea que ninguna de estas aproximaciones permite explicar cómo un conocimiento se convierte en un saber institucionalizado en ámbitos científicos o para su estudio en la escuela, cómo los grupos se organizan, de qué se valen y qué métodos utilizan para constituir dicho conocimiento. Esto se da porque ambas aproximaciones conciben al conocimiento como preexistente al sujeto que aprende y descontextualizado de las prácticas de referencia que le dieron origen.

En cambio, si el conocimiento matemático no es considerado como preexistente al sujeto que aprende, sino que se analizan las circunstancias sociales, históricas y culturales de los escenarios en los que se produce y difunde, los saberes matemáticos pueden ser concebidos como un bien cultural producto de la actividad humana en su práctica de modificar y construir la realidad (Martínez, 2005). El conocimiento constituido como tal en ámbitos no escolares, sufrirá una serie de modificaciones tanto en su estructura como en su funcionamiento en el proceso de difusión hacia y desde el sistema de enseñanza (Cantoral, Farfán, Lezama y Martínez-Sierra, 2006).

Por su carácter sistémico, la socioepistemología es una aproximación teórica que entiende al conocimiento matemático de esa manera, reconociendo la importancia de los aspectos cognitivo, didáctico y epistemológico desde los escenarios socioculturales en los que se produce dicho conocimiento (Cantoral y Farfán, 1998). Este marco quiere precisamente dar cuenta de la naturaleza social del conocimiento matemático, cómo se produce su construcción social y explica los procesos de construcción, adquisición y difusión del saber matemático con base en prácticas sociales (Cantoral et al., 2006).

Se entiende a las *prácticas sociales* como aquéllas normativas de la actividad humana, aquello que hace que los individuos o grupos hagan lo que hacen (Covián, 2005) y que son generadoras de herramientas y representaciones sociales (Ferrari y Farfán, 2009).

En Montiel (2006) se presenta un aporte teórico que reconoce a las *actividades* humanas observables en un individuo o grupo –generación de conjeturas y argumentaciones relativas a cierto conocimiento, producción de propiedades, definiciones, entre otras–, que se articulan en *prácticas de referencia*. Estas prácticas de referencia pertenecen a cierta tradición científica y dan cuenta de los paradigmas de cada comunidad, en un contexto sociohistórico determinado. Según este constructo teórico, para describir la naturaleza social del conocimiento interesa analizar la *práctica social* que es quien norma o regula a las prácticas de referencia. Es aquello que estructura y otorga significado a lo que hacemos (Arrieta, 2003).

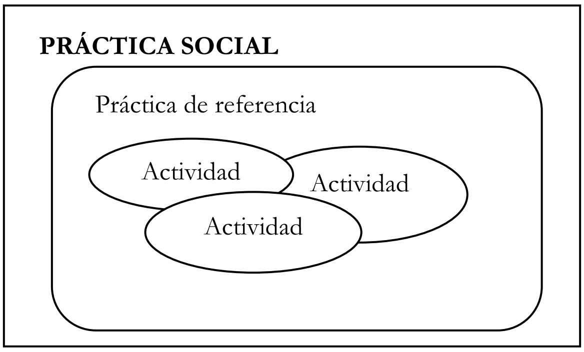


Figura 4: Modelo para la construcción social de conocimiento matemático (Montiel, 2006)

En el apartado 4.1.1 especificamos qué tipo prácticas de referencia y actividades nos interesa identificar en cada ámbito –el científico y el escolar-. Así, veremos cómo las prácticas sociales norman prácticas de referencia que dan cuenta del paradigma específico en el que se encuentran los actores involucrados en cada momento del proceso de institucionalización, y que dichas prácticas de referencia, así como las actividades, son reinterpretadas diferente en uno y otro ámbito.

3.2.4. Procesos de institucionalización en la aproximación socioepistemológica

Según Covián (2005), quien desarrolla una investigación en el marco de la teoría socioepistemológica, es a través del proceso de institucionalización que la práctica social adquiere la función normativa, éste es entendido como un proceso que se evidencia a través del cambio y la permanencia del conocimiento. El conocimiento matemático institucionalizado es considerado como aquello que permite el continuo de los saberes matemáticos.

Sin embargo, Tuyub (2008) afirma que

> "Esta investigación permite robustecer tal caracterización al profundizar sobre ello, sin caer en definiciones, la permanencia y cambio solo ponen la alarma de que ha habido un proceso de institucionalización (son como fotos de la evidencia, principio y fin, es como caracterizar al aprendizaje como un cambio de conducta, no lo hace, ahora lo hace), pero en realidad no da cuenta de tal proceso, que se debe inferir en la continuidad de las prácticas a través de sus actividades, es decir cuestionarse sobre qué es lo que permite la permanencia y cambio (preguntarse cómo se llegó de esta foto a la otra)." (Tuyub, 2008, p. 180)

Es así que vemos la necesidad de estudiar acerca de cuáles son las herramientas que hasta ahora ha aportado la socioepistemología para utilizarlas y a la vez precisar qué otros constructos se precisan aún desarrollar.

A raíz de un estudio sobre prácticas en ingeniería biomédica, García Torres concluye sobre la existencia de procesos de institucionalización, entendidos como aquellos procesos que, normados por la práctica social, permitirían explicar la construcción y difusión de conocimiento matemático por parte de la sociedad (García Torres y Cantoral, 2007). En el siguiente esquema se presenta un modelo para la construcción social de conocimiento matemático considerando los procesos de institucionalización, y su articulación con las prácticas sociales y de referencia presentadas en el esquema de Montiel (2006).

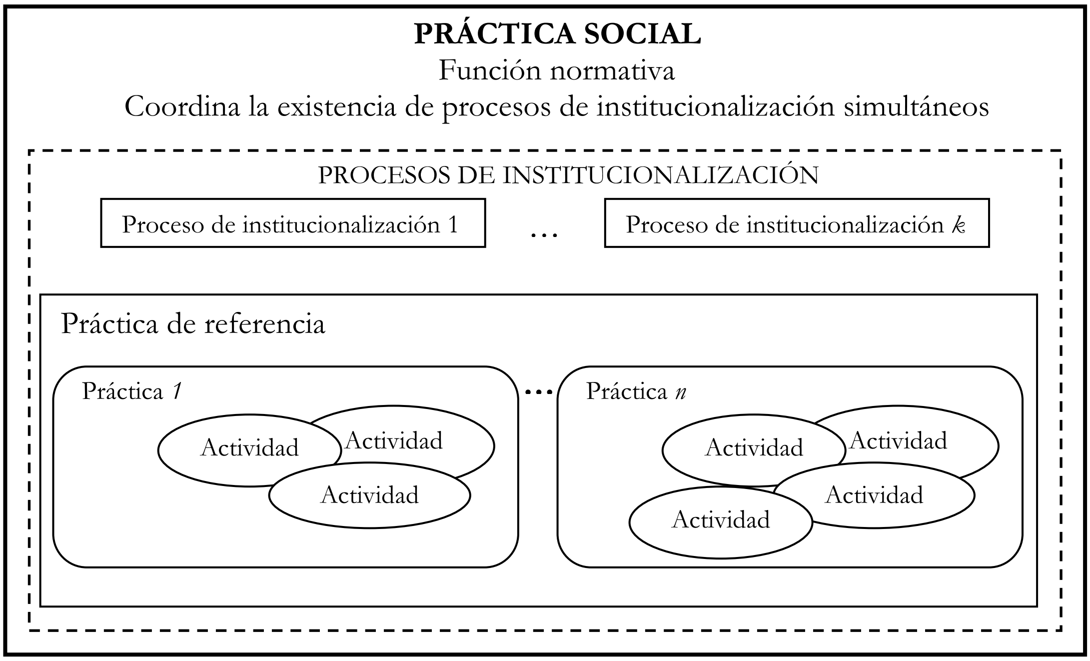


Figura 5: Modelo para la construcción social de conocimiento matemático considerando los procesos de institucionalización. (García Torres y Cantoral, 2007)

Consideraremos este esquema para la investigación, pero nos interesa además, como lo señala Tuyub (2008), describir la *naturaleza* de los procesos de institucionalización, analizando en particular el papel que las prácticas sociales y de referencia cumplen en dicho proceso. Para ello, deberán considerarse los dos ámbitos que presentamos en el primer capítulo: el científico y el escolar en la constitución de conocimiento matemático y su institucionalización.

3.3. Aportes para la investigación: argumentos para la opción por el marco de la socioepistemología y reconocimiento de la necesidad del uso de diferentes metodologías

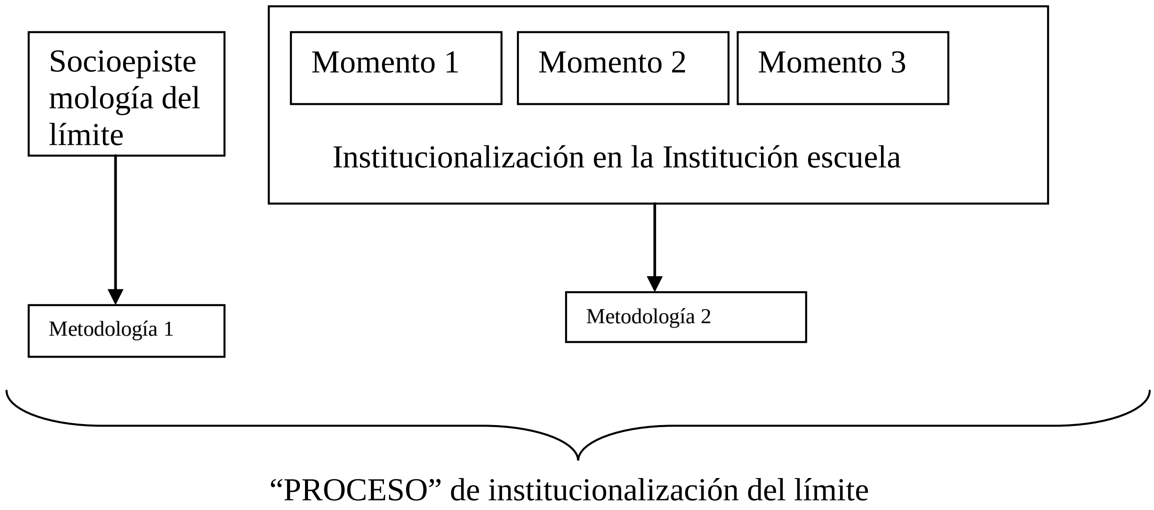
Los aportes teóricos desarrollados en este capítulo han permitido construir una aproximación acerca de lo que es necesario para dar respuesta a la pregunta original de investigación: ¿por qué el límite se enseña de la manera en que se hace actualmente en el sistema educativo uruguayo?

Por un lado, constatamos que para dar cuenta de cómo el límite se constituyó en un cuerpo de saber validado y aceptado social y culturalmente, tenemos que hablar de un *proceso de institucionalización* que considere diferentes momentos, en los cuales las prácticas de los actores reflejan los paradigmas vigentes en cada uno de ellos. Por otro lado, el análisis de la institucionalización entendida desde diferentes teorías dentro de la Matemática Educativa nos permite considerar que la perspectiva socioepistemológica es apropiada para analizar dicho proceso de institucionalización. Desde esta perspectiva, interesa estudiar las prácticas que se desarrollan en los diferentes grupos de actores del ámbito científico y el ámbito escolar, y es por eso que optamos por una alternativa diferente a la Transposición Didáctica. Dicha teoría permitiría analizar la transposición del conocimiento desde que es considerado como un saber sabio hasta que es considerado como un saber a enseñar, pero no da cuenta de cómo influyen las prácticas sociales y de referencia de cada momento del proceso en las decisiones que se van tomando y que constituyen la institucionalización del concepto en la escuela entendida como una institucionalización.

Un análisis socioepistemológico del proceso mencionado permitiría detectar dentro de él las "etapas" que se producen al seno del ámbito estrictamente científico. Dichas "etapas" serán consideradas en el sentido que se expusiera en el capítulo 1, como diferentes estadios que se pueden detectar en el análisis de las prácticas sociales y de referencia propias de cada comunidad y de cada matemático en la conformación del concepto "límite funcional" tal cual está escrito en los libros de texto actuales.

Además, ese análisis permitiría la consideración del ámbito escolar en el proceso de institucionalización del concepto de límite. Como mencionamos en el capítulo 1, distinguimos allí algunos "momentos", ya no en el sentido cronológico de las etapas, sino como diferentes fases que se pueden distinguir en el proceso de institucionalización cuando queremos reinterpretar las prácticas sociales en la institución escuela. Es importante señalar que esos "momentos" pueden describirse en función de los actores de la noósfera que participan con más protagonismo en cada uno, y de los roles que dichos actores desempeñan.

Como vemos, en cada una de los dos ámbitos que decidimos analizar buscamos diferentes tipos de explicaciones. En el ámbito científico, interesa conformar una epistemología de prácticas, en el sentido de Buendía y Montiel (2009a y 2009b). Y más adelante nos interesa estudiar cómo esas prácticas, que le dan sentido al límite, viven en el ámbito escolar, pero reinterpretándolas específicamente en la institución escolar. Esto requiere de una metodología propia para cada "parte" del análisis, con su correspondiente marco teórico. El siguiente esquema ilustra la situación:



Esquema 2: Descripción general de la investigación

Una vez explicitada la necesidad del uso de metodologías diferentes para cada parte del proceso, dedicamos el siguiente capítulo a describir las herramientas teóricas y metodológicas utilizadas.

Capítulo 4 - Aspectos teóricos y metodológicos

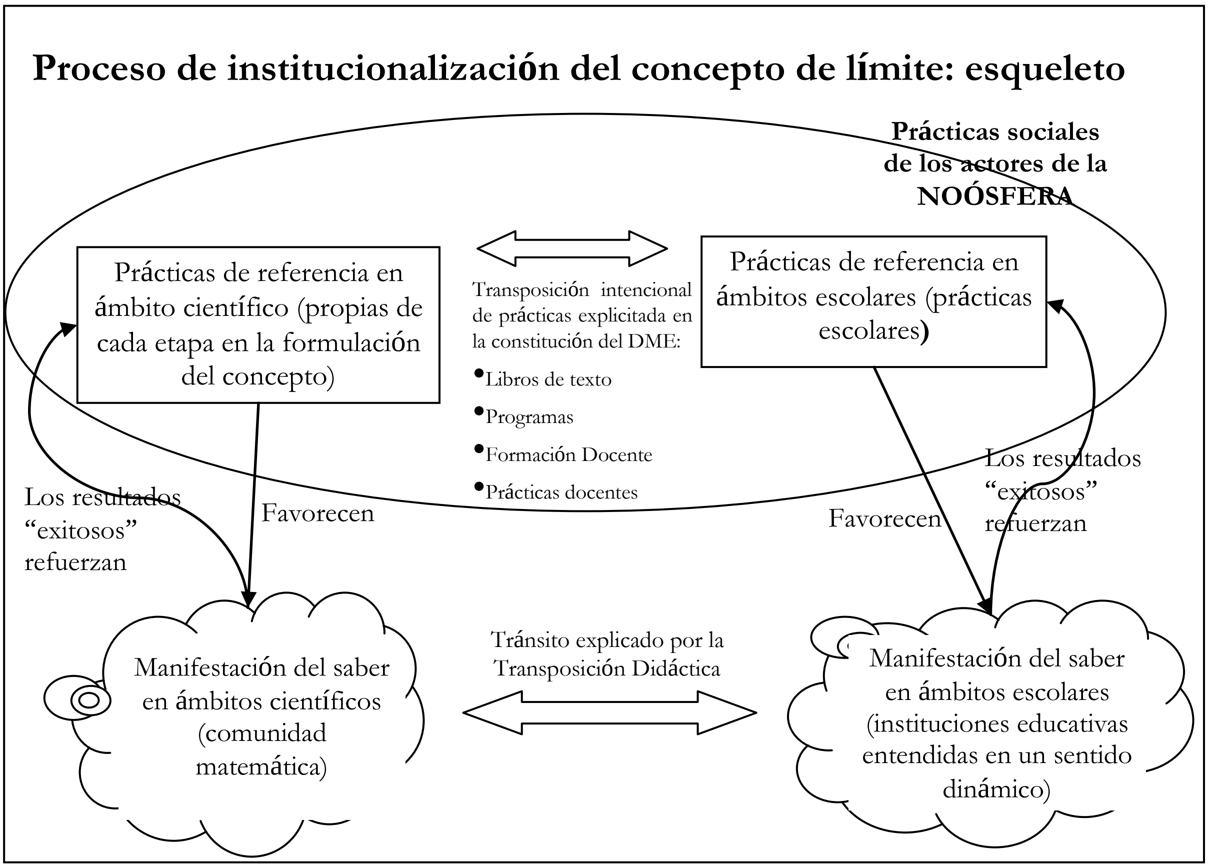
4.1. Hacia la conformación de un modelo teórico para el análisis de los procesos de institucionalización

4.1.1. Elementos socioepistemológicos para la conformación de un modelo

Como se ha justificado, es viable la consideración de determinados conocimientos como saberes sujetos a diversos procesos de institucionalización. Ya que nos importa reconocer el papel de los escenarios socioculturales, en esta investigación nos interesa particularmente la constitución del límite como un saber institucionalizado, dentro del contexto educativo uruguayo. Así, estaremos dando cuenta de que dicha institucionalización se realiza a través de un proceso, tal cual se presentara en García Torres y Cantoral (2007) para un caso específico de prácticas profesionales.

Hemos considerado a la socioepistemología como aproximación teórica ya que su interés es explicar precisamente la constitución del conocimiento matemático a través de las prácticas sociales que norman su construcción. Este aporte nos permitirá describir cómo ha sido la evolución del concepto “límite funcional” desde el punto de vista institucional, a la vez que explicar cómo se ha convertido él mismo en un saber institucionalizado. Organizamos dicha descripción en función de las prácticas de los actores de la noósfera: su quehacer es normativo, y tiene sus características propias en cada uno de las etapas y momentos que señalamos. El análisis de las prácticas de dichos actores es lo que nos permite la distinción entre esas “fases” en el proceso de institucionalización.

Las consideraciones realizadas en los apartados anteriores han permitido concluir en la conformación de un esquema que ilustra un “esqueleto” teórico para el análisis de la naturaleza del proceso de institucionalización de un conocimiento matemático, específicamente del concepto de límite:



Esquema 3: Proceso de institucionalización del concepto de límite: esqueleto

Este esquema pretende funcionar como "esqueleto" para explicar cómo se ha ido constituyendo el concepto de límite en la institución escuela, considerando específicamente el papel de las prácticas de referencia y las actividades que son normadas por las prácticas sociales como reguladoras de dicha constitución.

En el análisis del proceso de institucionalización consideramos especialmente la articulación entre dos grandes ámbitos en donde se manifiestan las prácticas sociales de los actores de la noósfera: el científico y el escolar. Dichas prácticas operan como normativas de las prácticas de referencia de esos actores, constituidas a su vez por sus actividades. Las prácticas de referencia se manifiestan, ya sea explícita o implícitamente, en forma diferente en cada ámbito, y son en definitiva las que permiten situarnos en uno u otro.

Como vimos, las prácticas sociales son las que permiten explicar por qué un determinado conocimiento se construye de la manera en que lo hace ya que norman las actividades de los diferentes actores del sistema didáctico involucrados en tal construcción, y deben ser entendidas también en función de ellos.

Dentro del ámbito científico, las *actividades* de medir, modelar, aproximar, calcular, buscar explicaciones de fenómenos específicos, elaborar conjeturas y justificarlas o refutarlas, enunciar definiciones y axiomas, constituyen las *prácticas de referencia* desarrolladas por un matemático o grupo de matemáticos en torno a un concepto, propias de cada etapa en la evolución del concepto de límite en el ámbito científico.

Entendemos a las prácticas escolares vigentes dentro de cada paradigma escolar como las *prácticas de referencia* propias del ámbito escolar. Cuando analicemos los diferentes momentos en el proceso de institucionalización del concepto de límite, lograremos una descripción más profunda de dichas prácticas de referencia, distinguiéndolas según cada momento. Las *actividades* son todas aquellas que conforman dicho paradigma y son a la vez características de él. En cada momento de la evolución del tratamiento escolar del concepto de límite se manifiestan de una forma específica: elaboración de planes y programas, diseño de secuencias didácticas y de libros de texto, evaluación del docente, intercambio entre docentes y autoridades, formas de desarrollar el concepto de cada docente en el aula, evaluación de los estudiantes, entre otras.

Desde la perspectiva socioepistemológica, se sostiene que las prácticas sociales son generadoras de conocimiento (Arrieta, 2003; Buendía, 2006; Martínez, 2005; Ferrari y Farfán, 2004). Recíprocamente, podría formularse que los resultados obtenidos en el ámbito del "saber sabio" o el "saber escolar" generan confianza sobre la pertinencia de las prácticas de referencia. En el ámbito científico, por ejemplo, la práctica social de formalizar fue la que generó y normó un determinado desarrollo del concepto de límite funcional, pero a su vez cuando esta formalización se hizo explícita, se comenzaron a ver las "ventajas" de su aplicación y eso reforzó su práctica. En el ámbito escolar, muchas veces normado también por la práctica de formalización, si los docentes o los estudiantes ven en su aplicación alguna ventaja para la expresión de sus resultados y la generalización, entonces se refuerzan las prácticas escolares de referencia asociadas a la formalización.

El tránsito entre saber sabio y saber escolar es explicado a través de la consideración de la Transposición Didáctica, pero como explicamos, no es ese el foco de esta investigación. Nos interesa el tránsito entre la institucionalización de prácticas en uno y otro ámbito. En el caso del ámbito científico, la teoría socioepistemológica nos brinda las herramientas teóricas y metodológicas necesarias para llevarlo a cabo tal análisis. El análisis de prácticas que se generan en el tránsito entre los diferentes ámbitos y a la interna del ámbito escolar, será explicado a través del análisis del discurso ya que, desde la perspectiva que se plantea en la investigación, permite identificar las prácticas de referencia y actividades de los actores de la noósfera.

Si bien en socioepistemología existen investigaciones que se dedican al análisis del discurso, específicamente del discurso matemático escolar, creemos necesario realizar algunas puntualizaciones respecto de la manera en que entendemos al discurso, esto es, bajo la noción de "acción".

4.1.2. Discurso como acción social y discurso matemático escolar

La perspectiva desde la cual se plantea la investigación asume al conocimiento como una construcción de sentido común normada por prácticas sociales y producto de prácticas de referencia propias de un contexto determinado, a diferencia de las que consideran al conocimiento como un objeto preexistente al estudiante, un cuerpo de saberes previamente consensuados como "correctos" por un grupo de personas y en un contexto ajenos a él.

Ello implica un cuestionamiento acerca de cómo se estructura el discurso en torno a determinado saber en las instituciones en las que se desarrolla, desde el punto de vista de sus actores. "Para estudiar cómo se construye la ciencia en el aula, es necesario no sólo analizar la manera como se describen y explican los fenómenos de la "realidad", sino indagar los procesos con los que se construyen estos conceptos, se legitiman y se organizan en teorías". (Candela, 2007, p. 32). Ello hace necesario el análisis del discurso y su rol en la construcción de conocimiento.

En particular, consideramos necesario realizar un análisis del discurso para explicar los procesos a través de los cuales un determinado conocimiento –en nuestro caso el concepto de límite- se enseña actualmente de la forma en que se hace en un determinado contexto sociohistórico y cultural –el aula uruguaya en el siglo XXI-. De esta manera, esta herramienta nos permitiría evidenciar que lo que enseñamos en el aula alrededor del límite es producto de un proceso, que denominaremos proceso de institucionalización, y que se evidencia tanto en los ámbitos científicos de constitución del concepto como en los ámbitos escolares, en los que se difunde y reconstruye.

El "Discurso" puede ser entendido y estudiado de diversas maneras: un análisis discursivo que atienda a la estructura de las formas verbales en el aula (semántica, sintaxis, retórica, estilística, tipo de argumentación o procesos cognitivos involucrados) o el discurso matemático escolar (DME), por ejemplo.

Desde la socioepistemología se entiende al DME como la manifestación del conocimiento matemático, normada por creencias del profesor y los estudiantes sobre lo que es la enseñanza y lo que es la matemática, por lo que dicta el currículum y por las necesidades e intereses de todos los actores de la noósfera. El discurso modela el desarrollo de la clase y establece prioridades sobre 'aquello' que debe estudiarse; el tipo y características de actividades, la forma de evaluar, el tipo de planteamientos y ejercicios (Cordero y Flores, 2007). En este sentido el discurso favorece que un determinado conocimiento –y no otro- se vuelva institucional. Su análisis permitiría construir explicaciones sobre la forma en que se legitima cierto saber, cómo se forman consensos en torno a su socialización.

El DME involucra a las formas orales, como el diálogo que se puede suscitar en una clase entre profesor y alumnos, pero también involucra formas escritas como los programas o los libros de texto seleccionados para dictar un curso (Castañeda, 2006). También conforman el discurso otros aspectos relevantes como las prácticas docentes y todo lo que hace a la formación docente: la estructuración de sus planes y programas, los libros de texto que se recomiendan y las prácticas docentes de los formadores de profesores. Por otro lado, integran el discurso todas las manifestaciones –generalmente escritas– que no son consultadas frecuentemente en los cursos actuales pero que de alguna manera influyeron o influyen en la configuración actual de los programas y las prácticas docentes. Ejemplos de ello serían los escritos científicos y libros de texto de antaño.

En la presente investigación interesa analizar el discurso, pero con un interés específico, que es el de analizar las prácticas escolares, entendidas como las prácticas de referencia en el ámbito escolar, según el esquema de Montiel (2006). Es por eso que precisamos de una visión del discurso con interpretaciones diferentes a las del DME, esto es, una perspectiva que entienda al discurso como una acción social, como parte del quehacer de los actores de la comunidad escolar. Es así que optamos por la visión que propone Van Dijk (2001), según la cual el discurso es un fenómeno práctico, abordando un análisis social del mismo, el cual quiere comprender las relaciones entre el discurso y la sociedad.

Desde esta perspectiva, el discurso es entendido como una acción social. Los usuarios del lenguaje, ya sea escrito u oral, no sólo son oyentes, lectores, escritores u hablantes, sino que son miembros de grupos, comunidades u organizaciones sociales. El discurso manifiesta y expresa las múltiples propiedades relevantes de la situación sociocultural –el contexto-, a la vez que lo modela. Además de ser moldeado por el contexto sociocultural en el que está inmerso, el discurso "constituye lo social: constituye las situaciones, los objetos de conocimiento, la identidad social de las personas y las relaciones de éstas y de los grupos entre sí." (Fairclough y Wodak, 2001, p. 367). Es importante el carácter dinámico y subjetivo que se le otorga a los contextos: son dinámicos en el sentido de que son flexibles, cambiantes y hasta pueden ser negociables y son subjetivos ya que sus participantes pueden interpretar sus características de diversas maneras y considerar relevantes diferentes aspectos, en este sentido son considerados construcciones mentales.

Van Dijk (2001) sostiene que al hablar o escribir se realizan múltiples acciones: defender una postura, responder preguntas, representar a tal grupo social, entre otras. Así, se reconoce a la formulación del discurso como una acción social con una intencionalidad específica de un colectivo dentro de un contexto sociocultural específico. Es entendido como una práctica social: "la noción de práctica social usualmente supone una dimensión social más amplia del discurso que los diversos actos realizados por los usuarios del lenguaje en la interacción interpersonal." (Van Dijk, 2001, p. 24). Además, "el hecho de describir al discurso como práctica social sugiere una relación dialéctica entre un suceso discursivo particular y las situaciones, instituciones y estructuras sociales que lo enmarcan." (Fairclough y Wodak, 2001, p. 367). La noción de práctica social desde esta perspectiva tiene aspectos comunes con la noción que se maneja en la teoría socioepistemológica: el asumir que cada persona involucrada en el acto discursivo es miembro de un grupo social determinado, que responde a intereses y necesidades específicas, y que eso no puede ser desvinculado a la hora de analizar el discurso sugiere una consideración del humano como miembro de un grupo social con sus características específicas, propias del escenario sociocultural en el que está inmerso. Sin embargo, difieren en la connotación que se le otorga en la socioepistemología a la práctica social como normativa del actuar humano y generadora de conocimiento.

En este sentido, una interacción entre profesor y alumno –por ejemplo- no sólo es una forma compleja de diálogo institucional, sino que es una parte inherente de la práctica discursiva más compleja de la enseñanza. El análisis del discurso como acción evidencia las funciones sociales, políticas o culturales del discurso dentro de las instituciones, los grupos o la sociedad y la cultura en general (Van Dijk, 2001).

Van Dijk introduce al poder social como un concepto que organiza las relaciones entre discurso y sociedad. En particular, lo define como "una relación específica entre grupos sociales e instituciones" (Van Dijk, 2001, p. 40): específicamente una relación que controla las intenciones, acciones y propósitos de un grupo o de personas por parte de otro grupo o personas. El poder puede ser directamente ejercido a través de órdenes, donde la persuasión se implementa a través de mecanismos físicos o mentales directos, o puede manifestarse a través de mecanismos más sutiles, a través de argumentos o consejos (en el caso de la educación este "poder" lo ejercen padres y profesores, autoridades educativas, diseñadores del currículum y de los libros de texto, editoriales, políticos, organismos internacionales, entre otros) o a través de una hegemonía o la formación de consensos: el discurso es tal que hace que las personas de un grupo tengan las creencias del grupo poderoso; puede ser a través de la educación, campañas, publicidad o medios, por ejemplo, lo que sólo es posible cuando no existen otras fuentes de información y opinión, para que los dominados no puedan formarse una opinión propia, diferente a la del grupo dominante.

Los grupos poderosos controlan el acceso de los recursos materiales y simbólicos a través del discurso controlando el contexto y las estructuras del discurso (idioma, temas, género, estructura, diseño gráfico, etc). Se genera una relación compleja de dependencia especial entre los grupos de poder y los dominados: los grupos de poder precisan de, por ejemplo, los medios de comunicación o el grupo de académicos para ejercer su poder. Pero a su vez estos grupos precisan la "aprobación" de los grupos poderosos económica, social o políticamente para "sobrevivir" y continuar su acción. A su vez, el poder social no es permanente ni carente de contradicciones, eso es lo que explica los cambios históricos de poder. En el contexto del sistema educativo uruguayo, por ejemplo, los organismos internacionales de crédito han influido fuertemente en los planes educativos y cambios curriculares. Sus políticas educativas internacionales influyeron fuertemente en la reforma de 1996, como se señala en el apartado 5.2.1, donde se describe la evolución del sistema educativo uruguayo.

Van Dijk (2001) señala que la contrapartida cognitiva del poder social son las ideologías, que establecen vínculos entre el discurso y la sociedad pero en otro nivel. Las ideologías son entendidas como representaciones mentales compartidas por un grupo: "la ideología es una manera particular de representar y construir la sociedad que reproduce las relaciones desiguales de poder, las relaciones de dominación y de explotación" (Fairclough y Wodak, 2001, p. 392). Si bien las ideologías no explicitan directamente cómo actuar en una situación particular a cada miembro de un grupo, sí coordinan sus actos o prácticas en general, sirven para que los grupos desarrollen representaciones compartidas, generales y mutuamente coherentes: aseguran que los miembros de un grupo actúen en forma similar frente a situaciones similares, contribuyendo así a la cohesión grupal y la reproducción exitosa del grupo. Su función es articular los intereses colectivos del grupo y las prácticas individuales.

La relación entre ideología y discurso es indirecta e involucra tanto creencias generales como específicas. Los usuarios del lenguaje se identifican como parte de un grupo con una ideología determinada, pero pueden manifestar lealtades en conflicto, lo que pone de manifiesto la relación entre lo individual y lo social, lo micro y lo macro dentro de un contexto específico. El análisis de la relación entre ideologías y discurso es considerado fundamental en tanto que las primeras definen a las culturas y los grupos, los organizan y supervisan sus creencias además de sus prácticas sociales y discursos. Este aspecto permite comprender cabalmente las relaciones entre discurso y sociedad (Van Dijk, 2001).

Esta es la perspectiva metodológica desde la cual planteamos en la investigación el análisis del discurso, ya que consideramos que en particular aportará herramientas para comprender el desarrollo del saber matemático en sociedad y explicitar así sus procesos de institucionalización. Desde esta perspectiva, se reconoce que las acciones que lleva a cabo una institución en la formulación de un discurso institucional producen, reproducen y/o desafían la estructura social. Cada libro de texto, la configuración de cada programa, las opciones por considerar o descartar determinado conocimiento o proceso para su enseñanza, las acciones discursivas de un docente en clase: todas ellas tienen implicaciones y consecuencias en la constitución del conocimiento y en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Es necesario explicitar la intencionalidad con que una persona, miembro de un determinado grupo, escribe un libro de texto, diseña un programa, selecciona o jerarquiza temas para dar en un curso, e incluso la manera de presentarlo. Cada acción discursiva implica un determinado propósito, genera una determinada consecuencia y responde a una representación mental de los acontecimientos determinada.

En nuestro análisis, eso se manifiesta en cada uno de los momentos del ámbito escolar en el proceso de institucionalización. En cada uno de ellos es necesario explicitar los propósitos, las consecuencias y las representaciones mentales asociadas a cada acción discursiva de sus actores.

4.2. Hacia la conformación de un modelo metodológico para el análisis de los procesos de institucionalización

Una vez delineados los aspectos teóricos de la investigación, nos centraremos en los aspectos metodológicos que viabilizarán la concreción del objetivo en el marco del modelo teórico planteado.

Hemos estructuramos el análisis de los procesos de institucionalización del concepto de límite en dos grandes ámbitos, el científico y el escolar, y hemos justificado que cada uno de ellos precisa de herramientas teóricas específicas. De la misma manera, cada uno de ellos precisa de una metodología propia para el análisis de las prácticas en uno y otro ámbito. En el caso del ámbito científico, optamos por desarrollar el esquema de prácticas

4.2.1. Esquema de prácticas de la socioepistemología

Entendemos que el modelo de la epistemología de prácticas que propone la socioepistemología para el análisis histórico-epistemológico de un concepto se ajusta a las necesidades de la investigación para el análisis de los procesos de institucionalización en el ámbito científico. La investigación histórica implica "reconocer y dar cuenta de las circunstancias que rodean tanto la gestación de un determinado saber, como los procesos de institucionalización a los cuales se vio sometido" (Buendía y Montiel, 2009a, p. 1287).

Desde esta perspectiva el interés de estudio no es la producción matemática final que logra el hombre sino el análisis de la actividad humana al hacer y usar matemáticas en un contexto social específico. Este tipo de análisis permite reconocer que el conocimiento no está conformado por conceptos y estructuraciones conceptuales aisladas, sino que presenta una articulación gestada al seno de ciertas prácticas. La historia es entendida como una herramienta que permite explicitar las circunstancias que constituyen un contexto de significación para el saber mismo, lo que favorece una introducción significativa y articulada al sistema didáctico (Buendía y Montiel, 2009a).

Antecedentes de este tipo de análisis los podemos encontrar en Lezama (1999), que en el marco de un estudio de la reproducibilidad de situaciones didácticas, establece consideraciones histórico-epistemológicas sobre la función exponencial; en Ferrari (2008), quien realiza un análisis específico de la evolución del concepto de logaritmo; en Buendía (2004) que analiza la evolución histórica-epistemológica de la periodicidad en el marco de un estudio socioepistemológico; en Castañeda (2004), que plantea un acercamiento a la construcción social del conocimiento, específicamente para el caso de la evolución didáctica del punto de inflexión; o en Montiel (2005), quien identifica diferentes momentos en el desarrollo de la función trigonométrica. Mencionamos a estos como algunos de los trabajos referentes de la teoría socioepistemológica y que realizan estudios histórico-epistemológicos desde la perspectiva que nosotros asumimos. Su denominador común es que en lugar de formular una epistemología de conceptos, se formula una epistemología de prácticas, con el objetivo de establecer relaciones funcionales que articulen las estructuras y conceptos que el otro tipo de análisis puede proveer, a lo largo del sistema educativo.

A partir de los trabajos desarrollados por Buendía (2004) y Montiel (2005) y de los aspectos metodológicos desarrollados por otras investigaciones socioepistemológicas (Buendía y Cordero, 2005; Cordero, 2006), Buendía y Montiel (2009a, 2009b) presentan un modelo metodológico para la investigación en Matemática Educativa interesada en involucrar como punto de análisis elementos socioculturales que condicionan la construcción del conocimiento matemático en escenarios específicos.

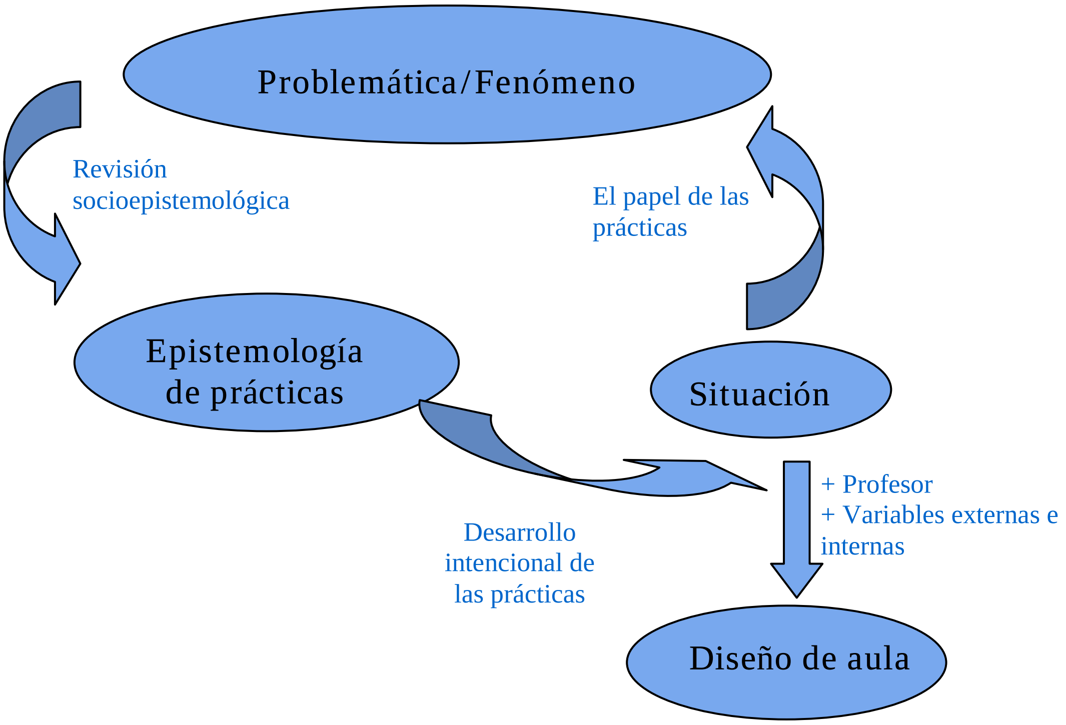


Figura 6: Modelo metodológico para la investigación en Matemática Educativa desde la teoría socioepistemológica (Buendía y Montiel, 2009a)

Este esquema presupone una manera específica de entender la construcción del conocimiento y los procesos de enseñanza y aprendizaje: construir conocimiento no se refiere exclusivamente a la adquisición de conceptos, sino también a las prácticas sociales que dieron origen y actualmente "dan vida" al conocimiento en cuestión. Las prácticas sociales se erigen así como generadoras de conocimiento matemático. Estas prácticas pueden ser propias de la actividad matemática académica tradicional o pueden ser externas a ella, lo que las caracteriza es que el conocimiento se origina y vive en ellas.

Se parte de reconocer y delimitar un *fenómeno didáctico o problemática* a analizar. A continuación se plantea una *revisión de corte socioepistemológico* sobre el mismo, que como tal aborda los aspectos didácticos, cognitivos y epistemológicos del fenómeno, analizados desde su dimensión social y en forma sistémica. En particular la revisión puede incluir un *análisis histórico* –génesis, evolución y usos del saber en cuestión– y un *análisis del discurso matemático escolar* vinculado al fenómeno –prácticas y usos escolares que lo significan, su relevancia escolar, motivos de su aparición y desarrollo en el ámbito escolar–. El objetivo de esta revisión es reconocer las prácticas sociales asociadas al fenómeno didáctico abordado para formular con claridad una *epistemología de prácticas*, que describa la naturaleza social del conocimiento matemático en cuestión explicitando su relación con dichas prácticas. Se podrán reconocer asimismo las prácticas de referencia y actividades que la componen, en el sentido de Montiel (2005). Esta epistemología de prácticas es la que da fundamento a una *situación*, la cual debe caracterizarse por el *desarrollo intencional de las prácticas* para resignificar el conocimiento matemático involucrado. Con una necesaria investigación sobre el papel del *profesor* y otras *variables internas y externas*, esta situación puede diseñarse para llevarse al *aula* con el propósito explícito de enseñanza.

En nuestra investigación, utilizamos parte de este esquema –la revisión socioepistemológica con vistas a la conformación de una epistemología de prácticas– como herramienta metodológica para el análisis de las prácticas involucradas en los procesos de institucionalización del límite en el ámbito científico. Desde la perspectiva de la investigación, las prácticas de los actores de la noósfera son las protagonistas en el análisis de los procesos de institucionalización del concepto de límite. Es por eso que en el estudio del desarrollo del concepto a la interna de la comunidad matemática, nos interesa particularmente desentrañar las actividades matemáticas de los humanos haciendo matemáticas, así como los usos y significados del conocimiento en cuestión, más que los resultados finales a los que se abordó en cada etapa del desarrollo. Interesa explicitar por qué una determinada concepción entra en desuso y comienza a validarse otra, cuáles son las circunstancias que promueven tal transición.

4.2.2. Análisis del discurso matemático escolar - Análisis crítico del discurso

Por otro lado, el análisis de los procesos de institucionalización del ámbito escolar requiere, como dijimos, de herramientas metodológicas específicas. En este caso realizamos un análisis del discurso, entendido como acción social. Se precisa entonces de una herramienta que permita dar cuenta de cómo influyen en dicha institucionalización las prácticas e intencionalidades de los actores de la noósfera. Dado que el interés del análisis del discurso se centra en el análisis de las prácticas de referencia de los actores en el ámbito escolar, precisamos una herramienta que entienda a cada una de las componentes del discurso como una acción. Este tipo de análisis difiere del desarrollado por la línea de investigación del DME desde la perspectiva socioepistemológica ya que los intereses son diferentes. Es por ello que optamos por el Análisis Crítico del Discurso (ACD), una herramienta metodológica utilizada en investigaciones donde el marco teórico implica entender al discurso como acción social (Van Dijk, 2001).

El ACD es un tipo particular de investigación analítica sobre el discurso, que estudia el modo en que el abuso del poder social, el dominio y las desigualdades son practicados, reproducidos y combatidos por los textos y el habla en el contexto social y político. Busca establecer nexos entre las propiedades de un texto y las estructuras y procesos sociales y culturales (Fairclough y Wodak, 2001).

Este tipo de investigación "toma explícitamente partido, y espera contribuir de manera efectiva a la resistencia contra la desigualdad social" (Van Dijk, 1999, p. 23). El ACD se propone lograr que la carga ideológica de los modos particulares de utilización del lenguaje y las relaciones de poder subyacentes, que suelen ser aspectos opacos del discurso por no resultar evidentes, se vuelvan más transparentes.

Fairclough y Wodak (2001) resumen los principios básicos del ACD en los siguientes:

1. *El ACD se ocupa de los problemas sociales*: interesa especialmente el análisis de los aspectos discursivos de los procesos y problemas sociales, que se dan entre los grupos dominados y dominantes según la relación de poder explicitada.

En nuestro caso interesa reconocer los procesos de institucionalización que se presentan en torno a un saber matemático –el concepto de límite-, en los ámbitos científicos y escolares, particularmente en el escenario conformado en el sistema educativo uruguayo. Para ello vemos necesario explicitar en el discurso escolar las relaciones de poder subyacentes y cómo esas relaciones influyen en las decisiones sobre lo que debe enseñarse y la manera en que debe hacerse. Esta influencia en ocasiones es directa y explícita –a través de lineamientos generales de los programas de estudio– pero suele darse también en forma muy sutil, a través de libros de texto o incluso de una tradición no escrita, oral, perpetuada por las características específicas del medio escolar uruguayo.

2. *Las relaciones de poder como elementos discursivos*: el ACD analiza cómo se ejercen y negocian las relaciones de poder en el interior del discurso, lo que implica la reproducción del poder por medio del discurso. Pero además interesa el poder sobre el discurso, en el sentido de acceso a él, ya sea desde una postura de emisor como de receptor. Este aspecto se vincula con los aspectos discursivos de la lucha por el poder y la transformación de las relaciones de poder.

