PEDECIBA Informática
Instituto de Computación – Facultad de Ingeniería
Universidad de la República
Montevideo, Uruguay

Tesis de Maestría en Informática

Políticas para el Control de Inventario con Remanufacturación y Disposición Final de Tiempo Discreto

Pedro A. Piñeyro Cabral

Febrero 2006

Tutor: Omar Viera (FI-UDELAR)

Políticas para el control de inventario con remanufacturación y disposición final de tiempo discreto.
Piñeyro Cabral, Pedro A.
ISSN 0797-6410
Tesis de Maestría en Informática.
Reporte Ténico 06-05
PEDECIBA.
Instituto de Computación. Facultad de Ingeniería
Universidad de la República
Montevideo, Uruguay, febrero de 2006

. *Resumen*

La Tesis de Maestría presentada en este informe, comprende el análisis y desarrollo de políticas para el control de inventario con remanufacturación y disposición final de tiempo discreto. El problema consiste en determinar cuando y cuanto producir, remanufacturar y disponer finalmente para satisfacer la demanda de un artículo en cada período, minimizando los costos involucrados de estas actividades y de mantener en inventario artículos listos y retornados. Los artículos retornados luego de usados, permanecen en inventario hasta que son remanufacturados, o sea se transforman en artículos listos para satisfacer la demanda, o se decide realizar una disposición final adecuada de los mismos. La demanda y los retornos se denominan determinísticos, en el sentido que se suponen conocidos los valores de ambos sucesos, para cada uno de los períodos. El problema de hallar una solución óptima para el caso determinístico de tiempo discreto está dentro del conjunto de problemas NP-Difícil, para una variedad de estructuras de costos, como se ha demostrado recientemente (Golany, Yang y Yu, 2001 y 2005; van den Heuvel, 2004).

Se establece como contexto para el análisis del problema una perspectiva ecológica, situación en la cual se pretende maximizar la remanufacturación de los retornos disponibles. Ya sea por razones legales, industriales, o por compromisos ecológicos, se ha visto que la recuperación de los artículos usados, ofrece una ventaja en términos económicos, con respecto a la disposición final de los mismos (de Brito y Dekker, 2002; Guide Jr, 2000; Hormozi, 2003; Rogers y Tibben-Lembke, 1998). Por tal motivo, el análisis sobre los retornos se centra fundamentalmente en la actividad de remanufacturación, y se considera la opción de disposición final sólo en aquellos casos de exceso de retornos, o sea donde no sean útiles para satisfacer la demanda.

Los aportes de esta Tesis de Maestría, son fundamentalmente tres. Uno es el análisis y la obtención de nuevos resultados teóricos de como realizar la remanufacturación en un contexto particular de retornos, que denominamos Retornos Útiles, que incluye tanto situaciones de retornos suficientes como insuficientes. El segundo, es la definición de un conjunto de políticas simples en su forma y de procedimientos de resolución basados en *Tabu Search* (Glover, 1987), donde se aplican junto a otros, nuestros resultados teóricos obtenidos sobre la remanufacturación. En todos los casos se prioriza la forma simple de las políticas propuestas, pero sin descuidar el comportamiento con respecto a los costos de las actividades y de mantener en inventario. Con respecto a *Tabu Search*, sería la primera vez, según nuestro conocimiento, que se utiliza esta metaheurística para la determinación de soluciones del problema de control de inventario con remanufacturación y disposición final. Por último está la implementación informática de una biblioteca extensible y fácil de usar, con las políticas y procedimientos de resolución propuestos.

Las pruebas realizadas para una gran variedad de escenarios de valores de demanda, retornos, y de costos, permitió medir el comportamiento de las políticas y métodos propuestos con respecto a los costos involucrados. De los resultados obtenidos, se puede concluir que para cada escenario, existe al menos una de las políticas propuestas, con un comportamiento aceptable en cuanto a la minimización de los costos. Con respecto a la implementación de *Tabu Search*, se obtuvieron resultados muy buenos en casi todos los casos, lo que demuestra a nuestro entender, el éxito de la aplicación de esta metaheurística al problema.

Índice

Anexo 1: Testeo de las Políticas Propuestas

Anexo 2: Control de Inventario: Estado del Arte

. Introducción

El control de inventario tradicional consiste en determinar cuando y cuanto producir para satisfacer la demanda de un artículo, minimizando los costos relacionados de producir y de mantener en inventario. Como uno de los tópicos de la Investigación Operativa [16], está presente en la literatura desde las primeras décadas del siglo veinte con los trabajos de Harris [15] y Wilson [42] y su modelo del lote económico. Este es un modelo de revisión continua para una tasa de demanda constante, y es comúnmente conocido como *EOQ* de las siglas en inglés de *Economic Order Quantity*. Desde ese momento, se ha desarrollado una vasta cantidad de modelos con diferentes características y algoritmos para solucionarlos, tanto óptimos, como aproximados. Para un mayor detalle de los distintos casos y sus enfoques se puede consultar [10][15][33], o remitirse al Estado del Arte que acompaña este informe como documento anexo.

Los años comprendidos entre el fin de la década de 1950 y principios de 1960 se pueden considerar como fundamentales dentro del control de inventario. Durante estos años aparecen dos de los modelos, junto con las políticas y algoritmos, más relevantes: el de Wagner y Whitin [41] (W-W de aquí en adelante) para el caso de demanda determinística y tiempo discreto, y el estudio teórico-matemático de Arrow, Karlin y Scarf [2] para el caso de demanda estocástica. Luego de [2], Scarf en [30], demuestra la optimalidad de la política (s,S), una de las más utilizadas en la práctica, debido a la simplicidad de su forma. Desde esos años, para el caso determinístico se han desarrollado variadas extensiones, como las de Zangwill en [45] para el modelo con faltantes, o de van Hoesel y Wagelmans en [39] para el caso de capacidad finita de producción, y recientemente algoritmos más eficientes que el desarrollado por W-W, como el de Aggarwal y Park en [1], o el de Wagelmans, van Hoesel y Kolen en [40]. De la misma manera para el caso de demanda estocástica se han desarrollado recientemente distintos algoritmos, como por ejemplo el de Zheng y Federgruen en [46] y el de Iyer y Schrage en [19], con diferentes enfoques para resolver la complejidad matemática del modelo.

Como suele suceder, estos trabajos académicos, han sido influenciados y orientados a solucionar problemas provenientes del mundo industrial y comercial. Las empresas y organizaciones se ven obligadas a mantener niveles positivos de inventario, ya sea por restricciones en la capacidad de producción u ordenamiento, los tiempos de entrega o a la incertidumbre de la demanda [15], lo cual a su vez tiene un costo que se quiere minimizar. A estos problemas, se han sumado en las últimas décadas los relacionados a la contaminación ambiental y el desarrollo sostenible. Esto se origina fundamentalmente con el consumo masivo de artículos de corta vida útil y el empleo de técnicas industriales contaminantes, así como en el uso indiscriminado de recursos naturales en los procesos de manufacturación [7][13][17]. Esto ha causado que las organizaciones industriales tengan que hacerse cargo de los productos puestos en el mercado luego de terminada la vida útil de los mismos, ya sea por compromisos ecológicos adoptados por la organización, o por las normas legales impuestas por los gobiernos de distintos países para proteger el medio ambiente [17].

A los problemas relacionados a la gestión de los retornos de artículos usados se los conoce como problemas de Logística Inversa [4][6]. Uno de esos problemas es el Control de Inventario con Remanufacturación y Disposición Final. El problema consta en determinar cuando y cuanto producir, remanufacturar y disponer finalmente para satisfacer la demanda de un artículo, teniendo en cuenta la minimización de los costos totales involucrados.

Ejemplos recientes de trabajos académicos realizados al respecto, son los de Richter *et al* en [23][26][27][28] para el caso de demanda y retornos determinísticos, tanto para tiempo continuo como discreto. Los de Golany, Yang y Yu en [12][43] en donde se analiza la complejidad del problema y se busca la forma óptima de la solución del problema, y los de van der Laan en [36][37][38] para los casos de demanda y retornos estocásticos, donde se analiza el comportamiento de distintas políticas propuestas.

Con respecto a nuestro trabajo, nos concentraremos en el caso determinístico y de tiempo discreto. Esto quiere decir que se considera el tiempo como un conjunto finito de períodos y que se suponen conocidos los valores de la demanda y de los retornos en cada uno de los períodos. En este contexto del problema, los aportes fundamentales de nuestra Tesis constan del análisis y presentación de nuevos resultados teóricos, así como de la definición de políticas simples y métodos de resolución basados en *Tabu Search*, que son luego implementados informáticamente mediante una biblioteca. Los resultados teóricos están relacionados a cómo realizar la remanufacturación en una situación particular de retornos. A esta situación la denominamos Retornos Útiles, e incluye casos de retornos suficientes como insuficientes para satisfacer la demanda. Estos resultados, junto a otros presentes en la literatura, son aplicados luego en las políticas propuestas, y procedimientos de resolución basados en *Tabu Search*.Según nuestro conocimiento sería la primera vez que se aplica esta metaheurística al problema de Control de Inventario con Remanufacturación y Disposición Final. Estas políticas y procedimientos de resolución son los que componen la biblioteca de software implementada.

Consideramos entonces, que dada la importancia del tema a nivel mundial, que según parece va a ser mayor en un futuro cercano, nuestros aportes son significativos dentro del área, por tratarse de la presentación de aspectos teóricos novedosos, de una implementación práctica fácil de utilizar y de extender, y de la aplicación de una metaheurística que ha tenido un gran éxito en otras áreas, como por ejemplo el Ruteo de Vehículos, o VRP como se le conoce generalmente de sus siglas en inglés.

El resto de la primera sección esta organizado de la siguiente forma. En 1.1 se presentan las motivaciones provenientes del mundo real para el control de inventario con remanufacturación. En 1.2 los antecedentes académicos relacionados y en 1.3 se define el alcance del proyecto de la tesis de maestría, en el cual se presenta a grandes rasgos las políticas a desarrollar. Finalmente en 1.4 se concluye la sección presentando un resumen de las características más importantes de nuestro trabajo.

1. Motivación

Son de público conocimiento los problemas de contaminación ambiental y de escasez de recursos a escala mundial a finales y principio del segundo milenio. El origen fundamental de estos problemas está en que el gran crecimiento industrial de las últimas décadas, no ha sido acompañado de políticas adecuadas para el mantenimiento del medio ambiente, como así tampoco de la preservación de los recursos naturales [4][17][29]. Para evitar el avance de estos efectos nocivos al medio ambiente y asegurar un desarrollo industrial sostenible, muchos países, sobre todo los fuertemente industrializados como Francia, Alemania, EE.UU. y Japón, han creado en los últimos años leyes que obligan a las organizaciones industriales a hacerse cargo de los artículos que han sido colocados en el mercado y que luego de un tiempo quedan en desuso [13][17][29]. Estos artículos usados que retornan a la planta industrial, pueden ser desechados de forma adecuada, o recuperados de alguna manera para satisfacer nuevamente la demanda, lo cual significa una ventaja económica con respecto a la producción, ya que generalmente los procesos industriales asociados a la recuperación suelen ser más convenientes, en términos de costos, que los de la producción [13][17].

Una de las tareas posibles de recuperación de artículos usados y retornados que tiene mayores beneficios es la remanufacturación [17], ya que es una de las tareas de más alto rendimiento económico. Esto se debe fundamentalmente a dos razones: del lado industrial, se requiere de poco esfuerzo para recuperar el artículo retornado, y desde el punto de vista del cliente, la calidad de un artículo remanufacturado es tan buena como la de un artículo nuevo [4][13][17][29]. Por lo tanto la remanufacturación juega un papel preponderante dentro del desarrollo sostenible como una de las tareas de recuperación que brinda mayores beneficios: Con relación al medio ambiente, por la reutilización de artículos usados que no requieren de procesos industriales sofisticados lo cual lleva a un ahorro en el uso de energía y materiales. También se beneficia al consumidor porque puede obtener un artículo con la misma calidad que uno nuevo generalmente a un mismo precio e incluso menor, así como de mayor vida útil [13]. Por último hay una ventaja económica para la industria, ya que puede obtener artículos listos a un menor costo, cumpliendo además con las disposiciones legales con respecto a los artículos usados y retornados [4][17][29]. Por lo tanto se pretende evitar o minimizar la disposición final de los artículos usados y retornados. Esto se debe por un lado, al impacto ambiental que provoca el desecho de los artículos usados, aunque se haga de forma adecuada [29]. Además la disposición final de artículos usados recuperables provoca un aumento en la producción para satisfacer la demanda, lo cual tiene un impacto negativo en la industria en relación a la remanufacturación como se ha mencionado anteriormente [17].

Este cambio en el destino de los artículos usados, ha provocado que en los últimos años hayan aparecido, y sigan apareciendo con mayor fluidez, trabajos académicos relacionados a la recuperación de artículos usados, los cuales son retornados a las plantas industriales para que sean recuperados o desechados de una forma adecuada. A los distintos problemas relacionados a la gestión y procesamiento de los artículos usados y retornados se los denomina en forma conjunta como problemas de Logística Inversa [4][6], en contraste a la Logística tradicional, que trata sobre los problemas relacionados en el sentido industria-clientes, y no clientes-industria como en el caso de los retornos.

Dentro del contexto de la Logística Inversa, uno de los problemas existentes es el de control de inventario, donde se agrega al caso tradicional, el inventario de artículos usados, y las tareas de remanufacturación y de disposición final. El Control de Inventario con

Remanufacturación y Disposición Final, es aquel problema que consiste en determinar cuando y cuanto producir, remanufacturar y disponer finalmente para satisfacer la demanda de un artículo, teniendo en cuenta la minimización de los costos involucrados. Los costos corresponden a la realización de cada una de las actividades y a los de mantener en inventario artículos usados y retornos, así como los artículos listos para satisfacer la demanda. En nuestro trabajo consideraremos el caso determinístico de tiempo discreto. Esto significa que el tiempo está dado por un conjunto finito de períodos ordenados en forma consecutiva, y que se supone conocido el valor de la demanda y de los retornos en cada período.

Como se puede apreciar de lo expuesto hasta aquí, es y será de vital importancia para las organizaciones industriales poder realizar un control de inventario en el contexto de la Logística Inversa, de la mejor manera posible. Esto significa minimizar los costos involucrados, así como reducir el impacto ambiental relacionado a las actividades industriales. Además un control de inventario adecuado es de vital importancia para los problemas relacionados de Transporte y de Distribución de cualquier organización industrial. Sin embargo nuestro entender, los trabajos académicos recientes para el caso determinístico y de tiempo discreto han estado orientados a analizar y resolver las dificultades del modelo matemático subyacente, y han dejado de lado, al menos explícitamente, la facilidad de aplicación en el mundo real.

En este sentido nos parece importante los aportes alcanzados en nuestra Tesis para el caso determinístico de tiempo discreto. Entre ellos está la definición de políticas simples y de métodos de solución aproximados basados en la metaheurística de *Tabu Search*.

Si bien se hace hincapié en la forma simple de las políticas, no se deja de lado el comportamiento con relación a la minimización de los costos. Por este motivo se analiza y se obtienen resultados teóricos novedosos, según nuestro conocimiento, de como realizar la remanufacturación de forma independiente, en un contexto de retornos particulares que denominamos Retornos Útiles. Los retornos útiles se definen como aquellas situaciones en donde en cada momento los retornos disponibles son a lo sumo iguales a la demanda restante. La denominación de útil se encuentra en el hecho de que en estas condiciones, una remanufacturación total de los retornos no causaría un exceso de artículos listos, si no que sería siempre para satisfacer la demanda. Otra muestra de que se tiene en cuenta la importancia de la minimización de los costos es que se definen métodos de aproximación basados en *Tabu Search*, que según nuestro conocimiento, sería la primera vez que se aplica esta metaheurística para la resolución del problema de control de inventario con remanufacturación.

Desde el punto de vista práctico, el aporte consiste en una implementación de las políticas y métodos propuestos en forma de biblioteca, con características que permiten fácilmente su utilización y conexión a otros sistemas informáticos.

En la siguiente sección se realiza la presentación y el análisis introductorio de los antecedentes académicos que forma parte del estado del arte relacionado directamente con el trabajo llevado adelante en nuestra Tesis de Maestría.

2. Antecedentes

Si bien se pueden encontrar antecedentes cercanos a la década de 1980, como el trabajo pionero de Simpson [32] en 1978, es a mediados de la década de 1990, y a principios del

2000, a nuestro entender, donde empiezan a aparecer en mayor cantidad en la literatura, modelos, políticas y algoritmos para el problema de considerar los retornos como parte del control de inventario, a los cuales luego de alguna tarea de recuperación, se los puede considerar como artículos listos para satisfacer la demanda. El control de inventario con retornos, es uno de los problemas que compone el área conocida como Logística Inversa [4][6][29], que comprende el análisis de los distintos problemas relacionados con la recuperación de artículos usados: transporte, recolección, recuperación, control de inventario, etc. Esta área ha tomado una gran relevancia, debido a los inconvenientes relacionados con la escasez de recursos, contaminación ambiental, consumo masivo y desarrollo sostenible.

Al igual que en el caso de control de inventario tradicional, o sea sin retornos, se puede hacer una clasificación del caso con remanufacturación, según la forma de la demanda y los retornos, y la estructura de los costos. La clase de problema que se analiza en nuestra Tesis, es aquella en la que la demanda y los retornos son determinísticos: se suponen conocidos sus valores, el tiempo es discreto y está dado por un conjunto de finito de períodos, y los costos de las actividades son de la forma de una constante más una variable, mientras que los costos de inventario son lineales. En la literatura se le puede encontrar por distintos nombres: *Reverse Wagner/Whitin Model* [27][28], *ELSR* [35] de las siglas en inglés de Problema del Tamaño del Lote Económico con Remanufacturación, o *PRP* [12][43], por Plan de Producción y Remanufacturación. En este trabajo se adoptará la abreviación *ELSR*, de [35], porque consideramos que es la denominación que más se acerca al tipo de problema analizado en nuestro caso. Aunque las políticas propuestas, y la implementación de la biblioteca, se hacen para el caso de costos de la forma de una constante más una variable y lineales, algunos de los resultados teóricos que forman parte de nuestros aportes, son para funciones cóncavas en general.

Dentro de los antecedentes, se pueden observar, según nuestro conocimiento y punto de vista, fundamentalmente cinco trabajos que están directamente relacionados con la clase de problema que se analiza en esta tesis: los dos trabajos de Richter junto a Sombrutzki [27] y Weber [28] respectivamente, los de Golany, Yang y Yu en [12] y [43], y el de van den Heuvel en [35]. También se puede mencionar el trabajo de Beltrán y Krass de [3], pero en un menor grado de relacionamiento, ya que se considera la reutilización directa de los retornos, esto es sin una tarea de remanufacturación. A continuación se describen brevemente los trabajos antes mencionados.

Los trabajos de Richter *et al* relacionan el problema con retornos, al caso tradicional analizado por Wagner y Whitin en [41], para el caso con costos fijos en [27] y con variables en [28]. A grandes rasgos, en ambos casos se analizan los casos de sólo remanufacturación para cuando los retornos son suficientes para satisfacer la demanda y el de alternar las actividades de producción y remanufacturación para el caso particular en que la cantidad de retornos al comienzo del primer período es suficiente para satisfacer la demanda de todos los períodos del problema. Uno de los aportes de nuestro trabajo, es que introduciremos por primera vez, según nuestro conocimiento, un caso particular de retornos, que denominaremos Retornos Útiles. Los casos de retornos útiles, involucran a los casos de retornos tanto insuficientes como suficientes, siempre y cuando se cumpla en cada período que la cantidad de retornos disponibles no sea mayor que la demanda restante. Para esta forma de los retornos se analizará y se obtendrán resultados teóricos de cómo realizar la mejor remanufacturación posible de forma independiente, esto es sin tener en cuenta los costos de inventario de artículos listos. Estos resultados, junto a otros resultados del estado del arte, serán aplicados en la definición de las políticas propuestas y luego implementadas, que forman parte de los aportes de nuestra Tesis.

Los trabajos de Golany, Yang y Yu, analizan el problema de control de inventario con remanufacturación desde un enfoque más genérico con respecto a la forma de los costos involucrados. Se demuestra en [12] que cuando los costos son funciones cóncavas, el problema pertenece al conjunto de problemas NP-difícil, y se proporciona un algoritmo polinomial para el caso particular en donde todos los costos son lineales. También Yang, Golany y Yu en [43] demuestran que el problema es NP-difícil en el caso de costos cóncavos estacionarios, y se brinda un algoritmo de Programación Dinámica para determinar una solución óptima, de orden pseudopolinomial. También se analiza y se obtiene la forma que debe tener una solución óptima para el caso de costos cóncavos general, apoyados en la modelización mediante redes de flujo y utilizando los resultados de Zangwill en [44] para esto tipo de problemas. A partir de estos resultados, se presenta un procedimiento heurístico para hallar una solución al problema de forma eficiente. Con relación a la complejidad del problema, también es importante el trabajo reciente de Wilco van den Heuvel en [35], que demuestra que aún en el caso particular de funciones de costos de la forma de una constante más una variable, el problema es NP-difícil. A pesar de estos resultados sobre la complejidad del problema, veremos en la Sección 5 de análisis de las políticas propuestas, que se puede obtener una solución aproximada, de forma eficiente, para una gran variedad de casos. En este sentido, uno de nuestros aportes, es brindar una biblioteca con conjunto diverso de políticas y procedimientos de resolución, como una forma de poder comparar distintas alternativas para una instancia particular del problema. Para aquellos casos donde no exista una forma eficiente de obtener una solución aceptable con respecto a los costos, se podrá utilizar alguno de nuestros procedimientos desarrollados basándose en la metaheurística de *Tabu Search*. Este es uno de nuestros aportes fundamentales, ya que según nuestro conocimiento sería la primera vez que se utiliza dicha metahuerística en el control de inventario con remanufacturación y disposición final.

Cabe destacar que otros dos grandes hilos de investigación dentro del control de inventario con remanufacturación y disposición final, son los casos determinísticos de tiempo continuo, y el de demanda y retornos estocásticos [5]. Por ejemplo, para el caso de tiempo continuo y demanda y retornos dados por una tasa constante, Richter [23][26], Teunter [34], y Koh-Hwang-Sohn-Ko [22], en sus respectivos trabajos presentan distintas extensiones de la política *EOQ* para el caso con remanufacturación y disposición final, y otras políticas para el caso continuo tradicional, o sea sin retornos. Kiesmüller [20] establece la forma de la política óptima para el caso determinístico continuo general, con y sin tiempos de entrega, y con y sin faltantes. Así mismo, para el caso estocástico de tiempo discreto, se encuentra el trabajo pionero de Simpson [32], donde se establece la forma de la política óptima para el caso sin tiempos de entrega y luego la extensión de Inderfurth [18] para el caso de tiempos de entrega positivos. Recientemente Fleischmann y Kuik [7] demostraron la optimalidad de la política (s,S) para el caso en que la remanufacturación tiene el menor tiempo de entrega y no hay disposición final. En el caso estocástico continuo, van der Laan *et. al.* [36][37][38] ha analizado el comportamiento de las políticas *Pull* y *Push* y posteriormente desarrollado fórmulas para hallar los parámetros óptimos de estas políticas, basándose en un análisis de Markov del problema [38].

3. Alcance del Proyecto de Tesis

En vista de los antecedentes presentados en el punto anterior, lo que se plantea como aporte principal de la Tesis de Maestría es desarrollar e implementar una biblioteca de políticas y procedimientos de resolución para el control de inventario con remanufacturación y disposición final determinístico de tiempo discreto. Una de las características de las políticas propuestas debe ser la simplicidad en su forma, para que la obtención de una solución sea eficiente. Otra de las características de las políticas y procedimientos propuestos debe ser que dependiendo de la relación de la demanda, los retornos y los costos involucrados tengan un buen comportamiento con respecto a la minimización de los costos totales. Para poder lograr ambas características se analizará la forma de como realizar de la mejor manera e independientemente, las actividades de remanufacturación y disposición final, ya que la forma de determinar la mejor producción es conocida. A su vez, dentro de estas dos actividades sobre los retornos, nos concentraremos en la forma de realizar la remanufacturación, sin suponer ninguna característica sobre los retornos, y maximizando la cantidad de retornos remanufacturados. En este sentido, uno de los aportes de nuestra tesis, será la determinación de resultados teóricos, sobre como realizar la mejor remanufacturación posible, de manera independiente, teniendo en cuenta la demanda del problema, y sin suponer que los retornos son suficientes. Esta remanufacturación será óptima, o sea de menor costo, si no se considera el costo de inventario de artículos listos. Según nuestro conocimiento, son los primeros resultados sobre como realizar la remanufacturación independiente, en un contexto que no sea el de retornos útiles.

Para las actividades, se considerarán funciones de costos de la forma de una constante más una variable, mientras que para los inventarios de artículos listos y usados se considerarán funciones de costos lineales. En ambos casos se suponen costos dinámicos, esto es que pueden variar sus valores de período a período. Algo a destacar, es que algunos de nuestros aportes teóricos sobre como realizar la remanufacturación son aplicables al caso de funciones de costos cóncavas, tanto para las actividades, como para los inventarios. Cabe la aclaración de que en el comienzo de esta Tesis, no se tenía conocimiento de la complejidad del problema. Muestra de ello es que el trabajo de van den Heuvel [35], al igual que el último de Golany, Yang y Yu [43] son de fines del 2004 y mediados del 2005, respectivamente, o sea posteriores al comienzo de esta tesis, lo cual revela a nuestro entender la importancia y la vigencia de este tema a nivel mundial.

Para las políticas propuestas se emplearán principalmente dos estrategias: una consiste en el análisis de la forma de la solución óptima para casos pequeños debido a la complejidad del problema, gracias a la ayuda de un modelo algebraico construido en GAMS [9], usando la versión de distribución gratuita para estudiantes, que se puede obtener en: http://www.gams.com. La otra estrategia es la descomposición del problema en las actividades involucradas: producción, remanufacturación y disposición final. En este último caso se empleó el análisis matemático junto con el uso y extensión de resultados en el área para situaciones similares, como por ejemplo para la actividad de remanufacturación. Como ya se ha mencionado antes, otro factor que se tuvo en cuenta para las políticas propuestas, es la simplicidad de la forma en relación a la complejidad del problema, para que las mismas sean de fácil aplicación.

A continuación se presentan brevemente cada una de las políticas propuestas, que forman parte de los aportes de nuestra Tesis. Primero se describen aquellas políticas que surgieron de un análisis de las características de las soluciones óptimas obtenidas mediante GAMS.

- ***Producir una vez, Remanufacturar M veces*** **(P1RM)**: Se produce en el primer período, y se remanufactura en los siguientes M períodos según lo determina el cálculo de la política. Esta política está basada en el análisis de la forma de soluciones óptimas para cuando los costos de remanufacturar son bajos en relación a los de producir, y los niveles de retornos son altos. Las cantidades y períodos de remanufacturación se podrán obtener mediante tres procedimientos diferentes: uno es la aplicación de los resultados de Richter *et al* de [27] para el caso de retornos suficientes con el cual se obtiene la remanufacturación óptima, otro es una extensión de la fórmula de Silver-Meal [31], y por último una remanufacturación basada solamente en los valores de la demanda de cada período.

- ***Producir N veces, Remanufacturar M veces*** **(PNRM)**: Es similar a la anterior, pero en este caso se produce en los primeros N períodos, de acuerdo al algoritmo de W-W, y se remanufactura en los restantes en M veces, según lo determina el cálculo de la política, como se explico en el caso de P1RM. Es una variante que tiene un mejor resultado cuando los costos de mantener en inventario artículos listos son altos comparados con el de mantener artículos usados, ya que tiende a evitar un nivel alto de inventario de artículos listos, como sucede en el caso de producir sólo en le primer período, cuando los retornos sean bajos o medios comparados con la demanda.

- ***Política Lineal por Tramo*** **(LPT)**: Dadas las actividades de cada uno de los períodos, estos es producción y/o remanufacturación y/o disposición final, se determinan las cantidades de cada actividad, de manera de satisfacer la demanda acumulada entre cada uno de los períodos de producción y/o remanufacturación. Esta política esta pensada para aquellos casos en donde se puede determinar de antemano en cuales períodos se desea realizar cada una de las actividades. Como veremos será de utilidad para el planteo de las políticas basadas en *Tabu Search*.

- ***Remanufacturar Siempre*** **(RSiempre)**: En esta propuesta se remanufactura en cada uno de los períodos la cantidad necesaria para satisfacer la demanda actual, siempre y cuando haya retornos disponibles. Cuando la cantidad de retornos es insuficiente para satisfacer la demanda del período, se produce el faltante en este período o en el último período de producción, según sea la opción de costo mínimo. Está pensada para aquellos casos de retornos altos en relación a la cantidad de la demanda, aunque veremos que tiene un comportamiento aceptable en el caso de retornos bajos debido a que la producción se determina basándose en una minimización local de los costos, aplicando una técnica similar a la de Silver-Meal [31].

- ***Política Pull***: Esta es una política propuesta para el control de inventario con demanda y remanufacturación estocásticos, como los analizados en [23][36][37][38]. En nuestro caso se hizo una adaptación para el caso determinístico, y que consiste en remanufacturar cuando el nivel de inventario de artículos listos es menor o igual a $s_r \geq 0$ y siempre que la cantidad de retornos disponibles sea lo suficiente para que la cantidad de artículos listos alcance el nivel $S_r > 0$. La producción se realiza en cantidades múltiples de $Q_m > 0$ siempre y cuando la cantidad de artículos listos disponibles sea menor o igual a $s_m \geq 0$. La disposición final se realiza cuando el nivel de retornos disponibles es mayor o igual a $s_d \geq 0$. Obviamente, la efectividad de esta política está fuertemente asociada a los valores de los parámetros que la definen, y no entra dentro del alcance de esta tesis analizar los valores óptimos de estos parámetros.

- ***Política Push***: La política Push, al igual que en el caso de la política Pull, es una adaptación de la propuesta de control de inventario con remanufacturación para el caso estocástico, presentes en [23][36][37][38]. Consiste en remanufacturar cuando la cantidad de retornos disponibles en un período es mayor o igual a $Q_r > 0$ unidades y producir en cantidades múltiples de $Q_m > 0$ cuando el nivel de artículos listos es menor o igual a $s_m \geq 0$. La disposición final se realiza cuando el nivel de de artículos listos es mayor o igual a $s_d \geq 0$. Al igual que para el caso de la política Pull, la efectividad está relacionada con los valores de los parámetros y no entra dentro del alcance de esta tesis analizar los valores óptimos de estos parámetros.

- ***No Remanufacturar* (NoR)**: En esta propuesta sólo se considera la actividad de disposición final para los retornos, y por lo tanto sólo se puede satisfacer la demanda por medio de la producción de artículos nuevos. En ambos casos se puede determinar las cantidades y períodos óptimos, o sea de costo mínimo, ya que ambas actividades son independientes. Obviamente el sentido de proponer esta política no es desestimar la recuperación de los retornos, si no todo lo contrario, ya que veremos que no considerar la remanufacturación no es la decisión económicamente conveniente.

A continuación se enuncian las políticas basadas en la descomposición del problema en las actividades correspondientes. La idea de esta estrategia es considerar de forma independiente cada una de las actividades. En este sentido, se analizó la forma de como realizar la remanufacturación para satisfacer la demanda en el contexto de retornos suficientes o insuficientes, cuyos resultados son presentados en la Sección 3.2 de este documento. La actividad de disposición final sólo se considerará en aquellos casos de retornos en exceso. Notar que la producción se puede obtener mediante la aplicación del algoritmo de W-W, a la demanda restante, o sea a aquella demanda que no se puede satisfacer mediante la remanufacturación. Las políticas propuestas en base a la descomposición en actividades, que forman parte de nuestros aportes son las siguientes:

- ***Remanufacturación Útil* (URWW)**: Política óptima, de costo mínimo, de remanufacturación, si se tiene en cuenta sólo los costos de remanufacturar y de mantener en inventario los artículos usados. Obviamente esta política no asegura que se satisfaga la demanda de todos los períodos, ya que esto depende de los niveles de retornos, pero si tiene en cuenta que no se remanufacture más de lo necesario, de ahí la denominación de remanufacturación útil. Está basada en el análisis independiente de la actividad de remanufacturación dentro del problema completo, presentado en la Sección 3.2 de este documento. Para esta política se presenta un procedimiento que tiende a suavizar el efecto de no considerar el costo de mantener en inventario los artículos listos, que denominaremos procedimiento de ajuste, que modifica las cantidades a remanufacturar cuando corresponda, para disminuir los niveles de inventario de artículos listos. Con respecto a la disposición final sólo se considera en aquellos casos en que los retornos sean excesivos, y se pueden determinar de forma óptima utilizando los resultados de la Sección 3.2.

- ***Remanufacturación máxima en M veces*** **(RMAXM)**: Esta es una propuesta que determina la política de remanufacturación de menor costo, que maximiza la utilización de los retornos, si se quieren tener M períodos de actividad. Es una política pensada para los casos en que hay una limitación en la cantidad de veces que se puede realizar la remanufacturación.

Dada la complejidad del problema y la importancia de la minimización de los costos involucrados, además de las políticas propuestas, se investigó el uso de la metaheurística *Tabu Search* [11]] para obtener soluciones que estén próximas a la óptima. En este sentido, otro de nuestros aportes, es la implementación de dos procedimientos: uno que realiza una exploración aleatoria en el espacio de soluciones, y otra de exploración determinística, los cuales se presentan a continuación:

- ***Tabu Search Estocástico*** **(TSPRD)**: En este caso se propone una implementación de *Tabu Search*, en donde la exploración se realiza mediante un procedimiento aleatorio de la vecindad. Esto se hizo así pensando en casos donde la cantidad de períodos es grande, y no se tiene una solución inicial con costos mínimos aceptables desde donde partir, y por lo tanto tiene sentido hacer una exploración diversificada del espacio de soluciones. En cada paso de exploración de vecinos del algoritmo, se realiza una determinada cantidad de veces el mismo movimiento sobre la mejor solución actual, de tal manera que cada solución nueva que se obtiene, es una modificación aleatoria de la mejor solución actual. La condición de parada del algoritmo está dada por el número de iteraciones totales, o luego de una cierta cantidad de iteraciones sin mejoras. Cabe la aclaración, que al ser un algoritmo de búsqueda aleatoria, en cada ejecución del mismo, la solución devuelta puede ser distinta, con la característica de que cada una de ellas va a tener un comportamiento similar con respecto a los costos involucrados.

- ***Tabu Search Determinístico*** **(TSRH)**: La otra propuesta de implementación de *Tabu Search*, consiste en realizar una búsqueda determinística, partiendo de una solución inicial, y en donde se explora un cierto entorno del espacio de soluciones de dicha solución. En cada paso de exploración se obtiene siempre la misma cantidad de vecinos, aplicando un sólo movimiento a la mejor solución actual, para obtener cada una de las soluciones candidatas. La condición de parada del algoritmo está dada por el número de iteraciones totales, o luego de una cierta cantidad de iteraciones sin mejoras.

Según nuestro conocimiento sería la primera vez que se aplica esta metaheurística para el control de inventario con remanufacturación y disposición final, de ahí que el aporte de nuestra maestría, dentro del alcance de la tesis, es evaluar el comportamiento de la aplicación de *Tabu Search* al problema, y no hacer un análisis de la mejor implementación de la misma.

4. Conclusiones

En la Tesis de Maestría presentada en este informe, se proponen y analizan un conjunto de políticas y procedimientos de resolución para el control de inventario con remanufacturación y disposición final. Este problema es uno de los más importantes dentro del área conocida como Logística Inversa, que trata sobre los problemas relacionados a la gestión de los artículos usados que retornan a la planta industrial para ser recuperados o desechados de forma adecuada. Estos problemas tienen una gran relevancia a escala mundial debido a las dificultades que afronta la humanidad con respecto al cuidado del medio ambiente y al desarrollo sostenible.

Los aportes que presenta nuestra Tesis, teniendo en cuenta nuestro conocimiento del estado del arte, y la importancia del problema, son fundamentalmente tres:

- El análisis y la presentación de nuevos resultados teóricos, de cómo realizar la remanufacturación de forma independiente en un contexto particular de retornos, el cual denominamos Retornos Útiles, que incluye tanto casos de retornos suficientes como insuficientes.

- La definición de políticas simples y de procedimientos de resolución basados en la metaheurística de *Tabu Search*. Según nuestro conocimiento sería la primera vez que se utiliza esta metaheurística para la resolución del control de inventario con remanufacturación y disposición final.

- La implementación informática de una biblioteca con las políticas y procedimientos de resolución propuestos, fácil de usar y de extender.

Las políticas propuestas se analizan en diferentes situaciones de demanda, retornos y costos, para estudiar el comportamiento de las mismas, y determinar, basados en los resultados obtenidos y en las características de cada una de las situaciones cual es la que mejor se comporta con respecto a la minimización de los costos totales involucrados en cada caso. En este sentido, se establece un marco de pruebas que permite comparar los resultados de las políticas y procedimientos propuestos, con la mejor solución posible para cada situación. Para obtener la mejor solución posible se emplea un modelo algebraico construido en GAMS, utilizando el solver Cplex. Se efectúan tests de robustez con respecto a la cantidad de períodos y de variación de los costos, utilizando para esto, una aproximación razonable de la mejor solución posible.

Los diferentes tests, permiten comprobar que para casi todos los casos existe al menos una de las políticas propuestas con la que se obtiene una solución con un buen comportamiento con respecto a la minimización de los costos, en un tiempo muy razonable. Aún para aquellos casos en los que no se pueda determinar una solución aceptable con respecto a los costos, se puede obtener un conjunto de alternativas posibles que son de gran utilidad para la toma de decisiones. En todos los casos analizados, a excepto de los de gran tamaño, se obtiene un excelente comportamiento para las soluciones determinadas con los procedimientos basados en *Tabu Search*. Esto demostraría, por primera vez según nuestro conocimiento, que la metaheurística se puede aplicar con buenos resultados para el control de inventario con remanufacturación y disposición final.

5. Organización del Informe

El resto del informe está organizado de la siguiente manera:

En la Sección 2 se define en detalle y formalmente el problema de control de inventario con remanufacturación y disposición final a analizar, así como el alcance de nuestra Tesis de Maestría.

En la Sección 3 primero se presentan los análisis y resultados teóricos obtenidos sobre como realizar la remanufacturación de forma independiente, así como la definición formal de la situación particular de retornos analizada, a la que denominamos Retornos Útiles. Luego se procede con el detalle de las políticas y procedimientos de resolución propuestos para el problema control de inventario con remanufacturación y disposición final, basados en los resultados teóricos propuestos en nuestra tesis y los relevados durante la conformación del estado del arte.

En la Sección 4 se presentan los requerimientos, características y definiciones de la implementación informática.

En la Sección 5 se definen los testeos a realizar y se presentan los resultados obtenidos, para en luego en la Sección 6 realizar el análisis de las políticas y procedimientos de resolución propuestos con respecto a los resultados obtenidos. En la Sección 7 se presentan las conclusiones generales del trabajo, así como líneas de investigación para trabajos futuros.

Al final del documento, se encuentran los anexos correspondientes al Estado del Arte y los Resultados del Testeo.

. Definición del Problema

En esta sección del informe se define completamente el problema que se analiza en este trabajo de maestría, presentando los componentes del mismo y las suposiciones tomadas para su análisis, para de esta manera, al final, mostrar el programa matemático que se considerará para el problema.

El problema de control de inventario que se investiga, consta en determinar cuando y cuanto producir, remanufacturar y disponer finalmente en cada período, para satisfacer la demanda de un artículo, minimizando los costos relacionados. Se considera un conjunto finito de períodos, y se supone que los valores de la demanda y de los retornos son conocidos en cada ellos. Los costos corresponden a realizar cada una de las actividades, así como a mantener niveles positivos de inventario de artículos listos o usados. De esta manera, la demanda se puede satisfacer por artículos nuevos, o sea producidos por primera vez, o por artículos remanufacturados. Desde el punto de vista de la recuperación de productos usados, la remanufacturación es aquella tarea de recuperación en la cual se asume que el consumidor no puede distinguir entre un artículo nuevo y uno remanufacturado: ambos se consideran artículos listos para satisfacer la demanda con la misma calidad [13][14][17]. Notar que la complejidad del problema se encuentra fundamentalmente en el hecho de que la actividad de remanufacturación es la que relaciona los artículos retornados con los listos. Las actividades de producción y de disposición final se pueden considerar como actividades independientes, debido a que la primera incide sólo en el nivel de inventario de artículos listos y la segunda sólo en el nivel de inventario de artículos retornados. En cambio la de remanufacturación incide en ambos inventarios, y de esta manera vincula las tres actividades.

A continuación se listan las características del problema de inventario con remanufacturación y disposición final que se analizará en nuestro trabajo:

- Se considera un sólo artículo, y dos inventarios: uno para los artículos listos para satisfacer la demanda, y otro para los artículos usados y retornados.

- El nivel inicial de ambos inventarios es cero.

- Se considera al tiempo en unidades discretas, como una secuencia finita de períodos. Todas las decisiones se toman al comienzo de cada período.

- Se suponen conocidos los valores de la demanda y de los retornos para cada uno de los períodos

- Los costos de las actividades son de la forma de una constante más una variable o componente lineal como en [1], o sea:

$$C_i(x) = \begin{cases} K_i + c_i x & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

En donde $i = 1,2,...,n$ y $K_i > 0$. Para los inventarios el costo será lineal. Esta forma de los costos es la que se adopta generalmente en el caso determinístico y de tiempo discreto.

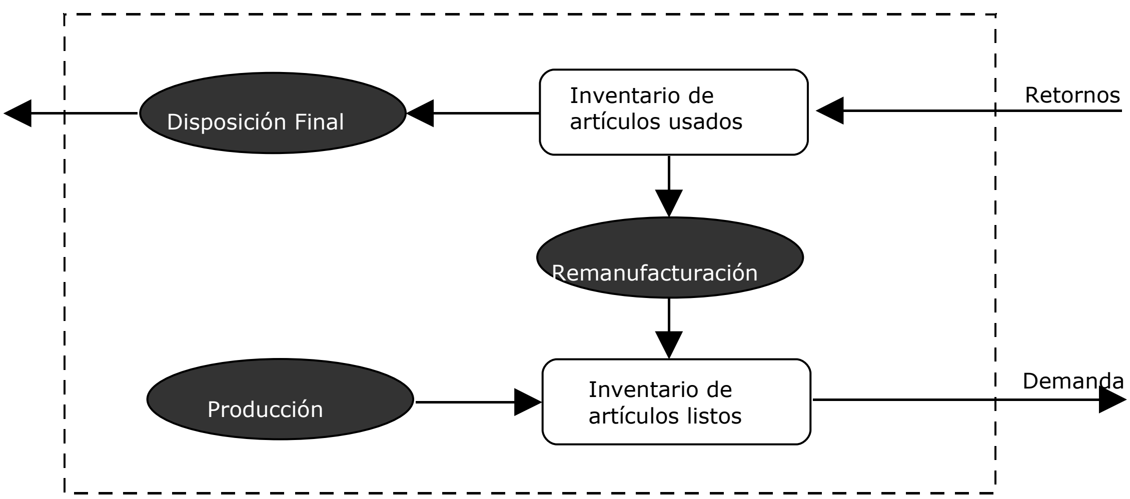
- No se permiten faltantes, esto es, la demanda de un período debe ser satisfecha con la producción y/o remanufacturación de ese período, o un período anterior.

- No se asume ninguna relación explicita entre los valores de la demanda y los de retornos. Se consideran ambos como sucesos independientes.

- Los tiempos de entrega son instantáneos, o sea, tanto la producción como la remanufacturación y la disposición final se consideran actividades instantáneas, sin importar la cantidad de artículos a producir, remanufacturar o disponer finalmente.

- Se considera la capacidad de producción como infinita, mientras que la capacidad de remanufacturación y de disposición final es limitada y dinámica, dependiendo de las cantidades retornadas en cada período.

En el esquema siguiente se pretende reflejar de manera gráfica la relación entre las distintas actividades y los elementos del sistema:



De acuerdo a las características descritas, y adaptando la notación de [43] los componentes del problema a analizar son los siguientes:

- $n > 0$: Horizonte de planeación, o número de períodos, con $n < +\infty$
- $D_i \geq 0$: Demanda en el período i, con $D_1 > 0$
- $R_i \geq 0$: Retorno en el período i. Con $R_i \leq D_i$
- $p_i \geq 0$: Cantidad a producir en el período i
- $r_i \geq 0$: Cantidad a remanufacturar en el período i
- $d_i \geq 0$: Cantidad a disponer finalmente en el período i
- $K_i^p > 0$: Costo fijo de producir, del período i
- $c_i^p \geq 0$: Costo unitario de producir en el período i
- $K_i^r > 0$: Costo fijo de remanufacturar, del período i
- $c_i^r \geq 0$: Costo unitario de remanufacturar del período i
- $K_i^d > 0$: Costo fijo de disponer finalmente, del período i
- $c_i^d \geq 0$: Costo unitario de disponer finalmente del período i
- $y_i^s \geq 0$: Nivel de inventario de artículos listos a mantener durante el período i
- $y_0^s = Y_0^s = 0$: Nivel inicial de inventario de artículos listos
- $y_n^s = Y_n^s \geq 0$: Nivel final de inventario de artículos listos
- $y_i^r \geq 0$: Nivel de inventario de artículos usados a mantener durante el período i
- $y_0^r = Y_0^r = 0$: Nivel inicial de inventario de artículos usados
- $y_n^r = Y_n^r \geq 0$: Nivel final de inventario de artículos usados
- $h_i^s \geq 0$: Costo de mantener en inventario un artículo listo, durante un período i
- $h_i^r \geq 0$: Costo de mantener en inventario un artículo usado, durante un período i

El objetivo de la resolución del problema entonces, es encontrar los valores de p_i, r_i y d_i, para satisfacer la demanda de cada período, lo que denominaremos una política $U = (p_i,r_i,d_i)$. Una política $U = (p_i,r_i,d_i)$ es factible cuando se cumplen las dos siguientes condiciones:

- La cantidad remanufacturada y dispuesta finalmente en un período debe ser menor o igual a la cantidad de retornos disponibles en ese período, o formalmente:
$$r_i + d_i \leq R_i + y_{i-1}^r$$
- En cada período la demanda se debe satisfacer por la producción, remanufacturación o por la cantidad de artículos listos en inventario del período anterior, o alguna combinación de las tres. Formalmente:
$$y_{i-1}^s + p_i + r_i \geq D_i$$

Cuando una política factible U es de costo mínimo, se dirá que la política es óptima, y se denotara como U^*. Como se ha expresado en secciones anteriores de este documento, el problema de hallar la solución o política óptima es un problema de NP-difícil para una variedad de estructuras de costos, y en particular para la utilizada en nuestro caso, de una constante más una variable.

Otro hecho que se tendrá en cuenta, además de la minimización de los costos, en nuestro enfoque para la resolución del problema, es simplificar la forma de las políticas. Esto es un punto importante, porque al tratarse de un área comprendida en las Ciencias de Gestión, la simplicidad de la forma de una política posibilita que pueda llevarse a la práctica con más facilidad [35]. Otro punto importante es la óptica con la que se quiere resolver el problema, que es desde el punto de vista del beneficio ecológico, tratando de recuperar la mayor cantidad posible de artículos retornados, para satisfacer la demanda. Estos dos puntos serán esenciales para la conformación de las distintas políticas, además, claro está, del objetivo de minimizar los costos involucrados.

1. Modelo Matemático

A continuación se presenta el programa matemático para el problema de Control de Inventario con Remanufacturación y Disposición Final, según una adaptación de notación de [43]. Las funciones de costos de producir, remanufacturar y disponer finalmente: $C_i^P(\cdot)$, $C_i^R(\cdot)$ y $C_i^D(\cdot)$, al igual que las funciones de costos de mantener en inventario artículos listos y retornados: $H_i^S(\cdot)$ y $H_i^R(\cdot)$, se suponen genéricas. De la misma manera se considera que los niveles iniciales y finales de ambos inventarios son valores positivos o cero, dados.

$$
\begin{cases}
\min \sum_{i=1}^{n} \left\{ C_i^P(p_i) + C_i^R(r_i) + C_i^D(d_i) + H_i^S(y_i^s) + H_i^R(y_i^r) \right\} \\
s.a. \\
(ES) \qquad y_{i-1}^s + p_i + r_i = D_i + y_i^s \qquad i = 1,2,\ldots,n \\
(ER) \qquad y_{i-1}^r + R_i = r_i + d_i + y_i^r \qquad i = 1,2,\ldots,n \\
(CI) \qquad y_0^s = Y_0^s,\ y_n^s = Y_n^s, \quad y_0^r = Y_0^r,\ y_n^r = Y_n^r \\
\qquad p_i, r_i, d_i, y_i^s, y_i^r \in Z^+ \quad i = 1,2,\ldots,n
\end{cases}
$$

En donde se supone como en [43] que:

$$
\begin{cases}
C_i^P(0) = C_i^R(0) = C_i^D(0) = H_i^S(0) = H_i^R(0) = 0 \\
C_i^P(-x) = C_i^R(-x) = C_i^D(-x) = H_i^S(-x) = H_i^R(-x) = +\infty \quad \forall x = 1,2,\ldots
\end{cases}
$$

La restricción (*ES*) es la ecuación de equilibrio de inventario de artículos listos, y establece que la actividad de un período más la cantidad de artículos listos que procede del período anterior, debe satisfacer la demanda actual, y el posible resto queda para los períodos futuros. La restricción (*ER*) es la ecuación de equilibrio para el inventario de artículos usados que establece que la cantidad en inventario del período anterior más los retornos del período actual, es igual a la cantidad que se remanufactura, más la cantidad de disposición final, más el inventario de artículos usados que queda para períodos posteriores. La restricción (*CI*) es la condición inicial para los niveles de inventario, para el primer y el último período. Generalmente se asume que el nivel de inventario inicial es cero en ambos casos y no se dan condiciones para los niveles del último período, como en [27], [28] y [35]. De todas maneras este modelo es más general ya que se puede extender a estos dos casos, como se explica en la Sección 2 de [40]. Uno de los aspectos más interesantes de [43], desde nuestro punto de vista, es la modelización del problema como una red de flujos [44][45]. Como veremos en secciones posteriores de este documento, esto permite analizar formalmente la forma de la política óptima cuando los costos involucrados son funciones cóncavas, como en la Sección 4 de [35].