La consideración de este aspecto favorecerá la comprensión de cómo y por qué determinados contenidos se introducen y perpetúan en los programas escolares, y por qué los profesores lo implementan de una manera determinada. Por un lado, interesa saber quiénes son los que escriben los programas de Matemática, que es en definitiva una de las manifestaciones concretas de un proceso de institucionalización. También interesa saber por qué determinados libros de texto son los recomendados para un determinado curso, o por qué no se recomiendan libros de texto. Por otro lado, también permite comprender las relaciones de poder que se ejercen dentro del aula a través del discurso del profesor.

3. *El discurso constituye a la sociedad y a la cultura:* los autores plantean una relación dialéctica: el discurso constituye a la sociedad y a la cultura a la vez que es constituido por éstos. Todo acto discursivo contribuye a la reproducción y/o transformación de la sociedad y la cultura, por un lado, pero además ese acto está constituido por personas, integrantes de grupos sociales, que son quienes conforman la sociedad. “Ahí reside el poder del discurso; y es por eso que vale la pena luchar por él” (Fairclough y Wodak, 2001, p. 390).

Este punto explicita particularmente la importancia de analizar el discurso desde esta perspectiva en una investigación como esta, en donde interesa dar cuenta de los procesos de institucionalización del concepto de límite, lo que está íntimamente relacionado con las relaciones de poder que se presentan entre los grupos sociales involucrados en la noósfera: organismos internacionales, autoridades educativas nacionales, directores, docentes, estudiantes, padres y sociedad en general.

4. *El discurso realiza una labor ideológica*: para determinar esta labor ideológica ejercida por un suceso discursivo, es necesario, además de analizar los textos, tener en cuenta cómo se interpretan y reciben esos textos, y qué efectos sociales tienen.

En la presente investigación, este principio es especialmente tenido en cuenta cuando se analizan programas y libros de texto. A través de entrevistas y cuestionarios a docentes, se pretende dar cuenta, entre otras cosas, de cómo interpretan y reciben dichos programas y libros de texto, y qué influencia tienen sobre sus prácticas.

5. *El discurso es histórico*: para comprender el discurso es necesario analizarlo en su contexto, lo que involucra también su contexto histórico. Un discurso siempre está relacionado con los discursos y hechos históricos anteriores, los simultáneos y los posteriores.

Por eso no sólo se analizan los libros de texto o programas actuales, sino que es necesario ubicarlos dentro de un contexto más general, indicar cuáles fueron los libros de texto y programas utilizados anteriormente, explicitar las diferencias y similitudes.

6. *El vínculo entre el texto y la sociedad es mediado*: en particular, los autores señalan que la mediación puede darse a través de los órdenes del discurso, de los procesos sociocognitivos o de las prácticas de los actores sociales. Por ello es importante explicitar los recursos cognitivos que los actores sociales utilizan en su práctica y la relación entre las representaciones individuales y grupales.

En el caso de nuestra investigación, esta mediación será explicada principalmente a través de las prácticas de los actores de la noosfera.

7. *El análisis del discurso es interpretativo y explicativo*: un mismo discurso puede interpretarse de maneras distintas según quién lo recibe, la cantidad de información contextual que incluye y la que tiene el receptor. El ACD favorece a reducir la variedad de interpretaciones posibles.

En esta investigación, es fundamental el hecho de que quien la lleva a cabo es, además de investigadora, docente que trabaja en el propio sistema que está describiendo. Eso aporta un conocimiento indispensable del contexto, que permite mostrar las distintas implicaciones de las diferentes lecturas para la acción social. Esta posición particular facilita la identificación de intereses y sentidos que existen atrás de todo acto discursivo. Se busca así una lectura explicativa, a la vez de interpretativa, del discurso en el contexto matemático escolar. Vale destacar que este punto implica también que la lectura realizada es propia y dinámica: el análisis del discurso desde esta perspectiva depende del conocimiento que se tenga del contexto que se analiza.

8. *El discurso es una forma de acción social*: en ese sentido, el objetivo principal del ACD es poner de manifiesto la opacidad en las relaciones de poder. Con esto se busca provocar cambios en el discurso y las relaciones de poder dentro de las instituciones, como puede darse en el caso de los discursos sexistas o racistas, por ejemplo, que están íntimamente ligados a formas de exclusión. En este sentido, el discurso de un profesor de matemática puede resultar sumamente exclusivo.

Nuestra investigación busca promover una discusión en el ámbito docente y educativo en general acerca de las prácticas educativas en torno al concepto de límite y a su rol en la estructuración del cálculo. La generación de un cambio en las relaciones de poder dentro de las instituciones implica una discusión profunda entre todos los actores involucrados en el ámbito escolar, donde se expongan argumentos y unifiquen criterios. Es por eso que se busca aportar elementos a la discusión acerca de si es adecuada la consideración de alternativas para el tratamiento escolar del concepto de límite.

Entendemos que este tipo de Análisis del Discurso constituye la herramienta necesaria para estudiar las prácticas escolares de los actores en el medio escolar, en relación específica a la introducción y tratamiento en el sistema escolar uruguayo del concepto de límite. Para comprender el discurso actual, es necesario comprender el contexto social e histórico del ámbito educativo uruguayo, qué es lo que lo influencia y constituye determinados aspectos de su ideología. Así, cada una de las componentes analizadas aporta elementos para comprender cómo las acciones discursivas de cada uno de los actores de la noósfera influyen sobre la conformación de la sociedad, especialmente la sociedad matemática escolar en Uruguay, y recíprocamente cómo los diferentes grupos sociales y sus prácticas norman el discurso.

Esta herramienta nos permite entender a las diversas manifestaciones del discurso como las concepciones de los docentes sobre sus prácticas de aula y la enseñanza en general, la evolución en los libros de texto y la evolución en los programas como diferentes aspectos del proceso de institucionalización del concepto de límite en el ámbito escolar.

4.3. Implementación del modelo metodológico en la investigación

Hemos justificado que cada uno de los ámbitos a considerar en el estudio de los procesos de institucionalización del concepto de límite, el científico y el escolar, precisan de herramientas teóricas y metodológicas específicas. En ambos casos interesa el análisis de las prácticas sociales que norman las prácticas de referencia y las actividades de los actores involucrados en cada ámbito, porque creemos son ellas las que regulan la constitución de cada momento en los procesos de institucionalización.

En un principio se comenzó a estudiar la evolución del concepto de límite en el ámbito científico. Dicho análisis se realizó con el fin de detectar qué prácticas eran las características de cada época (y que a su vez determinaban los diferentes momentos o épocas dentro de la evolución) y qué móviles condujeron a la configuración de determinada concepción del concepto en cada una de ellas. Es decir, se buscaba analizar por qué el concepto se constituyó de determinada manera –y no de otra- en determinado ámbito, y detectar allí diferentes momentos en la institucionalización del concepto de límite como saber estructurado dentro de un cuerpo ordenado de conocimiento.

Para ello se llevó a cabo una revisión bibliográfica de investigaciones que hicieran referencia a la evolución socio-histórica del concepto, y en algunos casos se analizaron libros de texto de Matemática de antaño (como el caso de Cauchy, 1821). En dicha revisión se analizaron específicamente las prácticas reinantes en cada momento y los móviles que condujeron a la transición entre las etapas, se estudiaron hechos concretos pero no constituyeron el centro del análisis. Este análisis se llevó a cabo siguiendo la primera parte del modelo presentado por Buendía y Montiel (2009 a y 2009b), desarrollado en el apartado 4.2.1 y dio cabida a la conformación de una epistemología de prácticas relativa al concepto de límite.

A continuación se vislumbró la necesidad de analizar cómo ese conocimiento se constituyó en un saber a enseñar, qué prácticas promovieron la necesidad de que en determinada época se enseñara el concepto de determinada manera. En particular se centró el análisis en la manera en que es tratado el concepto actualmente en el sistema educativo uruguayo, qué prácticas escolares son las que caracterizan al contexto actual y qué factores son los que influyeron para que esas fueran las prácticas escolares institucionalizadas.

Vimos que ello requiere de la consideración de un proceso de institucionalización, y que podemos reconocer en ese proceso, en el ámbito escolar, tres “momentos” que intervienen simultáneamente en la conformación de determinado discurso escolar. Caracterizamos dichos momentos por:

a) *El tránsito del concepto "límite funcional" desde la comunidad científica hacia la escuela*

En ese momento, los actores más relevantes son los miembros de los *organismos internacionales económicos y políticos*, que influyen, a través de préstamos económicos condicionados a determinados lineamientos, sobre las decisiones político-educativas del país; los *autores de libros de texto,* ya sean los libros "de antaño" que en cierta forma moldean una determinada concepción de la matemática y su enseñanza, como los actuales, que las perpetúan –o no- y ejercen un control social sobre lo que debe ser aprendido y enseñado; *las autoridades educativas nacionales generales* (Ministro de Educación y miembros del Consejo Directivo Central de la Administración Nacional de Educación Pública, en el caso de Uruguay), que diseñan e implementan determinados planes generales para la educación, ya sea decidiendo que permanezcan los actuales como proponiendo reformas (en Uruguay, por ejemplo, en 2006 se comenzó a implementar un nuevo plan de estudios con grandes diferencias respecto del anterior); y *las autoridades educativas nacionales del ámbito de la Matemática* (Inspección de Matemática y sus asesores, en el caso de la educación secundaria en Uruguay) que son quienes participan en el diseño de los currículos escolares de Matemática, sugieren determinados libros de texto –y no otros–, y se encargan de la comunicación con los docentes: transmiten los lineamientos generales de los programas, promueven una coordinación entre los docentes de las diferentes instituciones de educación secundaria y evalúan sus prácticas de enseñanza. En ocasiones los propios *miembros de la comunidad científica matemática* son actores involucrados en este "momento": participando como asesores en la conformación de los programas, a través de cursos de divulgación entre docentes, a través de entrevistas o columnas en diarios o revistas, o escribiendo o asesorando en la escritura de libros de texto. En este "momento" los docentes no juegan un papel importante, más que como receptores de las especificaciones que las autoridades explicitan sobre ese tránsito.

b) *Las interacciones entre docentes y entre docentes y autoridades educativas*

En este momento los actores principales son las autoridades educativas nacionales, específicamente las de la Inspección de Matemática y directores de centros educativos, y los docentes. Las prácticas involucradas en este "momento" son las que se generan en reuniones de coordinación entre docentes (en donde se tratan cuestiones más específicas de la epistemología y la enseñanza de la asignatura), entre docentes y directores (en donde se tratan cuestiones más generales de la institución a la cual pertenecen) y entre docentes e inspectores, en nuestro caso de Matemática, en donde se explicitan lineamientos y expectativas de los programas, necesidades y dificultades que surgen en su aplicación, se coordinan prácticas, se unifican criterios, se temporalizan los contenidos (para asegurar que todos desarrollen los mismos temas terminado el curso, en caso de que no puedan cumplir con el programa en su totalidad). En este "momento" los docentes ya cumplen otro rol, en el que pueden discutir con sus colegas en una situación de paridad sus prácticas de enseñanza, expectativas, dificultades y concepciones en general de qué significa aprender y enseñar determinado conocimiento matemático.

c) Las prácticas educativas en el aula

En este "momento" los protagonistas son los docentes y los estudiantes, como miembros de la noósfera. Dentro del aula se produce otra instancia de institucionalización del saber sumamente significativa por lo que representa para el aprendizaje por parte de los estudiantes: ¿qué es lo que en definitiva el docente selecciona como un contenido de saber relevante, dentro de todos los que tiene que desarrollar, y cómo se los acerca a los estudiantes, qué método de enseñanza escoge para ello?

Creemos necesario enfatizar en que estos momentos transcurren simultáneamente y no uno a continuación del otro. Cualquiera de ellos es dinámico en el tiempo e influye continuamente sobre los demás. Los "etiquetamos" como a, b y c con el fin de identificarlos fácilmente en el escrito.

Como desarrollamos en el apartado 4.2.2, utilizamos como herramienta metodológica el ACD para el análisis de los procesos de institucionalización en el ámbito escolar, así como para estudiar la transición desde el ámbito científico al escolar. Ello nos condujo a la necesidad de analizar diferentes manifestaciones del discurso, entendido como "acción" (programas, libros de texto, opiniones de profesores), que detallaremos a continuación.

Para llevar a cabo el análisis de los procesos involucrados en el momento 'a' decidimos estudiar la evolución de los programas del curso de Matemática de último año de Educación Secundaria en Uruguay, especialmente en los cursos de las opciones "Medicina" e "Ingeniería". También se analizaron los programas de Formación de Profesores de Matemática, centrando en todos los casos el análisis en el concepto de límite. Se analizaron los programas vigentes y los anteriores con el fin de conocer cuál era la expectativa desde las autoridades educativas sobre la enseñanza del tema, y entender más la situación de los profesores al respecto. Este análisis también permitió observar qué libros de texto son recomendados por las autoridades educativas en matemática (en caso de que se recomendara alguno), que son quienes confeccionan los programas.

Se entiende que los libros de texto constituyen un testimonio valioso en el análisis del proceso de institucionalización, especialmente en este momento 'a'. Es por eso que se analizaron libros de texto, tanto actuales y disponibles en plaza en Uruguay para su uso en los cursos de secundaria como los libros de texto "de antaño", utilizados como referencia en los cursos de Secundaria y Formación Docente desde la segunda mitad del siglo XX.

Se analizaron también los apuntes que un profesor del Instituto de Profesores de Montevideo confeccionara para sus estudiantes, el cual es de suma importancia por su influencia sobre las concepciones y creencias de futuros docentes sobre lo que es el Cálculo y su enseñanza, así como sobre sus prácticas educativas futuras.

También se implementaron cuestionarios y entrevistas a docentes que permitieron dar cuenta de los procesos involucrados en los momentos 'b' y 'c'. En primer lugar se confeccionó y aplicó un cuestionario a docentes del curso de Matemática del último año de Educación Secundaria con diversas preguntas sobre el tratamiento didáctico del límite. El cuestionario se realizó a través de preguntas explícitas y directas, por lo que las respuestas de los docentes permitieron hacernos una idea de sus concepciones en torno a la enseñanza del límite. Estas concepciones dan cuenta, por un lado, de una manera particular de entender el por qué debe ser enseñado el concepto de límite en Educación Secundaria y cómo, en un contexto y época determinados. Estos elementos estarían brindando evidencias sobre el momento 'b' en el proceso de institucionalización, ya que son el tipo de concepciones que el docente va formando en la discusión con colegas y autoridades, en reuniones de coordinación. El tipo de preguntas que pretendía explicitar dichas concepciones eran, por ejemplo, ¿cree que es importante que esté este contenido en el programa de 6º? ¿Por qué? o ¿Con qué problemática cree que se encontraría en el transcurso del curso si en lugar de la definición utilizara un acercamiento intuitivo al concepto?

Por otro lado, las respuestas de los docentes al cuestionario dan cuenta de sus concepciones sobre sus prácticas educativas concretas en el aula, entendidas como actos discursivos para su análisis bajo la herramienta metodológica del ACD. Esto estaría brindando evidencias sobre el momento 'c' en el proceso de institucionalización. Algunas de las preguntas que se centraban en este aspecto eran, por ejemplo: ¿Presenta algún ejemplo? ¿En qué contextos: tabular, gráfico, situación extramatemática, analítico-algebraico? o ¿Propone alguna actividad en torno al concepto de límite previo a introducir la definición? O incluso ¿Realiza alguna actividad para promover el uso de cuantificadores o símbolos lógicos en general?

Por otra parte, hemos señalado en el apartado 1.2.2.2 que en Uruguay ha influido fuertemente la oralidad en la perpetuación del discurso escolar, predominando en ocasiones sobre aspectos escritos del mismo. Ello se debe, en parte, al difícil acceso a los libros de texto. Es por eso que también se realizó una entrevista con un profesor con cincuenta años de experiencia en Secundaria, Formación Docente y Universidad, la cual fue de suma importancia para extraer evidencias, especialmente sobre el momento ‘a’ en el proceso de institucionalización pero también para el ‘b’ y ‘c’, ya que el docente se detiene en experiencias acerca de cómo influían los libros de texto y los apuntes de clase sobre las prácticas de aula. Por su vasta experiencia se consideró que podía representar un testimonio significativo para la descripción de los procesos de institucionalización.

Por último, el análisis de los programas y su evolución condujo a cuestionarnos acerca de la manera en que los profesores “aceptan” sus modificaciones, y lo traducen en nuevos abordajes para el tratamiento del concepto de límite en el aula. El cambio de enfoque en los programas, que constituye en sí una evidencia del momento ‘a’ del proceso de institucionalización, influye a su vez sobre los momentos ‘b’ y ‘c’: para que el cambio sea efectivamente llevado al aula, es necesario que quienes los confeccionaron (autoridades educativas y expertos del ámbito científico) se reúnan con los docentes para explicitar su intencionalidad y características (momento ‘b’); además, es necesario que el docente elabore nuevas estrategias para su implementación en el aula (momento ‘c’).

Para indagar sobre la forma en que son aceptados dichos cambios por parte de los docentes, se llevaron a cabo dos entrevistas a docentes de secundaria con vasta experiencia en el dictado del curso de Análisis para sexto año de Educación Secundaria que oficiaron de testimonios de algunas de las concepciones de enseñanza de la matemática presente en el sistema educativo uruguayo. Se buscaba analizar cómo los docentes sintieron este cambio, para buscar evidencias sobre los diferentes momentos en el proceso de institucionalización del concepto de límite.

Con base en el cuestionario y entrevistas a docentes, se buscó reunir elementos sobre cuál es el papel que los profesores le asignan al límite en la estructuración de su curso; esto es, si consideran que la definición es inamovible, sustituible, imprescindible para la formación del estudiante, innecesaria o cualquier otra alternativa. También se pretendió dar cuenta de en qué medida el límite representa en esas prácticas docentes un rol de “estructurador” del Cálculo: qué tan importante es su tratamiento para la construcción y articulación de otros conceptos, como el de continuidad, derivabilidad o integrabilidad. Estos aspectos atenderían al momento ‘c’ en el proceso de institucionalización: el concepto de límite ya está institucionalizado en los programas y en el discurso de los docentes.

A su vez, se deseaba indagar por qué los docentes toman ciertas decisiones respecto al papel del límite y cómo influyen esas decisiones en las prácticas educativas. En particular, interesa indagar acerca de cómo influyen las exigencias de los programas en esas decisiones y cuál es el papel que los libros de texto desempeñan en el tratamiento escolar del concepto de límite. Explicitar estos elementos, daría cuenta de las prácticas de los docentes como agentes de la noósfera acerca de la manera en que es abordado hoy el concepto en clase, y de sus posibles alternativas.

El estudio de estos aspectos permitirá conformar una descripción más detallada de cómo se han producido los procesos de institucionalización del concepto de límite a lo largo de su desarrollo histórico, tanto en ámbitos científicos como en ámbitos escolares –objetivo central de la tesis–. Permitirá a su vez responder la pregunta formulada en el principio de la investigación: ¿por qué enseñamos hoy al concepto de límite de la forma en que lo hacemos?

Capítulo 5: Análisis de los procesos de institucionalización

Dedicaremos este capítulo al análisis de los procesos de institucionalización del concepto de límite, específicamente en el contexto educativo uruguayo. Hemos justificado, desde el planteamiento del problema, que realizamos dicho análisis atendiendo a la articulación entre dos ámbitos que identificamos como el ámbito científico y el ámbito escolar. También hemos constatado que cada uno de esos ámbitos precisa de un marco teórico y metodológico específico, ambos desarrollados en el capítulo 4. En ambos ámbitos el análisis es guiado por la identificación y descripción de prácticas (prácticas sociales, de referencia y actividades) que sustentan el proceso de institucionalización.

Emprendimos, por una parte, un análisis sociohistórico-epistemológico del concepto de límite, en el cual se describen las diferentes “etapas” de su evolución en los ámbitos científicos, atendiendo particularmente a la identificación de prácticas en cada una de ellas.

Por otra parte, para estudiar cómo esas prácticas son reinterpretadas en el ámbito escolar, llevamos a cabo un análisis del discurso, utilizando la herramienta metodológica que constituye el ACD, centrándonos específicamente en el contexto de la educación secundaria y formación docente en Uruguay. Como se mencionó en el capítulo anterior, se entiende que este análisis es importante para la fundamentación de la existencia de un proceso de institucionalización del concepto de límite, así como para su identificación y descripción. En este caso se analizaron las prácticas escolares, entendidas como las prácticas de referencia propias de este ámbito, así como las actividades explícitas que norman las prácticas sociales y de referencia. Desde esa perspectiva teórica-metodológica se analizaron las concepciones de los docentes sobre sus prácticas de enseñanza en base a cuestionarios y entrevistas; y libros de texto y programas, como testimonios escritos de ese proceso. El análisis de estas componentes entendidas como acciones que conforman el discurso permitiría describir los diferentes “momentos” que reconocemos en el proceso de institucionalización del concepto de límite, específicamente en el ámbito escolar. Dichos “momentos” se identificaron en el apartado 4.3.

5.1. Análisis sociohistórico-epistemológico al seno del ámbito científico

5.1.1. Etapas en el ámbito científico del proceso de institucionalización

Presentamos a continuación el análisis socioepistemológico del concepto de límite. El mismo se llevó a cabo siguiendo el modelo metodológico “esquema de prácticas”, descripto en el apartado 4.2.1 (Buendía y Montiel, 2009 a y 2009b), y condujo a la elaboración de una epistemología de prácticas para el concepto de límite de funciones.

La opción de esta metodología se debe a que para los intereses de la investigación, además de identificar las etapas que transitó el concepto de límite hasta llegar a su configuración actual dentro de la comunidad matemática, se intenta dar cuenta de las necesidades socioculturales a las que responde cada una de ellas. Ello permitirá discutir el papel de las prácticas sociales en el tránsito entre ellas. Estas etapas se identificaron a partir del análisis de diversas investigaciones (Bagni, 2005; Bertero y Trípoli, 2006; Blázquez y Ortega, 2002; Blázquez, Ortega, Gatica y Benegas, 2006; Juter, 2006; Kline, 1994; Sánchez y Contreras, 2000; Youschkevitch, 1976).

Existe un núcleo común en el saber que es lo que caracteriza a cada una de estas etapas, que es lo que explícita o implícitamente se acepta como válido en determinado momento por determinado grupo social. Podemos ver a esos núcleos como una institucionalización del saber en cuestión, ya que es la manera en que se presenta el saber en un determinado contexto institucional. La conformación de esos “núcleos de saber”, consensuados y aceptados como válidos, dan cuenta por sí solos de los matices que tiene una institución, en este caso la del saber validado en determinado contexto sociohistórico. En el tipo de análisis que proponemos interesa dar cuenta de quién realizó dicha validación, bajo qué circunstancias y qué relación tiene con el resto de los actores: Academia de Ciencias en un determinado año o evento (algún concurso), la “tradición científica” o una determinada comunidad de matemáticos reconocida por el resto de la sociedad como suficientemente idónea para ello.

1er etapa: la Antigüedad *(época griega)*

Se caracteriza por la consideración de problemas geométricos, con el problema del cálculo del área del círculo como ejemplo paradigmático. El límite surge en un ambiente geométrico–estático, principalmente en problemas en los que se quería determinar el área de una figura o el volumen de un cuerpo. Los principales trabajos a destacar son los de Hipócrates (S. V a.C.), quien utiliza el concepto para determinar el área de las “lúnulas”; de Eudoxo (408-355 a.C.) quien presenta de manera implícita el concepto de límite en las demostraciones por exhausión, cuando se quiere demostrar la validez de los resultados alcanzados de manera inductiva o empírica; y los de Arquímedes (287-212 a.C.), quien aplica este método para demostrar sus resultados referidos a áreas y volúmenes (Sánchez y Contreras, 2000). Existe un interés explícito por formalizar y validar dichos resultados. El método de exhausión surge como una alternativa al paso al límite, lo que era inviable en el momento por la ausencia del concepto de número real. De hecho, el propio concepto de función estaba en un estado incipiente en el momento, sólo se puede hablar de una "intuición del concepto de función" (Youschkevitch, 1976), caracterizada por la asociación con la representación tabular.

Es necesario destacar las paradojas propuestas por Zenón (480 a.C.) dirigidas a las concepciones pitagóricas del tiempo y el espacio como suma de infinitos instantes o puntos. Éstas pueden haber sido el motivo por el cual los trabajos posteriores se aferraran a la Geometría estática para eludir tratar con el infinito. Pasaron varios siglos para que estas paradojas fueran superadas y se lograra un avance en esta área del conocimiento. Para ello fue necesario el desarrollo simultáneo de otras herramientas matemáticas relacionadas, como el concepto de función y sus representaciones algebraica, analítica y geométrica; métodos algebraicos más potentes; sistemas de coordenadas; estudio de la variación infinitesimal.

2da etapa: siglo XVII

Esta etapa se caracteriza por la búsqueda de resultados para problemas físicos y astronómicos concretos, utilizando métodos infinitesimales. Las aportaciones de Kepler, Fermat, Cavalieri, Barrow, Newton y Leibniz, se encuentran dentro de dicho período (Bagni, 2005; Bertero y Trípoli, 2006; Blázquez y Ortega, 2002; Blázquez et al. 2006). Los matemáticos que trabajaron con métodos infinitesimales en el siglo XVII lo hicieron en un ambiente geométrico – dinámico; el móvil era el estudio del movimiento a través de prácticas relacionadas con la predicción, que motivaba la profundización en el estudio del Cálculo. El límite se presenta, nuevamente de manera implícita, vinculado a los problemas de cálculo de velocidades, pendientes, áreas, máximos y mínimos, etc. Los matemáticos de la época desarrollaron sus teorías en un ambiente más intuitivo, el afán por conseguir resultados dominaba sobre la búsqueda de argumentos y fundamentaciones sólidas (Kline, 1994).

Antes de que comenzaran a explicitarse las críticas a los fundamentos, los infinitésimos constituían una definición formalmente operable en el sentido de Bills y Tall (1998) ya que permitían crear o reproducir (significativamente) un argumento a pesar de no estar formalmente definidos respecto a los criterios actuales. Se podía a partir de ellos encontrar resultados y generar argumentos que fueron considerados válidos; sin embargo, al cuestionar dichos fundamentos, los infinitésimos perdieron su estatus de "definición formalmente operable".

Según Kline (1994), las criticas propuestas a los trabajos de Newton y Leibniz y de sus antecesores por Bernard Nieuwentijdt (en 1694) y el obispo George Berkeley (en 1734), pusieron de manifiesto precisamente este conflicto. Los 'infinitésimos' de Kepler, los 'indivisibles' de Cavalieri, el método de Fermat o de Barrow para buscar extremos, e incluso las 'cantidades evanescentes' de Newton y lo 'infinitamente pequeño' de Leibniz eran considerados como cero (despreciables) si aparecen como sumandos pero como pequeñas cantidades no nulas si aparecen como denominadores, a la vez que la suma de infinitesimales podía ser finita. Berkeley y Nieuwentijdt evidenciaron cómo dos concepciones contradictorias estaban siendo evocadas simultáneamente en los fundamentos de dichos matemáticos. Esto condujo a una búsqueda por mejorar los argumentos utilizados y marcó un hito en el desarrollo histórico del concepto, en lo que hace a la estructura de la matemática formal.

En respuesta a las críticas de Nieuwentijdt, Leibniz escribió en un manuscrito no publicado de 1695:

Será suficiente si, cuando hablamos de magnitudes infinitamente grandes (o, más estrictamente, ilimitadas), o infinitamente pequeñas (es decir, las menores a las que alcance nuestro conocimiento), se entiende que significamos cantidades indefinidamente grandes o indefinidamente pequeñas, es decir tan grandes o tan pequeñas como se quiera, de modo que el error que se pueda asignar sea menor que una cantidad establecida de antemano. (citado en Kline, 1994, p. 511)

Los trabajos de Newton y Leibniz conformaron una nueva manera de resolver problemas, y como nueva disciplina precisaba de nuevos fundamentos, que no se podían explicar con las herramientas teóricas conocidas hasta el momento. Las críticas a sus fundamentos pusieron de manifiesto esa falta de rigor, poniendo en tela de juicio la precisión y fundamentación de las nuevas técnicas y dando pie a una nueva etapa en el desarrollo del concepto.

3ª etapa: siglo XVIII

Se caracteriza por la transformación de los fundamentos del análisis infinitesimal. Dicha transformación se llevó a cabo, en parte, a través de la *generalización* de los métodos a otro tipo de funciones que fueron siendo consideradas por la comunidad matemática por resultar significativas en situaciones y problemas concretos, y en parte por el interés por *formalizar* los conceptos. Se requirió profundizar también en el concepto de función. Se destacan en esta época los trabajos de Euler, D'Alembert y Lagrange, quienes intentan fundar el cálculo en bases independientes de la geometría, utilizando el álgebra.

Euler promovió ese cambio en la fundamentación considerando funciones en lugar de variables, aunque el concepto de función no era el actual sino el formulado por Bernoulli: "una función es cualquier expresión analítica formada con la cantidad variable y con números o cantidades constantes" (Boyer, 1992, p. 558). Así, pretende eludir el trabajo con infinitesimales considerando el desarrollo en series infinitas de las funciones, aunque a veces la no consideración de su convergencia lo condujo a errores (Blázquez y Ortega, 2002).

Lagrange, interesado en dotar al cálculo infinitesimal del rigor de las demostraciones de la época griega, recurrió también al álgebra y al desarrollo en series de potencias para definir las funciones. Consciente de que no todas las funciones permitían ser consideradas de esa manera o al menos no en todos los puntos, descarta esos casos por tratarse de casos excepcionales. Pretendía de esta manera eludir la consideración del concepto de límite, lo que en principio tuvo aceptación entre sus contemporáneos. Sin embargo, más tarde fue abandonado precisamente por sus puntos débiles en la formalización: el asumir que todas las funciones admitían desarrollos en series de potencia, sin percatarse que el estudio de su convergencia involucra al concepto de límite (Kline, 1994).

A pesar de no haber conseguido por completo su objetivo (eludir los infinitesimales utilizando sólo herramientas algebraicas), tanto Lagrange como Euler contribuyeron a separar la fundamentación del análisis de la geometría y la mecánica. Estamos aquí frente a un proceso de despersonalización de los saberes, en el sentido en que lo plantea Chevallard (1991) en el marco de la teoría de Transposición Didáctica.

D'Alembert se fundamentó en los trabajos de Newton considerando su método de razones primeras y últimas como un método para encontrar el límite de esas razones. Su consideración explícita del concepto de límite lo condujo a ser uno de los primeros matemáticos en expresar una definición del mismo:

*Se dice que una cantidad es límite de otra cantidad, cuando la segunda puede aproximarse a la primera más que cualquier cantidad dada por pequeña que se la pueda suponer, sin que, no obstante la cantidad que se aproxima pueda jamás sobrepasar a la cantidad a la que se aproxima de manera que la diferencia entre una tal cantidad y su límite sea absolutamente inasignable. (*Citado en Blázquez y Ortega, 2002, p. 75).

Aunque con algunas diferencias (la consideración de las “cantidades” como monótonas y de la imposibilidad de que el límite sea alcanzado), se aproxima a la aceptada actualmente, formulada por Weierstrass en la siguiente etapa. Sin embargo, no fue suficientemente reconocida en su época por estar enunciada en lenguaje coloquial y no disponer suficientes herramientas algebraicas: esta etapa se caracteriza precisamente por una fuerte concepción algebraica.

4ª etapa: entre el siglo XIX y principios del XX

Los resultados obtenidos en la etapa precedente estaban fuertemente justificados gracias a un concepto de función según el cual a toda función se le podía transmitir las propiedades de continuidad, derivabilidad, integrabilidad de las funciones algebraicas más simples (polinomios y funciones racionales). Pero este fundamento dejó de ser válido cuando se precisó extender el concepto de función a otros contextos, debido a la consideración de nuevos problemas matemáticos y físicos, entre ellos el de la cuerda vibrante. También influyó el desarrollo de la enseñanza de la materia debido a una necesidad de *difusión* de las nuevas ideas.

Se consideran en este período principalmente los trabajos de Cauchy (1821) y Weierstrass, que se caracterizan por la *aritmetización* del análisis.

Bagni (2005) sostiene que las concepciones de Wallis, Mengoli, Gregory, Newton, Gregory of St. Vincent y Vitali eran generalmente relacionadas con sucesiones y series, y tenían en común el considerar al límite como una aproximación que no se alcanza, más como un *proceso* que como un *objeto* en sí mismo. Estas concepciones comparten además el hecho de ser expresadas principalmente en forma verbal, incluida la concepción de Cauchy. Es interesante destacar cómo en la obra de Cauchy sí existen indicios de considerar al límite como un objeto y no sólo como un proceso en las definiciones de número irracional y de superficie de círculo:

"... un nombre irrationnel est la limite des diverses fractions qui en fournissent des valeurs de plus en plus approchées. En géométrie, la surface du cercle est la limite vers laquelle convergent les surfaces des polygones inscrits, tandis que le nombre de leurs côtés croit de plus en plus... "

Cauchy (1821, p. 4)

Su obra C*ours d'Analyse de l'Ecole Royale Polytechnique. 1er Partie Analyse Algebrique* representa una piedra fundamental en el proceso de rigorización del Análisis, ya que es la primera en la cual el concepto de límite, y no el de infinitesimales, es usado como la base sobre la que se construyen el resto de los conceptos: continuidad de funciones, convergencia de series, derivada e integral. Por otra parte, existe un interés explícito de Cauchy por cimentar sólidamente el análisis, a diferencia de sus antecesores, quienes priorizaban la búsqueda de resultados a la fundamentación.

Aizpuru y Pérez-Fernández (1999) sostienen que una de las razones de la búsqueda de rigor en el cálculo infinitesimal es la necesidad de difusión, que supuestamente conduciría a una clarificación de los conceptos y principios. Sin embargo, señalan que ello no fue logrado por Cauchy al publicar este libro, el cual fue duramente criticado por su excesivo rigor por alumnos, colegas e incluso la dirección del centro (el *Conseil d'Instruction de la École Polytechnique*). Según los autores, las razones que impulsaron a Cauchy se originan en la preocupación por la debilidad lógica de los fundamentos del Cálculo.

En los Preliminares de la obra, Cauchy define el concepto de límite.

"Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière a finir par en différer aussi peu que l'on voudra, cette dernière est appelée la limite de toutes les autres."

Cauchy (1821, p. 4)

Como vemos, esta definición aún es imprecisa porque utiliza términos como "se aproximan indefinidamente…". Se ajusta a la mayoría de las funciones consideradas hasta la época, como las algebraicas, exponenciales o logarítmica, pero no es precisa si se la desea aplicar en otro tipo de funciones que estaban comenzando a considerarse.

Define infinitésimo y límite infinito para una sucesión a partir de esta definición de límite, y más adelante, después de definir la monotonía da ejemplos que permiten afirmar que era consciente de la diferencia entre monotonía y convergencia.

Cauchy establece además criterios de convergencia para límites indeterminados, en cuyas demostraciones se puede apreciar la precisión y claridad de su idea de límite. Utiliza estos criterios para la justificación de la existencia de diferentes órdenes de infinitos.

Según Aizpuru y Pérez-Fernández (1999), Cauchy identifica en su definición de función continua el aspecto esencial de la continuidad, a la vez que formula una definición de continuidad mediante sucesiones, muy útil en la demostración de teoremas. Sin embargo, la definición resulta confusa por hablar de continuidad en un intervalo y puntual a la vez. Esta definición ambigua puede ser el punto de partida de una concepción errónea en su teoría: que las propiedades de los términos de una sucesión se transfieren automáticamente a su límite (esto no es cierto si consideramos una sucesión de funciones). Esta confusión sólo se subsanará después, con el concepto de continuidad uniforme introducido por Heine en 1870.

Vale destacar que la reputación e influencia de la que gozaba en su cargo en las academias científicas de la época (la Academia Politécnica de Paris y la Sorbona, entre otras) permitieron que fueran sus ideas las que trascendieran, y no las de otros matemáticos que trabajaron en la misma dirección pero con diferentes métodos (Kline, 1994). Estos escenarios históricos permiten apreciar la influencia de las motivaciones personales y sociales en la construcción, evolución y difusión de los saberes matemáticos.

Es recién con Weierstrass que se introduce el uso de cuantificadores ya que realiza un esfuerzo por evitar el uso de la expresión “la variable se aproxima al límite” porque sugería –ambiguas- ideas de tiempo y movimiento. Esto permitió evolucionar entre la idea dinámica de límite (como un proceso) hacia la idea estática de límite (como un objeto). Así, presentó la definición que actualmente se enseña en los cursos de cálculo:

Si dado cualquier ε *positivo, existe un* δ *tal que para* $0 < n < \delta$*, la diferencia* $f(x_0 \pm n) - L$ *es menor en valor absoluto que* ε*, entonces se dice que L es el límite de f(x) para* $x = x_0$*.*

Blázquez y Ortega (2002, p. 77)

Esta definición sí se ajusta a la definición considerada actualmente de función, es decir, dada una función permite discernir si su límite para un punto dado del dominio es el que se intuye.

5ª etapa: siglo XX

Por último, se podría considerar una última etapa caracterizada por la generalización del concepto a nuevos contextos dentro de la matemática, gracias a la reciente consideración de los espacios topológicos como generalización de los espacios métricos, de los cuales el de la distancia habitual en el conjunto de los números reales es sólo un caso particular. El límite es, pues, una concepción topológica ya no tan estrechamente vinculada con una determinada definición de distancia y aplicable a funciones cuyo dominio y codominio ya no tienen por qué ser el de los números reales.

5.1.2. Las prácticas sociales en un análisis socioepistemológico

Puede observarse cómo la definición formal, actualmente consensuada en la comunidad matemática y expresada en términos de ε-δ, tiene una historia llena de momentos que responden a las necesidades e intereses de la época. Newton, Wallis, D'Alembert, Cauchy y Weierstrass, entre otros, fueron proponiendo diferentes definiciones. No hay una más correcta que la otra, sino que cada una debe ser interpretada en el contexto que le dio origen y de las demandas sociales o propias de la comunidad matemática a las que responde. La definición, en particular la de límite, no es única, sino que varía según el contexto socio-histórico en el que se considera, y no tiene por qué coincidir con la definición formal, que es la considerada como válida por la comunidad matemática en determinado momento y en determinado lugar (Tall y Vinner, 1981).

Pueden explicitarse en el desarrollo del concepto de límite ciertas *prácticas* que promovieron el desarrollo de herramientas matemáticas en cada etapa, la profundización de fundamentos y, posteriormente el tránsito entre ellas: la formalización, la predicción, la generalización, la difusión y la extensión a otros contextos. Sin que necesariamente sean explícitas en cuanto a objetivos a cumplir por algún investigador, sí cumplieron un papel normativo en el quehacer de los diferentes grupos sociales que participaron en la actual configuración del concepto. Es por este doble rol –generador de conocimientos y normativa del actuar humano- que proponemos considerarlas como prácticas sociales, desde la perspectiva de la teoría socioepistemológica.

En el siguiente esquema detallamos las características principales de cada etapa, el ambiente en el que se desarrolla el concepto, los móviles que promueven tal desarrollo y las prácticas sociales que lo norman.

Etapa	Período	Características principales	Ambiente en que se desarrolla el concepto	Móviles	Prácticas sociales
I	Grecia Antigua	Rigurosidad en demostraciones.	Geométrico-estático. En demostraciones por exhausión.	Determinación de áreas y volúmenes de cuerpos y figuras concretas.	Validación y formalización.
II	Renacimiento hasta S. XVII	Métodos infinitesimales. Trabajo intuitivo con poca fundamentación.	Geométrico – dinámico.	Estudio del movimiento. Resolución de problemas concretos.	Predicción.
III	S. XVIII	Transformación de fundamentos del análisis infinitesimal.	Analítico.	Extensión del concepto de función y su uso en lugar de "variables". Consideración de nuevos problemas.	Fundamentación rigurosa.
IV	S. XIX y principios S. XX	Aritmetización del análisis.	Algebraico – analítico.	Consideración de nuevos problemas ("cuerda vibrante", por ejemplo). Reconstrucción del concepto de función.	Formalización, generalización y difusión.
V	S. XX	Consideración de espacios topológicos como generalización de los espacios métricos.	Topológico.	Generalización del concepto a otros contextos.	Extensión y generalización

Esquema 4: Descripción de las etapas en el ámbito científico del proceso de institucionalización

Consideramos que la *formalización*, entendida como el proceso que sistematiza y da coherencia a un corpus matemático a través de una estructura lógico-simbólica apropiada, y la búsqueda de *generalización* de los conceptos involucrados a nuevas situaciones para resolver nuevas problemáticas parecen haber oficiado de móviles en las etapas 3 y 4, así como en la etapa 1, en la que se buscaba una demostración rigurosa a través del método de exhausión. A su vez, vimos cómo especialmente en la etapa 4 la búsqueda de una *extensión* de un concepto a otros contextos está jugando un papel importante para la explicitación formal del concepto: la definición fue cambiando hasta lograr una forma que se ajustara a cualquier tipo de función. A medida que el concepto de función cambiaba, fueron necesarios nuevos ajustes en la definición de límite.

La manera en que la necesidad de *generalización* influye sobre el concepto puede también apreciarse en la quinta etapa, en la que la definición toma una nueva forma para adoptarse a las exigencias de los espacios topológicos.

También la *transmisión y difusión* del conocimiento a un público creciente estaría promoviendo la clarificación y fundamentación del análisis para apoyarse en bases rigurosas, evitando los ambiguos fundamentos dados hasta el momento.

Por su parte, la práctica de *predicción*, mencionada en el esquema por normar las actividades matemáticas de la segunda etapa no estaba necesariamente vinculada al concepto de límite. No interesaba particularmente profundizar en ese concepto sino que el interés radicaba en la búsqueda de soluciones a problemas concretos.

Cada una de estas prácticas sociales ha ido normando, en cada una de las épocas señaladas, prácticas de referencia específicas que dan cuenta del paradigma en el que se situaban los matemáticos en dicha época. A su vez, estas prácticas de referencia son identificables a partir de las actividades explícitas y observables de cada matemático o grupo de matemáticos.

Presentamos a continuación el esquema de la epistemología de prácticas del concepto de límite funcional en el que se detalla para cada práctica social, la práctica de referencia que norma y las actividades propias de cada paradigma y que permiten identificar tal práctica de referencia. El mismo se ha ido conformando con los elementos analizados en este apartado. Toma como insumos algunos de los elementos que se explicitaron en el esquema 4, expuesto en este mismo apartado. Dado que una práctica social puede normar diferentes prácticas de referencia según el paradigma en el que se está interpretando, algunas de ellas aparecen más de una vez, ya que se organizó el esquema en función de las prácticas de referencia.

PS: FORMALIZACIÓN

PR: Matematización del cálculo en ambiente geométrico-estático.
Actividades:
- Cálculo de áreas y volúmenes.
- Refutación o demostración rigurosa por exhausión.

PS: PREDICCIÓN

PR: Matematización del movimiento en ambiente geométrico-dinámico.
Actividades:
- Búsqueda de resultados para problemas concretos.
- Trabajo con métodos infinitesimales.
- Priorización de la intuición.

PS: FORMALIZACIÓN-GENERALIZACIÓN-DIFUSIÓN

PR: Aritmetización del análisis en ambiente algebraico-analítico.
Actividades:
- Consideración de nuevos problemas.
- Reconstrucción del concepto de función.
- Confección de libros de texto.
- Dictado de cursos.

PS: GENERALIZACIÓN

PR: Generalización del análisis a ambiente topológico.
Actividades:
- Consideración de nuevas conjeturas.
- Extensión a nuevos contextos.
- Enunciado de nuevas definiciones.
- Demostración de nuevos teoremas.

Esquema 5: Epistemología de prácticas del concepto de límite funcional

En este apartado se ha descripto el proceso que vivió el saber matemático “límite funcional” en ámbitos académicos hasta llegar a la configuración actualmente aceptada. Hemos observado el papel que juegan en el transcurso de dicha descripción las prácticas– especialmente la de formalización y generalización- y por eso las hemos propuesto como *prácticas sociales*. Dichas prácticas son las que han normado las prácticas de referencia y actividades propias de cada etapa y constituyen el móvil que promueve la construcción del conocimiento consensuado en cada una de ellas.

Siguiendo el esquema de epistemología de prácticas de la socioepistemología, se identificaron prácticas de referencias que dan cuenta de los paradigmas propios del ámbito científico, así como actividades explícitas de los actores de este ámbito, que permitieron observar y describir dichos paradigmas. El cuestionamiento que nos planteamos ahora es: ¿cómo se reinterpretan las prácticas sociales en el ámbito escolar, específicamente en el sistema educativo uruguayo actual? ¿Qué prácticas de referencia norman y cuáles son las actividades específicas de los actores del sistema?

Como justificamos, para responder este cuestionamiento ya no podemos guiarnos por el mismo esquema de prácticas, ya que el mismo se refiere a un saber matemático, en este caso el del límite funcional, pero no es una herramienta apropiada para analizar las prácticas escolares, entendidas como prácticas de referencia en ese mismo sentido epistemológico. Es por eso que decidimos introducir la herramienta metodológica del análisis crítico del discurso, partiendo de la consideración del discurso como acción social. Esto es, todas las manifestaciones del discurso de los actores de la noósfera son entendidas como una acción, proveniente de una persona o grupo de personas inmersa en una sociedad determinada, con un paradigma específico.

5.2. El ámbito escolar en Uruguay: un análisis crítico del discurso

Entre los aspectos a considerar para identificar el papel de los diferentes actores en el reconocimiento del límite como un saber institucionalizado, en esta investigación abordaremos el discurso matemático escolar uruguayo en voz principalmente de los docentes, pero también se estudian aspectos del discurso escrito, como los libros de texto y los programas escolares. Este análisis lo llevaremos a cabo utilizando al Análisis Crítico del Discurso como herramienta metodológica, pero sin perder de vista nuestro marco teórico general, el de la socioepistemología. Desde esa perspectiva, entendemos a las prácticas escolares como las prácticas de referencia propias de este ámbito.

Varios de los principios que guían al ACD hacen referencia a la importancia del conocimiento profundo del contexto socio-histórico-cultural en el que están inmersos los actos discursivos que se analizan (el ACD se ocupa de los problemas sociales, el discurso constituye a la sociedad y a la cultura, el discurso es histórico, el vínculo entre el texto y la sociedad es mediado, el análisis del discurso es interpretativo y explicativo, el discurso es una forma de acción social). Es por ello que creímos necesario ampliar la descripción realizada del contexto educativo uruguayo en el primer capítulo, incluyendo un apartado en el que se desarrollara una descripción breve de la evolución de dicho sistema educativo desde la época de la Colonización.

5.2.1. Descripción de la evolución del contexto educativo uruguayo

5.2.1.1. Educación en Uruguay antes de la reforma vareliana

Según un documento confeccionado para la discusión en el marco de la conformación de un nuevo Programa de Educación Común, “desde la época de la Colonización, reconocemos que la Educación ha respondido a intencionalidades que reflejaban el pensamiento dominante de su época.” (Buzzetti, De León, Ramos, Salvá, Varela y Verges, 2007). En este período los españoles utilizaron a la evangelización como modelo educativo, a cargo de la Orden de los Jesuitas y de los Franciscanos. Actualmente, una de las instituciones educativas privadas de nivel preescolar, primario y secundario de mayor prestigio y tradición en Uruguay es precisamente un colegio de la Orden de los Jesuitas.

Durante los movimientos independentistas forjados en mayor medida por el caudillo José Gervasio Artigas, se comenzaron a defender los intereses de los ‘paisanos’ (término que hace referencia a la clase social más desfavorecida), promoviendo mejorar su situación moral e intelectual con el fin de consolidar un ideal revolucionario desde la educación. Se fundaron así en 1815 una escuela rural y una en Montevideo que atendían a estos lineamientos.

Después de lograda la Independencia Nacional en 1825, se crearon varias escueles fruto de la preocupación de la población por su educación pero sin una organización estable, sin un programa que unificara la educación nacional ni una adecuada preparación de los docentes para el ejercicio de su profesión, situación que se mantuvo hasta las últimas décadas del siglo XIX.

A pesar de haber logrado la Independencia, el estado aún se mantenía con una democracia inestable en el último cuarto del siglo XIX, lo que influyó sobre el contexto educativo: “Representantes de la burguesía y la oligarquía terrateniente (la Iglesia, el Ejército, los terratenientes y la clase política) consiguieron conformar un discurso y una acción en torno a la Escuela como institución del Estado. El proyecto buscaba el progreso a través de la razón, se proponía iluminar la mente de los hombres para combatir la ignorancia, para superar los males sociales evitando aquello que ponía en riesgo la democracia. La igualdad entre los hombres requería de una nueva moral, una moral que incluyera a todos, que sustituyera la moral religiosa (en Uruguay de la Iglesia Católica) por la moral laica. […] Desde esta perspectiva vemos como a la Escuela se le atribuía la función conservadora de transmisión de conocimientos y reproductora de valores de los sectores sociales hegemónicos validándolos para la sociedad en general.” (Buzzetti et al. 2007).

De esta manera la escuela legitimaba a la razón como forma de control social, en oposición a la educación religiosa, caracterizada por el dogmatismo. Se comenzaba a vislumbrar la necesidad de organizar un sistema educativo nacional que promulgara una educación universal, que defendiera las libertades y los intereses individuales de la sociedad, basado en una imagen racionalista del mundo y en una moral laica. El conocimiento tenía carácter de verdad absoluta y así debía ser enseñado. El modelo educativo era de carácter enciclopedista, intelectualista, centrando la atención en la exposición del docente y en la recepción pasiva por parte del estudiante. Si bien se promulgaba la igualdad en forma teórica, ésta no se daba por la vía de los hechos ya que la educación seguía defendiendo los intereses de las clases hegemónicas, lo que favoreció a legitimar la injusticia social.

5.2.1.2. José Pedro Varela y su proyecto social y educativo

En ese contexto surge el pensamiento filosófico y pedagógico de José Pedro Varela, difundido a través de sus obras “La Educación del Pueblo” (1874) y “La legislación escolar (1877) y que marca una ruptura con el modelo educativo anterior y una revolución social e intelectual. El principio básico es que el Estado no podía responder sólo a una parte de la sociedad (la población católica), sino a toda ella en su conjunto, por lo que las escuelas debían ser laicas y responsabilidad del Estado.

Según Ardao (1968), “…A integrar el pensamiento vareliano concurrieron dos grandes corrientes educacionales del siglo XIX, de naturaleza y proyecciones muy diferentes: la de la educación popular y la de la educación científica (...) Colocado en la confluencia histórica de ambas, realiza sobre la marcha su síntesis (…)”. La primera tenía como principal propósito el favorecer la educación del pueblo en su conjunto, y la segunda tenía la doble característica de promover la educación de las ciencias, a la vez que la consideración de le educación como una ciencia.

Se propuso y comenzó a implementar un plan nacional desde los 3 años de edad hasta la educación superior que atendiera a esos principios, fijando materias específicas, principios generales, criterios de evaluación y aspectos organizativos institucionales.

El proceso de industrialización provocó cambios profundos en la sociedad: cambios en la forma de producción, ampliación del Estado, transformación en la mentalidad de la población, entre otros, lo que provocó nuevas exigencias para la escuela. Es así que comienzan a influir nuevas corrientes filosóficas, especialmente la de los estadounidenses Charles Sanders Pierce y John Dewey que promovieron como alternativa a la Escuela Tradicional, la Escuela Nueva.

5.2.1.3. La influencia de la Escuela Nueva

Uruguay no quedó ajeno de estas nuevas tendencias filosóficas y pedagógicas que atendieran a las nuevas exigencias sociales de un país que comenzaba a estabilizarse política y económicamente y con un crecimiento cada vez mayor, en las primeras décadas del siglo XX.

Los cambios propuestos en el programa nacional se articularon en torno a los principios básicos de la Escuela Nueva: el principio de actividad (aprendizaje a través de la movilidad y la experiencia), el principio de realidad (necesidad de que la educación estuviera en consonancia con la sociedad), el principio de continuidad (la educación como construcción progresiva y constante), el principio de interacción (importancia de la reflexión crítica).

Los aportes de Jean Piaget dieron sustento a una teoría psico-cognitva que sustentaba y reflejaba estos principios generales. El aprendizaje era visto como un proceso de construcción interna.

Fruto de la estabilidad social y económica que vivía el país, varios directores de escuela permitieron una serie de nuevas experiencias llevadas a cabo por maestros formados, con un gran impulso innovador, las cuales promovieron, entre otros factores, la conformación de una nueva dimensión teórica de la Laicidad (Buzzetti et al., 2007).

5.2.1.4. La influencia de los organismos internacionales de crédito

Sin embargo, hacia fines de la década del ‘50 comenzaron a aparecer, en el país y en la región, señales de una decadencia general, provocada por la crisis en el modelo de desarrollo. Según Buzzetti et al., se comenzó un proceso de tensiones y polarizaciones que evidenciaban una ruptura de los consensos que había sustentado al modelo desarrollista. Esta decadencia dio paso, en 1973, a una Dictadura Militar que “implantó un régimen autoritario que prohibía la participación, fracturaba los vínculos sociales llevando a la sociedad al aislamiento y negación del diálogo” (Buzzetti et al, 2007, p. 19).

La Educación se vio afectada, en primer lugar, en términos económicos: no sólo el Estado invertía menos en ella sino que además los docentes y la población en general sufrían de un empobrecimiento generalizado. Por otro lado, la Educación sufrió un cuestionamiento público de ella misma y de la sociedad, al no cumplir con las expectativas deseadas. El fracaso escolar se adjudicó como una responsabilidad de la escuela misma, sin considerar otras variables como la masificación de la educación o la marginación de la población. Por último, nuevo régimen la utilizó como medio para difundir sus ideas y convertirlas hegemónicas, lo que se corporizó a través de un nuevo plan de estudios en 1976 para Educación Media y 1979 para Educación Primaria.

"De aquel mito de "la educación del pueblo" quedaba muy poco, se vivía una realidad de profunda injusticia que se veía como imposible de transformar. Ese determinismo social era tan fuerte que no se veía que la educación pudiera revertirlo." (Buzzetti et al., 2007, p. 20). La aparición de instituciones privadas para los sectores de elite o de clase media que aún apostaba en la educación aumentó la brecha entre las diferentes clases.

En ese contexto varios organismos internacionales como la Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO), la Comisión Económica para América Latina y el Caribe (CEPAL), el Banco Interamericano de Desarrollo (BID) y el Banco Mundial (BM), propusieron inversiones –préstamos- condicionadas a la realización de estudios para diagnosticar la situación y a sus correspondientes planes de acción.

En particular, en 1990 la Administración Nacional de Educación Pública (ANEP) encomienda a la CEPAL, a través de su oficina en Montevideo, un "Diagnóstico e Investigación sobre la Enseñanza Básica en Uruguay" con financiamiento del BID (Rama, 1992). Dicho diagnóstico fue realizado y difundido a través de varios informes y libros, y generó como resultado una reforma para Educación Secundaria en el año 1996, muy criticada y resistida por la mayoría de los docentes y estudiantes. Esta reforma fue primero probada en varios Institutos públicos de Educación Secundaria y más adelante implementada a nivel nacional, hasta el año 2005. Promovía un fuerte cambio en el currículum, integrando asignaturas que en planes anteriores se dictaban en forma independiente para formar áreas de conocimiento (Historia y Geografía se fundieron en "Ciencias Sociales" y todas las asignaturas de ciencias experimentales se fundieron en "Ciencias Naturales").

En el año 2005, tras nuevas elecciones nacionales, nuevas autoridades asumieron en el gobierno: por primera vez en el país el partido de izquierda, "de oposición" asumió el poder. Dado que los integrantes del Consejo Directivo Central (CODICEN) de la ANEP son designados por las autoridades políticas, éste sufrió un gran cambio a raíz del cambio de gobierno. Es así que en 2006 se comienza a implementar un nuevo plan de estudios para Educación Secundaria, volviendo a las asignaturas independientes y promoviendo una serie de cambios curriculares, así como nuevas opciones en el Bachillerato y una mayor flexibilidad entre las orientaciones.

5.2.1.5. Sistema educativo uruguayo actual

El sistema educativo uruguayo formal consta de tres años de Educación Preescolar, seis años de Educación Primaria y tres años de Educación Secundaria (ciclo denominado Ciclo Básico Único) como formación básica y obligatoria. Después de ello, los estudiantes pueden optar por realizar carreras técnicas o por continuar cursando en Educación Secundaria tres años más de Educación Media Superior (EMS o, lo que es lo mismo, BD: Bachillerato Diversificado). Ambas opciones los habilita a su vez a ingresar a la Universidad o Institutos que son de nivel terciario pero no pertenecen hasta el momento a la órbita de la Universidad (como los Institutos de Formación Docente, los de carreras técnicas como Enfermería, u otros).

Los tres años de Bachillerato Diversificado están compuestos por un primer año común, único para todos los estudiantes, y dos años en que los alumnos deben optar por una orientación

- en segundo año, las opciones son Científica, Biológica, Humanística y Arte y Expresión.
- en tercer año, las opciones son Social-Económica, Físico-Matemática, Ciencias Biológicas, Arte y Expresión, Social-Humanística, Matemática y Diseño y Ciencias Agrarias.

En ambos cursos existe un tronco común compuesto por asignaturas que se dictan con igual carga horaria en todas las opciones, y asignaturas específicas que hacen a la diversidad de cada opción. En segundo año Matemática es parte de ese núcleo común, pero la opción Científica tiene otra asignatura de Matemática por lo que tiene más carga horaria que las otras. En tercer año Matemática está fuera del núcleo común, a pesar de que aparece en todas las opciones como una asignatura específica (a excepción de la opción Arte y Diseño).

En el siguiente esquema se indica cuáles opciones se pueden tomar en tercer año de acuerdo con la orientación cursada en segundo, a la vez que se muestra la cantidad de horas docente[8] de Matemática que asigna el currículo en cada orientación[9]:

[8] En las escuelas secundarias en Uruguay se esctructura el horario de cada turno en lapsos de 40 o 45 minutos de clase dictada intercalados con lapsos de 5 o 10 minutos de tiempo libre. Generalmente se denomina "hora docente" a cada uno de esos lapsos de clase, y su duración varía en los diferentes institutos.
[9] Estos datos se refieren al plan 2006, vigente en el momento de realizar la investigación.

1º	Común (4)						
2º	Científico (10)		Arte y Expresión (5)	Biológico (5)		Humanístico (5)	
3º	Físico-Matemática (12)	Matemática y Diseño[10] (9)	Arte y Expresión (no)	Ciencias biológicas (6)	Ciencias agrarias (6)	Social-Humanística (5)	Social-Económica (11)

Esquema 6: Plan para Bachillerato Diversificado de la Reformulación 2006 del sistema educativo uruguayo

Todos los cursos de Matemática en tercer año tienen como parte de su programa una unidad de Análisis, que involucra, con mayor o menor profundidad dependiendo de la orientación, el estudio de las funciones de variable real. El concepto de límite se introduce como una herramienta para tal estudio y como concepto que permite formalizar los conceptos de continuidad, derivabilidad e integrales (tema que no está en todos los programas). En el apartado 5.2.2.4 se analizan con detalle la evolución de los programas más significativos para esta investigación.

En el ámbito terciario se ofrecen varias carreras, aquéllas en las que se profundiza en Cálculo (así se lo llama en esas carreras) en los primeros años son las carreras universitarias de Ingeniería, Arquitectura, Medicina, Agronomía, Licenciaturas (de Matemática pero también Física, Biología y otras de orientación científica), Química y Ciencias Económicas. El profesorado de Matemática ofrecido por el Departamento de Formación y Perfeccionamiento Docente es un ejemplo de una carrera terciaria no universitaria donde los estudiantes deben estudiar Análisis (así lo llaman en esta carrera).

5.2.1.6. La enseñanza del Cálculo y el rol del límite

Como mencionamos en el apartado 1.2.2.2, partimos de la hipótesis de que en la mayoría de los cursos de Cálculo en Uruguay para el nivel secundario o formación docente, se practica lo que Salinas y Alanís identifican como “modelo tradicional de enseñanza del cálculo” (2009, p. 357). Lo caracterizan a través de la consideración de una determinada estructuración del contenido como objeto de enseñanza y una determinada estrategia de enseñanza.

Con respecto al contenido matemático, señalan que se presenta estructurado de manera formal –atendiendo a las formas, sin significados reales asociados con las nociones y procedimientos del cálculo- y rigurosa –organizados según la secuencia definición-teorema

[10] A esta opción de tercer año se puede ingresar tanto por la opción Científico como por Arte y Expresión de segundo año, por eso figura debajo de ambas.

demostración. A continuación de esta presentación se estudian aplicaciones del contenido matemático expuesto. Esta presentación es muy parecida a lo que se puede ver en los libros de texto tradicionales.

La estrategia de enseñanza se limita a una exhibición de la estructura por parte del profesor. Se cuida el orden lógico de la presentación: "…para enseñar la derivada habrá que enseñar antes límites (porque la derivada es un límite) y para enseñar límites habrá que enseñar antes funciones (porque los límites son de funciones) y para enseñar funciones habrá que enseñar antes los números reales (porque son funciones de variable real)." (Salinas y Alanís, 2009, p. 362).

El estudiante ocupa un rol pasivo, y su aprendizaje es evaluado a través del dominio de técnicas: cálculo de límites y derivadas, aplicaciones rutinarias de la derivada, todas actividades que priorizan aspectos algorítmicos.

Consideramos que este tipo de enseñanza del cálculo es fruto de un proceso, que involucra muchas variables pero especialmente a las prácticas de los actores involucrados en ese proceso, que nosotros hemos dado en llamar "proceso de institucionalización". Según desarrollamos en el apartado 4.3, hemos detectado "momentos" en el ámbito escolar de ese proceso, a los que haremos referencia con frecuencia en el análisis que presentamos a continuación.

5.2.2. Descripción de las prácticas de referencia en el ámbito escolar

Describiremos en este apartado los elementos del discurso estudiados -cuestionario y entrevistas a docentes, libros de texto y programas- para brindar evidencias sobre los momentos del ámbito escolar a los que se hace referencia en el apartado 4.3. En un apartado posterior estos elementos serán retomados para explicar el desarrollo del proceso de institucionalización al seno del ámbito escolar, a través de los momentos descriptos en el apartado 4.3 y de la herramienta metodológica del ACD, desarrollada en el apartado 4.2.2.

5.2.2.1. El cuestionario

Uno de los principales grupos de actores analizado fue el de los docentes, y uno de sus actos discursivos analizados fue sus propias concepciones sobre el concepto de límite como saber a enseñar y sus prácticas escolares respecto de él. Consideramos que no sólo es importante analizar desde el punto de vista del investigador cuáles y cómo son las prácticas de referencia en el ámbito escolar, sino que también es importante estudiar cómo los actores involucrados en los diferentes momentos del proceso de institucionalización visualizan sus propias prácticas. Esto estaría dando cuenta también de cómo norman las prácticas sociales el actuar de dichos actores, en este ámbito específico.

El análisis de este aspecto del discurso se llevó a cabo en parte a través de un cuestionario a docentes y en parte a través de entrevistas a docentes, que se desarrollan en apartados siguientes. Es importante señalar que no proponemos un análisis del discurso matemático escolar, ni un análisis semántico o sintáctico del discurso, sino un análisis crítico del discurso, entendido como acción social. En este caso, las respuestas de los docentes al cuestionario son entendidas como actos discursivos que permiten visualizar algunos aspectos de los diferentes momentos en el proceso de institucionalización. Interesa analizar si las prácticas sociales identificadas en el ámbito científico permean el actuar de estos docentes, cómo aquéllas prácticas se ven reinterpretadas a través de determinadas prácticas de referencia por parte de los docentes. De esta manera, vemos cómo las prácticas de referencia son estrictamente "locales": restringida a un momento y ámbito determinados, a la vez que conforman ese mismo paradigma.

El cuestionario a docentes figura en el anexo II y sus respuestas en el anexo III. Constó de diez preguntas y se pidió a los docentes que les respondieran por escrito y las enviaran por correo electrónico, por lo que se les dio el tiempo que cada uno consideró necesario para responderlas. La primera pregunta pretende evidenciar las creencias de los docentes acerca de la pertinencia del tratamiento del tema en Secundaria. Las siguientes cuatro preguntas apuntan a conocer qué definición proponen y cómo: qué tipos de ejemplos y actividades introductorias presentan y la importancia que le otorgan al uso de cuantificadores en la presentación. Las preguntas 6 a 9 pretenden evidenciar sus creencias sobre aspectos cognitivos del proceso de aprendizaje del concepto, y la última tiene como intención averiguar si la práctica de los docentes se ciñe a un libro de texto específico o no.

De los ocho profesores que completaron el cuestionario, siete son egresados del Instituto de Formación Docente y uno es un estudiante avanzado. Excepto uno, todos han continuado su formación en Didáctica de la Matemática con cursos diversos de postgrado e incluso maestrías. Todos tienen varios años de experiencia como profesores del curso de Matemática de último año de Educación Secundaria en Uruguay, y uno trabaja en el Instituto de Formación Docente de Montevideo dictando clases de Análisis.

Todos los profesores coincidieron en que sí es importante la presencia del límite funcional en el programa de último año de Educación Secundaria, lo que se evidenció en las respuestas a la primera pregunta: *¿Cree que es importante que esté este contenido en el programa de 6º? ¿Por qué?* Las razones expuestas se pueden agrupar en tres grandes grupos: *intramatemáticas* referidas a la necesidad del concepto para construir y formalizar otros como la continuidad, derivabilidad, número real y constituir un contexto adecuado para trabajar diferentes registros de representación (verbal, numérico, tabular, gráfico y analítico); *cognitivas*, según las cuales el tratamiento del límite favorece un determinado nivel de abstracción; y *extramatemáticos*, como herramienta de interpretación y modelización.

La primera razón es la que aparece con más frecuencia: "para formalizar otros conceptos", "para reforzar el concepto de número real", mientras sólo una profesora menciona razones externas a la construcción propia de la matemática: "como herramienta de interpretación y modelización". Otra profesora es la única en mencionar razones consuetudinarias: "De acuerdo a como están estructurados los cursos de 6º y al enfoque esperado de acuerdo a la tradición pienso que el concepto debe ser tratado y debe formar parte del curso".

Entendemos que estas respuestas a la primera pregunta nos brindan evidencias sobre el momento "b" en el proceso de institucionalización del límite, caracterizado por la influencia que las interacciones discursivas entre docentes y entre docentes y autoridades educativas tienen sobre su concepción del concepto de límite como saber y su enseñanza. En este tipo de interacciones, influenciadas a su vez por su formación y su práctica cotidiana, los docentes van conformando una determinada concepción, en particular, una determinada idea de por qué el concepto de límite debe ser incluido en el currículo escolar y qué rol debe ocupar en dicho currículo.

En cuanto a las preguntas 2 a 5, entendemos que aportan evidencias sobre el momento "c" en la institucionalización del concepto de límite en el ámbito escolar: la actividad de aula. Ellas permiten explicitar las concepciones de los docentes acerca de sus propias prácticas educativas, que en cierta forma sugieren lo que ellos entienden por el "deber ser" del tratamiento escolar del concepto de límite. Las preguntas son las siguientes:

2. ¿Qué definición presenta? ¿Es la única? ¿Trabaja con alguna equivalente?

3. ¿Presenta algún ejemplo? ¿En qué contextos: tabular, gráfico, situación extramatemática, analítico-algebraico?

4. ¿Propone alguna actividad en torno al concepto de límite previo a introducir la definición?

5. ¿Realiza alguna actividad para promover el uso de cuantificadores o símbolos lógicos en general?

Todos los profesores manejan la definición en términos de épsilon–delta y muchos de ellos explicitan que trabajan con sus presentaciones equivalentes: con entornos, valor absoluto, distancia, desigualdades:

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \forall \ E_{l,\varepsilon} \ \text{existe} \ E^*_{a,r} \ \text{tal que} \ \forall \ x \in E^*_{a,r} \ \text{entonces} \ f(x) \in E_{l,\varepsilon}$$

$$\leftrightarrow \forall \ \varepsilon \in R^+ \ \text{existe} \ r \in R^+ \ \text{tal que si} \ 0 < \left| x-a \right| < r \ \text{entonces} \ \left| f(x)-l \right| < \in$$

$$\leftrightarrow \forall \ \varepsilon \in R \ \ \text{éxiste} \ r \in R^+ \ \text{tal que si} \ a-r < x < a+r \ y \ x \neq a \ \text{entonces} \ l-\varepsilon < f(x) < l+ \ \varepsilon$$

Tres de ellos mencionan la posibilidad de trabajar con el concepto a nivel intuitivo sin presentar la definición formal en algunas orientaciones. Por ejemplo, una profesora declaró: “En 6° de Medicina[11] el concepto de límite de una función lo trabajo en forma intuitiva y experimental con la utilización de calculadora y tablas, no doy la definición formal de límite.”

Destacan los ejemplos propios de la actividad matemática abstracta: trabajan con funciones, ya sea dadas por su expresión analítica, por su gráfico, por valores en una tabla o en lenguaje coloquial. Sólo dos de los profesores explicitan plantear situaciones externas al contexto matemático abstracto: la velocidad instantánea y el comportamiento de un analgésico odontológico.

Todos coinciden en la introducción del concepto a partir de un caso particular: aquél en el que el límite no es alcanzado. Se aprecia una gran variedad de actividades para significar el concepto (representaciones gráficas, verbales, analíticas, numéricas, tabulares, trabajo con entornos). Entre ellas destaca el análisis del comportamiento de funciones racionales cuyo denominador tiene una o dos raíces. Por ejemplo, una profesora propone la siguiente actividad:

Dada la función $f: R-\{2\} \to R \ / \ f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$, se pide

1. probar que $f(x) = x + 2$, $\forall x \in D(f)$
2. graficar f
3. ¿Para qué valores de x se verifica que $f(x) \in E_{4,1/2}$?

[11] Ciencias Biológicas en el esquema presentado en el apartado 5.2.1.5.

4. ¿Para qué valores de x se verifica que $f(x) \in E_{4,1/10}$?
5. ¿Para qué valores de x se verifica que $f(x) \in E_{4,\varepsilon}$?

Todos los profesores utilizan cuantificadores al escribir la definición de límite. Sin embargo, sólo tres de ellos proponen actividades específicas para promover su uso. Una de las restantes afirma: "…lo hago cuando lo necesito para expresar en forma de signos algo". Este punto es importante ya que el uso de la simbología y terminología adecuadas estarían mostrando la importancia otorgada a la *formalización* por parte de los docentes. Incluso mencionan explícitamente que las mayores dificultades para los estudiantes se encuentran "en la formalización de la definición" y "en la visualización de una necesidad para tal formalización".

Las preguntas 6, 7 y 8 también fueron diseñadas para detectar elementos que robustecieran el análisis del momento "c" en el proceso de institucionalización, pero desde el análisis por parte de los profesores de las dificultades que tienen los estudiantes con un abordaje del tipo que ellos plantean y la explicitación de las formas de evaluar:

6. ¿Qué dificultades detecta en los estudiantes al trabajar con esta definición?

7. ¿Qué obstáculos debe afrontar un estudiante que no comprende la definición de límite? ¿En qué "fallaría" o qué otro concepto le imposibilitaría construir?

8. ¿Cuál es el tipo de pregunta que realiza habitualmente en evaluaciones orales o escritas que el estudiante no responde o lo hace erróneamente por no manejar la definición de límite?

En cuanto a las implicancias que tiene para el seguimiento del curso la no comprensión de la definición por parte de los estudiantes, los profesores señalan, por un lado, "dificultades para la construcción de conceptos como el de derivada o continuidad"; por otro lado, "dificultades en la demostración de propiedades relativas al concepto".

La mayoría de los profesores manifiestan evaluar la comprensión del concepto mediante preguntas específicas, por ejemplo:

1. Indica si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. En caso de ser falsa dar un contraejemplo, si es verdadera demostrarla.

- $\underset{x\to a}{lím}\ f(x) = l \leftrightarrow \forall E^*_{a,r}$, *existe* $E_{l,\varepsilon}$ / *si* $x \in E^*_{a,r} \Rightarrow f(x) \in E_{l,\varepsilon}$
- $\underset{x\to 6}{lím}\ f(x) = 2 \Rightarrow$ *existe* $E^*_{6,r}$ / $\forall x \in E^*_{6,r}$ *es* $f(x) > 1$

2. Sea $f: f(x) = \dfrac{3x-6}{x+a}$, hallar $a \in R$, sabiendo que:

$$\forall E_{3,\varepsilon}\text{, } existe\ E^*_{0,r}\ /\ si\ \ x \in E^*_{0,r} \Rightarrow f(x) \in E_{3,\varepsilon}$$

3. Probar aplicando definición que: $\underset{x \to 2}{lím}(4x-3) = 5$

Esto evidencia la importancia que estos docentes le otorgan al tratamiento formal del concepto de límite y a su definición en términos de épsilon-delta.

La novena pregunta, *¿Con qué problemática cree que se encontraría en el transcurso del curso si en lugar de la definición utilizara un acercamiento intuitivo al concepto?*, fue diseñada para vislumbrar la consideración –o no- de abordajes alternativos por parte de los docentes cuestionados. Las respuestas a esta pregunta aportarían herramientas para el análisis del momento 'b' por evidenciar concepciones de los docentes que fueron institucionalizándose a partir de su formación, práctica e interacciones con colegas, así como permitir una descripción de la manera en que los programas curriculares influyen en dichas concepciones, pero también del momento 'c' ya que nos habla de cómo ven ellos sus prácticas educativas concretas.

A pesar de considerar ineludible un desarrollo de ese tipo, la mayoría de los docentes que respondieron el cuestionario coincidieron en que podría realizarse un abordaje intuitivo del concepto y la consecuente estructuración del cálculo prescindiendo de una definición formal de límite. Incluso una de las docentes precisa que "la definición es necesaria para la demostración de teoremas y esta demostración es exigida por los programas vigentes" lo cual resulta ser una razón externa a los intereses de docentes y estudiantes. Esto sugiere que cuando se decide qué tema tratar y cómo, las exigencias curriculares y consuetudinarias influyen más en los docentes que lo que ellos mismos piensan que se debería hacer.

Por último, la pregunta diez se refería al uso de los libros de texto en clase: *¿Qué libro de texto recomienda? ¿Lo utiliza en clase para trabajar este tema o para proponer ejercicios referidos al mismo?* La misma permitió encontrar elementos que robustecen el momento 'a' ya que da cuenta de cómo son utilizados los libros de texto, entendido como producto de una práctica de referencia específica de este momento en el ámbito escolar y que promueve un determinado tránsito del concepto "límite funcional" desde la comunidad científica hacia la escuela. Asimismo, aporta evidencias también sobre el momento 'c' ya que nos habla de un aspecto del tratamiento escolar del concepto.

Es interesante destacar que tres de los ocho profesores declaran directamente no recomendar ningún libro mientras uno utiliza apuntes confeccionados por él mismo. Esto podría estar indicando una falta de identificación por parte del profesor de su curso con algún libro de texto y que los libros de texto que se ofrecen en el mercado uruguayo no son adecuados para el enfoque que el profesor desea imprimirle al curso. Pero también existen otros factores que influyen para que la utilización de libros de texto no sea una práctica difundida en los últimos años de Educación Secundaria (Bachillerato Diversificado) en Uruguay, como el difícil acceso a ellos por parte de los estudiantes ya que mientras en los primeros años la institución les brinda un libro a cada uno, en los últimos años este costo corre por cuenta del estudiante. De entre los libros señalados por los docentes, tres son de autores uruguayos y dos de ellos son los que se analizan en el apartado siguiente.

En suma, con respecto a las preguntas que se esperaba que el cuestionario respondiera, se puede comentar, en primer lugar, que todos los profesores otorgan al concepto de límite un rol central en la estructuración del cálculo y de sus cursos en particular. Sólo algunos profesores mencionan que podría omitirse su tratamiento en determinados cursos que están orientados a una formación con poco énfasis en las ciencias. Pero en general, se deduce de las respuestas de los docentes que el límite es entendido como esencial para la construcción por parte de los estudiantes del resto de los conceptos tratados en el curso, como lo son la continuidad y la derivada.

A su vez, todos mencionan la definición en términos de épsilon-delta en alguna de sus presentaciones (distancia, valor absoluto, entorno, desigualdades) y sostienen presentarla con mayor o menor énfasis dependiendo del profesor y de la orientación elegida por los estudiantes del curso.

Algunos de los profesores sugieren que las exigencias del currículum inciden en el tratamiento del concepto en sus cursos: se ven obligados a presentar la definición formal para su uso en la demostración de teoremas y por la estructura formal que tradicionalmente se le ha otorgado al Cálculo incluso desde los cursos introductorios. En este contexto, la formalización a través de la demostración de propiedades y el respeto a la estructura –formal- del Cálculo surge como práctica que aporta significado a la definición de límite. Sin embargo, otros no cuestionan ello, simplemente lo realizan por convicción personal, porque creen que esa “es *la* manera de hacerlo”.

En suma, las respuestas a este cuestionario, entendidas como actos discursivos de un grupo específico de actores de la noósfera, nos han permitido describir algunas de las actividades normadas por las prácticas de referencia de los momentos ‘b’ y ‘c’ en el proceso de institucionalización: el intercambio de intenciones sobre la implementación del modelo del límite como saber a enseñar y la implementación propiamente dicha: lo que generalmente denominamos “prácticas de aula”, pero ahora entendidas como prácticas de referencia.

5.2.2.2. Libros de texto

Otro de los aspectos del discurso analizado fue el de los libros de texto, por considerar que aportaría evidencias para describir el momento ‘a’ en el proceso de institucionalización del concepto de límite: el tránsito del concepto “límite funcional” desde la comunidad científica hacia la escuela. En ese sentido se distinguieron a su vez dos “submomentos” en esa fase del proceso de institucionalización: uno caracterizado por los libros de texto que denominamos “de antaño”, escritos en la primera mitad del siglo XX y utilizados como referencia durante muchos años en Uruguay en los cursos de Secundaria y formación docente. El otro de los “submomentos” fue analizado a través de libros de texto “actuales”, escritos por profesores contemporáneos que ejercen actualmente su profesión y a la vez escribieron estos textos. En ambos casos el interés está en distinguir cómo el saber estructurado en ámbitos científicos es presentado para su divulgación con fines específicos de enseñanza: qué usos y prácticas de la génesis del concepto de límite son utilizadas –o no- para tal presentación.

Por último, también se analizaron los apuntes de un profesor de Profesorado de Matemática para su curso de Análisis I (curso de segundo año de la carrera de un total de cuatro), utilizados como referencia en dicho curso aún en 2010, año en que el curso es dictado por otros docentes. Este tipo de material también nos aporta evidencias sobre el momento ‘a’ en el proceso de institucionalización del concepto de límite, aún sin tener la estructura formal de un libro de texto. El mismo propone una determinada manera de estructurar el curso y un determinado rol para el concepto de límite en esa estructuración, que responde a su vez a un esfuerzo por explicitar conocimientos organizados en ámbitos científico-matemáticos para su divulgación escolar, con el agregado del efecto multiplicador que implica el ser diseñado para futuros docentes.

Una vez más, veremos cómo nuestro análisis se distingue del de un análisis del discurso matemático escolar desde la perspectiva socioepistemológica: no nos interesa específicamente comparar las definiciones, problemas o ejemplos que se manejan en cada libro, o qué tipo de argumentos presentan los autores para fundamentar sus observaciones y el "hilo conductor" de su discurso. En nuestro caso interesa analizar el papel de los libros de texto en el proceso de institucionalización: qué actores lo escriben, qué intencionalidad tienen, si son elegidos por las autoridades para recomendarlos en los programas y si son usados en las clases por los docentes, cómo y por qué. Pero también interesa analizar cómo las prácticas sociales permean el actuar de quienes escriben los libros de texto, específicamente si priorizan la formalización en su presentación y cuál es el rol que le asignan al concepto del límite dentro de la estructuración del cálculo en su libro: si es utilizado como pilar teórico para otros conceptos como el de continuidad y derivabilidad y así ganar en generalización de los resultados presentados, o si es utilizado como una herramienta práctica para resolver problemas, o qué otro rol se le otorga.

Para procesar la información concerniente al contenido de los libros se atendió, por un lado, a sus aspectos formales: título, autor/es, editorial, año de edición, plan de estudios, y un resumen del contenido de los capítulos relacionados con el límite. Por otro lado se atendió a la manera en que se define y organiza el concepto de límite a lo largo del texto, la presencia o no de representaciones gráficas o simbólicas y la manera en que son introducidas y utilizadas, la presencia de problemas propuestos para introducir o desarrollar el tema, así como de ejercicios de aplicación y planteo o no de su resolución, la explicitación de los objetivos que los autores pretenden conseguir, el modo en el que se intenta que el alumno aprenda el conocimiento expuesto, la presencia o no de situaciones externas al contexto matemático abstracto en las secuencias de enseñanza, el método de demostración propuesto por el autor y el lenguaje utilizado (formal o coloquial).

Para cada libro se confeccionó una ficha que se incluye en el anexo IV, lo que permitió su descripción y análisis entendidos como actos sociales discursivos. A continuación se presenta un resumen de la descripción realizada, enfatizando en los aspectos más significativos de cada libro en lo que hace al objetivo de la investigación.

5.2.2.2.a De antaño

Se analizaron dos de los libros de texto que utilizados como referencia en los cursos de nivel secundario y de formación de profesores desde los años '50 o incluso anteriores. En particular fueron dos de los que mencionó el docente a quien se le realizó la entrevista que se describe detalladamente en el apartado 5.2.2.3. Los libros analizados son: *Elementos de Análisis Algebraico* (Rey Pastor, 1962, Primera edición: 1917) y *Análisis Matemático* (Rey Pastor, Pi Calleja y Trejo, 1952). Especialmente el segundo es un libro que aún hoy es utilizado por algunos profesores como libro de referencia.

El autor común de ambos libros, Rey Pastor (1888-1962) fue un matemático español que en 1920 se radicó en Argentina. Allí obtuvo un cargo en la Universidad de Buenos Aires, por lo que además de interesarse por la divulgación científica, dedicó gran parte de su labor a la enseñanza y la escritura de libros para estudiantes, como es el caso de los dos mencionados. (Ríos, Santaló y Balanzat, 1979)

En el primero de los libros citados sólo se trabaja con el concepto de límite de sucesiones, en el marco de la formalización del concepto de número real y con el fin de completar la operatoria sobre ese conjunto. En el segundo sí se trata el concepto de límite de funciones de una variable real, ubicándose como un concepto clave en la estructuración del Cálculo, es utilizado como generador y formalizador de todos los conceptos generalmente tratados en Análisis: continuidad, derivabilidad, integrabilidad.

En ambos textos el autor prioriza los métodos deductivos por sobre los inductivos y la utilización del lenguaje simbólico y formal por sobre el coloquial. Asume que todas las explicaciones verbales y gráficas que no están en el libro se pueden brindar en forma oral en las clases correspondientes al curso, lo cual se explicita en el prólogo del segundo de los libros mencionados. El autor pretende mostrar una exposición sistemática, lógicamente encadenada. Se evitan intencionalmente detalles relativos a la historia de la ciencia o disquisiciones metafísicas, considerados superfluos o secundarios.

"Si por llegar rápidamente a las aplicaciones del Cálculo infinitesimal, resucitamos antiguas definiciones de curva, de tangente, de infinitésimo, de diferencial […] todo deberá descansar en una fe ciega y aceptarse como dogma, sin que sea posible desarrollar y despertar el espíritu crítico" (Rey Pastor et al., 1952, p. XX). Esta cita explica la necesidad que el autor siente de estructurar el Cálculo sobre el concepto de número desde el punto de vista algebraico y el concepto de límite aritmético, con el objetivo de dotar de claridad y precisión a su discurso.

La ausencia de preguntas abiertas (sin una respuesta inmediata en el texto, que pudieran dar lugar a la reflexión por parte de los estudiantes), actividades de exploración, problemas o ejercicios resueltos o para que el estudiante resuelva, traduce una idea de una matemática ya hecha, externa al estudiante y autocontenida, ya que tampoco se analizan fenómenos extramatemáticos que evidencien la necesidad del tratamiento de los conceptos involucrados.

5.2.2.2.b Actuales

Los textos actuales analizados fueron *Matemática A para 6º año. Funciones reales* (Giovannini, 2001) e *Introducción al análisis matemático* (Belcredi, Deferrari y Zambra, 2001). En este caso, los autores de los libros de texto son profesores uruguayos de nivel secundario contemporáneos. Los autores del segundo libro han trabajado durante muchos años como profesores de Matemática en grupos en institutos de nivel secundario, mientras el primero se desempeña generalmente como profesor “particular”[12].

La elección de los mismos se basó en dos criterios: su origen (son libros escritos por profesores uruguayos para los cursos que se dictan en Uruguay) y su “popularidad” entre docentes (son de los libros más utilizados y recomendados para los estudiantes). En ambos los autores declaran la intencionalidad explícita de que los libros sean un apoyo para estudiantes de 6º año de Secundaria. Afirman que en los mismos se utiliza un “lenguaje simple, evitando el uso de cuantificadores” (Giovannini, 2001, prefacio p.1), priorizando el entendimiento al excesivo formalismo y las introducciones intuitivas. Sin embargo, los tipos de problemas que presentan tanto en la introducción como de aplicación son intramatemáticos y los ejercicios de aplicación requieren de la utilización correcta de los cuantificadores o de “reglas” algebraicas establecidas inmediatamente después de enunciada la definición formal de límite. El espacio dedicado para el tratamiento intuitivo es menor que el dedicado a la algoritmia y práctica rutinarias. El desarrollo es secuencial, con un tránsito de lo intuitivo a lo formal. No se presentan preguntas abiertas ni actividades de exploración para construir conceptos.

Si bien se presentan los conceptos a través de ejemplos y con un lenguaje coloquial, se presentan en la secuencia definición – propiedad – demostración – ejercicios. De ello se infiere que el rol del estudiante es el de comprenderlos, memorizarlos y aplicarlos en la resolución de ejercicios –con especial énfasis en la práctica algorítmica en el caso del límite: cálculo de límites funcionales como fin en sí mismo, no como un medio para resolver un problema o graficar una función–.

En cuanto a los contenidos, el concepto de límite aparece junto al de número real como estructurador de los demás conceptos del curso: los textos comienzan con un capítulo dedicado a la estructuración y propiedades de los números reales, otro dedicado a la definición y propiedades del concepto de función, y a continuación se desarrolla el concepto de límite, que sirve de cimiento para el resto de los conceptos tratados: continuidad, derivada,

[12] En Uruguay se denomina profesor “particular” a las personas que, extraoficialmente, se desempeñan como profesores de pequeños grupos, o incluso individualmente. Generalmente los estudiantes asisten a clases regulares dentro del sistema oficial de Educación secundaria, y asisten por su cuenta a estas clases “particulares” con el objetivo de aprobar una prueba o examen específico

integrabilidad, etc. Belcredi et al. (2001) trabajan previamente con sucesiones y límite de sucesiones para dar después paso al concepto de límite en funciones de variable real.

En Giovannini (2001) el capítulo de límite comienza con una serie de ejemplos, a partir de los cuales se introduce la definición de límite. La denomina "introducción intuitiva" (p. 58) a la definición formal verbal:

> *"Se dice que el límite de f(x) es b para x tendiendo al valor a y lo notaremos* $\lim_{x \to a} f(x)$ *si para todo entorno de centro b, existe un entorno reducido de centro a, inluido en su dominio, tal que: si x pertenece a ese entorno reducido los correspondientes valores funcionales pertenecen al entorno de centro b".*
>
> Giovannini, 2001, p. 58

A continuación se presentan diversas versiones de la misma definición escrita con lenguaje simbólico, utilizando cuantificadores. Después de enunciada la definición se procede al desarrollo de todas las propiedades relativas y sus demostraciones sin intercalar ejemplos o ejercicios resueltos que den cuenta del objetivo o la necesidad de introducir el concepto en el curso.

5.2.2.2.c Apuntes de Profesor de Formación Docente

Hemos comentado que muchos profesores prefieren elaborar sus propios apuntes. Ello da cuenta por sí mismo de la complejidad de la situación de la enseñanza del Cálculo en Uruguay: ¿Por qué es necesario confeccionar apuntes para un curso dado que existen tantos textos para el mismo? Una de las razones sería la falta de disponibilidad de textos en el país, por un lado, pero también la disconformidad del grupo de profesores con los textos existentes. Éstos son producidos por autores que no son necesariamente profesores, para ser utilizados por docentes en prácticas de aula ajenas a los autores. Por su parte, los apuntes escritos por el profesor del curso de Profesorado son especialmente diseñados para su utilización por parte del mismo profesor en sus clases (o de colegas que comparten el curso).