Concretamente en nuestro trabajo se analizará el caso en que las funciones de costos de las actividades son de la forma de una constante positiva, más una variable o componente lineal positiva, y las funciones de costos de mantener en inventario de artículos listos y usados son lineales, ya que es la forma habitual que se le da a los costos para el caso determinístico discreto [27][28][35][43]. De la misma manera que en [27][28][35][41], se asume que los niveles iniciales de ambos inventarios es cero, y no hay restricciones con respecto a los niveles finales. Para este caso el programa matemático, según una adaptación de notación de [35], con la extensión para el caso de disposición final, y al que llamaremos *ELSR*, es el siguiente:

$$
(ELSR)\begin{cases}
\min \sum_{i=1}^{n} \left\{ K_i^p [p_i > 0] + c_i^p p_i + K_i^r [r_i > 0] + c_i^r r_i + K_i^d [d_i > 0] + c_i^d d_i + h_i^s y_i^s + h_i^r y_i^r \right\} \\
s.a. \\
(ES) \qquad y_{i-1}^s + p_i + r_i = D_i + y_i^s \qquad i = 1,2,\ldots,n \\
(ER) \qquad y_{i-1}^r + R_i = r_i + d_i + y_i^r \qquad i = 1,2,\ldots,n \\
(CI) \qquad y_0^s = y_0^r = 0 \\
\qquad p_i, r_i, d_i, y_i^s, y_i^r \in Z^+ \quad i = 1,2,\ldots,n
\end{cases}
$$

En donde la expresión $K\ [x > 0]$, usando la notación lógica condicional, significa que el valor de la misma es $K > 0$ si y sólo si x es estrictamente positiva. De otra manera la expresión toma el valor cero.

A pesar de esta especificación en las funciones de costos, y en los niveles iniciales de inventario, el problema sigue perteneciendo al conjunto NP-difícil como lo demostró van den Heuvel en [35].

A continuación se analizan en detalle cada uno de los antecedentes presentes en la literatura, que a nuestra consideración están directamente relacionados con el problema de control de inventario con remanufacturación y disposición final a analizar.

2. Análisis de Antecedentes

Como antecedentes académicos, desde nuestro punto de vista, existen hasta el momento en la literatura cinco casos concretos, que son los más cercanos a nuestro trabajo. También se mencionará un sexto trabajo, que consideramos relevante dentro del Estado del Arte, aunque está más distanciado del nuestro con respecto a los otros cinco. A continuación se presentan brevemente cada uno de ellos, respetando el orden cronológico de aparición en las distintas publicaciones.

Los dos primeros artículos son de K. Richter con M. Sombrutzki [27] y J. Weber [28] publicados en los años 2000 y 2001 respectivamente. En [27] se hace una análisis del caso "puro" de sólo remanufacturación sin tener en cuenta información de la demanda, estableciendo la validez del algoritmo de W-W con la modificación correspondiente para que sea aplicado a los retornos. También se hace el análisis del caso de alternar producción y remanufacturación, donde se menciona que probablemente no exista un algoritmo simple para solucionar el problema, y se considera el caso particular en el que los retornos del primer período son suficientes para satisfacer la demanda total. Para este último caso se demuestra la validez de un algoritmo del estilo de W-W, al que denominan *Reverse WW Production Planning*, y en donde sólo se tienen en cuenta los costos fijos de las actividades. Más adelante, K. Richter y J. Weber en [28] extienden el trabajo anterior para el caso de costos variables de producción y remanufacturación, de la forma de una constante más una componente lineal. Se demuestra aquí entre otros resultados, que cuando los costos son estáticos, y la cantidad de retornos del primer período es suficiente para satisfacer la demandan total, la forma de la política óptima es de primero remanufacturar y luego producir.

La incidencia de los trabajos de Richter *et al*, en nuestra propuesta, está presente en el análisis independiente de la actividad de remanufacturación, dentro del problema completo. La diferencia en nuestro caso es que no supondremos que la cantidad de retornos es suficiente para satisfacer la demanda total, ni menos que lo es en el primer período. En vez de eso se analizará una situación en donde los retornos pueden ser suficientes o insuficientes, que denominaremos situación de Retornos Útiles. Para dicha situación se obtendrán resultados de cómo realizar la mejor remanufacturación posible de forma independiente, remanufacturando la totalidad de los retornos al menor costo posible. Estos resultados teóricos luego son utilizados en la definición de una de las políticas propuestas, que formará parte de la biblioteca implementada.

Continuando con el análisis del Estado del Arte, Beltrán y Krass en [3], publicado en el 2002, presentan un análisis para el caso en que los retornos pueden ser usados directamente para satisfacer la demanda, sin ningún tipo de tarea de recuperación, lo cual puede considerarse como una demanda negativa. Si bien es un trabajo algo distanciado del analizado en nuestro caso, tiene resultados importantes como por ejemplo un algoritmo óptimo, basado en la propiedad de inventario cero, cuya complejidad es de orden cúbico. Otro aporte significativo de [3], es que demostraron que la propiedad de inventario cero no se cumple para el caso general de control de inventario con retornos, que como veremos también está reflejado en la modelización mediante redes de flujo de Yang, Golany y Yu en [43].

El primer trabajo de Golany, Yang y Yu, en [12], estudia la complejidad del problema de control de inventario con remanufacturación y disposición final. Se analiza el caso donde los costos son funciones cóncavas, y se establece que el mismo pertenece al conjunto de problemas NP-difícil. A su vez se brinda un algoritmo de orden polinomial que obtiene los valores de una política óptima, para el caso de costos lineales, usando una transformación al problema de transporte, modelado mediante grafos, y utilizando una combinación de dos algoritmos conocidos para este problema. Un aspecto interesante de [12], desde nuestro punto de vista, es que relaciona el problema de control de inventario con remanufacturación y disposición final, al problema de control de inventario tradicional con capacidad finita de producción, que es un problema conocido como NP-difícil, y para el cual, según nuestro conocimiento, existe un algoritmo eficiente sólo para el caso de capacidad finita constante en [39]. La relación entre ambos problemas está basada en que se puede ver a la remanufacturación, como una actividad con capacidad finita dinámica, determinada por la cantidad de retornos en cada período, por lo cual, los autores plantean que parece lógico pensar que el problema con remanufacturación sea tan difícil de resolver como el caso tradicional con capacidad de producción finita, lo que demuestran luego formalmente.

El trabajo de Wilco van den Heuvel en [35] analiza la complejidad del problema, para el caso específico en que los costos de las actividades son funciones con la forma de una constante, más un componente lineal o variable, que es la que generalmente se adopta en la literatura, ya que es la forma presente en los problemas de economía de escala. El autor demuestra para este caso particular de la forma de los costos, que la complejidad del problema es NP-difícil.

En el segundo trabajo de Yang, Golany y Yu, en [43], se hace un análisis de la forma de una solución óptima del problema para el caso en que los costos de las actividades son funciones cóncavas, basándose en la modelización del mismo como redes de flujo, para las cuales se ha obtenido un conjunto de resultados interesantes establecidos fundamentalmente por Zangwill en [44], que datan de 1968. A modo de ejemplo, la optimalidad del algoritmo de W-W para el control de inventario tradicional con funciones de costos cóncavos, fue demostrada por Zangwill en [45], usando resultados sobre redes de flujo de costos cóncavos, con un sólo nodo fuente, y varios nodos destinos. Volviendo al trabajo de Golany, Yany y Yu, en [43] se demuestra que aún en el caso de funciones cóncavas estacionarias, el problema es NP-difícil. Se brinda además un algoritmo de Programación Dinámica de orden pseudo-polinomial para determinar la solución óptima del problema, y un procedimiento heurístico, basado en la forma que debería tener una solución óptima, extraída de las propiedades de la red de flujos del problema.

El trabajo de Yang, Golany y Yu, en [43], es uno de lo más incidentes en nuestro trabajo, desde el punto de vista del objetivo planteado de determinar la forma de la solución óptima y de un procedimiento para obtener la misma. De todas maneras en nuestro caso se abordó otro camino de análisis, que consta en determinar políticas y procedimientos heurísticos teniendo en cuenta la complejidad del problema. En este sentido el trabajo de van de Heuvel en [35] establece formalmente la complejidad del problema analizado en nuestro caso, en donde los costos de las actividades son de la forma de una constante más una variable. Cabe destacar, que tanto el trabajo de Yang, Golany y Yu, así como el de van de Heuvel en [43] y [35] respectivamente, son ambos posteriores al comienzo de nuestra Tesis de Maestría, lo cual demuestra a nuestro entender la importancia y la vigencia del tema.

3. Conclusiones

En virtud de los antecedentes, nuestra conclusión principal es que no se ha hecho hincapié en el desarrollo de procedimientos heurísticos para el problema de control de inventario con remanufacturación y disposición final. Esto nos parece un tema importante de investigación, si se tiene en cuenta la complejidad computacional asociada a la determinación de una solución óptima del problema.

En este sentido los objetivos de nuestra Tesis comprenden la definición, análisis e implementación informática de políticas simples y procedimientos de resolución basados en la metaheurística de *Tabu Search*. Para las políticas propuestas se utilizan resultados teóricos recientes en el área, y nuestros propios aportes sobre como realizar la remanufacturación de forma independiente. Para ello introducimos una nueva clasificación de los retornos, que incluye tanto casos de retornos suficientes como insuficientes, que denominamos Retornos Útiles. Para esta situación de retornos se realiza un análisis teórico, y se obtienen resultados relevantes y nuevos según nuestros conocimientos. Entre ellos se determina la forma y un procedimiento para obtener la mejor remanufacturación posible. Esto significa la remanufacturación de menor costo, si no se tiene en cuenta el costo de inventario de artículo listos y la maximización del uso de los retornos, lo cual apunta a un beneficio en términos ecológicos. Con respecto a los procedimientos de resolución basados en *Tabu Search*, pensamos que es un aporte importante la aplicación de esta metaheurística al Control de Inventario con Remanufacturación y Disposición final, teniendo en cuenta el éxito que ha tenido su aplicación en otros problemas de Investigación Operativa [11].

En la siguiente sección, la número 3, se presentan los resultados teóricos obtenidos, y las diferentes políticas y procedimientos de resolución propuestos, que como mencionamos constituyen los aportes fundamentales de nuestro trabajo.

. Políticas Propuestas

En esta sección se presentan en detalle cada una de las políticas y procedimientos de resolución propuestos para el control de inventario con remanufacturación y disposición final de tiempo discreto, que forman parte de esta tesis de maestría.

Como se mencionó en secciones anteriores, se denomina política de inventario a los valores de producción, remanufacturación y disposición final para cada uno de los períodos. Todas las políticas propuestas serán factibles, en el sentido que se satisface la demanda de todos los períodos, y que en cada período no se remanufactura y dispone finalmente más allá de los retornos disponibles. Esto es lo mismo que decir que los niveles de ambos inventarios siempre serán mayores o iguales a cero. Se verá también, que para determinadas situaciones de demanda, retornos y costos, la solución obtenida a partir de alguna de las políticas propuestas se aproxima o es la solución óptima, con respecto a la minimización de los costos involucrados.

Antes de introducirnos en el detalle de cada una de las políticas, hay que observar que los valores de ambos inventarios para cada período se determinan trivialmente (en tiempo lineal) a partir de los valores de producción, remanufacturación y disposición final. Para esto se utilizan las ecuaciones de equilibrio para cada tipo de inventario (ver programa matemático en 3.1), ya que los valores iniciales de ambos es cero. Por lo tanto, en la descripción de las políticas no se explicará la forma de obtener los valores o niveles de inventario de cada período.

Con respecto a las formulaciones matemáticas presentadas en esta sección, se utilizará la notación lógica condicional. Según esta notación, la expresión $K\ [x > 0]$, significa que el valor de la misma es $K > 0$ si y sólo si x es estrictamente positiva. De otra manera la expresión toma el valor cero.

El resto de esta sección organizado de la siguiente forma:

En 3.1 se comienza con un repaso más profundo de las características del modelo y los antecedentes relacionados estrictamente con la forma del problema analizado: costos de las actividades dinámicos, compuestos por una constante positiva y una componente lineal positiva, y costos lineales en el caso de mantener en inventario artículos listos y usados.

En 3.2 se aborda el análisis del caso en el que sólo se considera la actividad de remanufacturación, para presentar algunos resultados que se usarán en las políticas propuestas. Parte de estos resultados se utilizarán también para el caso en el que se considera sólo la actividad de disposición final para los artículos retornados, y no se realiza remanufacturación en ningún período.

Luego en 3.3, 3.4 y 3.5 se da paso a la presentación de las políticas propuestas propiamente dichas. En 3.3 se muestran aquellas políticas basadas en la descomposición del problema en las actividades correspondientes de producir, remanufacturar y disponer finalmente. En 3.4 se presentarán las políticas que surgieron de un análisis de las características de soluciones óptimas para problemas pequeños, así como de la extensión de ciertos casos observados. Finalmente en el punto 3.5 se presentarán las políticas desarrolladas empleando la metaheurística *Tabu Search*.

1. Análisis del Problema, Modelos y Antecedentes

El programa matemático presentado en la Sección 2.1 de este informe, y que se repite a continuación, modela el problema de cuanto y cuando producir, remanufacturar y disponer finalmente, para satisfacer la demanda de cada uno de los períodos, con el objetivo de hacerlo al menor costo, para un sólo artículo. A este problema lo denominaremos ELSR: *Economic Lot-Sizing Problem with Remanufacturing* como en [35], y surge de una extensión de ELSP que es el nombre con el que se designa comúnmente al problema de control de inventario tradicional [1], o sea en el que no existen retornos para satisfacer la demanda. Los costos considerados para las actividades son de la forma de una constante más una componente lineal o variable, y los de mantener en inventario son lineales, al igual que en [28][35][41][45]. Los costos se denominan dinámicos, en el sentido que pueden variar de período a período. El modelo que se presenta a continuación es una adaptación de notación del presentado en [28] y [35]:

$$
(ELSR)\begin{cases}
\min \sum_{i=1}^{n} \left\{ K_i^p [p_i > 0] + c_i^p p_i + K_i^r [r_i > 0] + c_i^r r_i + K_i^d [d_i > 0] + c_i^d d_i + h_i^s y_i^s + h_i^r y_i^r \right\} \\
s.a. \\
(ES) \qquad y_{i-1}^s + p_i + r_i = D_i + y_i^s \qquad i = 1,2,\dots,n \\
(ER) \qquad y_{i-1}^r + R_i = r_i + d_i + y_i^r \qquad i = 1,2,\dots,n \\
(CI) \qquad y_0^s = y_0^r = 0 \\
\qquad p_i, r_i, d_i, y_i^s, y_i^r \in Z^+ \quad i = 1,2,\dots,n
\end{cases}
$$

Las cantidades de demanda y de retornos se suponen como valores enteros positivos o cero, y aunque se impone la restricción de que los niveles de inventario iniciales sean cero, no hay restricciones con respecto a los niveles del último período para ambos inventarios.

En un primer análisis del modelo, se puede observar que una de las dificultades para hallar la solución óptima del problema, se encuentra en la forma de los costos, debido a la constante o costo fijo de las actividades, de forma similar al caso de control de inventario tradicional [1]. La otra dificultad radica en la interrelación entre las actividades de producción, remanufacturación y disposición final, teniendo en cuenta la limitación en el número de retornos

Dado que el nivel inicial de artículos listos es cero, la demanda debe satisfacerse con la remanufacturación de los artículos usados y retornados o con la producción de nuevos artículos. Teniendo en cuenta esta relación entre la demanda y los retornos, se puede ver una instancia particular del ELSR como uno de los dos siguiente casos o situaciones de retornos:

- ***Retornos suficientes***: Para cada período la cantidad de retornos disponibles es suficiente para satisfacer la demanda de ese período. Esto sólo puede suceder si:

  $$R_{1t} \geq D_{1t}, \ \forall t = 1,2,\dots,n$$

  en done R_{ij} y D_{ij} son los retornos y demanda acumulados entre los períodos i, j con $1 \leq i \leq j \leq n$, respectivamente.

- ***Retornos insuficientes***: Existe algún período en el cual los retornos disponibles no son suficientes para satisfacer la demanda, o sea:

  $$R_{1t} < D_{1t}, \ \text{para algún } t = 1,2,\dots,n$$

Además de estos dos casos, claramente distintos, veremos que se puede considerar otra nueva situación que combina en cierta medida ambos casos, y que es presentada y analizada en nuestro trabajo. Esta nueva situación la denominaremos como situación de retornos útiles, y es aquella en donde los retornos disponibles en cada período pueden ser insuficientes o suficientes, pero no mayores que la demanda restante, o formalmente:

- ***Retornos útiles***: La cantidad de retornos disponibles en un período no es mayor que la cantidad restante de demanda, o sea la demanda acumulada desde este período hasta el último. Formalmente, esto es posible sólo si se verifica que:

  $R_{tn} \leq D_{tn}, \ \forall t = 1,2,...,n$

La situación de retornos útiles incluye aquellas situaciones de retornos suficientes en las cuales para cada período la cantidad total de retornos disponibles es a lo sumo igual a la cantidad de demanda restante. Lo mismo sucede con las situaciones de retornos insuficientes siempre y cuando no haya retornos que no se puedan utilizar para satisfacer la demanda. Esto significa que un período no haya retornos mayores a la demanda acumulada restante. Un caso particular de retornos útiles es aquel en donde el retorno de cada período es menor que la demanda, o sea $R_t < D_t \ \forall t = 1,2,...,n$, que claramente es un caso de retornos insuficientes.

Dentro de una situación de retornos útiles, lo que intentaremos es determinar la mejor Remanufacturación Útil posible, o sea de menor costo. Definiremos como Remanufacturación Útil, a aquella remanufacturación en que las cantidades remanufacturadas son siempre menores o iguales a la demanda restante, o sea $r_{tn} \leq D_{tn}, \ \forall t = 1,2,...,n$. Cabe la aclaración que una situación de retornos útil es una condición necesaria pero no suficiente para que exista una remanufacturación útil. En la Sección 3.2 de este documento, veremos que se puede obtener de forma eficiente una política de remanufacturación útil, partiendo, claro está de una situación de retornos útiles, que minimiza los costos asociados a los retornos.

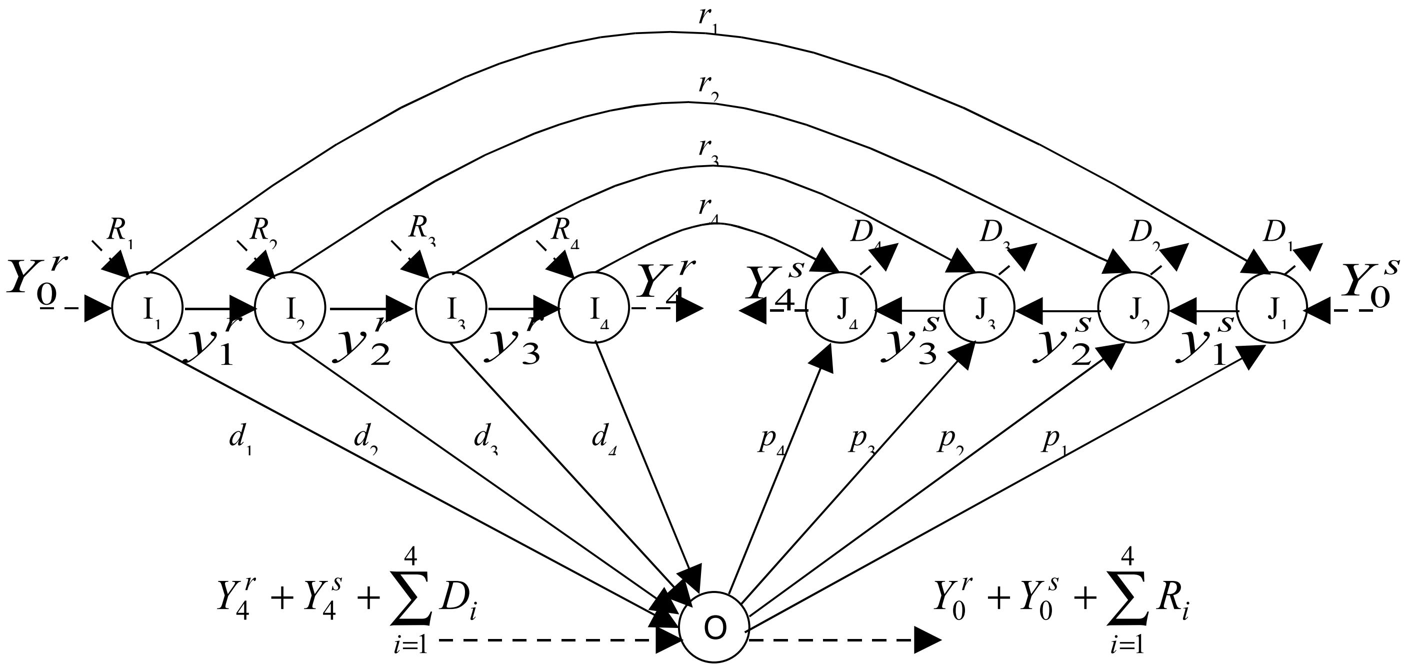
Con respecto a los antecedentes, Richter *et al.* en [27] y [28], es el primero, según nuestro conocimiento, que analiza la actividad de remanufacturación de forma independiente, en [27] para el caso de sólo costos fijos, y en [28] agregando el costo variable. Para ello establece dos marcos de trabajo diferentes: uno en el que sólo se consideran los valores de los retornos, y los costos de remanufacturación y de mantener en inventario artículos usados para determinar los períodos y cantidades de remanufacturación, sin tener en cuenta los valores de la demanda. El otro marco de análisis es aquel donde si se tiene en cuenta la demanda y los costos de mantener en inventario artículos listos, y los retornos son suficientes. Para el primer caso, denominado caso "Puro", se comprueba la validez del algoritmo de W-W, con las modificaciones necesarias para trabajar sobre los retornos en vez de sobre la demanda. Una de las características que se menciona del modelo propuesto, es que no se exige que la cantidad total de artículos remanufacturados sea igual a la cantidad total de retornos, lo que se denomina como recuperación parcial de los retornos. Para el segundo caso, de retornos suficientes se demuestra que si el costo de mantener en inventario artículos usados es menor o igual que el costo de mantener en inventario artículos listos, ("usados a bajo costo", [27]), entonces se puede construir un modelo equivalente, que resulta en un caso de control de inventario tradicional, en el que hay restricciones en el límite superior del nivel de inventario en cada período, al cual denominaremos UB-ELSP por *Upper Bound* ELSP. Para este modelo, está demostrado que se cumple la propiedad de inventario cero [27], y por lo tanto es válido el algoritmo de W-W, con la modificación pertinente para evaluar sólo aquellas soluciones que verifiquen la restricción de nivel máximo de inventario en cada período. Este resultado es válido para el caso de estructuras de costos como el empleado en este trabajo, o sea dinámicos, formados por una constante y una componente lineal, como en [28].

En [27] y [28] también se analiza el caso de alternar las actividades producción y remanufacturación para satisfacer la demanda, pero para el caso particular en que los retornos del primer período son mayores o iguales a la demanda de todos los períodos o sea $R_1 \geq D_{1n}$. Para este caso particular se demuestra en [27] que la solución óptima se puede hallar mediante el algoritmo de W-W, ya que existe una solución óptima que satisface la propiedad de inventario cero. En [28] se demuestra que sigue siendo válido este resultado en el caso de costos con componente lineal, donde además se verifica que en una solución óptima no se produce y remanufactura a la vez en un período. En [28] además se analiza el caso particular en que los costos son estáticos, o sea los mismos valores para todos los períodos. En el caso de costos estáticos, se demuestra que en una solución óptima la producción de artículos nuevos nunca ocurre antes de la remanufacturación de artículos usados, y se brinda una fórmula para determinar el período "pivote" donde ocurre este cambio de actividades. Al final de [28] se analizan las condiciones para que exista la disposición final, en el caso de retornos suficientes en el primer período, y para el caso de costos estáticos. Una de las observaciones establecidas en el caso de retornos suficientes en el primer período, es que la disposición final debe ocurrir los más tempranamente posible y siempre que sea económicamente beneficioso, lo cual esta íntimamente relacionado con el costo de mantener en inventario los artículos usados, y por lo cual se observa que cuanto más grande sea n, el horizonte de planeación, más beneficioso es disponer finalmente versus mantener en inventario artículos usados.

Obviamente la situación en que los retornos sean suficientes, puede no ocurrir por diversos motivos, como por ejemplo no siempre se retornan todos los artículos antes demandados, o simplemente la demanda puede aumentar de un rango de períodos a otro, y la cantidad de retornos puede ser insuficiente, o no siempre los artículos retornados satisfacen las condiciones mínimas de calidad para ser remanufacturados.
A pesar del hecho de que la cantidad de retornos sea insuficiente para satisfacer la demanda de un cierto rango de períodos, puede seguir siendo atractivo desde el punto de vista económico, y en muchas veces obligatorio, recuperar los retornos para satisfacer una porción de la demanda [4][5][13][17]. Particularmente, analizaremos la situación en que los retornos de cada período son inferiores a la demanda, o sea $R_i \leq D_i$, $\forall i = 1,2,...,n$ en la cual se puede asegurar que la totalidad de los retornos son útiles, en el sentido que si la recuperación es total, esto es $\sum_{i=1}^{n} r_i = \sum_{i=1}^{n} R_i$, sólo se debe producir por una cantidad igual a la diferencia entre la demanda y los retornos, o lo que es lo mismo: $\sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} D_i - \sum_{i=1}^{n} R_i$.

Un análisis genérico, o al menos independiente con respecto a la relación entre la cantidad de retornos y los valores de demanda, es llevado a cabo por Golany, Yang y Yu en [12]. En este artículo, se analiza el problema de control de inventario con remanufacturación, con el fin de encontrar el Plan de Producción y Remanufacturación de costo mínimo, o *PRP* de sus siglas en inglés, para el caso en que las funciones de costos son cóncavas. Se demuestra que en este caso, el problema se encuentra dentro del conjunto de los problemas NP-difíciles. Al final de [12], se brinda un algoritmo para el caso de funciones de costos lineales, de orden polinomial, basándose en una transformación al problema del transporte, y extendiendo un algoritmo conocido para este problema [Sección 4 de 9]. Uno de los aportes más interesantes de [12], a nuestro entender, y más fuertemente presente en [43], es la modelización del problema mediante redes de flujo. Esta forma de modelar el problema de control de inventario fue introducida y analizada por primera vez, según nuestro conocimiento, por Zangwill en [44] y [45], para el caso tradicional, o sea sin retornos. Los trabajos de Zangwill en esta materia, permiten demostrar que el algoritmo de W-W es óptimo para el caso de funciones de costos cóncavos [45], debido al análisis de la forma de los flujos óptimos en una red de flujos de un sólo nodo fuente y varios nodos destinos [44].

A continuación se presenta un ejemplo de la modelización del problema ELSR como una red de flujos, para n = 4, presentada por Golany, Yang y Yu en [43], con la adaptación de notación necesaria:



En las siguientes secciones de este informe, se volverá a usar esta forma de modelización, para demostrar algunos resultados obtenidos para el problema de considerar sólo la actividad de remanufacturación.

Si bien estaba demostrado que el problema es NP-difícil para el caso de funciones de cotos cóncavas, quedaba aún abierto determinar la complejidad para el caso particular en que las funciones de costo sean de la forma de una constante, más una componente lineal, que es la forma de los costos que se adopta en nuestro trabajo, ya que el resultado de [12] es para las funciones cóncavas en general. En este sentido, van den Heuvel, en [35], demuestra que también en el caso particular en que los costos de las actividades de producción y remanufacturación son de la forma de una constante, más una componente lineal, el problema es NP-difícil. Para la demostración de esto se supone que los costos de producir y mantener en inventario los artículos listos, son mayores o iguales que los de remanufacturar y mantener en inventario los artículos retornados, respectivamente, a la vez que se supone que la cantidad total de retornos es menor o igual que la demanda total [Sección 3 de 32],.

En [43] Yang, Golany y Yu presentan un algoritmo de Programación Dinámica para hallar la solución óptima, pero de orden pseudo-polinomial. Utilizando en cambio la modelización mediante redes de flujos, se puede determinar la forma que debe tener una solución óptima, basándose en los resultados de Zangwill sobre redes de flujo de [44]. Lamentablemente, la teoría indica que para una red de flujos de (n + 1) nodos fuentes como en el caso del ELSR, en una solución óptima cada nodo destino puede tener (n + 1) flujos positivos. Utilizando este resultado y la forma propia de la red de flujos del ELSR se establecen una serie de patrones de flujos que debe tener una solución óptima, o flujo óptimo de la red, con los cuales se desarrolla un método heurístico de resolución, que básicamente consta en descomponer el problema en subproblemas de un tamaño razonable, y resolver de forma óptima cada uno de los subproblemas, para obtener una solución del problema completo.

Con respecto a nuestro análisis del ELSR, los resultados de [35] y [43], a priori dejan pocas esperanzas de que la solución óptima del problema tenga una forma simple, como la de las políticas de inventario aquí propuestas. Sin embargo se verá que para variadas situaciones de retornos, demanda, y costos de cada una de las actividades y de mantener en inventario, las políticas muestran un buen comportamiento con respecto a los costos totales involucrados, manteniendo una forma o mejor dicho una regla fácil de aplicar para controlar el inventario. Esto último es importante a la hora de llevar a la práctica una política [16], y además pueden ofrecer mayor estabilidad con respecto a la variación de los costos involucrados al tratarse de procedimientos heurísticos.

En la siguiente sección se presentan los resultados obtenidos del análisis del ELSR en donde sólo se considera la actividad de remanufacturación. Este problema ya fue abordado por Richter *et al* en [27] y [28] para el caso puro y el caso con retornos suficientes. En nuestro caso, utilizaremos la modelización mediante redes de flujos [44] para el caso puro, y se abordará el análisis del caso de retornos útiles, que cubre situaciones de retornos suficientes e insuficientes.

2. ELSR con Solo Remanufacturación

En esta sección se analizará el problema de control de inventario con remanufacturación, al que denominamos ELSR, pero en el que sólo se considera la actividad de remanufacturación. Analizaremos dos formas del problema: uno que denominaremos ELSR Puro: P-ELSR como en [27], en el entendido que sólo se consideran los retornos, y no la demanda, y ELSR Útil: U-ELSR, en el que si se tiene en cuenta la demanda de cada período, para fijar las cantidades y períodos de remanufacturación. Para ambos casos se considerará la recuperación total de los artículos retornados, teniendo en cuenta los beneficios ecológicos asociados a una mayor recuperación de los retornos.

Con respecto al ELSR Puro, Richter *et al* en [27] analizó el caso con costos fijos, demostrando la validez de la propiedad de inventario cero, y por tanto la validez del algoritmo de Wagner y Whitin [41], con las modificaciones correspondientes para ser aplicado sobre los retornos. Estos mismos resultados se pueden trasladar al caso con costos variables como fue analizado también por Richter *et al* en [28]. En nuestro caso se analizará el problema desde un enfoque más general, en donde las funciones de costos pueden ser cualquier función cóncava y utilizando la modelización mediante redes de flujos de Zangwill [44] se obtendrá la validez de la propiedad de inventario cero y un procedimiento para obtener la solución óptima basado en la definición de una transformación que permite transformar un problema ELSR en un ELSP. Una de las diferencias de nuestro enfoque, comparado con el de Richter *et al* en [27], es que en nuestro caso se considera la remanufacturación de todos los retornos, o sea que el nivel final de artículos usados debe ser cero.

Para el análisis del ELSR Útil, es necesario tener en cuenta la relación entre las cantidades de demanda y de retornos del problema. Inicialmente se pueden considerar dos situaciones disjuntas: Una es aquella en la que para cada período los retornos disponibles son suficientes para satisfacer la demanda, esto es posible sólo si $R_{1t} \geq D_{1t}$, $\forall t = 1,2,...,n$, en donde $R(D)_{ij}$ es la cantidad acumulada de retornos (demanda) entre los períodos $1 \leq i \leq j \leq n$. Este caso fue analizado por Richter *et al* en [27] y [28], para costos fijos y variables respectivamente. En [27] se demostró que cuando el costo de mantener en inventario artículos usados es a lo sumo igual al de mantener en inventario artículos listos, lo que se denominó en [27] como: "artículos usados a bajo costo", se puede transformar al ELSR en un ELSP con límites superiores en el nivel de inventario en cada período, al que denominaremos UB-ELSP por *Upper Bound*. Para el UB-ELSP sigue siendo válida la propiedad de inventario cero, como se menciona en [27] y por lo tanto se puede utilizar el algoritmo de Wagner y Whitin [41] para obtener la solución óptima, con la modificación correspondiente para satisfacer la restricción en el límite de nivel de inventario de cada período. Este último resultado también se satisface para el caso de costos variables, como fue establecido en [28]. A esta extensión del algoritmo para el caso analizado por Wagner y Whitin, lo denominaron *Reverse Wagner - Whitin*.

El otro caso posible del U-ELSR es cuando los retornos son insuficientes para satisfacer la demanda. Esto quiere decir que existe al menos un período en que la cantidad de retornos disponibles es menor a la demanda, o sea: $R_{1t} < D_{1t}$, $\forall t = 1,2,...,n$. En este trabajo analizaremos una combinación de ambas situaciones, a la cual denominamos Retornos Útiles, en donde la cantidad de retornos disponibles en cada período es menor o igual a la demanda restante. Como quedo establecido en la sección 3.1, para que esto suceda tiene que ocurrir que $R_{tn} \leq D_{tn}$, $\forall t = 1,2,...,n$. Dada esta situación se exigirá que la remanufacturación realizada sea útil, en el sentido que la cantidad remanufacturada en cada período sea menor o igual a la demanda restante, lo que llamamos Remanufacturación Útil. Para este caso se definirá una condición de utilidad que debe satisfacer cualquier solución del U-ELSR, y un método para hallar la solución óptima basado en la transformación del U-ELSR en un UB-ELSP.

La motivación para el análisis del caso de retornos insuficientes surge porque parece realista suponer que las cantidades retornadas son menores que la demanda, y es en este contexto donde por distintos motivos que mencionamos en la Sección 1.1 es necesario realizar la remanufacturación de los artículos usados y retornados. Entre estas razones encontramos el compromiso ecológico de las organizaciones industriales y obligaciones legales impuestas por los gobiernos para la recuperación de artículos usados, así como beneficios económicos, ya que se supone que los costos asociados a la remanufacturación son menores que los asociados a la producción de nuevos artículos [4][13][14]. Considerar a su vez la remanufacturación como una actividad independiente, tiene un sentido como estrategia para resolver el problema completo de producción, remanufacturación y disposición final, ya que este problema es NP-Difícil [12][35][43].

Una de las características de nuestro análisis, es que en todos los casos se exigirá que la cantidad total remanufacturada sea igual a la cantidad total de retornos, o sea $r_1 + ... + r_n = R_1 + ... + R_n$, y por lo tanto no se considerará la actividad de disposición final, o sea la recuperación de artículos usados es total. La recuperación total puede ser vista como una buena característica de la solución desde la perspectiva ecológica, además de que puede ser muchas veces beneficiosa económicamente, ya que generalmente se asume que los costos asociados a la recuperación son menores que los de producción.

El resto de la sección esta organizado de la siguiente manera: Primero se presentará el programa matemático para el P-ELSR, y su modelización mediante redes de flujo. Se demostrará como se puede transformar este problema en un problema de control de inventario tradicional de tiempo discreto, más conocido como ELSP [1] y por lo tanto la solución óptima se puede obtener mediante la aplicación del algoritmo de Wagner y Whitin [41] para el caso en que los costos sean funciones cóncavas, utilizando para esto los resultados sobre redes de flujos de Zangwill en [4l].

Luego se presentará el problema de remanufacturación que tiene en cuenta la demanda de cada período, al que denominamos U-ELSR, y la modelización del mismo mediante redes de flujo [45]. Para este caso se presentará un procedimiento, basado en una transformación idéntica a la utilizada para el P-ELSR, con la cual se puede obtener un problema UB-ELSP a partir de un U-ELSR y viceversa, y empleando los resultados de Richter *et al* en [27], para determinar la mejor solución posible en cuanto a la minimización de los costos.

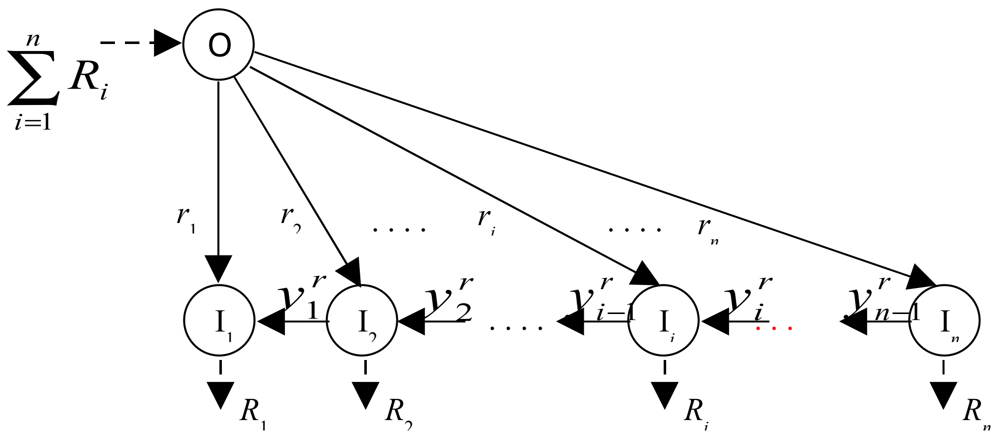
P-ELSR: Remanufacturación Pura

El caso puro es aquel en el que sólo se tienen en cuenta las cantidades retornadas, y no las demandadas, para fijar las cantidades y los períodos de remanufacturación. Fue introducido por Richter en [27], y analizado para el caso en que no hay restricciones sobre las cantidades a remanufacturar. En [27] se demuestra la validez de la propiedad de inventario cero, y por lo tanto la del algoritmo de Wagner-Whitin (W-W) [41]. En nuestro caso impondremos la restricción de que deben remanufacturarse todos los retornos, o sea que el nivel final de inventario de artículos usados debe ser cero. Veremos que en esta situación sigue siendo válido el algoritmo de W-W, incluso para cuando los costos involucrados son funciones cóncavas, empleando para esto los resultados obtenidos por Zangwill para redes de flujo en [44].

El modelo matemático para el P-ELSR con la estructura de costos que empleamos en nuestro análisis, y luego de una adaptación y extensión del presentado en [27] para el caso en que se remanufacturan todos los retornos, es el siguiente:

$$
(P-ELSR)\begin{cases}
\min \sum_{i=1}^{n} \left\{ K_i^r [r_i > 0] + c_i^r r_i + h_i^r y_i^r \right\} \\
s.a. \\
(ER) \quad y_{i-1}^r + R_i = r_i + y_i^r \qquad i = 1,2,\dots,n \\
(CI) \quad y_0^r = y_n^r = 0 \\
\\
\quad r_i, y_i^r \in Z^+ \quad i = 1,2,\dots,n
\end{cases}
$$

La restricción (*ER*) expresa la ecuación de equilibrio para el inventario de artículos usados. Como queda expresado en (*CI*), se supone que el nivel inicial de inventario de artículos usados es cero y se exige que el final también sea cero. La restricción de que el nivel de inventario final sea cero obliga a que la cantidad total remanufacturada sea igual a la cantidad de retornos totales. La formulación matemática del P-ELSR, admite una formulación mediante una red de flujos de un sólo nodo fuente y *n* destinos, como en [44], que es la siguiente:



A primera vista el sentido del flujo de las cantidades de inventario de artículos usados no es intuitivo, aunque si se analiza en detalle se puede observar que es el correcto. Por ejemplo si consideramos sólo dos períodos, tendríamos una red con dos nodos I_i, que serían I_1 e I_2, además de los elementos relacionados correspondientes. En este caso, si se considera la solución de remanufacturar todo en el segundo período, tendríamos que:

$$r_1 = 0, \quad y_1^r = R_1$$
$$r_2 = R_1 + R_2, \quad y_2^r = 0$$

Observar que es necesario mantener en inventario de artículos usados la cantidad retornada en el primer período. Por lo tanto la cantidad necesaria para satisfacer el requerimiento del nodo I_1, suponiendo que $R_1 > 0$ para que tenga sentido, se debe satisfacer con lo remanufacturado en el segundo período, ya que la remanufacturación del primero es cero. Pero esta cantidad es precisamente el nivel de inventario de artículos usados del primer período, y por eso el sentido del flujo relacionado es desde el segundo nodo hacia el primero.

Si bien pueden existir otras formulaciones más intuitivas con respecto al sentido de los flujos, esta formulación permite relacionar el problema de control de inventario con remanufacturación al tradicional, como veremos más adelante. Además al ser una formulación con un sólo nodo fuente, se pueden utilizar más fácilmente los resultados de Zangwill [44][45] para redes de flujo.

De [44] se sabe que al menos un flujo óptimo de la red tiene la forma de un flujo extremo. Como la red tiene un único nodo fuente, se puede concluir que en un flujo extremo cada nodo que no sea fuente, tiene a lo sumo una entrada positiva [44], o sea se cumple que:

- $r_i \cdot y_i^r = 0 \qquad \forall i = 1,2,\ldots,n$

En nuestro caso, esto se puede interpretar de la siguiente forma: si se decide remanufacturar en un período, se debe hacer por una cantidad igual a todos los retornos disponibles en ese período, o no remanufacturar. Utilizando el resultado de [44], se puede concluir que esto es válido para el caso en que los costos involucrados sean funciones cóncavas, en particular para el caso de funciones iguales a una constante más una componente lineal dinámicos, como en nuestro análisis.

Por lo tanto, para encontrar la solución óptima del P-ELSR, basta con evaluar todos los flujos extremos, y quedarnos con el de costo mínimo. Para hacer esto introduciremos una transformación que permite transformar el P-ELSR, en uno de control de inventario de tiempo discreto tradicional, denominado comúnmente ELSP (*Economic Lot-Sizing Problem*), y para el cual Wagner y Whitin desarrollaron en [41] un algoritmo eficiente, de orden polinomial. Esto demostraría además que el esfuerzo necesario para resolver el P-ELSR es la misma que para el caso tradicional.

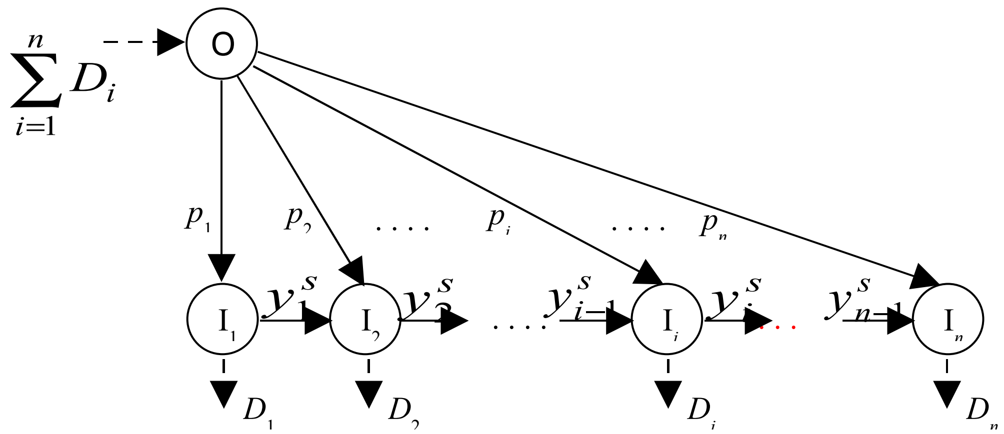
Transformación P-ELSR en ELSP

El ELSP hace referencia al problema tradicional de control de inventario de tiempo discreto, en donde la demanda se supone conocida y dinámica. El programa matemático para el ELSP con la estructura de costos como la analizada en nuestro análisis y con una adaptación de notación, es el siguiente [1][41]:

$$(ELSP)\begin{cases} \min \sum_{i=1}^{n} \left\{ K_i^p [p_i > 0] + c_i^p p_i + h_i^s y_i^s \right\} \\ s.a. \\ (ES) \qquad y_{i-1}^s + p_i = D_i + y_i^s \qquad\qquad i = 1,2,\ldots,n \\ (CI) \qquad y_0^s = 0 \\ \\ \qquad\qquad p_i, y_i^s \in Z^+ \quad i = 1,2,\ldots,n \end{cases}$$

Observar que en el caso del ELSP no es necesario exigir explícitamente que la cantidad total producida sea igual a la cantidad total de la demanda. Esto queda impuesto implícitamente por las restricciones del modelo. Lo mismo sucede con el nivel de inventario final, que en toda solución óptima deberá ser cero, o sea $y_n^s = 0$.

El ELSP admite una formulación mediante una red de flujos de un sólo nodo fuente y n destinos, como fue dad en [45], que es la siguiente:



De los resultados de Zangwill en [44], se sabe que al ser una red de flujos de un sólo nodo fuente, al menos un flujo óptimo debe ser de la forma de un flujo extremo, y al ser una red de un sólo nodo fuente, en cada flujo extremo se cumple que:

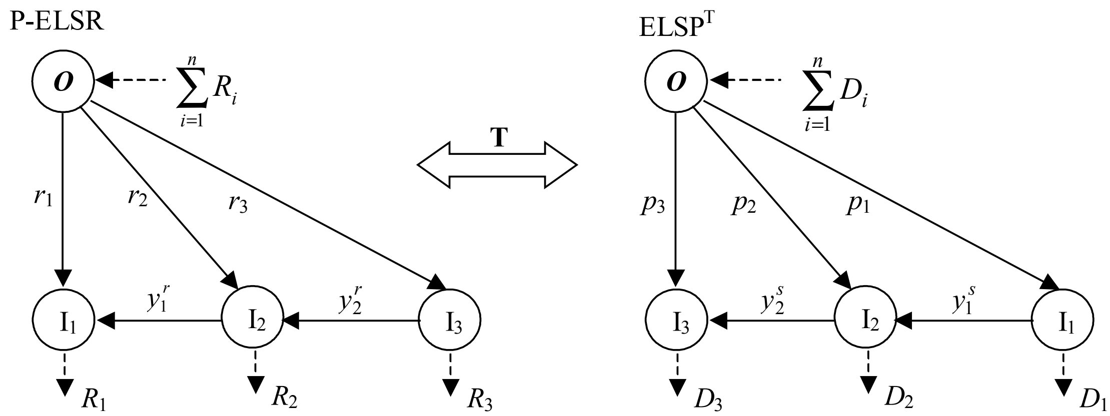
- $p_i \cdot y_{i-1}^s = 0 \qquad \forall i = 1,2,\ldots,n$

Esto significa que en un período se produce si y sólo si la cantidad de inventario de artículos listos es cero, o lo que es lo mismo, si en un período el nivel de inventario de artículos listos es positivo, no se debe producir. Esta es la famosa Propiedad de Inventario Cero establecida en [41] y luego analizada por Richter *et al* en [27] para el caso con remanufacturación.
Nuestro interés en el ELSP y su formulación como red de flujos radica en que se puede transformar el P-ELSR en un ELSP y viceversa. De esta manera se podría emplear el algoritmo de W-W para obtener una solución óptima de cualquiera de los dos problemas. El algoritmo de Wagner y Whitin (W-W) presentado en [41] para el ELSP con costos estáticos está basado en la Propiedad de Inventario Cero. Lo que hace el algoritmo es evaluar todas las soluciones factibles que cumplen la propiedad, reduciendo de esta manera la cantidad total de soluciones a evaluar. Se puede ver trivialmente que la cantidad de soluciones que cumplen la propiedad de inventario cero, para un ELSP de n períodos, es n^2. El algoritmo presentado por Wagner y Whitin, es de Programación Dinámica (DP), que construye en cada paso k, con $k = 1,2,\ldots,n$, una solución óptima para los primeros o últimos k períodos, dependiendo de si la DP es del estilo *forward* o *backward*, respectivamente.

Al transformado del P-ELSR lo denominaremos ELSP^T. La transformación propuesta consiste en convertir el retorno y los costos de remanufacturar y de mantener en inventario los artículos usados de cada período $i = 1,2,\ldots,n$ del P-ELSR, en la demanda y los costos de producir y de mantener en inventario de artículos listos del período $k = (n - i + 1)$ con $k = 1,2,\ldots,n$ del ELSA. Esto se puede interpretar como una inversión en el orden de los períodos, manteniendo los valores y cambiando el significado de cada uno de los parámetros del problema, de retornados y remanufacturados, al de demanda y producido respectivamente. En términos formales, la transformación se define de la siguiente forma:

- $D_i = R_{n-i+1} \quad \forall i = 1,2,...,n$
- $p_i = r_{n-i+1} \quad \forall i = 1,2,...,n$
- $y_i^s = y_{n-i}^r \quad \forall i = 0,1,2,...,n$
- $K_i^p = K_{n-i+1}^r \quad \forall i = 1,2,...,n$
- $c_i^p = c_{n-i+1}^r \quad \forall i = 1,2,...,n$
- $h_i^s = h_{n-i}^r \quad \forall i = 1,2,...,n$

Notar que la misma transformación también se cumple en sentido inverso, o sea, a partir de una instancia del ELSP, se puede obtener una instancia del ELSR. A continuación mostramos un ejemplo de transformación para $n = 3$ mediante la modelización de redes de flujo:



Si se demuestra que la función objetivo de ambos problemas es la misma, y que una solución factible de uno de ellos es factible en el otro, entonces ambos son equivalentes, y por lo tanto una solución óptima de un modelo será solución óptima del otro, y viceversa.

Proposición 3.2.2.1: El modelo P-ELSR y su transformado $ELSP^T$ son equivalentes, en el sentido que una solución óptima de uno es también solución óptima del otro.