Tomando en cuenta esta característica del contexto uruguayo, se analizaron los apuntes que un profesor del Instituto de Profesores de Montevideo confeccionó para sus estudiantes (De Olivera, 2008). Es importante señalar que si bien esta persona se desempeña como profesor en el Instituto de Profesores, su formación es la de matemático. Esto implica de que su práctica de confección de apuntes con la finalidad de que los usen sus alumnos o alumnos de sus colegas, no debe ser vista como la de un representante del grupo de docentes, sino más bien como la de un representante del grupo de los matemáticos, inmerso activamente en la comunidad matemática. Es por esto que consideramos también a este acto discursivo como un elemento que puede favorecer las explicaciones relativas al momento ‘a’ en el proceso de institucionalización, que se refiere a cómo las prácticas de los actores influyen sobre la conformación del concepto de límite como un saber a enseñar, legitimándolo en el currículum.

Si bien el autor explicita en la *Introducción* que se espera del lector una actitud activa, en definitiva se traduce la misma concepción de Matemática que en los libros analizados previamente: la de una Matemática ya concebida, externa al sujeto que aprende y la de un estudiante cuyo rol se circunscribe a comprender y aplicar. Ello se infiere del tipo de tratamiento, con la misma secuencia definición – propiedad – demostración – ejercicios a la que se hizo referencia en relación a los libros de texto de Secundaria. En este caso también se opta por trabajar primero con sucesiones, límite de sucesiones y series numéricas, para introducir después el trabajo en límite de funciones a través de los teoremas de pasaje.

A diferencia de los libros para Secundaria, en estos apuntes los ejercicios propuestos son de tipo no rutinario, lejos de enfatizarse el aspecto algorítmico del concepto, se promueve la reflexión sobre los conceptos relativos al de límite con actividades intramatemáticas. A modo de ejemplo se transcribe el siguiente ejercicio:

> *13. Considere el siguiente error tipográfico en la definición de límite:* $f: X \to R$, $a \in X'$; $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ *tal que si* $x \in X \cap E^*_{a,\varepsilon} \Rightarrow f(x) \in E_{L,\delta}$. *Probar que f cumple esta condición si y sólo si es acotada en cualquier intervalo acotado de centro a. En caso afirmativo, probar que L puede ser cualquier número real.*
>
> *De Olivera, 2008, p. 205.*

Tampoco en este caso se introduce el concepto ni se presentan aplicaciones en situaciones extramatemáticas.

Vemos cómo el análisis del discurso de los libros de texto, entendidos como actos sociales discursivos, nos brinda herramientas para la descripción de la práctica de referencia relativa al momento ‘a’ del ámbito escolar en el proceso de institucionalización: la conformación del límite, entendido como un saber sabio que identificamos como la cristalización de las prácticas del ámbito científico, en un saber a enseñar. Los escritores de libros de texto, así como los demás actores de la noósfera que de una u otra manera los recomiendan o utilizan – u optan por no utilizar- influyen a través de su actuar en la conformación de una determinada manera de entender el concepto de límite y su rol dentro de la estructuración del cálculo.

Dicho actuar está signado por sus intereses personales y grupales pero también normado por las prácticas sociales del ámbito científico, que se reinterpretan en este nuevo ámbito dando cabida a una práctica de referencia específica del paradigma de este momento ‘a’.

5.2.2.3. La entrevista

Recomendar o trabajar con libros de texto en el aula es una práctica poco frecuente entre docentes de Matemática en Uruguay. Los docentes que respondieron el cuestionario dieron cuenta de ello.

Evidentemente, este hecho hace más difícil el “rastreo” de los procesos de institucionalización del concepto de límite en el sistema educativo uruguayo, por lo que se decidió enriquecer el análisis realizado hasta el momento con una entrevista a un docente con cincuenta años de experiencia con el fin de conocer sus creencias acerca de la construcción de la vida escolar del concepto, más allá de lo que puedan indicarnos documentos oficiales o libros de texto. Este profesor dictó clases en Secundaria, Formación Docente y Universidad durante su carrera, por lo que conoce sobre el funcionamiento y evolución de los tres sistemas, a la vez que ha representado un “ejemplo” a seguir por su vasta experiencia por otros profesores o estudiantes de profesorado que comenzaban a trabajar.

A diferencia de los cuestionarios, que buscaban robustecer la descripción de los momentos ‘b’ y ‘c’ en el proceso de institucionalización del límite, con esta entrevista se buscaban elementos que favorecieran la descripción del primer momento, el referido a la transición del concepto entre el ámbito científico y el escolar. Por eso la importancia de que el docente no sólo tenga experiencia como profesor de Secundaria y Formación Docente, sino que su formación es la de la Universidad: es ingeniero y ha trabajado durante toda su carrera como investigador y docente del Instituto de Mecánica de los Fluidos de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de la República. Sin embargo, se encuentran también a lo largo de la entrevista elementos referidos a los momentos ‘b’ y ‘c’, ya que el docente se detiene en experiencias acerca de cómo influían los libros de texto y los apuntes de clase sobre las prácticas de aula. Ello favorece que este elemento del discurso analizado nos brinde herramientas para identificar y describir las tres prácticas de referencia señaladas hasta el momento, específicas de cada ámbito: la conformación del límite, entendido como un saber sabio, en un saber a enseñar; el intercambio de intenciones sobre la implementación del modelo del límite como saber a enseñar y la implementación en el aula.

La entrevista fue realizada por correo electrónico: en una primera instancia, después de describir sucintamente el objetivo de la investigación, se le cuestionó acerca de cuáles fueron los libros de texto que utilizados como referencia en los cursos de Cálculo a lo largo de su experiencia como docente y en los diferentes ámbitos en los que se ha desempeñado. A partir de la respuesta brindada por el docente, se creyó necesaria una segunda instancia con dos nuevas preguntas: ¿Por qué los profesores del momento insistían tanto con cursos tan "fuertes"[13]que ni siquiera los libros de texto que había en el momento se adecuaban a esos cursos? y ¿en qué se basaban esos apuntes, es decir qué los inspiraba: alguna influencia de la manera de enseñar en algún otro país, por ejemplo, o qué?

Según este profesor, "en la década del '50 (y muy posiblemente también en la del '40) se dictaban regularmente cursos en Facultad de Ingeniería y en Preparatorios para Ingeniería (dependientes de Secundaria) en los cuales se usaba sistemáticamente la definición épsilon-delta para límites". Menciona más adelante que incluso desde fines de la década del '30 los cursos eran más "fuertes" que ahora: "allí no se daba límite de sucesiones ni funciones reales, sino funciones de varias variables, funciones de variable compleja y ecuaciones diferenciales; el cálculo diferencial de una variable se dejaba para Preparatorios[14]".

Explica el docente que dado que en ese momento muchos de los profesores del denominado Preparatorios, eran también profesores de universidad, o habían sido formados en ella, tendían a dar cursos que precisamente prepararan para esos cursos de Universidad. Influyen aquí otros factores: la cantidad de alumnos –extremadamente reducida con respecto a la actual- y el objetivo que se perseguía con los cursos de Bachillerato –fines propedéuticos para determinadas carreras universitarias y no objetivos de formación general del ciudadano, perseguidos actualmente-. Así, el docente sostiene que cuerpo de docentes requerido para dictar Matemática en cursos de Preparatorio o Universidad de la carrera de Ingeniería era reducido y homogéneo, existían acuerdos implícitos más fácilmente llevables a la práctica. Y uno de ellos era el de "demostrar todo", lo que da cuenta del gran énfasis que se ponía sobre la estructuración rigurosa de la Matemática en general y en particular del Cálculo. Esto fue transmitido a alumnos –futuros docentes- como una gran virtud del sistema escolar uruguayo.

Según este profesor: "la baja matrícula y lo homogéneo de los cuerpos docentes permitió un logro que no podrá volver a ocurrir, a saber: aprovechar la edad de los 16 y 17 años, cuando

[13] Con el término "fuerte" el profesor se refiere a la formalidad y rigurosidad en los cursos y al nivel de profundización en los contenidos tratados.

[14] "Preparatorios" es el nombre que anteriormente se le daba al último ciclo de Educación Secundaria, compuesto por los dos últimos años (16 a 18 años). Actualmente se lo denomina "Bachillerato".

el estudiante es ya capaz de abstraer y de comprender una teoría formal, para obtener de él, en un momento de su vida en que su capacidad de aprendizaje está en un máximo, una importantísima formación e información. Cuando la matrícula estudiantil creció y se empezaron a dictar cursos de 5º y 6º [de Educación Secundaria, los correspondientes a Bachillerato] en todos los liceos del país sin disponer de docentes adecuados, toda la situación anterior decayó y ahora estamos en el pantano que todos conocemos".

Con respecto a los libros de texto, las dificultades para el acceso a ellos provocó que las herramientas que tenían para estudiar los alumnos eran básicamente los "apuntes teóricos" de clase y "juegos de apuntes a mimeógrafo de algunos de los principales profesores del IAVA[15]" Además, según escribe el propio profesor, nadie recurría a los libros de texto porque "eran bastante diferentes al desarrollo de los cursos".

"La principal herramienta de estudio para el [curso] teórico eran los apuntes individuales que sacábamos cada uno de nosotros. Los apuntes de ciertos docentes se recomendaban como complemento de lo dado en clase. Algunos de esos apuntes ni siquiera fueron confeccionados por el docente en cuestión. Por ejemplo existían unos 'Apuntes del Prof. Forteza' que fueron confeccionados por un grupo de estudiantes que sacó apuntes del curso de Forteza, luego los pasó en limpio y Forteza le hizo una revisación final, y así se imprimieron."

"[…] los mismos no fueron redactados con una intención especialmente didáctica sino como resumen de los temas dictados. Creo que lo mismo se puede decir de los denominados 'Apuntes del Prof. Ciganda' (creo que de calidad inferior a los anteriores). Existían también los 'Apuntes de Vales'. Estos son anteriores a los demás (probablemente de los comienzos de los 50') y fueron redactados por el propio Vales (no con intención didáctica sino para incorporar temas que no se encontraban fácilmente en los libros)."

Estos extractos de la entrevista dan cuenta de la importancia de la tradición oral-escrita en las prácticas de aula propiamente dicha y transmitida de docentes a profesores sucesivamente para los procesos de institucionalización del Cálculo en general y particularmente del concepto de límite en el sistema educativo uruguayo. Dado que estos apuntes no eran necesariamente escritos por los docentes, sino que en su mayoría eran escritos por los estudiantes que asistían a sus clases, este tipo de documentos involucra esos dos aspectos: lo que expresa *oralmente* el docente (o eventualmente escribe en el pizarrón) y lo que el estudiante rescata en sus apuntes *escritos*.

[15]Primer Instituto de Educación Secundaria del país que albergaba en el momento a la mayoría de estudiantes que cursaban Ingeniería.

Sin embargo, sí existían en el país algunos –pocos- ejemplares de libros de texto que fueron construyendo las bases para esos cursos en el IAVA o en Universidad en función de los cuales fueron estructurándose los demás cursos. El profesor menciona: *Elementos de Análisis Algebraico* (Rey Pastor, 1962, Primera edición: 1917), *Elementos de la teoría de Funciones* (Rey Pastor, 1967, Primera edición: 1918), *Análisis Matemático* (Rey Pastor et al.,1952), *Lecciones de Análisis Matemático (Hardy, 1962, Primera edición: 1908)*. Y más adelante, libros que tuvieron influencia sobre el sistema educativo uruguayo desde la década de los ’70: *Calculus* (Apostol, 1967), *Fundamentos de Análisis Moderno* (Dieudonné, 1966) y *Principios de Análisis Matemático* (Linés, 1991), así como traducciones de libros rusos, americanos, etc. Resaltó entre ellos a dos de los de Rey Pastor por su difundida utilización en la preparación de cursos y como referencia de los estudiantes. Ello condujo a la decisión de analizarlos en el apartado 5.2.2.2.*a*.

5.2.2.4. Los programas

Otro de los actos discursivos analizados, de tipo escrito, fue el de los programas del sistema educativo uruguayo de cursos que involucran conceptos de Cálculo Diferencial de una variable o Análisis, poniendo especial foco en la manera en que se propone trabajar con el concepto de límite. Se estudiaron los programas vigentes y los correspondientes al plan anterior al vigente. Interesan en particular dos instancias: la del curso de sexto año de Educación Secundaria (17-18 años), momento en que se realiza la primera aproximación del concepto y la de la Formación Docente, por significar una instancia a la vez ejemplificante y reproductora de concepciones del saber y prácticas escolares para los futuros docentes.

Se decidió estudiar una evolución en los programas desde el plan anterior al vigente precisamente para recoger evidencias que permitieran dar cuenta del momento ‘a’ en el proceso de institucionalización. En primer lugar, la selección de los actores involucrados en su confección es de por sí un testimonio de la sociedad sobre la institucionalización del concepto de límite. En ese sentido, el análisis de su estructura es otro aspecto relevante para el estudio, así como la inclusión –o no- de determinados libros de texto como referencia. También interesa analizarlos para hacer relevantes los comentarios de los docentes acerca de la influencia del currículum en sus prácticas de aula, lo que estaría evidenciando una relación directa entre los momentos ‘a’ y ‘c’ del proceso de institucionalización.

5.2.2.4.a Programas de Educación Secundaria

Como vimos en el apartado 5.2.1.5, el sistema educativo secundario uruguayo se compone de seis años: los primeros cuatro son comunes a todos los estudiantes y los últimos dos componen el "Bachillerato Diversificado". En todas las opciones tienen una carga horaria diferenciada de Matemática, y en el último año es donde se estudian con más profundidad los conceptos del Cálculo, en especial el de límite. Se optó por el análisis de dos orientaciones específicamente: "Ingeniería" (según el plan 1976) o "Físico-Matemático" (según el plan 2006), por ser aquélla en la que se pretende una profundización mayor del tema y se asume que los contenidos tratados serán aplicados en futuros estudios, y "Medicina" (según el plan 1976) o "Ciencias Biológicas" (según el plan 2006) ya que es en la que los programas manifiestan priorizar la modelización como forma de introducir los conceptos.

Programas de "Ingeniería" (1976) o "Físico-Matemática" (2006)

Los programas reportados coinciden en explicitar que se trata de cursos de "Análisis Matemático", no mencionando la palabra "Cálculo".

El programa de 1976 es una lista de contenidos, no se explicitan objetivos, cargas horarias sugeridas ni sugerencias metodológicas de ningún tipo. Los contenidos a tratar son, en orden: *Número Real, Sucesiones, Funciones, Funciones continuas, Funciones derivables, Funciones continuas en intervalos, Funciones derivables en intervalos, Funciones inversas, Estudio de funciones, Series numéricas y Aproximación de Funciones por polinomios*. En cada uno de ellos se detallan una serie de contenidos matemáticos a tratar, pero no se explicita la manera de trabajarlos ni la profundidad que se pretende.

El concepto *Límite* se explicita dentro de los temas *Sucesiones* y *Funciones*. En particular, en este último se detalla: "Límite de una función, operaciones con funciones y cálculo de sus límites; límite de la función compuesta".

Originalmente no se incluía bibliografía recomendada alguna, pero en el sitio virtual oficial de la Administración Nacional de Educación Pública figura una bibliografía básica que incluye algunos libros de texto mundialmente conocidos, como *Calculus* (Apostol, 1967), pero también otros propios de autores nacionales y especialmente diseñados para el curso, como *Matemática 6º* (Balparda y Lois, 1996); y otros textos extranjeros pero también diseñados especialmente para la enseñanza a nivel secundario, como *Matemática II C.U.V.* (de Guzmán y Cólera, 1992).

Este fue el programa vigente en la mayoría de los planes de los Institutos de Educación Secundaria en Uruguay desde 1976 hasta 2008, año en que comenzó a implementarse el plan 2006 para el último año de Educación Secundaria[16]. Existieron varias experiencias intermedias que sólo se implementaron en algunos institutos y no tuvieron alcance masivo, por eso no analizamos específicamente sus programas. Sin embargo, vale destacar que el programa de una de ellas, de 1993, llamada "Microexperiencia" es muy parecido al de 1976 en cuanto a contenidos y estructura, salvo que se omiten los últimos dos temas. Además, en este programa sí se explicitan sugerencias metodológicas para cada uno de los temas.

Consideramos especialmente otra de esas experiencias, de 2003, denominada "Transformación de la Educación Media Superior" por presentar un programa para Análisis en 6º año que puede representar un antecedente para el que finalmente se impuso en 2008 para todos los institutos de Educación Secundaria del país. Su estructura, concepción subyacente de la matemática y su enseñanza e incluso contenidos cambian sustancialmente respecto del programa de 1976 y sirvieron de referencia para el confeccionado en el contexto de la "Reformulación 2006".

Finalmente describiremos el programa vigente, que comenzó a implementarse en el último año de Educación Secundaria en 2008 y corresponde a la "Reformulación 2006". Este programa consta de seis apartados. En el primero, "Fundamentación", se señala la intención de que el curso de Análisis mantenga coherencia con los estudios de años anteriores y a la vez habilite a los estudiantes a la continuación de estudios superiores. Se plantean como objetivos generales el desarrollo de un método de trabajo más riguroso que en cursos anteriores, la participación activa de los estudiantes en la resolución de problemas, la experimentación, elaboración de conjeturas y su demostración. Se presentan algunas de las dificultades específicas del aprendizaje del Análisis elemental reportadas por Artigue (1998). También en este apartado se propone disolver la tradicional escisión entre curso "teórico" y "práctico", proponiendo un único curso "teórico" con aplicaciones a situaciones problemáticas. Asimismo, se explicita que no se propone un trabajo puramente experimental e intuitivo, sino que deberían justificar las afirmaciones realizadas a partir de conclusiones que se admiten como válidas.

Un segundo apartado se dedica a los "Objetivos". Presentan objetivos generales de todos los cursos de Matemática de Bachillerato, como "Incentivar la autoestima y confianza en las

[16] El plan 2006 comenzó por implementarse en 4º año (15-16 años) en 2006, al año siguiente se implementó en 5º (16-17 años) y por último llegó a 6º en 2008 (17-18 años).

propias capacidades" o "Apreciar qué significa una demostración y una demostración matemática" (ANEP, CES, Inspección de Matemática, 2006b, p. 3) pero también específicos del curso, como "Generar acercamientos gráficos y numéricos a los conceptos alrededor de los cuales se organiza el curso: límite, continuidad, derivada" (ANEP, CES, Inspección de Matemática, 2006b, p. 3).

El tercer apartado se dedica a las "Consideraciones Generales": la centralización del curso en el trabajo realizado por los alumnos, la introducción de definiciones y propiedades a través de ejercicios, la consideración de la demostración en un sentido amplio, haciendo énfasis en la argumentación más que en el rigor y evitando la memorización, el tránsito entre los registros gráfico y algebraico y el uso *racional* e *inteligente* de calculadoras. En el cuarto apartado se realizan consideraciones sobre la "Evaluación": utilización de diferentes métodos y modalidades, con el objetivo de reorganizar el proceso de aprendizaje de cada estudiante y la práctica docente, entre otras.

El quinto apartado es el que se dedica a los contenidos, distribución relativa al total de horas del curso y comentarios específicos de cada tema. Los contenidos propuestos son, en orden y con las respectivas cargas horarias: *Límites y continuidad de funciones* (45%), *Derivabilidad de funciones* (35%) e *Integrales* (20%). Se constatan grandes diferencias con el programa de 1976: se excluyen los temas "Sucesiones", "Series numéricas" y "Aproximación de Funciones por polinomios", mientras se incluye el tema "Integrales". El tema "Número Real" se incluye dentro del primer tema (Límites y continuidad de funciones).

Se introduce entonces el concepto de límite directamente en funciones de variable real, a diferencia del anterior programa en el que se proponía el trabajo previo con sucesiones. Se solicita especialmente priorizar el trabajo intuitivo, la presentación de ejemplos y aplicación de contenidos teóricos a la resolución de problemas. Se considera pertinente la presentación de la definición formal del concepto y el uso de cuantificadores cuando el nivel cognitivo de los estudiantes lo permita, pero no como el eje central para la conceptualización. "Los ejemplos y aplicaciones serán de funciones polinómicas, funciones definidas por intervalos, funciones con radicales o con valor absoluto" (A.N.E.P., C.E.S., Inspección de Matemática, 2006b, p. 5), aunque no se explicita si estos ejemplos debieran provenir de una modelización de la consideración de situaciones extramatemáticas. En cuanto a los teoremas relativos al álgebra de límites, se priorizan sus enunciados y aplicaciones frente a la demostración.

Por último, se proponen en la *Bibliografía* varios libros de texto extranjeros, especialmente diseñados para estudiantes de Educación Secundaria de España, Argentina o Francia. No se proponen libros nacionales.

Programas de "Medicina" (1976) o "Ciencias Biológicas" (2006)

Al igual que el programa para "Ingeniería", el programa de 1976 para las opciones "Medicina" y "Agronomía" es una lista de contenidos, no se explicitan objetivos, cargas horarias sugeridas ni sugerencias metodológicas de ningún tipo. Los contenidos a tratar son, en orden: *Número Real, Elementos de Geometría Analítica Plana, Funciones, Funciones continuas, Funciones derivables, Funciones continuas en intervalos, Funciones derivables en intervalos, Estudio de funciones* e *Integrales*. En cada uno de ellos se detallan una serie de contenidos matemáticos a tratar, pero no se explicita la manera de trabajarlos ni la profundidad que se pretende.

El tema Límites se presenta en estas opciones directamente en funciones de variable real ya que no se propone el tratamiento del tema "Sucesiones". En cuanto a su desarrollo, es similar al descripto en el programa para "Ingeniería", explicitándose además el trabajo con órdenes de infinitos e infinitésimos y límites tipo.

En este caso no se recomienda bibliografía alguna, ni en el programa original ni en el que se encuentra actualmente disponible en el sitio virtual.

Por su parte, el programa de la "Reformulación 2006" tiene dos grandes ejes temáticos: Análisis (60%) y Estadística y Probabilidad (40%). En el primer apartado, dedicado a la "Fundamentación", se sugiere el estudio de funciones como medio para el conocimiento y uso de modelos matemáticos específicos de las Ciencias Biológicas, por lo que se le otorga a la resolución de problemas un papel protagónico, así como a los procesos de intuir, conjeturar y seleccionar y aplicar el modelo matemático adecuado.

Al igual que en el programa para la opción "Físico-Matemática" de 2006, la parte de Análisis se estructura en torno a tres temas principales: *Límites y continuidad de funciones*, *Derivabilidad de funciones* e *Integrales*. Sin embargo, el tratamiento se presenta diferente: no se proponen cuestiones formales de la axiomática de Número Real, y se sugiere comenzar recordando las diferentes familias de funciones ya tratadas en otros cursos (polinómicas, racionales, exponenciales, logarítmicas). Se indica que todos los temas, en especial el de límite, deberían ser ejemplificados directamente en esas familias de funciones.

La "Bibliografía" propuesta es la misma que en el programa de la opción "Físico-Matemática" de 2006.

5.2.2.4.b Programas de Análisis I en Formación Docente

Tanto en el plan de 1986 como en el vigente desde 2008, Análisis I es un curso de segundo año de la carrera de formación de profesores de Matemática en Uruguay, que consta de un total de cuatro años.

El programa vigente antes del actual data de 1986. En el primer apartado, "Fundamentación" se insiste en la importancia del curso en la formación del futuro docente, se considera que es un curso denso, que requiere del profesor una cuidadosa selección y planificación para que el nivel sea el adecuado al de un curso de nivel terciario y no repetir el que se dicta en el nivel secundario.

Se proponen dos "Objetivos": *formativo* de un pensamiento lógico e *informativo* tanto para cursos posteriores dentro de la carrera como para la futura práctica docente del estudiante. En un apartado sobre "Sugerencias Metodológicas" se insiste en la importancia de una metodología activa basada en la resolución de ejercicios y problemas no rutinarios.

Las "Unidades temáticas" propuestas son: *Sucesiones*, *Funciones* (límites, continuidad y derivadas), *Cálculo integral*, *Fórmulas de Taylor* y *Mac Laurin y Series*. Para cada uno de ellos se explicitan objetivos específicos, contenidos, actividades y carga horaria estimada.

El tema Límites se desarrolla dentro de la segunda y tercera unidad, se propone su desarrollo en *Sucesiones* y la definición para *Funciones reales*, vinculando ambos contextos a través de los "teoremas de enlace".

Por último, se detalla en la bibliografía una serie de libros de texto de Cálculo y Análisis Matemático (Apostol, 1967, 1976; Bartle, 1978 y Hardy, 1962).

El programa vigente, especialmente formulado para la Reformulación iniciada en 2008 se comenzó a implementar en 2009 y consta de cinco apartados. En el primero, "Fundamentación", se describen dos características del curso: por un lado, "brinda un conocimiento aplicable directamente a los cursos que luego el docente dictará en le Educación Media" (ANEP, DFPD, Departamento de Matemática, 2008, p. 19), por otro lado se le asigna un carácter propedéutico ya que significa el inicio de la formación en análisis matemático: aspectos topológicos, estudios de convergencia, optimización, modelación de situaciones matemáticas y extramatemáticas.

En el segundo apartado se detallan los “Objetivos”, algunos generales relacionados a la capacidad de resolución de problemas, modelación, pensar críticamente y lograr precisión en el lenguaje. Con respecto al concepto de límite, el objetivo específico que se explicita es “Ser solvente en el cálculo de límites y en el manejo de las principales técnicas del cálculo”.

En el apartado dedicado a la “Metodología” se explicita la importancia de los aspectos teóricos del curso, insistiendo además en la relevancia de la resolución de ejercicios y problemas. Se sugiere que los profesores seleccionen algunos contenidos para que sean estudiados por los estudiantes, pretendiendo evitar que el curso se convierta en una reproducción del dictado en el nivel secundario, preocupación similar a la presentada en el programa de 1986.

En el cuarto apartado se detalla la “Secuencia de Contenidos”: *Revisión de número real y su topología, Sucesiones y series numéricas, Funciones reales, Desarrollos de Taylor, Integrales de Riemann, Integrales impropias y vinculación con series*.

El tema Límites se desarrolla dentro de la segunda y tercera unidad, se propone su desarrollo en *Sucesiones* y la definición para *Funciones reales*, vinculando ambos contextos a través de los “teoremas de enlace”.

Por último, se detalla en la bibliografía una serie de libros de texto de Cálculo y Análisis Matemático (Apostol, 1967, 1976; Kudriavtsev, 1983; Linés, 1991; entre otros).

5.2.2.4.c Reflexiones en torno al tránsito entre los programas

Con respecto a los programas de Educación Secundaria, se pudo constatar una gran diferencia entre los programas del plan 1976 y los del plan 2006 en cuanto a su presentación y contenidos. Mientras los primeros constan de listas de contenidos sin fundamentación, explicitación de objetivos o consideración metodológica alguna (incluso en el de la opción “Medicina” tampoco existe una bibliografía recomendada), en los del plan 2006 se cuidan específicamente esos aspectos.

Esto sugiere una diferencia también en lo que hace a la concepción de la Matemática y su enseñanza, si bien estos aspectos no se explicitan en los programas del plan 1976. Estos, que constituyen únicamente una lista de contenidos, traducen la idea de una matemática acabada, preexistente al estudiante, autocontenida y con pocos vínculos con situaciones extramatemáticas. No parece existir una preocupación por explicitar la manera en que ésta deba enseñarse. Por su parte, en los programas del plan 2006 se detecta una preocupación por la participación activa del estudiante en la formación del conocimiento, si bien se propone una determinada temática que el docente debe trabajar en clase, se lo ubica explícitamente en un rol de orientador. Se propone además la consideración de contextos extramatemáticos para la introducción de los contenidos a tratar.

En lo que hace a la introducción del concepto de límite, existe también una notoria diferencia, ya que en el programa de la opción "Ingeniería" del plan 1976 se propone introducirlo en el contexto del tema Sucesiones y después de definirlo en el contexto de las funciones reales, analizar sus propiedades a través de los "teoremas de pasaje o de enlace". Mientras tanto, en el correspondiente programa del plan 2006, que es el de la opción "Físico-Matemático", no figura la unidad Sucesiones, por lo que el concepto de límite se trabaja directamente en el contexto de Funciones. Esto implica otra estructura matemática para concluir en la formalización de propiedades del límite, como por ejemplo la demostración de teoremas relativos al álgebra de límites. Vale destacar que si bien la responsabilidad de la confección de los programas recae sobre los inspectores de Matemática de Educación Secundaria, en la instancia de confección se consultaron a miembros de la comunidad matemática.

Con respecto a los programas del curso de Análisis para profesorado de Matemática no se detectan grandes diferencias: en ambos se menciona la necesidad de profundizar en aspectos formales del curso, a la vez que se le asigna un rol activo al estudiante a través de la resolución de ejercicios. Ninguno de los dos hace especial hincapié en la introducción o desarrollo de los temas a través de la modelación o consideración de situaciones extramatemáticas, se atienden más bien aspectos propios de la asignatura, por lo que en ese sentido parecen responder a concepciones similares de la Matemática como autocontenida y preexistente al sujeto que aprende, descontextualizada de las prácticas que dan origen a los conceptos.

Por otra parte, los contenidos no cambiaron sustancialmente, y la forma de introducir el concepto de límite (primero en el contexto de las sucesiones para dar fundamento al contexto de las funciones) también se mantuvo.

El análisis de los programas entendidos como actos discursivos de actores miembros de grupos sociales específicos nos brinda herramientas para el análisis de la práctica de referencia relativa al momento 'a': conformación del límite entendido como un saber sabio en un saber a enseñar. Vemos allí como los intereses de los diferentes grupos involucrados se cristalizan en un programa explícito. Los matemáticos juegan un papel importante en esa conformación, ya sea en la integración de las comisiones redactoras, como en un rol de asesores o incluso a través de su opinión a título personal. Pero también influye la tradición que se ha perpetuado a través del contenido de los libros de texto descriptos en el apartado anterior.

Por otro lado, pudimos observar que los propios inspectores de Matemática han comenzado a reconocer una necesidad de cambio, lo que se evidencia en las diferencias que se observan en los programas de Educación Secundaria, tanto en su contenido como en sus objetivos y metodología. Surgió entonces una nueva interrogante relativa a este hecho específico: ¿cómo los docentes vivenciaron este cambio en los programas? Es decir, cómo influyó este matiz en las actividades que norma la práctica de referencia del momento ‘a’ en las prácticas de referencia de los docentes en el momento ‘c’ (prácticas escolares de aula)?

5.2.2.5. Entrevistas a docentes a raíz del cambio en los programas

Dadas las diferencias detectadas en los programas de Matemática (especialmente referido a las orientaciones metodológicas) para la opción Ingeniería (actual Físico-Matemática) de sexto año de Educación Secundaria, se optó por realizar una entrevista a dos profesores con vasta experiencia en el dictado de dicho curso (más de veinte años en un caso, y diez años en el otro). El objetivo de las entrevistas era, en primer lugar, indagar acerca de qué opinaban los profesores entrevistados acerca de los nuevos programas y los cambios respecto al anterior, tanto en lo referido a los contenidos como en los aspectos metodológicos. Esto permitiría nuevamente indagar sobre sus concepciones de la matemática y de su enseñanza –específicamente del saber ‘límite funcional’-, entendidas como actos discursivos y estudiadas a través del ACD. Por otro lado, se deseaba estudiar si esos cambios habían permeado sus prácticas de referencia y actividades específicas de aula, influyendo sobre su manera de planificar y desarrollar el curso, en especial el tema “límite de funciones”.

Esto nos permite analizar cómo se relacionan los diferentes momentos en el proceso de institucionalización: los programas son escritos con una determinada intención de que determinado tratamiento escolar sea llevado al aula (momento ‘a’), y para que eso se concrete es necesario un momento en el que quienes los escriben difundan sus intenciones con los docentes (momento ‘b’), así como un momento de revisión de las prácticas educativas de los docentes (por parte de ellos mismos y de las autoridades que los evalúan: momento ‘c’).

Como ya justificamos, la resistencia docente a un cambio curricular constituye por sí misma una evidencia de cuán arraigada está una determinada concepción del cálculo y su enseñanza.

Se estructuró la entrevista en base a las siguientes preguntas:

1. ¿Es egresado del Instituto de Profesores Artigas? ¿Hace cuánto tiempo que se recibió?
2. ¿Hace cuántos años que se desempeña como profesor en nivel secundario?
3. ¿Hace cuántos años que dicta clases del curso de Introducción al Análisis en nivel secundario (correspondiente al último año del ciclo)?
4. A su parecer, ¿Cuáles son los cambios más significativos en los programas del curso de Matemática I para sexto año, opción Físico-Matemática? (comparando el de 1976 con el vigente)
5. ¿Qué cambios específicos encuentra en la manera en que se propone el tema "límites de funciones"?
6. La manera en que planifica y lleva a cabo el curso, ¿se modificó respecto de como lo hacía antes (digamos, 2 años atrás)? ¿Cómo?
7. ¿Se modificó la forma en que introduce y desarrolla el tema "límite de funciones"? ¿Cómo?
8. ¿Por qué cree importante el tratamiento del tema "límite de funciones" dentro del curso tal cual lo plantea?

Las tres primeras preguntas fueron planteadas para sondear la experiencia del docente en el curso. Para los intereses de la investigación, tenía sentido entrevistar a docentes que tuvieran varios años de experiencia como profesores del curso para que pudieran comparar, con propiedad y perspectiva, ambos programas (el del plan 1976 y el vigente).

Las preguntas 4 y 5 fueron planteadas para alcanzar el primer objetivo: que los profesores hablaran sobre qué cambios fueron más significativos y qué opinaban respecto de ello. Si bien no se preguntaba explícitamente la opinión, ambos profesores la dieron y en caso de que no la dieran se completaría el cuestionario original con preguntas pertinentes.

Las preguntas 6 y 7 fueron planteadas para alcanzar el segundo objetivo: conocer cómo los cambios habían influido en la manera en que los docentes desarrollan el curso, si es que se había producido algún cambio.

La última pregunta fue planteada a modo de conclusión de la entrevista, para que los docentes pudieran expresar ampliamente su opinión al respecto de la importancia que tiene el tratamiento del tema “límite de funciones” en el curso tal cual lo plantea. Se analizó especialmente qué rol le otorgaron los profesores al tema “límite de funciones” como estructurador –o no- del curso.

Con respecto a la experiencia de los profesores, el primero (que llamaremos P1) declaró tener veintiocho años de experiencia como profesor de Educación Secundaria, y al menos los veinte últimos como profesor del curso de Matemática de sexto año (no recordaba con exactitud. El segundo profesor (que llamaremos P2) manifestó haber cumplido diez años en el dictado del curso de Matemática de sexto año de Educación Secundaria, además de haberse desempeñado anteriormente como profesor “particular” por un lapso de casi veinte años, lo que implica un conocimiento y desempeño en tareas relacionadas con el curso de casi treinta años. Consideramos que en ambos casos los profesores tenían la experiencia suficiente como para analizar con perspectiva el cambio curricular. De la misma forma, su opinión es importante a la hora de analizar los procesos de institucionalización del concepto de límite, especialmente en este “momento” que se desea estudiar con las entrevistas.

Con respecto a los cambios más significativos en los programas, el primero de los docentes mencionó cuatro, dos de tipo curricular –la desaparición de los temas “Sucesiones” y “Series”– y dos de tipo metodológico –el cambio en el formato de evaluación, de evaluarse en forma separada las partes teórica y práctica pasó evaluarse en forma articulada y la falta de jerarquización en la parte teórica del curso–. Si bien no se manifiesta ni a favor ni en contra de los cambios metodológicos, sí se manifiesta en contra de los cambios en el currículo. El siguiente fragmento de entrevista es más que representativo:

> *V.: […]”¿Cuáles cambios le parecen a Ud. más significativos con respecto al programa de Análisis en la opción Ingeniería?”*
>
> *P1.: “El más significativo de todos es la desaparición del tema “Sucesiones”, a mi me parece que no debió haber sido; como una cosa realmente relevante, ¿no? Porque no está más… y a mí me parece importante. Es más, yo he visto… he tenido oportunidad de ayudar a personas que han ingresado a Facultad de Ingeniería y ese tema se da por sobreentendido, por sentado, y aparecen cosas que no… De pronto la idea de haber sacado el tema, tal vez pasó por, pero yo creo que no se dio, por una conjunción de criterios con la Universidad, pero lo que yo he visto, está bastante divorciado. No está muy emparentado… Si vos me dijeras, bueno: ‘dejen sucesiones que lo damos nosotros en facultad, y hacemos un trueque, ustedes dan ecuaciones diferenciales, por ejemplo, o dan integrales’… Pero yo no veo nada de eso, la Facultad sigue viento en popa, como siempre, y este… Ese me parece el más significativo de todos.”*

Por otra parte, el docente opina que esto no influye fuertemente en el desarrollo del tema "Límite de funciones" ya que […] "*Se puede encarar el tema "límite de funciones" totalmente independiente, no hay ningún problema*". Sin embargo, manifiesta más adelante que

> *"para el concepto de límite en sí, a mi me parece, didáctica y pedagógicamente hablando, que es más natural, no es que no pueda hacerse independientemente, pero es más natural, verlo por el lado de sucesiones en N, funciones con dominio natural, y después hacer una extrapolación a las funciones… A través del teorema de pasaje."*

Es interesante observar el arraigo que el docente tiene a sus creencias con respecto a la necesidad de introducir el concepto de límite primero en sucesiones. Tan fuerte es esa convicción que, en otro tramo de la entrevista, el docente confiesa continuar dictando en el curso de sexto el tema "Sucesiones" para poder realizar la introducción tal y como considera que es correcto hacerlo, aún contradiciendo las indicaciones de la Inspección al respecto:

> *P1.: […] "Te digo que este año, si bien sucesiones no está en el programa, y acepto que no está en el programa, a mi me pareció que había determinados conceptos básicos de sucesiones, como por ejemplo qué es una sucesión, la definición de sucesión, y dar, por ejemplo, el concepto de límite de sucesión, el* <u>*concepto*</u>[17]*, la definición, y de repente dar monotonía, que es todo un tema, y dar el concepto de subsucesiones, como definición y ver qué pasa con los límites, eso lo dí. No todo el desarrollo, la operatoria de límites, la acotación, todo eso no, dí sólo tres tópicos grandes para que puedan trabajar… incluso los ejercicios mismos son aplicaciones directas de la definición, no son nada…"*

El haber dictado el tema Sucesiones provocó que no hubiera un cambio significativo en la manera en que se presenta el concepto de límite de funciones. P1 manifiesta que continúa introduciendo su definición a partir de ejemplos y ejercicios de aplicación. Y para desarrollar lo relativo al álgebra de límite de funciones se apoya en el trabajo previo en límite de sucesiones y en el Teorema de Pasaje.

El profesor P2 también hace referencia a la eliminación del tema Sucesiones y a cómo eso afecta en el desarrollo del concepto de límite. Sin embargo, él es también profesor de sus mismos alumnos en el curso anterior, donde sí se establece curricularmente el desarrollo de dicho tema. Por eso P2 no lo considera un problema para el desarrollo de sus cursos, sino que aprovecha precisamente el saber que sus estudiantes conocen el tema del curso anterior. El siguiente fragmento de entrevista ilustra dicha opinión:

[17] El subrayado indica que el profesor enfatiza en esa palabra.

V.: "Ahora, la manera en que planifica y lleva a cabo el curso, ¿se modificó respecto a la manera en que lo hacía dos años atrás?[18]*"*

P2.: "En realidad sí, porque por ejemplo antes, en el curso de Ingeniería, tenía que ver Sucesiones, en el mismo año. Por lo tanto, si bien ahora también lo hago como repaso de los años anteriores, bueno, se supone que el alumno tiene conocimiento de lo que son las sucesiones, en particular, claro, yo trabajo en condiciones muy especiales que no son las de todo el mundo. Porque yo trabajo en liceos que son muy chicos, y donde además los alumnos, por las materias que yo toco, los alumnos que tengo en Ingeniería los tuve en años anteriores, y sé cómo trabajaron con Sucesiones, entonces, no tengo ese problema de testear qué tienen y qué no. Entonces, reconozco que son condiciones especiales, por las cuales, me facilitan el trabajo."

Por su parte, para el profesor P2 los cambios más significativos son los metodológicos: según este profesor, el nuevo programa propone dejar de lado la formalidad en la presentación de los temas, una menor profundización de los mismos y un énfasis en el cálculo. Manifiesta explícitamente su disconformidad con estos cambios, lo que se puede constatar en los siguientes tramos de entrevista:

P2.: […] "en realidad el cambio fundamental no es el programa o los temas que toca en sí mismo, sino la sugerida metodología para hacerlo, creo que la diferencia fundamental es esa. Con lo cual… este… a veces hay discrepancias con las orientaciones que da la inspección respecto de lo que uno tiene que trabajar con lo que verdaderamente entiende que se debería trabajar. Así que yo, si nos referimos a un curso con Matemática un poco más dura, como serían los de [la opción] Ingeniería, o cosas así, yo diría que más que cambio en el programa en sí mismo, hay un cambio en la metodología y la profundidad que uno le da en los temas, sugerida desde las autoridades. Por lo tanto, en realidad, por lo menos en lo que a mi me toca, salvo algún tema puntual, como Series que no está, o que Integrales, sí, y que Taylor no… Más allá de esas cuestiones, todo lo que tiene que ver con la parte de Análisis de las funciones, la continuidad, las sucesiones, yo le doy la misma formalidad que antes. Así que yo trabajo igual."

[…]

P2.: Bueno, en la idea de límite en sí mismo, yo creo que el cambio propone aprender a calcular, digamos, creo que es eso el resumen. La formalidad dejala un poco de lado, eso podría ser el resumen. Entonces, capaz que para algunas orientaciones podría estar de acuerdo, pero no para todas.

[18] Cuando el programa vigente era el correspondiente a 1976.

Más adelante, en otro tramo de la entrevista, el profesor vuelve sobre el tema de la formalidad, insistiendo en su importancia en el curso de Matemática para la opción Físico-Matemática, por lo que podría pensarse que el cambio metodológico propuesto por el programa no es ilustrado en el desarrollo de su curso, si bien indica que su objetivo de fondo es que los estudiantes aprendan el concepto y no sólo la manera de escribirlo:

> *P2.: "Yo utilizo la formalidad, más allá de que si después se los voy a exigir o no, ese es otro tema. A la hora de evaluar, trato de evaluar en el medio, digamos. En el medio en el sentido de que no soy muy quisquilloso con la escritura matemática pura, de hecho ni yo lo hago, porque cuando uno escribe, si bien es muy cierto y muy importante los cuantificadores, en realidad, hay gente que es muy exquisita para la escritura, los para todos y los paréntesis, una cantidad de… O sea, lo que trato de hacer es que el alumno tenga la idea de fondo y que después lo traduzca como quiera a la hora en que yo le pregunto qué es lo que pasa. La formalidad, o la formalización, si bien jorobo[19] bastante con tratar de aprender a escribir en un lenguaje matemático, creo que a la hora de evaluar, hago pesar el concepto de fondo, y no la escritura en sí misma. Entonces soy formal, yo soy formal porque mi pizarrón es formal, pero siempre traducimos a español lo que está puesto ahí, entonces para el alumno es mucho más fácil eso, ¿no? Porque la dificultad no es acordarse de cómo se escribe tal o cual simbolito sino la idea, de si para todo, o de si existe, eso tiene que estar claro, y en realidad también en forma conceptual. Así que si nos referimos a formalidad, a formalización, en lo que está escrito, soy liviano, en cuanto a lo conceptual no."*

Ese tramo de entrevista deja entrever la importancia que tiene para este profesor la formalización de los conceptos que trabaja, no tanto en cuanto a los símbolos utilizados, pero sí en cuanto a darle una estructura formal a los conceptos manejados en el curso, entre ellos, el de límite.

Con respecto a la última pregunta, referida a la importancia que le otorga el docente al tratamiento del tema "límite de funciones" en el curso tal cual lo plantea, ambos coinciden, en primer lugar, en otorgarle una importancia intrínseca, por el propio concepto. P1 opina que es un tema "*rico en sí*". Por su parte, P2 afirma que:

> *La idea de límite me parece importante también en el sentido de ir considerando infinitos casos de puntitos cerquita a otro, siempre la idea de infinito es complicada, entonces me parece que… hacer un manejo más o menos de lo que*

[19] En el sentido de "insistir".

> *pasa con los infinitos, o con los infinitos puntos, me parece que debería estar en el acervo cultural de cualquiera.*

Por otra parte, P2 le otorga también un fin utilitario: el concepto de límite se le presenta como necesario para graficar una función, que es, según explicita, uno de los objetivos del curso: "*uno no podría graficar porque faltarían herramientas para hacerlo, si no tuviera la idea de límites*". También menciona su utilidad a la hora de resolver problemas de optimización.