Demostración: Para esto probaremos primero que partiendo de la función objetivo de uno de los modelos, y aplicando la transformación antes definida, llegamos a la función objetivo del otro modelo:

$$\sum_{i=1}^{n} \left\{ K_i^p s(p_i) + c_i^p p_i + h_i^s y_i^s \right\} = \sum_{i=1}^{n} \left\{ K_{n-i+1}^r s(r_{n-i+1}) + c_{n-i+1}^r r_{n-i+1} + h_{n-i}^r y_{n-i}^r \right\}$$

Realizando el cambio de variable $k = (n - i + 1)$ y sustituyendo en el segundo término de la ecuación, obtenemos:

$$\sum_{i=1}^{n}\left\{K_i^p s(p_i)+c_i^p p_i + h_i^s y_i^s\right\}=\sum_{k=1}^{n}\left\{K_k^r s(r_k)+c_k^r r_k + h_k^r y_k^r\right\}$$

El segundo término de la igualdad corresponde a la función objetivo del P-ELSR. Ahora debemos probar que una solución factible de uno de los problemas es factible en el otro. Para esto demostraremos que aplicando la transformación antes definida podemos obtener las restricciones de uno de los problemas a partir del otro, y viceversa.

$$(CI\,/\,ELSR)\quad y_0^s = y_n^s = 0$$

$$(ER\,/\,ELSR)\quad y_{i-1}^r + R_i = r_i + y_i^r \quad i=1,2,...,n$$

Aplicando la transformación antes definida y realizando el cambio de variable $k = (n - i + 1)$ se obtiene de forma equivalente para restricciones que:

$$(CI\,/\,ELSR)^{\mathrm{T}}\quad y_k^s + D_k = p_k + y_{k-1}^s \quad k=1,2,...,n$$

$$(ER\,/\,ELSR)^{\mathrm{T}}\quad y_n^r = y_0^r = 0$$

Que son precisamente las restricciones (*ES / ELSP*) y (*CI / ELSP*).

Como la función objetivo de ambos modelos es la misma, y las soluciones factibles también, los modelos son equivalentes, en el sentido que una solución óptima de uno es también solución óptima del otro y viceversa.

■

Dado este resultado, podemos obtener la solución óptima del P-ELSR, resolviendo el $\mathrm{ELSP}^{\mathrm{T}}$ correspondiente mediante el algoritmo de W-W, y luego aplicando la transformación para obtener la solución óptima del P-ELSR.

Como un comentario final, se puede ver que en ningún momento se utilizó ninguna hipótesis sobre la relación entre la cantidad de demanda y de retornos para demostrar que el P-ELSR y su correspondiente $\mathrm{ELSP}^{\mathrm{T}}$ eran equivalentes. Por lo tanto la proposición de equivalencia y de aquí la validez del algoritmo de W-W se cumple para cualquier valor de demanda y de retornos. Otra observación importante, es que se pueden aplicar para resolver el $\mathrm{ELSP}^{\mathrm{T}}$ otros algoritmos más eficientes que el de W-W como por ejemplo el desarrollado por Aggarwal y Park en [1], o el de Wagelmans *et al* en [40], o cualquier otro que resuelva el problema de ELSP como en [1][40][41]. De esta manera podemos contar para el P-ELSR con algoritmos tan eficientes como los de ELSP.

U-ELSR: Remanufacturación Útil

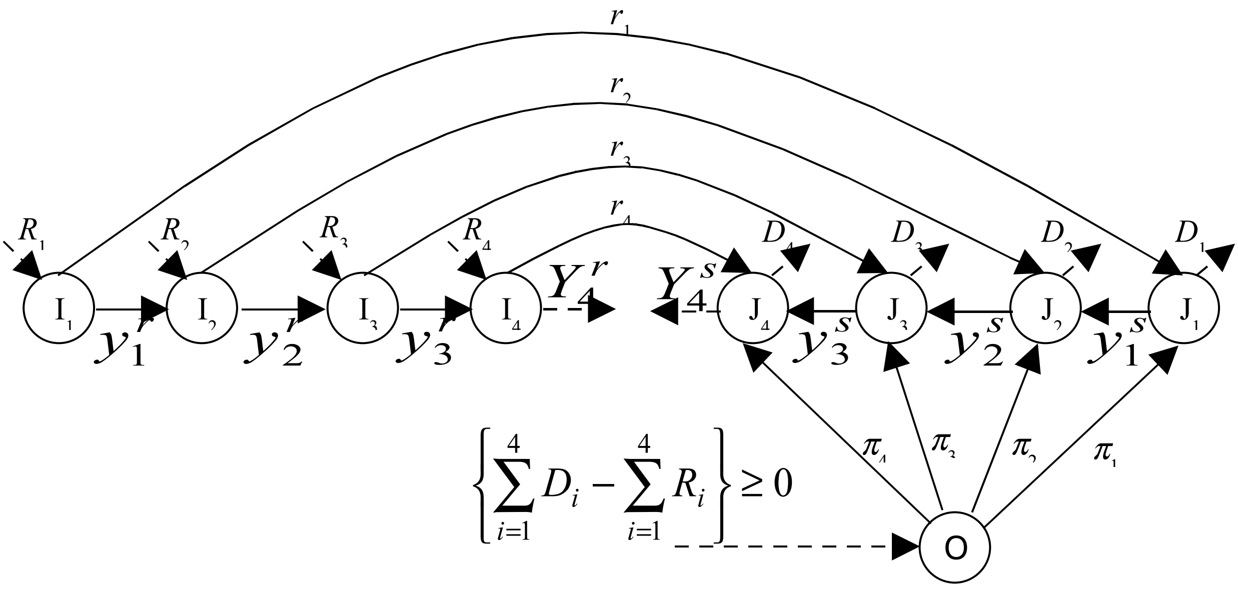
El caso útil es aquel en el que sí se tiene en cuenta las cantidades demandadas para fijar las cantidades y períodos de remanufacturación, y en donde se remanufactura la totalidad de los retornos. Lo que se pretende en este caso es que la cantidad remanufacturada en un período no sea mayor que la demanda restante, para no almacenar inútilmente artículos listos, teniendo en cuenta que el objetivo principal de la remanufacturación, en el contexto del control de inventario, es la recuperación de artículos usados y retornados, para poder satisfacer la demanda. Por lo tanto para que la remanufacturación realizada sea útil, se exigirá que la relación entre los retornos y la demanda sea una situación de Retornos

Útiles, como se definió en la Sección 3.1. La validez de lo anterior se puede ver trivialmente, ya que si existe un período t = 1,2,...,n en donde $R_{tn} > D_{tn}$, entonces la diferencia entre estas dos cantidades es positiva, y por lo tanto si se remanufacturan todos los retornos, el nivel de inventario de artículos listos final será positivo: $y_n^s > 0$, remanufacturando más de lo necesario.

La formulación matemática del U-ELSR es similar a la del P-ELSR, excepto porque se agrega al modelo la variable para representar el inventario de artículos listos, y la que no permite faltantes en la demanda, ya que la cantidad de retornos puede ser insuficiente para satisfacer la demanda. Estas dos variables no se ven afectadas por ningún costo, y son sólo con el fin de asegurar que las cantidades remanufacturadas sean útiles. La formulación del problema es la siguiente:

$$(U-ELSR)\begin{cases} \min \sum_{i=1}^{n} \left\{ K_i^r [r_i > 0] + c_i^r r_i + h_i^r y_i^r \right\} \\ s.a. \\ (ER) \qquad y_{i-1}^r + R_i = r_i + y_i^r \qquad i = 1,2,...,n \\ (ES) \qquad y_{i-1}^s + r_i + \pi_i = D_i + y_i^s \qquad i = 1,2,...,n \\ (CI) \qquad y_0^r = y_n^r = y_0^s = y_n^s = 0 \\ \\ \qquad r_i, \pi_i, y_i^r, y_i^s \in Z^+ \quad i = 1,2,...,n \end{cases}$$

La formulación mediante redes de flujo del U-ELSR es similar a la de [43] para el ELSR, con la diferencia que en el U-ELSR no se considera la actividad de disposición final, ya que se exige que se remanufacturen todos los retornos, o lo que es lo mismo $y_n^r = 0$. A manera de ejemplo, la red de flujos para el problema con n = 4 es la siguiente:



Con los resultados sobre redes de flujos de [44], no podemos asegurar que exista un algoritmo eficiente (polinomial) para obtener la solución óptima del modelo, o lo que es lo mismo, determinar el flujo extremo óptimo en forma eficiente.

Sin embargo, utilizando los resultados obtenidos por Richter *et al* en [27] y [28], para el ELSP con límite superior en el nivel de inventario, que denominamos UB-ELSP, veremos que se puede obtener la solución óptima del U-ELSR, mediante la transformación presentada anteriormente en la Sección 3.2.2, que transforma un problema U-ELSR en un ELSP, y viceversa.

El resto de la sección esta organizado de la siguiente forma: En primera instancia mostraremos un procedimiento por el cual obtener una solución del U-ELSR. Luego demostraremos que la solución encontrada por el procedimiento es óptima, empleando la transformación definida anteriormente, y utilizando los resultados de Richter *et al* descritos en [27] para el UB-ELSP.

Procedimiento para resolver el U-ELSR

El procedimiento consiste en resolver el U-ELSR como si fuera un P-ELSR, y controlando que cada una de las soluciones construidas hasta el momento sean factibles para el U-ELSR. De esta forma, al terminar el procedimiento, se habrá encontrado una solución del U-ELSR con la forma de solución del P-ELSR y que es la de costo mínimo entre todas las que satisfacen este criterio.

En la siguiente proposición se establece la condición de utilidad que deben cumplir las soluciones factibles del U-ELSR, que permitirá descartar las soluciones del P-ELSR que no sean U-ELSR factibles. Denominaremos P-ELSR^U al P-ELSR mediante el cual obtendremos una solución del U-ELSR correspondiente, que no es más que el U-ELSR sin las variables (π, y^s).

Proposición 3.2.4.1: Una solución $(r, y^r) = (r_1, r_2, ..., r_n, y_1^r, y_2^r, ..., y_n^r)$ del P-ELSR^U es una solución factible del U-ELSR correspondiente si y sólo si se satisface la siguiente **Condición de Utilidad**:

- $\sum_{k=i}^{n} r_k \leq \sum_{k=i}^{n} D_k \qquad \forall i = 1,2,...,n$

Demostración **(⇒)**: Para demostrar el directo, partiremos de una solución (r, y^r) del P-ELSR^U que satisface la condición de utilidad y demostraremos que (r, y^r, π, y^s) es factible en el U-ELSR. Los valores de (π, y^s) se obtienen de la siguiente forma:

$$\begin{cases} y_0^s = 0 \\ r_i + y_{i-1}^s > D_i \quad \Rightarrow \quad \pi_i = 0 \quad y_i^s = r_i + y_{i-1}^s - D_i \quad i = 1,2,...,n \\ r_i + y_{i-1}^s \leq D_i \quad \Rightarrow \quad \pi_i = D_i - r_i - y_{i-1}^s \quad y_i^s = 0 \quad i = 1,2,...,n \end{cases}$$

Para que (r, y^r, π, y^s) sea U-ELSR factible, se debe demostrar que se satisfacen cada una de las restricciones del U-ELSR que no están presentes en el P-ELSR, o sea:

(i) $\quad y_{i-1}^s + r_i + \pi_i = D_i + y_i^s \qquad i = 1,2,...,n$

(ii) $\quad y_0^s = y_n^s = 0$

(iii) $\quad \pi_i, y_i^s \in E^+ \quad i = 1,2,...,n$

(i) $\quad y_{i-1}^s + r_i + \pi_i = D_i + y_i^s \qquad i = 1,2,...,n$

Para esto usaremos los dos casos posibles de la definición de los valores de π_i y y_i^s, para i = 1,2,...,n.

Si $r_i + y_{i-1}^s > D_i$, entonces $\pi_i = 0$, $y_i^s = r_i + y_{i-1}^s - D_i$ y sustituyendo en *(i)* tenemos que: $y_{i-1}^s + r_i + 0 = D_i + (r_i + y_{i-1}^s - D_i)$ lo cual se verifica trivialmente

Si $r_i + y_{i-1}^s \leq D_i$, entonces $\pi_i = D_i - r_i - y_{i-1}^s$, $y_i^s = 0$ y nuevamente sustituyendo en *(i)* tenemos que: $y_{i-1}^s + r_i + (D_i - r_i - y_{i-1}^s) = D_i + 0$ que también se verifica trivialmente

De lo anterior tenemos que (i) se satisface en todos los casos posibles.

(ii) $\quad y_n^s = 0$

La demostración de (ii) se hará por el método del absurdo. Supongamos entonces que para $r = (r_1, r_2,..., r_n)$, y los valores correspondientes de y_i^s y π_i, no se cumple (ii), o sea que $y_n^s > 0$. Esto significa que la cantidad remanufacturada en el último período, más el inventario al inicio del último período es mayor que la demanda, formalmente: $y_{n-1}^s + r_n > D_n$. Por otro lado como (r, y^r) es solución del P-ELSR^U y satisface la condición de utilidad, tenemos que se cumple que:

- $r_n \geq R_n$
- $r_n \leq D_n$

por lo tanto debe ocurrir que $y_{n-1}^s > 0$, para que $y_n^s = y_{n-1}^s + r_n - D_n > 0$. Observar que $\pi_n = 0$ por definición. Sea b el período de remanufacturación inmediato anterior a n, o sea $r_b > 0$, $r_{b+1} = r_{b+2} = ... = r_{n-1} = 0$ que debe existir ya que $y_{n-1}^s > 0$. Por lo tanto si $y_{n-1}^s > 0$, aplicando (n – 1) veces la restricción (ES) del U-ELSR se tiene que cumplir que:

- $r_b + y_{b-1}^s > D_b + D_{b+1} + ... + D_{n-1} = \sum_{k=b}^{n-1} D_k$

Para esto se pueden dar dos casos posibles:

<u>Caso 1</u>: $y_{b-1}^s = 0$

Si $y_{b-1}^s = 0$, entonces $r_b > \sum_{k=b}^{n-1} D_k$, y como no hay remanufacturación entre el período b y el período n, tenemos que $y_{n-1}^s = r_b - \sum_{k=b}^{n-1} D_k > 0$ entonces sustituyendo en la inecuación $y_{n-1}^s + r_n > D_n$, tenemos que $r_b - \sum_{k=b}^{n-1} D_k + r_n > D_n$, y como $r_{b+1} = r_{b+2} = ... = r_{n-1} = 0$ entonces $\sum_{k=b}^{n} r_k > \sum_{k=b}^{n} D_k$, lo cual es un absurdo porque (r, y^r) satisface la condición de utilidad.

<u>Caso 2</u>: $y_{b-1}^s > 0$

Sea a el período inmediato anterior de remanufacturación de n para el que se cumple que $y_{a-1}^s = 0$, que debe existir ya que $y_0^s = 0$ y $y_{n-1}^s > 0$. En este caso tenemos que $y_j^s > 0$ para todo período j con $n > j \geq a$; porque si $y_j^s = 0$, entonces se deberían dar dos situaciones diferentes:

1. $r_{j+1} > 0$, lo cual es imposible porque a es el primer período de remanufacturación inmediatamente anterior a n con $y_{a-1}^s = 0$, salvo que $j = n - 1$, pero esto es también imposible porque $y_{n-1}^s > 0$;
2. $\pi_{j+1} = D_{j+1}$, de lo cual se cumple por la definición de π_i que para todo período k, con $k \geq j$ que $y_k^s = 0$, incluso para el período $k = n - 1$, pero esto igual que en el caso 1, es imposible porque $y_{n-1}^s > 0$.

Ahora, si se cumple que para todo período j con $n > j \geq a$, que $y_j^s > 0$ y que $y_{a-1}^s = 0$, entonces tenemos que $r_a > \sum_{k=a}^{n-1} D_k$, y que $r_i = 0$ para $a < i < n$, de lo cual sustituyendo en la ecuación $y_{n-1}^s + r_n > D_n$, tenemos que $r_a - \sum_{k=a}^{n-1} D_k + r_n > D_n \Rightarrow \sum_{k=a}^{n} r_k > \sum_{k=a}^{n} D_k$, lo cual igual que antes es un absurdo porque por hipótesis r satisface la condición de utilidad.

Por lo tanto, como el absurdo surge de suponer que $y_n^s > 0$, debe ser $y_n^s = 0$.

$(iii) \qquad \pi_i, y_i^s \in E^+ \quad i = 1,2,...,n$

Esto se cumple por la forma en que se definen los valores de π_i y y_i^s, los cuales son cero, o la resta de términos enteros positivos que tiene un resultado mayor o igual que cero.

***Demostración* (⇐)**: Para demostrar el inverso, partimos de una solución (r, y^r, π, y^s) del U-ELSR y debemos demostrar que (r, y^r) es solución del P-ELSR[U] y que satisface la condición de utilidad. La demostración de que (r, y^r) es P-ELSR^U factible es trivial, ya que la región factible de un problema P-ELSR está comprendida en la región factible de un U-ELSR.

Para demostrar la condición de utilidad, se puede hacer por el método del absurdo, suponiendo que existe un i, con $n \geq i \geq 1$, para el cual se cumple que:

- $\sum_{k=i}^{n} r_k > \sum_{k=i}^{n} D_k$

Pero si esto es cierto, entonces aplicando (n – i) veces la restricción (*ES*) del U-ELSR tenemos que:

$$y_n^s = y_{i-1}^s + \sum_{k=i}^{n} r_k - \sum_{k=i}^{n} D_k + \sum_{k=i}^{n} \pi_k \text{ con } \sum_{k=i}^{n} r_k - \sum_{k=i}^{n} D_k ,\ y_{i-1}^s,\ \sum_{k=i}^{n} \pi_k \geq 0 \text{ y por lo tanto } y_n^s > 0$$

Lo cual es un absurdo porque en este caso (r, y^r, π, y^s) no sería U-ELSR factible. Ya que el absurdo ocurrió por suponer que no se cumple la condición de utilidad, deber ser que si se cumple.

■

Por lo tanto para hallar una solución del U-ELSR podemos aplicar el procedimiento de resolución al P-ELSR^U correspondiente, empleando la condición de utilidad para asegurar que las soluciones encontradas sean U-ELSR factibles. Si en algún paso del procedimiento de resolución del P-ELSR^U, la solución encontrada no es U-ELSR factible, se descarta del conjunto de soluciones. A este procedimiento lo denominaremos Wagner y Whitin Reverso Útil (URWW de sus siglas en inglés).

A continuación demostraremos que la solución encontrada mediante el procedimiento URWW es óptima. Para eso primero introduciremos el ELSP con límite superior, al que denominamos UB-ELSP. Este problema es utilizado por Richter *et al* en [27] para poder realizar una extensión del algoritmo de W-W para el caso de retornos suficientes. Luego es extendido por Richter *et al* en [28] para el caso de costos con componentes lineales.

U-ELSR: Equivalencia con el UB-ELSP

El UB-ELSP de *Upper Bound* ELSP modela el caso de control de inventario tradicional analizado por Wagner-Whitin en [41], al que hemos denominado ELSP como en [1], al cual se le agrega una restricción para el nivel máximo de inventario para cada período. El modelo, con la adaptación de notación al presentado en [27] es el siguiente:

$$
(UB-ELSP)\begin{cases}
\min \sum_{i=1}^{n} \left\{ K_i^p [p_i > 0] + c_i^p p_i + h_i^s y_i^s \right\} \\
s.a. \\
(ES) \qquad y_{i-1}^s + p_i = D_i + y_i^s \qquad i = 1,2,\dots,n \\
(UB) \qquad 0 \le y_t^s \le Y_t \qquad t = 1,2,\dots,n \\
(CI) \qquad y_0^s = 0 \\
\\
\qquad p_i, y_i^s \in Z^+ \quad i = 1,2,\dots,n
\end{cases}
$$

A pesar de la restricción (*UB*), que impone un nivel máximo de inventario para cada período, sigue siendo válida la propiedad de inventario cero [27], o sea existe una solución óptima del UB-ELSP que satisface:

- $p_i \cdot y_{i-1}^s = 0 \qquad \forall i = 1,2,\dots,n$

Por lo tanto, una forma de determinar una solución óptima del UB-ELSP es evaluar todas las soluciones factibles que satisfacen la propiedad de inventario cero, y que también satisfacen la restricción de límite superior en el nivel de inventario. Para esto, se puede utilizar el algoritmo de W-W, con la modificación necesaria para considerar la restricción de limite superior de nivel de inventario en cada período, como en [27] y [28].

El interés en el UB-ELSP radica en que se puede demostrar que un problema U-ELSR es equivalente a un UB-ELSP, en el sentido que a partir de una solución óptima de uno de ellos se puede determinar una solución óptima del otro y viceversa. Antes de demostrar la equivalencia entre el U-ELSR y el UB-ELSP, introduciremos otra formulación del U-ELSR que es equivalente a la dada inicialmente y que se desprende directamente de la Proposición 3.2.4.1. En esta nueva formulación, se quitan del modelo las variables (π, y^s), y las restricciones asociadas, y se agrega una restricción que contempla la condición de utilidad:

$$
(U-ELSR)\begin{cases}
\min \sum_{i=1}^{n} \left\{ K_i^r [r_i > 0] + c_i^r r_i + h_i^r y_i^r \right\} \\
s.a. \\
(ER) \qquad y_{i-1}^r + R_i = r_i + y_i^r \qquad i = 1,2,\dots,n \\
(CU) \qquad \sum_{k=i}^{n} r_k \le \sum_{k=i}^{n} D_k \qquad \forall i = 1,2,\dots,n \\
(CI) \qquad y_0^r = y_n^r = 0 \\
\\
\qquad r_i, y_i^r \in Z^+ \quad i = 1,2,\dots,n
\end{cases}
$$

La restricción (*CU*) expresa la condición de utilidad que debe satisface una solución del U-ELSR. Esta nueva formulación es equivalente a la presentada al inicio de la Sección 3.2.3 ya que la función objetivo es la misma, y toda solución factible del U-ELSR debe satisfacer la condición de utilidad, según la Proposición 3.2.4.1.

Observar que el UB-ELSP es un caso particular del ELSP, al igual que el U-ELSR lo es del P-ELSR, en el entendido que en ambos casos se cumple que una solución factible del primero lo es también del segundo. En la siguiente proposición demostraremos que un problema U-ELSR es equivalente a un UB-ELSP^T, que se obtiene de aplicar la transformación definida en la Sección 3.2.2 para obtener un problema ELSP a partir de un P-ELSR, y viceversa.

Proposición 3.2.5.1: El modelo U-ELSR y su transformado UB-ELSP^T son equivalentes, en el sentido que una solución óptima de uno es también solución óptima del otro, y viceversa.

Demostración: Dado que el U-ELSR es un caso particular del P-ELSR, podemos aplicar la transformación definida para el P-ELSR. El ELSP que se obtiene como resultado es un problema UB-ELSP y es el siguiente:

$$(UB-ELSP)\begin{cases} \min \sum_{i=1}^{n} \left\{ K_i^p [p_i > 0] + c_i^p p_i + h_i^s y_i^s \right\} \\ s.a. \\ (ES) \qquad y_{i-1}^s + p_i = D_i + y_i^s \qquad i = 1,2,\dots,n \\ (UB) \qquad 0 \le y_t^s \le \Delta_t = \sum_{k=n-t+1}^{n} D_k^0 - \sum_{k=n-t+1}^{n} R_k^0 \qquad t = 1,2,\dots,n \\ (CI) \qquad y_0^s = 0 \\ \qquad p_i, y_i^s \in Z^+ \quad i = 1,2,\dots,n \end{cases}$$

Se ha denotado como D_i^0 y R_i^0 a la demanda y al retorno del problema U-ELSR, para no confundir con la demanda del UB-ELSP que se obtiene a partir de los retornos del U-ELSR.

La restricción (*UB*) surge de aplicar la transformación a la condición de utilidad del U-ELSR, como se demuestra a continuación.

Si le aplicamos la transformación a $\sum_{k=i}^{n} r_k \le \sum_{k=i}^{n} D_k^0$ se obtiene $\sum_{k=1}^{i} p_k \le \sum_{k=n-i+1}^{n} D_k^0$ ya que según la transformación $p_i = r_{n-i+1} \quad \forall i = 1,2,\dots,n$

Como el nivel inicial de inventario del UB-ELSP es cero, ya que por la transformación $y_0^s = y_n^r = 0$, entonces aplicando (n – 1) veces la restricción (ES) del UB-ELSP tenemos que: $y_t^s = \sum_{k=1}^{t} p_k - \sum_{k=1}^{t} D_k \qquad \forall t = 1,2,\dots,n$

Ahora aplicando la condición de utilidad y la transformación conjuntamente tenemos que se cumple lo siguiente:

$$y_t^s = \sum_{k=1}^{t} p_k - \sum_{k=1}^{t} D_k \leq \sum_{k=n-t+1}^{n} D_k^0 - \sum_{k=1}^{t} D_k = \sum_{k=n-t+1}^{n} D_k^0 - \sum_{k=n-t+1}^{n} R_k^0 = \Delta_t \qquad \forall t = 1,2,...,n$$

Por lo tanto tenemos que $y_t^s \leq \Delta_t \quad \forall t = 1,2,...,n$.

Ya que el resto de las restricciones y la función objetivos de ambos problemas son las mismas, como fue demostrado en la Proposición 3.2.4.1, queda demostrado que el U-ELSR y el UB-ELSP correspondiente son equivalentes. Por lo tanto se puede obtener una solución óptima para el U-ELSR partiendo de una solución óptima del UB-ELSP y viceversa.

■

De la Proposición 3.2.5.1 queda formalmente demostrado que resolver un problema U-ELSR es equivalente a resolver un problema UB-ELSP. Por lo tanto a partir de una solución óptima de uno de ellos se puede determinar una solución óptima del otro.

En el siguiente corolario se presenta la demostración de que el procedimiento URWW para resolver el U-ELSR según la Proposición 3.2.4.1, es óptimo.

Corolario 3.2.5.1: La solución determinada por el procedimiento de resolución definido para el U-ELSR que denominamos URWW, es óptima en el sentido que el costo de cualquier otra solución factible es mayor o igual.

Demostración: Recordemos que el procedimiento de resolución consiste en resolver el P-ELSR asociado al U-ELSR, conjuntamente con la condición de utilidad para asegurar la factibilidad. A su vez, para determinar las soluciones del P-ELSR, se emplea el algoritmo de W-W aplicado al ELSP que se obtiene de la transformación del P-ELSR. El algoritmo de W-W evalúa todas las soluciones del ELSP que satisfacen la propiedad de inventario cero, o sea:

- $p_i \cdot y_{i-1}^s = 0 \qquad \forall i = 1,2,...,n$

Como está demostrado en [27], existe al menos una solución óptima del UB-ELSP que satisface a la vez la propiedad de inventario cero anterior y la restricción en el nivel máximo de inventario. A su vez, como se vio en la demostración de la Proposición 3.2.5.1, exigir que se cumpla la restricción en el nivel máximo de inventario del UB-ELSP es equivalente a exigir que se cumpla la condición de utilidad del U-ELSR asociado.

Por lo tanto, podemos concluir que el procedimiento URWW consiste en determinar una solución óptima del UB-ELSP asociado al U-ELSR, ya que evalúa todas las soluciones que cumplen la propiedad de inventario cero y la condición de utilidad. Como ambos problemas son equivalentes, como quedó demostrado en la Proposición 3.2.5.1, el procedimiento URWW determina una solución óptima para el U-ELSR.

■

Conclusiones

De esta manera, considerando cada una de las proposiciones y corolarios contenidas en la Sección de 3.2, podemos decir que contamos con las herramientas teóricas suficientes para determinar la mejor remanufacturación posible del ELSR hasta el momento, si la consideramos como una actividad independiente, y se está en una situación de retornos útiles. Una línea interesante de trabajo futuro sería incorporar al análisis de sólo remanufacturación el costo del inventario de artículos listos, lo cual agrega una complejidad importante al problema visto en las secciones anteriores.

Como comentario final, cabe destacar que los resultados de la proposición 3.2.5.1 y del corolario 3.2.5.1 son válidos para el caso de estructuras de costos de una constante más una componente lineal. No sucede así con las proposiciones 3.2.2.1 y 3.2.4.1, en donde la estructura de los costos puede ser cualquier función cóncava.

3. Políticas de Descomposición

En esta sección del informe se presentan las políticas que consideran las actividades de producción, remanufacturación y disposición final en forma independiente. La disposición final sólo se realizará en aquellos casos donde los retornos sean excesivos comparados con los valores de demanda, en el entendido que una remanufacturación total de los retornos provocaría un nivel final de inventario de artículos listos positivo. El planteo de las políticas se hace en el contexto de retornos útiles, esto según la definición de la Sección 3.1 significa que: $R_{tn} \leq D_{tn}, \forall t = 1,2,...,n$ en donde R_{ij} y D_{ij} son los retornos y demanda acumulados entre los períodos i, j con $1 \leq i \leq j \leq n$.

Como se mencionó en su momento, el caso de retornos útiles incluye casos de retornos suficientes e insuficientes. En todos los casos se exigirá que la remanufacturación sea útil, en el sentido que la cantidad remanufacturada en un período no sea mayor que la demanda restante. Cuando los retornos sean insuficientes, será necesario producir alguna cantidad para satisfacer la totalidad de la demanda. Se puede demostrar trivialmente que luego de determinados los períodos y las cantidades a remanufacturar, la forma de obtener los períodos y cantidades de producción óptimos para la demanda restante, es mediante la aplicación del algoritmo de W-W. Esto es así, porque se puede ver el problema de satisfacer la demanda restante como un problema de control de inventario tradicional, sin necesidad de tener en cuenta los retornos.

A continuación se presentan las dos políticas propuestas que surgieron de la estrategia de descomposición en actividades. La primera la denominamos URWW por *Useful Reverse Wagner-Whitin*, y es la política que surge de aplicar el procedimiento W-W Reverso Útil para el U-ELSR presentado en la Sección 3.2.4. La segunda es una política que determina la cantidad máxima que se puede remanufacturar útilmente en M veces, al menor costo, si sólo se tienen en cuenta los costos de remanufacturar y mantener en inventario artículos usados. La denominaremos RMAXM, por Remanufacturación Máxima en M veces.

URWW: Remanufacturación Útil

Esta política aplica los resultados teóricos presentados en la Sección 3.2.4 de este documento, sobre el análisis del ELSR con sólo remanufacturación para el caso de retornos útiles. A este problema lo denominamos U-ELSR de ELSR Útil, en donde la remanufacturación de cada período debe ser menor o igual a la demanda restante, o sea $r_{tn} \leq D_{tn}$, $\forall t = 1,2,...,n$. Para esta política además se tiene en cuenta el caso en que la cantidad de retornos en un determinado período sea mayor a lo necesario, o sea una situación de exceso de retornos. En este caso es necesario determinar si se debe o no realizar la disposición final de estos retornos en exceso. La descripción detallada de la política es la siguiente:

1. Se formula el problema U-ELSR a partir del problema original. A partir del U-ELSR se obtiene un UB-ELSP mediante la transformación definida en la Sección 3.2 y se calculan los valores máximos de inventario S_t para cada período $t = 1,2,...,n$ de la siguiente forma:

   $$S_t = S_{t-1} + D^0_{n-t} - R^0_{n-t}$$
   $$S_0 = D^0_n - R^0_n$$

   En donde D^0_t y R^0_t son las cantidades de demanda y retornos del problema U-ELSR definido.

2. Se resuelve el UB-ELSR aplicando el algoritmo de W-W, y teniendo en cuenta los valores de S_t para el límite máximo de nivel de inventario para cada período t, con $t = 1,2,...,n$.

3. Se aplica la transformación definida en la Sección 3.2 en forma inversa para obtener los períodos y las cantidades a remanufacturar.

4. En el caso de que haya retornos en exceso se debe determinar la cantidad de los mismos para cada uno de los períodos. Para esto usamos la fórmula $\Delta_t = \max(R_{tn} - D_{tn}, 0) - \Delta_{t+1}$, con $\Delta_{n+1} = 0$ y $t = 1,2,...,n$. Los valores Δ_t son los retornos en exceso de cada período t, que hay que decidir si conviene o no disponer finalmente en algún período j, con $1 \leq t \leq j \leq n$. Para determinar los períodos y las cantidades de la disposición final se puede utilizar el mismo procedimiento de resolución, presentado en la Sección 3.2.2 que para el P-ELSR. Solamente hay que cambiar la actividad de remanufacturación, por la de disposición final, con la diferencia que se agrega un período $(n + 1)$ para contemplar el caso en que no sea conveniente disponer finalmente en ningún período. Esto es así porque el P-ELSR considera la recuperación (disposición final) total de los retornos. De esta manera si la decisión óptima es disponer finalmente en el período $(n + 1)$, significa que no se debe realizar disposición final en el problema original.

5. Después de haber procesado los retornos, se calcula la demanda neta, esto es la demanda original menos la demanda que se satisface por la remanufacturación. Si la

demanda neta es positiva para algún período, se procede a aplicar el algoritmo de W-W para determinar los períodos de producción óptimos, dada la remanufacturación.

Una de las características de esta política, es que sólo tiene en cuenta los costos asociados a los retornos para determinar la remanufacturación. Esto son: el costo de mantener en inventario artículos usados y el de remanufacturar. Una consecuencia de esto es que puede suceder que el nivel de inventario de artículos listos entre dos períodos de remanufacturación, sea superior a la demanda acumulada entre el primero y el anterior al segundo. Observar que esto no significa que la remanufacturación no sea útil, si no que en un determinado período se está remanufacturando más de lo estrictamente necesario. En la Sección 3.3.3 se verá un procedimiento que suaviza el efecto de un nivel elevado de artículos listos. Esto es conveniente cuando el costo de mantener en inventario artículos listos es mayor que el de mantener artículo usados: "artículos usados a bajo costo" como en [27], lo cual se supone que sucede habitualmente.

Con respecto a la complejidad del algoritmo de implementación de la política, se puede ver que para determinar las cantidades y períodos de cada una de las actividades se emplea el algoritmo de W-W o alguna extensión del mismo, conservando la complejidad. El resto de los cálculos son triviales y se pueden hacer en tiempo lineal. Por lo tanto el orden total del algoritmo es igual al de W-W, esto es $O(n^2)$.

RMAXM: Remanufacturación Máxima en M veces

Esta política determina la cantidad máxima a remanufacturar de forma útil y al menor costo, dada la cantidad de veces M, con $0 < M \leq n$, que se desea realizar dicha actividad. Lo anterior no quiere decir que la cantidad total remanufacturada sea igual a la totalidad de los retornos, ya que esto depende de la demanda restante en cada período. Al igual que en el caso de la política URWW, luego de determinadas las cantidades y períodos de remanufacturación, se determinan las cantidades y períodos de producción mediante el algoritmo de W-W, si es necesario. A grandes rasgos el procedimiento propuesto para determinar los M períodos y las respectivas cantidades a remanufacturar es un proceso recursivo de M pasos. En cada paso de la recursión se determina la cantidad máxima a remanufacturar para cada período, y se vuelve a invocar el procedimiento para el resto de los períodos con M – 1 veces. Durante el proceso se evalúan las soluciones obtenidas, y se obtiene al final la solución que maximiza los retornos de menor costo. La única exigencia es que la demanda de cada período sea positiva, para que cada uno de los M períodos de remanufacturación determinados en la solución final, sean positivos. El proceso se describe en detalle a continuación:

1. Sean $0 < M \leq n$. Si la cantidad de veces a remanufacturar es uno, o sea $M = 1$, se debe determinar el período t, con $1 \leq t \leq n$ en el cual se obtiene la mayor remanufacturación de forma útil, o sea:

$$r_t = \max_{1 \leq t \leq n} \left\{ \min\left(\sum_{i=1}^{j} R_i, \sum_{i=j}^{n} D_i\right) \quad \forall j = 1,2,\ldots,n \right\}$$

2. Si la cantidad de veces a remanufacturar es mayor que uno, o sea M ≥ 2, entonces para cada período t, en el rango $1 \leq t \leq (n - M - 1)$ se determina la máxima cantidad que se puede remanufacturar en ese período, o sea:

$$r_t = \min(\sum_{i=1}^{t} R_i, \sum_{i=t}^{n-M-1} D_i)$$

   Observar que el valor máximo que puede tomar t es $(n - M - 1)$, ya que aún restan $(M - 1)$ veces períodos de remanufacturación.

3. Luego de determinar la cantidad máxima a remanufacturar en t, se invoca nuevamente al proceso, con una cantidad de (M – 1) veces y desde el período p. El período p, con $t < p \leq (n - M)$, es el período donde debería comenzar la próxima remanufacturación después de t. Esto es el primer período en el que se cumple que $r_t < D_{tp}$, o sea donde la remanufacturación de t, no es suficiente para satisfacer la demanda acumulada entre t y p.

4. El proceso recursivo consiste en realizar el punto 2, siempre y cuando M ≥ 2, con la diferencia que el rango queda determinado por un período p desde el cual deben evaluarse cada uno de los períodos t, con $p \leq t \leq (n - M - 1)$. En el caso que M = 1, se procede a realizar el punto 1, pero esta vez desde un período p y no desde el primer período.

5. Para el período correspondiente a la M-ésima remanufacturación, se evalúa si la cantidad total remanufacturada es mayor que el de la última mejor solución final. Si son iguales se elige la opción de costo mínimo, evaluando ambas opciones. Observar que esto se realiza cada vez que M = 1, o sea cuando termina una de las recursiones, y por lo tanto se cuenta con una solución final.

Esta política determina la cantidad máxima que se puede remanufacturar en M veces al menor costo, si sólo se consideran los costos asociados a los retornos, ya que evalúa cada una de las soluciones obtenidas en el proceso. La demostración de esto es trivial, y se puede ver en la siguiente proposición.

Proposición 3.2.2: La política RMAXM determina una solución que maximiza la cantidad que se puede remanufacturar en M veces con $0 < M \leq n$, al menor costo posible, si sólo se tiene en cuenta los costos asociados a los retornos, y siempre y cuando $D_i > 0$ con $i = 1,2,...,n$, o sea la demanda de cada período sea positiva.

Demostración: La demostración se hará por el método inductivo, en el valor de M. Demostraremos primero que la proposición se cumple para M = 1, y luego para cuando M > 1, demostraremos la validez para M = 2, y a partir de esto para un M > 2.

<u>Pasos Base: Caso M = 1</u>

En este caso se puede ver claramente que se toma el valor máximo de las remanufacturaciones útiles posibles, para cada uno de los períodos. Para cada período j, con $j = 1, 2, ..., n$ se toma el valor máximo posible a remanufacturar en el período, que es el mínimo entre la cantidad de retornos disponibles, y la demanda restante. Por lo tanto se evalúa el costo de remanufacturar lo máximo posible en cada uno de los períodos, y se devuelve la alternativa de costo mínimo.

Paso Base: Caso M = 2

Cuando M > 1, para determinar el primer período de remanufacturación, se debe hacer en el rango que va entre 1 y n – M + 1, ya que tiene que haber M – 1 períodos de remanufacturación más. Entonces, para cada período j en el rango [1, n – M + 1], según el procedimiento de la política RMAXM, se determina el máximo que se puede remanufacturar en j, tomando el mínimo entre el total de retornos disponibles y la demanda restante. Luego se determina el período de remanufacturación restante, en el rango [k, n] con $k > j$, y $D_{jk} > r_j$. Observar que k siempre existe porque para el primer período de remanufacturación se considera la demanda hasta el período n – 1, y la demanda de todos los períodos es positiva. Por lo tanto para M = 2, se determina la cantidad máxima posible para ambos períodos, entre todos los casos posibles. Como evalúa el costo de cada una de las opciones de remanufacturación máxima en M veces, el procedimiento halla la cantidad máxima a remanufacturar en M veces al menor costo.

Paso Inductivo: Caso M > 2

Dado M > 2, supondremos que la política RMAMX determina la cantidad máxima a remanufacturar útilmente en M – 1 veces al menor costo, y demostraremos que esto también se cumple para M ≤ n. La demostración es trivial. Para el caso de M se debe determinar la cantidad máxima a remanufacturar en cada período j, en el rango [1, n – M + 1], y luego se procede a determinar los restantes períodos de remanufacturación en M – 1 veces. Como determina la cantidad máxima a remanufacturar para cada uno de los períodos en el rango [1, n – M + 1] y el procedimiento para M – 1 es válido, tenemos que el procedimiento evalúa todos los casos posibles de remanufacturación máxima en M veces, con 0 < M ≤ n, al menor costo posible. ■

De esta manera queda demostrado que el procedimiento que define la política RMAXM, devuelve la cantidad máxima a remanufacturar en M veces, con 0 < M ≤ n siempre y cuando la cantidad de demanda de cada uno de los períodos sea estrictamente positiva.

Se pudo obtener de manera experimental una medida de la complejidad del procedimiento, aunque queda como trabajo futuro una demostración formal de la misma. Se determinó que el orden de complejidad del procedimiento no es polinomial, ya que evalúa todos los casos posibles. También se pudo determinar experimentalmente que la cantidad de iteraciones depende de la relación entre de M y n. El caso de mayor número de iteraciones, se obtuvo cuando el valor de M es próximo a n/2. Esto parece ser lógico ya que la cantidad de soluciones posibles es mayor. Una idea para mejorar la eficiencia del procedimiento sería limitar el número de evaluaciones, por ejemplo evaluando las primeras K soluciones de remanufacturación máxima en M veces. Obviamente de esta manera no se puede asegurar que la solución final sea la de costo mínimo.

Procedimiento de Ajuste de la Remanufacturación

El ajuste consiste en modificar las cantidades remanufacturadas en aquellos períodos donde la remanufacturación es positiva, siempre que la remanufacturación de un período sea mayor a la demanda acumulada entre este período y el anterior al siguiente período de remanufacturación positiva. O lo que es lo mismo: sean i, j con $1 \le i \le j \le n$, si se verifica que $r_i > 0$, $r_j > 0$, $r_{(i+1)} = r_{(i+2)} = ... = r_{(j-1)} = 0$ y $r_i > D_{i(j-1)}$, en donde D_{kt} es la demanda acumulada entre los períodos k y t, con $1 \le k \le t \le n$, entonces se está en las condiciones de ajuste.

El objetivo del ajuste es suavizar el efecto de tener niveles altos de inventario de artículos listos innecesariamente, consecuencia de aplicar la estrategia de remanufacturar de forma independiente, teniendo sólo en cuenta los costos asociados a los retornos. Este ajuste es beneficioso si el costo de mantener en inventario artículos listos es mayor al de mantener en inventario artículos usados. El proceso de ajuste de describe en detalle a continuación:

6. Se determina el primer período t, con $1 \le t \le n$, para el cual la cantidad remanufacturada en t es mayor a la demanda de t, o sea:

   $$t = \min_{1 \le q \le n} \{ q : r_q > D_q \}$$

   Este es el primer período candidato a ser ajustado.

7. Se determina el próximo período de remanufacturación positiva. Sean t y p esos períodos, con $t < p \le n$, tal que $r_{(t+1)} = r_{(t+2)} = ... = r_{(p-1)} = 0$

8. Luego se calcula $D_{t(p-1)}$ la demanda acumulada entre los períodos t y $(p - 1)$. Si la cantidad remanufacturada en t es mayor que la demanda acumulada, se modifica la cantidad remanufacturada en t y p de la siguiente forma:

   Si $r_t > D_{t(p-1)}$ entonces

   $$\Delta = r_t - D_{t(p-1)}$$
   $$r_t = D_{t(p-1)}$$
   $$r_p = r_p + \Delta$$

9. Se continúa con el siguiente período q, con $t < q \le n$, hasta que no haya más períodos en condición de ser ajustados. Luego se calculan los niveles de inventario de artículos listos y usados, para las nuevas cantidades de remanufacturación.

Al final del proceso, para cada par de períodos de remanufacturación i, j con $1 \le i \le j \le n$, $r_i > 0$, $r_j > 0$, $r_{(i+1)} = r_{(i+2)} = ... = r_{(j-1)} = 0$ se cumple que $r_i \le D_{i(j-1)}$, en donde D_{kt} es la demanda acumulada entre los períodos k y t, con $1 \le k \le t \le n$. Como se puede apreciar por la descripción, el algoritmo para implementar la política debería ser de orden lineal.

4. Políticas Conjuntas de Producción, Remanufacturación y Disposición Final

En esta sección del documento describiremos las políticas para el ELSR que tienen en cuenta las actividades de producción, remanufacturación y disposición final en forma conjunta. Como se ha mencionado antes, el problema de hallar una solución óptima para el ELSR es NP-difícil, incluso para cuando los costos son de la forma de una constante más una componente lineal [35], como el analizado en nuestro caso.

El origen de estas políticas está basado fundamentalmente en la observación de la forma de la solución óptima para ciertos problemas de pequeña dimensión, obtenidas con GAMS, y por otro lado con la extensión y/o adaptación de políticas existentes para casos de control de inventario similares.

La mayoría de las políticas aquí propuestas tienen en cuenta la producción y la remanufacturación, y no la disposición final. Esto es así, por que el marco en el que fueron desarrolladas es el de una recuperación máxima de los retornos teniendo en cuenta el impacto ambiental de la disposición final [4][6][13][17]. Por tal motivo todas privilegian en mayor o menor grado la remanufacturación con respecto a las otras dos actividades.

P1RM: Producir 1 vez, Remanufacturar M veces

Esta forma de política está inspirada en el análisis de Richter *et. al.* de [23] y [26] para el caso determinístico constante. En [23] y [26] se realiza una extensión de la política *EOQ* para considerar los costos asociados a las actividades de remanufacturación y de disposición final. En nuestro caso adaptaremos esta forma de política para el caso de tiempo discreto, donde se produce en el primer período la cantidad necesaria, y en el resto de los períodos, se determinan las M veces de remanufacturación. Observar que al comienzo de la remanufacturación se está en una situación de retornos suficientes con respecto a la demanda restante, ya que se produce lo necesario en el primero período. La política se define de la siguiente manera:

1. Determinar la cantidad total de demanda y de retornos útiles, y hallar la diferencia entre ambas cantidades, o sea $\Delta_{DR} = \sum_{i=1}^{n} D_i - \sum_{i=1}^{n} U_i$. Los valores U_i, con $i = 1,2,...,n$, se determinan a partir de los retornos, descontando si hubiere los excesos, para de esta manera operar sólo con los retornos que son útiles para satisfacer la demanda. Formalmente:

   $$\Delta_{n+1} = 0$$
   $$\Delta_t = \max(R_{tn} - D_{tn}, 0) - \Delta_{t+1}$$
   $$U_t = R_t - \Delta_t \quad \text{con } t = 1,2,...,n$$

   Los valores de Δ_t son los retornos en exceso de cada período t, con $t = 1,2,...,n$.

2. Si $\Delta_{DR} > 0$, entonces, se produce en el primer período la cantidad Δ_{DR} .

3. Determinar los M períodos de remanufacturación $i_1, i_2, ..., i_m$. con $1 \leq i_j \leq n$, y $1 \leq j \leq m$. Observar que la demanda restante es igual a la cantidad total de retornos, o sea estamos en una situación de retornos suficientes. Para determinar los M períodos de remanufacturación usaremos una de las tres estrategias siguientes:

   3.1. El algoritmo de W-W con la modificación presentada por Richter *et al* en [27] para el caso con límite superior de capacidad de inventario de artículos listos. Para esto es necesario primero transformar el problema de sólo remanufacturación en uno de control de inventario tradicional con límite superior en el nivel de inventario, como en [27]. Este método es óptimo sólo si se cumple para todo período que el costo de mantener en inventario artículos usados es a lo sumo igual al de mantener en inventario artículos listos, o sea $h_i^r \leq h_i^s, i = 1,2,...,n$, lo que se denomina en [27] como "usados a bajo costo".

   3.2. Usar una extensión del método heurístico de Silver-Meal [31] para considerar la remanufacturación, al cual agregaremos los costos de mantener en inventario artículos usados. Lo que hace el método de Silver-Meal tradicional es acumular la demanda de períodos consecutivos siempre y cuando el costo marginal promedio descienda. En el caso de la remanufacturación se debe cumplir además que la cantidad de retornos sea suficiente. Nuestra extensión de la fórmula de Silver-Meal propuesta para el caso con remanufacturación es la siguiente:

   Sean $i \leq q$. Siempre que $D_{iq} \leq y_{i-1}^r + R_i$:

$$\frac{K_i^r + c_i^r \sum_{k=i}^{q} D_k + \sum_{k=i}^{q-1} h_k^s D_{(k+1)q} + \sum_{k=i}^{q} h_k^r (y_{i-1}^r + R_{ik} - D_{iq})}{(q-i)}$$

   En donde D_{ij}, R_{ij} es la demanda y retorno acumulado entre los períodos i, j con $1 \leq i \leq j \leq n$. El procedimiento heurístico de Silver-Meal [31] tiene un muy buen comportamiento con respecto a los costos, y es uno de los más utilizados. En nuestro caso lo usamos como una alternativa al de W-W modificado presentado en [27], ya que no plantea ninguna condición con respecto a los costos involucrados.

   3.3. Determinar los períodos de remanufacturación basándose sólo en los requerimientos de demanda de cada período, remanufacturando cuando sea necesario todos los retornos disponibles en el período. Por lo tanto la remanufacturación de un período es positiva si y sólo si el inventario de artículos listos al inicio es cero. En ese caso se remanufactura la cantidad de artículos disponible. Formalmente, para cada período i, con $i = 1,2,...,n$:

$$\text{Si } i = 1 \quad \begin{cases} \text{si } \Delta_{DR} < D_1 \text{ entonces } r_1 = R_1,\ y_1^s = \Delta_{DR} + r_1 - D_1,\ y_1^r = 0 \\ \text{si } \Delta_{DR} \geq D_1 \text{ entonces } r_1 = 0,\ y_1^s = \Delta_{DR} - D_1,\ y_1^r = R_1 \end{cases}$$

$$\text{Si } 1 < i \leq n \quad \begin{cases} \text{si } y_{i-1}^s < D_i \text{ entonces } r_i = y_{i-1}^r + R_i,\ y_i^s = y_{i-1}^s + r_i - D_i,\ y_i^r = 0 \\ \text{si } y_{i-1}^s \geq D_i \text{ entonces } r_i = 0,\ y_i^s = y_{i-1}^s - D_i,\ y_i^r = y_{i-1}^r + R_i \end{cases}$$

Esta forma de remanufacturar no tiene en cuenta los costos, pero es fácil de calcular, y puede tener buen comportamiento si los costos de mantener en inventario artículos listos y los de remanufacturar son bajos.