Por último, ambos coinciden en referirse al concepto de límite como estructurador del resto del curso, en el sentido de que permite definir otros conceptos como el de derivada, integral e incluso continuidad. P1 afirma al respecto:

> *"…a mi me parece que es un concepto riquísimo, muy rico en sí, y que aparece muchísimo, prácticamente, si vas a definir una derivada, ¿qué es? ¿me entendés? Una integral… te aparece en todos lados."*

Y P2 sostiene que:

> *"En cuanto a, por ejemplo, todo lo que tiene que ver con Integrales…"*
>
> *"… así que para el tema de derivabilidad, que es una de las cosas importantes, porque proporciona datos acerca del crecimiento de una función, etcétera, ahí está metida la idea de límite también. En cuanto a la idea de continuidad, si bien en principio uno podría independizarse de la idea de límite, uno podría definir continuidad sin tener la idea de límite, en definitiva, si uno tiene planteado o conoce la idea de límite anticipadamente, la continuidad, en ciertas condiciones, es equivalente a que un límite de un determinado número real. Entonces, ya que tenemos la idea de límite, aprovechemos y demos continuidad."*

Consideramos que en ambos casos los docentes explicitan claramente la idea de que el concepto de límite de funciones es fundamental para el desarrollo del curso y para definir otros conceptos. Los mismos profesores denominan a estos conceptos "posteriores", lo que sugiere que estos profesores consideran que hay una sola manera para desarrollar los temas en el curso, que coincide además con la propuesta en la mayoría de los libros de texto, incluidos los que analizamos en la presente investigación.

Entendemos que este elemento discursivo nos brinda herramientas para el análisis de la transición entre los tres momentos 'a', 'b' y 'c', como sugerimos en un principio. Por un lado, un cambio en los programas ha permeado sobre algunas de las actividades docentes en el aula: en cuanto al contenido curricular, por ejemplo, el cambio obligó a los docentes a reducir la carga horaria dedicada al tema "Sucesiones", otros temas se han suprimido, como "Series" o "Polinomios de Taylor" y se han introducido otros, como "Integrales". En cuanto a lo metodológico, los nuevos programas proponen focalizar más en la introducción de los saberes a través de problemas y menos en la estructura formal, si bien no explicitan, por ejemplo, si se tienen que demostrar o no los teoremas relativos a álgebra de límites.

Pero por otro lado, los docentes se muestran reticentes a tales cambios: se resisten por ejemplo a dejar de dar “Sucesiones” (un profesor sigue tratando el tema en clase y el otro lo utiliza fuertemente dado que sabe que sus alumnos lo conocen del curso anterior), y fundamentalmente sus prácticas en cuanto a la metodología no han cambiado (en el caso del profesor P2 explicita que no está de acuerdo con el cambio metodológico para la orientación de Ingeniería y que “sigue trabajando igual que antes”).

Esto sugiere que son varios los elementos que influyen sobre las actividades de aula del profesor: si bien los programas cambian, y existen reuniones entre autoridades educativas y profesores para explicitar y viabilizar dichos cambios, ¿por qué no se evidencian en las prácticas escolares de los docentes?

Para responder este tipo de preguntas es que precisamente proponemos el entender la situación como un proceso de institucionalización: las prácticas de los docentes, como actores involucrados en ese proceso, están normadas por una multiplicidad de factores, entre ellos las prácticas sociales del concepto de límite en el ámbito científico que se reinterpretan en el ámbito escolar a través de prácticas de referencia específicas de cada ámbito. Entonces hay determinadas acciones de los docentes que ellos pueden justificar explícitamente, pero otras que son influenciadas por esas normas implícitas, que se viabilizan a través de las actividades de los diferentes actores: la confección de libros de texto, apuntes, planes y programas, el intercambio de opiniones entre autoridades educativas y docentes y entre docentes sobre esos programas y libros de texto y sobre cómo influye en las actividades de aula y los actos discursivos de los miembros de la comunidad matemática, entre otros.

5.3. Momentos en el ámbito escolar del proceso de institucionalización: análisis del discurso

La descripción realizada sobre el discurso matemático escolar en Uruguay, especialmente del tratamiento del concepto de límite, nos permite realizar un análisis más profundo de los momentos descriptos en el apartado 4.3. Llevaremos a cabo dicho análisis utilizando la herramienta metodológica que aporta el Análisis Crítico del Discurso, desarrollada en el apartado 4.2.2.

Analizamos los elementos del discurso descriptos en el apartado anterior, partiendo del supuesto de Van Dijk (2001) referido a la multiplicidad de acciones que se realizan al hablar o escribir –defender una postura, responder preguntas o representar a tal grupo social, por ejemplo-. Así, por ejemplo, entendemos que los profesores entrevistados o que completaron el cuestionario son parte de un grupo social, el de los profesores de matemática de Uruguay, que a su vez defienden una postura determinada, que puede ser diferente a la de otros integrantes del grupo. Lo mismo ocurre con los actores involucrados en la confección de los programas o en la escritura de los libros de texto, con los matemáticos de la comunidad científica, así como con el resto de los actores de la noósfera involucrados en el proceso de institucionalización.

5.3.1. Momento ‘a’: transición del ámbito científico al ámbito escolar

En este momento el problema social que nos ocupa es la identificación de la práctica de referencia y actividades de los actores de la noósfera que favorecen el tránsito del concepto ‘límite funcional’ desde el ámbito científico hacia el ámbito escolar. Estas prácticas de referencia y actividades estarían normandas, según nuestra propuesta, por las prácticas sociales detectadas en el ámbito científico –formalización, generalización y difusión- que se reinterpretan a la luz del paradigma específico de este momento ‘a’ en el ámbito escolar.

Son múltiples los actores que participan en este momento, y sus interacciones discursivas pueden ser vistas ellas mismas como relaciones de poder. Por un lado, el hecho de que Uruguay se vea obligado a solicitar préstamos a los organismos internacionales de crédito (BID, BM) crea con sus autoridades una determinada relación de dependencia que lo obliga, ya sea explícita o implícitamente, a seguir determinadas políticas educativas pautadas del exterior. Tal es el caso de la reforma para Educación Secundaria en el año 1996, que a pesar de ser firmemente resistida por docentes, fue impuesta con las características que mencionamos en el apartado 5.2.1. Este aspecto condiciona, por sí solo, la manera de actuar de las autoridades educativas generales en Uruguay, de los directores de institutos primarios y secundarios y de los docentes, que son quienes deben efectivizar tales políticas educativas en sus prácticas cotidianas de aula.

Por otro lado, estas políticas educativas no sólo influyen sobre la conformación general de un plan de estudio, sino también sobre los currículos concretos de las asignaturas y los libros de texto que se publican y recomiendan para difundir. En el caso de Matemática, estos lineamientos no están siempre sujetos a los resultados de investigación reciente en Matemática Educativa. Vemos entonces las relaciones de poder ejercidas sobre quienes confeccionan programas y escriben libros de texto, que se ven sujetos a restricciones específicas.

En Uruguay, la mayoría de los programas de Secundaria (y específicamente los analizados en esta investigación) son confeccionados por la Inspección de Matemática, organismo dependiente del Consejo de Educación Secundaria, de cinco miembros con vasta experiencia como profesores de Matemática y que concursan específicamente para ese cargo. Esta Inspección se encarga entre otras cosas de diseñar e implementar lineamientos de acción específicos en el área de la educación matemática en el nivel secundario, a través de la coordinación y evaluación de los docentes de Matemática de todo el país. En ocasiones consultan a matemáticos para la confección de los programas, pero no es común que consulten a profesores en servicio. Esto sugiere una preocupación por parte de los inspectores que el contenido de los programas esté acorde a lo validado por la comunidad matemática, considerando que con esa práctica se asegura una transición consensuada desde el ámbito científico al escolar.

Sin embargo, la visión de la comunidad matemática es otra. Es frecuente en Uruguay que los miembros de la sociedad en general (nos referimos a personas que no están directamente vinculada con la matemática o su enseñanza y aprendizaje) cuestionen y opinen sobre el fracaso escolar, específicamente en Matemática. Un ejemplo reciente de ello es un artículo publicado en un diario de la capital sobre el fracaso escolar en Matemática y el temor a la asignatura. Entrevistado para la elaboración de dicho artículo, Omar Gil, un matemático docente e investigador del Instituto de Matemática y Estadística de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de la República, sostuvo que la calidad de la formación docente obstaculiza la comprensión de todo lo que rodea al estudiante y, en particular, la concreción del proyecto de Uruguay productivo que se promueve desde el gobierno. Mantuvo que “lo que circula es lo que existía en el siglo XIX con la visión del siglo XIX" (Gil, citado en Orfila, 2010, 14 de agosto, p. 19). Y en el artículo se concluye que "también influye el divorcio entre la comunidad científica y la Administración Nacional de Educación Pública, por el cual la primera no participa de la definición de los programas y planes de estudio" (Orfila, 2010, 14 de agosto, p. 19). Esto estaría sugiriendo que de parte de los actores de la comunidad científica existe una sensación de que su opinión debería ser tomada en cuenta para la confección de esos programas, pero las autoridades de la educación pública no lo hacen. Esto da muestras de la complejidad que presentan los procesos de institucionalización del conocimiento matemático en Uruguay.

Estas relaciones de poder también se explicitan en la confección de libros de texto como acto discursivo: como vimos, los actuales libros de texto de Análisis o Cálculo están basados en los que nosotros denominamos 'de antaño' en cuanto a su estructura formal, y éstos a su vez son libros extranjeros, que imponen determinadas prácticas escolares que no fueron pensadas para la situación específica de Uruguay ni para la actualidad.

Tanto los programas como los libros de texto ejercen una influencia sobre el "deber ser" de los docentes: sugieren una determinada manera de ver el cálculo y dentro de ella el concepto de límite. Esta influencia fue analizada específicamente a través de las entrevistas desarrolladas en el apartado 5.2.2.5. Insistiremos sobre la manera en que esta influencia se ejerce cuando analicemos las relaciones de poder que se dan en el momento 'b' del proceso de institucionalización.

Todos los elementos discursivos que hemos analizado son evidencias de cómo el discurso constituye a la sociedad (en este caso a la sociedad conformada por el sistema educativo, específicamente en lo que hace a la matemática, pero hemos visto que esto influye también sobre los actores de la sociedad en general, no tan directamente relacionada con ese sistema educativo) y a su cultura. Pero ese vínculo es dialéctico: los actos discursivos que miembros de la sociedad realizan condicionan el discurso escrito (libros de texto y programas) y el discurso oral (prácticas de aula), incluso en cuestiones que podrían considerarse técnicas, como el qué conceptos matemáticos trabajar y cómo, aspecto del momento 'a' que estamos analizando.

Es interesante cómo a partir del análisis realizado se puede distinguir la ideología que pretende imponer cada uno de los actores de la noósfera, como miembros de un grupo social, a través de su discurso. Por ejemplo, las autoridades de los organismos internacionales promueven una determinada manera de representar y comprender al sistema educativo y a su relación con la sociedad. Esta promoción no siempre es de manera explícita, a través de condiciones para sus créditos, puede darse también a través de la capacitación de determinados miembros "clave" del sistema educativo –en este caso uruguayo-, que por su rol en él tienen la capacidad de difundir masivamente lo aprendido. También quienes escriben los libros de texto o los programas de estudio sugieren a través de esos elementos discursivos una determinada ideología acerca de cómo se debe enseñar la matemática, cuáles son los contenidos a tratar y cuál es la estructuración que se le debe dar a los mismos.

En este momento 'a' de la institucionalización del concepto de límite se aprecia claramente cómo el discurso es meramente histórico, y para comprenderlo y analizarlo desde esta perspectiva es necesario conocer a fondo las circunstancias socio-culturales en las que se manifiesta cada uno de sus elementos, lo que permite identificar los intereses y sentidos que existen detrás de los actos discursivos. La entrevista desarrollada en el apartado 5.2.2.3 dio cuenta de ello: dado que la matemática escolar en Uruguay está caracterizada por una fuerte tradición oral que permite que determinadas prácticas educativas se instalen como aceptadas entre el colectivo docente, fue necesario entrevistar a este profesor con experiencia en secundaria y universidad. Esta entrevista brindó evidencias sobre la manera en que el concepto de límite llegó a nuestras aulas de la forma en que es tratado hoy en día, evidentemente desde la visión de este profesor. Pudo constatarse que si bien algunos libros de texto fueron influyentes para la conformación de esos primeros cursos, uno de los aspectos que más influyó fue la difusión de apuntes de clase escritos e impresos por los propios alumnos. Esos apuntes constituyeron una fuente validada para la preparación de clases durante muchos años.

A manera de reflexión final del análisis de este momento, vimos que en la transición del ámbito científico al escolar ha influido fuertemente el paradigma desarrollado en la cuarta etapa del ámbito científico del proceso de institucionalización. La formalización y búsqueda de generalización como prácticas sociales norman la práctica de referencia que hemos identificado como "conformación del concepto de límite, entendido como un saber sabio, en un saber a enseñar". Y dicha práctica de referencia, que por momentos no es implícita para los actores involucrados en este momento, se explicita en actividades observables, como la confección de libros de texto, apuntes, planes y programas, conformando una determinada manera de estructurar el cálculo y un determinado rol del límite como eje central de dicha estructuración. Consideramos que la explicitación de las relaciones de poder subyacentes a los actores de la noósfera en este momento puede significar cambios en las decisiones sobre qué conocimientos matemáticos tratar y cómo.

5.3.2. Momento 'b': interacciones entre docentes y entre docentes y autoridades educativas

En este momento el problema social que nos ocupamos es cómo las interacciones discursivas entre docentes y entre docentes y autoridades educativas, entendidas como prácticas de referencia en este ámbito escolar, influyen en sus concepciones sobre la matemática y la enseñanza y sobre sus actividades concretas de aula, específicamente en lo que hace al tratamiento escolar del concepto de límite.

En este momento las autoridades educativas entablan, a través de su discurso y de sus prácticas, una relación de poder con los docentes. Como vimos, las autoridades educativas, específicamente los inspectores de Matemática, son quienes se encargan de difundir los programas y su implementación a través de reuniones con docentes. En estas reuniones se sugieren determinados lineamientos en cuanto al orden y jerarquía de los temas y sugerencias metodológicas. A su vez, estos mismos inspectores evalúan a los docentes durante el año lectivo a través de visitas puntuales (se observa una hora de clase y se analiza la 'libreta del profesor', libreta en la cual el docente debe llevar anotado el desarrollo del curso y las evaluaciones de sus alumnos). Uno de los aspectos que analizan los inspectores para su juicio (conceptual y numérico) es la adecuación del curso al programa propuesto según lo escrito en la 'libreta del curso' y la adecuación de la metodología empleada por el profesor a la metodología sugerida en aquéllas reuniones. El puntaje otorgado en esta visita tiene una gran incidencia sobre el lugar que ocupa el docente evaluado en la lista que se confecciona cada año para la elección del lugar y nivel educativo en el que ejercen los profesores, por lo que es sumamente importante para el docente alcanzar una buena calificación para poder asegurar una mejor fuente laboral al año siguiente. Este mecanismo sugiere que es posible que los docentes sientan cierta presión por el juicio que las autoridades elaboran. Los inspectores podrían establecer así una relación de poder para con los docentes, viendo facilitada una determinada labor ideológica ejercida por su discurso.

Las reuniones de coordinación entre docentes serían la vía a través de la cual el discurso desarrollado por las autoridades (inspectores) incide sobre las concepciones que los docentes tienen de la Matemática y su enseñanza, concepciones que fueron analizadas a través del cuestionario desarrollado en el apartado 5.2.2.1. Las prácticas discursivas que se desarrollan en estas reuniones favorecen a la constitución de grupos dentro de una sociedad más grande, que es la de todos los docentes de Matemática del país, así como a la constitución de una determinada cultura.

Vemos en este momento cómo también aquí es importante la consideración del discurso dentro de un determinado contexto social, histórico y cultural para comprender su naturaleza y lograr un análisis explicativo e interpretativo a la vez. Por ejemplo, es importante señalar que si bien en la actualidad existen en forma curricular esas reuniones de coordinación entre docentes que mencionamos, la institucionalización de prácticas y de una determinada concepción entre docentes no se ejerce solamente –ni principalmente- a través de ellas. Influyen también otros elementos, como características propias de la formación docente en Uruguay: en dos de los cuatro años de la carrera de profesorado de Matemática los estudiantes asisten durante todo el año a observar clases de profesores ya egresados, lo que fortalece esa 'tradición oral' ya mencionada. En el último año de la carrera los estudiantes de profesorado tienen un grupo a cargo, pero supervisado por un profesor de Didáctica de la Matemática y con un grupo de compañeros de referencia, lo que también influye en esa conformación de representaciones mentales compartidas por el grupo.

Según uno de los principios del ACD, el vínculo entre el texto y la sociedad es mediado. Consideramos que este momento del proceso de institucionalización es en el que más patente se hace tal mediación, a través de las autoridades educativas, entre los textos (libros y programas) y los docentes.

También en este momento del proceso de institucionalización podemos apreciar cómo la explicitación de las relaciones de poder subyacentes entre los actores de la noosfera, y del rol que cumple cada uno de ellos en el sistema educativo, puede dar cabida a que estos roles se modifiquen. Pensamos que tal vez sería posible que los docentes, como colectivo social, ocuparan otro lugar en la conformación de los programas o en la manera en que deben ser implementados.

En suma, los elementos discursivos analizados a la luz de este momento específico del proceso de institucionalización nos permitieron identificar una práctica de referencia que denominamos "Intercambio de intenciones sobre la implementación del modelo del límite como saber a enseñar", en la que las prácticas de inspectores y autoridades en general estarían permeando, implícita o explícitamente, la concepción de la matemática y de su enseñanza de los docentes, específicamente en lo relativo al concepto de límite. En este momento, las actividades observables a través de las cuales se puede identificar la práctica de referencia son las reuniones entre docentes y autoridades, en las que las autoridades explicitan sus intenciones acerca de cómo deben ser entendidos los contenidos a enseñar y fijan pautas para su enseñanza, las reuniones de coordinación entre docentes en donde se discuten y unifican criterios para viabilizar aquellas pautas, la evaluación docente por parte de las autoridades y el plan de formación docente, específicamente en lo que hace a su formación en didáctica (en donde el estudiante de profesorado asiste durante dos años a observar cursos de docentes ya egresados, y finaliza su carrera con un año entero en el cual tiene un grupo a cargo con la supervisión del profesor de Didáctica de Matemática).

5.3.3. Momento 'c': Prácticas educativas en el aula

En este momento el problema social que nos ocupa es el reconocimiento de la práctica de referencia de los docentes, actores protagonistas de este momento. Nos interesa explicitar cómo las prácticas educativas concretas de aula, entendidas como prácticas de referencia y llevadas a cabo a través de determinadas actividades discursivas, han sido influidas por las prácticas sociales que se evidencian a través de los elementos del discurso analizados hasta el momento y cómo influyen ellas mismas en el proceso de institucionalización de un determinado saber respecto al concepto de límite funcional.

Dado que en este momento ubicamos como protagonistas a los docentes y a sus prácticas, y que estos docentes cumplen múltiples roles en el sistema educativo, se pueden distinguir al menos tres tipos de relaciones de poder: las que las autoridades educativas ejercen sobre los docentes (ya explicitadas en los apartados anteriores pero que tienen un estrecho vínculo con este momento del proceso de institucionalización), las que la sociedad en general ejerce sobre los docentes, a través de sus críticas, demandas y exigencias (que puede identificarse, por ejemplo, a través de los artículos como el ya citado en el apartado 5.3.1 (Orfila, 2010, 14 de agosto)) y las que los docentes ejercen sobre los estudiantes a través de sus prácticas.

Respecto de esta última, diremos que así como los docentes son evaluados por los inspectores, también los estudiantes son evaluados por los docentes, lo que sugiere un interés por parte del estudiante de aprender y lograr reproducir el discurso que el docente le ofrece. Algunos de los docentes que respondieron al cuestionario desarrollado en el apartado 5.2.2.1 manifiestan no evaluar directamente la definición de límite, pero los que lo hacen lo evalúan atendiendo a aspectos formales, del tipo "aplicar la definición de límite para demostrar que un límite dado es un número dado" o cambio en el orden de los cuantificadores para que los estudiantes detecten la diferencia, o la existencia o no de la imagen de un punto del dominio en el que no existe el límite de la función. Por su parte, en los libros de texto se atienden más bien aspectos algorítmicos del concepto de límite para la evaluación, prácticamente no se evalúa en forma explícita la definición sino la operatoria de límites.

En este momento se detecta con claridad cómo el discurso de los docentes constituye a la sociedad y a la cultura, a la vez que es constituido por ellas dado que el docente es miembro de un grupo social, y que como tal sus concepciones son influidas por las del grupo y las exigencias externas que tiene ese grupo (de las autoridades, de sus profesores o la formación en general que haya recibido, de la sociedad en general que exige más nivel de aprobación en matemática, etc.). Ello se traduce en un conflicto que viven los docentes y que pudo entreverse en las respuestas de algunos docentes al cuestionario: por un lado, sostienen que es importante la introducción del concepto de límite porque es central en la estructuración del cálculo, para el desarrollo de otros conceptos como el de derivabilidad. Esto produce que realicen una labor ideológica en sus clases, dado que transmiten esa manera determinada de comprender el concepto de límite dentro del cálculo. En este sentido los docentes se ven influenciados por lo que las autoridades plantean en los programas, por la presentación del tema en los libros de texto y, muy probablemente, por su formación inicial: no sólo por cómo estaba estructurado el tema en los currículos escolares de su época sino además por las prácticas docentes de sus propios profesores. Pero por otro lado, los docentes que responden al cuestionario reconocen que este es un tema difícil para los estudiantes por el grado de abstracción que requiere, y que por eso sería posible pensar en no realizar un tratamiento formal del mismo en cursos de opciones que no requieran una carga horaria extensa de matemática, como la opción Derecho, por ejemplo. Eso podría estar dando cuenta de la influencia de las exigencias de un mayor índice de aprobación por parte de la sociedad.

Es decir, el nivel implícito de la influencia de las prácticas de referencia sobre los actores, en este caso los docentes, hace que pueda ocurrir que las elecciones que los docentes realizan para sus clases, y que se explicitan en actividades concretas de aula, como la forma en que organizan una clase, los ejemplos que proponen, etc. están en realidad condicionadas por toda una estructura institucional. Y en eso radica la importancia del reconocimiento de todo un proceso de institución, en el cual el docente está inmerso como un actor que en cada momento de dicho proceso va cumpliendo diferentes roles.

Puede apreciarse también la labor ideológica del discurso en las entrevistas realizadas a raíz del cambio en los programas. Por un lado, el cambio en el enfoque metodológico y conceptual de los programas constituye en sí una labor ideológica, ya que se pretende modificar una representación mental compartida por el grupo de docentes de matemática. Se pretende con ellos asegurar que el grupo de docentes desarrolle prácticas educativas similares, favoreciendo de esa manera su cohesión. Por otro lado, la resistencia que los docentes manifiestan sobre algunos aspectos del programa sugiere una determinada ideología persistente en su discurso, caracterizada por la necesidad de formalizar los conceptos con los que se trabaja en el curso, y que contribuye a que los docentes mantengan prácticas educativas características de la metodología de trabajo de los programas anteriores, según ellos mismos manifiestan. Vemos nuevamente cómo las decisiones de los docentes están en realidad condicionadas por toda una estructura institucional, que desarrolla prácticas de referencia que norman la actividad del docente.

En suma, reconocemos en el discurso de los docentes a través de sus prácticas educativas una forma de acción social, en la cual se difunde e institucionaliza una determinada manera de conceptualizar al límite. En el caso de las prácticas educativas en Uruguay, especialmente en el curso de la opción Ingeniería, estas prácticas se caracterizan por el acento en el rigor y la estructura de los demás contenidos del curso en torno al concepto de límite. Hemos denominado a la práctica de referencia de este momento del proceso de institucionalización "Implementación del límite como saber a enseñar" y consideramos que las actividades explícitas de los docentes a través de las cuales puede observarse esa práctica son el diseño e implementación de actividades didácticas para desarrollar diferentes contenidos, específicamente el de límite, el tipo de ejemplos, ejercicios y problemas que se proponen y la evaluación a estudiantes.

En el siguiente esquema presentamos un resumen de lo tratado en este apartado que creemos rescata lo más significativo de cada momento, a la vez que permite apreciar las características del proceso:

DESCRIPCIÓN DE MOMENTOS

	Momento 'a'	**Momento 'b'**	**Momento 'c'**
Actores de la noósfera	• Comunidad matemática • Autoridades educativas nacionales e internacionales • Autores de libros de texto y programas • Sociedad en general	• Autoridades educativas nacionales • Docentes	• Docentes • Estudiantes
Prácticas de referencia	• Conformación del límite-saber sabio como un saber a enseñar	• Intercambio de intenciones sobre la implementación del modelo del límite como saber a enseñar	• Implementación del límite como saber a enseñar
Actividades	• Confección de planes y programas • Diseño de libros de texto y 'apuntes de profesor'.	• Reuniones entre autoridades educativas y docentes • Evaluación docente por parte de las autoridades • Plan de formación docente	• Diseño e implementación de actividades didácticas • Desarrollo de temas • Propuesta de ejemplos • Problemas y ejercicios • Evaluación
Características y consecuencias de los actos discursivos	• Influencia del paradigma desarrollado en la cuarta etapa del proceso de institucionalización en el ámbito científico: formalización se transmite a programas y libros de texto. • Presentación de la definición en una forma general, compatible con una definición general de función. • Énfasis en actividades algorítmicas, especialmente en libros de texto. • En programas existe un cambio en la metodología propuesta, pero la estructuración del curso se mantiene	• El discurso como acción social entre autoridades y docentes opera de mediador entre programas diseñados y prácticas de aula • Evaluación docente juega un papel importante en la institucionalización de determinadas prácticas • Discurso entre docentes y entre docentes y autoridades favorece la conformación de una ideología compartida en subgrupos dentro del grupo de docentes • Interés por generar estructuras que permitan una profundización en cursos posteriores tanto en los programas de los cursos como en los cuestionarios realizados a docentes	• Presentación de la definición en términos de épsilon-delta. • Uso de cuantificadores • Presentar de un curso ordenado y lógicamente secuenciado • Importancia otorgada al simbolismo y rigor • Prácticas educativas de docentes, especialmente la evaluación de estudiantes juega un papel importante en la institucionalización de determinada concepción del cálculo y del concepto de límite. • Resistencia al cambio en los programas por parte de los docentes sugiere una perpetuación de esa concepción (con énfasis en los aspectos formales y el concepto de límite como estructurador del resto de los conceptos tratados en el curso)

PRÁCTICAS SOCIALES: Formalización – Generalización - Difusión

Esquema 7: Descripción del proceso de institucionalización en el ámbito escolar a través de las prácticas de los actores en cada momento

Capítulo 6 –Reflexiones finales

En el desarrollo de la investigación se han presentado elementos para proponer y describir un proceso de institucionalización del límite en la escuela entendida como institución. Para ello se consideraron dos ámbitos: el desarrollo al seno de la comunidad matemática (grupos científicos) y la situación en el ámbito escolar. La investigación se centró en identificar, describir y analizar ese proceso desde los actores de la noósfera involucrados en cada momento y las prácticas que esos actores desarrollan. Es por eso que se consideró a la teoría socioepistemológica como un marco adecuado para desarrollar el estudio.

Se pueden distinguir dos instancias en el transcurso de la investigación, que concluyen en lo que consideramos son los aportes más significativos de la misma: una instancia de tipo teórico-metodológica, desarrollado en el capítulo 4, en el que se logró lo que llamamos un “esqueleto” para el análisis general de dicho proceso de institucionalización del concepto de límite. Desarrollamos estos aportes en el apartado 6.1.

Otra instancia de la investigación podría considerarse más de tipo experimental, ya más específico del concepto de límite, y es la que permitió dar cuerpo al “esqueleto” presentado en el apartado anterior. Esta instancia en la investigación consistió en el análisis del proceso de institucionalización, a través de uno y otro ámbito, que conformó el capítulo 5. Desarrollamos estos aportes en el apartado 6.2.

Finalmente, desarrollamos en el apartado 6.3 una posible explicación para la pregunta original de la investigación: ¿por qué en el contexto educativo uruguayo se enseña al concepto de límite de la manera en que se hace? La investigación realizada nos llevó a concluir que para lograr una respuesta es necesario considerar desde las prácticas sociales que le dan significado o resignifican al propio saber matemático en cuestión hasta cómo dichas prácticas permean de diferente manera en el actuar de los involucrados en distintos momentos de la institucionalización: la institucionalización vía diseños curriculares, libros de texto o apuntes de profesor, en la interacción entre autoridades y docentes, en el aula frente alumnos, etc. Y precisamente allí se vislumbra la necesidad de entender la situación como un proceso de institucionalización del concepto de límite, a través de los actores involucrados y sus prácticas.

6.1. Reflexiones relativas a los aspectos teórico-metodológicos

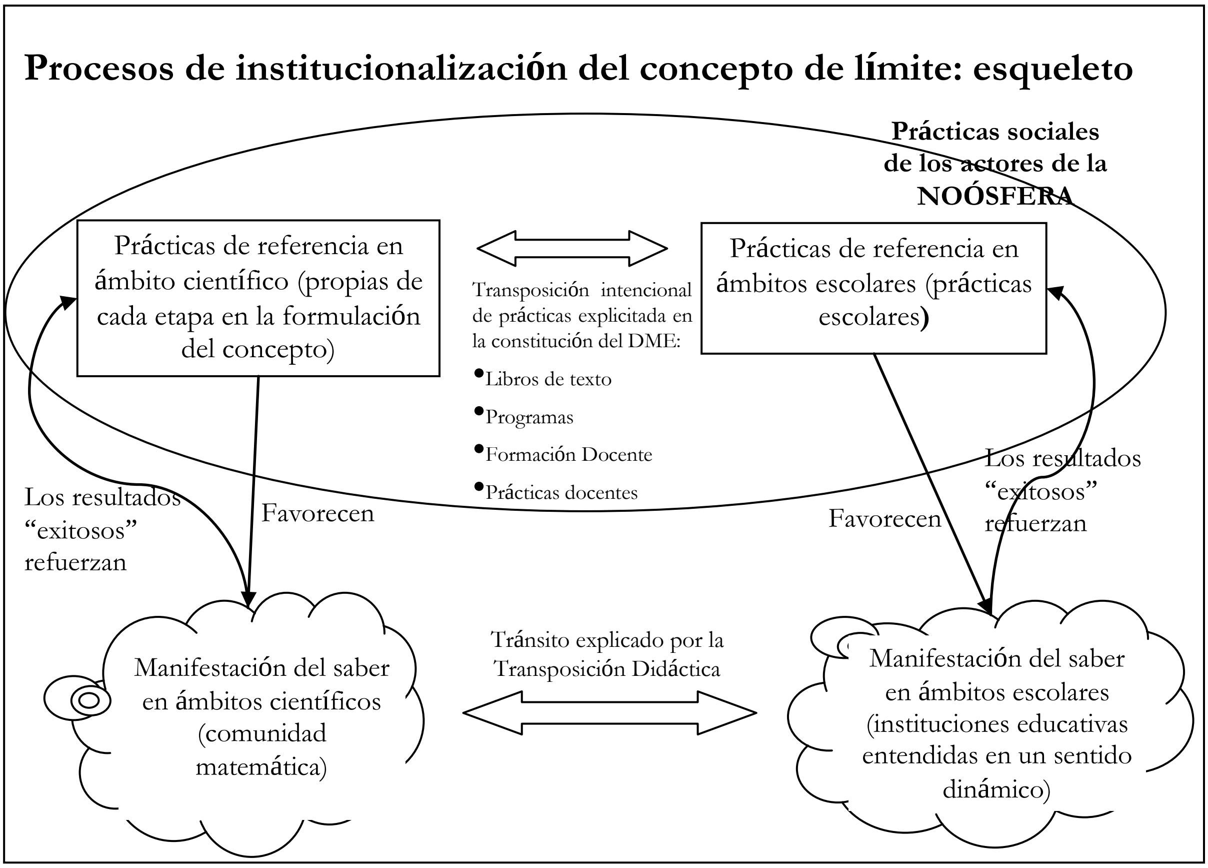
Esta caracterización, que toma cuerpo en el esquema que presentamos a continuación, utiliza como insumos iniciales, dentro de la Socioepistemología, a los aportes de Montiel (2006) y García Torres (García Torres y Cantoral, 2007). Pero, enfrentados al problema de describir la naturaleza de los procesos de institucionalización, más allá de cómo se articulan dentro del esquema de prácticas sociales y de referencias, se vio necesario indagar en otros aportes que permitieran delinear los aspectos metodológicos. Algunos de ellos pertenecen a la teoría socioepistemológica y otros no. Así fueron estudiados los aportes de Brousseau (1997), Castañeda (2006), Chevallard (1991), Cordero (2006) y Cordero y Flores (2007) e incluso autores que no son específicos de la disciplina de la Didáctica de la Matemática, como Berger y Luckmann (2001), Candela (2007), Frigerio et al. (1994), Van Dijk (2001) y Fairclough y Wodak (2001) los cuales brindaron un marco para entender a la institucionalización, a los procesos de institucionalización y al análisis del discurso como acción social para explicar dichos procesos.

Hemos justificado que podríamos considerar varios procesos de institucionalización del concepto de límite, en los que se tuvieran en cuenta, además de los ámbitos escolar y científico, otros como el profesional o el de la sociedad en general y analizar así las prácticas de los actores de cada uno de esos ámbitos. Sin embargo, en esta investigación optamos por centrarnos en la institucionalización escolar, y dado que lo que se institucionaliza es el concepto de límite, fue necesario además considerar el ámbito científico y allí analizar las prácticas que generaron tal conocimiento. Es por eso que nuestra investigación precisó del análisis de las prácticas de los actores involucrados en esos dos ámbitos, el científico y el escolar.

Se elaboró un esquema que pretende articular los aspectos teóricos considerados en la investigación. En él se explicita el interés por utilizar el modelo teórico de prácticas sociales, de referencia y actividades planteado por Montiel (2006) para analizar el proceso de institucionalización en la escuela. Dichas prácticas generan un determinado saber, en uno y otro ámbito, que siguiendo la teoría de Transposición Didáctica de Chevallard (1991) podríamos denominar, respectivamente, saber sabio y saber a enseñar.

Sin embargo, y en esto se presenta una de las principales peculiaridades de la investigación, no nos interesa analizar el tránsito del saber "límite funcional" entre uno y otro ámbito –tránsito que ya ha sido analizado por otras investigaciones- sino que interesa analizar el proceso de institucionalización que vive dicho saber, específicamente su institucionalización en la escuela, y a través de las prácticas de los actores involucrados en cada momento de dicho proceso. Proponemos tal análisis desde la perspectiva socioepistemológica ya que reconoce el papel de las prácticas sociales en la generación de conocimiento matemático y dichas prácticas reconocen a su vez el papel del hombre en los procesos tanto de generación como de difusión de dicho conocimiento.

El esquema elaborado es el siguiente:



Esquema 3: Procesos de institucionalización del concepto de límite: esqueleto

Desde el punto de vista metodológico, se reconoció y justificó la necesidad de utilizar diferentes herramientas para analizar los dos ámbitos principales –científico y escolar-. Para el ámbito científico se utilizó una parte del esquema propuesto por Buendía y Montiel (2009a y 2009b): la conformación de una *epistemología de prácticas* para el concepto de límite. El mismo permitió identificar las prácticas sociales que normaron a las prácticas de referencia en cada etapa del desarrollo socio-histórico del concepto. Estas prácticas se refieren al saber matemático en cuestión, en este caso el límite funcional. Sin embargo, cuando queremos analizar cómo esas prácticas se reinterpretan en el ámbito escolar, nos encontramos con que es necesario hacerlo desde los actores de la noósfera, ya que nuestra pregunta era precisamente por qué se enseña de la manera en que se hace actualmente. Y para ello debemos entender al profesor, que es quien enseña, como inmerso en todo un proceso de institucionalización, en el que intervienen además otros grupos de actores, y que es el que permitiría explicar tal enseñanza.

Para analizar el tránsito entre las prácticas de los actores de la noósfera en uno y otro ámbito, así como para analizar el ámbito escolar, consideramos que ya no era posible utilizar el modelo anterior, sino que precisábamos una herramienta que permitiera analizar esas prácticas a través de algo observable, como podría ser el discurso de esos actores, entendido como acción social. Se utilizó así una herramienta metodológica externa a la socioepistmeología, el Análisis Crítico del Discurso. Esta herramienta es desarrollada por lingüistas como Van Dijk (1999, 2001) quienes entienden al discurso como acción social, y sostienen que su análisis se ocupa de explicitar las relaciones de poder involucradas entre los actores de una determinada sociedad, para ocuparse de los problemas sociales presentes en ella.

Este esquema, que se confeccionó analizando especialmente el desarrollo en ámbitos científicos y escolares del concepto de límite, puede pensarse como un esquema que permita, salvando las distancias, explicar los procesos de institucionalización de otros conceptos matemáticos. Ese es un aspecto que no se ha desarrollado en la presente investigación y que podría conformar una línea de investigación a futuro.

6.2. Reflexiones relativas a los aspectos experimentales de la investigación

Una vez conformado el modelo teórico-metodológico, fue posible implementarlo para la revisión de los elementos considerados en el proceso de institucionalización. Esta revisión se articuló, a su vez, en torno a dos ámbitos y la transición entre ellos: el aspecto del desarrollo del concepto de límite a la interna de las comunidades de matemáticos, que hemos denominado “ámbito científico”, y el aspecto del desarrollo del concepto de límite a la interna de la comunidad escolar, que denominamos “ámbito escolar”. A los efectos de alcanzar el objetivo planteado, *analizar los procesos a través de los cuales el concepto de límite se ha constituido para explicitar las razones por las que se presenta en el ámbito escolar de la manera en que se hace actualmente*, se atendieron particularmente a los vínculos entre ambos ámbitos.

Con respecto al primero de los ámbitos, el análisis socio-histórico dio cuenta de las etapas que transcurrió el concepto de límite desde sus inicios hasta lo que se consensúa actualmente.

Pero más allá de las etapas, nos importó cómo y por qué se dio la transición entre ellas: las prácticas asociadas al concepto y a su rol en la estructuración del Cálculo en general en cada momento histórico dieron respuesta a esas preguntas. Básicamente, el interés por la *predicción*[20], la búsqueda de una *fundamentación rigurosa* de los conceptos que permitían resolver problemas de Cálculo Diferencial e Integral (*formalización*), su *difusión* a un público creciente, la *generalización* de dichos conceptos a nuevas funciones y la *extensión* de los mismos a nuevos contextos de aplicación jugaron un rol decisivo en la transición mencionada. La identificación de dichas prácticas y de las prácticas de referencia y actividades que ellas normaron en cada etapa del ámbito científico, dio lugar a la conformación de una *epistemología de prácticas del concepto de límite*, siguiendo el modelo propuesto por Buendía y Montiel (2009 a y 2009b). Se presentó dicha socioepistemología en el apartado 5.1 y se presentan una síntesis de los resultados obtenidos en los esquemas 4 y 5.

Con respecto al ámbito escolar, se diferenciaron tres momentos en el proceso de institucionalización del concepto de límite; estos son: momento 'a', caracterizado por las prácticas de los actores intervinientes en el tránsito entre el ámbito científico y el escolar (comunidad matemática, autoridades de organismos internacionales, autoridades educativas nacionales, autores de libros de texto y de programas y sociedad en general); momento 'b', caracterizado por las interacciones entre docentes y entre docentes y autoridades educativas; y un momento 'c' caracterizado por las prácticas educativas de aula, en el que los actores protagonistas son los docentes y los estudiantes. Es importante señalar que, a diferencia de las etapas que se distinguieron en el ámbito científico, estos momentos no responden a un orden cronológico sino que se vinculan dialécticamente: el proceso de institucionalización en el ámbito escolar se conforma por las interacciones que ocurren entre ellos.

Estos momentos fueron los que articularon el análisis del discurso como acción social, para el cual se utilizó como herramienta metodológica el ACD. Para ello, se analizaron algunos elementos del discurso matemático escolar: se implementó un cuestionario a docentes que permitiera conocer sus concepciones acerca del concepto de límite, su rol en la estructuración del cálculo y su tratamiento escolar, también se estudió la evolución de los libros de texto y los programas, se analizaron apuntes de un profesor de formación docente, y se realizaron entrevistas con docentes para complementar los aspectos discursivos escritos con el análisis de los aspectos relativos a la "tradición oral", ya que hemos descubierto que es una

[20] Entendemos en este momento a la predicción no como una práctica específica para el desarrollo del concepto de límite, pero sí como práctica social que normó las prácticas de referencia de los actores de un determinado momento en el desarrollo del Cálculo Infinitesimal en general.

componente importante en el proceso de institucionalización del concepto de límite en el contexto del sistema educativo uruguayo.

El cuestionario realizado a docentes sugirió una concepción consensuada entre ellos acerca del rol central que juega el concepto de límite como pilar en la estructuración de toda la teoría del Cálculo, de manera que es la única forma posible de construir otros conceptos como el de continuidad o derivabilidad. Los profesores coinciden en que es un contenido necesario en todo curso de Cálculo. Intentando encontrar una explicación a dicha concepción desde las prácticas de los actores de la noosfera, hallamos que una de las explicaciones podría ser, para algunos, una convicción personal –conformada por su formación y experiencia concreta de aula– y, para otros, la imposición externa: entienden que debe ser así porque así lo exige el programa curricular o la tradición. Así, el análisis del discurso permitió desentrañar el papel del currículo y de los libros de texto en las concepciones de los docentes. Vislumbramos aquí la importancia de reconocer que cuando el docente toma decisiones y las implementa en su aula, él se ve permeado por las prácticas sociales y de referencia de todos los actores involucrados en todo un proceso de institucionalización, que son en verdad las que lo conducen a hacer lo que hace.

La entrevista realizada en una primera instancia y el análisis de los libros de texto utilizados desde la década del ’50 (mencionados por el profesor entrevistado) permiten explicar en parte esa rigurosidad y formalización que existe aún hoy en las prácticas educativas relativas al concepto de límite y del Cálculo en general en Uruguay, desarrolladas en los apartados 5.2.1 y 5.3. Los cursos impartidos en la primera mitad del siglo XX marcaron una gran influencia sobre dichas prácticas actuales, dada la importancia otorgada a la referencia a “apuntes de clase” más que a libros de texto, y dadas también las características de los libros de texto utilizados. Esos apuntes de clase perpetuaron una tradición oral transmitida entre las diferentes generaciones de estudiantes y docentes.

Por su parte, los libros de texto utilizados actualmente constatan esa perpetuación pues si bien con una presentación visual totalmente diferente, aún mantienen características similares: comparten la concepción de la Matemática como una ciencia ya escrita y ajena a quien la aprende, así como el rol pasivo otorgado al estudiante en la construcción de conocimiento.

Por último, en el análisis de los programas de Educación Secundaria se detectó una situación particular, dado que se produjo recientemente un cambio en los mismos: en 2006 se impuso a nivel nacional un nuevo programa (que en 6° año comenzó a regir desde 2008) que suplantó al anterior de 1976. Detectamos grandes diferencias en estos programas, tanto en su contenido como en su forma, específicamente en el diseñado para la opción Físico-Matemática (anteriormente Ingeniería). Estas diferencias sugieren también diferencias en lo que hace a la concepción de la Matemática y su enseñanza, si bien estos aspectos no se explicitan en los programas del plan 1976. Estos, que constituyen únicamente una lista de contenidos, traducen la idea de una matemática acabada, preexistente al estudiante, autocontenida y con pocos vínculos con situaciones extramatemáticas. No parece existir una preocupación por explicitar la manera en que ésta deba enseñarse. Por su parte, en los programas del plan 2006 se detecta una preocupación por la participación activa del estudiante en la formación del conocimiento, si bien se propone una determinada temática que el docente debe trabajar en clase, se lo ubica explícitamente en un rol de orientador. Se propone además la consideración de contextos extramatemáticos para la introducción de los contenidos a tratar.

Estas diferencias condujeron al interés por realizar nuevas entrevistas, esta vez a profesores con vasta experiencia en el desempeño como profesores del curso de 6° año de Educación Secundaria, opción Físico-Matemática. En dichas entrevistas se pudo detectar cómo, a pesar de los cambios metodológicos sugeridos por las autoridades educativas a través de los programas, ambos profesores declaraban considerar importante la formalización en sus cursos y coincidían en considerar al límite de funciones como un concepto central en la estructuración del cálculo.

El análisis del desarrollo socio-histórico arroja herramientas para pensar que la definición formal del concepto de límite surge por una necesidad interna de la estructura de la matemática, que es la de formalizar para, entre otras cosas, generalizar –a nuevas funciones y a nuevos contextos- y estructurar otros conocimientos preexistentes pero con otra forma: a partir de la definición de límite se reformulan el concepto y la definición de derivada, integral, continuidad, entre otros. A partir del análisis del discurso del contexto educativo uruguayo llevado a cabo puede pensarse que el hecho de que sea enseñado en el aula de la manera en que se hace en la mayoría de los cursos de Cálculo en Uruguay, responde a esa necesidad de la comunidad matemática, y no a una decisión didáctica de la comunidad de profesores y mucho menos a una necesidad de los estudiantes.

Esos vínculos que entretejen la compleja relación entre la comunidad matemática y la matemática escolar son los que evidencian que para comprender cómo y por qué el concepto de límite es tratado actualmente de la forma en que se hace, es necesario reconocer que esa evolución está inmersa en un todo un proceso de institucionalización. En esta investigación se ha llevado a cabo la identificación de dicho proceso a través del análisis de las prácticas sociales presentes en la constitución del saber como un saber institucionalizado, tanto en el ámbito académico como en su tratamiento escolar.

6.3. Análisis del proceso de institucionalización a través de los actores y sus prácticas

El análisis realizado sobre el desarrollo del concepto de límite en el ámbito científico y el discurso escolar actual permite elaborar explicaciones acerca de por qué se enseña actualmente de la manera en que se hace. Como lo justificamos a lo largo de la investigación, estas explicaciones están dadas en términos de un proceso de institucionalización propio del concepto en la escuela entendida como una institución. Este proceso hace referencia a los mecanismos a través de los cuales el concepto se legitima como un saber aceptado y acordado en una determinada comunidad científica, cómo esos acuerdos transitan hacia el ámbito escolar, motivado entre otras cosas por el fin de difundir conocimiento, y cómo en el ámbito escolar se ve permeado por el proceso de institucionalización, que lo ubica en determinado rol dentro de la estructura de la Matemática Escolar. Este tipo de análisis podría haberse llevado a cabo bajo una perspectiva que atendiera al saber propiamente dicho y al tránsito del saber de un ámbito a otro. Lo distintivo de nuestro análisis constituyó en hacer foco en el análisis de las prácticas para la descripción de dicho proceso de institucionalización, desde una perspectiva que considera al saber como una construcción humana y cuestiona su preexistencia en un cuerpo de saber estructurado previamente al sujeto que aprende.

En el apartado 5.1.2 hemos propuesto que las prácticas sociales que normaron el tránsito entre las diferentes etapas del concepto fueron, principalmente, la de formalización, generalización y difusión. Es a través de ellas, y no de los conceptos involucrados, que explicamos el tránsito del saber acuñado en ámbitos científicos al saber enseñado en la institución escolar. Estas prácticas sociales se reinterpretan diferente según el paradigma vigente en cada ámbito, dando lugar a prácticas de referencia.

En el ámbito científico, estas prácticas sociales normaron prácticas de referencia que hemos dado en llamar “matematización del cálculo en un ambiente geométrico-estático”, “matematización del movimiento en un ambiente geométrico-dinámico”, “aritmetización del análisis en un ambiente algebraico-analítico” y “generalización del análisis a un ambiente topológico”. Estas prácticas de referencia fueron detectables a partir de actividades explícitas y observables, detallados en el esquema 5 en el apartado 5.1.2. Veremos a continuación cómo cada una de las prácticas que proponemos como prácticas sociales ha normado el quehacer de los actores involucrados en el ámbito escolar, específicamente en el contexto educativo uruguayo.

Por su parte, entendemos que la *formalización* en el contexto escolar se traduce en la presentación de la definición en términos de épsilon-delta y el uso de cuantificadores, el énfasis en la necesidad de tratar el concepto de esa forma para presentar un curso ordenado y lógicamente secuenciado y la importancia que se le otorga al simbolismo y al rigor.

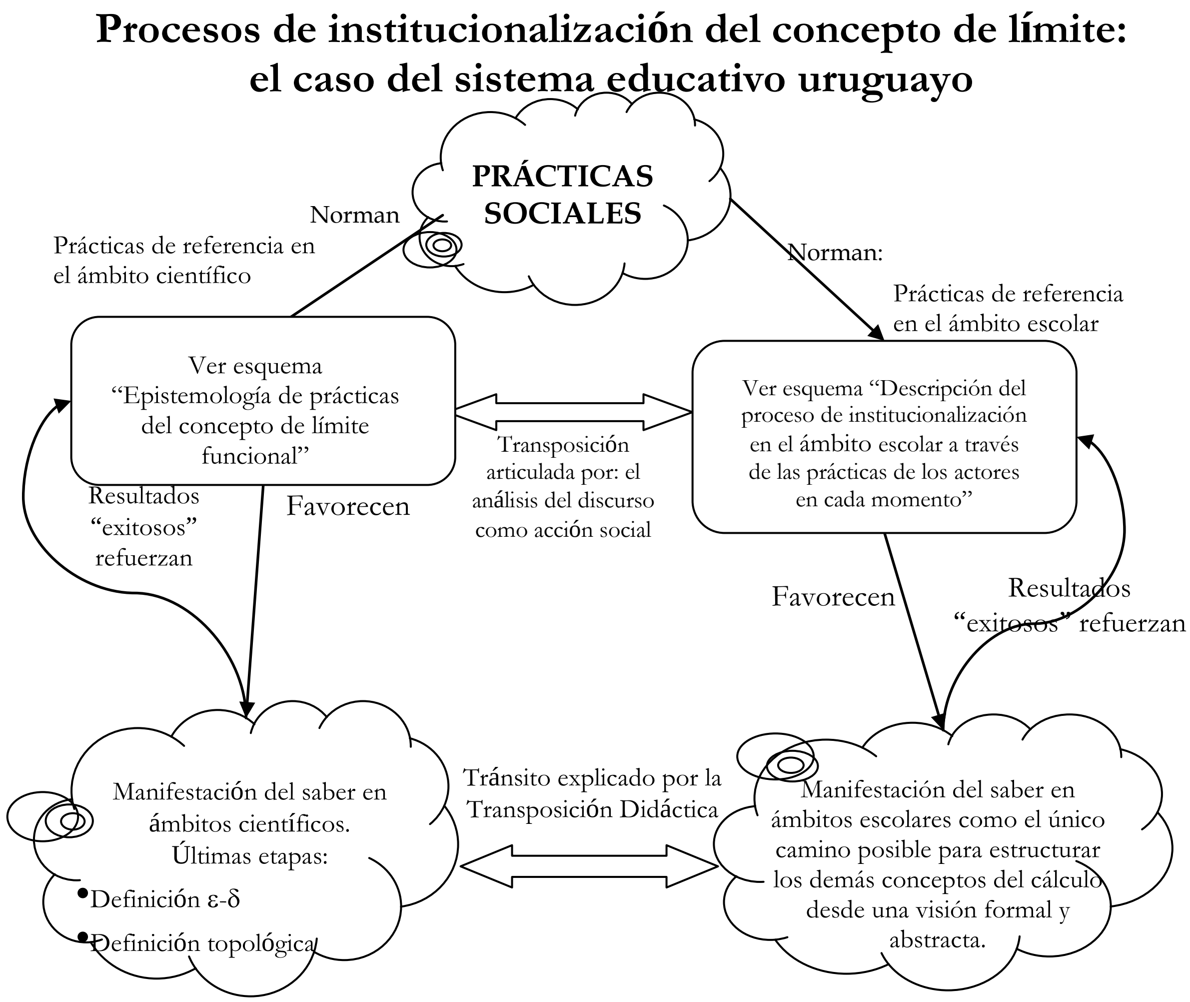
Ello se ve reflejado en los programas: en los actuales, tanto de nivel secundario como de formación docente, se explicita como objetivo el utilizar un método de trabajo más riguroso que en cursos anteriores (Programa de Físico-Matemática de Educación Secundaria: ANEP, CES, Inspección de Matemática, 2006b), o que constituya el inicio de una formalización al Análisis Matemático (Programa de Análisis I del Profesorado de Matemática: ANEP, DFPD, Departamento de Matemática, 2008). También se ve reflejado en los libros de texto, tanto los de antaño como los actuales. En los primeros la intencionalidad por presentar los resultados en forma simbólica y formal es declarada ya desde el prólogo, se pretende una exposición sistemática y lógicamente encadenada, en los últimos el desarrollo se da de lo intuitivo a lo formal, pero brindando un mayor espacio a los aspectos formales. Esa intencionalidad se pudo apreciar también en los apuntes del Profesor para su curso de Análisis en Formación Docente (De Olivera, 2008). Por último, ello se pudo detectar también a través del análisis realizado sobre las concepciones de las prácticas docentes: en el cuestionario declaran que su actuar se ve normado por las exigencias de formalización de programas y autoridades educativas y en las entrevistas a docentes a raíz del cambio en los programas los docentes sostienen que aún con un cambio propuesto en los programas en la metodología, ellos continúan tratando el concepto y el curso en general con formalidad. Ello condujo en algunos casos a una reducción de la enseñanza a una transmisión de métodos algorítmicos para cálculos de límites absolutamente descontextualizados de la problemática de origen. Los libros de texto, programas e incluso prácticas docentes eluden la presentación y desarrollo del concepto a través de problemas matemáticos o extramatemáticos que le den sentido. El límite ha ido tomando otras formas, se fue ganando en rigor y formalidad pero perdiendo el contexto en el cual el concepto fue originado y desarrollado.

En el desarrollo del concepto de límite en los libros de texto se puede observar cómo la práctica de *generalización* norma la manera en que éste es presentado: si bien en algunos se presentan ejemplos concretos, en todos los textos analizados se prioriza la presentación de definiciones y propiedades referidas al caso más general posible, compatible con una definición general de función. También puede detectarse el interés por generar estructuras que permitan una profundización en cursos posteriores tanto en los programas de los cursos como en los cuestionarios realizados a docentes. Ello hablaría de la generalización como una práctica social que norma los objetivos teóricos –plasmados en los programas– y las concepciones que los docentes tienen sobre sus prácticas reales y las prácticas ideales –que se pudo analizar a través de los cuestionarios–.

Por último, proponemos a la práctica de *difusión* de conocimiento matemático como una práctica que norma también el quehacer de actores, tanto del ámbito científico como del escolar. En el ámbito científico, porque el interés por difundir el saber científico promueve la actividad observable del diseño de libros de texto. En el ámbito escolar esta práctica se presenta como un móvil fundamental para el diseño de programas, libros de texto, cursos específicos, entre otros.

Este análisis nos permitió concluir en determinadas prácticas de referencia correspondientes al ámbito escolar y normadas por las prácticas sociales propuestas. Estas prácticas de referencia son, en sentido general, las prácticas escolares. Proponemos que para cada uno de los momentos en este ámbito las prácticas sociales se reinterpetan diferente, a la luz del paradigma vigente en cada momento. Ellas son, respectivamente: "Conformación del límite-saber sabio como un saber a enseñar", "Intercambio de intenciones sobre la implementación del modelo del límite como saber a enseñar" e "Implementación del límite como saber a enseñar". Estas prácticas de referencia fueron detectables a partir de actividades explícitas y observables, detallados en el esquema 7 en el apartado 5.3.

El siguiente esquema (con los dos esquemas que se presentan a continuación de él) resume los resultados alcanzados en ese sentido, a la vez que "rellena" el esquema 5, relativo al "esqueleto" teórico. En él se describen los procesos de institucionalización del concepto de límite y cómo han influido las prácticas sociales en dichos procesos, a través de los actores involucrados, específicamente para el caso del sistema educativo uruguayo:



Esquema 8: Procesos de institucionalización del concepto de límite: el caso del sistema educativo uruguayo

PS: FORMALIZACIÓN

PR: Matematización del cálculo en ambiente geométrico-estático.
Actividades:
- Cálculo de áreas y volúmenes.
- Refutación o demostración rigurosa por exhausión.

PS: PREDICCIÓN

PR: Matematización del movimiento en ambiente geométrico-dinámico.
Actividades:
- Búsqueda de resultados para problemas concretos.
- Trabajo con métodos infinitesimales.
- Priorización de la intuición.

PS: FORMALIZACIÓN-GENERALIZACIÓN-DIFUSIÓN

PR: Aritmetización del análisis en ambiente algebraico-analítico.
Actividades:
- Consideración de nuevos problemas.
- Reconstrucción del concepto de función.
- Confección de libros de texto.
- Dictado de cursos.

PS: GENERALIZACIÓN

PR: Generalización del análisis a ambiente topológico.
Actividades:
- Consideración de nuevas conjeturas.
- Extensión a nuevos contextos.
- Enunciado de nuevas definiciones.
- Demostración de nuevos teoremas.

Esquema 5: Epistemología de prácticas del concepto de límite funcional

	Momento 'a'	Momento 'b'	Momento 'c'
Actores de la noósfera	• Comunidad matemática • Autoridades educativas nacionales e internacionales • Autores de libros de texto y programas • Sociedad en general	• Autoridades educativas nacionales • Docentes	• Docentes • Estudiantes
Prácticas de referencia	• Conformación del límite-saber sabio como un saber a enseñar	• Intercambio de intenciones sobre la implementación del modelo del límite como saber a enseñar	• Implementación del límite como saber a enseñar
Actividades	• Confección de planes y programas • Diseño de libros de texto y 'apuntes de profesor'.	• Reuniones entre autoridades educativas y docentes • Evaluación docente por parte de las autoridades • Plan de formación docente	• Diseño e implementación de actividades didácticas • Desarrollo de temas • Propuesta de ejemplos • Problemas y ejercicios • Evaluación
Características y consecuencias de los actos discursivos	• Influencia del paradigma desarrollado en la cuarta etapa del proceso de institucionalización en el ámbito científico: formalización se transmite a programas y libros de texto. • Presentación de la definición en una forma general, compatible con una definición general de función. • Énfasis en actividades algorítmicas, especialmente en libros de texto. • En programas existe un cambio en la metodología propuesta, pero la estructuración del curso se mantiene	• El discurso como acción social entre autoridades y docentes opera de mediador entre programas diseñados y prácticas de aula • Evaluación docente juega un papel importante en la institucionalización de determinadas prácticas • Discurso entre docentes y entre docentes y autoridades favorece la conformación de una ideología compartida en subgrupos dentro del grupo de docentes • Interés por generar estructuras que permitan una profundización en cursos posteriores tanto en los programas de los cursos como en los cuestionarios realizados a docentes	• Presentación de la definición en términos de épsilon-delta. • Uso de cuantificadores • Presentación de un curso ordenado y lógicamente secuenciado • Importancia otorgada al simbolismo y rigor • Prácticas educativas de docentes, especialmente la evaluación de estudiantes juega un papel importante en la institucionalización de determinada concepción del cálculo y del concepto de límite. • Resistencia al cambio en los programas por parte de los docentes sugiere una perpetuación de esa concepción (con énfasis en los aspectos formales y el concepto de límite como estructurador del resto de los conceptos tratados en el curso)

DESCRIPCIÓN DE MOMENTOS

PRÁCTICAS SOCIALES: Formalización – Generalización - Difusión

Esquema 7: Descripción del proceso de institucionalización en el ámbito escolar a través de las prácticas de los actores en cada momento

Consideramos que el esquema principal de "Procesos de institucionalización del concepto de límite: el caso del sistema educativo uruguayo" ilustra lo analizado respecto a cómo las prácticas y usos de las diferentes etapas en el ámbito científico han ido institucionalizando determinadas concepciones en torno al concepto de límite, qué prácticas permiten el tránsito entre los ámbitos científico y escolar y qué prácticas son las que promueven la institucionalización del concepto en el ámbito escolar, propiamente dicho. El desarrollo de cuáles son las etapas en el ámbito científico y los momentos en el ámbito escolar de dicho proceso de institucionalización se encuentra en el capítulo 5, y resumido en los esquemas correspondientes.

Se espera que este trabajo promueva una reflexión colectiva acerca de por qué cada docente prepara y lleva a la práctica los cursos de la manera en que lo hace y ello permita la búsqueda de propuestas alternativas y el compromiso con ellos. No solamente en la forma en que se enseña el concepto de límite sino especialmente en el rol que este contenido juega en la estructuración de los cursos de Cálculo: su relación y aplicación para la construcción de otros conceptos como el de derivada o integral.

En este sentido, este trabajo propone que para reflexionar sobre su propia práctica es necesario que el docente se reconozca como un actor inmerso en todo un proceso de institucionalización, en el cual participan además diversos grupos de actores: comunidades de matemáticos, autoridades nacionales e internacionales políticas y educativas, inspectores, directores, escritores de libros de texto, estudiantes, padres, sociedad en general... Cada uno de estos grupos de actores desarrollan sus propias prácticas de referencia que otorgan significado al concepto de límite según el paradigma vigente para ese grupo de actores en el contexto en el que está inmerso. Estas prácticas se pueden detectar a través de sus actividades explícitas, y están normadas a su vez por prácticas sociales.

En el caso del concepto de límite, hemos propuesto que las prácticas sociales que norman el quehacer de los actores de cada ámbito son fundamentalmente la de formalización, generalización y difusión. A través de las actividades de los actores hemos detectado cómo esas prácticas fueron reinterpretadas en el ámbito escolar uruguayo, dando lugar a una determinada propuesta para la enseñanza del cálculo en general, y del límite en particular. Creemos que su explicitación favorece que el cuerpo docente se de la oportunidad de imaginar diferentes formas de actuar, o confirmar las actuales, pero después de una reflexión sobre por qué debe enseñarse el concepto de límite de una u otra manera.

Referencias bibliográficas:

Administración Nacional de Educación Pública (2007). *Censo Nacional Docente*. Extraído el 10 de agosto de 2010 desde http://www.anep.edu.uy/anepweb/servlet/main004?47.

Administración Nacional de Educación Pública, Consejo de Educación Secundaria, Inspección de Matemática (1976a). *Matemática "A". Programa de 3er año Bachillerato Diversificado. Orientación Científica, Opción Ingeniería*. Montevideo, Uruguay.

Administración Nacional de Educación Pública, Consejo de Educación Secundaria, Inspección de Matemática (1976b). *Matemática. Programa de 3er año Bachillerato Diversificado. Orientación Biológica, Opción Medicina, Opción Agronomía*. Montevideo, Uruguay.

Administración Nacional de Educación Pública, Consejo de Educación Secundaria, Inspección de Matemática (2006a). *Reformulación 2006. Tercer año de Bachillerato-Diversificación biológica. Opción Ciencias Biológicas. Programa de Matemática*. Montevideo, Uruguay.

Administración Nacional de Educación Pública, Consejo de Educación Secundaria, Inspección de Matemática (2006b). *Reformulación 2006. Tercer año de Bachillerato-Diversificación científica. Opción Físico-Matemática. Programa de Matemática I*. Montevideo, Uruguay.

Administración Nacional de Educación Pública, Dirección de Formación y Perfeccionamiento Docente, Departamento de Matemática (2008). *Programas para la carrera de profesorado de Matemática*. Montevideo, Uruguay.

Administración Nacional de Educación Pública, Instituto de Profesores "Artigas". (1986). *Programa de Especialidad Matemática, Asignatura Análisis I*. Montevideo, Uruguay.

Aizpuru, A. y Pérez-Fernández, F. (1999). El Cours d'Analyse de Cauchy. *Suma*, 30, 5-25.

Alanís, J. (1996). *La predicción: un hilo conductor para el rediseño del discurso escolar del Cálculo*. Tesis de doctorado no publicada. CICATA-IPN. México.

Alanís, J. (2000). La predicción: un hilo conductor para el desarrollo de un curso de cálculo. En R. Cantoral (Ed.). *El futuro del cálculo infinitesimal* (pp. 233-246). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Apostol, T. (1967). *Calculus*. Massachusetts: Blaisdell Publishing Company.

Apostol, T. (1976). *Análisis Matemático*. Barcelona: Editorial Reverté.

Ardao, A. (1968). *Etapas de la inteligencia uruguaya*. Departamento de Publicaciones de la Universidad de la República, Montevideo.

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula*. Tesis doctoral no publicada. México: Cinvestav.

Artigue, M (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa* 1(1), 40-55.

Bagni, G. (2005) Historical Roots of limit notion. Development of its representation registers and cognitive development. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 5(4), 453-468.

Balparda, O. y Lois, L. (1996). *Matemática 6º*. Montevideo: Editorial de la Plaza.

Bartle, R. (1978). Introducción al análisis matemático. México: Limusa.

Belcredi, L.; Deferrari, M. y Zambra, M. (2001). *Introducción al análisis matemático*. Montevideo, Uruguay: Ediciones de la Plaza.

Berger, P. y Luckmann, T. (2001). La construcción social de la realidad. Buenos Aires: Amorrortu Editores.

Bertero, F y Trípoli, M (2006). *Teoría de infinitesimales: historia, desarrollo y aplicaciones*. Tesis para obtener grado de Licenciatura en Matemática no publicada.

Bertero, F. y Trípoli, M. (2006). *Teoría de infinitesimales: historia, desarrollo y aplicaciones*. Tesis de Licenciatura en Matemática no publicada, Universidad Nacional de La Plata. Argentina.

Bills, L. y Tall, D. (1998). Operable Definitions in Advanced Mathematics: the case of the Least Upper Bound. En A. Olivier y K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the International Conference for the Psychology of Mathematics Education, 22(*2), 104 – 111. Stellenbosch: University of Stellenbosch.

Blázquez, S. y Ortega, T. (2002). Nueva definición de límite funcional. *Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 30, 67-84.

Blázquez, S., Ortega, T., Gatica, S. y Benegas, J. (2006). Una conceptualización de límite para el aprendizaje inicial de análisis matemático de la universidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9(2), 189-209.

Bokhari, M. A. Y Yushau, B. (2006). Local (L, ε)-approximation of a function of single variable: an alternative way to define limit. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 37(5), 515–526.

Boyer, C. (1992). *Historia de la Matemática*. Madrid: Alianza Editorial.

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics: Didactique des mathématiques* (N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland y V. Warfield Eds. y Trans.). Dordrecht: Kluwer.

Bucari, N., Bertero, F. y Trípoli, M. (2007). *Distintos enfoques para la enseñanza de la noción de límite en un primer curso de Cálculo*. Recuperado el 5 de abril de 2009 de http://www.fahce.unlp.edu.ar/academica/Areas/cienciasexactasynaturales/descargables/ponencias-en-las-jornadas/bucari.pdf.

Buendía, G. (2004). *Una epistemología del aspecto periódico de las funciones en un marco de prácticas sociales. (Un estudio socioepistemológico).* Tesis de doctorado no publicada. Cinvestav-IPN. México.

Buendía, G. (2006). Una socioepistemología del aspecto periódico de las funciones. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 9 (2), 227 – 252.

Buendía, G. y Cordero, F. (2005). Prediction and the periodical aspects as generators of knowledge in a social practices framework. *Educational Studies in Mathematics*. Kluwer Academic Publishers, Netherlands. 58(3), 299 – 333.

Buendía, G. y Montiel, G. (2009a). Acercamiento socioepistemológico a la historia de las funciones trigonométricas. En P. Lestón (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 22 (pp. 1287-1296). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Buendía, G. y Montiel, G. (2009b). From History to Research in Mathematics Education: Socioepistemological elements for trigonometric function. Accepted for its publication in Katz, V. and Tzanakis, C. (eds.) *Recent Developments on Introducing a Historical Dimension in Mathematics Education*. A History and Pedagogy in Mathematics Group Book.

Buzzetti, I., De León, R., Ramos, L., Salvá, N., Varela, D. y Verges, V. (2007). *Breve análisis histórico de la Educación en el Uruguay*. Documento para la Discusión, Administración Nacional de Educación Pública.

Candela, A. (2007). *Ciencia en el aula. Los alumnos entre la argumentación y el consenso.* México D. F.: Paidós.

Cantoral, R. y Farfán, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción del análisis. *Epsilon,* 42 (3), pp. 854-856

Cantoral, R. y Farfán, R. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 6(1), 27-40.

Cantoral, R., Farfán, R., Lezama, J. y Martínez-Sierra, G. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, Número especial*, 83-102.

Cantoral, R. y Montiel, G. (2001). *Funciones: visualización y pensamiento matemático*. México: Prentice Hall.

Castañeda, A. (2004). *Un acercamiento a la construcción social del conocimiento: Estudio de la evolución didáctica del punto de inflexión*. Tesis de doctorado no publicada. CICATA-IPN. México.

Castañeda, A. (2006). Formación de un discurso escolar: el caso del máximo de una función en la obra de L'Hospital y María G. Agnesi. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 9(2), 253-265.

Cauchy, A. L. (1821). *Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechnique*. Paris: Imprimerie royale.

Chevallard, *Y. (1991). La transposición didáctica: del* saber sabio *al* saber *enseñado*. Buenos Aires: Aique.

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje.* Barcelona: Horsori.

Cordero, F. (2006). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar: una visión socioepistemológica. En Cantoral R., Covián, O., Farfán, R., Lezama, J. y Romo A. (Eds.). *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: un reporte* *iberoamericano* (pp. 265 – 286). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C. – Díaz de Santos.

Cordero, F. y Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, *10* (1), pp. 7-38.

Cornu, B. (1986). Les principaux obstacles a l'apprentissage de la notion de limite. *Bulletin IREM – APMEP*, Feb 1986, 55- 63.

Cornu, B. (1991). Limits. En Tall, D. (Ed), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 153 - 166). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K., & Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process schema. *Journal of Mathematical Behavior*, 15, 2, 167 – 192.

Covián, O. (2005). *El papel del conocimiento matemático en la construcción de la vivienda tradicional. El caso de la cultura maya.* Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

De Guzmán, M. y Cólera, J. (1992) *Matemáticas II, COU: Opciones C y D*. Madrid: Anaya

De Olivera, F. (2008). *Análisis en una variable real. Nivel terciario*. Apuntes confeccionados para estudiantes del curso de Análisis I de la carrera de Profesorado de Matemática. Montevideo, material no publicado.

Dieudonné, J. (1966). *Fundamentos de Análisis Moderno*. Barcelona-Buenos Aires: Reverté.

Dolores Flores, C. (2007). *Elementos para una aproximación variacional a la derivada*. México: Ediciones Díaz de Santos.

Dubinsky, E. (2000) A theory-based approach to help students learn post-secondary mathematics: The case of limits. *Research reports in mathematics education*, 1, Umea University, pp. 1-18.

Durkheim, E. (1982). *The Rules of Sociological Method and Selected Texts on Sociology and its* Method. Nueva York: The Free Press.

Fairclough, N. y Wodak, R. (2001). Capítulo 10. Análisis crítico del discurso. En T. Van Dijk (Comp.) *El discurso como interacción social. Estudios sobre el discurso II. Una integración multidisciplinaria*. Barcelona/Buenos Aires: Gedisa.

Ferrari, M. (2001). *Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo.* Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN. México.

Ferrari, M y Farfán, R. M. (2004). La covariación de progresiones en la resignificación de funciones. En L. Díaz (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 17 (pp. 145-149). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Ferrari M. y Farfán, R. (2009) Una aproximación al primer momento de lo logarítmico con estudiantes de bachillerato. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22* (pp. 1165-1173), México Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, Colegio Mexicano de Matemática Educativa AC.

Frigerio, G., Poggi; M, Tiramonti, G. Aguerrondo, I. (1994). *Las instituciones educativas. Cara y ceca.* Buenos Aires: Troquel Educación.

García-Torres, E. y Cantoral, R. (2007). Un estudio sobre los procesos de institucionalización de las prácticas en ingeniería biomédica. En G. Buendía y G. Montiel (eds.) *Memorias de la XI Escuela de Invierno en Matemática Educativa*, (pp. 483 – 494). Mérida, Yucatán: Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa.

Giovannini, E. (2001). *Matemática A para 6º año. Funciones reales*. Montevideo, Uruguay: Editorial Tradinco.

Hardy, G. H. (1962). *Curso de Análisis Matemático.* Buenos Aires: Librería y Nigar.

Hitt, F. (2003). El concepto de infinito: obstáculo en el aprendizaje de límite y continuidad de funciones. En Filloy, E. (Ed), *Matemática Educativa, Aspectos de la investigación actual* (pp 91 - 111). México DF, México: Fondo de Cultura Económica.

Instituto Nacional de Estadística (2004). *Población en el país por departamento*. Documento recuperado el 6 de agosto de 2010 de http://www.ine.gub.uy/socio-demograficos/pobhogyviv2008.asp.

Juter, K. (2005). Limits of functions: How do students handle them? *Pythagoras*, 61, 11-20.

Juter, K. (2006). Limits of functions as they developed through time and as students learn them today. *Mathematical thinking and learning*, 8(4), pp. 407 – 431.

Kline, M. (1994). *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días, I y II.* Madrid: Alianza Universidad.

Kudriavtsev, L. (1983). *Curso de Análisis Matemático*. Moscú: Editorial Mir.

Lezama, J. (1999). *Un estudio de reproducibilidad: El caso de la función exponencial.* Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. México.

Linés, E. (1991). *Principios de Análisis Matemático*. Barcelona: Reverté.

Martínez, G. (2005). Los procesos de convención matemática como generadores de conocimiento. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 8 (2), 195-218.

Montiel, G., (2005). *Estudio socioepistemológico de la función trigonométric*a. Tesis de Doctorado no publicada. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. México.

Montiel, G. (2006). Construcción Social de la Función Trigonométrica. En G. Martínez Sierra (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 19 (pp. 818 - 823). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Orfila, M. (2010, 14 de agosto). Un cuco que resta. *El Observador*, p. 18-19.

Organización de Estados Iberoamericanos, Programa Iberoamericano de Enseñanza de las Ciencias y la Matemática en el Nivel Medio (1992). *Análisis comparado del Currículo de Matemáticas (Nivel Medio) en Iberoamérica.* Madrid: Mare Mostrum Ediciones Didácticas S.A.

Rama, G. (1992). *¿Aprenden los estudiantes? El Ciclo Básico de Educación Media*. Montevideo: Comisión Económica para América Latina y el Caribe.

Rey Pastor, J. (1962) *Elementos de análisis algebraico*. Madrid: Herederos de Julio Rey Pastor (Ed.).

Rey Pastor, J. (1967). *Elementos de la teoría de funciones.* Madrid: Nuevas gráficas.

Rey Pastor, J.; Pi Calleja, P. Trejo, C. A. (1952). *Análisis matemático*. Buenos Aires, Argentina: Kapelusz.

Ríos, S; Santaló, L.A. y Balanzat, M. (1979). *Julio Rey Pastor, matemático.* Madrid: Instituto de España.

Salinas, P. Alanís, J. Pulido, R. Santos, F. Escobedo, J. y Garza, J. (2003). *Elementos del cálculo. Reconstrucción conceptual para el aprendizaje y la enseñanza.* México: Trillas.

Salinas, P. y Alanís, J. (2009). Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del cálculo dentro de una institución educativa. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,*12(3), 355-382.

Sánchez, C. y Contreras, A. (2000) Un estudio sobre la noción de límite de una función a través del análisis de manuales de los siglos XIX y XX . En Cantoral, R. (ed.) *El futuro del cálculo infinitesimal (*pp. 211-231*)*. México: Grupo Editorial Iberoamérica SA de CV.

Sierpinska, A. (1985). Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 6* (1), 5-68.

Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics, 18,* 371-397.

Tall, D y Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics,* 12, 151–169.

Tall, D. (1980). Mathematical Intuition, with Special Reference to Limiting Processes. *Proceedings of PME 4,* pp 170 – 176.

Tall, D. (1992). The Transition to Advanced Mathematical Thinking: Functions, Limits, Infinity and Proof. En Grouws D.A. (ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* New York: Macmillan, pp. 495–511.

Tall, D. y Schwarzenberger, R. (1978). Conflicts in the Learning of Real Numbers and Limits. *Mathematics Teaching*, 82, pp. 44–49.

Tuyub, I. (2008). *Estudio socioepistemológico de la práctica toxicológica: un modelo de la construcción social del conocimiento.* Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Van Dijk, T. (1999). El análisis crítico del discurso. *Anthropos 186*, 23-36.

Van Dijk, T. (Comp.) (2001). El discurso como interacción social. Una introducción multidisciplinaria. Barcelona/Buenos Aires: Gedisa.

Vinner, S. (1991). The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics. En Tall, D. (Ed), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 65 - 81). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Youschkevitch, A.P. (1976). The concept of function up to the middle of the 19th century. Arch. Hist. Exact. Sci. 16, 37-85. Traducción tomada de Farfan, R. (Ed.) (1997) Serie: Antologías, 1, 81-98. Área de Educación Superior del Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav – IPN, México.

Anexo I: Actividad exploratoria con estudiantes

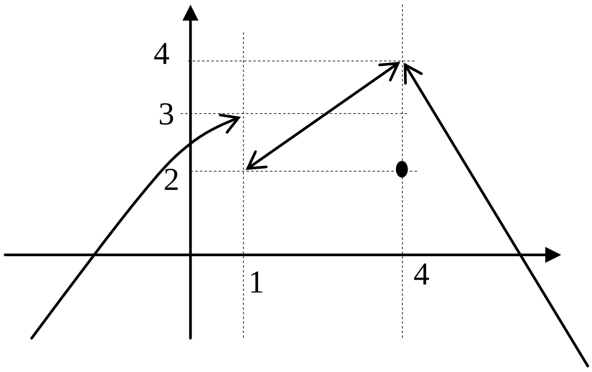
Actividad 1:

$$\text{Halla} \quad \lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$$

Actividad 2:

El siguiente es el bosquejo de una función h de dominio real:

Halla:



- $\lim_{x \to 1^-} h(x)$
- $\lim_{x \to 1^+} h(x)$
- $\lim_{x \to 1} h(x)$
- *h(1)*
- $\lim_{x \to 4^-} h(x)$
- $\lim_{x \to 4^+} h(x)$
- $\lim_{x \to 4} h(x)$
- *h(4)*

Actividad 3:

Dada la siguiente función: k : $\mathbb{R} - \{3\} \rightarrow \mathbb{R}$ / k (x) = $\dfrac{x+5}{x-3}$

a) Completa la siguiente tabla:

x	k(x)
2	
2.5	
2,8	
2,9	
2,99	
2,999	

x	k(x)
4	
3,5	
3,1	
3,01	
3,001	
3	

b) Halla:

a. k(2)

b. $\lim_{x \to 2} k(x)$

c. k(3)

d. $\lim_{x \to 3} k(x)$

Actividad 4:

La población N de una ciudad pequeña en t años a partir de ahora se predice que será:

$$N = 20000 + \frac{10000}{(t+2)^2}$$

Determina el número de habitantes de esta ciudad a largo plazo.

Actividad 5:

Escribe la definición de límite finito de una función real en un punto *a* de su dominio.

Actividad 6:

A continuación se presenta la demostración –incompleta- del teorema de conservación del signo para una función *f* de dominio real.

Complétala con las justificaciones en cada caso:

Hipótesis: $\lim_{x\to a} f(x) = b$ y $b > 0$

Tesis: Existe un real $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta$ entonces $f(x) > 0$.

Demostración:

Por ____________, $b > 0$ $\Rightarrow$ $\frac{b}{2} > 0$ Por ____________________________

Por ____________, $\lim_{x\to a} f(x) = b \Rightarrow$ Por ____________________________

$\Rightarrow$ Existe un real $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta$ entonces $|f(x) - b| < \frac{b}{2}$

$\Rightarrow b - \frac{b}{2} < f(x) < b + \frac{b}{2}$

$\Rightarrow \frac{b}{2} < f(x) < \frac{3b}{2}$

$\Rightarrow$ para todo x tal que $0 < |x - a| < \delta$ se cumple $f(x) > 0$

LQQD.

Anexo II: Cuestionario a profesores

Cuestionario a profesores de Matemática de 6° año de Educación Secundaria:

Las siguientes preguntas se refieren al tratamiento del concepto de límite finito de una función en un punto. Agradezco que las responda remitiéndose lo más estrictamente posible a su práctica educativa cotidiana, ya que el objetivo del cuestionario es conocer más acerca de las prácticas educativas en torno al concepto de límite en su primera aproximación, en el ámbito de la Educación Secundaria en Uruguay.

1. ¿Cree que es importante que esté este contenido en el programa de 6º? ¿Por qué?
2. ¿Qué definición presenta? ¿Es la única? ¿Trabaja con alguna equivalente?
3. ¿Presenta algún ejemplo? ¿En qué contextos: tabular, gráfico, situación extramatemática, analítico-algebraico?
4. ¿Propone alguna actividad en torno al concepto de límite previo a introducir la definición?
5. ¿Realiza alguna actividad para promover el uso de cuantificadores o símbolos lógicos en general?

Las preguntas 6 a 9 se refieren a la definición que propuso en la respuesta a la pregunta 2:

6. ¿Qué dificultades detecta en los estudiantes al trabajar con esta definición?
7. ¿Qué obstáculos debe afrontar un estudiante que no comprende la definición de límite? ¿En qué "fallaría" o qué otro concepto le imposibilitaría construir?
8. ¿Cuál es el tipo de pregunta que realiza habitualmente en evaluaciones orales o escritas que el estudiante no responde o lo hace erróneamente por no manejar la definición de límite?
9. ¿Con qué problemática cree que se encontraría en el transcurso del curso si en lugar de la definición utilizara un acercamiento intuitivo al concepto?
10. ¿Qué libro de texto recomienda? ¿Lo utiliza en clase para trabajar este tema o para proponer ejercicios referidos al mismo?

Muchas gracias por su colaboración.

Anexo III: Respuestas de profesores a preguntas del cuestionario

Profesor 1:

1. Si, creo que es importante que esté en los programas de 6to. Es un tema central en el Análisis matemático: si se quiere formalizar conceptos básicos como continuidad, derivabilidad, etc. Temas centrales tanto en la matemática como en la matemática aplicada. Creo que es un tema que debe estar en una "cultura" matemática básica.

Por lo menos deben tener un concepto intuitivo del concepto matemático de límite

2. La formulación (ε,δ) en todas sus variantes: por entorno, radios de entornos, con valor absoluto, sin valor absoluto. Previamente haber introducido los entornos, el concepto de distancia en R, con el valor absoluto. Aquí depende de la orientación de como lo introduciría. También estaría muy atento a lo que decida la sala, en la coordinación. Estaría muy abierto a las opiniones de los compañeros. Es más, en alguna orientación estaría dispuesto a no formalizarla.

3. Si claro. Comenzaría en un contexto gráfico y tabular. Con un uso central de la calculadora. Donde la idea de "proximidad" es central, que además los alumnos la tienen y no les ofrece ninguna dificultad. Hay que insistir mucho con que no importa lo que sucede en el punto, sino "muy cerca de él". Porque el primer impulso es calcular la imagen en el punto…..Y después porque a veces si y otras veces no, bueno, hay que trabajarlo mucho…

4. Como comenté antes: el concepto de distancia en R, con el valor absoluto, los entornos, entorno reducido, tratando de formalizar la idea de "proximidad". Preguntas como: "que quiere decir que los puntos están muy cercas de a". "podemos formalizarlo", etc.

También con una función, mejor que no esté definida en un punto, y ver como se comportan las imágenes cuando los valores de las variable independiente están muy cerca del punto.

Creo que ahora haría la introducción con una situación adidáctica. Después de haber trabajado con entornos etc., les plantearía: ¿Quién es el limite de f(x) cuando x tiende al punto a? (en un caso concreto de f(x) y a) Entienden la pregunta? Si es así cuál es la respuesta? Y en un caso general: ¿Qué significado intuitivo le daremos a la frase: b es el limite de f(x) cuando x tiende hacia? La podré formalizar? Qué se me ocurre?

Hacerlos trabajar en grupos y analizar lo que sucede. Tengo claro que la idea intuitiva sale sin problema.

La propuesta no seria exactamente así, hay que pensarlo mucho más, como así también en qué momento surgen los épsilon- delta.

5. Cuando llegan a este punto, ya han trabajado bastante los cuantificadores. Pero si, es necesario volver a repasarlos. Sobre todo teniendo en cuenta que aparecen "juntos" los dos cuantificadores (ya lo vieron en la existencia del opuesto, por ej.), y esto crea una gran complejidad.

6. La gran dificultad está obviamente en la formalización de la definición. Primero, como ya lo comenté, en el concepto de proximidad. Después en la relación de cercanía del punto a y de cercanía de las imágenes del punto b. Esta conexión e muy compleja de establecer en una primera aproximación.

Aunque lo tengo claro, de que no se logra una comprensión (completa, no es la palabra) de la formulación, estoy entre los que entienden, de que esto no es impedimento para no darlo, y que volviendo una y otra vez sobre él, se va logrando una mejor comprensión y enriquecimiento del concepto.

7. Definición: Sea f(x) una función definida en todos los valores de x cerca de c; con la excepción posible de c mismo. Se dice que L es el limite de f(x) cuando x tiende a c, si la diferencia entre f(x) y L puede hacerse tan pequeña como se desee con solo restringir a x a estar los suficientemente cerca de c. En símbolo escribimos: $\lim_{x \to a} f(x) = L$

Matemáticas Aplicadas a la Administración y a la Economía, J.C Arya. Este libro trae 18 temas, entre los cuales hay varios de Calculo: limites, continuidad, derivabilidad, integración, varias variables, sin haber nunca formalizado el concepto de limite. Nunca aparece la formulación epsilon-delta.

Con cientos de problemas de aplicaciones.

Esto es verdad. También es cierto que no demuestra casi nada. Tampoco lo podría hacer.

Que quiero decir con esto? Qué claro que se puede hacer cosas, hacer ejercicios rutinarios y de aplicaciones, incursionar en por ejemplo, derivación etc, sin haber nunca formalizado el concepto de limite. A costa de que? De una débil y menguada formación teórica que se irá profundizando (por lo menos en análisis).

Para mi, iría en detrimento de una formación básica en el análisis, aunque acepto que se podría postergar ……

8. En general en las de tipos teórico. Es lo mismo para todo..existe… o existe… para todo….etc. (el orden de los cuantificadores), en las demostraciones

9. Tendría que seguir en la misma línea, con lo otros temas. Como lo hacen muchos libros de matemática aplicada. Porque si no di la definición (formal) de limite, tampoco hable de entornos, etc. (para que lo iba a hacer, me parece).

10. No responde

Profesor 2:

1. Si, por su necesidad para los cursos universitarios y porque es un tema muy rico en cuanto a los distintos registros en los que se puede trabajar. Es un concepto que, bien trabajado, se logra conceptualizar rápidamente, en esa traducción de un registro a otro. Ahora, el trabajo conceptual con la definición $\varepsilon - \delta$ resulta un poco complicado, en el nivel en que los alumnos se encuentran.

2. En el caso finito, cuando *x* tiende a *a*, trabajo con:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 \,/\, \forall x \in E^{*}_{a,\delta} \Rightarrow \boxed{f(x) \in E_{b,\varepsilon}}$$

Esta última condición es la que se suele trabajar con otras equivalentes: distancia, valor absoluto, desigualdad, según la situación.

3. Se introduce desde una situación gráfica. Luego se pasa en el mismo ejemplo al analítico-algebraico. En el caso infinito, cuando *x* tiende a *a*, se introduce de forma gráfico-tabular.

4. Si, una función definida por intervalos (situación matemática, no extramatemática)

5. No, pero se trabaja con ellos de forma natural, realizando en forma oral la traducción al lenguaje coloquial-matemático.

Sí se ve, a la hora de formalizar y definir límite, la necesidad de traducir simbólicamente el "tiende a" o el "se acerca a", a través del uso de cuantificadores.

6. En lo que se refiere al curso de 6º año, esta definición la utilizo sólo para deducciones teóricas posteriores. No se trabaja mucho con ella. En el aula, no genera muchos problemas, aunque soy consciente que la mayoría no ha de comprender con exactitud todo eso del $\varepsilon - \delta$.

7. A nivel de secundaria, si el alumno sabe calcular los límites y realiza la traducción a la representación gráfica, no encontrará ningún obstáculo (aunque no comprenda completamente la definición $\varepsilon - \delta$). Aunque en cursos posteriores, le resultará muy complicado aprender otros conceptos relacionados con ello. Pero es necesaria esa aproximación a la definición teórica, para que con el tiempo pueda comprenderla. Por algo hay que comenzar.

8. Paso. No suelo realizar preguntas en las que deban aplicar "la definición teórica". Sí el concepto. Y cuando lo hago, suelen responder correctamente (por ejemplo al introducir límites laterales, queda claro por parte de ellos que no existe el límite).

9. Ninguno. Pero se perderían de ver ese carácter propio de la matemática como ciencia lógica-deductiva, para llegar formalmente a otras conclusiones.