Como se puede apreciar esta política es simple en su forma, ya que consta de producir la cantidad necesaria, esto es la diferencia entre el total de la demanda y el total de los retornos, en el primer período y luego remanufacturar en el resto de los períodos de acuerdo a alguna de las tres estrategias definidas. Observar que si los retornos son suficientes no se produce en el primer período. Esta es la forma de la solución óptima para algunos de los problemas resueltos en GAMS, en el caso que los retornos son altos comparados con la demanda, y los costos asociados a los retornos son bajos.

Con respecto a la complejidad del algoritmo de implementación de esta política, depende de la estrategia para obtener la remanufacturación. Se puede observar, que de los tres casos, el número 3.1 es el más complejo ya que esta basado en el algoritmo de W-W, mientras que los otros son de complejidad lineal. Por lo tanto el orden total del algoritmo sería igual al de W-W, esto es $O(n^2)$, en el peor de los casos, si no $O(n)$.

PNRM: Producir N veces, Remanufacturar M veces

Esta política es similar a la anterior, con la única diferencia que la cantidad necesaria a producir se realiza en los primeros N períodos, según lo determine el algoritmo de W-W, en vez de en el primer período. Luego de estos N períodos de producción, vienen los M períodos de remanufacturación de los retornos. Para este caso además de determinar la cantidad necesaria a producir, es necesario calcular el período hasta donde es necesario satisfacer la demanda con la producción, o lo que es lo mismo: a partir de que período los retornos son suficientes. La política se define de la siguiente manera:

4. Determinar la cantidad total de demanda y de retornos útiles, y hallar la diferencia entre ambas cantidades, o sea $\Delta_{DR} = \sum_{i=1}^{n} D_i - \sum_{i=1}^{n} U_i$. Los valores U_i se determinan a partir de los retornos, descontando si hubiere los excesos, para de esta manera operar sólo con los retornos que son útiles para satisfacer la demanda. Formalmente:

   $$\begin{aligned} &\Delta_{n+1} = 0 \\ &\Delta_t = \max(R_{tn} - D_{tn}, 0) - \Delta_{t+1} \\ &U_t = R_t - \Delta_t \ \text{ con } t = 1,2,\dots,n \end{aligned}$$

   Los valores de Δ_t son los retornos en exceso de cada período t, con $t = 1,2,\dots,n$.

5. Calcular el período p, con $1 \leq p \leq n$ que satisface la siguiente condición:

   $$p = \max_{1 \leq j \leq n} \left\{ j : \Delta_{DR} \leq D_{1j}, \quad D_{1j} = \sum_{i=1}^{j} D_{1i} \right\}$$

6. Determinar los N períodos de producción para los primeros períodos en el rango $[1, p]$, aplicando el algoritmo de W-W, en donde la demanda del período p se modifica por la siguiente cantidad:

$$D_p = \Delta_{DR} - D_{1(p-1)}, \quad D_{1j} = \sum_{i=1}^{j} D_{1i}$$

7. Determinar los M períodos de remanufacturación $i_1, i_2, \ldots, i_m$. con $p \leq i_j \leq n$, y $1 \leq j \leq m$. Observar que la demanda restante es igual a la cantidad total de retornos, o sea que la cantidad de retornos es suficiente. Para determinar los M períodos de remanufacturación se usan las mismas tres estrategias que para la política P1RM.

Esta política es simple de aplicar, aunque algo más compleja que P1RM ya que hay que producir la cantidad necesaria, esto es la diferencia entre el total de la demanda y el total de los retornos útiles, en los primeros N períodos. Luego se remanufactura en el resto de los períodos de acuerdo a alguna de las tres estrategias definidas, y en el caso que los retornos sean suficientes no se produce en ningún período. Esta diferencia con la política P1RM se tendría que ver reflejada en el mejor comportamiento con respecto a los costos, ya que evita niveles altos de inventario en el caso de que los retornos sean bajos, y sea necesario producir casi la totalidad de la demanda. Además hay que observar que el costo relacionado a la política PNRM será como máximo igual al de P1RM, siempre que se utilice la misma estrategia de remanufacturación. Esto es así porque en el caso de PNRM, la producción de la cantidad suficiente se hace de forma óptima, empleando el algoritmo de W-W, y no de forma arbitraria en el primer período, como en P1RM. De esta manera se puede ver a PNRM como una generalización de P1RM.

Al igual que en el peor caso de P1RM, el orden total del algoritmo que implemente la política PNRM, sería igual al de W-W, esto es $O(n^2)$.

RSiempre: Remanufacturar Siempre

Esta política es la que mayor refleja explícitamente el interés por la recuperación total de los artículos usados y retornados, ya que en cada período prioriza la remanufacturación a la producción, para satisfacer la demanda. La descripción de la política es parecida a la heurística de "Lote Por Lote", o L4L como se conoce comúnmente, ya que en cada período se remanufactura lo necesario para satisfacer la demanda, aunque como veremos es más compleja que la tradicional. Si la cantidad remanufacturada no es suficiente para satisfacer la demanda del período, se determina el período donde es más conveniente producir el faltante. Las opciones para la producción son: el mismo período, o el último período donde la producción es positiva, según sea la opción de menor costo. A continuación se describe más formalmente la forma de la política:

Para cada período, k con $k = 1,2,\ldots,n$:

10. Si la cantidad de retornos es suficiente entonces se remanufactura la cantidad necesaria para satisfacer la demanda del período. Formalmente:

Si $y_{k-1}^r + R_k \geq D_k$ entonces $r_k = D_k$

11. Si la cantidad de retornos no es suficiente, determinamos en que período se debe producir el faltante. Llamemos l al período de producción a determinar. El período de producción l es el período actual o sea $l = k$, o $l = u$, en donde u es el último período de producción positiva, con $1 \leq u < k$. Para determinar cual de estos dos períodos es el conveniente hay que evaluar cual es la opción de menor costo: si producir en u, y mantener en inventario de artículos listos la cantidad necesaria, o producir en k, dado el costo fijo de producción asociado. Esto es:

    Si $(\sum_{i=l}^{k-1} h_i^s (D_k - r_k) < K_k^r + c_k^r (D_k - r_k))$ entonces
    $l = u$;
    De lo contrario
    $l = k$;

12. Si el período de producción es el actual, o sea $l = k$, las cantidades a remanufacturar y producir son las siguientes:

$$r_k = y_{k-1}^r + R_k$$
$$p_k = D_k - r_k$$

13. Si el período de producción conveniente es el último anterior de producción positiva, o sea $l = u$, además de determinar las cantidades a remanufacturar y producir, es necesario modificar las cantidades remanufacturadas en el rango $[u, k - 1]$, ya que se modifica la cantidad a producir en el período u. Más específicamente, se debe restar de las cantidades remanufacturadas, la cantidad que se va a agregar a la producción de u:

$$r_t = \max(r_t - \Delta_p, 0)$$
$$\Delta_p = D_k - R_k - y_{k-1}^r$$

    De esta manera, en la solución final, en cada período sólo se remanufactura cuando es estrictamente necesario.

14. Después de realizar esta actualización en las cantidades remanufacturadas en los períodos t del rango $[u, k - 1]$, las cantidades a producir en u y remanufacturar en k son las siguientes:

$$r_k = y_{k-1}^r + R_k$$
$$p_u = p_u + \Delta_p$$

Según la descripción de la política, se puede observar que en el caso en que los retornos son suficientes, no se realiza producción en ningún período. Si en cambio, los retornos son insuficientes, la producción se determina de una forma conveniente, teniendo en cuenta los costos asociados a la producción y a mantener en inventario artículos listos. Esto tiene un impacto positivo en el caso de retornos escasos, situación en la cual a priori se podría pensar que esta política tendría un mal resultado con respecto a los costos, ya que prioriza la remanufacturación contra la producción. No está prevista la disposición final de los retornos en exceso, aunque la inclusión de esta actividad no sería un inconveniente, ya que sólo bastaría son determinar los volúmenes de los excesos en cada período. Simplemente no se ha incluido por motivos de tiempo.

Con respecto a la complejidad computacional asociada a la política, se puede apreciar que la misma es de orden lineal, salvo en el caso que sea necesario producir en un período anterior al actual. Suponiendo el peor caso, en el cual sea necesario producir siempre en el primer período, se puede obtener trivialmente que la cantidad de pasos necesarios es $O(n^2)$, en donde n es el número de períodos.

LPT: Lineal por Tramo

Esta política considera de forma conjunta las tres actividades: la producción, la remanufacturación y la disposición final, recibiendo la información de qué actividad se pretende llevar a cabo en cada período, aunque no quiere decir que efectivamente suceda, como lo veremos en la descripción. Al estar fijados los períodos en donde se desea llevar a cabo cada una de las actividades, se considerarán sólo los costos variables o lineales para la determinación de los valores de la política, de ahí el nombre de lineal. Lo de tramo está relacionado con que en cada período de actividad de producción y/o remanufacturación, se considera la demanda acumulada desde ese período hasta el anterior al próximo período de producción y/o remanufacturación, si es que existe, o si no hasta el final. Esto último permite determinar más fácilmente las cantidades de cada actividad. Para la actividad de remanufacturación, si los retornos son insuficientes para cubrir la demanda del tramo, va a ser necesario recurrir a retornos que se dispusieron finalmente en períodos anteriores, y/o al último período de producción positiva. Aunque a priori la situación de actividades fijadas parece un poco rígida, puede darse en la realidad debido a condiciones industriales o de mercado.

La única exigencia de esta política es que el primer período debe ser fijado como de producción. Esto es para asegurar que la política sea factible, ya que la cantidad de retornos disponibles puede ser insuficiente en alguno de los períodos.

Lo que debemos hacer entonces es fijar las cantidades necesarias de cada una de las actividades en cada período, para satisfacer la demanda acumulada de cada tramo, teniendo en cuenta que si en un período están fijadas más de una actividad, se determina primero las cantidades de remanufacturación, luego las de producción y luego la de disposición final. Denominaremos un tramo al rango de períodos determinado por un período fijado como de producción y/o remanufacturación y el período anterior al próximo de producción y/o remanufacturación, o si no existe, el período final, o sea n. La descripción en detalle de la política es la siguiente:

Para cada período, k con $k = 1,2,...,n$:

15. Si k es un período de remanufacturación, entonces sea t el siguiente período de producción o de remanufacturación, con $k < t \leq n$ si es que existe, si no $t = n + 1$. Por lo tanto, la cantidad a remanufacturar en k, más el nivel de inventario de artículos listos al inicio de k, debe ser al menos igual a la demanda acumulada del tramo $[k, (t - 1)]$:

Por lo tanto se debe cumplir que $y^s_{k-1} + r_k \geq D_{k(t-1)}$ y esto solo es posible si :

$y^r_{k-1} + R_k \geq D_{k(t-1)} - y^s_{k-1}$

Si esto último se cumple entonces la cantidad a remanufacturar debe ser sólo la suficiente para que se satisfaga la demanda acumulada del tramo, esto es:

Si $y^r_{k-1} + R_k \geq D_{k(t-1)} - y^s_{k-1}$ entonces $r_k = D_{k(t-1)} - y^s_{k-1}$

Ahora si lo anterior no se cumple, es necesario recurrir a la producción de artículos nuevos y/o a los retornos que se dispusieron finalmente en períodos anteriores, para que lo anterior se cumpla. Para esto se debe seguir el siguiente procedimiento:

1.1. Determinar a y b con $a \leq k$, $b < k$ los últimos períodos de producción y disposición final respectivamente anteriores a k, si es que existen. Observar que a siempre va a existir porque se exige que el primer período sea de producción En el caso que no exista un período anterior de disposición final positivo, entonces $b = 0$.

1.2. Si $b \geq a$, entonces se disminuye la cantidad de disposición final de b lo suficiente para satisfacer la demanda del tramo, incluso hasta cero si es necesario. Observar que esto provoca un aumento en el nivel de inventario de artículos usados entre los períodos b y $(k - 1)$, lo cual causa un aumento en los retornos disponibles al inicio del período k. Si la cantidad de retornos disponibles en k aún no es suficiente, volvemos al paso 1.1, para determinar un nuevo valor de b.

1.3. Si $0 < b < a$, entonces es necesario determinar si es más conveniente producir nuevos artículos en a, o disminuir la cantidad de disposición final de b lo necesario. Para eso debemos comparar los costos relacionados a las actividades y a mantener en inventario, con el siguiente criterio: Si el costo de producir una unidad y mantenerlo en inventario de artículos listos desde el período a hasta el período $(k - 1)$, es menor que el costo de mantener en inventario de artículos usados una unidad de retorno desde el período b hasta el período $(k - 1)$, menos el costo de no disponer finalmente, o sea:

$$c^p_a + \sum_{i=a}^{k-1} h^s_i < \sum_{i=a}^{k-1} h^r_i - c^d_b$$

entonces conviene producir artículos nuevos para satisfacer la demanda, si no conviene disminuir la cantidad de disposición final de b lo necesario, y si esto no es suficiente volver al paso 1.1. Observar que en el caso de que convenga producir es necesario ajustar los niveles de inventario tanto de artículos listos como usados y las cantidades remanufacturadas si es que existen entre los períodos a y $(k - 1)$, de tal manera que la cantidad remanufacturada en un período sea la mínima necesaria, o sea la indispensable para satisfacer la demanda acumulada hasta el próximo período de producción o remanufacturación. En el caso en que convenga disponer finalmente sólo es necesario ajustar los niveles de inventario de artículos usados como en 1.2.

1.4. Si $b = 0$, entonces debemos producir en a, la cantidad necesaria, y ajustar los valores de inventario de artículos listos y usados, así como de las posibles remanufacturaciones entre los períodos a y $(k - 1)$ inclusive, como se explico en 1.3.

Observar que al final de este procedimiento la cantidad de retornos disponibles y de artículos listos en k, es suficiente para satisfacer la demanda del tramo, y por lo tanto la cantidad a remanufacturar es la que se define al comienzo del paso 1.

16. Si k es un período de producción, entonces se produce sólo lo necesario para satisfacer la demanda del tramo, esto es:

$$p_k = \max\{D_{k(t-1)} - (y_{k-1}^s + r_k), 0\}$$

En donde t es el siguiente período de producción y/o remanufacturación, con $k > t \geq n$ si es que existe, si no existe, entonces $t = n + 1$

17. Si k es un período de disposición final, entonces la cantidad a disponer finalmente es positiva, sólo si la cantidad remanufacturada es menor que la cantidad de retornos disponibles, o sea:
$$d_k = \max\{y_{k-1}^r + R_i - r_k, 0\}$$

Una cosa importante de observar, es que a pesar de que puede parecer que las cantidades determinadas resultarían en una política óptima, si no se tienen en cuenta los costos fijos, esto no necesariamente es cierto. Incluso en el caso en que el costo asociado a los retornos sea menor que el de producir y el de mantener en inventario de artículos listos. Esto se debe fundamentalmente a que las cantidades determinadas son las necesarias para satisfacer la demanda de cada tramo, y no más allá. Esto último puede provocar por ejemplo que queden retornos sin remanufacturar, lo cual a su vez puede recaer en una mayor producción y por consiguiente en un aumento de los costos, como se muestra en el siguiente ejemplo para $n = 4$. En el ejemplo, un uno significa que se realizará la actividad indicada en ese período, y un cero que no:

c^p	c^r	c^d	h^s	h^r	**D**	**R**	**p**	**r**	**d**
10	5	1	2	1	10	9	**1**	0	0
10	5	1	2	1	10	9	0	**1**	0
10	5	1	2	1	10	0	**1**	0	0
10	5	1	2	1	10	0	0	0	0

Si aplicamos la política lineal por tramos como la definimos anteriormente el resultado es el siguiente:

p	**r**	**D**	y^s	y^r
10	0	0	0	9
0	**10**	0	0	8
20	0	0	10	8
0	0	0	0	8

Aunque se puede obtener trivialmente que una mejor solución (de menor costo), respetando las actividades de cada período es:

p	r	D	y^s	y^r
10	0	0	0	9
0	**18**	0	8	0
12	0	0	0	0
0	0	0	0	0

En la segunda opción no se tiene en cuenta la demanda acumulada por tramo, lo cual dificulta la forma de determinar los valores de cada una de las actividades, ya que por ejemplo habría que considerar además los costos de cada una de las actividades y de cada tipo de inventario.

Si se piensa en el beneficio ecológico asociado a una recuperación total, se puede ver trivialmente que siempre existe una política lineal por tramo en la cual se remanufactura el máximo de retornos posibles, y es aquella en la que todos los períodos son de remanufacturación. Observar que esto último no significa que la remanufacturación sea positiva en todos los períodos, si no sólo en aquellos en que sea estrictamente necesario, y haya retornos disponibles.

Al igual que en el caso de RSiempre, la complejidad computacional asociada a la política LPT, es de orden lineal, salvo en el caso que sea necesario recurrir a la producción o disposición final de un período anterior al actual. Suponiendo el peor caso, en el cual sea necesario recurrir al primer período, se puede obtener trivialmente que la cantidad de pasos necesarios es a lo sumo $O(n^2)$, en donde n es el número de períodos.

NoR: No Remanufacturar

Esta política está basada en la regla extrema de no remanufacturar en ningún período, y disponer finalmente la totalidad de los retornos. El objetivo de proponer esta política es analizar el perjuicio económico que ocasionaría el no utilizar los retornos para satisfacer parte de la demanda. O lo que es lo mismo, tener una medida de cuan beneficioso es considerar la remanufacturación de los retornos, comparado con la decisión extrema de producir toda la demanda y disponer finalmente todos los retornos.

Lo que se hace es descomponer el problema en las dos actividades correspondientes de producir y disponer finalmente. Ya que no hay relación entre ambas, se pueden solucionar de forma independiente. Para ello se utilizará el algoritmo de W-W para determinar la producción y el procedimiento W-W Reverso para la disposición final, introducido en la Sección 3.2 de este documento, pero esta vez con los costos asociados a dicha actividad. El detalle de la descripción de la política es el siguiente:

18. Determinar la producción óptima (de costo mínimo) mediante el algoritmo de W-W aplicado sobre la demanda del problema, y con los costos de producir y mantener en inventario artículos listos correspondientes.

19. Determinar la disposición final óptima (de costos mínimo) de los retornos totales, mediante el procedimiento de W-W Reverso, empleando esta vez los costos asociados a la disposición final en vez de los de la remanufacturación, como se definió en la Sección 3.2. Observar que esto es válido ya que no hay diferencia entre un modelo de sólo remanufacturación pura y uno de disposición final, ya que en ambos casos no se considera la demanda, si no solamente los retornos.

Esta política se podría considerar como una forma de obtener soluciones de costo máximo en el sentido que cualquier otra solución que considere la remanufacturación de los retornos, para que sea conveniente económicamente, tendría que ser de menor costo o a lo sumo igual. Como ser verá en la sección de tests de las políticas, esto casi siempre es así, en los casos que los costos asociados a la remanufacturación y al de mantener artículos usados, sean menores o iguales a los de producción y al de mantener artículos listos, respectivamente. Algo importante de observar, es que esta política es óptima con respecto a la minimización de los costos, si solo tiene en cuenta la producción y la disposición final, ya que ambas actividades son independientes.

Con respecto a la complejidad computacional, ambas actividades se determinan usando un algoritmo del tipo de W-W, por lo tanto el orden total debería ser $O(n^2)$.

Pull

Esta política ha sido empleada con éxito para el caso de demanda y remanufacturación estocásticos. En este trabajo adaptaremos la definición utilizada por van der Laan *et al* de [36], ya que es la versión que contempla la disposición final, para el caso de demanda determinística y tiempo discreto, en la que no se permiten faltantes y los tiempos de entrega son positivos. La forma de la política es la siguiente:

Para cada período, k con $k = 1,2,...,n$:

1. Se remanufactura siempre y cuando el nivel de inventario de artículos listos es menor o igual a $s_r \geq 0$ y la cantidad de retornos disponibles es suficiente para que el nivel de inventario de artículos listos sea $S_r > 0$, luego de la remanufacturación. Formalmente:

   Si $(y^s_{k-1} \leq s_r)$ y $(y^s_{k-1} + y^r_{k-1} + R_k \geq S_r)$ entonces $r_k = S_r - y^s_{k-1}$

2. Si la cantidad de artículos listos, más la cantidad remanufacturada si corresponde, no es suficiente para satisfacer la demanda de k, se produce en múltiplos de $Q_m > 0$ cantidades, hasta que se satisfaga la demanda:

   $p_k = 0$
   Mientras $y^s_{k-1} + r_k + p_k < D_k : p_k = p_k + Q_m$

3. Si los retornos disponibles, después de la posible remanufacturación, son mayores a $s_d \geq 0$ se dispone la totalidad de los retornos disponibles:

   Si $(y^r_{k-1} + R_k - r_k > s_d)$ entonces $d_k = y^r_{k-1} + R_k - r_k$

Como se puede apreciar, la eficacia de la política con respecto a los costos, está íntimamente relacionada a los valores de los parámetros. Quizás una de las líneas posibles de trabajo futuros, sea investigar los valores óptimos de estos parámetros, para un conjunto de valores de demanda y retornos dados.

Una de las diferencias con la propuesta de van der Laan *et al* de [36], es que en el caso de demanda y retornos estocásticos existe un parámetro s_m, para el nivel mínimo de inventario de artículos listos, en el que se debe comenzar la producción. En nuestro caso ese parámetro tiene el valor fijo de cero, y la producción sólo se realiza en el caso que sea necesario. Otra diferencia fundamental radica que en el modelo de [36] se permite que existan faltantes, o sea niveles negativos de inventario de artículos listos.

Con respecto a la complejidad computacional, de más está decir que el orden es lineal, y por lo tanto eficiente, lo cual en cierta medida está relacionado con que no se toma en cuenta los costos involucrados del problema para determinar las cantidades de cada una de las actividades.

Push

Esta política es otra de las políticas propuestas para el caso de demanda y remanufacturación estocásticos, definida por van der Laan *et al* en [36], que al igual que la definición de la política Pull contempla el caso de disposición final. En nuestro trabajo la extenderemos para el caso de demanda determinística y tiempo discreto, en la que no se permiten faltantes y los tiempos de entrega son positivos. La forma de la política es la siguiente:

Para cada período, k con $k = 1,2,...,n$:

1. Se remanufactura siempre y cuando la cantidad de retornos disponibles sea suficiente, una cantidad igual a $Q_r > 0$. Formalmente:

   Si $(y_{k-1}^r + R_k \geq Q_r)$ entonces $r_k = Q_r$

2. Si la cantidad de artículos listos más la cantidad remanufacturada, si corresponde, no es suficiente para satisfacer la demanda de k, se produce en múltiplos de $Q_m > 0$ cantidades, hasta que se satisfaga la demanda:

   $p_k = 0$
   Mientras $y_{k-1}^s + r_k + p_k < D_k : p_k = p_k + Q_m$

3. Si el nivel de inventario de artículos listos del período actual, es mayor o igual a $s_d \geq 0$, se dispone la cantidad de retornos que quedan en inventario de artículos usados:

   Si $(y_{k-1}^s + p_k + r_k - D_k > s_d)$ entonces $d_k = y_{k-1}^r + R_k - r_k$

Se repiten los comentarios que se hicieron en el caso anterior de la política Pull: la eficacia de la política con respecto a los costos está íntimamente relacionada a los valores de los parámetros y una de las líneas posibles de trabajo futuros, es investigar los valores óptimos de estos parámetros, para un conjunto de valores de demanda y retornos dados. Tampoco existe un parámetro s_m, para el nivel mínimo de inventario de artículos listos, en el que se debe comenzar la producción. En nuestro caso ese parámetro tiene el valor fijo de cero, y la producción sólo se realiza en el caso que sea necesario. Al igual que antes, otra diferencia con respecto al modelo original de [36] es que no se permite que existan faltantes, o sea niveles negativos de inventario de artículos listos.

La complejidad computacional es de orden lineal, y como en el caso de la política Pull en cierta medida está relacionado con que no se toma en cuenta los costos involucrados del problema para determinar las cantidades de cada una de las actividades.

5. Políticas basadas en *Tabu Search*

En esta sección del documento se describen las políticas desarrolladas en base a la metaheurística de *Tabu Search*. El objetivo inicial que se plantea para el uso de esta metaheurística es obtener una solución que tenga un buen comportamiento con respecto a los costos, dado que el problema de obtener una solución óptima del ELSR es un problema de optimización NP-difícil. En cuanto al alcance dentro del proyecto, el objetivo es introducir la utilización de *Tabu Search* para resolver el ELSR, dado que según nuestro conocimiento sería la primera vez que se aplica para resolver este problema. Por lo tanto no entra dentro del alcance evaluar como sería la implementación más adecuada de *Tabu Search* para el ELSR, ni un análisis de los parámetros y sus valores correctos para la misma. El objetivo es medir con una implementación básica, como se comporta en relación al costo total involucrado, para distintas situaciones de demanda, retornos y costos asociados de las actividades, y de mantener en inventario artículos listos y usados.

La idea básica de la implementación es partir de una solución inicial, e ir explorando el espacio de soluciones teniendo en cuenta la lista Tabu, mediante modificaciones a la mejor solución actual (movimientos), de dos formas: mediante una estrategia estocástica, o mediante una estrategia determinística. Ambas estrategias de búsqueda están fundamentadas en la idea de diversificación la primera, y en la de intensificación la segunda. La diversificación se realiza de forma estocástica, debido a que la cantidad de vecinos posibles, según nuestra definición de vecindad, puede ser muy grande, y por lo tanto sólo exploramos una porción de los mismos. En cambio la intensificación, parte del supuesto que la solución inicial es una solución de buena calidad, y explora en soluciones cercanas de acuerdo nuevamente a nuestra definición de vecindad para el problema.

El resto de la sección está organizado de la siguiente forma: En la Sección 3.5.1 se definirán los componentes para nuestra implementación de *Tabu Search* para el ELSR. En el punto 3.5.2 se definirá el procedimiento para obtener la política basada en *Tabu Search* que realiza una exploración estocástica, pensada para las situaciones de diversificación, y en el punto 3.5.3 se definirá el procedimiento para las políticas basadas en *Tabu Search* que realiza una exploración determinística, pensada para situaciones de intensificación. Al final, en la Sección 3.5.4 se presentarán las conclusiones y comentarios finales con respecto al uso de *Tabu Search*.

Definiciones para la implementación de *Tabu Search*

En esta sección se definirán los componentes y características de las dos implementaciones de *Tabu Search* que emplearemos para resolver el ELSR. Se definirá la representación de una solución del problema, y el concepto de vecindad a utilizar para realizar la exploración del espacio de soluciones. Además, se definirá como se realizará la exploración, en nuestro caso el movimiento para determinar nuevas soluciones factibles, que tipo y como será la gestión de la lista Tabú, y las condiciones de parada del algoritmo iterativo.

Para ambas implementaciones, usaremos una de las políticas definidas en la Sección 3.4 con la cual construir, a partir de cada solución de *Tabu Search*, una solución del ELSR, o más precisamente los valores de producción, remanufacturación y disposición final. La política utilizada será la LPT: Lineal por Tramo, con la cual construiremos y evaluaremos cada una de las soluciones durante el algoritmo de *Tabu Search*, en cada una de sus estrategias de búsqueda.

A continuación se brinda la definición de cada uno de los componentes de nuestras implementaciones de *Tabu Search* para el ELSR, así como el procedimiento general para ambos casos.

3.5.1.1 Representación de soluciones

La representación de una solución del ELSR, que denominaremos de aquí en adelante como solución de *Tabu Search*, será una estructura que permitirá fijar qué actividades se desea o no realizar en cada uno de los períodos. Más específicamente la estructura es una tupla de unos y ceros, en donde un uno en una cierta posición significa que sí se desea realizar la actividad en un determinado período y un cero, que no se desea realizar la actividad en el período correspondiente. Para distinguir qué tipo de actividad se trata, se utilizará el orden en la estructura.

Formalmente una solución de *Tabu Search* será un elemento del conjunto $\{0,1\}^{3n}$, en donde n es el número de períodos del ELSR. Los n primeros valores de 0's y 1's corresponden a la actividad de producción, los segundos a la de remanufacturación, y los terceros a la de disposición final.

A partir de esta solución se obtiene una solución del ELSR, utilizando para ello la política LPT, que recibe las actividades que se pretenden realizar en cada período, y devuelve las cantidades necesarias para satisfacer la demanda, priorizando para ello la utilización de los retornos en la remanufacturación.

De esta manera a partir de una solución en términos de 0's y 1's se obtiene una única solución del ELSR, utilizando el procedimiento definido para la política LPT. Como ya se mencionó en la descripción de esta política, la solución devuelta no necesariamente es la mejor posible. Si embargo, es una solución fácil de obtener y que como veremos en las secciones 5 y 6, combinada con *Tabu Search* permite obtener un buen comportamiento con respecto a la minimización de los costos.

3.5.1.2 Definición de Vecindad

Para definir la noción de vecindad entre soluciones de la forma $\{0,1\}^{3n}$, en donde n es el número de períodos del ELSR, utilizaremos la distancia de Hamming entre dos elementos correspondientes del conjunto $\{0,1\}^{3n}$. Se utilizarán dos definiciones de vecindad, una que tiene en cuenta las tres actividades: Vecindad PRD y otra que sólo tiene en cuenta la actividad de remanufacturación: Vecindad R. A continuación se brinda la definición formal de ambos tipos de vecindad:

Vecindad PRD: Dado un valor de distancia d, con $1 \leq d \leq 3n$, y una solución $e \in \{0,1\}^{3n}$ cualquiera, diremos que f es vecina de e, si la distancia de Hamming entre ambas es d. Para abreviar diremos que f es d-PRD-vecina de e.

Vecindad R: Dado un valor de distancia d, con $1 \leq d \leq n$, y una solución $e \in \{0,1\}^{3n}$ cualquiera, tal que $r(e) \in \{0,1\}^n$ es el tramo de e referido a la remanufacturación, o sea $e = \{0,1\}^n \cup r(e) \cup \{0,1\}^n$, diremos que f es vecina de e, si la distancia de Hamming entre $r(e)$ y $r(f)$ es d. Para abreviar diremos que f es d-R-vecina de e.

La definición de ambas nociones de vecindad, parten de una análisis intuitivo del problema, con el objetivo de simplificar el procedimiento final de *Tabu Search*. Una consecuencia, es que cuando d es impar el grafo de soluciones asociado es conexo, mientras que con d par, no lo es. Por lo tanto lo más correcto sería utilizar una valor de distancia impar, aunque puede utilizarse un valor par, para por ejemplo, realizar una exploración diversificada inicial del espacio de soluciones de forma rápida.

Ambas definiciones de vecindad permiten manejar la dimensión del espacio de vecinos de una solución actual, y por lo tanto emplear la estrategia de diversificación o intensificación dentro del conjunto $\{0,1\}^{3n}$. La noción de Vecindad R permite determinar nuevas soluciones modificando sólo los períodos de remanufacturación, y esto es válido, porque dados los valores de remanufacturación, se pueden obtener fácilmente los valores de producción óptimos, como se explico en la Sección 3.3.

3.5.1.3 Movimientos

La noción de movimiento, se usa para obtener una nueva solución factible dentro del conjunto de soluciones vecinas de una determinada solución. En nuestro caso un movimiento se refiere al cambio de un 1 por un 0, o viceversa, de una determinada posición de la solución actual. Formalmente, un movimiento se define de la siguiente manera:

Movimiento: Dado un valor p, con $1 \leq p \leq 3n$, y una solución $e \in \{0,1\}^{3n}$ cualquiera, tal que p es una de las posiciones posibles de e. Entonces el resultado de aplicar el movimiento es otro elemento $f \in \{0,1\}^{3n}$ con $f_i = e_i$ para $i = 1,2,...(p–1), (p+1),...,n$, y $f_p = 0$ si $e_p = 1$, o $f_p = 1$ si $e_p = 0$, o lo que es lo mismo: la distancia de Hamming entre e y f es uno, y se da en la posición p.

Con esta definición simple de movimiento, podemos implementar ambas nociones de vecindad, ya que en el caso de una d-PRD-vecindad, una nueva solución se obtiene de aplicar d veces el movimiento en posiciones distintas. Mientras que una d-R-vecindad, en aplicar d veces el movimiento en posiciones distintas, sólo dentro del tramo correspondiente a la actividad de remanufacturación.

Desde el punto de vista de la implementación, para asegurarnos que todas las soluciones consideradas sean ELSR factibles, marcaremos el primer período como de producción, o lo que es lo mismo la primer posición de una solución *Tabu Search* siempre será uno. Recordar que un uno indica que se pretende realizar una determinada actividad en ese período. No necesariamente va a ser así, esto depende de las cantidades de retornos y de demanda, según procedimiento de la política LPT, que privilegia el uso de los retornos.

3.5.1.4 Procedimiento General de *Tabu Search*

En términos generales, lo que se hace en ambas implementaciones de la metaheurística de *Tabu Search*, es partir de una solución inicial del conjunto $\{0,1\}^{3n}$, que sea ELSR factible, e ir explorando el espacio de soluciones, de acuerdo a una de las nociones de vecindad, empleando la lista Tabú para "escapar" a los óptimos locales. Un ejemplo de solución inicial, que resulta ELSR factible, es $e = 1 \cup \{0\}^{2n}$, ya que esta marcado el primer período como de producción. Cada vez que se obtiene un nuevo conjunto de soluciones factibles, se utiliza la política LPT para construir una solución del ELSR a partir de cada solución *Tabu Search* y se evalúa el costo de cada una de las soluciones determinadas. De esta manera se toma para el próximo paso iterativo, la mejor solución dentro del conjunto de soluciones factibles determinado, y se continúa de esta manera hasta que se satisfaga alguna de las condiciones de parada.

La condiciones de parada estarán dadas por el número total de iteraciones que se desee realizar y/o por el número máximo de iteraciones sin mejoras. En nuestro caso ambas implementaciones de *Tabu Search* devolverán la mejor solución encontrada, teniendo en cuenta la solución inicial, hasta la última obtenida.

La lista Tabú será de tamaño fijo, y dado por el usuario. Se gestionará de forma cíclica, es decir, cuando la lista esté completa, se irán eliminado de la lista aquellas soluciones factibles ya evaluadas, con una técnica FIFO: primero en entrar, primero en salir.

De la misma manera el conjunto de soluciones factibles será una lista de tamaño fijo, que se obtiene por completo en cada paso iterativo. Esto permite flexibilizar el número de soluciones factibles a evaluar del conjunto de soluciones vecinas posibles.

En las secciones siguientes se definen en detalle las dos implementaciones de *Tabu Search* realizadas, una mediante la estrategia de búsqueda estocástica, y otra que utiliza la estrategia de búsqueda determinística.

TSPRD: Propuesta Estocástica

La propuesta estocástica está orientada hacia una estrategia de diversificación, en donde la cantidad de períodos a considerar sea grande, y no se disponga de una solución inicial de buena calidad con respecto a los costos. Se usará la definición de PRD vecindad, junto con una distancia dada, para explorar el espacio de vecinos, y obtener un nuevo conjunto de soluciones factibles. La aleatoriedad del procedimiento, está en la forma de aplicar la PRD vecindad a la mejor solución actual, como veremos en la descripción de la política. Una parametrización de la implementación, a destacar desde nuestro punto de vista, es que se permite seleccionar sobre cuáles actividades se quiere realizar la búsqueda. De esta manera, si se desea sólo se puede explorar sobre una de las actividades, y dejar fijos los períodos de las otras dos.

A continuación se brinda la descripción en detalle de la implementación de *Tabu Search* estocástica, dejando de lados aquellos aspectos que resulten obvios con respecto a *Tabu Search* y al ELSR.

20. El procedimiento recibe en total siete parámetros y son los siguientes: tamaño de la lista Tabú, tamaño de la lista de soluciones factibles, sobre qué actividades se desea realizar la exploración, una solución inicial de *Tabu Search*, número de veces a aplicar el movimiento (distancia entre soluciones), número total de iteraciones y opcionalmente el número máximo de iteraciones sin mejora.

21. Lo primero que se hace es determinar la solución del ELSR a partir de la solución inicial de *Tabu Search*, mediante la aplicación de la política LPT, y obtener el costo respectivo. Al costo de la solución inicial se lo identifica como el mejor costo hasta el momento, y se agrega la solución inicial de *Tabu Search* a la lista Tabú.

22. Se comienza luego con la sección iterativa de *Tabu Search*, donde en cada paso se determina un nuevo conjunto de soluciones factibles, respetando el tamaño de la lista de soluciones factibles, y las actividades en donde se desea explorar. Una nueva solución factible tentativa se obtiene de aplicar el movimiento el número de veces dado, sobre la sección de la solución actual correspondiente a las actividades que se desea realizar, y controlando que la misma sea factible. Para la factibilidad se exigirá que el primer período sea de producción, o sea que el valor de la primera posición sea uno. A su vez, para cada aplicación del movimiento, se debe determinar sobre que posición de la solución actual se efectuará. Esto se hace de forma aleatoria, seleccionando las posiciones de acuerdo a una distribución uniforme en el rango correspondiente a las actividades que se desea explorar.

23. Para definir si la nueva solución factible tentativa, será o no parte del nuevo conjunto de soluciones factibles se debe determinar si pertenece o no a la lista Tabú. Si no pertenece a la lista Tabú, se agrega a la misma y a la nueva lista de soluciones factibles. Si pertenece a la lista, se determina una nueva solución factible, como se indicó en el punto 3, o se agrega a la lista Tabú y a la nueva lista de soluciones factibles si se ha intentado un cierto número de veces sin conseguir una nueva solución factible que no pertenezca a la lista Tabú.

24. Luego de haber obtenido un nuevo conjunto de soluciones factibles, se procede a obtener la mejor solución, o sea la de costo mínimo, de este nuevo conjunto de soluciones factibles. Para ello, se obtiene a partir de cada solución de *Tabu Search*, una solución del ELSR, aplicando el procedimiento de la política LPT, y el costo asociado a la misma, y nos quedamos con la de menor costo para la próxima iteración.

25. Luego de haber determinado la mejor solución, dentro del nuevo conjunto de soluciones factibles, se determina si esta nueva mejor solución es también la mejor solución total, comparando el costo de la misma con el costo de la mejor solución total obtenida hasta el momento

26. Los pasos 2 – 6 se repiten hasta que se alcance el número total de iteraciones, o hasta que hayan pasado un número de iteraciones determinado sin lograr una nueva mejor solución total. Luego de haber terminado con las iteraciones se devuelve la mejor solución encontrada durante el proceso.

Algo que no se tiene en cuenta explícitamente en la implementación, es la relación que existe entre el tamaño de la lista Tabú, el tamaño de la lista de soluciones factibles, las actividades donde se desea realizar la exploración y el número de veces que se quiere aplicar el movimiento, o lo que es lo mismo la distancia entre la mejor solución actual y las soluciones vecinas. La coherencia en la relación de estos valores es responsabilidad del usuario. Obviamente existe una relación entre estos valores, ya que para una cierta distancia de Hamming, existe una cantidad determinada de nuevas soluciones factibles, y a su vez el valor de la distancia depende de las actividades en las que se desea explorar, ya que por ejemplo si sólo se desea explorar sobre una actividad, la distancia debería ser a lo sumo n, en donde n es la cantidad total de períodos del ESLR. A su vez, si la distancia definida es grande, la cantidad de soluciones repetidas, esto es que ya han sido consideradas, aumenta, por eso se adoptó un número arbitrario de intentos, luego de los cuales se acepta, aunque sea repetida, y por eso también se optó por una lista Tabú cíclica.

A su vez, esta libertad que se brinda en los valores de los parámetros permite una mayor flexibilidad para la experimentación. Por ejemplo, si el tamaño de la lista Tabú es pequeño en comparación con el tamaño de la lista de soluciones factibles, se puede ver como un caso donde se le da más importancia a las soluciones recientes, o lo que es lo mismo una noción de poca memoria para retener las soluciones determinadas anteriormente. De forma inversa, una lista Tabú grande en comparación con el tamaño de la lista de soluciones factibles, indicaría que se le da más importancia a las soluciones anteriores, ya que se pretende un nivel de memoria elevado. Esto está relacionado íntimamente con el concepto de la metaheurística de *Tabu Search*.

Una de las características que se desprende de esta implementación es que al usar una fórmula estocástica para determinar las nuevas soluciones factibles, en cada ejecución se puede obtener una solución diferente. Lo que sucede es que en cada paso iterativo, la nueva lista de soluciones factibles que se obtiene es un subconjunto de las soluciones vecinas factibles posibles. Esto se debe en parte al tamaño de la lista factible y sobre todo porque la elección de las nuevas soluciones es aleatoria.

TSRH: Propuesta Determinística

La propuesta determinística está pensada para aquellos casos en donde se desea utilizar una estrategia de intensificación, ya sea porque la cantidad de períodos a considerar es pequeña, o se disponga de una solución inicial de buena calidad con respecto a los costos, o cercana a la que se desea obtener. Por este motivo se usará la definición de R vecindad con una distancia de valor uno, o lo que es lo mismo, se aplicará una sola vez y de forma determinística como veremos en la descripción, el movimiento sobre la solución actual en la sección correspondiente a la remanufacturación, para obtener la nueva lista de soluciones factibles. Una observación importante en este caso es que al estar determinado el número de soluciones vecinas, el tamaño de la lista de soluciones factibles es fijo y determinista. Se optó por una distancia uno, porque la forma de obtener las soluciones vecinas de una solución, y de aquí el nuevo conjunto de soluciones factible, es trivial y se puede hacer simplemente modificando el valor de una de las posiciones de la solución actual.

A continuación se brinda la descripción en detalle de la implementación de *Tabu Search* determinística, dejando de lados aquellos aspectos que resulten obvios con respecto a *Tabu Search* y al ELSR.

27. Se reciben cuatro parámetros en total, que son: tamaño de la lista Tabú, una solución inicial de *Tabu Search* sin la producción, número total de iteraciones y opcionalmente el número máximo de iteraciones sin mejora. La cantidad de parámetros es menor que el caso estocástico, debido a que muchos están determinados por la forma de realizar la exploración del espacio de soluciones.

28. Lo primero que se hace es determinar la solución del ELSR a partir de la solución inicial de *Tabu Search*, mediante la aplicación de la política LPT, y obtener el costo

respectivo. Antes, es necesario determinar los períodos de producción, ya que únicamente son dados los períodos de remanufacturación y disposición final. Para esto se utiliza el algoritmo de W-W aplicado a la demanda neta, que es la demanda que no se puede satisfacer con la remanufacturación. La demanda neta se determina aplicando la noción de la política LPT sólo a la remanufacturación. Esto es remanufacturando en los períodos indicados la cantidad mínima entre los retornos disponibles y la demanda del tramo, considerando como tramo al rango de períodos dados por dos períodos consecutivos, indicados como de remanufacturación. Después de obtener la forma total de la solución inicial, se obtiene el costo de la misma, que se identifica como el mejor costo hasta el momento, y se agrega la solución inicial a la lista Tabú.

29. Se comienza luego con la sección iterativa de *Tabu Search*, donde en cada paso se determina un nuevo conjunto de soluciones factibles, a partir de una 1-R-vecindad de la solución actual. Para ello se aplica el movimiento una vez, en cada una de las posiciones correspondientes a la actividad de remanufacturación de la solución actual. Esto se realiza en las n posiciones de la remanufacturación, para obtener entonces n nuevas soluciones factibles.

30. Para definir si una nueva solución factible, será o no parte del nuevo conjunto de soluciones factibles se debe determinar si pertenece o no a la lista Tabú. Si no pertenece a la lista Tabú, se agrega a la misma y a la nueva lista de soluciones factibles. Si perteneces a la lista, se determina una nueva solución factible, como se indicó en el punto 3, o se agrega a la lista Tabú y a la nueva lista de soluciones factibles si se ha intentado un cierto número de veces sin conseguir una nueva solución factible que no pertenezca a la lista Tabú.

31. Luego de haber obtenido un nuevo conjunto de soluciones factibles, se procede a obtener la mejor solución, o sea la de costo mínimo, de este nuevo conjunto de soluciones factibles. Para ello, se obtiene a partir de cada solución de *Tabu Search*, una solución del ELSR, antes obteniendo los períodos de producción correspondientes a los de remanufacturación, como se explico en el punto 1. Luego se aplica el procedimiento de la política LPT para la solución completa, para obtener el costo asociado a la misma, y quedarnos con la de menor costo.

32. Luego de haber determinado la mejor solución, dentro del nuevo conjunto de soluciones factibles, se determina si esta nueva mejor solución es también la mejor solución total, comparando el costo de la misma con el costo de la mejor solución total obtenida hasta el momento

33. Los pasos 2 – 6 se repiten hasta que se alcance el número total de iteraciones, o hasta que hayan pasado un número de iteraciones determinado sin lograr una nueva mejor solución total. Luego de haber terminado con las iteraciones se devuelve la mejor solución encontrada durante el proceso.

En la versión determinística, los únicos parámetros libres son el tamaño de la lista Tabú, el número de iteraciones a realizar y opcionalmente el número máximo de iteraciones sin mejora. Al igual que en el caso estocástico, el tamaño de la lista Tabú esta relacionado con la importancia que se le da a las soluciones recientes, ya que en una lista Tabú grande permanecerán las soluciones encontradas durante más tiempo y se evitará la repetición de las mismas, mientras que en una lista pequeña se eliminan rápidamente las soluciones encontradas, y existe el riesgo de repetir soluciones anteriores.

Obviamente, al considerar completamente el conjunto de vecinos en cada paso iterativo, la solución final obtenida siempre será la misma, mientras se ejecute el procedimiento con los mismos valores de parámetros cada vez. De ahí el título de propuesta determinística.

. Detalles de la Implementación Informática

En esta sección del informe se presentan los detalles de la implementación informática de las políticas y procedimientos de resolución propuestos, haciendo hincapié en los aspectos de la arquitectura de la solución. El objetivo es describir las características del software desarrollado, sin entran en los aspectos particulares de la codificación, aunque si se mencionaran las decisiones tomadas, que se consideren necesarias.

El resto de esta sección está organizado de la siguiente manera. En el punto 4.1 presentaremos los requerimientos que debe satisfacer el software a implementar. En 4.2 se presentará el análisis de los requerimientos y las decisiones de diseño realizadas. En 4.3 se presentarán las definiciones de implementación. Al final de la sección, en el punto 4.4 se presentaran algunas ideas para la mejora y el mantenimiento del software desarrollado.

1. Requerimientos de la Solución

El objetivo de la solución informática es implementar una biblioteca de políticas para el Control de Inventario con Remanufacturación y Disposición Final de tiempo discreto y determinístico, que sea fácil de invocar, eficiente, y que presente los resultados de forma clara, de tal manera que facilite el análisis de los mismos.

Los requerimientos funcionales para el desarrollo de la solución informática, son las descripciones de las políticas propuestas, que fueron presentadas en las secciones 3.3, 3.4 y 3.5 de este documento. Además de la implementación de las políticas, es necesario el desarrollo de una interfaz para la invocación de las distintas políticas, así como de herramientas para la generación de datos de prueba y de una utilidad que permita medir los tiempos de ejecuciones de las políticas, teniendo en cuenta que el objetivo fundamental es la experimentación de varias políticas para un mismo problema.

En cuanto a la interfaz, debe permitir la lectura de los datos de una instancia del ELSR, así como de los parámetros de algunas de las políticas, a través de un archivo de texto plano (.txt) con una cierta estructura que facilite su escritura y entendimiento, por parte de una persona con conocimientos del problema. Debe retornar los datos de la solución también en un archivo, de tal manera que resulte simple de leer y analizar.

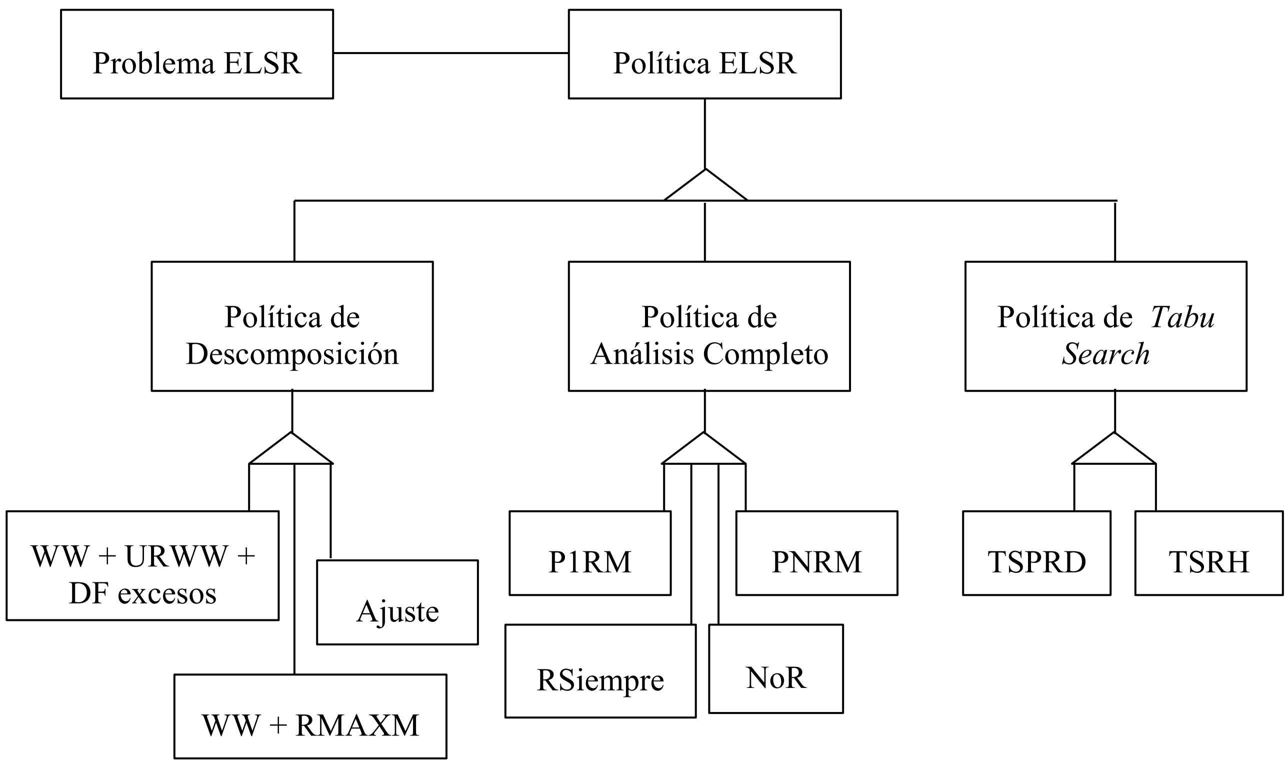
En cuanto a la generación de datos de prueba, es un desarrollo auxiliar, que permitirá obtener datos de prueba para el testeo de las diferentes políticas. Los datos de pruebas están compuestos por valores de demanda y retornos para una cierto número de períodos, con una determinada relación entre ambas cantidades. La generación debe consistir en una secuencia de valores enteros positivos de demanda y en otra de retornos, de largo igual al número de períodos, y en donde se han brindado limites inferiores y máximos, posiblemente distintos, para los valores de cada una de las secuencias. Esta utilidad también se empleará para la obtención de valores de costos de las distintas actividades.