10. No recomiendo ninguno. Se trabaja en base a lo dado en clase.

Profesor 3:

1. De acuerdo a como están estructurados los cursos de 6º y al enfoque esperado de acuerdo a la tradición pienso que el concepto debe ser tratado y debe formar parte del curso.

2. Si es por mi criterio no presentaría una definición formal del concepto ya que el tratamiento informal con un acercamiento al concepto me parece que es suficiente para estudiantes de secundaria. Pero si decido dar una definición sería:

$\lim_{x \to a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall E_{b,\varepsilon}, \exists E^{*}_{a,\delta} \subset D(f)$ tal que $\forall\ x \in E^{*}_{a,\delta},\ f(x) \in E_{b,\varepsilon}$

Precedida con una cantidad de ejemplos (cálculos con tabla de valores, uso de calculadora, lenguaje coloquial) hasta llegar a esa formalización. Lo formal formal lo dejaría para nivel terciario.

Dependiendo del curso y de los teoremas que decida probar podría usar para la segunda parte, la definición con los valores absolutos. Pero esto lo evaluaría acorde a los estudiantes con los que esté trabajando

3. Parte ya fue contestado en la pregunta anterior. Doy ejemplos y trabajo en todos los registros que nombrás. Rara vez una situación extramatemática.

4. Si. Varias. Entre ellos algún ejemplo concreto que involucre una función y el cálculo de distancias, etc.

5. Si. Comienzo en 5º con una explicación de que son, qué significa cada uno, qué cuantifican, cómo se utilizan, cómo se encadenan. En 6º repasamos lo anterior y hablamos y trabajamos con la negación de alguna proposición.

6. En los cursos que dicto no hago mucho hincapié en la definición. La dificultad mayor que encuentro se debe a que la definición parecería ir contramano teniendo en cuenta la experiencia previa de los estudiantes. Me explico: hasta ahora han trabajado de x a y, es decir, para cada x del dominio existe un y del codominio. Ahora la definición les plantea que deben partir de un conjunto de valores de y (entorno de centro b) y encontrar un conjunto de valores de x (entorno de centro a). Esto me parece que es una dificultad que trae la propia definición de límite, sea esta cualquiera.

En cuanto a la definición que yo doy, me parece que le crea menos dificultades que la definición que trabaja con los valores absolutos.
Creo que la dificultad más grande de mi definición está en su utilización en la demostración de algunos teoremas.

7. A nivel de Bachillerato, y en la forma en que están orientados los cursos, creo que la mayoría de los estudiantes no entiende en profundidad la definición aunque pueda reproducirla. Creo que puede salir airoso del curso sin entender la definición.

8. Trato de evitar este tipo de preguntas ya que soy consciente de las dificultades que acarrea la comprensión de la definición en cuestión.

9. Creo que no habría inconveniente en trabajar con una noción intuitiva de límite en este nivel si no pretendo demostrar "todos" los teoremas de límite, cosa que me parece bastante innecesaria.

10. No recomiendo ningún texto.

<u>Profesor 4:</u>

1. La noción de límite se encuentra a lo largo de todo el programa de análisis de 6°. El estudio de ramas infinitas, continuidad y derivabilidad requiere el concepto y el cálculo de límites de funciones.

2. En 6° de Medicina el concepto de límite de una función lo trabajo en forma intuitiva y experimental con la utilización de calculadora y tablas, no doy la definición formal de límite.
En 6° de Ingeniería si trabajo la definición formal:

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \leftrightarrow \forall\ E_{l,\varepsilon}\ \text{existe}\ E^*_{a,r}\ \text{tal que}\ \forall\ x \in E^*_{a,r}\ \text{entonces}\ f(x) \in E_{l,\varepsilon}$$

$$\leftrightarrow \forall\ \varepsilon \in R^+\ \text{existe}\ r \in R^+\ \text{tal que si}\ 0 < \left| x - a \right| < r\ \text{entonces}\ \left| f(x) - l \right| < \in$$

$$\leftrightarrow \forall\ \varepsilon \in R\ \text{éxiste}\ r \in R^+\ \text{tal que si}\ a - r < x < a + r\ \text{y}\ x \neq a\ \text{entonces}\ l - \varepsilon < f(x) < l +$$

Como definición presento la primera y luego a partir de la definición de entornos llegamos a las otras dos equivalentes. Trabajo de igual forma para las definiciones de límites infinitos.

3. Si, en contexto gráfico y analítico-algebraico.

4. Situación extramatemática para introducir el límite de una función en un punto: trabajo con el ejemplo de la lupa (para $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ y hablar de límites laterales)

Gráfico para introducir $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ (trabajo con la función $f : R - \{2\} \to R \; / \; f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$, se pide

1. probar que $f(x) = x + 2$, $\forall x \in D(f)$
2. graficar f
3. ¿Para qué valores de x se verifica que $f(x) \in E_{4,1/2}$? Idem $f(x) \in E_{4,1/10}$?
4. ¿Para qué valores de x se verifica que $f(x) \in E_{4,\varepsilon}$?)

Tabla para introducir $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = l$

5. Se fue trabajando anteriormente con los símbolos lógicos y cuantificadores (en número real)

6. La mayor dificultad se encuentra en cuál de los entornos es dado y cuál es el que se encuentra. (En general se toman cualquier entorno de x y tratan de hallar el entorno a los cuales pertenecen las correspondientes f(x)) y en la utilización correcta de los cuantificadores.

7. La definición formal permite demostrar las reglas operatorias, y otros teoremas como conservación del signo, acotación, etc. El no comprender la definición formal le presenta dificultades en dichas demostraciones, pero no le imposibilitaría la construcción de otros conceptos. En 6° de Medicina se trabajan todos los otros conceptos sin dificultad y no doy la definición formal de límite.

8. Propongo los siguientes ejercicios:

4. Indica si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. En caso de ser falsa dar un contraejemplo, si es verdadera demostrarla.

- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l \leftrightarrow \forall E^*_{a,r}\ ,\ existe\ E_{l,\varepsilon}\ \ /\ si\ x \in E^*_{a,r} \Rightarrow f(x) \in E_{l,\varepsilon}$

- $\lim\limits_{x \to 6} f(x) = 2 \Rightarrow\ existe\ E^*_{6,r}\ /\ \forall x \in E^*_{6,r}\ es\ \ f(x) > 1$

5. Sea $f : f(x) = \dfrac{3x-6}{x+a}$, hallar $a \in$ R , sabiendo que : $\forall E_{3,\varepsilon}$, *existe* $E^*_{0,r}$ / *si* $x \in E^*_{0,r} \Rightarrow f(x) \in E_{3,\varepsilon}$

6. Probar aplicando definición que: $\lim\limits_{x \to 2} (4x-3) = 5$

9. Ninguno. Si el alumno logra una buena comprensión global del concepto de límite puede abordar todos los conceptos que requieren de límites (asíntotas, continuidad, derivabilidad)
También es posible una justificación intuitiva (calculadora, gráfica y tablas) de las reglas operatorias y teoremas relativos al límite dejando constancia que una demostración formal de dichos teoremas existe.
Dichas propiedades serán aplicadas como reglas operatorias.

10.

- Matemática Sexto de Olga Balparda, Leonardo Lois y Marta Sbárbaro
- Matemáticas Bachillerato 2 de De Guzmán, Cólera y Salvador
- Funciones Reales de Eduardo Giovannini
- Calculus de Michael Spivak

En clase el que uso es Matemática de 6° ya que en el liceo hay más de un ejemplar y es posible llevarlos a la clase. Los otros textos se encuentran en biblioteca y hago referencia a ellos para que los alumnos concurran a consultarlos.

Profesor 5:

1. No se si debe estar en este año o en otro, esta respuesta depende de todo el currículo de secundaria. Así como está planteado creo que podrían realizarse aproximaciones al concepto a partir de cuarto año, para luego en sexto poder trabajar también la definición.

2. La tradicional ε - δ

3. Varios ejemplos, en registros tabular, gráfico y analítico-algebraico

4. ¿Propone alguna actividad en torno al concepto de límite previo a introducir la definición? Si.

5. No

6. Dificultades:
- El uso de cuantificadores y símbolos matemáticos
- La relación entre la idea asociada a límite y la definición

7. Según los programas vigentes el estudiante que no "debería entender" los teoremas que se demuestran si no ha incorporado dicha definición.
Claro que si el estudiante aprende de memoria la demostración de estos teoremas no parece necesario haber entendido la definición, en muchos casos la repiten sin entender, o dar significado, al concepto en juego.

8. No podría determinar un tipo de preguntas que el estudiante no responda, o lo haga erróneamente por no manejar la definición de límite

9. Como lo escribí antes, según nuestros programas se deberían trabajar teoremas cuya demostración se basa en la utilización de la definición de límite.

10. En general les propongo que consigan libros que trabajen los temas del programa y de esta forma poder tener contacto con distintos enfoques del tema.

<u>Profesor 6:</u>

1. Considero que es muy importante este tema en 6º año por esencialmente por dos razones:

1) porque es un concepto matemático previo a todo curso de matemática universitario

2) porque es un concepto formativo ya que requiere desarrollar un nivel de abstracción elevado que luego se incorporará para cualquier tipo de razonamiento.

2. Envío la definición en el archivo adjunto, es la única que conozco, puede que la plantee en forma más o menos formal, pero como definición es la única que conozco. [En el archivo se presenta la definición Epsilon-delta, primero con valores absolutos, más adelante aparece un gráfico ilustrativo con una función en un par de ejes cartesianos y los correspondientes entornos alrededor del límite L y del punto considerado p "de acumulación" del dominio. Por último se observa sobre las equivalencias de la definición, escribiéndola con intervalos y con entornos.]

3. Presento ejemplos como para introducir la definición y presento ejemplos luego de la definición. En general los previos a la definición son en contexto gráfico y tabular, los posteriores suelen ser analíticos-algebraicos.

4. Sí, la siguiente:

Un profesor propuso que se hiciera un trabajo sobre una cierta función, cuya gráfica entregó fotocopiada. Eva no pudo asistir a clase y le pidió a su amiga Lúa que le dicte dicho trabajo, entre los cuales está la función. Esta es la descripción que hace Eva a Lúa: "La gráfica empieza cuando x vale 0 donde y vale 2…. Sí, eso es, arranca del punto (0,2) hacia la derecha subiendo, sigue subiendo y pasa por el punto (3,4) y sigue sube cada vez más rápido. La x se acerca a 5 pero no llega a valer 5 y, mientras tanto, la y crece más y más hasta que sale del papel por arriba…. Sí pero fíjate bien que eso ocurre sin que la x llegue a valer 5, pero se acerca más y más, de modo que cuanto más sube la y más cerca está x de 5.

A partir de 5 pasa al contrario, que l a curva viene de abajo y sube. Corta al eje X en el punto 8 y sigue subiendo hasta el punto (12,4) a partir del cual empieza a bajar, pero cada vez más despacio… NO, no... Despacio la y; la x sin embargo, avanza rápidamente de modo que la curva se prolonga hacia la derecha bajando poco a poco, sin tocar la X pero acercándose mucho a él. Sí, casi se confunde con el eje X pero no llega a tocarlo. Bueno, ¡Cosas de curvas!"

5. No realizo una actividad especialmente para promover el uso de los cuantificadores, sí hago hincapié desde el principio del curso en sus diversos usos y contextos, y doy espacios para que los alumnos puedan exponer la solución de ejercicios que los requieran para tener instancias explícitas de corrección del correcto uso de los cuantificadores y de la forma de expresarse en lenguaje simbólico y lógico.

6. La dificultad más notoria es de lenguaje, creo que les cuesta mucho mucho el lenguaje simbólico más que la comprensión conceptual de la definición de límite puntual. En algunos casos hay dificultades de conceptos previos no incorporados, como por ejemplo, el no tener bien clara la definición de función, mas la dificultad más común con respecto a la definición de límite puntual es la de tener que desarrollar un cierto nivel de concentración para leer en lenguaje simbólico.

7. Suponiendo que no entiende ni la noción intuitiva de límite creo que los mayores obstáculos serán:

1) El de no entender la interpretación y el porqué de los cálculos que realiza al respecto.

2) No podrá comprender el concepto de continuidad, derivabilidad, etc.

8. Preguntas:

1) ¿Si una función no tiene límite en un punto significa que no esta definida en ese punto?

2) ¿Tiene que estar definida una función en un punto para poder calcular el límite en ese punto?

9. Ninguna, creo importante dar la definición formal en un curso de 6º año a modo de desarrollar un cierto nivel de abstracción. En los hechos, desde cuarto se maneja la definición de límite en forma intuitiva, usando la notación habitual y realizando cálculos a partir de un gráfico. Me parece importante además que realmente sea así, o sea, que la definición formal sea lo último, que llegue luego de haber trabajado intuitivamente con esa definición y luego de haber realizado muchos ejercicios de cálculo de límites previamente. En la reformulación la primera aproximación a la definición de límite se supone que es en cuarto,de no ser así, quienes elijan orientación científica la tendrán en el curso de matemática II en el tema sucesiones. Quienes hoy llegan a 6º año opción físico matemática, ya saben calcular límites de sucesiones.

10. Libros:

1) Matemática Bachillerato. Volumen 1, 2 y 3. De Guzmán, Cólera y Salvador. Editorial Anaya. Madrid, España.

2) A matemática do ensino medio. Lages Lima, Pinto Carvalho, Wagner, Morango. Sociedade Brasilera de Matemática, Río de Janeiro, Brasil.

Profesor 7:

1. Creo que si es importante la presencia del contenido “concepto de límite” en el curso de 6º. Pero no estoy de acuerdo en relación a la forma en que usualmente se encara. Creo que se confunde “concepto de límite” con “definición formal de límite”, por lo cuál se centran los esfuerzos en el manejo de la definición y no en el concepto. Algo muy similar sucede con la adquisición del concepto de las operaciones y los algoritmos de esas operaciones en primaria, y el concepto de ecuación y los métodos de resolución de una ecuación en secundaria entre otros.

El concepto de límite es importante como herramienta de interpretación y de modelización y eso va más allá de su definición formal.

2. Trabajo con la definición Epsilon-delta, pero la presento bajo diversas formas que elijo en función del curso y del grupo.

3. Inicio trabajando con ejemplos haciendo uso de tablas para determinar comportamientos. Intento luego generar la necesidad de un método más práctico y menos tedioso. En general tiendo a que sean ellos quienes aporten ideas y en base a ellas (aceptando lo útil y descartando el resto) ir acercándome al concepto. Por lo general surge bastante clara la necesidad de que la gráfica de la función se pueda colocar en un rectángulo (una idea similar a la del libro “El rincón de la pizarra”)
A partir de eso se discute que significa “estar tan cerca como se quiera de algo” y se redacta en lenguaje coloquial la idea surgida. Luego se escribe en bloques esa redacción que posteriormente se traduce al lenguaje matemático. Trabajo simultáneamente con las ideas de entorno, intervalo y valor absoluto, porque generalmente surgen de la discusión las tres ideas, aunque en algunos casos no muy formalmente, y debo dedicar tiempo a su formalización.
Finalmente les entrego un repartido con las ideas que generaron el proceso para que durante el desarrollo anterior no tengan que anotar nada.

4. En general trabajo con algún ejemplo de modelización de una situación concreta cualquiera (por ejemplo el funcionamiento de un anestésico odontológico) y a partir de ello veo la necesidad de determinar continuidad, crecimiento, concavidad (sin definir nada formalmente) y de lo bueno que es tener una aproximación a la expresión algebraica de la función. Luego repaso las funciones que ellos conocen y cuya representación gráfica tiene "forma definida" (lineal, cuadrática, holográfica, logarítmica, exponencial).

Posteriormente planteo una función cualquiera (en general del tipo p(x)/q(x) con p y q de segundo grado o mas si es factorizado) y les pido que ellos intenten dar una idea de su gráfico. Ellos en general pueden dar dominio y signo y luego se trancan. Engancho acá con las tablas para ver que sucede cerca de los puntos de no existencia y en mas y menos infinito como expuse en 3).

5. No específicamente lo hago cuando lo necesito para expresar en forma de signos algo.

6. Si no se genera la necesidad de la definición y se va construyendo es casi imposible que entiendan el porque introducirla y que tienen que ver el para todo el existe y los demás componentes de la definición.

7. Creo que si no la entienden la repiten como "loro" por lo que da igual si se debe decir para todo o existe y eso dificulta la posibilidad de generar imágenes adecuadas del concepto que aporten a su conceptualización definitiva. Acarrea luego problemas al momento de analizar cualquier concepto que se relacione con esta idea (derivabilidad, integración, etc.).

8. En general trabajo bastante con la definición de límite finito en un punto y luego los largo a ellos a definir limite infinito en un punto y limite infinito para x tendiendo a más y menos infinito. Los ayudo mostrando ejemplos de gráficos donde eso ocurra y en general las construyen sin dificultades. Luego les propongo ejercicios donde a partir de "un elemento característico" dado de un límite ellos deben reconstruir los otros dos. Llamo "elementos característicos" a: $\lim_{x \to \otimes} f(x) = *$, su gráfico, su definición.

Aquellos alumnos que no han construido el concepto y lo hacen de memoria cometen muchos errores lo que no sucede con el resto.

9. Creo que por lo antedicho no veo dificultad en ese tipo de acercamiento.

10. En general les entrego fichas confeccionadas por mí para trabajar los temas del curso. No obstante les recomiendo el Spivack, o el Giovaninni dependiendo de los alumnos y los cursos. En particular con los cursos de ingeniería hasta el año pasado iniciaba con limite de sucesiones.

Profesor 8:

1. Definitivamente sí: enseña una nueva notación y refuerza la idea y el concepto de número real. Creo que es la frontera entre el "saber" cálculo y poder "abstraer" cálculo.

2. Me interesa la definición de límite de sucesiones. Incluso es más simple de comprender. Si no es posible dar sucesiones, a partir de un intervalo (entorno) y su vecindad manejamos el concepto de valor funcional junto con la teoría de medida:

$$x \in E_{a,\delta} \quad \Leftrightarrow \quad a-\delta < x < a+\delta \quad \Leftrightarrow \quad |x-a| < \delta$$

3. Comienzo con un gráfico bastante completo y "tabulo" el resultado. Luego lo explico formalmente. También uso el concepto de velocidad instantánea como límite de la velocidad media.

4. Estudio del dominio de funciones racionales con denominador con una o dos raíces; luego con raíces compartidas entre numerador y denominador. Incluso definimos funciones "partidas" que se graficarán:

Ejemplos: $f : f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & si \quad x \neq 0 \\ 0 \quad si & x = 0 \end{cases}$ $\qquad g : g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & si \quad x \neq 2 \\ 4 \quad si & x = 2 \end{cases}$

$h : h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & si \quad x \neq 2 \\ 6 \quad si & x = 2 \end{cases}$

5. No responde

6. Ninguna dificultad si nos dedicamos una o dos clases a interpretar los componentes de la misma. Ejemplos de actividades:

• Hallar centro y radio del entorno $\left(-\dfrac{3}{2}, \sqrt{5}\right)$.

- Resolver $|x - 3| < 8$ y representar solución.

- Indicar Verdadero o Falso:

  i) $E^*_{a,\delta} = E^{*+}_{a,\delta} \cup E^{*-}_{a,\delta}$

  ii) $E_{a,\delta} = E^{*+}_{a,\delta} \cup E^{*-}_{a,\delta}$

  iii) $(a - \delta, a + \delta] \cap [a - \delta, a + \delta) = E_{a,\delta}$

7. Cuando el estudiante va a una clase particular no se le enseña la definición para que pueda graficar, derivar, etc. Informalmente no le afecta. Pero si pretendo que se forme en el sentido crítico del saber y su "cabeza" se mantenga ágil necesito algo de rigor teórico, incluso formularle problemas sencillos teóricos.

Ejemplo: Hallar el coeficiente angular en $x = 0$ de la tangente a la curva $y = f(x) = e^x$ usando la definición de derivada en un punto.

8. Podría plantear el cálculo anterior luego de escribir la definición de derivada como límite.

¿Y si el límite existe y no es finito? Ejemplo: $f(x) = \sqrt[3]{x}$ en x = 0, ¿habrá tangente en 0?

9. En 6º orientación Derecho no hay problemas. Pero a estudiantes de Facultad de Ciencias sí les enseño el manejo de esa definición, incluso si puedo intento que aprenda a acotar. Ejemplo:

Utilizar la definición de $\lim_{x \to 2} (3x + 2) = 8$ *para hallar los* δ *correspondientes a* $\varepsilon = 10^{-2}$ *ó* $\varepsilon = 10^{-3}$

En el futuro con el concepto de continuidad uniforme el alumno reforzará el conocimiento abstracto.

10. Textos de Eduardo Giovannini y Luis Belcredi.

Anexo IV: Fichas de libros de texto

a) De antaño

Libro 1: Rey Pastor, 1962

Título: Elementos de Análisis algebraico.

Autor: Rey Pastor, J.

Editorial: Herederos de Julio Rey Pastor. Madrid.

Año de la versión analizada: 1962. (Primera edición: 1917).

Plan de Estudios: ---

Resumen de los capítulos previos a la introducción del concepto de límite:

- Número natural: *Capítulo I*: Operaciones aritméticas fundamentales (Definición del conjunto de los números naturales a partir de la comparación por coordinación de todos los conjuntos finitos, propiedades, operaciones). *Capítulo II*: Divisibilidad. *Capítulo III*: Análisis combinatorio.

- Número racional: *Capítulo IV:* Operaciones, *Capítulo V:* Algoritmos de iteración, *Capítulo VI:* Matrices y determinantes, *Capítulo VII:* Expresiones y funciones algebraicas (Polinomios).

- Número real: Definición (a partir de cortaduras de números racionales), extensión de las operaciones adición, multiplicación, raíces y potencias de exponente racional, *límites de sucesiones*, potencias y logaritmos en el sistema real, *cálculo de límites*, *cálculo de límites indeterminados*.

Resumen del capítulo dedicado al concepto de límite:

Es importante aclarar que sólo se considera el concepto de límite de sucesiones, no de funciones.

Capítulo VIII.7: Número Real. Operaciones elementales. Límites de las sucesiones de números reales.

a) *Introducción*: se presenta directamente la definición formal de límite finito de una sucesión (sucesión convergente). Primero se escribe en forma coloquial y después en forma simbólica introduciendo cuantificadores. A continuación se presentan ejemplos.

b) *Tipo de definición*: métrica (primero en términos coloquiales, a continuación en términos simbólicos).

c) *Secuenciación*:

Capítulo VIII.8: Límites de las sucesiones de números reales.

- Definición y ejemplos de sucesión convergente a un número real.
- Límites infinitos de una sucesión.
- Propiedades de los límites finitos: conservación del signo, comparación, unicidad y límite de la sucesión comprendida.
- Sucesiones contenidas en otra.
- Límites de sucesiones monótonas.
- Límites de oscilación.
- Criterio general de convergencia (de Cauchy).

Capítulo VIII.9: Cálculo de límites.

- Operación de paso al límite.
- Límite de la suma, del producto, del cociente, de logaritmos y potencias (teoremas relativos.

Capítulo VIII.10: Cálculo de límites indeterminados

- Límites de expresiones racionales.
- El número e (como límite de la sucesión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$).
- Límites indeterminados de potencias.
- Fórmula de Stirling.
- Convergencia de sucesiones deducidas linealmente de otra.
- Aplicaciones del algoritmo lineal de convergencia.

d) *Tipos de ejercicios y problemas*: No se proponen. Sólo se proponen tres ejercicios al final de toda la sección de Número Real (que está compuesta de tres capítulos, y el límite de una sucesión es sólo parte de uno de ellos) y los mismos no hacen explícita referencia al concepto de límite.

Análisis conceptual:

La sección del capítulo dedicada a la definición de límite de sucesiones comienza con la definición formal de límite, en su versión épsilon-n_0, sin el uso de símbolos para los cuantificadores y con la utilización de intervalos simétricos. A continuación se escribe la misma con símbolos para los cuantificadores.

Más adelante se presentan varios ejemplos de sucesiones convergentes y sus límites. Salvo el primero, que es el de la sucesión constante, en los otros cinco ejemplos se consideran sucesiones en donde el límite no es alcanzado, y cuatro de ellas son monótonas. Parecería que es fácil así reforzar el obstáculo de que el límite de una sucesión convergente no es alcanzado por sus términos, y que además estos se acercan “cada vez más” al límite en cuestión.

No se presentan problemas ni ejercicios resueltos, ni tampoco ejercicios para que el estudiante resuelva. No se presentan gráficos de ningún tipo para la introducción de la definición así como tampoco para la ilustración de los ejemplos o de los teoremas expuestos. No se presentan ejemplos que contextualicen el concepto en situaciones extramatemáticas.

Análisis didáctico-cognitivo:

En la Introducción al libro el autor explicita que es un libro escrito especialmente para alumnos del primer curso de Facultad de Ciencias, cualquiera sea su orientación (Matemática, Física, Química, Arquitectura…) y que dada la heterogeneidad de sus intereses, se pensó en una obra general que abarcara todos los temas necesarios para todas las orientaciones, dejando al encargado del curso el papel de hacer hincapié en lo que cada alumno precisa más o exigirle a los estudiantes que más lo necesitan una profundización en aspectos específicos.

El autor manifiesta también el interés específico por “alcanzar el en lenguaje el grado de concisión y precisión usuales en casi todos los libros extranjeros”, argumentando que muchos de los libros extranjeros fracasaron en la enseñanza de la Matemática en España por “las dificultades que las inteligencias españolas encuentran en su lectura”. Es así que se presenta un libro en el que se pretende mostrar una exposición sistemática del organismo de una ciencia, lógicamente encadenada. Se evitan intencionalmente detalles considerados por el autor como superfluos o secundarios, relativos a la historia de la ciencia o disquisiciones metafísicas. Se busca ir a la “esencia” del Análisis Algebraico.

Se entiende en este contexto la primera presentación de la definición de límite de una sucesión en la que se evita el uso de cuantificadores pero inmediatamente se traduce la misma a un lenguaje más simbólico y formal y se continúa con el mismo, la ausencia de representaciones gráficas de ningún tipo y la falta de ejercicios o problemas propuestas, así como de preguntas abiertas. Existe una preocupación por adoptar el método lógico y no el intuitivo.

Sin embargo, el autor explicita en la Introducción que en las explicaciones orales se pueden aclarar los conceptos con representaciones gráficas y más aplicaciones en las clases prácticas.

La idea que subyace es la de una matemática ya hecha, externa al estudiante. Su rol es el de comprender las definiciones y teoremas que le son presentados, y en este caso no hay, al menos en el libro de texto, una preocupación por aplicarlos en la resolución de ejercicios. No se presentan preguntas abiertas ni actividades de exploración para construir conceptos.

Las capacidades que se pretenden desarrollar son: la construcción del conocimiento –en particular del concepto de límite– de una manera dirigida, adquisición del lenguaje y simbolismo propios del análisis algebraico, conocimiento de los teoremas relativos a acotación, conservación del signo y operaciones entre sucesiones, conocimiento del mecanismo de las demostraciones deductivas con métodos analíticos y el desarrollo de algoritmos para el cálculo de límites de expresiones algebraicas.

Si bien existe una voluntad expresa de introducir el concepto de límite en forma coloquial y explicitando cada paso, después de enunciada la definición se procede al desarrollo de todas las propiedades relativas y sus demostraciones sin intercalar ejemplos o ejercicios resueltos que den cuenta del objetivo del mismo.

Análisis fenomenológico:

No hay referencias a fenómenos que puedan ser organizados mediante el límite y que sean exteriores a la propia matemática. La matemática se encierra en sí misma y se explica por ella misma. Se observa un deslizamiento hacia aspectos puramente formales en los que se ha perdido la vinculación de los conceptos con su significado.

Libro 2: Rey Pastor, Pi Calleja y Trejo, 1952

Título: Análisis Matemático.

Autor: Rey Pastor, J., Pi Calleja, P. y Trejo, C. A.

Editorial: Kapelusz. Buenos Aires.

Año de la versión analizada: 1952.

Plan de Estudios: ---

Resumen de los capítulos previos a la introducción del concepto de límite:

- *Capítulo I*: *Fundamentación del número racional*. Introducción de estructuras lógicas, diversas fundamentaciones del número natural y propiedades, definición, propiedades y operaciones del número entero, símbolos numéricos y operatorios, polinomios, divisibilidad numérica, definición de número racional y operaciones definidas sobre el conjunto de los racionales.
- *Capítulo II: El número real y el número complejo.* Concepto de número real, sucesiones y propiedades, potencias y logaritmos definidas en el contexto de los números reales, concepto de número complejo, potencias y raíces en el campo complejo.
- *Capítulo III: Combinatoria y Álgebra lineal.* Análisis combinatorio, potencias de binomios y polinomios, determinantes, cálculo de matrices, sistemas de ecuaciones lineales.
- *Capítulo IV: Algoritmo algebraico.* Principio e identidad entre polinomios, operaciones racionales, divisibilidad algebraica, ceros de polinomios de una variable, teorema fundamental del álgebra, descomposición factorial, resolución elemental de ecuaciones por radicales.

Resumen del capítulo dedicado al concepto de límite (primero en sucesiones y después en el contexto de las funciones):

- *Capítulo V: Límite aritmético.* Definición de límites finitos e infinitos en sucesiones, propiedades, cálculo y series numéricas.
- *Capítulo VI: Las funciones reales y la continuidad.* La noción de función. Vale destacar que la definición que se presenta difiere a la que se presenta en los libros de texto actuales, ya que se admite que un valor de la variable independiente tenga más de un correspondiente:

*"Se dice que una variable y es función de otra variable x, cuando a cada valor de x (dentro de un conjunto X llamado campo de variación de x) corresponde un valor determinado de y (*función uniforme*) o varios valores de y (*función multiforme*)."* (Rey Pastor et al., 1952, p. 356).

- *Capítulo VI: Las funciones reales y la continuidad.* El límite funcional. Definición, propiedades, infinitésimos, cálculo de límites, límite infinito y en el infinito, forma topológica de la definición de límite, criterio de convergencia de Bolzano-Cauchy, límites de oscilación, límite aritmético y límite funcional.
- *Capítulo VI: Las funciones reales y la continuidad.* Noción de continuidad y propiedades de las funciones continuas.

a) *Introducción del concepto en el ámbito funcional*: Menciona que "el concepto de límite de una sucesión de números tiene uno similar y tanto o más importante que él: el límite de una función *f(x)* cuando la variable *x* tiende a un valor dado". (Rey Pastor et al. 1952, p. 372). Brinda en primer lugar una presentación inspirada en la definición de Cauchy (1821), con expresiones como "arbitrariamente pequeño" o "suficientemente próximo a". Después de brindar una serie de ejemplos que ilustran el significado de dichas expresiones, procede a una definición en términos de ε-δ.

b) *Tipo de definición*: métrica, considerando la distancia del valor absoluto y expresándola también en términos de entornos simétricos. A continuación se presenta una interpretación gráfica de esta definición. Más adelante, en un apartado posterior, se presenta una definición topológica de límite funcional, en términos de entornos que no dependen de una distancia predefinida.

c) *Secuenciación*:
   - Definición y ejemplos de límite funcional finito.
   - Interpretación gráfica. Se presentan varios ejemplos.
   - Propiedades de los límites: conservación del signo, comparación y límite de una fundón comprendida entre otras dos que tienen igual límite.
   - Infinitésimos. Definición y propiedades algebraicas.
   - Cálculo de límites. Propiedades algebraicas.
   - Límite infinito y en infinito. Definición e interpretación gráfica.
   - Forma topológica de la definición de límite.
   - Criterio de convergencia de Bolzano-Cauchy.

- Límites de oscilación.
- Límite aritmético y límite funcional. Teoremas que vinculan el límite funcional con el límite en sucesiones.

d) *Tipos de ejercicios y problemas*: Se proponen cinco ejercicios de aplicación directa de la definición de límite (demostración de que un límite es, o no, un número dado y cálculo de los δ correspondientes a un ε dado), cuatro ejercicios de aplicación de infinitésimos y nueve ejercicios de cálculo de límites aplicando propiedades algebraicas y propiedades vistas en el capítulo. No se proponen preguntas abiertas ni situaciones problemáticas en contextos extramatemáticos.

Análisis conceptual:
Se introduce la noción de límite funcional como un concepto similar al tratado previamente de límite de una sucesión. Se presenta una noción coloquial, inspirada en la de Cauchy (1821) y después de una serie de ejemplos se introduce la definición en términos de ε-δ. En ninguno de los cuales se utilizan cuantificadores, parece evitarse la introducción de símbolos lógicos.
Más adelante se presentan tres ejemplos con su correspondiente interpretación gráfica. En los tres ejemplos el cálculo del límite es en un valor de x que no pertenece al dominio de la función, el límite es presentado como una herramienta que permite analizar el comportamiento de la función en entornos de puntos que no pertenecen al dominio.
Se proponen ejercicios y ejemplos, pero no se presentan problemas resueltos ni ejemplos que contextualicen el concepto en situaciones extramatemáticas.

Análisis didáctico-cognitivo:
En la Introducción al libro el autor explicita que es un libro escrito especialmente para alumnos del primer curso de Facultad de Ciencias, cursos preparatorios de estudios superiores de Ingeniería o de doctorado en Física y Matemática, por lo que tiene una orientación más específica que el libro anteriormente analizado (Rey Pastor, 1962).
Se explicita a continuación la importancia que se le otorga a la matemática como herramienta para desarrollar el potencial racional: "*Más importancia que los resultados y casos en que pueda aplicarse una fórmula matemática tiene la obtención de nuevos métodos y la suma de experiencias mentales con que va enriqueciendo nuestra facultad racional*" (Rey Pastor et al., 1952, p. XX).

"Si por llegar rápidamente a las aplicaciones del Cálculo infinitesimal, resucitamos antiguas definiciones de curva, de tangente, de infinitésimo, de diferencial […] todo deberá descansar en una fe ciega y aceptarse como dogma, sin que sea posible desarrollar y despertar el espíritu crítico" (Rey Pastor et al., 1952, p. XX). Esta cita explica la necesidad que el autor siente de estructurar el Cálculo sobre el concepto de número desde el punto de vista algebraico y el concepto de límite aritmético, con el objetivo de dotar de claridad y precisión a su discurso.

Más adelante se pone de manifiesto la importancia que se da a la generalización en la estructuración de la teoría formal, ya que favorece una economía de esfuerzos y mayor penetración del conocimiento. Sin embargo, explicita que no se presentan los conceptos como casos particulares de más amplio grado de generalización y abstracción por considerarlo, a decir de Pascal, "*didácticamente equivocado, históricamente absurdo, conceptualmente hipertrófico y científicamente inútil*" (Rey Pastor et al. 1952, p. XXI). En este tipo de manifestaciones se vislumbra la intencionalidad didáctica de la obra.

Se presenta un libro en el que se pretende mostrar una exposición sistemática del organismo de una ciencia, lógicamente encadenada. Se evitan intencionalmente detalles considerados por el autor como superfluos o secundarios, relativos a la historia de la ciencia o disquisiciones metafísicas. Se busca ir a la "esencia" del Análisis Algebraico.
La idea que subyace es la de una matemática ya hecha, externa al estudiante. Su rol es el de comprender las definiciones y teoremas que le son presentados, y en este caso no hay, al menos en el libro de texto, una preocupación por aplicarlos en la resolución de situaciones problemáticas. No se presentan preguntas abiertas ni actividades de exploración para construir conceptos.
Las capacidades que se pretenden desarrollar son: la construcción del conocimiento –en particular del concepto de límite– de una manera dirigida, adquisición del lenguaje y simbolismo propios del análisis algebraico, conocimiento de los teoremas relativos a acotación, conservación del signo y operaciones entre funciones, conocimiento del mecanismo de las demostraciones deductivas con métodos analíticos y el desarrollo de algoritmos para el cálculo de límites de expresiones algebraicas.

Análisis fenomenológico:

No hay referencias a fenómenos que puedan ser organizados mediante el límite y que sean exteriores a la propia matemática. La matemática se encierra en sí misma y se explica por ella misma. Se observa un deslizamiento hacia aspectos puramente formales en los que se ha perdido la vinculación de los conceptos con su significado.

b) Actuales

Libro 1: Giovannini, 2001

Título: Matemática A para 6º año. Funciones reales.

Autor: Giovannini, E.

Editorial: Tradinco

Año de edición: 2001 (4ª edición, 1ª edición: 1998)

Plan de Estudios: Plan 1976

Resumen de los capítulos previos a la introducción del concepto de límite:

- Prefacio: En este apartado se propone una posible organización para la utilización del libro en el curso teórico y en el práctico –en forma diferenciada–. Desde esta primer aproximación al libro se presenta al límite de una función como eje transversal del curso.
- Capítulo I: Números reales. Axiomática y definición de los diferentes subconjuntos (naturales, enteros e irracionales). Definición de potenciación y logaritmación, propiedades operatorias y de monotonía.
- Capítulo II: Entornos, intervalo, distancia. Definición y notación.
- Capítulo III: Funciones. Definición y operaciones. Paridad e imparidad.
- Capítulo IV: Continuidad. Se manejan tres definiciones:
    1. Definición coloquial – intuitiva con apoyo gráfico. Cumple un rol de introducción al concepto, se manejan términos como “tan cerca de” o “suficientemente próximo” y se alerta sobre la necesidad de precisarlos.
    2. Definición coloquial – formal con apoyo gráfico.
    3. Definición simbólica – formal pero utilizando versión verbal de cuantificadores en lugar del símbolo. Se manejan equivalencias entre la definición métrica y topológica (entornos, valor absoluto, desigualdades).

Resumen de los capítulos dedicados al concepto de límite:

Capítulo V: Límites.

a) *Introducción*: a través del análisis de dos ejemplos en los que la función es discontinua en un punto (en un caso el punto no está en su dominio y en el otro sí está pero su imagen no coincide con el límite). Existe una intención constructiva y después se presenta la definición formal.

b) *Tipo de definición*: topológica (utiliza entornos simétricos) y métrica, planteándolas como equivalentes.

c) *Secuenciación*:
   - Ejercicios introductorios.
   - Def de límite.
   - TM 1: Relación entre continuidad y límite.
   - Comentario sobre la definición de límite (de Courant y Robbins)
   - TM 2: Unicidad del límite.
   - TM 3: de acotación de la función por cotas del límite
   - TM 4: Conservación del signo.
   - TM 5: Condición suf de límite cero.
   - TM 6: límite del valor absoluto de una función.
   - TM 7: 2º de acotación.
   - TM 8: Límite de la función comprendida.
   - En el Capítulo VI se presentan TM de la función suma, producto y cociente, extendiendo los resultados a funciones polinómicas, exponenciales con exponente natural y racionales (cociente de opolinómicas).

d) *Tipos de ejercicios y problemas*:
   - Probar que el límite de funciones dadas es un real dado (se trabaja con funciones polinómicas de grado 1 y 2).
   - Cálculo de límites utilizando teoremas de operaciones entre funciones.
   - Cálculo de límites de funciones racionales en puntos de su dominio.
   - Demostraciones de propiedades (se presentan como optativos).

Análisis conceptual:

Se presentan dos ejemplos en los cuales el límite en el punto estudiado existe pero no coincide con la imagen de la función en dicho punto. A continuación se presentan definiciones del concepto: primero intuitiva y coloquial, después formal y coloquial y por último formal y simbólica, presentando las equivalencias entre diferentes maneras de expresar los entornos (definición métrica).

No se presentan problemas ni ejercicios resueltos, sí se proponen ejercicios al final del capítulo. Se presentan gráficos alusivos a los ejemplos introductorios pero no a la definición general. En la demostración de los teoremas 2 y 3 se presentan esquemas que explican el comportamiento de la función en entornos del límite. En el resto de los teoremas no se presentan representaciones gráficas o simbólicas de ningún tipo.

No se presentan ejemplos que contextualicen el concepto en situaciones extramatemáticas.

Análisis didáctico-cognitivo:

En el Prefacio el autor explicita el carácter didáctico del libro: pretende ser un apoyo para los estudiantes que cursan el último año de Educación Secundaria, quienes se están introduciendo en el estudio de funciones de variable real. Se evita explícitamente el uso de cuantificadores y el formalismo excesivo, se pone énfasis en la introducción intuitiva de los conceptos a través de ejemplos.

El desarrollo es secuencial, con un tránsito de lo intuitivo a lo formal. La idea que subyace es la de una matemática ya hecha, externa al estudiante. Si bien se presentan los conceptos a través de ejemplos y con un lenguaje coloquial, el rol del estudiante es el de comprenderlos, memorizarlos y aplicarlos en la resolución de ejercicios –con especial énfasis en la práctica algorítmica en el caso del límite–. No se presentan preguntas abiertas ni actividades de exploración para construir conceptos.

Las capacidades que se pretenden desarrollar son: la construcción del conocimiento –en particular del concepto de límite– de una manera dirigida, adquisición del lenguaje y simbolismo propios del análisis, conocimiento de los teoremas relativos a acotación, conservación del signo y operaciones entre funciones, acostumbramiento al mecanismo de las demostraciones deductivas, aplicación de la definición y propiedades a la resolución de ejercicios y el desarrollo de algoritmos para el cálculo de límites de expresiones algebraicas.

Si bien existe una voluntad expresa de introducir el concepto de límite en forma coloquial y explicitando cada paso, después de enunciada la definición se procede al desarrollo de todas las propiedades relativas y sus demostraciones sin intercalar ejemplos o ejercicios resueltos que den cuenta del objetivo del mismo.

Análisis fenomenológico:

No hay referencias a fenómenos que puedan ser organizados mediante el límite y que sean exteriores a la propia matemática. La matemática se encierra en sí misma y se explica por ella misma. Los pocos ejemplos que se presentan son referidos a funciones racionales, se observa un deslizamiento hacia aspectos puramente formales en los que se ha perdido la vinculación de los conceptos con su significado.

Libro 2: Belcredi, Deferrari y Zambra, 2001

Título: Introducción al análisis matemático.

Autores: Belcredi, L.; Deferrari, M. y Zambra, M.

Editorial: Ediciones de la Plaza.

Año de edición: 2001

Plan de Estudios: Plan 1976

Resumen de los capítulos previos a la introducción del concepto de límite:

- Prólogo: Se explicitan objetivos, se presentan sucintamente los diferentes capítulos y se justifica su organización.
- Capítulo I: Números reales. Presentación axiomática según progresión expuesta por Robert Bartle.
- Capítulo II: Las funciones logaritmo y exponencial. Definición, propiedades y representación gráfica. Introducción del número e.
- Capítulo III: Sucesiones. Definición, monotonía, acotación, aritméticas y geométricas.
- Capítulo IV: Límites de sucesiones. Definición, convergencia y divergencia, propiedades algebraicas, conservación del signo, propiedades especiales para sucesiones monótonas, subsucesiones, equivalencia, límites tipo, infinitésimos e infinitos, comparación de órdenes.
- Capítulo V: Definiciones, notación, vocabulario, representación gráfica, operaciones, acotación, composición, biyectividad, función inversa, paridad, imparidad, simetrías, periodicidad

Resumen de los capítulos dedicados al concepto de límite:

Capítulo VI: Límites de funciones.

a) *Introducción*: se explicita que si bien a través de un teorema se pueden "traspasar" todos los teoremas vistos para sucesiones al universo de las funciones, en este capítulo se desarrolla la teoría en forma independiente. Se estudia el comportamiento de la función $f{:}f(x) = \frac{1}{x+1}$ en el intervalo (0,1] a través de una tabla y de la representación gráfica. Se define límite 'por la derecha' y 'por la izquierda'

b) *Tipo de definición*: métrica, utilizando sólo la notación de valor absoluto.

c) *Secuenciación*:

- Ejemplo introductorio
- Definición de límite por la derecha y por la izquierda de un punto.
- Definición de límite finito en un punto. Ejemplos y ejercicios.
- Propiedades de los límites: unicidad, acotación.
- Operaciones algebraicas.
- Límites infinitos.
- Orden: conservación del signo, teorema de la función comprendida, divergencia por comparación con una función divergente.
- Operaciones con límites infinitos.
- Límite de la función comuesta.
- Funciones equivalentes.
- Teorema "de pasaje" (entre sucesiones y funciones).
- Ramas infinitas y asíntotas. Plan de estudio y cuadro sintético.

d) *Tipos de ejercicios*:

- Probar que el límite de funciones dadas es un real dado (se trabaja sólo con una función polinómica de primer grado, una de segundo y una función racional).
- Cálculo algorítmico de límites (13 de los 18 ejercicios del capítulo)
- Determinación de ramas infinitas y asíntotas de funciones dadas (5 ejercicios restantes).
- No se proponen ningún tipo de problemas vinculados con alguna otra rama de la matemática o alguna otra parte del curso ni con situaciones extramatemáticas.