En relación a las características tecnológicas que serían deseables en la solución informática a implementar, se encuentra la independencia de plataforma de ejecución, la facilidad para la extensión y mantenimiento de la codificación, y la facilidad para lograr la interoperabilidad con otras soluciones informáticas relacionadas a la logística, así como la invocación a través de un navegador web o Internet.

2. Análisis y Diseño de la Solución

En esta sección abordaremos el análisis y las decisiones de diseño adoptadas para los requerimientos del punto 4.1, realizadas en el contexto de la orientación a objetos, por considerar que es la forma de realizar un diseño comprensible, ya que es el más o uno de los más utilizados en la actualidad, y fácilmente extensible.

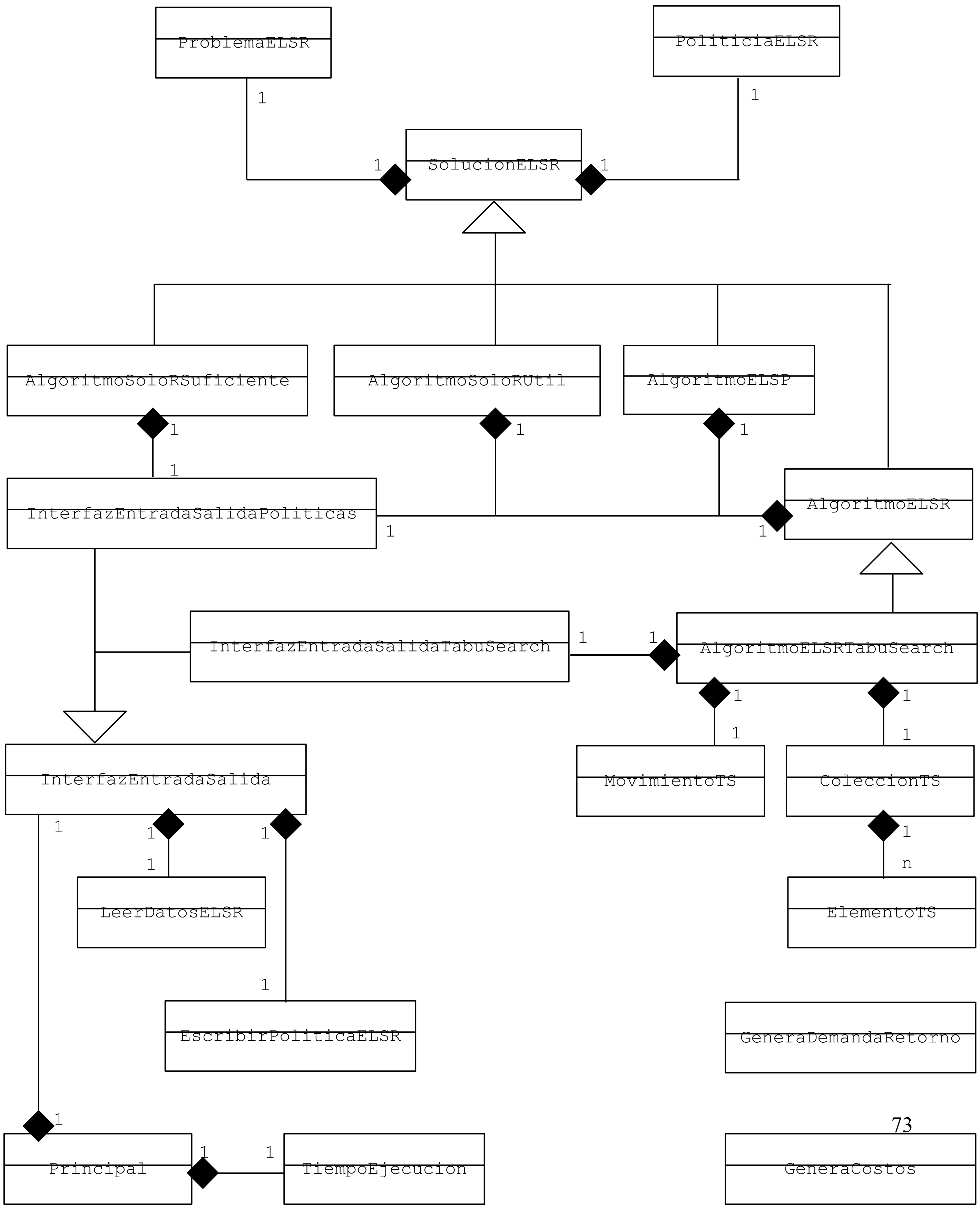
Antes que nada, analizando los requerimientos referidos a las políticas, encontramos las entidades del problema y las distintas relaciones entre las mismas. A continuación se brinda el esquema del Modelo Entidad-Relación para los requerimientos dados:



En cuanto al diseño funcional de la biblioteca, se debe implementar un esquema de clases que reflejen el análisis de requerimientos anterior, y que provea un mecanismo sencillo de invocación por parte de un usuario desde una línea de comandos. A su vez se debe prever que sea extensible para que puedan ser invocadas desde otro contexto o desde otra aplicación.

Las entidades propuestas en el MER se traducen casi inmediatamente en los objetos del diseño, ya que la complejidad de la aplicación a construir no se basa en la relación de las distintas entidades ni en el significado de las entidades en sí mismas, sino en la codificación de los procedimientos de las políticas propuestas.

A continuación se muestra el diagrama de clases del diseño propuesto. A las clases que se desprenden del esquema de MER anterior, se agregan aquellas clases relacionadas a la interfaz de la política.



Como queda expresado en el diagrama de clases la clase `SolucionELSR` es la que se encarga de tomar una instancia de un problema ELSR, implementado en la clase `ProblemaELSR`, y generar una instancia de la clase `PoliticaELSR` que implementa lo necesario para la representación de una política de ELSR.

En `AlgoritmoELSP` está la implementación del algoritmo de W-W, que es utilizada para las políticas que están basadas en la descomposición en actividades. En la clase `AlgoritmoSoloRUtil` está la implementación de aquellas políticas basadas en la remanufacturación útil: URWW y RMAXM, así como el procedimiento de ajuste definido para suavizar el efecto de no considerar el costo de mantener en inventario artículos listos. En `AlgoritmoELSR` está la implementación de las políticas basadas en el análisis de la solución óptima de problemas pequeños, así como de extensiones y de la experimentación de alternativas: P1RM, PNRM, LPT, NoR, Push y Pull. En la clase `AlgoritmoELSRTabuSearch`, está la implementación de las alternativas estocástica y determinística de *Tabu Search* aplicado al ELSR: TSRH y TSPRD respectivamente. En la clase `SolucionELSR` es donde además de brindar las estructuras de datos que se utilizan en las clases que implementan las distintas políticas, está la implementación de la función que calcula el costo de la solución determinada por alguno de los procedimientos de las políticas.

Los algoritmos de *Tabu Search* utilizan las siguientes clases auxiliares para representar tanto la lista Tabú como el conjunto de soluciones factibles de cada iteración. En `ColeccionTS`, se implementa la inserción, y eliminación de elementos de una colección, así como la estructura de datos correspondiente. Una colección está formada por elementos de la clase `ElementoTS`, y la forma de realizar el movimiento en un elemento de la colección en `MovimientoTS`.

Además de las clases que implementan los distintos algoritmos de las políticas propuestas, y de las demás entidades de datos, están aquellas clases que permiten la invocación de las distintas políticas por medio del usuario, así como las que permiten el ingreso y la salida datos, hacia y desde la biblioteca.

La clase `LeerDatosELSR` es la que se encarga de implementar lo necesario para desde un archivo de texto plano (txt), extraer los datos necesarios y crear una instancia de la clase `ProblemaELSR`. También aquellos otros datos que fueran necesarios para una determinada política, como en el caso de los algoritmos de *Tabu Search*. El formato que debe tener ese archivo se presenta en la Sección 4.3 de Definiciones de Implementación.

Por otra parte la clase `EscribirDatosELSR` es la que se encarga de implementar lo necesario para generar en un archivo en formato html o csv (valores separados por comas), con los datos de una política ELSR, así como el costo de la misma. Se ha pensado en estos dos formatos de archivos, para brindar la posibilidad de un resultado orientado a la facilidad de visualización (html) o de la facilidad de uso (csv) en una planilla electrónica.

Todas las clases anteriores son invocadas desde las clases destinadas a la implementación de la interfaz con el usuario: `InterfazEntradaSalida`, `InterfazEntradaSalidaPoliticas`, `InterfazEntradaSalidaTabuSearch`. A su vez estas clases son utilizadas desde la clase `Principal` que es la que recibe parámetros desde la línea de comandos, o sea la que puede ser invocada directamente por el usuario.

Las clases `GeneraDemandaRetorno` y `GeneraCostos`, implementan la generación de distintos valores aleatorios, de demanda y retornos en el primer caso, y de costos en el segundo. Esto será necesario para establecer distintas situaciones de retornos vs demanda, ante valores distintos de costos, cuando se realice el testeo de las políticas, que son presentados en la Sección 5. De la misma manera la clase `TiempoEjecucion` es donde se implementa lo necesario para medir los tiempos de ejecución de una determinada porción de código. En nuestro caso nos va a interesar medir el tiempo de ejecución de una determinada política.

3. Definiciones de la Implementación

Para la elección del lenguaje de implementación se han tenido en cuenta las características deseables que se pretende para la solución. En este sentido se ha priorizado la independencia de la plataforma, y si bien en un principio se debe proveer la invocación desde línea de comandos, se debe prever la extensión a un contexto de interoperabilidad con otras soluciones informáticas, así como la posibilidad de ser invocado desde otros contextos, como por ejemplo, cliente-servidor y web. Además se ha considerado la facilidad de traslación del diseño a la codificación, y las facilidades disponibles de los lenguajes para el manejo de entrada y salida por medio de archivos.

Según nuestro conocimiento, uno de los el lenguajes que satisface de mejor manera estos requerimientos en forma conjunta es Java, teniendo en cuenta su portabilidad entre sistemas operativos, su uso extendido debido a la facilidad del mismo, y la cantidad de recursos disponibles de forma gratuita a través de Internet.

Además una solución implementada en Java, permite fácilmente ser integrada a cualquier contexto de ejecución utilizando para esto las facilidades de la plataforma J2EE, y las distintas implementaciones certificadas de servidores de aplicaciones como por ejemplo JBoss y Geronimo-Apache, ambos de uso libre.

Para el desarrollo en Java se usará la versión 1.4.1_04 de J2SE, y el ambiente de desarrollo provisto por la herramienta de uso libre, Eclipse, en su versión 3.0.

En cuanto al formato que debe tener del archivo de texto plano con los datos del problema y de las políticas, para el caso que sea necesario, se utiliza la regla de un componente de dato por línea, y se diferencia entre el caso de costos estáticos y costos dinámicos. Cada componente se identifica con un nombre particular, seguido de un símbolo de igual, y la lista de valores, separados por coma si es más de uno, entre llaves. En el caso de costos estáticos sólo es necesario aportar el valor de cada componente una vez, y en el caso dinámico es necesario aportar el valor de cada componente para cada uno de los períodos. Observar que el primer caso se brinda como una facilidad del primero. El archivo termina con una línea con el carácter #, en el entendido que las líneas posteriores a está no serán tenidas en cuenta, y por ejemplo pueden usarse para documentación o comentarios. A continuación se brinda una definición formal de los componentes del archivo de texto de entrada de datos:

Nombre	**Descripción**	**Tipo valor**	**Restricciones**
`Tipo`	Indica si es un problema de costos estáticos (0) o dinámicos (1)	{0,1}	Primer línea
`n`	Número de períodos	Entero positivo	Siempre un sólo valor
`Kp`	Costo fijo de producir	Punto Flotante positivo	En el caso dinámico: *n* valores separados por coma, en el caso estático un sólo valor
`Kr`	Costo fijo de remanufacturar	Punto Flotante positivo	Ídem Kp
`Kd`	Costo fijo de disponer finalmente	Punto Flotante positivo	Ídem Kp
`cp`	Costo unitario de producir	Punto Flotante positivo	En el caso dinámico: *n* valores separados por coma, en el caso estático un sólo valor
`cr`	Costo unitario de remanufacturar	Punto Flotante positivo	Ídem cp
`cd`	Costo unitario de disponer finalmente	Punto Flotante positivo	Ídem cp
`hs`	Costo unitario de mantener en inventario de artículos listos	Punto Flotante positivo	En el caso dinámico: *n* valores separados por coma, en el caso estático un sólo valor
`hr`	Costo unitario de mantener en inventario de artículos usados	Punto Flotante positivo	Ídem hs
`D`	Demanda	Entero positivo	*n* valores separados por coma
`R`	Retorno	Entero positivo	*n* valores separados por coma
`Mveces`	Número de veces a remanufacturar para la política RMAXM	Entero positivo	Un sólo valor menor o igual a *n*
`Qm`	Tamaño de la producción para las políticas Push y Pull	Entero positivo	Un sólo valor
`Qr`	Tamaño de la remanufacturación para la política Push	Entero positivo	Un sólo valor
`sd`	Nivel donde comienza la disposición final para las políticas Push y Pull	Entero positivo	Un sólo valor
`sr`	Nivel mínimo de remanufacturación para la política Pull	Entero positivo	Un sólo valor
`Sr`	Nivel máximo de	Entero positivo	Un sólo valor

	remanufacturación para la política Pull		
`Ip`	Períodos de producción para las políticas LPT y Tabu Search. Un 1 para indicar que es un período de intención, y un 0 en otro caso	{0,1}	*n* valores separados por coma
`Ir`	Períodos de remanufacturación para las políticas LPT y Tabu Search. Un 1 para indicar que es un período de intención, y un 0 en otro caso	{0,1}	*n* valores separados por coma
`Id`	Períodos de disposición final para las políticas LPT y Tabu Search. Un 1 para indicar que es un período de intención, y un 0 en otro caso	{0,1}	*n* valores separados por coma
`TSm`	Tamaño de la lista Tabú para las políticas de Tabu Search	Entero positivo	Un sólo valor
`TSf`	Tamaño de la lista de soluciones factibles para la política de Tabu Search estocástico	Entero positivo	Un sólo valor
`TSk`	Número máximo de iteraciones para las políticas de Tabu Search	Entero positivo	Un sólo valor
`TsnroMov`	Número de movimientos a aplicar a la solución actual para la política de Tabu Search estocástica	Entero positivo	Un sólo valor
`TSsip`	Indica si se desea (1) o no (0) explorar en la actividad de producción para la política de Tabu Search estocástica	{0,1}	Un sólo valor
`TSsir`	Indica si se desea (1) o no (0) explorar en la actividad de remanufacturación para la política de Tabu Search estocástica	{0,1}	Un sólo valor
`TSsid`	Indica si se desea (1) o no (0) explorar en la actividad de disposición final para la política de Tabu Search estocástica	{0,1}	Un sólo valor
`TSmaxIter`	Máximo número de iteraciones sin mejora de la política Tabu Search	Entero positivo	Un sólo valor

En todos los casos el formato de cada línea es el siguiente:

```
<Nombre_componente>={<Valor>[,<Valor>]}
```

En donde `<Nombre_componente>` es uno de los componentes posibles y <Valor> es el valor o una lista de valores separada por comas, en el caso que corresponda. No debe haber espacios en blanco entre los caracteres.

Solo es válido un componente por línea y a su vez el componente no puede ocurrir más de una vez en el archivo. El archivo se finaliza con el carácter `#`. A continuación se muestra un ejemplo válido de archivo:

```
Tipo={0}
n={6}
Kp={1000}
Kr={100}
Kd={100}
cp={10}
cr={5}
cd={3}
hs={2}
hr={1}
D={10,10,10,20,20,20}
R={5,6,4,2,5,4}
Mveces={3}
Qm={20}
Qr={20}
sd={50}
sr={0}
Sr={20}
Ip={1,0,0,1,0,0}
Ir={0,1,1,0,1,1}
Id={0,0,1,1,0,0}
TSm={1000}
TSf={100}
TSk={10}
TSnroMov={2}
TSsip={1}
TSsir={1}
TSsid={0}
TSmaxIter={5}
#
```

La extensión y el nombre del archivo pueden ser cualquiera, siempre que el contenido del archivo sea sólo caracteres admisibles en un archivo de texto plano.

Para el archivo de salida, esto es los valores de la solución determinada por alguno de los procedimientos que implementan las políticas propuestas, se eligieron dos tipos de formatos: html y csv. El primero es implementa con la idea de ofrecer una mejor visualización, utilizando para esto cualquier navegador web, en cualquier plataforma, usando diferentes colores para cada una de las actividades y de los valores de cada uno de los inventarios, así como la posibilidad de proveer un fondo, o *background*, que puede determinar el usuario, por medio de un archivo con extensión jpg. Otra motivo por el que se elige esta alternativa, y no otra como por ejemplo texto plano, es que no hay que preocuparse por posicionar correctamente números de distinta cantidad de cifras, ya que el navegador o interprete de html lo realiza de forma automática. El formato csv, o sea valores separados por coma, está pensado para aquellos casos en donde se desee visualizar la información en una planilla electrónica, como por ejemplo MS-Excel, para realizar operaciones sobre los datos.

Por último la forma de invocar a las distintas políticas desde la línea de comandos es la siguiente:

```
java -cp elsrsolvers.jar Principal <politica> [<opcion>]
<archivo_IN> <archivo_OUT> <tipo>
```

En donde `elsrsolvers.jar` es el nombre de la biblioteca implementada, `<politica>` es el nombre de cada una de las políticas, y `<opcion>` es la opción en caso que corresponda, de la política. El componente `<archivo_IN>` es la ruta y el nombre , incluida la extensión, del archivo con los datos de entrada, `<archivo_OUT>` es la ruta y el nombre sin extensión, del archivo de salida, y por último `<tipo>` es uno de los tipos posibles de extensión, o sea `html` o `csv`. En el caso que la biblioteca y los archivos estén en le mismo directorio no es necesario establecer la ruta.

Los valores posibles de políticas y de opciones son los siguientes:

Política	**Opción**	**Descripción**
WW		Implementación del algoritmo de W-W tradicional
URWW		Implementación de la política URWW, extensión del algoritmo de W-W para la remanufacturación el contexto de retornos útiles
URWW	Fit	Aplicación del procedimiento de ajuste al resultado de URWW
RMAXM		Implementación de la política RMAXM, de remanufacturación máxima en M > 0 veces
RMAXM	Fit	Aplicación del procedimiento de ajuste al resultado de RMAXM
P1RM	WWR	Implementación de la política P1RM, de producir en el primer período, y remanufacturar en los M siguientes, determinados a partir de la extensión de Richter *et al* al algoritmo de W-W para el caso de remanufacturación con retornos suficientes
P1RM	SMR	Implementación de la política P1RM, de producir en el primer período, y remanufacturar en los M siguientes, determinados a partir de la extensión de la fórmula de Silver-Meal para el caso de remanufacturación con retornos suficientes
P1RM	DEM	Implementación de la política P1RM, de producir en el primer período, y remanufacturar en los M siguientes, determinados a partir de los requerimientos de demanda y los retornos disponibles en cada uno de los períodos
PNRM	WWR	Ídem P1RM con WWR, pero en donde hay N primeros períodos de producción, determinados a partir del algoritmo de W-W
PNRM	SMR	Ídem P1RM con SMR, pero en donde hay N primeros períodos de producción, determinados a partir del algoritmo de W-W
PNRM	DEM	Ídem P1RM con DEM, pero en donde hay N primeros períodos de producción, determinados a partir del algoritmo de W-W
LPT		Implementación de la política Lineal Por Tramo, la cual determina las cantidades, dados los períodos de cada una de las actividades
RSiempre		Implementación de la política RSiempre: Remanufacturar siempre la cantidad necesaria para satisfacer la demanda del período actual, y en caso de no disponer de los retornos suficientes, producir el faltante en el período actual o no el último de producción positiva anterior, según sea la opción más conveniente

`Push`		Implementación de la política Push para el caso determinístico de tiempo discreto
`Pull`		Implementación de la política Pull para el caso determinístico de tiempo discreto
`NoR`		Implementación de la política NoR: No remanufacturar en ningún período, producir toda la demanda según el algoritmo de W-W, y disponer finalmente el total de los retornos según el algoritmo de URWW aplicado esta vez a la disposición final
`TSRH`		Implementación de Tabu Search determinístico, basado en una exploración de distintas soluciones de remanufacturación, que parte de la solución inicial de solamente producir en el primer período
`TSRH`	`URWW`	TSRH que parte de una solución determinada a partir de la aplicación de la política URWW
`TSRH`	`PNRM`	TSRH que parte de una solución determinada a partir de la aplicación de la política PNRM
`TSRH`	`RSiempre`	TSRH que parte de una solución determinada a partir de la aplicación de la política RSiempre
`TSPRD`		Implementación de Tabu Search estocástico, basado en una exploración de distintas soluciones de producción y/o remanufacturación y/o disposición final, que parte de la solución inicial de solamente producir en el primer período
`TSPRD`	`URWW`	TSPRD que parte de una solución determinada a partir de la aplicación de la política URWW
`TSPRD`	`PNRM`	TSPRD que parte de una solución determinada a partir de la aplicación de la política PNRM
`TSPRD`	`RSiempre`	TSPRD que parte de una solución determinada a partir de la aplicación de la política RSiempre

Para facilitar la forma de invocación se puede construir un script de ejecución con el comando `java -cp elsrsolvers.jar Principal` para de esta manera sólo escribir los componentes restantes necesarios, que son el nombre de la política, con las opciones si corresponde, el nombre del archivo de entrada con la extensión incluida, el nombre del archivo de salida, y la extensión deseada.

Con respecto a la clase `TiempoEjecucion` , para medir los tiempos de ejecución de porciones de código, se opta por utilizar una implementación disponible en Internet que permite tomar el tiempo de ejecución del código entre dos sentencias dadas. Este recurso se llama `Stopwatch`, es de uso libre, y se puede obtener en http://www.cs.rhul.ac.uk/home/alexc/teaching/code/StopWatch.java. De la misma manera para la generación de los valores de demanda, retornos y de costos se usará la clase `Random` de Java, que provee de funciones para la generación de números pseudoaleatorios en un rango dado.

4. Correctitud de los Algoritmos

Para demostrar la correctitud de los algoritmos se emplea el método informal de análisis de los resultados, en este caso de la solución obtenida según la política de inventario aplicada. Primero se verifica la factibilidad de la solución, exigiendo que los niveles de ambos inventarios sean positivos. Luego se analiza la forma de la solución, para ver que concuerda con la definición de la política. Por último se verifica que el costo de la solución sea el correcto, haciendo un cálculo manual del mismo según los valores obtenidos de producción, remanufacturación y disposición final, así como de los niveles de ambos inventario en cada período.

Para el primer y tercer punto, o sea el de la factibilidad y el del costo total, se emplea en todas las implementaciones la misma porción de código, para de esta manera facilitar las pruebas de correctitud. El cálculo de los niveles de inventario y del costo total se realiza al final, luego del cálculo de la producción, remanufacturación y disposición final. Esto es así, aunque durante el cálculo de los valores de las actividades se emplee el valor de alguno de los niveles de inventario. El procedimiento para obtener el costo total de la política aplicada, se implementa independientemente del código de cada una de las políticas, y esta basado sólo en los valores de las actividades y de los niveles de inventario. De esta manera nos aseguramos que en todos los casos los niveles de inventario y el costo total, se determinan de la misma forma.

Lo más difícil, como es de esperar, es demostrar la correctitud de la implementación con respecto a la definición de la política. Para ello se emplea el análisis de los valores, tanto de las actividades como de los niveles de inventario, según la descripción de la política brindada en la Sección 3.3 o 3.4 de este documento. Esta tarea no es sencilla, ya que en muchos casos depende de una evaluación de alternativas para tomar la de menor costo. Sin embargo se pueden detectar errores observando la forma de la solución, como por ejemplo: períodos donde se realiza cada actividad, cuando comienza y termina una actividad determinada, los valores de la misma según los niveles de inventario, etc.

La correctitud de los algoritmos con respecto a estos tres puntos, se verificará para una cantidad considerable de pruebas, sobre todo en los resultados obtenidos de los testeos presentados en la Sección 5 y en el anexo correspondiente. Queda como trabajo futuro utilizar alguna herramienta de verificación semi-automática para demostrar la verificación de la correctitud de los algoritmos, que por limitaciones de tiempo, se decide dejarlo fuera del alcance de esta Tesis.

5. Mejoras y Mantenimiento

A continuación se presentan algunas de las mejoras posibles que se pueden realizar a la implementación de la biblioteca, que por motivos de tiempo no fueron incluidas en la presente implementación.

Dentro de las mejoras posibles a la implementación realizada, en primera instancia está la de un control estricto de los valores dados, para evitar situaciones de errores, ya que por limitaciones temporales no se pudieron cubrir todos los casos necesarios.

Si bien, la eficiencia en cuanto al tiempo de ejecución, no era un requisito explícito, ya que el objetivo fundamental era el desarrollo de una biblioteca de políticas sencillas en su forma, desarrollando para esto algoritmos polinomiales cuadráticos o lineales, a lo largo del desarrollo de la tesis, surgieron algoritmos de mayor complejidad como es el caso de la política RMAXM, o las implementaciones de *Tabu Search*, en donde se realiza una exploración del espacio de soluciones, que a veces puede ser grande, si la cantidad de período lo es. Por lo tanto, una mejora podría ser revisar la implementación de ciertas clases, para un uso más eficiente de la memoria mediante una disminución en la creación de objetos, o la determinación de clases estáticas.

También relacionado con el tiempo, está el hecho de que Java se ejecuta sobre una máquina virtual o *Java Virtual Machine*, y no directamente sobre la máquina, como sucede con el código binario obtenido de una compilación como en el caso de un desarrollo en C o C++. Esto se puede sortear mediante operaciones destinadas a mejorar el código precompilado o *ByteCode* a partir de un fuente Java, que se ejecuta sobre una JVM, bien utilizando directivas en la compilación u otras herramientas de optimización de código Java, que por motivos de tiempo no han sido utilizadas.

Otros de los puntos a mejorar, es el de la generación de valores aleatorios, ya que para estos casos fue utilizada la clase `Random` de Java, y seguramente existan implementaciones mejores para la generación de números pseudoaleatorias en Java, de uso libre, disponibles a través de la web.

. Testeos de las Políticas Propuestas

En esta sección del informe se presentan los resultados obtenidos en los diferentes tests realizados. El objetivo del testeo es analizar el comportamiento de las políticas y procedimientos de resolución propuestos, con respecto a la minimización de los costos involucrados. Para esto fue necesario establecer varios marcos de pruebas, ya que según nuestro conocimiento no existe una biblioteca de casos de prueba disponible, por ejemplo a través de Internet. Por lo tanto se construyeron y analizaron distintas situaciones de retornos versus demanda, para diferentes relaciones de costos de producción y remanufacturación, y de mantener en inventario artículos listos y usados.

Básicamente la idea consiste en evaluar una determinada situación de retornos versus demanda, como por ejemplo retornos bajos, medios o altos según los valores promedios de ambas cantidades, bajo diferentes relaciones de costos. Para todos los casos, se supone que el costo de remanufacturar es a lo sumo igual al de producir, y que el costo de mantener en inventario artículos usados es lo sumo igual al de mantener artículos listos. De esta manera se comienza con una relación de costos iguales, y se van aumentando paulatinamente los costos de producir y/o de mantener en inventario artículos listos, para la misma situación de demanda y retornos.

Las situaciones de demanda versus retornos se generaron para cuatro diferentes marcos de análisis diferentes:

- **Costos estáticos**: El mismo valor de un tipo de costo para todos los períodos, con un número razonable de períodos
- **Costos dinámicos**: Distintos valores del mismo tipo de costo, para cada uno de los períodos, con un número razonable de períodos
- **Problemas de gran tamaño**: Costos estáticos, y un número de períodos grande
- **Demanda y retornos estacionales**: Costos estáticos, y diferentes relaciones con respecto a los valores de demanda y de retornos, con un número razonable de períodos.

Dentro de estos marcos, el de costos estáticos fue el caso analizado en profundidad, ya que es el que admite de una forma más sencilla y ágil, el cambio de los valores de los distintos tipos de costos, debido a que es un mismo valor para todos los períodos. Por lo tanto, también es el caso que permite realizar más pruebas para medir el comportamiento de las distintas políticas. Para el resto de los marcos, se realizó una menor cantidad de pruebas que para el caso de costos estáticos, debido a que hay un esfuerzo considerable en la generación de los distintos valores. De todas maneras las pruebas realizadas en todos los casos sirvieron para obtener una idea general del comportamiento de las políticas.

En el siguiente punto se detallan las consideraciones y características generales para los marcos de prueba establecidos, así como decisiones tomadas para las políticas y procedimientos de resolución propuestos, en los casos que sea necesario.

1. Consideraciones Generales

Para la determinación de los valores de demanda y retornos se utiliza la relación promedio entre ambas cantidades, esto es retornos bajos o escasos, medios, altos, muy altos y similares a la demanda. Las distintas secuencias son generadas a través de una utilidad presente en la biblioteca implementada, que retorna números aleatorios dentro de un rango de valores, determinado por un límite inferior y superior dados. Se utilizó para todos los casos una demanda promedio de 200 y promedios de retornos iguales a 25, 50, 75, 100, 125, 150, 175 y 200, según las relaciones mencionadas anteriormente. Para algunos de los marcos propuestos, debido al esfuerzo para generar los distintos valores, sólo se evaluaron algunas de las combinaciones posibles, pero las suficientes para tener una idea, a nuestro juicio, del comportamiento de las políticas.

Para los valores de los costos en el caso estático se utilizó una escala de valores arbitrarios que permite manejar fácilmente el aumento progresivo de los costos de producir y/o de inventario de artículos listos. Para el caso de costos dinámicos se procedió de forma similar al de generación de valores de retornos y demanda, utilizando un rango de valores para cada uno de los componentes de los costos, teniendo en cuenta el valor promedio de la secuencia generada, para la relación entre los distintos tipos de costos.

Para la mayoría de los tests se comparó el costo de la solución de cada una de las políticas, con el costo de la solución obtenida con GAMS/Cplex. Excepto en el caso en que la cantidad de períodos es grande, ya que con la versión de distribución gratuita de GAMS hay limitaciones en el número de variables enteras y binarias. Para este último caso se usó el costo de una mejor solución estimada, que se detallará cuando se presenten los resultados. Aún en los casos de un número razonable de períodos fue necesario considerar un modelo GAMD donde no hay disposición final, para no tener conflictos con la licencia, debido a que el número de variables binarias del modelo completo supera el máximo permitido. El testeo consistió entonces en medir la diferencia entre el costo de la solución de cada una de las políticas y el costo de la solución obtenida con GAMS/Cplex, o en su defecto, de una estimación de la misma.

Se analizaron casi todas las políticas propuestas, menos la política Lineal Por Tramo, LPT, ya que esta es utilizada indirectamente por los procedimientos de resolución propuestos de *Tabu Search*. En principio no resulta de interés el análisis independiente de esta política porque está bien establecido su comportamiento, dada la forma de la misma. Para las políticas Push, Pull, se utilizan valores arbitrarios para los parámetros, que sean consistentes con los valores de demanda y retornos del problema. Para los procedimientos basados en *Tabu Search* se emplea como solución inicial de partida, aquella que consta de producir sólo en el primer período el total de la demanda, o la solución obtenida del resultado de la aplicación de alguna de las siguientes políticas: URWW y PNRM. Por último, para la política RMAXM, se utiliza como número de veces a remanufacturar, el número de veces que indica la solución de GAMS.

Solo se consideró una situación en donde los retornos pueden ser excesivos con respecto a la demanda, y es aquella en donde ambas cantidades en promedio son 200. Por eso no se considera la variación en los costos de disponer finalmente, además de que el contexto original para la propuesta de las políticas era maximizar la recuperación de los retornos, ya que está asociado con un mayor beneficio ecológico, y como veremos en la mayoría de los casos, también económico.

Para todos los testeos se utilizó un PC con sistema operativo XP Profesional, en español, versión 2002, Service Pack 1, con CPU Intel Pentium 4, 2.26 GHz y 512 MB de RAM. Los tiempos de ejecución registrados de los distintos algoritmos, salvo en el caso de problemas de gran tamaño, fueron del orden de 100 a 500 milisegundos en casi todos los casos, salvo para la política RMAXM que estuvo en el orden máximo de 15 segundos, dependiendo del número M, de veces a remanufacturar.

En las siguientes secciones se brinda un detalle de cada uno de los marcos propuestos así como los resultados obtenidos para las políticas analizadas.

2. Costos Estáticos

En este marco de costos se analizaron 8 combinaciones distintas de valores de demanda y de retornos, utilizando para la demanda un valor promedio de 200 y para los retornos valores promedios de 25, 50, 75, 100, 125, 150, 175 y 200, para una cantidad de períodos n = 24. Para los costos se utilizaron los siguientes valores base: costos fijos de producir, remanufacturar y disponer finalmente de 500, costos unitarios de producir y remanufacturar 5, costo unitario de disponer finalmente igual a 3 y costos de mantener en inventario artículos listos y usados iguales a 1.

Para cada combinación de demanda y de retornos, se analizaron 9 valores posibles de costos, dentro de tres contextos de variación posibles: aumento de los costos de producir y de mantener en inventario artículos listos, aumento sólo de los costos de producir, y aumento sólo de los costos de mantener en inventario artículos listos. La escala utilizada para el aumento fue: 1, 2, 4, 6, 8, 10, 20, 30 y 50 que determinan los nueve valores posibles, en cada uno de los contextos. En aquellos contextos donde sólo hay variación en un tipo de costos, se utilizo una relación de 2 con respecto al costo que queda invariante.

De esta manera en total se analizaron 8 * 9 * 3 = 216 situaciones en total, lo cual consideramos que es un número bastante razonable para determinar el comportamiento de las políticas.

Con respecto a las políticas evaluadas, se analizaron nueve políticas, y para algunos casos usando opciones diferentes:

- URWW
- URWW Fit
- RSiempre
- P1RM WWR
- PNRM WWR
- PNRM SMR
- RMAXM
- Push
- Pull
- TSRH
- TSRH URWW
- NoR

La política URWW Fit, es la política URWW empleando el procedimiento de ajuste definido en la Sección 3.3.3. Para el caso de P1RM y PNRM, la opción WWR es la aplicación de la extensión del algoritmo de W-W para retornos suficientes presentado por

Richter *et al* en [27], a la vez que SMR es la extensión de la fórmula de Silver-Meal realizada en nuestro trabajo. En cuanto a *Tabu Search* se analizó sólo el caso determinístico, o sea la política TSRH, ya que la cantidad de períodos es razonable y no parece tener sentido una exploración aleatoria. Se evaluaron dos opciones de TSRH, una en la que la solución inicial es sólo producir en el primer período, y no hay remanufacturación ni disposición final, y la solución determinada por los períodos de actividad obtenidos de la aplicación de la política URWW. Para ambos casos se utilizó el mismo tamaño de lista Tabú de 10000, que es ampliamente mayor al máximo necesario y un mismo número de iteraciones de 50, sin tener en cuenta el parámetro de número máximo de iteraciones sin mejora.

A continuación se resumen los resultados obtenidos para 4 de las 8 situaciones de retornos vs. demanda consideradas, y en el contexto en que varían tanto los costos de producir, como los de mantener en inventario de artículos listos, que es uno de los tres posibles, presentando la diferencia en porcentaje del costo de cada una de las políticas con respecto al costo de la solución obtenida con GAMS con el solver Cplex. En el documento anexo correspondiente, se brindan los resultados para todos los casos de demanda y retornos. En todos los casos la demanda promedio es de 200, y la cantidad de períodos es 24.

R=50	**Costos Kp/Kr, cp/cr, hs/hr**								
Políticas	**1**	**2**	**4**	**6**	**8**	**10**	**20**	**30**	**50**
URWW	1,39	1,25	1,82	2,08	2,2	2,3	2,5	2,62	2,78
URWW Fit	1,39	1,25	1,8	2,08	2,2	2,3	2,5	2,62	2,78
RSiempre	11,48	9,25	6,87	6,49	6,26	6,15	5,91	5,88	5,92
P1RM WWR	94,34	98,48	101,59	102,46	102,87	103,16	103,78	104,09	104,47
PNRM WWR	21,8	13,4	7,86	5,38	4,04	3,24	1,59	1,07	0,71
PNRM SMR	21,8	13,93	7,91	5,38	4,04	3,24	1,59	1,07	0,71
RMAXM	1,39	0	0,14	0,66	0,3	0,35	0,45	1,32	0,66
TSRH	1,26	0,13	0	0,02	0	0,01	0,54	0,19	0,28
TSRH URWW	1,07	0	0,12	0,23	0,19	0,17	0,15	0,19	0,28
Push	10,84	13,28	15,58	16,53	17,01	17,32	17,98	18,26	18,57
Pull	50,34	44,16	41,08	40	39,4	39,05	38,35	38,17	38,12
NoR	15,5	21,81	26,66	28,59	29,57	30,21	31,53	32,04	32,54

R=100	**Costos Kp/Kr, cp/cr, hs/hr**								
Políticas	**1**	**2**	**4**	**6**	**8**	**10**	**20**	**30**	**50**
URWW	1,54	2,24	5,14	6,61	7,44	8,01	9,36	9,94	10,57
URWW Fit	1,54	2,09	4,86	6,26	7,07	7,61	8,91	9,48	10,09
RSiempre	7,44	7,88	9,2	12,96	12,52	12,46	12,82	12,78	15,9
P1RM WWR	49,02	51,55	53,56	53,28	53,12	53,06	53,06	53,19	53,5
PNRM WWR	25,52	19,63	13,78	9,89	7,67	6,26	3,27	2,27	1,57
PNRM SMR	25,52	20,59	14,04	9,89	7,67	6,26	3,27	2,27	1,57
RMAXM	1,54	1,82	4,32	5,31	5,88	6,26	7,24	7,67	8,18
TSRH	0,97	1,7	0,19	0,08	0,02	0,64	0,41	0,36	1,09
TSRH URWW	0,73	0,3	0,68	0,71	0,73	0,77	2,02	1,99	2,09
Push	15,01	41,24	57,15	66,88	72,44	101,38	105,15	58,29	59,68
Pull	44,06	61,34	79,62	88,16	93,03	108,21	114,77	144,1	146,4
NoR	28,42	48,44	68,75	78,18	83,57	87,1	95,03	98,07	100,86

R=150	**Costos Kp/Kr, cp/cr, hs/hr**								
Políticas	**1**	**2**	**4**	**6**	**8**	**10**	**20**	**30**	**50**
URWW	0,58	3,61	9	13,92	17,23	19,58	25,43	27,83	29,95
URWW Fit	0,58	3,02	7,72	12,23	15,25	17,4	22,76	24,94	26,9

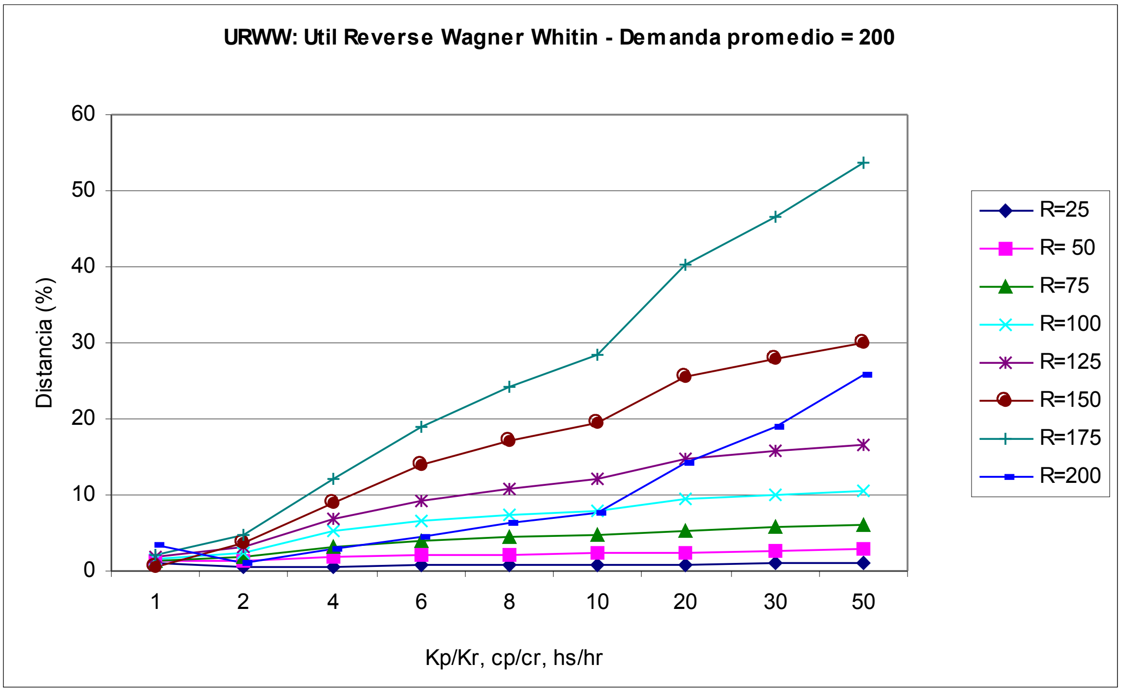
RSiempre	7,46	8,95	14,22	14,35	14,47	14,55	18,49	18,35	18,24
P1RM WWR	15,26	18,56	19,46	19,12	18,94	18,81	18,49	18,35	18,24
PNRM WWR	11,4	12,39	10,51	8,42	7,07	6,11	3,72	2,74	1,87
PNRM SMR	12,76	12,84	10,82	8,42	7,07	6,11	3,72	2,74	1,87
RMAXM	0,58	3,61	11,45	15,61	18,4	20,38	25,33	27,35	29,15
TSRH	0,49	2,49	0,15	1,55	3,28	3,53	4,17	3,7	3,85
TSRH URWW	1	0,63	1,09	2,27	3,07	3,65	2,83	3,16	3,91
Push	20,05	32,75	49,87	62,25	70,52	76,4	91,05	97,05	102,37
Pull	94,19	138,11	193,28	230,04	254,52	271,96	315,35	333,14	348,9
NoR	38,19	80,72	133,23	167,46	190,25	206,48	246,86	263,41	278,09

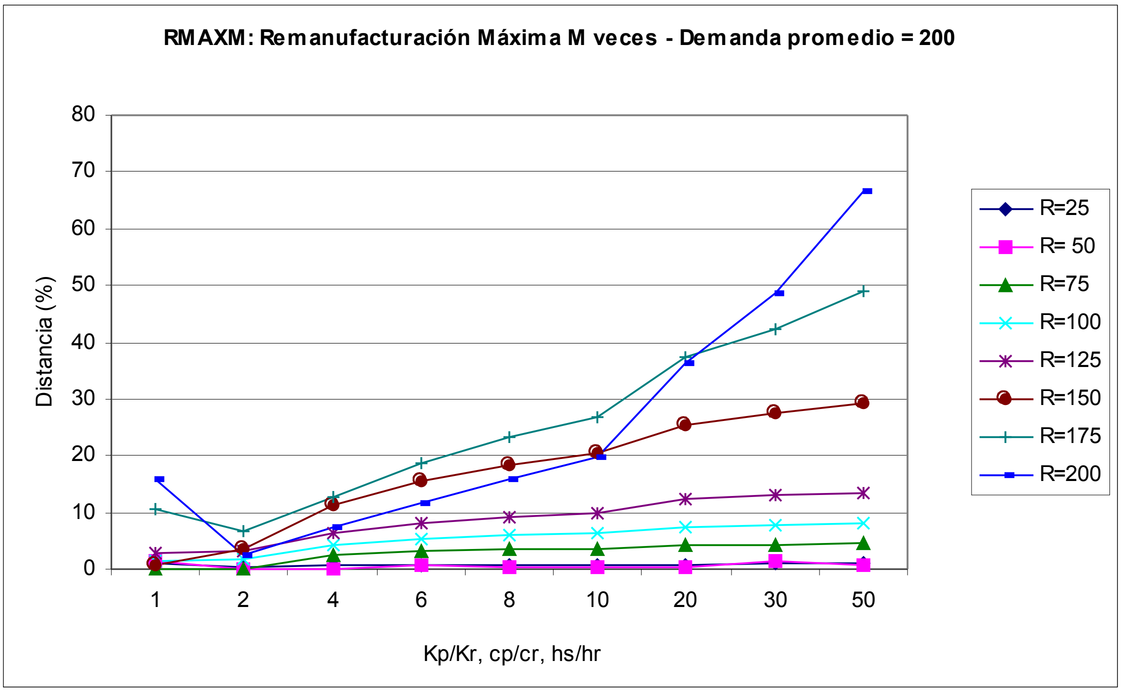
R=200	**Costos Kp/Kr, cp/cr, hs/hr**								
Políticas	**1**	**2**	**4**	**6**	**8**	**10**	**20**	**30**	**50**
URWW	3,45	0,98	2,83	4,57	6,19	7,71	14,09	18,97	25,91
URWW Fit	3,45	0	0	0	0	0	0	0	0
RSiempre	3,45	0	0	0	0	0	0	0	0
P1RM WWR	3,45	0	0	0	0	0	0	0	0
PNRM WWR	3,45	0	0	0	0	0	0	0	0
PNRM SMR	3,45	0	0	0	0	0	0	0	0
RMAXM	15,85	2,52	7,29	11,75	15,93	19,85	36,27	48,81	66,69
TSRH	9,52	5,49	0	0	0	0	0	0	0
TSRH URWW	3,45	0	0	0	0	0	0	0	0
Push	57,31	109,4	218,19	319,78	414,87	504,07	878,2	1163,8	1571
Pull	109,87	189,2	353	505,97	649,15	783,45	1346,8	1776,8	2389,9
NoR	52,16	129,19	284,97	430,45	566,62	694,35	1230,1	1639,1	2222,1

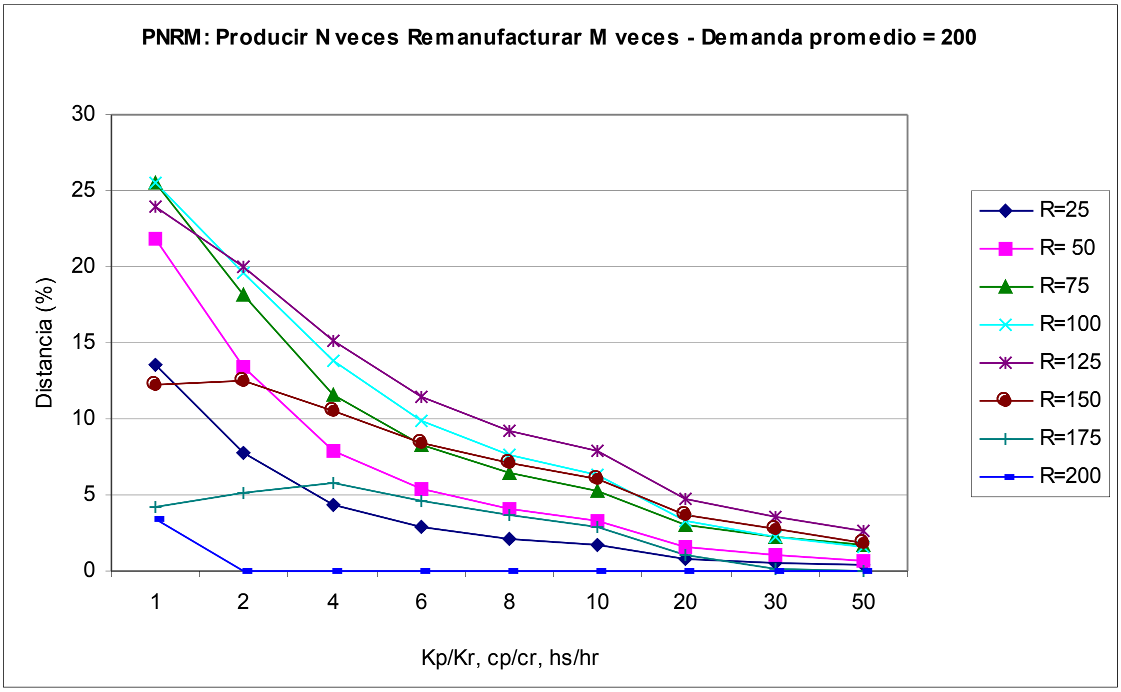
El caso en que sólo varían los costos de producción, arrojó resultados similares al caso en que varían ambos costos es decir también los de mantener en inventario artículos listos. En el caso que sólo aumentan los costos de mantener en inventario artículos listos, y los de producir se mantienen en la misma relación con respecto a los de remanufacturar, los resultados son diferentes, pero se mantiene la forma de comportamiento de las políticas.

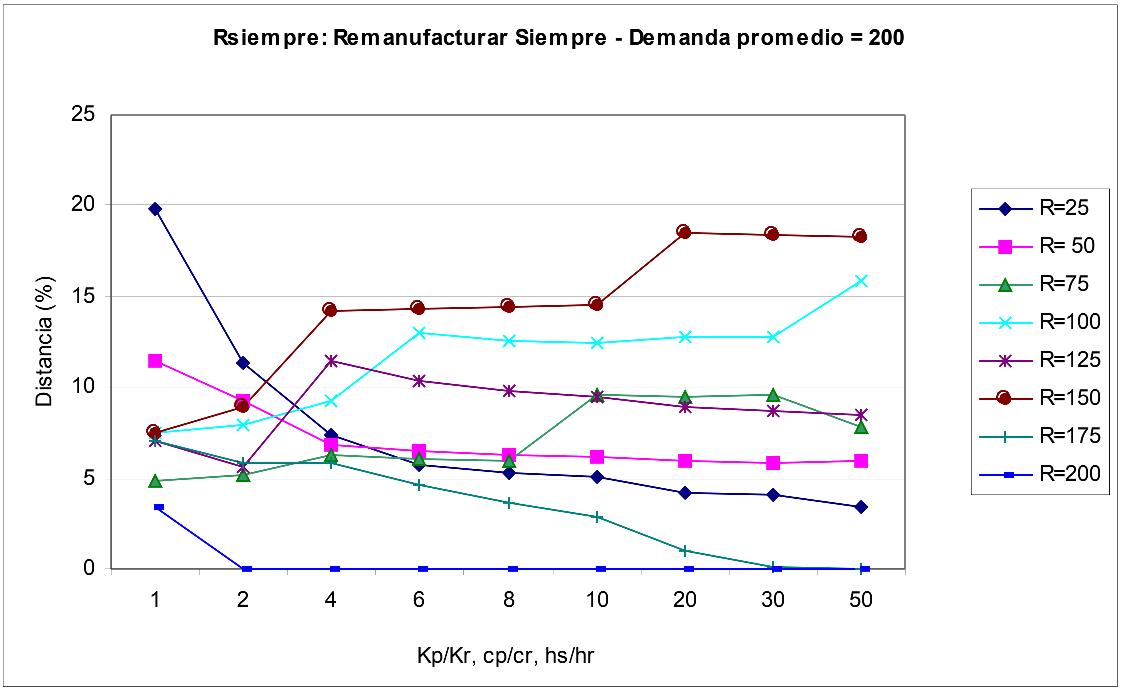
Se tomaron los tiempos de ejecución de los distintos algoritmos de implementación de las políticas, y en todos los casos se registraron tiempos que varían de los 100 a 500 milisegundos, excepto en el caso de RMAXM, que varía entre 1 y 15 segundos. El motivo para esta diferencia en los tiempos, es que el orden del algoritmo de RMAXM depende de la relación entre la cantidad de períodos y las veces a remanufacturar.

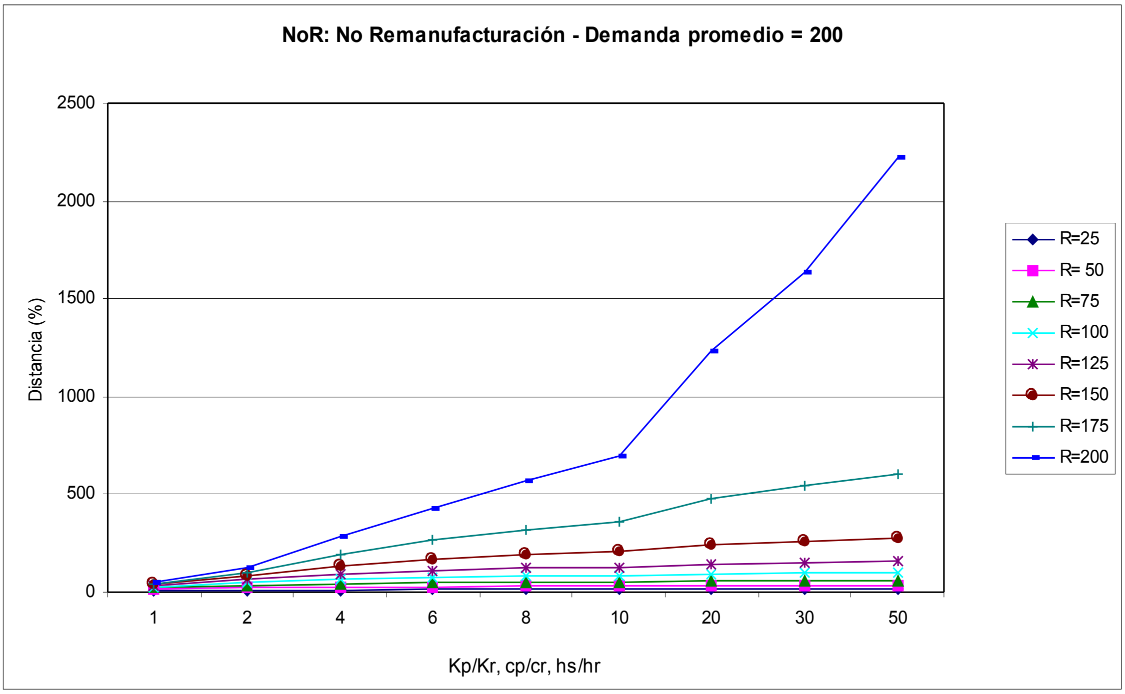
A continuación mostramos para algunas políticas, los gráficos que se obtienen a partir de las distintas situaciones analizadas.


URRWW: Util Reverse Wagner Whitin - Demanda promedio = 200
Distancia (%)
60
50
40
30
20
10
0
1
2
4
6
8
10
20
30
50
Kp/Kr, cp/cr, hs/hr
R=25
R= 50
R=75
R=100
R=125
R=150
R=175
R=200

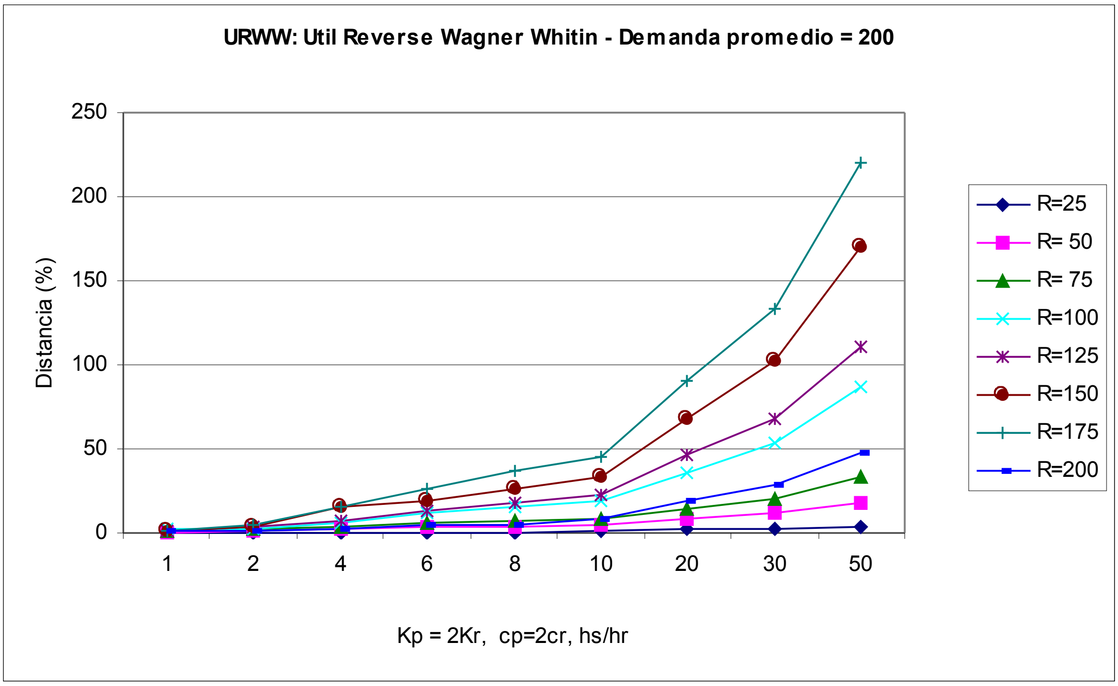

RMAXM: Remanufacturación Máxima M veces - Demanda promedio = 200
Distancia (%)
80
70
60
50
40
30
20
10
0
1
2
4
6
8
10
20
30
50
Kp/Kr, cp/cr, hs/hr
R=25
R= 50
R=75
R=100
R=125
R=150
R=175
R=200

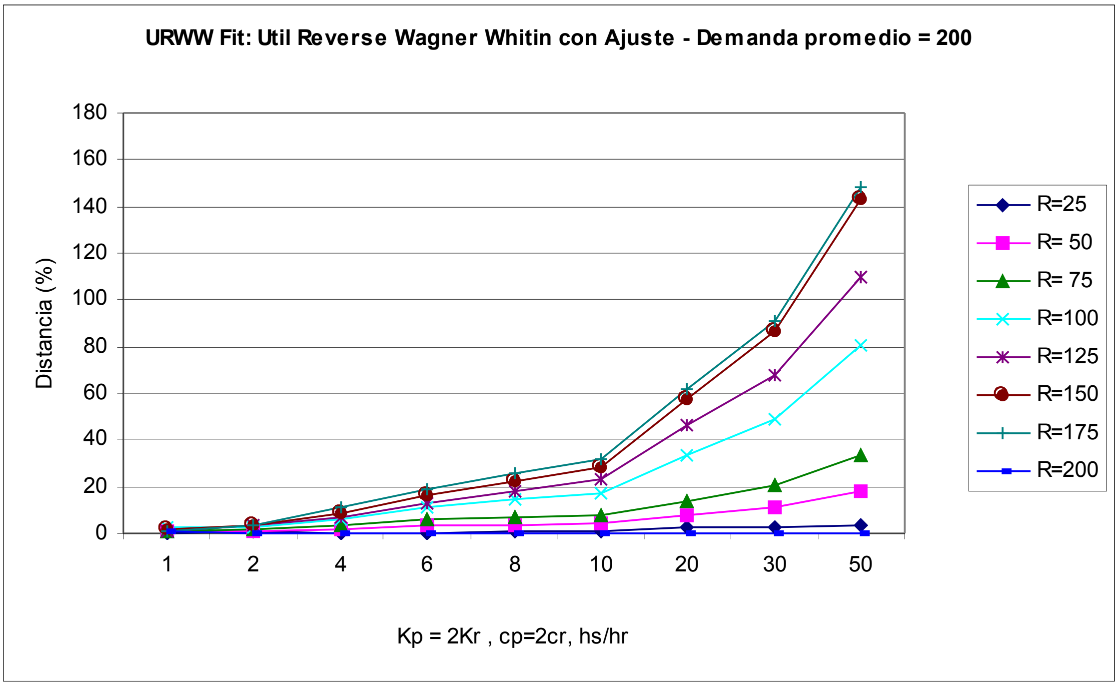

PNRM: Producir N veces Remanufacturar M veces - Demanda promedio = 200
30
25
20
15
10
5
0
Distancia (%)
1
2
4
6
8
10
20
30
50
Kp/Kr, cp/cr, hs/hr
R=25
R= 50
R=75
R=100
R=125
R=150
R=175
R=200


Rsiempre: Remanufacturar Siempre - Demanda promedio = 200
25
20
15
10
5
0
Distancia (%)
1
2
4
6
8
10
20
30
50
Kp/Kr, cp/cr, hs/hr
R=25
R= 50
R=75
R=100
R=125
R=150
R=175
R=200



Algo interesante de observar, es que cuando sólo aumentan los costos de mantener en inventario artículos listos y los niveles de retornos son altos, el ajuste definido en 3.3.3 para las cantidades a remanufacturar, tiene un impacto positivo en la minimización de los costos, como lo muestran las dos siguientes gráficas.





Si bien en ambos casos, el comportamiento de ambas políticas desmejora notablemente a medida que aumentan los costos de mantener en inventario, se puede apreciar la diferencia entre los valores de uno y otro caso, y en la medida del crecimiento.

3. Costos Dinámicos

En este caso se analizan diferentes situaciones de retornos versus demandas, en donde los costos son dinámicos, es decir pueden variar de período en período, con una cantidad de período n = 24. Para determinar los valores de cada uno de los costos, se utilizó la generación de números pseudoaleatorios en un rango dado por un límite inferior y superior. Se establecieron cuatro situaciones de costos dinámicos, en donde se aumentó paulatinamente el costo de producir con respecto al de remanufacturar y el costo de mantener en inventario artículos listos, contra el de mantener en inventario artículos usados. Los rangos empleados para cada una de las situaciones planteadas son los siguientes:

Caso	***Kp***	***Kr***	***Kd***	***cp***	***cr***	***cd***	***hs***	***hr***
1	(1000,2000)	(1000,2000)	(1000,2000)	(50,100)	(50,100)	(20,40)	(1,20)	(1,20)
2	(2000,4000)	(1000,2000)	(1000,2000)	(100,200)	(50,100)	(20,40)	(10,40)	(1,20)
3	(5000,10000)	(1000,2000)	(1000,2000)	(250,500)	(50,100)	(20,40)	(20,80)	(1,20)
4	(10000,20000)	(1000,2000)	(1000,2000)	(500,1000)	(50,100)	(20,40)	(40,100)	(1,20)

En donde *Kp*, *Kr*, *Kd*, *cp*, *cr*, *cd* son los costos fijos y unitarios asociados a la producción, remanufacturación y disposición final, respectivamente, y *hs*, *hr* son los costos unitarios de mantener en inventario artículos listos y usados.

Las situaciones de demanda y retornos utilizadas fueron las mismas que para el caso de costos estáticos, pero ahora la cantidad total de combinaciones utilizada es 8*4*1 = 32, ya que no se realizó un análisis por separado de las variaciones de costos de producir y de mantener en inventario de artículos listos, debido al esfuerzo y el tiempo que se requiere para generar cada conjunto de datos. A pesar de esto pensamos que es un número importante de situaciones a analizar, que permite medir el comportamiento de las distintas políticas evaluadas.

Las políticas evaluadas son las mismas que para el caso estático:

- URWW
- URWW Fit
- RSiempre
- P1RM WWR
- PNRM WWR
- PNRM SMR
- RMAXM
- Push
- Pull
- TSRH
- TSRH URWW
- NoR

De la misma manera, las consideraciones con respecto a *Tabu Search* son iguales que para el caso de costos estáticos.

A continuación se resumen los resultados obtenidos para 4 de las 8 situaciones de retornos vs. demanda consideradas, presentando la diferencia en porcentaje con respecto al costo de cada una de las políticas y el de la solución obtenida con GAMS con el solver Cplex. En el documento anexo correspondiente, se brindan los resultados para todos los casos de demanda y retornos.

R=50	**Costos Kp/Kr, cp/cr, hs/hr**			
Políticas	**1**	**2**	**5**	**10**
URWW	2,15	1,99	3,91	3,98
URWW Fit	2,15	1,99	3,91	3,96
RSiempre	13,83	5,51	5,01	2,87
P1RM WWR	120,79	133,44	140,34	127,59
PNRM WWR	27,35	15,61	11,11	7,36
PNRM SMR	26,91	19,3	11,11	7,36
RMAXM	2,83	1,99	2,38	3,98
TSRH	0,18	0,64	0,29	0,13
TSRH URWW	0,18	0,72	0,44	0,13
Push	15,62	19,38	17,44	24,97
Pull	51,59	49,58	46,56	57,41
NoR	11,96	22,29	29,49	33,04

R=100	**Costos Kp/Kr, cp/cr, hs/hr**			
Políticas	**1**	**2**	**5**	**10**
URWW	4,29	5,6	8,24	10,65
URWW Fit	4,52	4,56	8,01	10,11
RSiempre	6,21	4,57	2,3	0,57
P1RM WWR	70,54	75,77	93,12	94,48
PNRM WWR	33,02	28,26	17,26	17,01
PNRM SMR	37,36	33,19	17,41	17,01
RMAXM	2,95	6,64	10,01	9,29
TSRH	1,03	0,38	0,39	0,99
TSRH URWW	1,37	0,38	0,46	2,01
Push	27,38	31	38,27	41,08
Pull	78,87	105,7	124,66	149,5
NoR	22,28	53,91	80,94	94,61

R=150	**Costos Kp/Kr, cp/cr, hs/hr**			
Políticas	**1**	**2**	**5**	**10**
URWW	5,12	10,53	20,7	23,03
URWW Fit	6,37	9,61	16,31	19,77
RSiempre	5,28	3,27	6,25	2,41

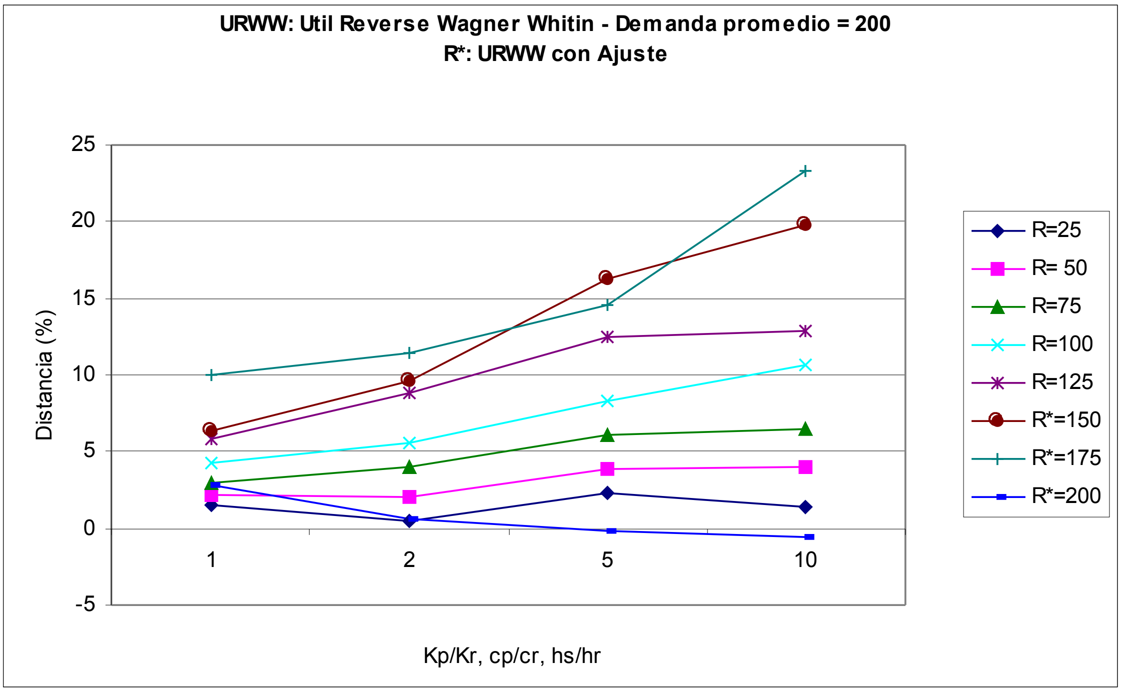
R=200	**Costos Kp/Kr, cp/cr, hs/hr**			
Políticas	**1**	**2**	**5**	**10**
URWW	3,11	2,2	3,19	4,34
URWW Fit	2,81	0,61	-0,2	-0,53
RSiempre	3,41	1,09	0,2	0

P1RM WWR	34,79	34,74	48,04	60,98
PNRM WWR	25,01	24,1	14	21,27
PNRM SMR	35,65	30,32	14,98	21,61
RMAXM	5,12	7,09	10,13	16,08
TSRH	0,7	2,56	1,87	2,9
TSRH URWW	0,7	2,77	0,87	1,91
Push	27,88	31,57	50,44	57,08
Pull	86,6	150,96	223,44	299,4
NoR	29,87	87,6	167,3	218,87

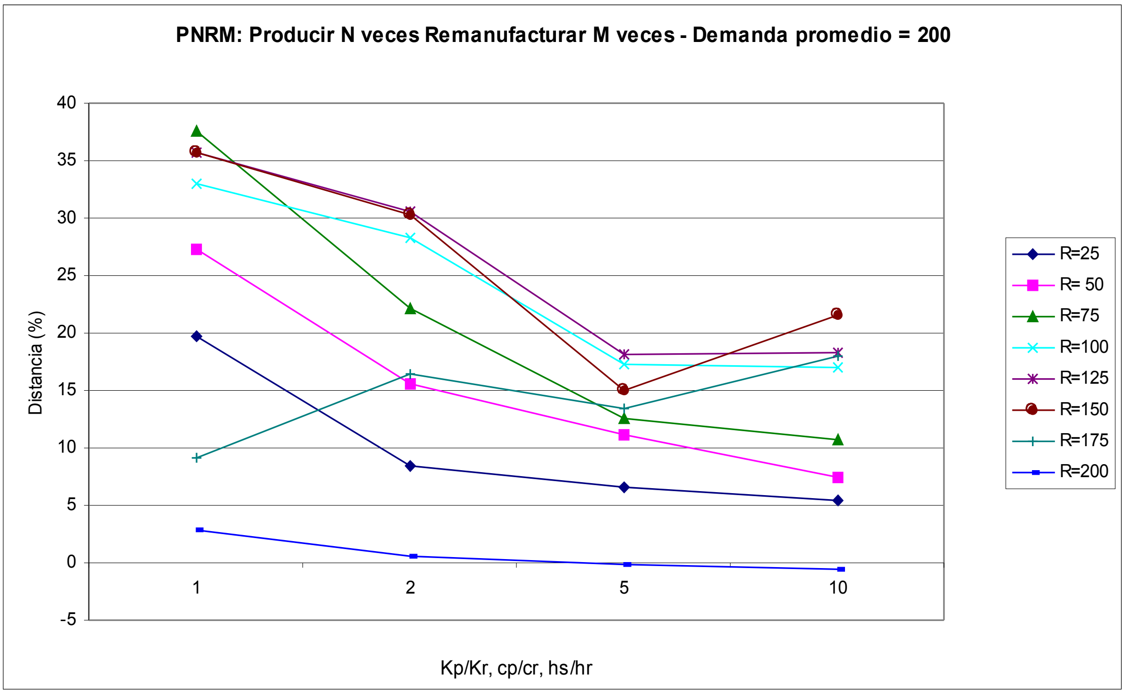
P1RM WWR	2,81	0,61	-0,2	-0,53
PNRM WWR	2,81	0,61	-0,2	-0,53
PNRM SMR	2,81	0,61	-0,2	-0,53
RMAXM	14,32	5,11	9,01	12,51
TSRH	26,19	6,15	16,11	0
TSRH URWW	2,81	0,61	-0,2	-0,53
Push	32	53,08	107,44	162,1
Pull	82,72	191,39	458,5	830,6
NoR	34,21	133,53	382,87	685,1

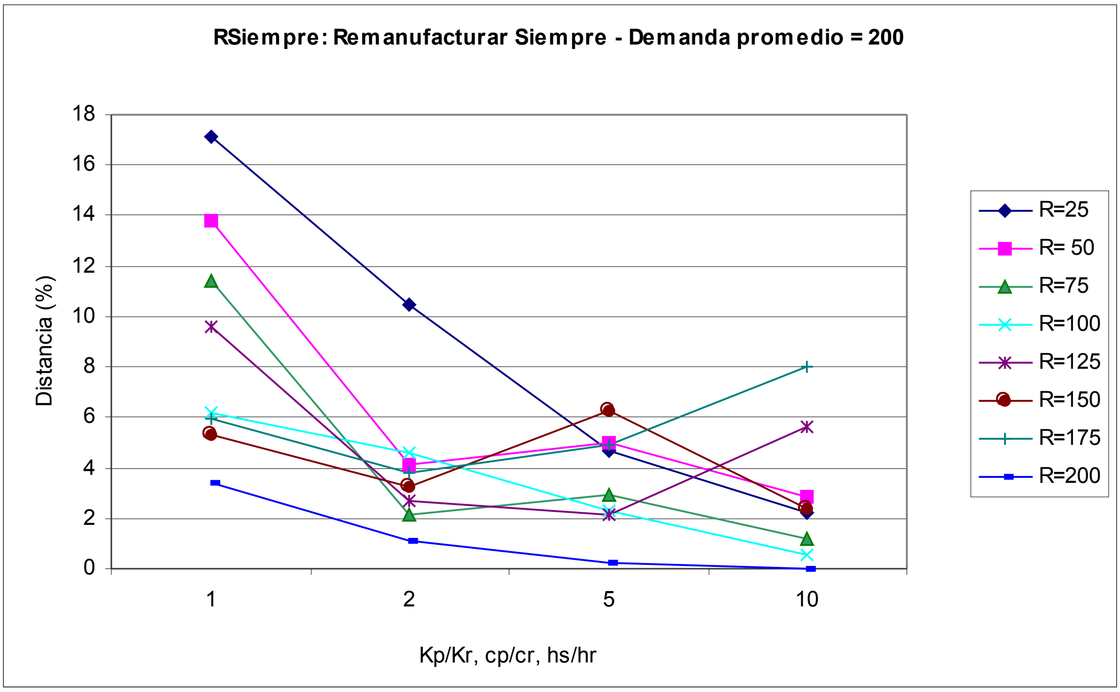
Al igual que para el caso estático, los tiempos de ejecución registrados de los distintos algoritmos de implementación de las políticas, varían entre los 100 a 500 milisegundos, excepto en el caso de RMAXM, que varía entre 1 y 15 segundos.

A continuación mostramos para algunas políticas, los gráficos que se obtienen a partir de las distintas situaciones analizadas.

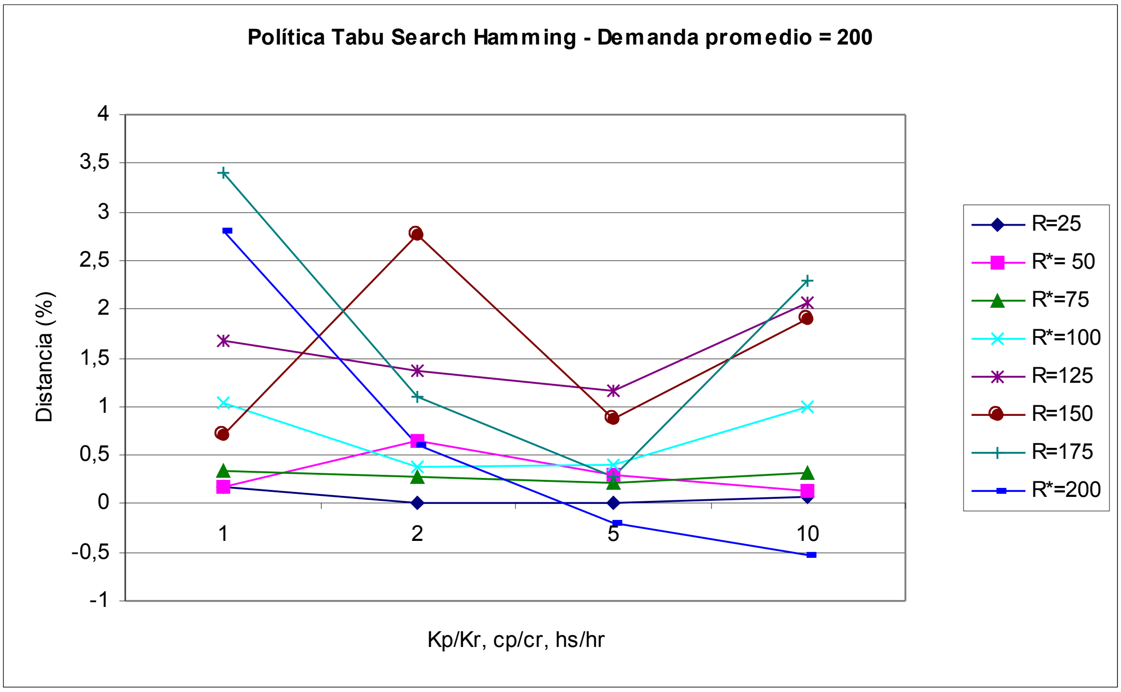


Los casos marcados con un asterisco expresan los resultados obtenidos con la versión ajustada de URWW, porque en estos casos se obtuvieron mejores resultados que con URWW solamente. De todas maneras cabe la aclaración, que a diferencia del caso en donde los costos son estáticos, en el caso dinámico propuesto ocurre que para algunos períodos el costo de mantener artículos usados es mayor que el costo de mantener artículos listos, y por lo tanto el ajuste puede provocar un aumento en el nivel de inventario de artículos usados, con el consiguiente aumento en los costos totales involucrados. Esto es así porque el procedimiento de ajuste, supone que el costo de mantener en inventario de artículos listos es por lo menos mayor que el de usados.





Como se puede apreciar en los gráficos, en los casos de un nivel alto de retornos, mediante las políticas RMAXM y RSiempre se obtiene un costo muy similar al de GAMS/Cplex, o incluso mejor, en el caso en que los retornos son similares a la demanda. Esto ocurre porque en el modelo GAMS, por restricciones en el número de variables binarias, no se admite la disposición final de los retornos, aún en el caso que sean excesivos.



Como sucedió en el caso de costos estáticos, para el caso de costos dinámicos, las política TSRH basada en la metaheurística de *Tabú Search*, arroja muy buenos resultados con respecto a la minimización de los costos. Los casos marcados con un asterisco junto a la R, son los resultados obtenidos con TSRH URWW, los otros con TSRH solamente. Se ha seleccionado para cada caso de retornos la opción que muestra mejor comportamiento con respecto a la minimización de los costos.

4. Problemas de Gran Tamaño

El objetivo del testeo de problemas de gran tamaño, es medir la robustez de las políticas propuestas con respecto al comportamiento de los costos y los tiempos de ejecución de los algoritmos de implementación. Se analizaron tres casos de retornos versus demanda, para una cantidad de períodos n = 240, en donde la demanda promedio es de 200 y los retornos promedios son de 25, 100 y 175, empleando para ello diez ciclos idénticos de valores de demanda y retornos. De esta manera se utilizaron los valores de demanda y retornos empleados para el análisis del caso de costos estáticos de n = 24, repetidos 10 veces, para facilitar la modificación de los datos.

Con respecto a los costos, se utilizó un esquema de costos estáticos en donde aumentan los costos de producir y de mantener en inventario artículos listos, con respecto a los de remanufacturar y mantener en inventario de artículos usados, respectivamente, de acuerdo a una escala de 1, 2, 4, 6, 8, 10, 20, 30 y 50. Al igual que para el caso de costos dinámicos, se consideró sólo una de las variaciones de costos, debido al esfuerzo para generar y modificar los valores de demanda y retornos para 240 períodos.

En total se analizaron 3 * 9 * 1 = 27 situaciones, lo cual consideramos que es un número adecuado para determinar la robustez de las políticas, ya que por lo general, cuando los valores son determinísticos y el número de períodos es grande, hay más probabilidad de error en la precisión de los valores determinados, por lo cual generalmente se usa una estrategia de horizonte de planeación rodante (*rolling horizon*), y un número de períodos razonable.

Con respecto a las políticas evaluadas, se analizaron catorce políticas, usando para algunos casos, parametrizaciones diferentes:

- URWW
- URWW Fit
- RSiempre
- PNRM WWR
- PNRM SMR
- Push
- Pull
- TSRH
- TSRH URWW
- TSRH PNRM
- TSPRD
- TSPRD URWW
- TSPRD PNRM
- NoR

La política URWW Fit, es la política URWW empleando el procedimiento de ajuste definido en la Sección 3.3.3. Para el caso de P1RM y PNRM, la opción WWR es la aplicación de la extensión del algoritmo de W-W para retornos suficientes presentado por Richter *et al* en [27], a la vez que SMR es la extensión de la fórmula de Silver-Meal realizada en nuestro trabajo. En cuanto a *Tabu Search* se analizaron los casos determinístico y estocástico, o sea las políticas TSRH y TSPRD, respectivamente, ya que la cantidad de períodos es grande y puede tener sentido una exploración aleatoria. Para ambos casos de *Tabu Search*, se evaluaron tres opciones, una en la que la solución inicial es sólo producir en el primer período, y no hay remanufacturación ni disposición final, y la solución determinada por los períodos de actividad obtenidos de la aplicación de las políticas URWW y PNRM. Para el caso de TSRH, *Tabu Search* determinístico, se empleo un número de iteraciones pequeño, igual a 5, debido al tamaño del espacio de soluciones factibles, y al esfuerzo necesario para obtener una solución del problema, y un tamaño de lista Tabú de 50000, que es mayor al número necesario para que no se produzcan ciclos en la lista, y por lo tanto eliminación de soluciones evaluadas. En el caso de TSPRD, *Tabu Search* estocástico, los valores empleados para los parámetros fueron los siguientes:

- Tamaño de la lista Tabú: 50000
- Tamaño de la lista de soluciones factibles: 500
- Número de iteraciones: 50
- Número de movimientos: 20
- Considerar la actividad de producción: si
- Considerar la actividad de remanufacturación: si
- Considerar la actividad de disposición final: si

La determinación de estos valores fue arbitraria, y como se dijo en la sección de definición y descripción de las políticas propuestas, no estaba dentro del alcance de esta tesis de maestría analizar el valor correcto de cada parámetro. De esta manera en cada iteración se determinan 500 nuevas soluciones factibles, a una distancia de Hamming de 20 de la mejor solución actual. El tamaño de la lista Tabú, evita que se produzcan ciclos y por lo tanto eliminación de soluciones ya evaluadas.

A continuación se presentan los resultados obtenidos para las situaciones de retornos vs. demanda consideradas, presentando la diferencia en porcentaje del costo de cada una de las políticas con respecto al costo de la mejor solución empleada. Esta mejor solución es la devuelta por GAMS con el solver Cplex para $n = 24$, y luego multiplicada por 10 para el mismo caso de demanda, retornos y costos, o sea una cota superior de la solución óptima del problema. Esto se debe a las limitaciones de la distribución gratuita de GAMS, para obtener la solución óptima del problema con $n = 240$.

R=25	**Costos Kp/Kr, cp/cr, hs/hr**								
Políticas	**1**	**2**	**4**	**6**	**8**	**10**	**20**	**30**	**50**
URWW	0,23	-0,15	0,05	0,19	0,26	0,3	0,43	0,52	0,62
URWW Fit	0,23	-0,23	0,05	0,19	0,26	0,3	0,43	0,52	0,62
RSiempre	16,15	8,65	7,67	5,86	5,61	5,02	4,08	3,99	3,63
PNRM WWR	176,93	97,96	51,9	35,22	26,63	21,4	10,79	7,25	4,42
PNRM SMR	176,93	98,66	51,99	35,22	26,63	21,4	10,79	7,25	4,42
TSRH	125,8	73,5	41,2	31,54	26,58	23,55	15,59	13,9	12,56
TSRH URWW	0,41	-0,21	-0,14	-0,08	-0,04	-0,02	0,06	0,14	0,22
TSRH PNRM	25,35	14,68	8,91	6,85	5,49	4,78	3,46	2,75	2,14
TSPRD	1,4	0,69	0,65	0,48	0,67	29,45	27,91	28,06	29,22
TSPRD URWW	0,04	-0,41	-0,26	-0,18	-0,12	-0,08	0,06	0,12	0,22
TSPRD PNRM	1,34	0,69	0,69	0,67	0,65	1,58	1,16	1,21	0,93
Push	26,22	20,55	17,79	16,87	16,4	16,11	15,58	15,45	15,38
Pull	95,89	63,32	45,17	38,75	35,45	33,44	29,4	28,09	27,07
NoR	8,07	10,38	12,19	12,9	13,27	13,5	14	14,23	14,44

R=100	**Costos Kp/Kr, cp/cr, hs/hr**								
Políticas	**1**	**2**	**4**	**6**	**8**	**10**	**20**	**30**	**50**
URWW	2,16	3,5	6,97	8,69	9,68	10,34	11,91	12,57	13,27
URWW Fit	2,16	3,48	6,94	8,66	9,64	10,3	11,86	12,52	13,22
RSiempre	7,08	7,92	10,53	10,26	10,01	9,87	11,67	11,67	15,9
PNRM WWR	380,2	263,51	165,88	120,49	94,56	77,82	41,32	28,2	17,42
PNRM SMR	380,2	264,18	166,34	120,49	94,56	77,82	41,32	28,2	17,42
TSRH	522,66	381,48	325,61	262,72	226,79	203,62	153,14	135,04	108,97
TSRH URWW	2,07	2,97	5,74	7,14	7,73	8,1	8,8	8,81	8,9
TSRH PNRM	102,35	40,34	33,72	32,35	28,82	26,59	19,96	16,17	11,91
TSPRD	14,13	15,39	17,55	18,98	18,55	19,19	20,45	21,54	21,29
TSPRD URWW	2,1	3,48	6,94	8,65	9,63	10,3	11,85	12,51	13,21
TSPRD PNRM	376,87	263,51	165,88	120,49	94,56	77,82	41,32	28,2	17,42
Push	28,37	33,86	41,53	45,44	47,31	48,7	51,91	53,2	54,47
Pull	108,59	108,21	112,6	114,89	116,2	117,1	119,29	120,26	121,36
NoR	28,36	48,4	68,72	78,16	83,55	87,09	95,02	98,06	100,85

R=175	**Costos Kp/Kr, cp/cr, hs/hr**								
Políticas	**1**	**2**	**4**	**6**	**8**	**10**	**20**	**30**	**50**
URWW	2,48	8,98	22,2	33,36	41,83	48,49	68,31	77,99	88,79
URWW Fit	2,48	5,91	14,59	22,41	28,36	33,02	47	53,83	61,66
RSiempre	4,61	7,11	7,95	10,98	14,38	15,59	24,85	24	25,48
PNRM WWR	136,59	129,9	110,71	94,85	82,79	73,33	46,26	33,2	21,25
PNRM SMR	136,86	130,3	111,34	94,85	82,79	73,33	46,26	33,2	21,25
TSRH	850,62	803,33	636,38	659,05	676,26	689,78	708,68	703,47	699,33
TSRH URWW	7,55	9,67	16,59	23,2	28,11	31,96	43,26	48,98	55,7
TSRH PNRM	96,02	18,24	8,95	10,38	11,42	12,62	13,66	13,03	12,75
TSPRD	20,8	34,52	55,3	77,92	87,55	98,45	129,23	150,96	175,27
TSPRD URWW	15,69	20,7	35,94	41,09	44,73	47,59	56,34	60,65	66,03

TSPRD PNRM	20,95	25,28	23,61	29,84	32,04	32,51	46,26	33,2	21,25
Push	24,39	41,46	71,04	94,55	112,42	126,44	167,96	188,19	210,19
Pull	120,51	176,16	266,05	335,32	387,94	429,26	551,14	610,51	674,07
NoR	45,08	103,8	195,57	265,17	318,04	359,56	481,82	541,33	604,56

Como se puede apreciar a simple vista, salvo en el caso de retornos bajos, en los demás casos no se obtuvieron buenos resultados. Para el caso de *Tabu Search*, quizás este relacionado con el valor de los parámetros empleados, y con las pocas iteraciones realizadas. Con respecto a las otras políticas la causa puede estar en que no se emplea de ninguna manera la estructura cíclica de los datos, esto es diez ciclos iguales de valores de demanda y retornos.

Con respecto a los tiempos de ejecución, para el caso de las políticas que no son de *Tabu Search*, se registraron tiempos bajos, en un rango de 100 a 300 ms en todos los casos. Con respecto a las políticas de *Tabu Search*, la implementación determinística, o sea TSRH, estuvo en el rango de 60 a 75 segundos, mientras que en el caso estocástico, TSPRD, estuvo en el rango de 4 a 10 segundos.

5. Demanda y Retornos Estacionales

En este caso se medirá el comportamiento de las políticas propuestas con respecto a los costos, en situaciones de demanda y retornos estacionales. Esto significa que tanto para la demanda, como para los retornos, se usaran diferentes rangos de valores para la misma secuencia de datos. Más precisamente para la demanda y los retornos se usarán los siguiente cuatro rangos:

	Demanda		**Retornos**	
	Rango	**Promedio**	**Rango**	**Promedio**
A	(25,75)	50	(0,50)	25
B	(75,125)	100	(50,100)	75
C	(125,175)	125	(100,150)	125
D	(175,225)	200	(150,200)	175

De esta manera, un escenario posible esta formado por una permutación de A, B, C y D para la demanda y otra, posiblemente distinta, para los retornos. La cantidad de períodos utilizados para las pruebas será n = 24, y cada rango será por lo tanto de 6 períodos. Los casos que se testearán son los siguientes:

	Demanda	**Retornos**
1	ABCD	ABCD
2	ABCD	DCBA
3	DCBA	ABCD
4	DCBA	DCBA

5	ADBC	BADC
6	CDAB	DABC

Los primeros dos casos reflejan aquellos escenarios donde la demanda asciende y los retornos ascienden y descienden respectivamente. Los casos 3 y 4 son los opuestos al 1 y 2. Los casos 5 y 6 son escenarios donde tanto la demanda como los retornos no tienen un comportamiento determinado, ni hay relación entre ambos eventos.
Con respecto a los costos, se empleará un esquema de costos estáticos, en donde varían conjuntamente los costos de producir y de mantener en inventario artículos listos, con respecto a los de remanufacturar y de mantener en inventario artículos usados. La escala utilizada para el aumento fue: 1, 2, 4, 6, 8, 10, 20, 30 y 50 que determinan los nueve casos posibles para cada uno de los escenarios de demanda y retornos.

De esta manera en total se analizaron 6 * 9 * 1 = 54 situaciones en total, lo cual consideramos que es un número bastante razonable, para determinar el comportamiento de las políticas, en situaciones de demanda y retornos estacionales, aunque hay que tener presente que la cantidad de permutaciones posibles es mayor.

Al igual que en el caso de costos estáticos y dinámicos, se analizaron nueve políticas, y para algunos casos usando opciones diferentes:

- URWW
- URWW Fit
- RSiempre
- P1RM WWR
- PNRM WWR
- PNRM SMR
- RMAXM
- Push
- Pull
- TSRH
- TSRH URWW
- NoR

Las consideraciones para cada una de las políticas son las mismas que en los otros dos marcos de testeo. A continuación se presentan los resultados obtenidos para las primeras 4 situaciones de retornos vs. demanda consideradas, presentando la diferencia en porcentaje del costo de cada una de las políticas con respecto al costo de la solución obtenida con GAMS con el solver Cplex. El resto de los testeos se presentan en el documento anexo correspondiente.

Promedio Demanda = {50, 100, 150, 200}									
Promedio Retorno = {25, 75, 125, 175}									
	Costos Kp/Kr, cp/cr, hs/hr								
Políticas	**1**	**2**	**4**	**6**	**8**	**10**	**20**	**30**	**50**
URWW	1,84	3,17	9,77	13,88	16,95	19,36	26,06	29,05	31,69
URWW Fit	1,84	2,4	8,03	11,57	14,23	16,36	22,3	24,98	27,32

RSiempre	10,48	4,99	16,57	17,99	19,26	20,39	23,81	25,42	26,81
P1RM WWR	10,67	12,09	18,56	20,97	22,07	23,65	27,14	28,78	30,2
PNRM WWR	5,09	3,16	5,15	4,86	4,53	4,32	4,22	4,32	4,36
PNRM SMR	5,09	3,98	5,29	5,14	4,57	4,32	4,22	4,32	4,36
RMAXM	12,48	5,46	10,99	14,21	15,94	17,61	22,7	24,77	26,7
TSRH	4,65	2,73	1,21	0,01	0	0,33	0,71	1,01	1,23
TSRH URWW	0,54	1,09	0,03	0,57	0,58	0,6	0,71	1,01	1,23
Push	109,68	144,18	197,5	229,95	252,59	269,53	314,38	333,85	351,19
Pull	89,33	139,88	199,24	238,82	266,25	286,67	340,47	363,75	384,52
NoR	39,64	82,1	141,98	178,3	203,4	222,02	270,94	292,07	310,93

Promedio Demanda = {50, 100, 150, 200}									
Promedio Retorno = {175, 125, 75, 25}									
	Costos Kp/Kr, cp/cr, hs/hr								
Políticas	**1**	**2**	**4**	**6**	**8**	**10**	**20**	**30**	**50**
URWW	10,7	29,7	65,32	92,52	114,01	131,36	181,87	206,19	229,69
URWW Fit	10,7	7,64	13,89	20,71	26,74	31,86	47,09	54,52	61,7
RSiempre	26,36	11,78	4,12	1,65	0,76	0,46	0,09	0,07	0,04
P1RM WWR	36,93	35,07	35,45	36,23	37,64	39,08	43,88	46,37	48,77
PNRM WWR	32,4	27,84	24,21	22,11	21,3	20,97	20,63	20,66	20,68
PNRM SMR	34,02	28,99	25,43	22,45	21,33	20,97	20,63	20,66	20,68
RMAXM	4,24	19,49	25,74	13,67	9,9	10,62	9,89	10,55	11,18
TSRH	1,23	0,81	0,48	0,12	0,14	0,15	0,2	0,22	0,24
TSRH URWW	1,8	0,68	0,25	0,13	0,14	0,15	0,2	0,22	0,24
Push	66,13	92,37	142,8	181,51	212,16	236,94	309,1	343,85	377,44
Pull	55,87	90,82	151,9	197,77	233,77	262,75	346,99	387,51	426,67
NoR	14,39	47,97	103,35	144,34	176,31	201,97	276,46	312,27	346,88

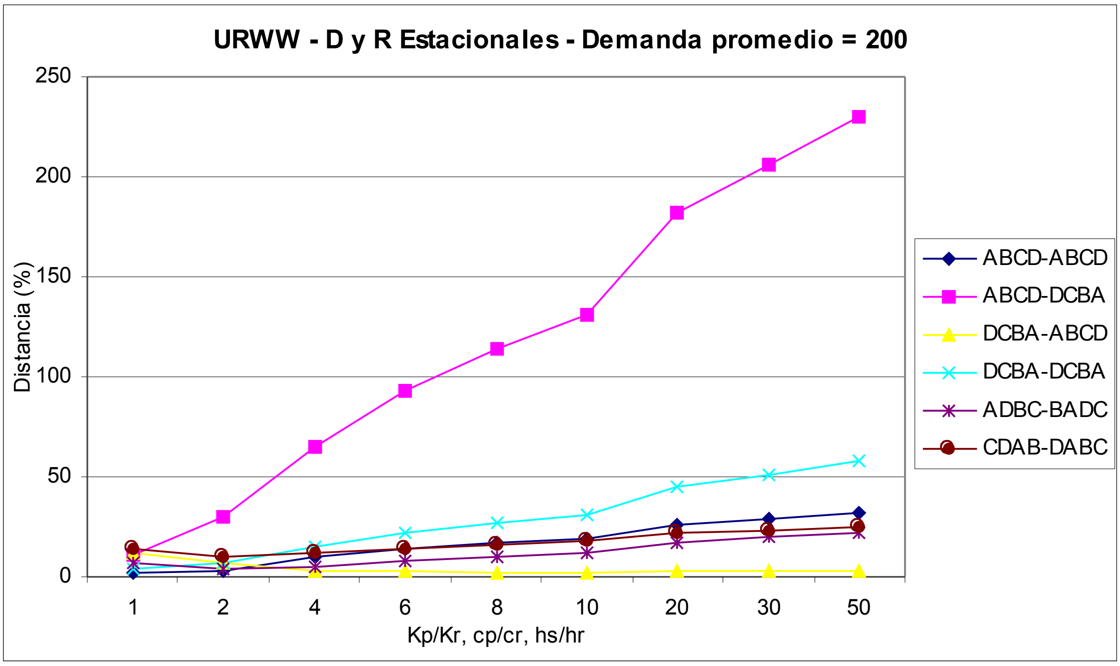
Promedio Demanda = {200, 150, 100, 50}									
Promedio Retorno = {25, 75, 125, 175}									
	Costos Kp/Kr, cp/cr, hs/hr								
Políticas	**1**	**2**	**4**	**6**	**8**	**10**	**20**	**30**	**50**
URWW	11,94	6,56	3,43	2,67	2,39	2,37	2,81	3,06	3,26
URWW Fit	11,94	6,5	3,32	2,54	2,25	2,21	2,63	2,87	3,06
RSiempre	20,3	11,6	6,76	5,42	4,81	4,56	4,51	4,58	4,63
P1RM WWR	11,43	14,42	18,7	20,75	21,97	22,86	24,97	25,8	26,48
PNRM WWR	1,02	-0,27	-0,09	-0,1	-0,14	-0,11	-0,06	-0,03	-0,01
PNRM SMR	1,32	0,56	-0,13	0,08	-0,12	-0,01	-0,06	-0,03	-0,01
RMAXM	9,56	10,84	16,37	26,93	27,03	28,24	15,78	16,5	17,1
TSRH	2,86	3,77	0,35	0,42	0,23	0,12	0,55	0,6	0,64
TSRH URWW	3,54	0,98	0,32	0,03	-0,06	-0,12	-0,06	0,81	0,59
Push	83,34	87,81	94,88	99,59	102,7	105,06	111,4	113,95	116,64
Pull	74,81	93,2	112,92	123,73	130,47	135,28	147,3	152,01	155,96
NoR	27,3	45,8	64,85	75,02	81,29	85,72	96,63	100,88	104,45

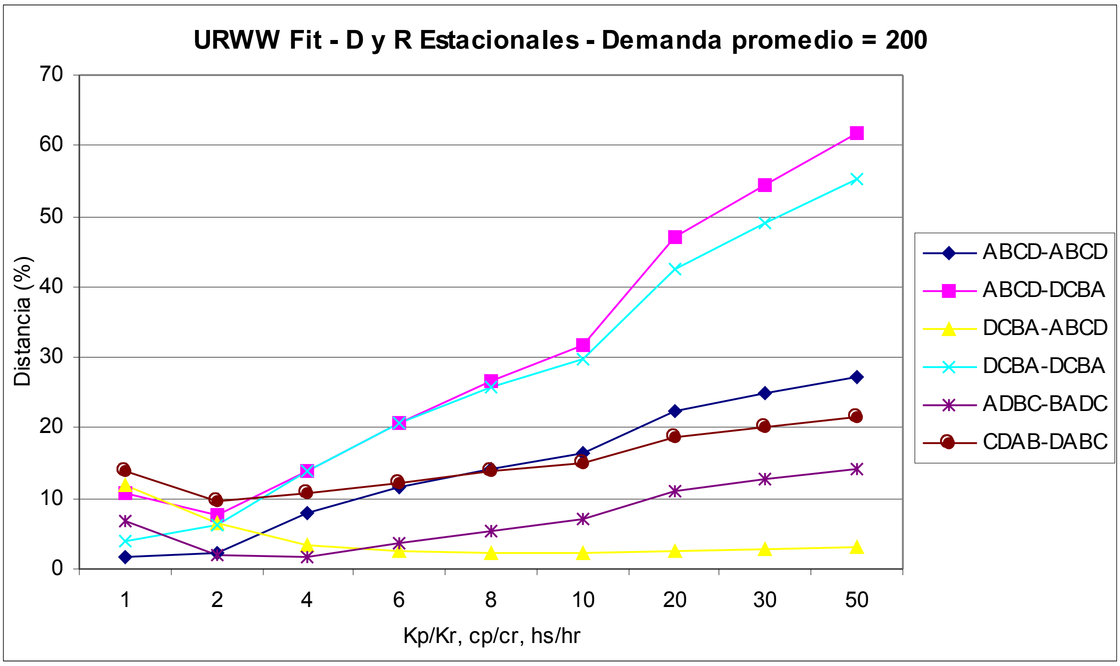
Promedio Demanda = {200, 150, 100, 50}									
Promedio Retorno = {175, 125, 75, 25}									
	Costos Kp/Kr, cp/cr, hs/hr								
Políticas	**1**	**2**	**4**	**6**	**8**	**10**	**20**	**30**	**50**
URWW	3,99	6,72	14,81	22,05	27,24	31,44	44,68	51,39	57,81
URWW Fit	3,99	6,32	13,91	20,82	25,79	29,82	42,58	49,08	55,28
RSiempre	20,15	16,68	10,93	7,07	4,61	3,13	0,82	0,39	0,07

P1RM WWR	7,7	6,44	6,02	5,05	3,7	2,73	0,82	0,39	0,07
PNRM WWR	7,7	6,44	6,02	5,05	3,7	2,73	0,82	0,39	0,07
PNRM SMR	7,7	6,44	6,13	6,29	5,38	2,73	0,82	0,39	0,07
RMAXM	1,94	5,42	9,48	19,38	23,6	25,66	32,16	36,46	40,61
TSRH	5,73	0,98	1,25	1,28	0,7	0,35	4,88	4,91	5,04
TSRH URWW	4,44	1,89	2,38	0,89	0,48	1,41	1,61	2,12	2,68
Push	109,6	142,27	192,25	228,52	254,04	273,82	332,35	360,84	387,9
Pull	96,7	144,16	211,86	259,3	292,56	318,12	392,74	428,71	462,84
NoR	41,71	83,57	141,85	182,15	210,36	231,97	294,72	324,86	353,43

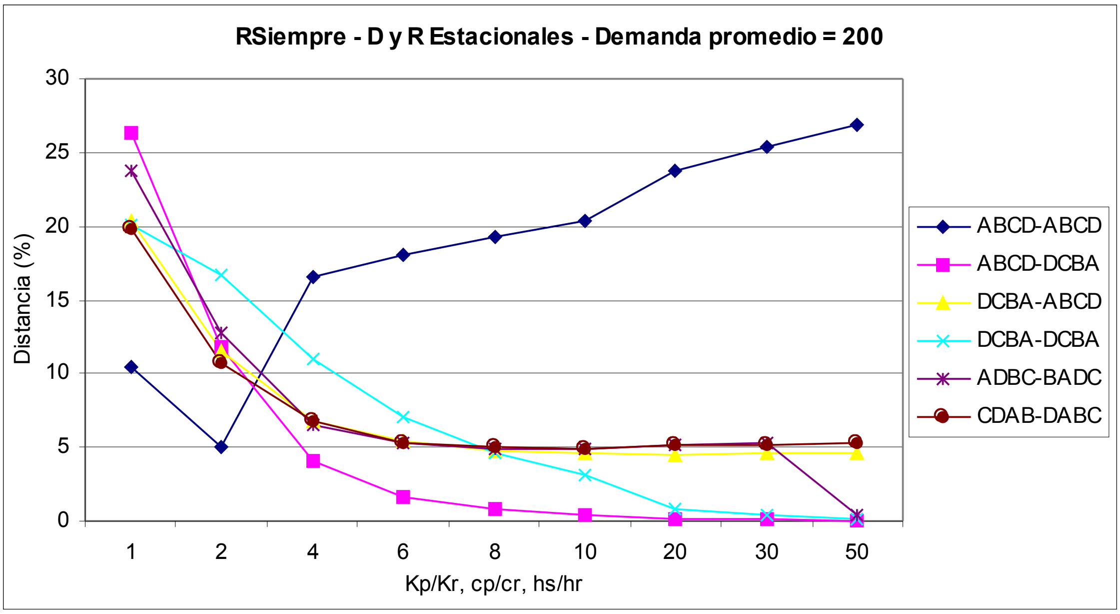
Si bien se registraron los tiempos de ejecución de los distintos algoritmos de implementación de las políticas, al igual que en los casos anteriores, se registraron tiempos que varían de los 100 a 500 milisegundos, excepto en el caso de RMAXM, que varía entre 1 y 15 segundos.