Análisis conceptual:

Se introduce el concepto de límite a través de un ejemplo de una función de variable real contemplando las representaciones tabular y gráfica. Se presenta la definición métrica formal (ε-δ) utilizando exclusivamente la notación de valor absoluto, acompañada de gráficos representativos y la versión "verbal" de la definición (escribiéndola sin utilizar símbolos).

Se desarrollan tres casos particulares: el primero consiste en intuir el límite de una función racional en un punto que no pertenece a su dominio y utilizar la definición de límite para demostrarlo. El segundo se refiere al comportamiento de la función $f(x) = x.sen\frac{1}{x}$ en un entorno del 0 y el último a las funciones constantes.

Se presenta la negación de la definición en forma formal simbólica, verbal y con una representación gráfica. En la demostración de las propiedades de acotación y algebraicas no se presentan representaciones gráficas.

No se presentan ejemplos que contextualicen el concepto en situaciones extramatemáticas.

Análisis didáctico-cognitivo:

El libro es presentado por el autor como un curso de matemática preuniversitaria, destinado a estudiantes de ese nivel educativo. En el Prólogo explicita tres objetivos: acercar al estudiante herramientas y técnicas necesarias para resolver los ejercicios y problemas del curso (en particular menciona el cálculo de límites), desarrollar los conceptos a partir de su aspecto más intuitivo o geométrico hasta lograr una versión formal, rigurosa pero sin excesivos formalismos, y por último un fin propedéutico para futuros estudios en matemática.

El desarrollo es secuencial, con un tránsito de lo intuitivo a lo formal. La idea que subyace es la de una matemática ya hecha, externa al estudiante. Si bien se presentan los conceptos a través de ejemplos y con un lenguaje coloquial, el rol del estudiante es el de comprenderlos, memorizarlos y aplicarlos en la resolución de ejercicios –con especial énfasis en la práctica algorítmica en el caso del límite–. No se presentan preguntas abiertas ni actividades de exploración para construir conceptos.

Las capacidades que se pretenden desarrollar son: la construcción del conocimiento –en particular del concepto de límite– de una manera dirigida, adquisición del lenguaje y simbolismo propios del análisis, conocimiento de los teoremas relativos a acotación, conservación del signo y operaciones entre funciones, acostumbramiento al mecanismo de las demostraciones deductivas, aplicación de la definición y propiedades a la resolución de ejercicios y el desarrollo de algoritmos para el cálculo de límites de expresiones algebraicas.

Si bien existe una voluntad expresa de introducir el concepto de límite en forma coloquial y explicitando cada paso, después de enunciada la definición se procede al desarrollo de todas las propiedades relativas y sus demostraciones sin intercalar ejemplos o ejercicios resueltos que den cuenta del objetivo del mismo.

Análisis fenomenológico:

No hay referencias a fenómenos que puedan ser organizados mediante el límite y que sean exteriores a la propia matemática. La matemática se encierra en sí misma y se explica por ella misma. Los pocos ejemplos que se presentan son referidos a funciones racionales, se observa un deslizamiento hacia aspectos puramente formales en los que se ha perdido la vinculación de los conceptos con su significado.

Si bien en el Capítulo II (función exponencial y logaritmo) se manejan muchas situaciones extramatemáticas, éstas no son retomadas para el estudio del concepto de límite.

c) "Apuntes" de Profesor para Formación Docente

Título: Análisis en una variable real. Nivel terciario.

Autor: de Olivera, F.

Editorial: No editado

Año de la versión analizada: 2008.

Plan de Estudios: 1986 y 2007

Resumen de los capítulos previos a la introducción del concepto de límite:

- Comentarios y agradecimientos: El autor, profesor del curso de Análisis I en la carrera de profesorado, explicita que este trabajo fue escrito para acortar la distancia entre estudiantes y libros de texto. Presenta características particulares de lo que él denomina "notas": deben leerse con una actitud activa (con lápiz y papel en mano para realizar figuras representativas) y al final de cada capítulo se presentan ejercicios y problemas que pueden resultar muy desafiantes y llevar varios días para su resolución. Explicita además las fuentes bibliográficas que han servido de guía para el trabajo: Lages Lima, Kudriavstev y Piskunov.

- Capítulo I: Puesta a punto: funciones. Definición, inyectividad y sobreyectividad, conjunto imagen y contraimagen, composición, función inversa, extensión y restricción, ejercicios.

- Capítulo II: Conjuntos finitos e infinitos. Números naturales, conjuntos numerables, números reales y ejercicios.
- Capítulo III: Sucesiones numéricas. Definición de sucesión y sucesión acotada, creciente, decreciente, ejemplos, límite, propiedades aritméticas de los límites, subsucesiones, sucesiones de Cauchy, límites infinitos, comparación de sucesiones infinitesimales o infinitas (órdenes), ejercicios.
- Capítulo IV: Series numéricas. Definición de serie y de serie convergente, ejemplos, propiedades generales, criterios de clasificación, asociatividad y conmutatividad, ejercicios.
- Capítulo V: Topología en R. Conjuntos abiertos y cerrados, conjuntos densos, puntos de acumulación y aislados, conjuntos compactos, ejercicios.

Resumen del capítulo dedicado al concepto de límite:

Capítulo VI: Límite de funciones.

c) *Introducción*: se presenta directamente la definición formal de límite finito en un punto. Después de algunas observaciones se presentan ejemplos en funciones de primer y segundo grado, exponencial y otras.
d) *Tipo de definición*: con entornos de reales simétricos y métrica, considerando la distancia del valor absoluto. Plantea que ambas son equivalentes.
e) *Secuenciación*:
   - Definición y ejemplos de límite finito en un punto de acumulación del dominio de una función.
   - Teorema 1 “de pasaje” entre sucesiones y funciones.
   - Unicidad del límite.
   - Operaciones con límites (álgebra).
   - Teorema 2 de acotación de una función convergente en un entorno del punto.
   - Teorema 3 de comparación de dos funciones con límite finito en un punto.
   - Teorema 4 del límite de la función comprendida.
   - Teorema 5: Criterio de Cauchy para la existencia del límite.
   - Teorema 6: límite de la función compuesta. Ejemplos.
   - Límite de restricciones. Definición de restricción, teoremas relativos y ejemplos.
   - Límites laterales. Definición, teoremas relativos y ejemplos.

- Límites infinitos y en el infinito. Definición, teoremas relativos y ejemplos. "Tablas de límite" donde se resumen los resultados algebraicos (si bien se presentan, se explicita que no serán de utilidad en el tipo de ejercicio que se propone ya que no se prioriza la práctica algebraica de límites).
- Límite superior e inferior. No existencia del límite.
- Indeterminaciones: infinitésimos e infinitos, órdenes, equivalencia.
- Ejercicios.

f) *Tipos de ejercicios y problemas*:

- Probar que el límite de funciones dadas es un real dado (se trabaja con funciones polinómicas de grado 1, exponenciales, racionales y radicales).
- Probar los teoremas relativos al álgebra de límites utilizando el teorema 1.
- Generalizar la demostraciones del límite en números reales para funciones polinómicas, racionales, trigonométricas y logarítmicas.
- Calcular y probar el límite de las funciones $f:f(x) = cosx$ y $g:g(x) = \frac{senx}{x}$ para $x \to 0$.
- Probar no existencia de límites de otras funciones trigonométricas.
- Generalizar propiedades de órdenes en infinitos para funciones polinómicas.
- Trabajo con cuantificadores en la definición formal de límite.
- Trabajo con límites laterales y límite de la función compuesta.

Análisis conceptual:

El capítulo comienza con la definición formal de límite, en su versión épsilon-delta, sin el uso de símbolos para los cuantificadores y con la utilización de intervalos simétricos. A continuación se escribe la misma con símbolos para los cuantificadores, y se enuncian definiciones equivalentes con el uso de distancia (a través del valor absoluto de la diferencia) y del conjunto imagen del intervalo de centro en el punto considerado.

Más adelante se presentan varios ejemplos de la demostración de que funciones determinadas tienen por límite números dados (se generaliza para las funciones polinómicas de grado 1 y 2 y se analizan casos particulares de otras funciones).

No se presentan problemas ni ejercicios resueltos, sí se proponen ejercicios al final del capítulo. No se presentan gráficos de ningún tipo para la introducción de la definición así como tampoco para la ilustración de los ejemplos o de los teoremas expuestos. No se presentan ejemplos que contextualicen el concepto en situaciones extramatemáticas.

Análisis didáctico-cognitivo:

Si bien en el capítulo dedicado a los comentarios el autor de los ‘apuntes’ los presenta como medios para acortar la distancia entre los libros de texto y los estudiantes, en su presentación no se destacan grandes diferencias entre este trabajo y un libro de texto cualquiera dedicado al tratamiento de esta temática en el nivel universitario. Por poner un ejemplo, en la primera presentación de la definición se evita el uso de cuantificadores pero inmediatamente se traduce la misma a un lenguaje más simbólico y formal y se continúa con el mismo. La ausencia de representaciones gráficas de ningún tipo es otro ejemplo del poco cuidado que tienen los aspectos didácticos en el trabajo.

Incluso muchos de los ejemplos propuestos tienen por objetivo la generalización de resultados más que la profundización en el concepto en sí. La idea que subyace es la de una matemática ya hecha, externa al estudiante. Su rol es el de comprender las definiciones y teoremas y aplicarlos en la resolución de ejercicios. No se presentan preguntas abiertas ni actividades de exploración para construir conceptos.

Las capacidades que se pretenden desarrollar son: la construcción del conocimiento –en particular del concepto de límite– de una manera dirigida, adquisición del lenguaje y simbolismo propios del análisis, conocimiento de los teoremas relativos a acotación, conservación del signo y operaciones entre funciones, conocimiento del mecanismo de las demostraciones deductivas con métodos analíticos, aplicación de la definición y propiedades a la resolución de ejercicios y el desarrollo de algoritmos para el cálculo de límites de expresiones algebraicas.

Si bien existe una voluntad expresa de introducir el concepto de límite en forma coloquial y explicitando cada paso, después de enunciada la definición se procede al desarrollo de todas las propiedades relativas y sus demostraciones sin intercalar ejemplos o ejercicios resueltos que den cuenta del objetivo del mismo.

Los ejercicios propuestos son de tipo no rutinario, lejos de enfatizarse el aspecto algorítmico del concepto, se promueve la reflexión sobre los conceptos relativos al de límite con actividades intramatemáticas.

Análisis fenomenológico:

No hay referencias a fenómenos que puedan ser organizados mediante el límite y que sean exteriores a la propia matemática. La matemática se encierra en sí misma y se explica por ella misma. Se observa un deslizamiento hacia aspectos puramente formales en los que se ha perdido la vinculación de los conceptos con su significado.

Anexo V: Programas de Matemática

Todos los programas de Educación Secundaria actuales y de planes anteriores d eUruguay se pueden encontrar en la página

http://www.ces.edu.uy/ces/index.php?option=com_content&view=category&layout=blog&id=89&Itemid=74 (23 de agosto de 2010)

Los analizados en la investigación fueron:

Educación Secundaria, Plan 1976:

Opción Medicina:

http://www.ces.edu.uy/ces/index.php?option=com_content&view=article&id=965&Itemid=74 (23 de agosto de 2010)

Opción Ingeniería, Matemática “A”:

http://www.ces.edu.uy/ces/index.php?option=com_content&view=article&id=982 (23 de agosto de 2010)

Educación Secundaria, Plan 2006:

Opción Ciencias Biológicas:

http://www.ces.edu.uy/ces/images/stories/reformulacion06sextobd/mat6csbiol.pdf (23 de agosto de 2010)

Opción Físico-Matemático, Matemática I:

http://www.ces.edu.uy/ces/images/stories/reformulacion06sextobd/mat1cienmat6.pdf (23 de agosto de 2010)

Formación Docente, Plan 2006, Análisis I:

http://www.depdematematica.org/ipa/sitio/file.php/1/portada/Programas_Especialidad_Matemtica.pdf (23 de agosto de 2010)

Anexo VI: Entrevistas a docentes

a) Reportada en el apartado 5.2.2.3

<u>12 de julio de 2009</u>

Estimado Profesor

Soy Verónica Molfino, no sé si me recuerda pero fui alumna suya de Análisis II en el IPA. Actualmente estoy cursando un Doctorado en Matemática Educativa y estoy enfocando la investigación de tesis en los procesos de institucionalización del concepto de límite. El objetivo es explicar por qué ese concepto se enseña hoy de la manera en que se hace, tanto a nivel de Educación Secundaria como en los primeros años de Universidad.

Esto implica, entre otras cosas, hacer un "rastreo" de cómo se ha introducido el concepto en el sistema escolar uruguayo.

Martín Sambarino me sugirió que me contactara con Ud, ya que por su experiencia precisamente en los tres ámitos (Secundaria, Formación Docente y Universidad) podría darme alguna pista al respecto. En principio tengo la idea de utilizar como eje a los libros de texto que se han ido utilizando como referencia para los cursos, por lo que la información de cuáles han sido esos textos sería para mi de gran ayuda, así como si esas referencias han ido variando a lo largo de los años en su experiencia como docente. Le agradecería que me indicara aproximadamente en qué años fue que Ud utilizaba esos textos como referencia.

Se me ocurrió que podría ser más práctico para Ud contestarme por mail, pero si prefiere que me contacte por teléfono o que incluso vaya hasta su lugar de trabajo puedo hacerlo con gusto.

Agradeciendo desde ya la información que pueda brindarme,

saluda atte.

Verónica Molfino

14 de julio de 2009

Estimada Verónica:

he recibido su misiva.

No entiendo claramente qué significa "proceso de institucionalización del concepto de límite". Si eso significa cuándo se empezó a enseñar la definición formal de límite (que es obra de Weierstrass y su escuela, alrededor de 1850-1860), la verdad es que no lo sé. Obviamente debe haberse empezado a enseñar primeramente en la llamada Facultad de Matemática, que era el nombre inicial de la Facultad de Ingeniería, pero ignoro en que época se empezó a dictar un curso de Análisis del estilo que ahora conocemos.

Lo único que sé es que en la década del 50 (y muy posiblemente también en la del 40) se dictaban regularmente cursos en Facultad de Ingeniería y en Preparatorios para Ingeniería (dependientes de Secundaria) en los cuales se usaba sistemáticamente la definición épsilon-delta para límites.

En cuanto a textos los había muy pocos. Recuerdo los de Rey Pastor: "Análisis Algebraico" (hay mucha álgebra, pero está la definición de límite de una sucesión; yo tengo una edición de 1953 pero es posible que hayan ediciones anteriores); "Teoría de Funciones", y finalmente "Análisis Matemático" que es posterior a los dos anteriores. A comienzos de 1960 se tradujo un libro de Hardy: "Lecciones de Análisis Matemático" (en inglés: "A first course on pure mathemetics", cuya primera edición es de 1908 (!!) y luego hubo otras posteriores).En este texto, que es un clásico y está redactado en forma más didáctica que los de Rey Pastor, se describe y luego se redacta y utiliza la definición formal de límite.

Después de estos textos vienen, después de 1970, los textos que tu ya conoces: los libros de Apostol, de Dieudonné, de Linés, además de traducciones de libros rusos, franceses y americanos, etc.

Cuando yo estudié Análisis en Secundaria me apoyé fundamentalmente en los apuntes de clase y en juegos de apuntes a mimeógrafo de algunos de los principales profesores del IAVA. Es muy difícil que haya recurrido a los libros que te mencioné (ni nadie lo hacía ya que eran bastante diferentes al desarrollo de los cursos, que eran bastante FUERTES).

Cuando empecé a dar clases de Análisis en el IPA había ya una superabundancia de textos, por lo que me limité a elegir, en cada tema, lo que me parecía mejor de cada uno.

Por ahora me detengo aquí. No sé si esto te servirá para algo. Eventualmente la seguiremos.

Saludos.

Firma del profesor

16 de julio de 2009

Estimado Profesor

Muchas gracias por la pronta respuesta. Efectivamente, parte de mi interés consiste en indagar acerca de cómo se introdujo la enseñanza del concepto de límite en Uruguay. En realidad me interesa analizar todo el proceso, como para explicar por qué es que ahora se enseña de la forma en que se hace, con una aproximación bastante formal, incluso en los cursos de Secundaria. Lo "raro" de esta situación uruguaya es que en muchos otros países, incluso aquéllos en los que tradicionalmente se ha "inspirado" la educación matemática de nuestro país, se ha descartado ese tipo de aproximación en los cursos en los que se presenta por primera vez el concepto de límite (como sería nuestro curso de Matemática de 6o de Secundaria). Sí es común encontrar acercamientos formales y el tratamiento de la definición épsilon-delta en cursos Universitarios, pero no tanto en los preuniversitarios. Por otro lado, lo de los "procesos de institucionalización" viene también por el lado de indagar acerca de cómo es que la comunidad matemática llega a esa definición épsilon-delta que, como Usted dijo, termina formulando Weierstrass de la manera en que hoy la conocemos. Pero de eso ya me estoy encargando, es más fácil porque hay más cosas escritas que en la situación uruguaya.

Busqué en el IPA los libros que menciona y encontré los dos últimos de Rey Pastor, pero no el "Análisis Algebraico", así que seguiré buscando por algún lado. De todas maneras lo que más me interesó de lo que me contó es precisamente lo que no se encuentra en los textos: los apuntes de profesores del IAVA, por ejemplo, que creo que en sí son toda una institución, en el sentido de que han formado escuela y fueron ejemplo durante mucho tiempo de cómo debía enseñarse el Análisis en Uruguay. Por un lado, quería preguntarle si existen aún en algún lado alguna copia de esos apuntes, tal vez con el nombre de los profesores pueda encontrarlos.

Y por otro lado me surgen dos cuestionamientos: ¿Por qué es que los profesores del momento insistían tanto con cursos tan FUERTES que ni siquiera los libros de texto que había en el momento se adecuaban a esos cursos? y ¿en qué se basaban esos apuntes, es decir qué los inspiraba: alguna influencia de la manera de enseñar en algún otro país, por ejemplo, o qué?

Bueno, le agradezco mucho toda la atención hasta el momento y me sería de gran ayuda que me ayudara a responder alguna de esas preguntas, ya que por su experiencia personal creo que es de los profesores que puede hacerlo.

Saludos

Verónica

20 de julio de 2009

Estimada Verónica:

1º) Los libros iniciales que te mencioné no eran utilizados usualmente como textos porque no se conseguían en el kiosko de la esquina. La principal herramienta de estudio para el teórico eran los apuntes individuales que sacábamos cada uno de nosotros. Los "Apuntes de ciertos docentes" se recomendaban como complemento de lo dado en clase. Algunos de esos apuntes ni siquiera fueron confeccionados por el docente en cuestión. Por ejemplo existían unos "Apuntes del Prof. Forteza" que fueron confeccionados por un grupo de estudiantes que sacó apuntes del curso de Forteza, luego los pasó en limpio y Forteza le hizo una revisación final, y así se imprimieron.

Con esto te estoy diciendo que los mismos no fueron redactados con una intención especialmente didáctica sino como resumen de los temas dictados. Creo que lo mismo se puede decir de los denominados "Apuntes del Prof. Ciganda" (creo que de calidad inferior a los anteriores). Existían también los "Apuntes de Vales". Estos son anteriores a los demás (probablemente de los comienzos de los 50') y fueron redactados por el propio Vales. (no con intención didáctica sino para incorporar temas que no se encontraban fácilmente en los libros que te mencioné). Quizás puedas conseguir algunos de estos apuntes en casa de algún profesor o ingeniero viejo.

2º) Los apuntes que te he mencionado no eran de nivel superior a los textos que te indiqué. La razón de su aparición era la facilidad en su obtención (se vendían enfrente al IAVA) y en que había algunas diferencias de enfoque con los libros de Rey Pastor. Por ejemplo, era usual comenzar el Análisis por el tema de sucesiones para pasar luego al de funciones y al de series, lo que no ocurre con los libros que mencioné.

3º) Respecto a por qué los cursos eran FUERTES hay varias explicaciones (y me voy a referir únicamente a los de Preparatorio para Ingeniería). En primer lugar los cursos de matemática de Facultad de Ingeniería eran "fuertes desde fines de la década de los 30', y allí no se daba límite de sucesiones ni funciones reales, sino funciones de varias variables, funciones de variable compleja y ecuaciones diferenciales; el cálculo diferencial de una variable se dejaba para Preparatorios. Varios de los docentes de Preparatorios eran docentes de la Facultad o habían sido estudiantes de Ingeniería.

Esto llevó a dictar cursos de buen nivel en Preparatorios, lo cual era posible porque el equipo decente era bastante homogéneo y a que el conjunto de estudiantes de Ingeniería y Ciencias era REDUCIDO (los mismos concurrían al IAVA, al Bauzá y en menor número al Liceo Francés, al Aleman, al IUDEP y al Seminario, debiendo los estudiantes de los institutos privados dar los exámenes en el IAVA). El caracter de PREUNIVERSITARIO de los Preparatorios no estaba en discusión en ese entonces (no como ahora que hay que "formar primero al ciudadano"). Desde luego que había un afán exagerado en "demostrar" casi todo lo que dictaba. El resultado de ello era que los estudiantes (como yo mismo) al aprobar aquellos cursos salíamos con los conocimientos "atornillados" (tanto de teórico como de técnicas de resolución de problemas) y no con un barniz fácilmente borrable como ahora.

Puede decirse que se dió una situación que tiene algún parecido con la intervención de J. P. Varela en la educación primaria, en plena dictadura de Latorre: como las condiciones para elaborar la reforma escolar eran apropiadas, la misma se llevó a cabo y eso nos distanció de varios países sudamericanos y hasta de algunos europeos. En el caso de Secundaria, la baja matrícula y lo homogéneo de los cuerpos docentes permitió un logro que no podrá volver a ocurrir, a saber: aprovechar la edad de los 16 y 17 años, cuando el estudiante es ya capaz de ABSTRAER y de COMPRENDER UNA TEORÍA FORMAL, para obtener de él, en un momento de su vida en que su capacidad de aprendizaje está en un máximo, una importantísima formación e información. Cuando la matrícula estudiantil creció y se empezaron a dictar cursos de 5º) y 6º) en todos los liceos del país sin disponer de docentes adecuados, toda la situación anterior decayó y ahora estamos en el pantano que todos conocemos.

Bueno, creo que ya he dicho bastante por hoy.

Adiós y buena suerte.

Firma del profesor

b) Reportadas en el apartado 5.2.2.5

ENTREVISTA CON PROFESOR 1

VIERNES 16 DE JULIO DE 2010

V. ¿Hace cuánto tiempo que se recibió? ¿Hace cuánto tiempo que se desempeña como profesor de Matemática?

P. Te voy a dar varia información. Yo ingresé al Instituto[21] en el año ’78, te lo digo aunque no me hayas preguntado, al segundo año porque el plan nuevo de tres años[22] se inauguró en el año ’77, yo entré en el ‘78 prácticamente lo estrenamos. Me recibí en diciembre del ’82, dejé dos materias para el final, para atrás, entonces la generación referente siempre es la de ingreso y nunca la de egreso.

V. Claro

P. Y cumplí en marzo de este año veintiocho años de actuación ininterrumpida en Secundaria, con alguna incursión en algún liceo privado también, pero mínima.

V. En particular, ¿hace cuántos años que se desempeña como profesor del curso de Análisis de sexto año?

P. Ahí tengo que sacar la cuenta, hace muchísimos años, tiene que hacer, por decirte algo, más de veinte años, porque yo empecé con uno o dos prácticos del Prof. Infantozzi que trabajaba acá.

V. ¿Acá en el Bauzá?[23]

P. Acá en el Bauzá, sí, tiene que hacer sí como veinte años, no te puedo decir exactamente pero…

[21] El profesor se refiere al Instituto de Profesores “Artigas” de Montevideo.
[22] El profesor se refiere al Plan vigente en Formación Docente desde 1977 hasta 1985. En 1986 un nuevo plan sustituyó al de 1977 y volvió a consistir de cuatro años, como era originalmente. Actualmente el plan vigente es de 2008, también con cuatro años de extensión.
[23] El “Bauzá” es un Instituto de Enseñanza Secundaria Público de Montevideo.

V. ¿Ininterrumpidos también?

P. Sí, sí. Después por supuesto yo heredé de alguna manera esos grupos porque viste que quedan[24], otros profesores ya estaban estables en otros grupos.

V. Bueno, la idea es hablar un poco sobre los cambios de programas entre los anteriores y los actuales del 2008. La primera pregunta es ¿cuáles cambios le parecen a Ud. más significativos con respecto al programa de Análisis en la opción Ingeniería?

P. El más significativo de todos es la desaparición del tema "Sucesiones", a mi me parece que no debió haber sido; como una cosa realmente relevante, ¿no? Porque no está más… y a mí me parece importante. Es más, yo he visto… he tenido oportunidad de ayudar a personas que han ingresado a Facultad de Ingeniería y ese tema se da por sobreentendido, por sentado, y aparecen cosas que no…
De pronto la idea de haber sacado el tema, tal vez pasó por, pero yo creo que no se dio, por una conjunción de criterios con la Universidad, pero lo que yo he visto, está bastante divorciado. No está muy emparentado… Si vos me dijeras, bueno: 'dejen sucesiones que lo damos nosotros en facultad, y hacemos un trueque, ustedes dan ecuaciones diferenciales, por ejemplo, o dan integrales'… Pero yo no veo nada de eso, la Facultad sigue viento en popa, como siempre, y este… Ese me parece el más significativo de todos.
Y después, te acoto que también me parece muy significativo, el tema de que las pruebas de evaluación se hayan transformados en teórico-prácticas, y no como eran antes teóricas por un lado y prácticas por otro. Que esa es una cuestión muy opinable, para mi menor, digamos, no sé si hay alguna otra cosa…
Y, de alguna manera, yo te diría que una… la intención de las autoridades, lo digo como cambio, no digo ni que esté bien ni que esté mal, de no jerarquizar de alguna manera como se jerarquizaba antes la parte teórica. Yo no he tomado mucha postura en cuanto a eso, no he pensado demasiado en eso. De pronto también la idea es que, yo que sé, se canalice más el curso hacia una parte práctica aplicada, más que a teorizar. No es de los aspectos que más me inquietan.
Ah, perdón, y el tema "series", desapareció.

[24] El profesor se refiere a que los grupos quedaron libres cuando el Prof. Infantozzi dejó de trabajar en el Instituto de Educación Secundaria "Bauzá".

V. ¿Y cómo le parece que eso afecta en la manera en que se propone el tema "límite de funciones"? ¿Hubo un cambio en eso?

P. A mi me parece que se da. Se puede encarar el tema "límite de funciones" totalmente independiente, no hay ningún problema, no hay drama con eso. El tema es la derivación que pueda tenerse para el tema "series", ¿no? Porque ya ahí, si no tenés sucesiones, no sé digo… Por eso te digo, si no se encara por sucesiones, porque las series ¿qué son? Ahora para el concepto de límite en sí, a mi me parece, didáctica y pedagógicamente hablando, que es más natural, no es que no pueda hacerse independientemente, pero es más natural, verlo por el lado de sucesiones en N, funciones con dominio natural, y después hacer una extrapolación a las funciones…

V. ¿A través del teorema de pasaje?

P. A través del teorema de pasaje, claro. Me parece una vía más natural. No le veo nada de que no se pueda encarar, porque es más, de hecho, en los otros cursos[25], de Medicina y eso, eso lo encarás totalmente independiente y no pasa nada. Se puede, bien… me preocupa la derivación que pueda tener en otros temas.

V. Claro.

P. Y que naturalmente, no… me parece que no es el camino natural. Pero no deja de ser en el ámbito de la opinión.

V. Ahora, la manera en que planifica y lleva a cabo el curso, ¿se modificó respecto a la manera en que lo hacía dos años atrás?[26]

P. Sí, tengo que confesar que sí, con estas cargas horarias que nosotros tenemos y con las pocas cosas que se pueden hacer, digamos, respecto a lo tradicional, se cambió muchísimo, ya nomás la propuesta de los escritos es abismalmente diferente.

[25] El profesor se refiere a cursos de sexto año pero de otras orientaciones, como Medicina, Economía o Arquitectura.
[26] Cuando el programa vigente era el correspondiente a 1976.

V. ¿En qué sentido?

P. Ah! Yo te diría que en todos. Porque por ejemplo pongo partes teóricas con prácticas, además, mucho más reducido, además estoy dando el curso con muchísma pero muchísima menos carga teórica, todo mucho al ejemplo, a la parte práctica, este… con una muy significativa poda de teoremas, por ejemplo, mucha menos cantidad de teorema, ir a dos o tres teoremas grandes. Y, ya te digo, un cambio en la propuesta de los escritos, totalmente mixtas con partes prácticas y teóricas, al punto de que si los muchachos excluyen partes… a veces uno se hace el loco, pero amenazarlos con que tienen que hacer partes teóricas, ya te digo, por las parte de los teoremas, se ha podado mucho, para llegar rápidamente a conceptos muy prácticos. E inclusive, y vos lo sabés bien este año, también poner problemas de aplicación, en temas, que, amparados en la libertad de cátedra, ejercicios de aplicación para que… Eso, antes nada.

V. Y en particular, ¿se modificó la manera en que planifica y da el tema “límite de funciones”?

P. No, básicamente no, específicamente la parte de límite de funciones no… siempre se hace una introducción, pero no, básicamente no. Sí la incorporación, derrepente, de algún ejercicio de aplicación, a la concreta, pero no… la introducción…

V. ¿Y la parte de la demostración de teoremas de álgebra de límites?

P. No, no, en general no he hecho grandes modificaciones en general.

V. ¿Igual lo hizo a partir del teorema de pasaje?

P. Este, bueno, este año digamos sí, porque como dimos algo de sucesiones, pero en realidad yo medio como que lo encaré igual medio aparte, como que corté, borrón y cuenta nueva, para que no quedara justamente muy encadenado, hice borrón y cuenta nueva. Perdón, mostré igual las similitudes, entre una definición y la otra. Te digo que este año, si bien sucesiones no está en el programa, y acepto que no está en el programa, a mi me pareció que había determinados conceptos básicos de sucesiones, como por ejemplo qué es una sucesión, la definición de sucesión, y dar, por ejemplo, el concepto de límite de sucesión, el *concepto*[27], la definición, y de repente dar monotonía, que es todo un tema, y dar el concepto de subsucesiones, como definición y ver qué pasa con los límites, eso lo dí. No todo el desarrollo, la operatoria de límites, la acotación, todo eso no, dí sólo tres tópicos grandes para que puedan trabajar… incluso los ejercicios mismos son aplicaciones directas de la definición, no son nada…

V. La última pregunta es ¿Por qué cree importante el tratamiento del tema "límite de funciones" dentro del curso tal cual lo plantea?

P. A mi me parece que hay una cuestión realista. Digamos, uno puede pensar muchas cosas, el concepto de límite capaz que hoy por hoy ya no se utiliza, pero a mi me parece que es un concepto riquísimo, muy rico en sí, y que aparece muchísimo, prácticamente, si vas a definir una derivada, ¿qué es? ¿me entendés? Una integral… te aparece en todos lados.
De pronto, no habría que ser tan, ¿cómo te puedo decir? No extenderse tanto en el tema, pero me parece que es un tema de capital importancia y además en la Universidad nos piden, entonces en la medida en que nosotros no hagamos una conjunción con la Universidad, que siempre nos hemos llevado a las patadas, la verdad… de pronto pueden decir "no den tanto de límite, den sólo el concepto, la definición, y nosotros nos encargamos de…" Pero a mi me parece que el tema en sí, es un tema muy rico, y que habilita justamente a muchas definiciones posteriores, o sea que ni que hablar, si querés definir, si querés medio en serio, derivadas… Todavía encima la derivada es indeterminada, es un límite indeterminado, así que algo tenés que decir, algo tenés que dar, algo tenés que… De pronto, reconozco, porque el tema límite es un tema que si lo agarrás, igual te lleva todo un año, que el orden[28], que esto, que la indeterminada, entonces de repente puede resultar excesivo. Muchas veces me cuestiono, por ejemplo límites con radicales: ¿dónde aparece? Viste que después en los hechos eso queda como medio… Y por ejemplo si das órdenes de infinitos, la parte de infinitésimos, después las funciones que se proponen, no tienen esos límites aislados con órdenes, tan complejos, pero es un tema, que inclusive comparándolo con las otras especialidades en las que doy el tema, Medicina por ejemplo, das límites tipo, indeterminados, das lo otro, pero nada más que a los efectos de ver si saben aplicar fórmulas. Que no me parece mal tampoco, que sepan aplicar bien una fórmula, de hecho no ves

[27] La cursiva indica que el profesor enfatiza en esa palabra.
[28] El profesor se refiere a órdenes entre infinitos o infinitésimos.

radicales en una función, en Medicina, pero igual se los ponés aparte para ver si saben aplicar una conjugada, no sé… Creo que ahí el objetivo es otro, no es el límite en sí, creo que es la aplicación de una fórmula, y ver cuál se aplica, por qué… Me da la impresión de que la cosa pasa un poco por ahí…

V. Bueno, muchísimas gracias por el tiempo brindado.

ENTREVISTA CON PROFESOR 2

LUNES 19 DE JULIO DE 2010

V. ¿Hace cuánto tiempo que se recibió? ¿Hace cuánto tiempo que se desempeña como profesor de Matemática?

P. Bueno, me recibí en marzo de 2002 así que… bueno, ya va para ocho años. Clases de matemática en el sistema formal, empecé en el 2000, y en el sistema informal desde el ’82, son unos cuantos años.

V. ¿A qué se refiere con sistema informal?

P. Clases particulares y “changas”[29]. Mientras me dedicaba a mi otra tarea anterior, que era Programador, hacía sistemas para empresas. Y… bueno el sistema de educación siempre me gustó, y en un momento determinado decidí institucionalizarme, y ahí arranqué, y de ahí hasta ahora sigo en eso.

V. En particular, ¿hace cuántos años que se desempeña como profesor del curso de Análisis de sexto año?

P. Desde siempre, desde que trabajo, desde el 2000, digamos, en el sistema ANEP[30].

V. ¿Cuáles son los cambios que a Ud le parecen más significativos con respecto al programa de Análisis en la opción Ingeniería?

P. Ta, el cambio significativo… lo que a mi me parece, no? En cuanto al programa en sí mismo, hay cambios significativos en las orientaciones como puede ser Derecho, que no tenían Matemática, o Medicina, Economía, donde se introduce el sistema… toda la parte de Estadística que antes no existía, esos son cambios fundamentales. En cuanto a los otros programas, en realidad el cambio fundamental no es el programa o los temas que toca en sí mismo, sino la sugerida metodología para hacerlo, creo que la diferencia fundamental es esa.

[29] Con la palabra “changas” el profesor se refiere a trabajos relacionados con la Enseñanza de la Matemática pero fuera del sistema educativo formal.

[30] Administración Nacional de Educación Pública, órgano que nuclea todo el sistema formal de enseñanza en Uruguay.

Con lo cual… este… a veces hay discrepancias con las orientaciones que da la inspección respecto de lo que uno tiene que trabajar con lo que verdaderamente entiende que se debería trabajar. Así que yo, si nos referimos a un curso con Matemática un poco más dura, como serían los de [la opción] Ingeniería, o cosas así, yo diría que más que cambio en el programa en sí mismo, hay un cambio en la metodología y la profundidad que uno le da en los temas, sugerida desde las autoridades. Por lo tanto, en realidad, por lo menos en lo que a mi me toca, salvo algún tema puntual, como Series que no está, o que Integrales, sí, y que Taylor no… Más allá de esas cuestiones, todo lo que tiene que ver con la parte de Análisis de las funciones, la continuidad, las sucesiones, yo le doy la misma formalidad que antes. Así que yo trabajo igual.

V. Pero sucesiones no está en el nuevo programa.

P. No, está en quinto ahora. Bueno, particularmente porque yo tengo Matemática II[31]. Entonces, cuando trabajo en el curso de Ingeniería[32], tener Sucesiones en Matemática II facilita luego en sexto, vía pasaje, tener los resultados ya conocidos de antes, y eso, a mi criterio, sirve.

V. ¿Pero trabaja con el mismo nivel de formalidad?

P. Sí, el mismo nivel de formalidad.

V. ¿Y qué cambios específicos encuentra en la manera en que se propone el tema “límite de funciones”?

P. Bueno, ahí está la cuestión, no sé, me imagino lo que yo hago, no tengo idea… no tengo un relevamiento hecho de cómo se trabaja a nivel general, no lo he investigado. Pero bueno, mi idea es aprovechar, si bien no es lo mismo cuando uno define límite de funciones que de sucesiones, los límites de sucesiones son mucho más intuitivos, uno puede manejar elementos sobre la recta real, jorobar[33] bastante con eso, la idea de que se van arrimando o no, creo que es mucho más intuitiva… Y cuando uno tiene eso y se pasa a funciones en el plano

[31] El profesor se refiere al curso de Matemática específico para la diversificación Científica de quinto año, penúltimo de Educación Secundaria y anterior al que se venía haciendo referencia.
[32] El profesor se refiere al curso de Matemática I (Análisis) para la opción Físico Matemática de sexto año.
[33] En el sentido de “insistir”.

cartesiano, considerar sucesiones que se arrimen en el eje de las x y en el eje de las y, creo que ayuda a la visualización rápida, y por lo tanto, por lo menos me ha pasado a mi, cuando uno va a hacer la definición formal, después de que ellos ya han trabajado con algunos ejemplos, creo que el épsilon-delta es mucho más entendible, salvo que esté suelto, digamos, ¿no? Por ejemplo, yo no tengo los cursos de Medicina, por ejemplo, pero conozco gente que tiene cursos de Medicina, y que yo les recomiendo no tomar la definición épsilon-delta, más allá de que bueno, que calculen, que vean cómo aproximan, porque al carecer de límite de sucesiones, es mucho más difícil, yo diría que incomprensible para los alumnos, cabalmente, lo que significa una definición épsilon delta, entonces yo recomendaría que no se hiciera. Porque de última, uno no tiene por qué suponer que el alumno va a ser matemático, ¿verdad? Todas esas herramientas van a servir para un salto, entonces capaz que es una formalidad extrema, y bueno, todo eso depende de cuál es el perfil de egreso del alumno dentro de cada orientación.

V. En realidad la pregunta estaba referida a si encuentra cambios en la manera en que el <u>programa</u> propone el tema límite de funciones.

P. Bueno, en la idea de límite en sí mismo, yo creo que el cambio propone aprender a calcular, digamos, creo que es eso el resumen. La formalidad dejala un poco de lado, eso podría ser el resumen. Entonces, capaz que para algunas orientaciones podría estar de acuerdo, pero no para todas.

V. Ahora, la manera en que planifica y lleva a cabo el curso, ¿se modificó respecto a la manera en que lo hacía dos años atrás?[34]

P. En realidad sí, porque por ejemplo antes, en el curso de Ingeniería, tenía que ver Sucesiones, en el mismo año. Por lo tanto, si bien ahora también lo hago como repaso de los años anteriores, bueno, se supone que el alumno tiene conocimiento de lo que son las sucesiones, en particular, claro, yo trabajo en condiciones muy especiales que no son las de todo el mundo. Porque yo trabajo en liceos que son muy chicos, y donde además los alumnos, por las materias que yo toco, los alumnos que tengo en Ingeniería los tuve en años anteriores, y sé cómo trabajaron con Sucesiones, entonces, no tengo ese problema de testear qué tienen y

[34] Cuando el programa vigente era el correspondiente a 1976.

qué no. Entonces, reconozco que son condiciones especiales, por las cuales, me facilitan el trabajo.

V. Y en particular, ¿se modificó la manera en que planifica y da el tema "límite de funciones" por esa diferencia en el tema Sucesiones? Aunque por lo que me cuenta…

P. Bueno, no, igual hago una introducción, digamos, este… los ejemplos clásicos de funciones que no pueden tomar determinado punto pero que tienen un límite real cuando uno se acerca a ellos, de construir una tabla, ver que es verdad que se van arrimando, esas cosas las sigo haciendo. Capaz que con menos énfasis porque los tipos están más acostumbrados a Sucesiones, pero, es decir, capaz que no tantos ejemplos como antes, de trabajar con tablas, pero trabajás bastante rápido. Pero sí, eso lo seguimos haciendo, de calcular valores funcionales y ver qué pasa con ellos, si uno puede conjeturar acerca de si se arriman a un real o no, eso sigue funcionando. Y por lo menos ellos constatan concretamente que bueno, que cuando uno habla de que el límite es tal cosa, ellos en realidad se van dando cuenta de que en realidad hay reales que se van arrimando a otros reales, esa parte es igual, digamos.

V. ¿Y con respecto a la formalidad, hay diferencia en la formalidad?

P. Sí, si seguro, la formalidad… Yo utilizo la formalidad, más allá de que si después se los voy a exigir después o no, ese es otro tema. A la hora de evaluar, trato de evaluar en el medio, digamos. En el medio en el sentido de que no soy muy quisquilloso con la escritura matemática pura, de hecho ni yo lo hago, porque cuando uno escribe, si bien es muy cierto y muy importante los cuantificadores, en realidad, hay gente que es muy exquisita para la escritura, los para todos y los paréntesis, una cantidad de… O sea, lo que trato de hacer es que el alumno tenga la idea de fondo y que después lo traduzca como quiera a la hora en que yo le pregunto qué es lo que pasa. La formalidad, o la formalización, si bien jorobo[35] bastante con tratar de aprender a escribir en un lenguaje matemático, creo que a la hora de evaluar, hago pesar el concepto de fondo, y no la escritura en sí misma. Entonces soy formal, yo soy formal porque mi pizarrón es formal, pero siempre traducimos a español lo que está puesto ahí, entonces para el alumno es mucho más fácil eso, ¿no? Porque la dificultad no es acordarse de cómo se escribe tal o cual simbolito sino la idea, de si para todo, o de si existe, eso tiene que

[35] En el sentido de "insistir".

estar claro, y en realidad también en forma conceptual. Así que si nos referimos a formalidad, a formalización, en lo que está escrito, soy liviano, en cuanto a lo conceptual no.

V. La última pregunta, más general, es ¿Por qué cree importante el tratamiento del tema "límite de funciones" dentro del curso tal cual lo plantea?

P. Bueno, el tema es que dentro de los objetivos del curso, hay varios que están asociados con la idea de límite. Por ejemplo, uno de los objetivos es poder graficar una funcioncita, ahí necesitamos tener conocimiento de ley de límites, porque ellos tienen que saber calcular. En cuanto a ejercicios de optimización, lo mismo, eee… En cuanto a, por ejemplo, todo lo que tiene que ver con Integrales, que ahora está también en el programa, tanto en Matemática II de Científico como en Matemática de sexto, también pasa lo mismo, porque en quinto uno hace la definición con suma de Riemann y ahí necesita límite de sucesiones… Si bien en tercero de Bachillerato[36], en sexto, uno podría hacer una definición más al estilo de sumas de D'Arboux, bueno, el conocimiento anterior, ayuda. Y bueno, tanto en el tema de Integrales como en el tema de Funciones en sí mismo, uno no podría graficar porque faltarían herramientas para hacerlo, si no tuviera la idea de límites. La idea original de derivabilidad, también tiene que ver con respecto a… Uno puede reducirlo y si las funciones son buenitas, como las que ponemos habitualmente, uno no tendría problemas en usar una asociación de dirección en un punto, pero cuando uno está haciendo una definición teórica adecuada, uno no tiene más remedio que usar el límite también. En cuanto, así que para el tema de derivabilidad, que es una de las cosas importantes, porque proporciona datos acerca del crecimiento de una función, etcétera, ahí está metida la idea de límite también. En cuanto a la idea de continuidad, si bien en principio uno podría independizarse de la idea de límite, uno podría definir continuidad sin tener la idea de límite, en definitiva, si uno tiene planteado o conoce la idea de límite anticipadamente, la continuidad, en ciertas condiciones, es equivalente a que un límite de un determinado número real. Entonces, ya que tenemos la idea de límite, aprovechemos y demos continuidad. Una cosa primero que la otra… No sé, yo nunca lo trabajé al revés, pero se podría, plantear al revés. La idea de límite me parece importante también en el sentido de ir considerando infinitos casos de puntitos cerquita a otro, siempre la idea de infinito es complicada, entonces me parece que… hacer un manejo más o menos de lo que pasa con los infinitos, o con los infinitos puntos, me parece que

[36] El profesor se refiere al sexto año de Educación Secundaria

debería estar en el acervo cultural de cualquiera. Entonces, más o menos formal, por lo menos que alguna vez se hayan enfrentado a la idea de aproximarme a algo, a mi me parece que sirve.

V. Bueno, muchísimas gracias por el tiempo brindado.