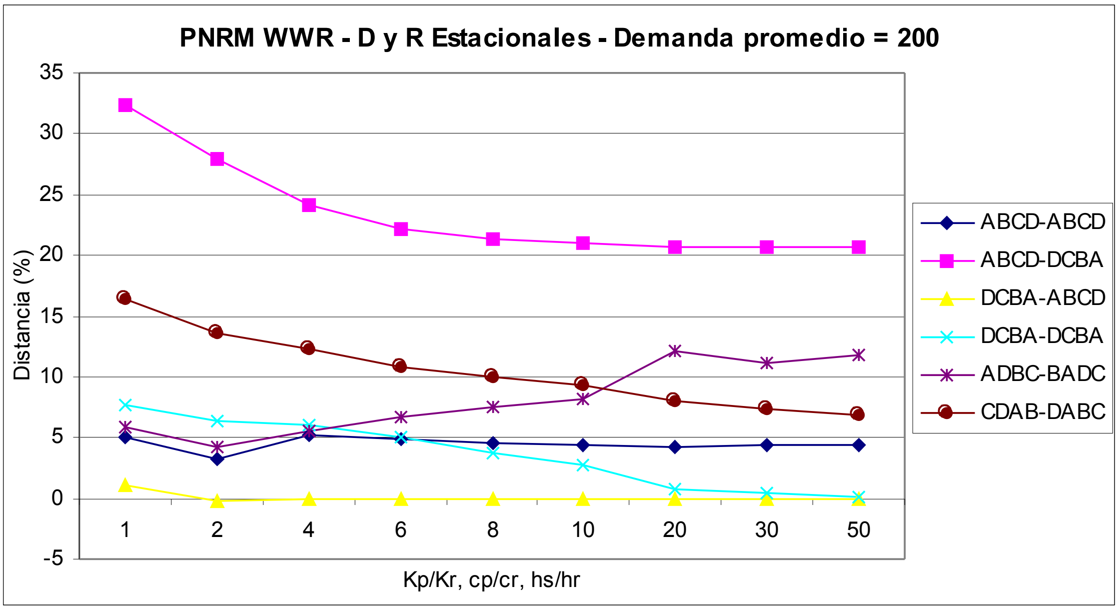
A continuación mostramos para algunas políticas, los gráficos que se obtienen a partir de las distintas situaciones analizadas.



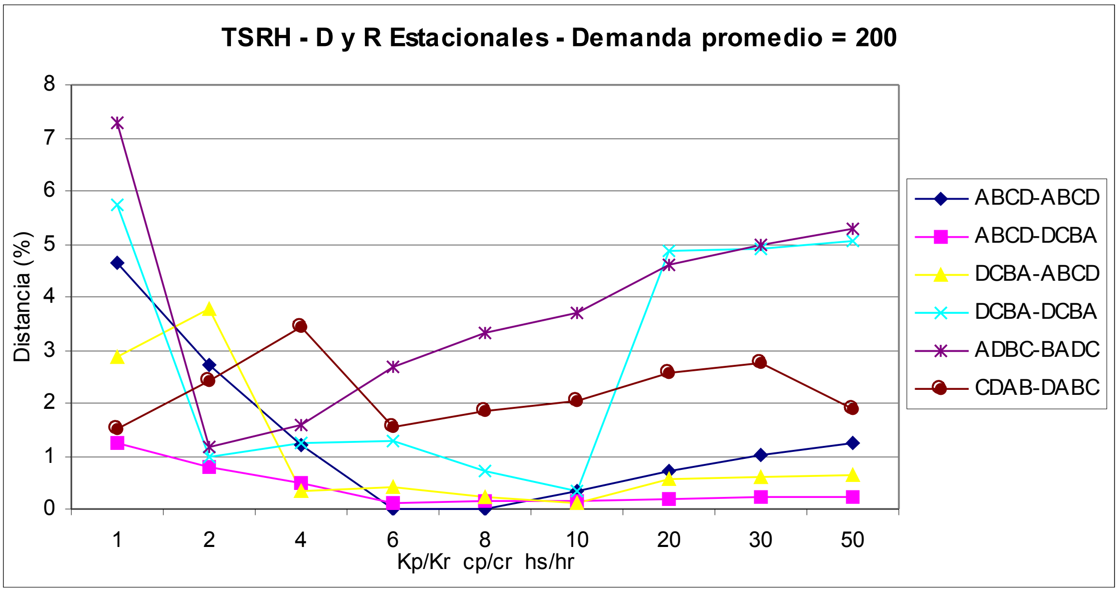


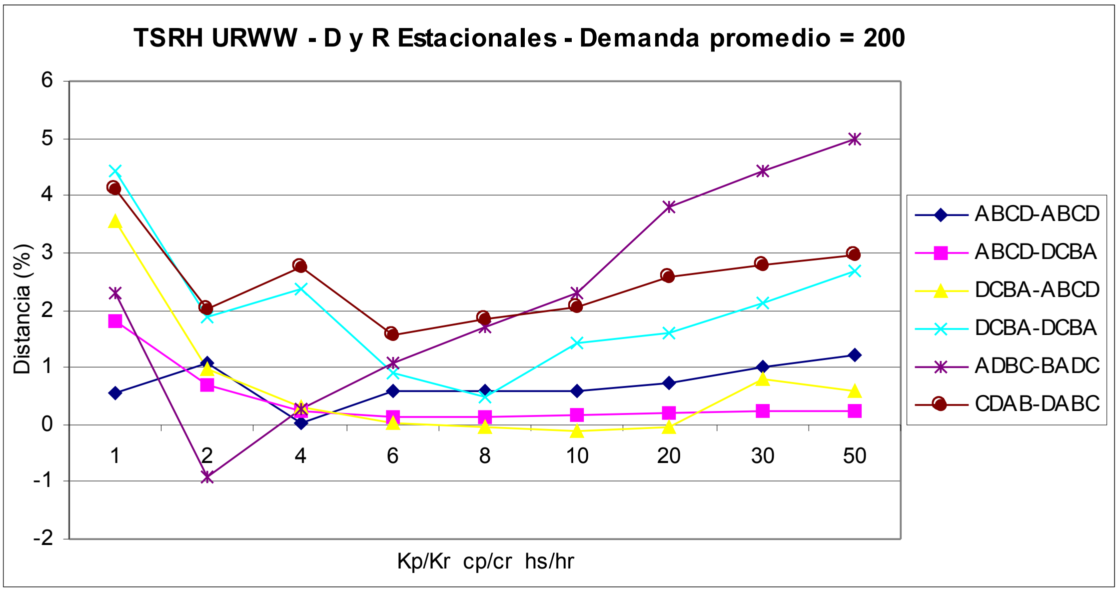
Como se puede apreciar observando los gráficos, la opción ajustada de URWW arroja notablemente mejores que la opción sin ajustes.





Se puede apreciar, observando que para todas las políticas, el comportamiento con respecto a la minimización de los costos, en el caso de demanda y retornos descendiente y ascendente respectivamente, es muy bueno, salvo inicialmente en el caso de RSiempre. De forma opuesta el caso ascendente, descendente muestra un mal comportamiento, excepto nuevamente para la política RSiempre, donde se aprecian muy buenos resultaos a medida que aumenta la diferencia entre los costos.





Como sucede en los demás casos de prueba, las implementaciones de *Tabu Search* arrojan muy buenos resultados con respecto a la minimización de los costos.

. Análisis de Resultados

En esta sección se analizarán los resultados de los tests realizados en la Sección 5, para cada una de las políticas y procedimientos de resolución propuestos. El objetivo del análisis es tratar de determinar el motivo del comportamiento con respecto a la minimización de los costos totales, ante una situación particular de demanda, retornos y costos.

No se analizarán todas las políticas y procedimientos evaluados, ya que muchos de ellos dependen de parámetros cuyos valores no fueron debidamente analizados, si no que fueron determinados de forma arbitraria. Las políticas que nos interesa analizar son aquellas que no reciben parámetros, y que tienen en cuenta en alguna medida los costos del problema. Naturalmente son las que uno puede pensar deberían tener un mejor resultado con respecto a la minimización de los costos.

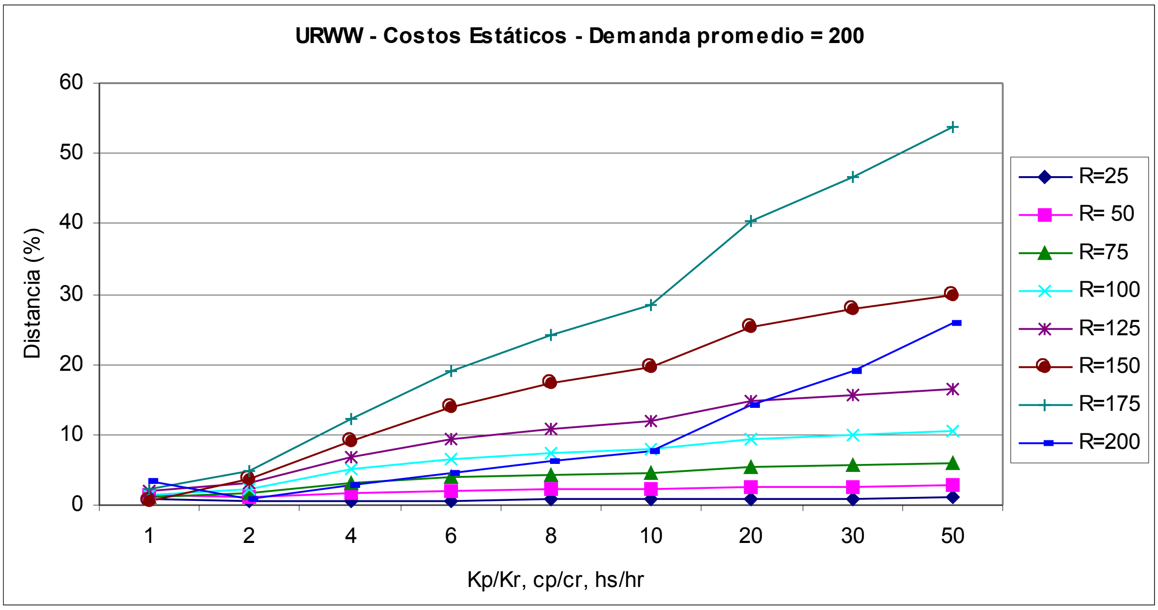
Tampoco se tendrán en cuenta los resultados obtenidos para el test de gran tamaño, salvo para los procedimientos de resolución basados en *Tabu Search*. Esto se debe a que el objetivo de este análisis era demostrar la robustez con respecto a la eficiencia en los tiempos de ejecución, más que en la minimización de los costos.

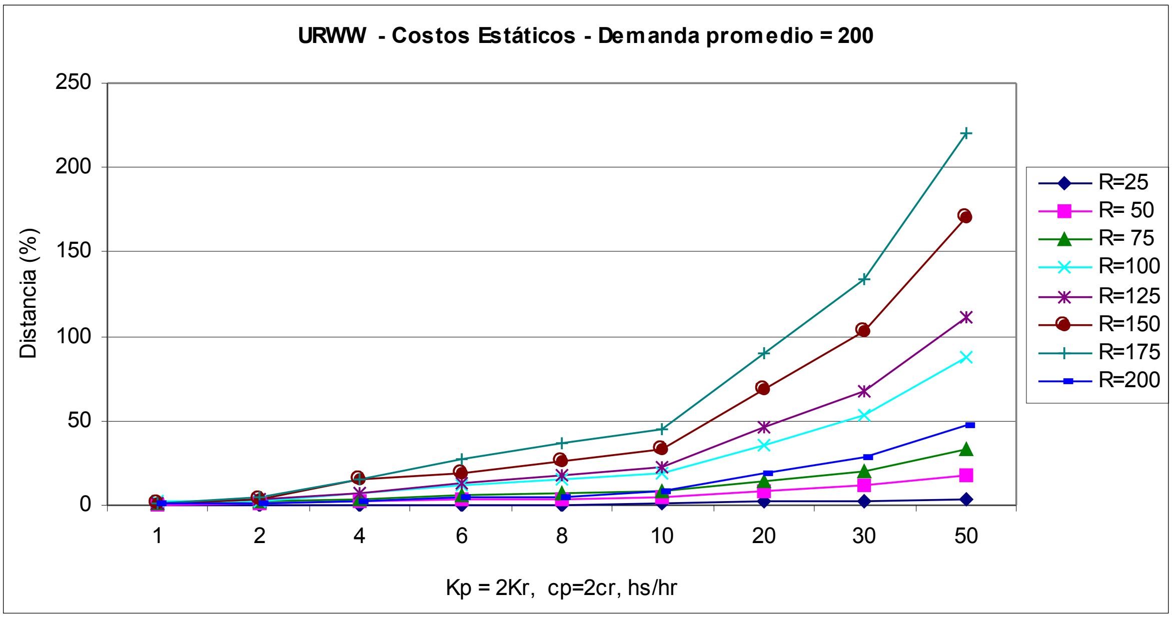
Comenzaremos con el análisis de las políticas de la familia URWW, para luego continuar con las de PNRM, RSiempre y al final las políticas que hacen uso de los procedimientos de resolución basados de *Tabu Search*. Para cada caso, analizaremos el comportamiento en los marcos de tests realizados: de costos estáticos, costos dinámicos y de demanda y retornos estacionales.

1. Políticas de la familia URWW

En este punto analizaremos el comportamiento de las políticas URWW y URWW Fit, o sea URWW con la aplicación del procedimiento de ajuste, para reducir los niveles de inventario de artículos listos. Comenzaremos con el caso de costos estáticos, ya que es el que permite realizar un análisis más profundo del comportamiento de ambas políticas, que luego es aplicable a los casos de costos dinámicos, y de demanda y retornos estacionales.

En los siguientes dos gráficos se muestran dos de los comportamientos de la política URWW en el marco de costos estáticos. En la primera cuando varían los costos de producir y de inventario artículos listos conjuntamente, y en la segunda cuando sólo varían los costos de inventario artículos listos.





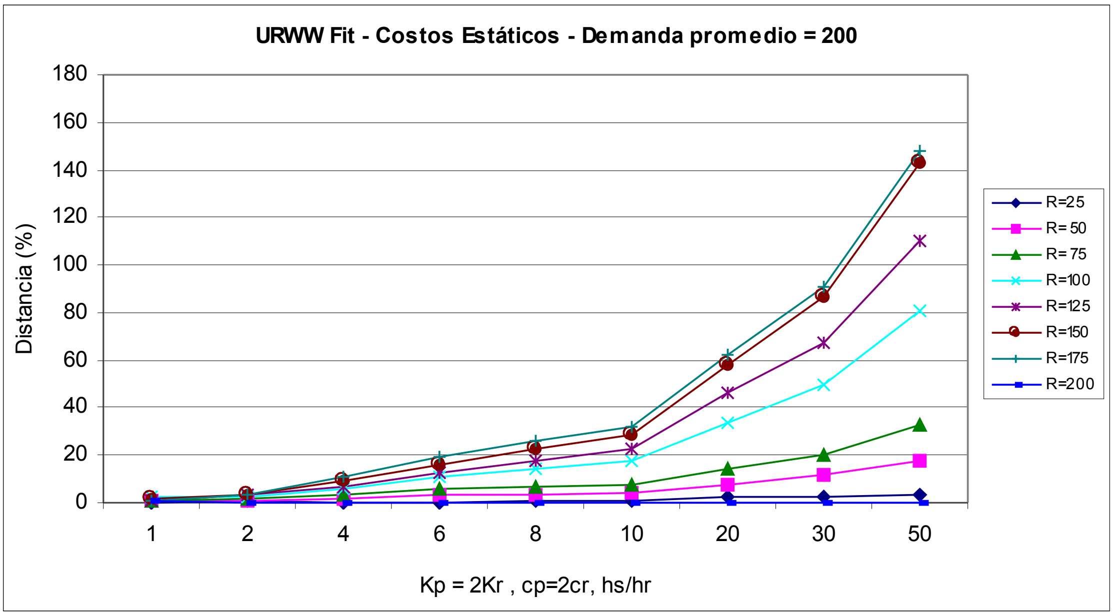
Se puede observar que en ambos casos, inicialmente hay muy un buen comportamiento con respecto a la minimización de los costos totales. Este buen comportamiento va desmejorando paulatinamente a medida que aumentan los costos de producir y/o de mantener en inventario artículos listos. A su vez, se puede apreciar que el desmejoramiento es mayor a medida que aumentan los retornos, salvo en el caso de retornos similares a la demanda, donde se vuelve a apreciar un buen comportamiento.

Este comportamiento se explica en que inicialmente, al ser los costos de las actividades y de inventario similares, la incidencia de cómo realizar la remanufacturación y la producción en los costos totales es similar. Por lo tanto al determinar ambas actividades de forma independiente: primero la remanufacturación y luego la producción, teniendo en cuenta en ambos casos la minimización de los costos, el resultado final es un buen comportamiento con respecto a los costos totales.

El problema es que al ir aumentando los costos de producir y/o de inventario de artículos listos, la forma de realizar la remanufacturación se mantiene. Esto es así, porque según la política URWW, no varían los costos relacionados a esta actividad, ya que no se tiene en cuenta el costo de inventario de artículos listos. De esta manera hay una tendencia a mantener niveles altos de inventario de artículos listos a un costo elevado, y se genera un impacto negativo en la forma de realizar la producción.

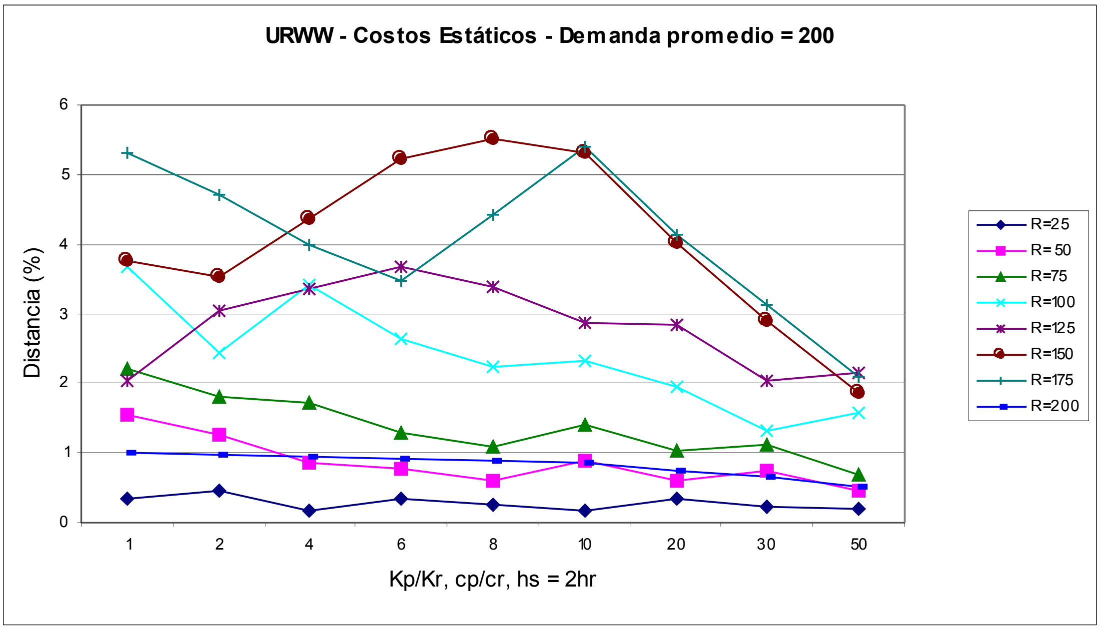
Por este motivo, al aumentar la cantidad de retornos, el desmejoramiento con respecto a los costos totales es mayor, ya que la remanufacturación no tiene en cuenta los costos de inventario de artículos listos. Por lo tanto al ser los retornos altos, aumentan las cantidades remanufacturadas para reducir el impacto en los costos de inventario de artículos usados, lo cual provoca niveles altos de inventario de artículos listos, y de esta manera un aumento en los costos totales.

Sin embargo en el caso de URWW Fit, se aprecia el mismo comportamiento al aumentar solamente los costos de inventario de artículos listos, pero en menor grado. Esto se debe a que se corrigen los valores de la remanufacturación para reducir el impacto en los niveles altos de inventario de artículos listos.



Tanto para URWW como para URWW Fit, el impacto se comienza a revertir cuando los retornos son similares a la demanda, ya que la mayor parte de la demanda se satisface con la remanufacturación, y la cantidad de la producción disminuye notablemente.

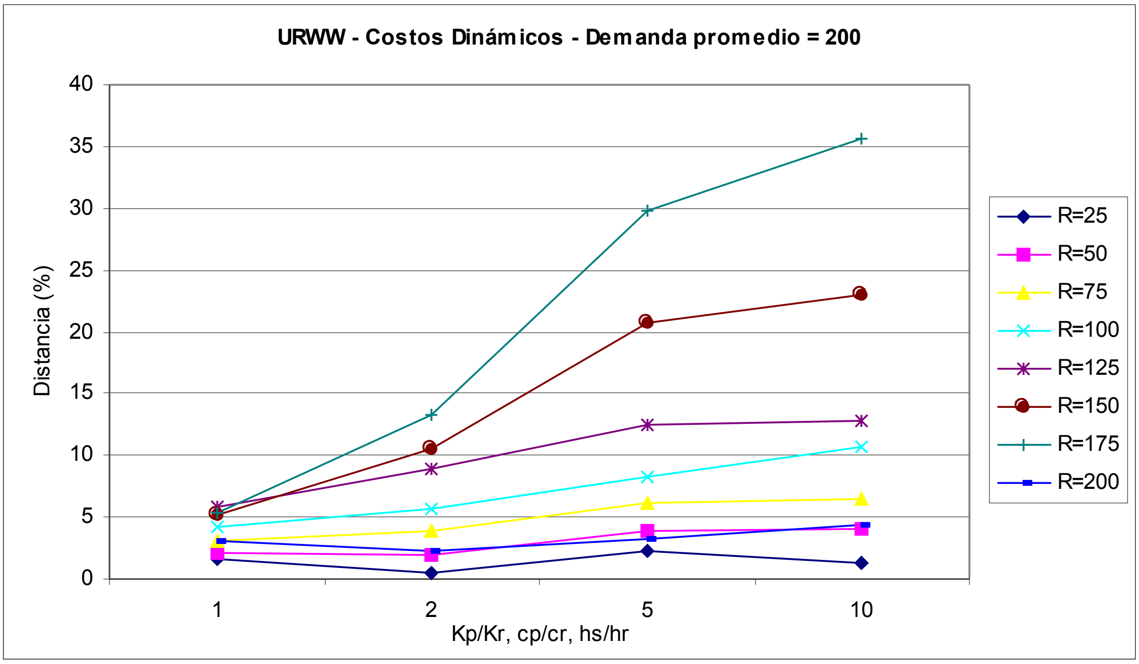
En el caso en que sólo aumentan los costos de producir con respecto a los de remanufacturar, y se mantiene la relación de 2 a 1 con respecto a los costos de inventario de artículos listos versus usados, se observa en todos los casos un muy buen comportamiento, como lo demuestra el gráfico siguiente.



Esto se debe fundamentalmente a dos motivos. Primero a que tanto en la determinación de la remanufacturación, como de la producción, se tiene en cuenta en mayor o menor medida los costos involucrados. Segundo, que a pesar de que la remanufacturación tiende a provocar niveles altos de inventario de artículos listos, el costo asociado se mantiene, y la incidencia en los costos totales disminuye al aumentar los costos de producir.

En el caso de costos son dinámicos, esto es que varían los valores de período a período para un mismo tipo de costos, se observa prácticamente el mismo comportamiento que cuando los costos son estáticos. Recordar que para los costos dinámicos se analizó sólo el caso en que varían conjuntamente los costos de producir y de inventario de artículos listos.

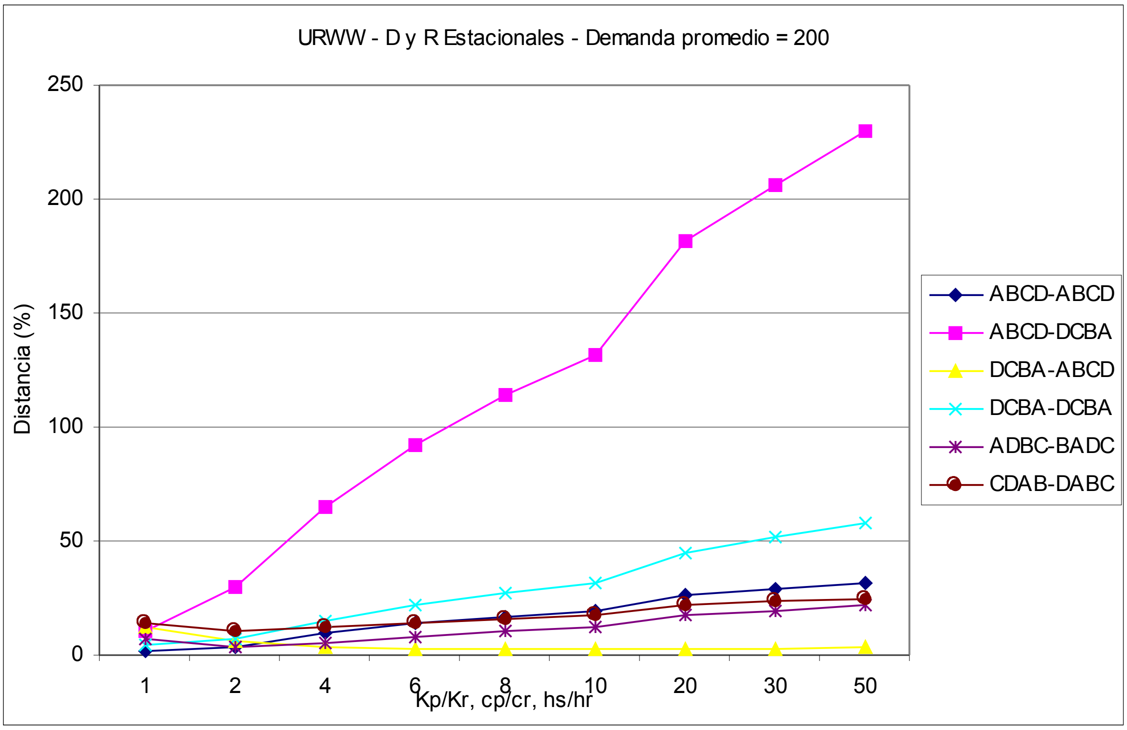
En el siguiente gráfico se muestran los resultados obtenidos para la política URWW, en el marco de análisis de costos dinámicos.



Esto demuestra en cierta medida la robustez de la política con respecto a la variación de los costos. Esto nuevamente, se debe a que tanto en la determinación de la remanufacturación como de la producción se tiene en cuenta la minimización de los costos. También podría haber una incidencia en la forma del comportamiento, el hecho de que los valores de cada uno de los tipos, están distribuidos en un rango de valores de forma uniforme. Habría que analizar en el futuro que pasa cuando estos valores tienen otra forma de distribución, como por ejemplo estacional.

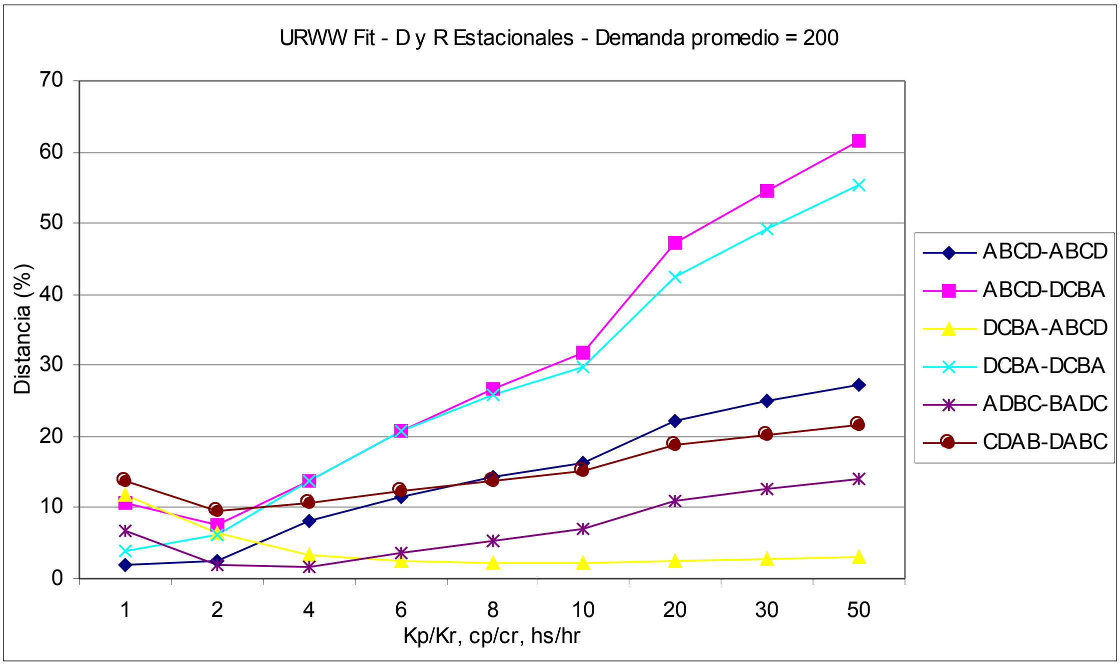
Un detalle importante en el caso de costos dinámicos, que no está presente en el caso de costos estáticos, es que puede ocurrir que el costo asociado a la versión ajustada: URWW Fit, sea mayor que el de la versión no ajustada. La razón para este comportamiento adverso, es que el procedimiento de ajuste supone que el costo de inventario de artículos listos es por lo menos igual al de artículos usados. Sin embargo en el caso de costos dinámicos puede suceder lo contrario, con lo cual el procedimiento de ajuste tiene un impacto negativo, sobre todo en el caso de costos de inventario similares.

En el caso de demanda y retornos estacionales, si bien el comportamiento es similar al caso estático donde varían conjuntamente el costo de producir y de inventario de artículos listos, se aprecia claramente un desmejoramiento provocado por la fluctuación en los valores de la demanda y de los retornos.



Este desmejoramiento es mayor en el caso de demanda ascendente y retornos descendentes: ABCD – DCBA. Esto se debe a que inicialmente los retornos son muy superiores a la demanda, y se remanufactura en grandes cantidades, lo cual provoca altos niveles de inventario de artículos listos, a un costo elevado.

En el gráfico siguiente, se puede apreciar que en la versión ajustada, URWW Fit, este efecto se reduce en gran medida corrigiendo los valores de la remanufacturación, según los valores de la demanda:



De todas maneras se observa un comportamiento similar al caso sin ajuste, aunque esta vez el mal comportamiento es sensiblemente menor.

Por lo tanto, en términos generales se puede concluir que la política URWW tiene un muy buen comportamiento en el caso en que los costos de las actividades y de inventario son similares, o cuando sólo los costos de inventario son similares. El mal comportamiento se debe a que no se consideran los costos de inventario de artículos listos en la determinación de la remanufacturación. Esto provoca un aumento excesivo en los costos a medida que la relación entre costos de inventario de artículos listos y usados aumenta.

A su vez, en todos los casos se aprecia un desmejoramiento gradual a medida que aumentan los retornos, salvo en el caso de retornos similares a la demanda, donde se vuelve a ver un buen comportamiento. Esto está relacionado al hecho de que a medida que aumentan los retornos, cada vez que se remanufactura se hace por un volumen mayor, lo cual provoca altos niveles de inventario de artículos listos.

En el caso de retornos similares a la demanda, lo que sucede es que no hay casi producción, ya que los retornos son prácticamente suficientes, y de esta manera se vuelven a obtener buenos resultados en el comportamiento.

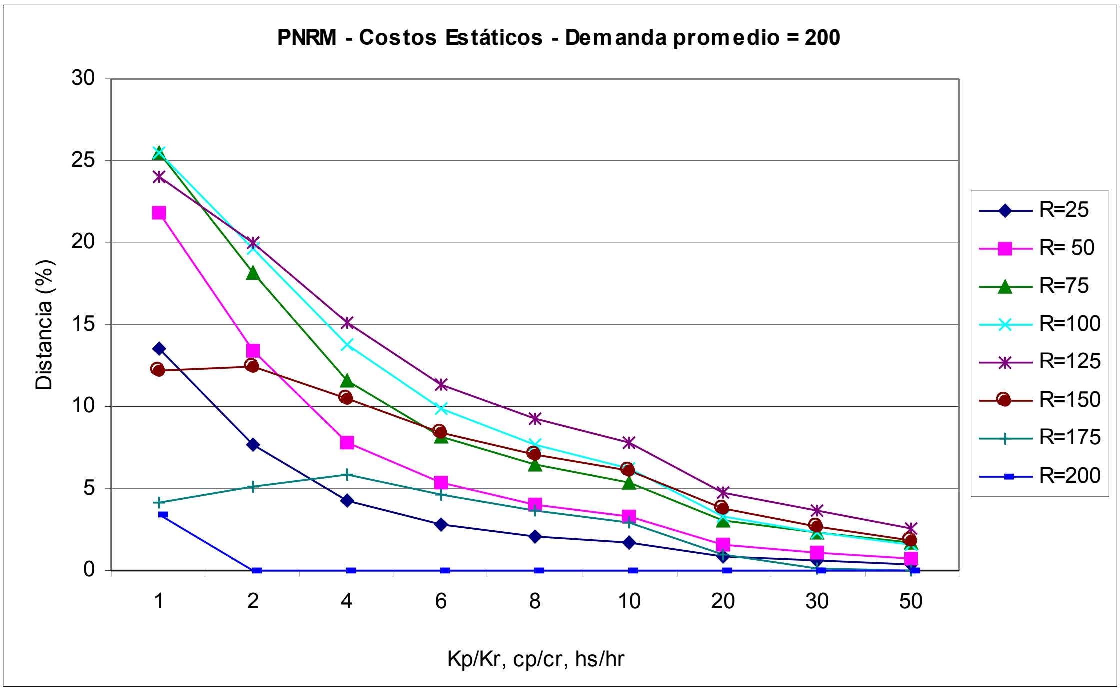
Otro hecho importante a destacar es que con la versión ajustada, URWW Fit, se logran mejores resultados que con la versión sin ajustar, salvo en el caso de que el costo de inventario de artículos listos sea menor que el de usados. De todas maneras la forma del comportamiento en ambos casos es la misma.

2. Políticas de la familia PNRM

En este apartado analizaremos el comportamiento de las políticas de primero producir y después remanufacturar, o sea PNRM WWR y PNRM SMR. En la primer política, se hace uso del algoritmo presentado por Richter *et al* en [26] para el caso de Wagner y Whitin [42] con retornos suficientes, mientras que en la segunda se hace uso de nuestra extensión de la fórmula de Silver-Meal [31]. No se analizará el caso de PNRM Dem, en el que se determina la remanufacturación sólo teniendo en cuenta la demanda y no los costos, como si ocurre con las opciones WWR y SMR.

Al igual que con las políticas URWW, comenzaremos el análisis del caso de costos estáticos, ya que permite realizar un análisis más profundo del comportamiento de ambas políticas, y trasladarlo luego a los casos de costos dinámicos, y de demanda y retornos estacionales.

En el siguiente gráfico se muestra el comportamiento de la política PNRM WWR, cuando varían conjuntamente los costos de producir y de inventario artículos listos. Para PNRM SMR se observa el mismo comportamiento, aunque para algunos valores hay diferencias levemente mayores con respecto a la mejor solución obtenida. Esto se debe a que en el caso de SMR, se está empleando una procedimiento heurístico, en contraste con WWR que es un método de resolución exacto.



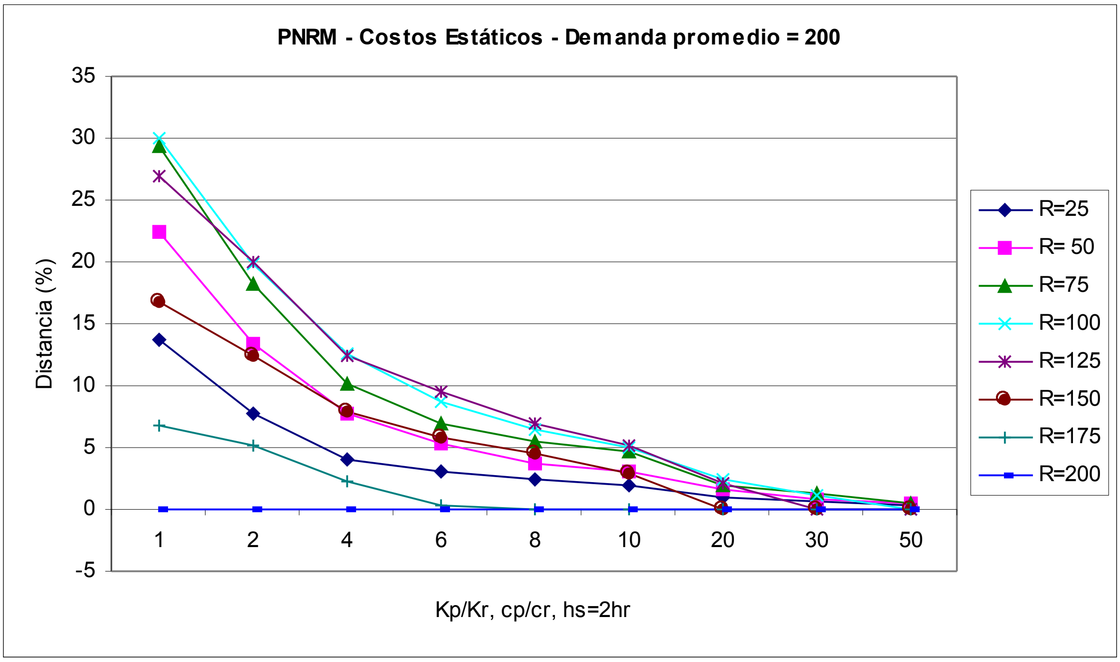
Se puede apreciar claramente que cuando los costos son muy diferentes el comportamiento con respecto a la minimización de los costos es muy bueno. En cambio cuando los costos son similares, el comportamiento es malo, salvo para los casos de retornos muy altos o similares a la demanda, en donde siempre se aprecia un buen comportamiento.

Esto se debe a que la forma de la política obliga a mantener altos niveles de inventario de artículos usados en los períodos iniciales, a un costo igual o similar al de artículos listos.

A medida que los costos de producir y de inventario de artículos listos va aumentando, la incidencia del costo de inventario de artículos usados desciende, y esto redunda en un mejor, hasta un muy buen comportamiento con respecto a los costos totales. Además hay que tener en cuenta que tanto para la determinación de la producción como de la remanufacturación, se tiene en cuenta la minimización de todos los costos involucrados.

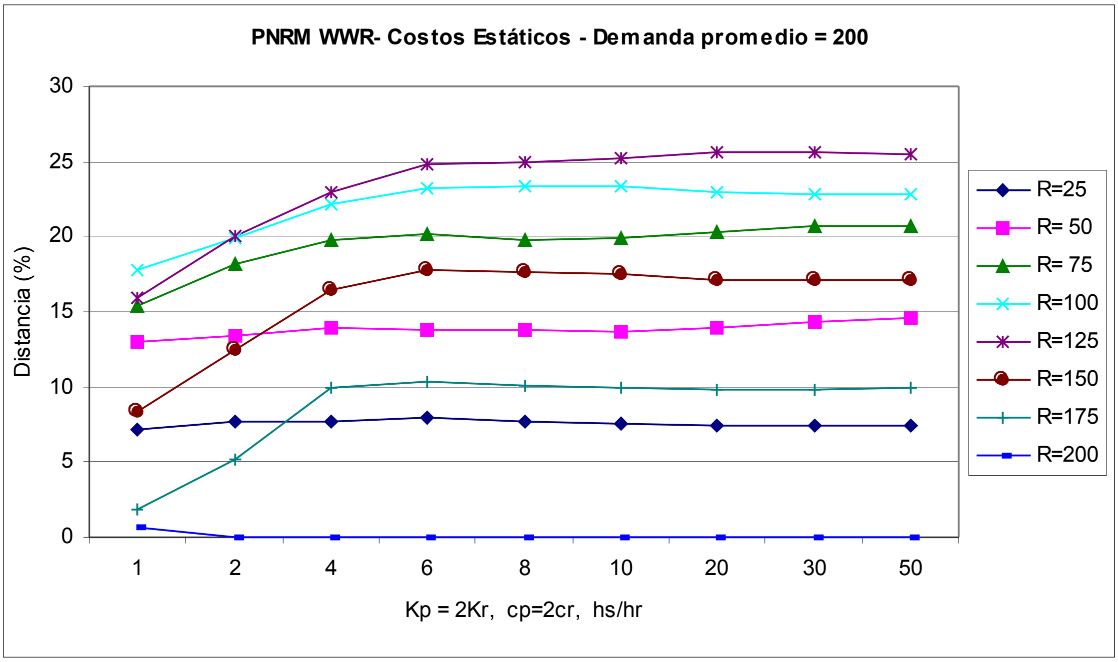
En todos los casos se puede apreciar un desmejoramiento gradual a medida que aumentan los retornos, salvo en el caso de retornos muy altos o similares a la demanda. Esto comportamiento adverso se debe a que el nivel de inventario de artículos usados inicialmente aumenta en proporción directa a la cantidad de retornos, salvo en el caso de retornos muy altos. Cuando los retornos son similares a la demanda, la remanufacturación comienza casi inmediatamente, lo cual reduce el nivel de inventario de artículos usados, y reduce el impacto de los costos de producir.

En gráfico siguiente se presentan los resultados obtenidos para el caso en que sólo varían los costos de producir con respecto a los de remanufacturar. Los costos de inventario se mantienen en una relación de 2 a 1, entre el de artículos listos y el de usados respectivamente.



En el caso en que sólo varían los costos de producir con respecto a los de remanufacturar, se aprecia un comportamiento similar que en el caso en que varían ambos tipos de costos, pero con una velocidad de convergencia mayor, y hacia mejores resultados. Esta mejora se debe a que se reduce el impacto de mantener en el último período anterior al comienzo de la remanufacturación un nivel alto de artículos listos, ya que los costos de inventario no varían.

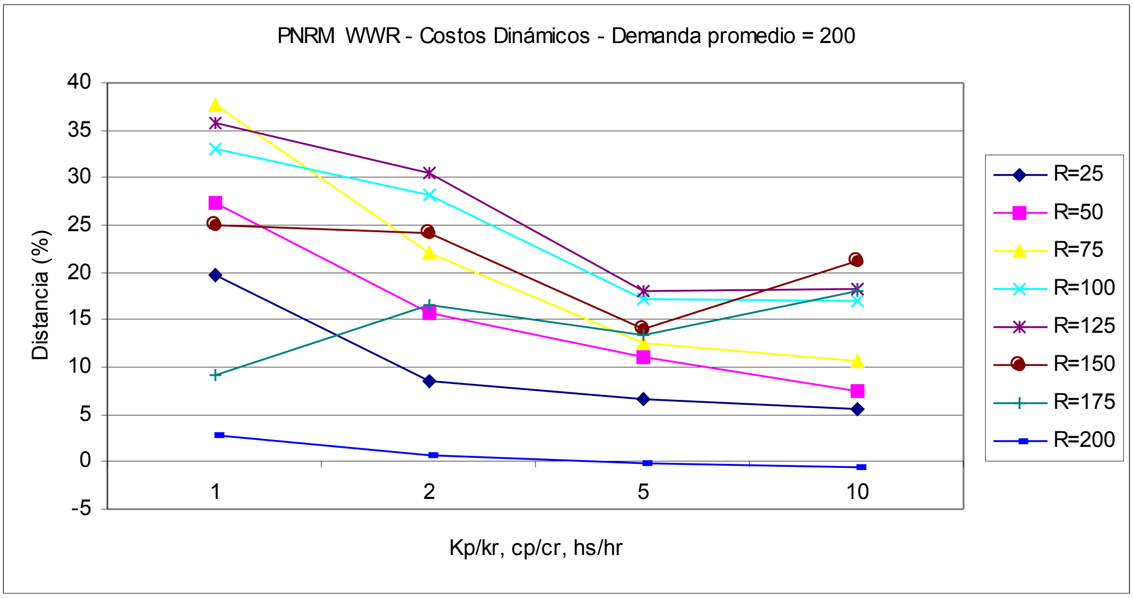
Cuando sólo varían los costos de inventario de artículos listos, y los de producir mantienen una relación de 2 a 1 con respecto a los de remanufacturar, se puede ver un comportamiento diferente a los anteriores, como se aprecia en el siguiente gráfico.



A simple vista se puede ver que para la mayoría de los retornos el comportamiento es malo, pero muestra una cierta estabilidad, salvo en el caso de retornos similares a la demanda, donde se aprecia un muy buen comportamiento. Esto es válido tanto para PNRM WWR como para PNRM SMR.

El mal comportamiento se debe fundamentalmente a la forma de la política. Al producir en los primeros períodos la cantidad mínima necesaria para satisfacer la demanda, en el último período anterior al comienzo de la remanufacturación hay un alto nivel de artículos listos. Esto tiene un impacto negativo en la minimización de los costos totales, a medida que aumenta el costo de inventario de artículos listos. Por otro lado está el costo de mantener en inventario de artículos usados, los retornos durante los N primeros períodos de producción. Este costo aumenta, al aumentar la cantidad de retornos, y se revierte cuando los retornos son muy altos o similares a la demanda, ya que la remanufacturación empieza de forma temprana.

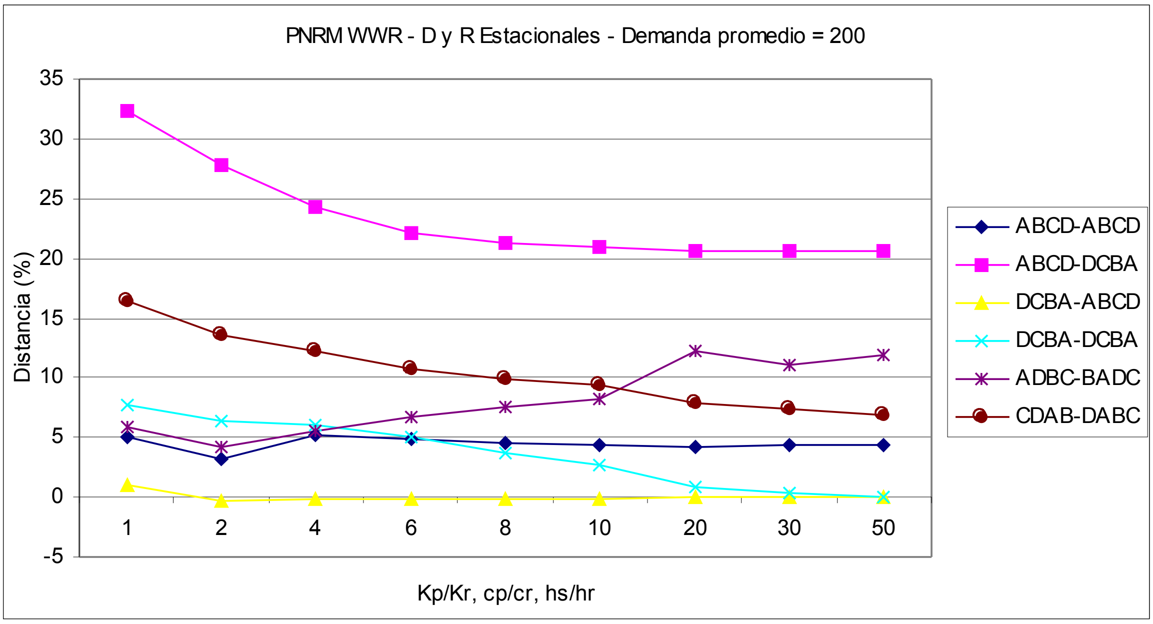
En el caso de costos dinámicos se aprecia un comportamiento similar al del caso estático. A continuación se muestran las gráficas de los resultados obtenidos para la política PNRM WWR.



El comportamiento de PNRM SMR es similar al de WWR, pero con la diferencia de que se puede observar un resultado mejor que en el caso de WWR, lo cual no sucedía en el caso de costos estáticos.

Esto se debe a que el método de WWR supone que los costos de inventario de artículos listos es por lo menos igual al de inventario de artículo usados, mientras que SMR no supone nada con respecto a los costos de inventario. Por lo tanto en el caso dinámico, en aquellos casos en que los valores de costos de inventario de artículos listos sean superiores al de artículos usados, la opción SMR puede arrojar mejores resultados.

Para el caso de demanda y retornos estacionales, se puede ver que el comportamiento es similar al de costos estáticos, tanto para WWR como para SMR, excepto en dos casos particulares en que se ve un comportamiento opuesto al resto. La gráfica de los resultados observados para WWR se presenta a continuación.



El primer comportamiento particular es el caso de ABCD – DCBA, o sea de demanda ascendente y retornos descendentes. El mal comportamiento en este caso, igual que en los casos anteriores, se debe a que inicialmente se mantiene un nivel alto de inventario de artículos usados. Si bien se reduce a medida que aumentan los costos de producir y de inventario de artículos listos, la diferencia con respecto a la mejor solución hallada es grande debido que inicialmente los retornos son mucho mayores a la demanda.

El segundo caso particular es el de ADBC – BADC, en donde la demanda es ascendente y los retornos descendentes, pero en dos tramos. La diferencia con el caso anterior es que en este caso hay un buen comportamiento inicial con respecto a los costos totales, que va desmejorando a medida que aumentan los costos de producir y de inventario de artículos listos.

Esto se debe fundamentalmente a que según la forma de la política en los primeros períodos se produce lo necesario y luego se realiza la remanufacturación. Esto sin embargo en el caso de ADBC – BADC no es la mejor opción, ya que inicialmente los retornos son suficientes. De esta manera la aplicación de la política PNRM en este caso, provoca niveles altos de inventario de artículos listos y usados en los primeros períodos, incidiendo de gran manera en los costos totales. El desmejoramiento gradual se debe al aumento en el costo de inventario de artículos listos.

En oposición a los dos casos anteriores de mal comportamiento, en el caso de DCBA – ABCD, o sea de demanda descendente y retornos ascendentes se observa un excelente comportamiento. La razón de esto, se encuentra en que la forma de la demanda y de los retornos, está en armonía con la forma de la política de primero producir y luego remanufacturar, ya que ambas actividades se realizan en los momentos adecuados: la primera cuando los retornos son escasos, y la segunda cuando los retornos son suficientes.

Se puede concluir entonces que la política PNRM tiene un buen comportamiento en aquellos casos en que los costos de producir y de inventario de artículos listos son altos comparados con los costos de remanufacturar y de inventario de artículos usados, respectivamente. Este mismo comportamiento se aprecia en el caso en que sólo varían los costos de producir. El comportamiento, se debe fundamentalmente a la forma de la política, de primero producir y luego remanufacturar. Esto tiende a provocar niveles altos de inventario de artículos usados en los primeros períodos, así como un nivel de medio o alto de inventario de artículos listos en el período anterior al comienzo de la remanufacturación.

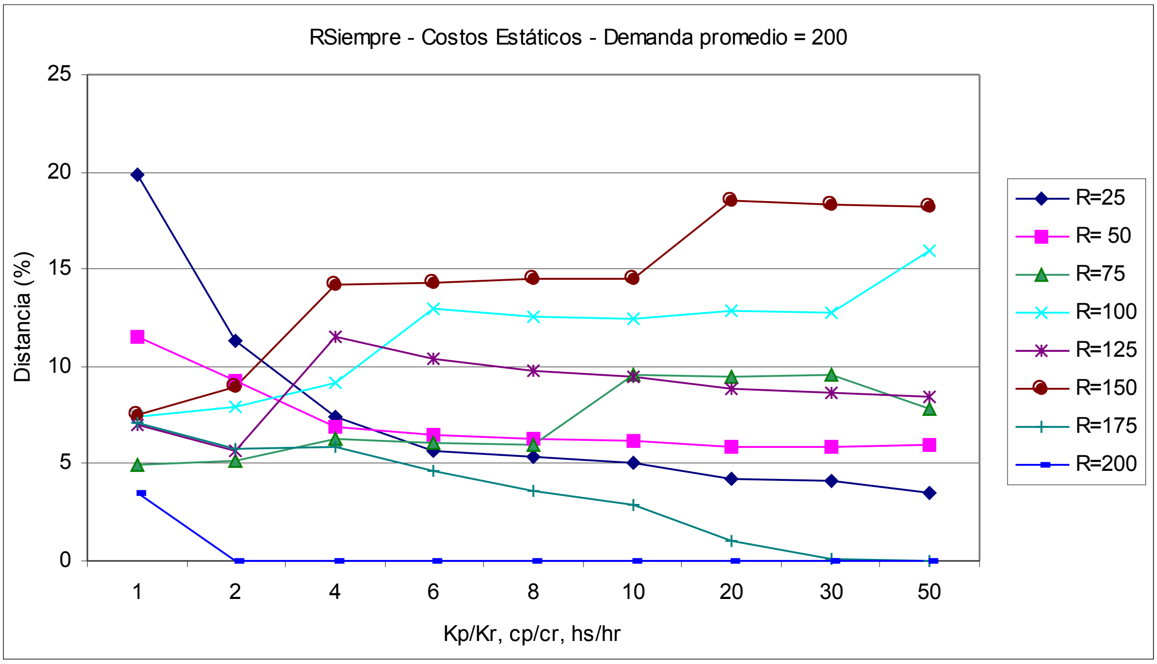
En el caso de retornos muy altos y similares a la demanda, se revierte este efecto, y se observa un muy buen comportamiento, debido a que los retornos son prácticamente suficientes y la producción es escasa. Además para la determinación de la remanufacturación se tiene en cuenta la minimización de todos los costos asociados, inclusive el de inventario de artículos listos.

3. Política RSiempre

El análisis de la política de remanufacturar siempre, es uno de lo más difíciles de hacer, ya que en un principio, se esperaba un comportamiento peor que el obtenido, debido a la arbitrariedad impuesta en la forma de realizar la remanufacturación. Sin embargo, se obtuvieron resultados, que si bien nos son del todo buenos, en promedio tienen un comportamiento aceptable con respecto a la minimización de los costos. A su vez se observa un comportamiento muy bueno en algunos casos, y en otros malos, aunque no desastrosos.

El buen comportamiento se debe al hecho de que la producción se determina empleando un procedimiento parecido al de Silver-Meal [31], aunque hacia atrás, o sea comparando el costo de producir en el período actual con en el del último anterior. A su vez el mal comportamiento esta asociado a la forma de realizar la remanufacturación, que además de ser determinada sin tener en cuenta los costos, incide de gran manera en la determinación de la producción.

Como en los casos anteriores, comenzamos con el análisis para el caso de costos estáticos, y luego con los casos de costos dinámicos y de demanda y retornos estacionales. A continuación se presenta la gráfica que muestra los resultados obtenidos para la política RSiempre, en el caso de costos estáticos, cuando varían en forma conjunta los costos de producir y de inventario de artículos listos.



Si se observa con detenimiento, se puede apreciar que en los casos de retornos escasos o muy altos y similares a la demanda, el comportamiento mejora a medida que aumentan los costos de producir y de inventario de artículos listos. En cambio para los casos de retornos medios y altos, pero no similares a la demanda, el comportamiento desmejora a medida que aumentan los costos.

Antes de entrar al análisis de cada caso, recordemos que según la definición de la forma de la política, se pretende remanufacturar en todos los períodos. Cuando la cantidad de retornos disponibles no es suficiente, se recurre a la producción del faltante en el período actual o en el último de producción positiva, según sea la opción más ventajosa económicamente.

Analicemos primero el caso en que los costos son similares, con respecto a los niveles de retornos.

Cuando los retornos son escasos lo que sucede es que hay pocos períodos de producción pero por grandes cantidades, ya que los retornos son escasos para satisfacer la demanda. Esto a su vez provoca que los niveles de inventario de artículos listos sean altos, y de ahí el mal comportamiento con respecto a los costos. Esto se debe a que la producción, si bien se determina teniendo en cuenta los costos, está subordinada por la remanufacturación. De esta manera las opciones para la producción son entre el último período de producción, o el actual, lo que provoca decisiones locales que afectan negativamente el comportamiento global.

Cuando los retornos aumentan, el mejoramiento en el comportamiento se explica en la relación entre los valores de la demanda, los costos de inventario y los de la remanufacturación. En el caso de retornos muy altos o similares a la demanda, se puede ver que es más conveniente remanufacturar en cada período, que acumular retornos y remanufacturar esporádicamente. Lo que hace la política de siempre remanufacturar, es precisamente esto, o sea intenta remanufacturar en cada uno de los períodos, lo cual se torna más efectivo cuando los retornos son altos o similares a la demanda. De lo contrario habría niveles altos de inventario de artículos usados, más cuando los retornos son altos, a un costo similar al de artículos listos, y muy posiblemente habría un aumento en los niveles de producción, lo cual aumentaría considerablemente los costos totales.

A medida que aumentan los costos de producir y de inventario de artículos listos, con respecto a los de remanufacturar y los de inventario de artículos usados, se observa un comportamiento distinto y no precisamente opuesto al anterior.

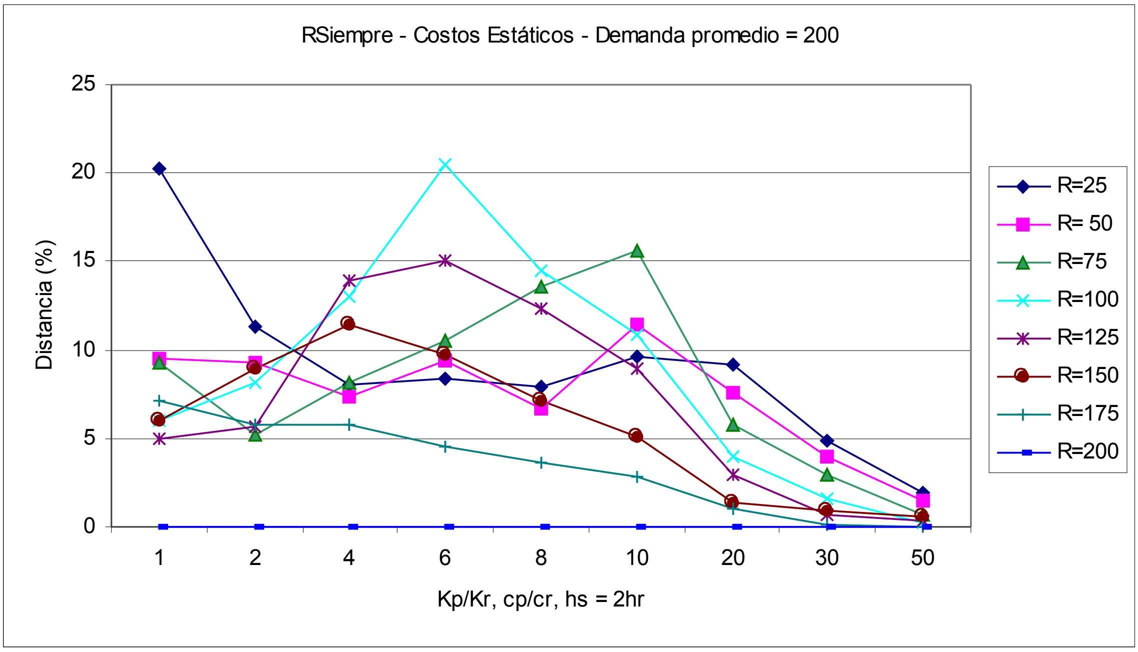
En el caso de retornos muy altos o similares a la demanda, el comportamiento sigue siendo muy bueno, mientras que en el caso de retornos escasos el comportamiento comienza a mejorar proporcionalmente con el aumento de los costos. En cambio en el caso de retornos medios se puede apreciar un desmejoramiento progresivo a medida que los costos aumentan.

En el caso de retornos escasos, lo que sucede es que los altos costos asociados a la producción y al inventario de artículos listos, determinan que los faltantes se produzcan en cantidades más pequeñas y menos esporádicas, lo cual tiene un impacto positivo en los costos totales.

Cuando los retornos son muy altos o similares a la demanda, lo que ocurre es que se remanufactura en casi todos los períodos, sólo lo necesario ya que los retornos son prácticamente suficientes. Esto además de minimizar la producción, provoca que los niveles de inventario de artículos listos sean prácticamente nulos. Por lo tanto, se evita la actividad y el inventario de mayor costo, lo cual provoca que el comportamiento con respecto al costo total sea muy bueno.

El desmejoramiento asociado a los retornos medios, se explica en el hecho de que aún es necesaria realizar la producción por cantidades que no son despreciables. A su vez debido a la subordinación de la producción con respecto a la remanufacturación, y a las decisiones locales con respecto a la opción más ventajosa, hay tendencia a que la producción se efectué pocas veces y por grandes cantidades, lo cual provoca altos niveles de inventario de artículos listos a un costo elevado, y de ahí el mal comportamiento.

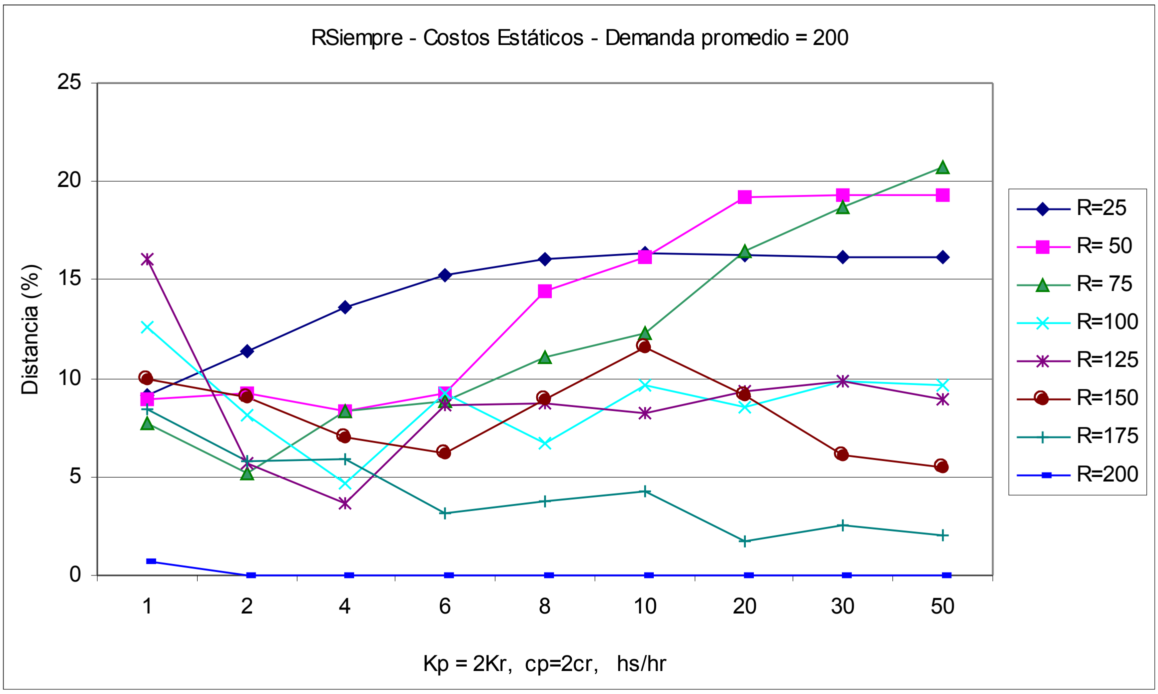
En el caso que sólo varían los costos de producir, y los de inventario mantienen una relación de 2 a 1 entre artículos listos y usados respectivamente, se observan comportamientos diferentes al caso en que ambos tipos de costos varían. Sobre todo se puede apreciar una convergencia al buen comportamiento en todos los casos de retornos.



Cuando la relación entre los costos de producir y de remanufacturar es similar, e inclusive alta, aunque no demasiado, el comportamiento es el mismo que en el caso anterior, de cuando también varía el costo de inventario de artículos listos. Por lo tanto hay que remitirse al análisis de este caso.

En el caso en que los costos de producir son muy altos comparados con los de remanufacturar, hay un comportamiento similar para los distintos casos de retornos, lo que no ocurre en el caso en que también varían los costos de inventario. Esto se debe a que la política subordina la producción a la remanufacturación, lo cual provoca niveles altos de inventario de artículos listos, que en este caso no inciden en mayor grado en el costo total, ya que se mantiene los valores del mismo.

De ahí que se observe un buen comportamiento en todos los casos de retornos, y de manera más prematura cuando los retornos son muy altos o similares a la demanda. Esto se debe además a que aumenta la remanufacturación con respecto a la producción, porque los retornos son prácticamente suficiente, lo que es más ventajoso en términos económicos.
En el siguiente gráfico se muestra el comportamiento de la política cuando sólo varían los costos de inventario de artículos listos, y se mantienen en la relación de 2 a 1 los costos de producir sobre los de remanufacturar.



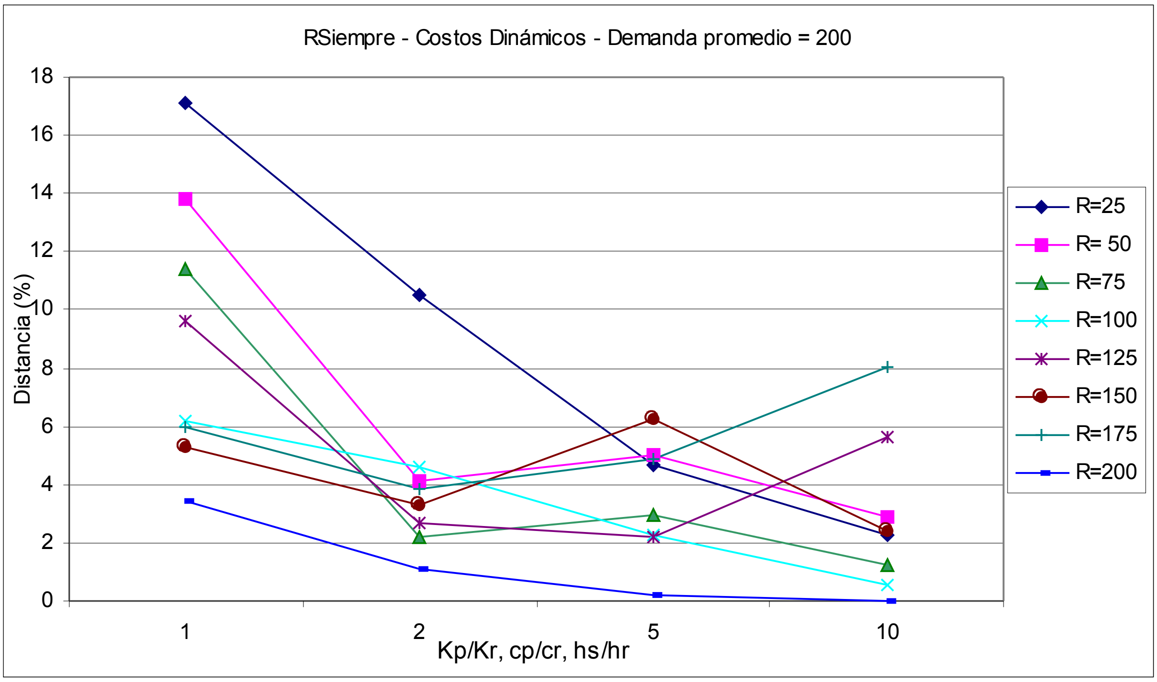
Al igual que para los casos anteriores se aprecia un muy buen comportamiento para los casos de retornos muy altos o similares a la demanda, que mejora a medida que aumentan los costos correspondientes.

En cambio se aprecia una diferencia clara con el caso anterior en que sólo varían los costos de producir, para los casos de retornos escasos y medios o altos.

Cuando los retornos son escasos se aprecia un claro desmejoramiento a medida que aumentan los costos de inventario de artículos listos. La causa de este comportamiento, se debe a que precisamente, las decisiones locales tomadas cuando los retornos son insuficientes, determinan que las cantidades producidas sean elevadas. Esto provoca altos niveles de inventario de artículos listos a un alto costo, lo que a su vez incide fuertemente en los costos totales.

En el caso de retornos medios o altos, sucede algo similar al caso de retornos bajos, que se ve disminuido porque las cantidades producidas son menores, y de ahí su mejor comportamiento con respecto a los costos.

Ahora damos paso al análisis del caso de costos dinámicos, en donde varían conjuntamente los costos de producir y de mantener en inventario artículos listos. En la siguiente gráfica se aprecia el comportamiento de la política RSiempre ante esta situación.



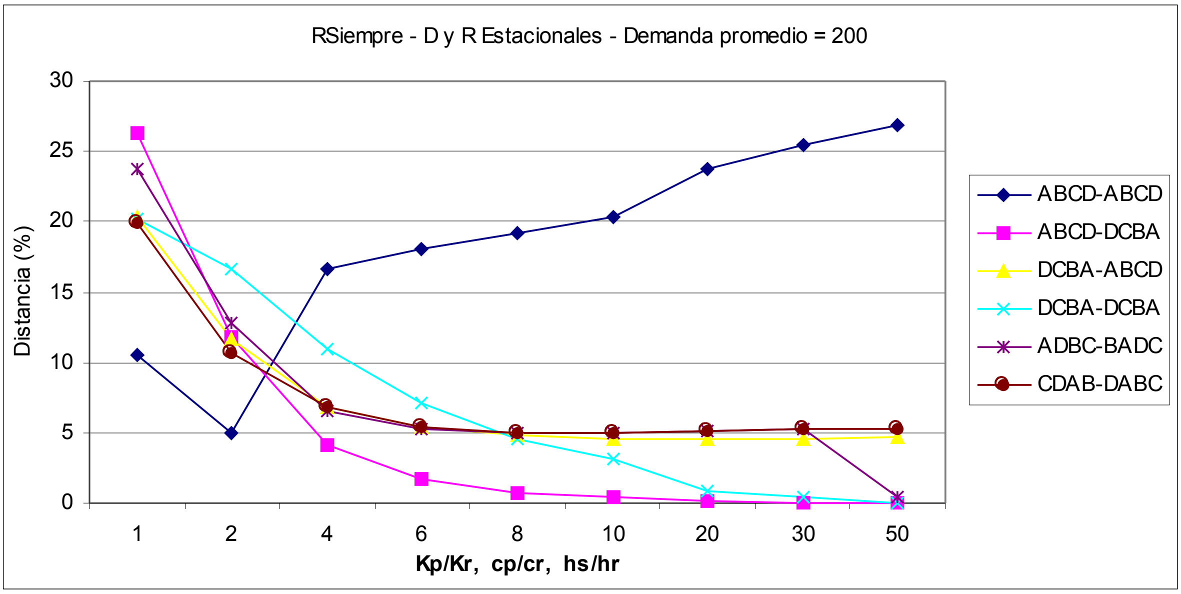
Claramente se puede apreciar un comportamiento similar con el caso de costos estáticos, en donde varían ambos tipos de costos. Al comienzo, cuando los costos son similares, el buen comportamiento depende del nivel de los retornos, por las causas que se mencionaron en el caso de costos estáticos. De la misma manera, a medida que los costos aumentan, si los retornos son escasos o muy altos se aprecia una mejora de comportamiento; mientras que si son medios o altos, se puede apreciar un desmejoramiento que va en aumento.

Las razones fundamentales para estos comportamientos, es que la producción esta subordinada por la remanufacturación, y que si bien se tienen cuenta los costos asociados, las decisiones locales afectan en gran medida el costo global.

En el caso de retornos escasos, a medida que aumentan los costos, la producción se realiza en un mayor número de veces, pero se reducen los niveles de inventario de artículos listos, lo que tiene un impacto positivo en los costos, ya que se remanufactura también más veces a un costo comparativamente menor. En el caso de retornos muy altos o similares a la demanda, lo que sucede es que los retornos son casi suficientes y se remanufactura cada vez sólo lo necesario, lo cual minimiza la producción y el nivel de inventario de artículos listos.

Cuando los retornos son medios o altos, la causa del desmejoramiento gradual se debe a que es necesario producir en cantidades considerables, lo cual provoca niveles altos de inventario de artículos listos. Esto al igual que en el caso de costos estáticos, se debe a que las decisiones tomadas localmente cuando los retornos son insuficientes, tienden a recargar el último período de producción anterior, lo cual luego afecta el costo global.

Por último, analizaremos el caso en que la demanda y los retornos son estacionales, y los costos estáticos, variando en forma conjunta los de producir y los de inventario de artículos listos.



En el caso estacional se puede observar que el comportamiento mejora a medida que aumenta la relación entre los costos, salvo para el caso ABCD–ABCD, o sea cuando ascienden tanto la demanda como los retornos. Esto se debe a que la producción se realiza al comienzo, pocas veces y por grandes cantidades, lo que provoca un alto nivel de inventario de ambos tipos, durante varios períodos, a un costo elevado. La remanufacturación se concentra en los períodos finales, ya que los retornos son casi suficientes.

Si bien la forma de la solución es muy similar a la de la política PNRM, que arroja buenos resultados para este caso estacional, el problema de RSiempre está en la forma de determinar la producción. Si bien se tienen en cuenta los costos asociados, está subordinada por la remanufacturación, y por una toma de decisión local, lo que tiene incidencias negativas en el costo global.

En el resto de los casos, lo que sucede cuando los costos de producción y de inventario de artículos listos son elevados, es que en la mayoría de los casos los retornos son suficientes, y cuando no, la producción se realiza por las cantidades necesarias y esporádicamente, lo que tiene a mantener niveles bajos de inventario de artículos listos. Esto sumado, a que la remanufacturación se hace sólo por las cantidades necesarias, y comparativamente a bajo costo, arroja los buenos comportamientos observados.

Como conclusión, sobre el análisis del comportamiento de la política RSiempre, podemos decir que se tiene siempre un buen comportamiento cuando los retornos son similares a la demanda o muy altos. Este comportamiento es muy bueno o excelente cuando además los costos de producción son altos en comparación con los de remanufacturar. Esto es lógico, ya que la forma de la política se apoya en la remanufacturación.

Para los otros niveles de retornos se observa un comportamiento diverso, según sea la variación de los costos. Si los retornos son escasos hay buen comportamiento, salvo cuando los costos de inventario de artículos listos son muy altos en comparación con el resto de los costos. Cuando los retornos son medios o altos, se aprecia un buen comportamiento cuando sólo varían los costos de producción. En realidad, en este caso de variación de costos hay un buen comportamiento para todos los retornos.

El mal comportamiento en casi todos los casos, se explica en la subordinación de la producción con respecto a la remanufacturación, ya que cuando los retornos no son suficientes se recurre a la producción del período actual o a la del último, pero no al mejor entre todos los posibles. Esta toma de decisión local, provoca que los niveles de inventario de artículos listos sean altos, ya que se produce esporádicamente, lo cual incide en los costos totales.

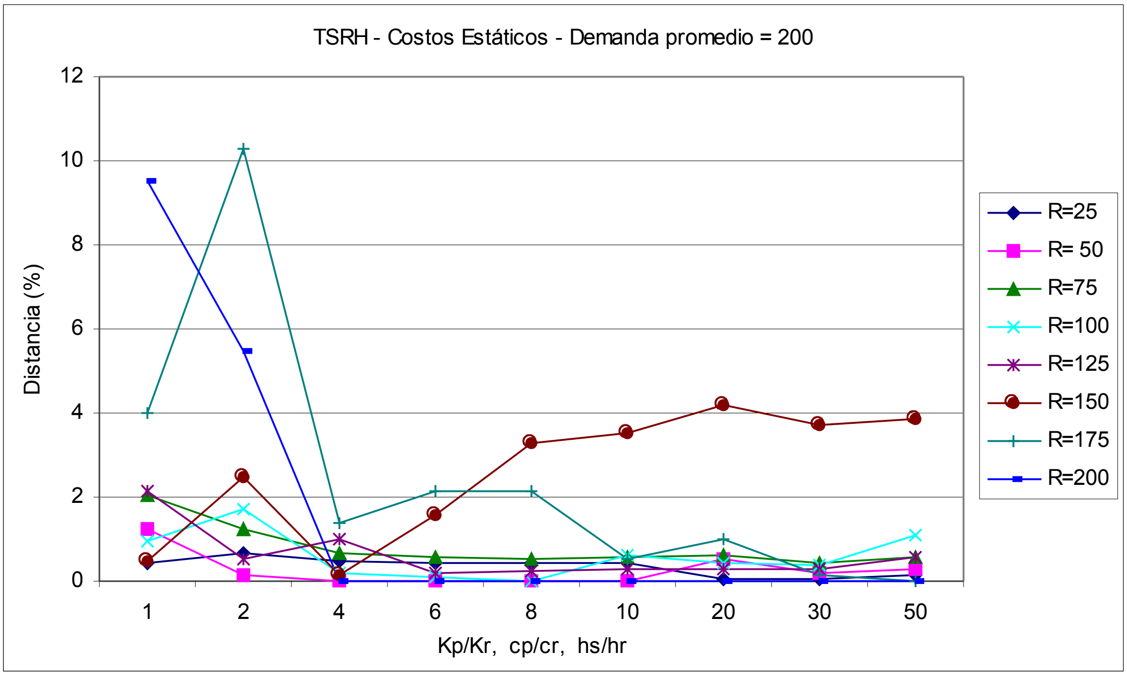
En definitiva, la política RSiempre se puede aplicar con buenos resultados cuando los retornos son similares a la demanda, o cuando los costos asociados a la producción son muy elevados en relación a los demás costos. Cuando los costos de las actividades son similares, y el costo de inventario de artículos listos es muy elevado con respecto al resto, sólo hay buenos resultados en el caso de retornos similares a la demanda o muy altos.

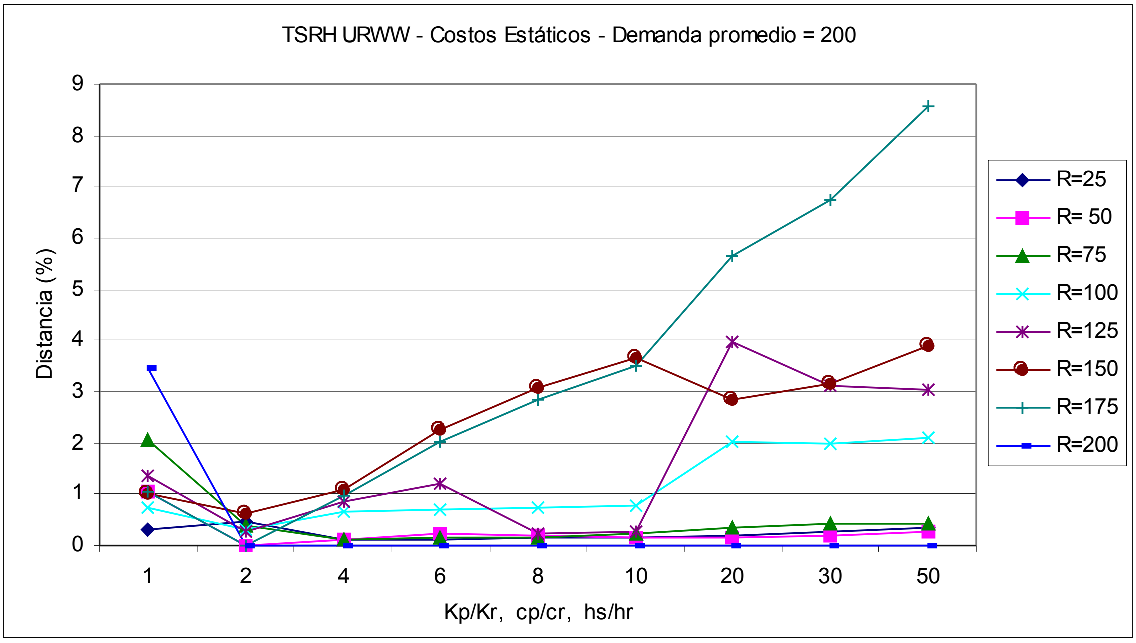
4. Políticas basadas en *Tabu Search*

En este punto abordaremos el análisis de comportamiento de las políticas y procedimientos de resolución basados en la metaheurística de *Tabu Search*. Más específicamente, analizaremos la política TSRH, que es la implementación determinística de *Tabu Search*, aunque se mencionaran características de la versión estocástica para el caso de gran tamaño.

Comenzaremos, como en el caso de las políticas anteriores, con un análisis del caso de costos estáticos, para luego ir al caso de costos dinámicos y de demanda y retornos estacionales. Al final, abordaremos el caso de gran tamaño, o sea aquel donde la cantidad de períodos es igual a 240.

En las siguientes dos gráficas podemos ver el comportamiento de la política TSRH y TSRH URWW respectivamente, para cuando varían en forma conjunta los costos de producir y de inventario de artículos listos. La política TSRH WWR es la aplicación de TSRH a una solución inicial obtenida mediante la política URWW.





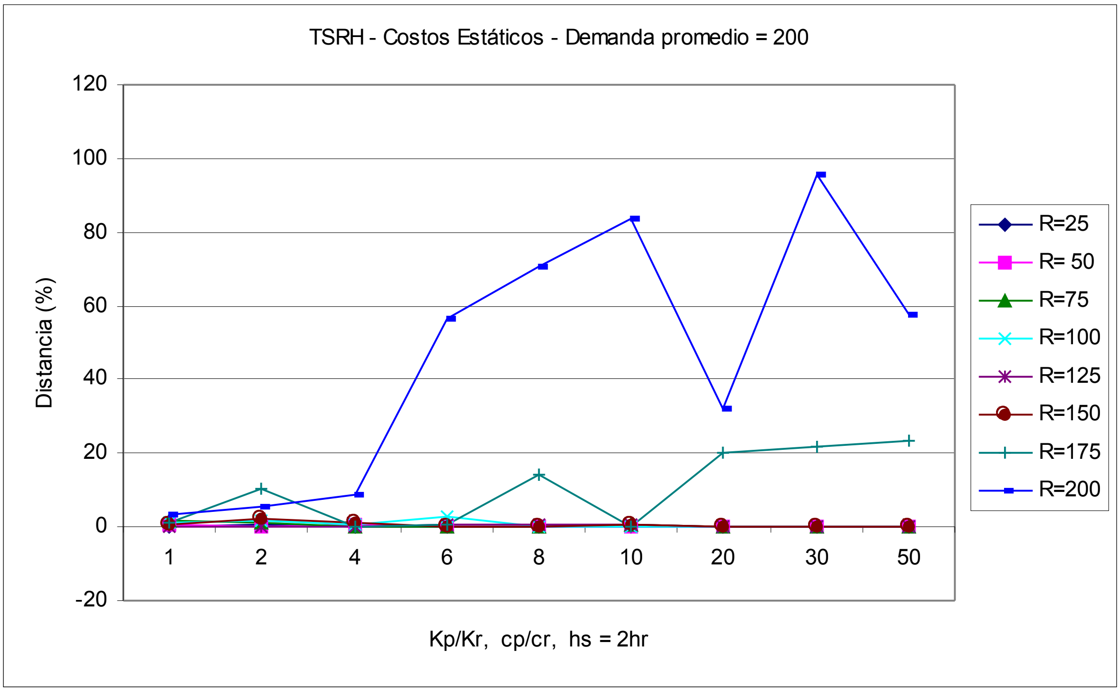
Antes de entrar en un análisis en detalle de cada caso, se puede apreciara simple vista, un muy buen comportamiento de ambas políticas para casi todos los casos.

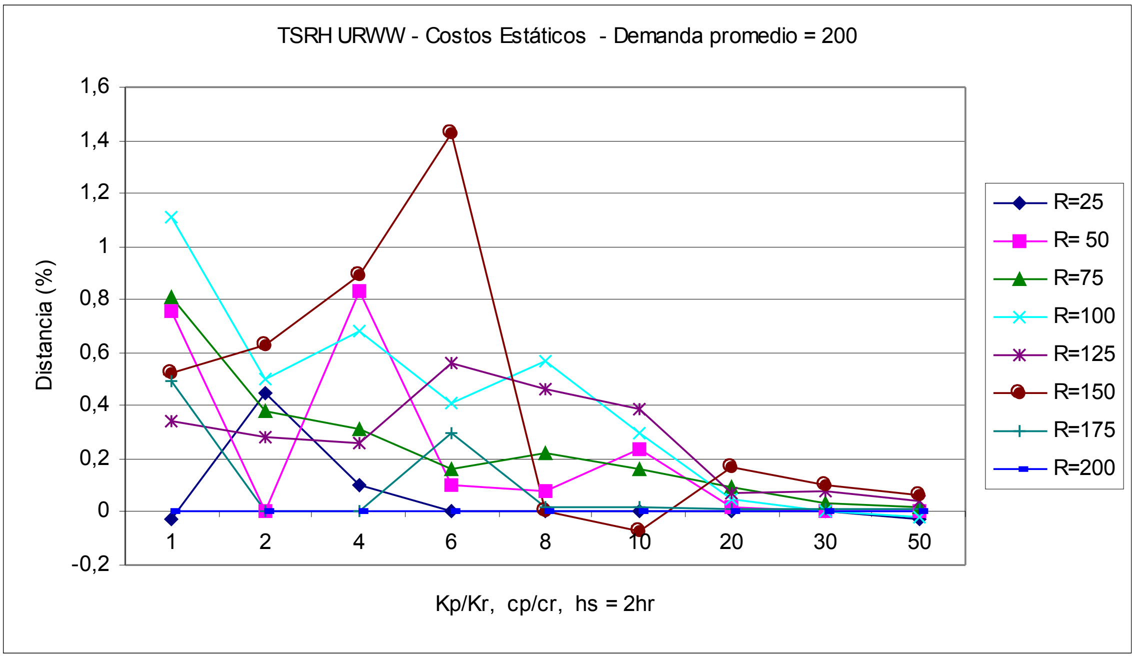
Para TSRH, se aprecia un mal comportamiento sólo cuando los costos son similares y los retornos muy altos o similares a la demanda. Esto se debe a que la solución inicial en todos los casos es producir en el primer período toda la demanda y mantener en inventario de artículos usados todos los retornos. Esta es una solución muy distante de la óptima cuando los retornos son altos, y aparentemente lo que sucede es que la cantidad de iteraciones del algoritmo no son las suficientes para llegar a una solución lo bastante próxima, aunque si mucho mejor que la inicial.

En el caso de retornos altos se aprecia una leve desmejora cuando aumentan los costos, pero siempre en la zona de buen comportamiento. Esto puede estar relacionado al problema anterior de la solución inicial de partida, y el número total de iteraciones, ya que la solución inicial está muy distante de una solución de buena calidad. De todas maneras el número de iteraciones es suficiente para lograr un buen comportamiento.

Para la política TSRH URWW se aprecia un muy comportamiento para todos los casos, excepto para los casos de retornos muy altos, pero no similares a la demanda. En estos casos, se aprecia un desmejoramiento a medida que aumentan los costos de producir y de inventario de artículos listos. Esto, otra vez, se debe al efecto de la solución inicial, ya que es precisamente en estos casos donde la política URWW no tiene un buen comportamiento. De todas maneras el procedimiento basado en *Tabu Search*, mejora notablemente el comportamiento.

En las siguientes dos gráficas podemos ver el comportamiento de TSRH y TSRH URWW respectivamente, para cuando sólo varían los costos de producir frente a los de remanufacturar, y se mantiene la relación de 2 a 1 entre el costo de inventario de artículos listos y el de usados.

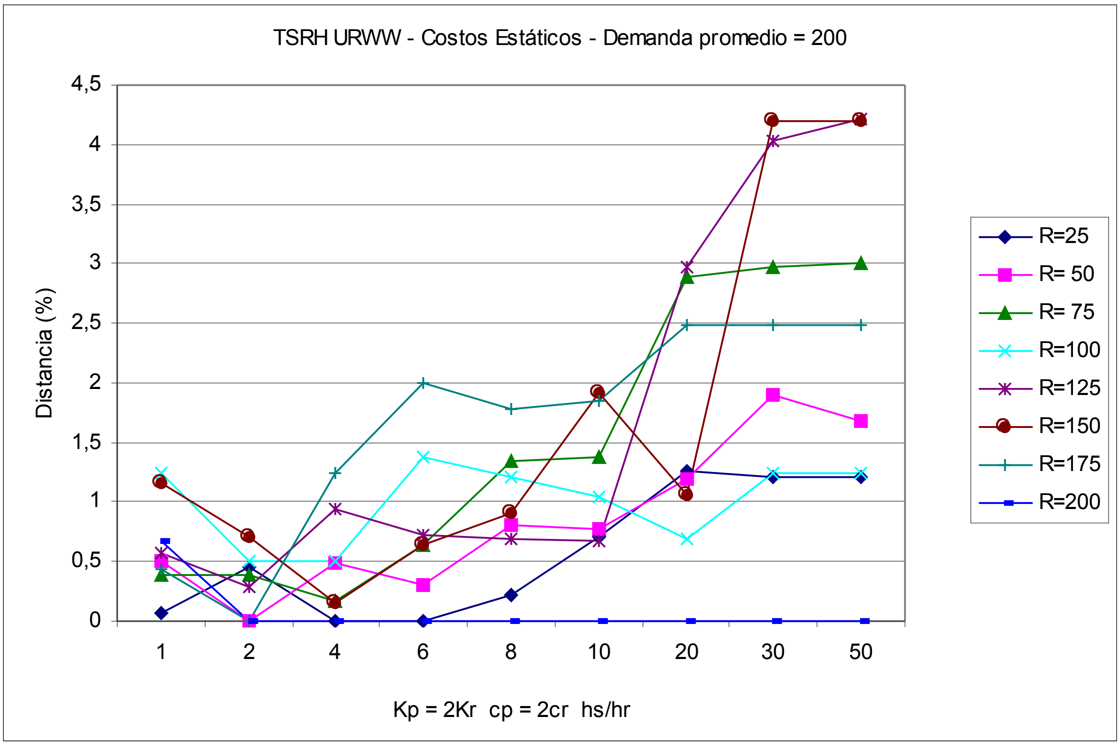




A simple vista se puede observar el buen comportamiento para todos los casos de la política TSRH URWW, o lo que es lo mismo: el procedimiento de resolución de *Tabu Search* con una solución inicial determinada por la política URWW. Incluso, para algunos valores de variación de costos, obtiene una mejor solución que la hallada mediante GAMS/Cplex.

En el caso de TSRH se tiene un buen comportamiento, salvo para los casos en que los retornos son muy altos o similares de la demanda. Esto, como en el caso anterior, está ligado a la solución inicial de partida, que produce todo lo necesario en el primer período y no realiza remanufacturación ninguna, y en la cantidad de iteraciones realizadas.
Para el caso, en que sólo varían los costos de inventario de artículos listos, y se mantiene la relación de 2 a 1 entre los de producir y remanufacturar, se observa en casi todos los casos

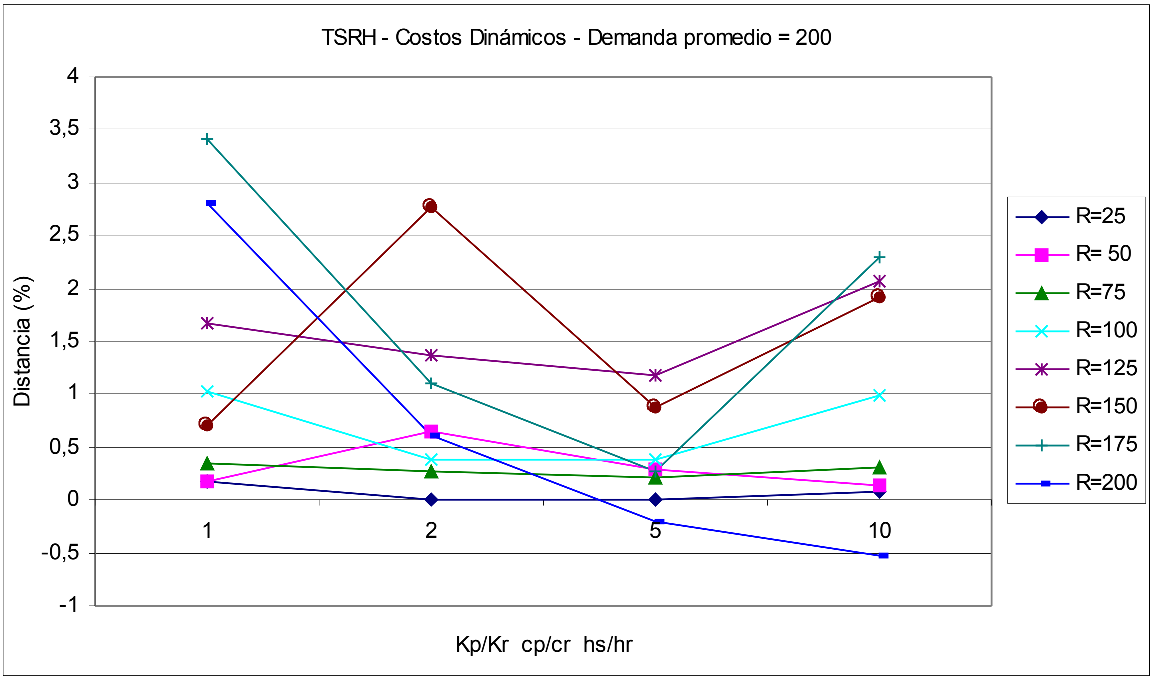
un muy buen comportamiento, así como el efecto de la solución inicial de partida y la cantidad de iteraciones.

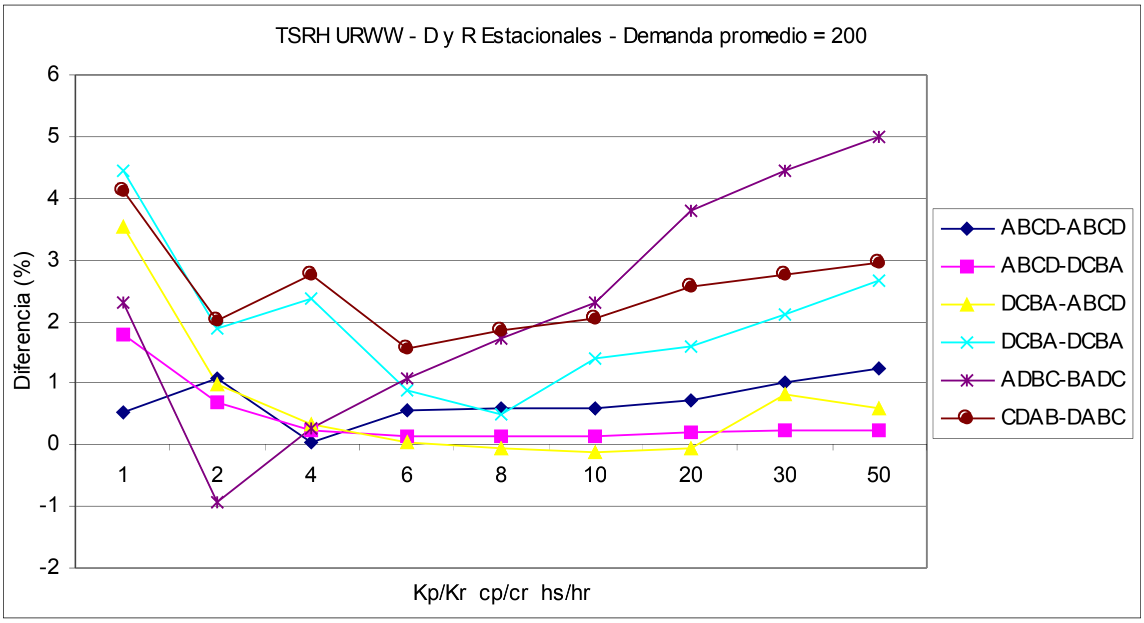


Por ejemplo, en la gráfica anterior se puede observar el efecto de la solución inicial determinada mediante la política URWW. Precisamente esta política tiene un muy mal comportamiento en el caso en que sólo varían los costos de inventario de artículos listos y estos son muy altos. A pesar de ello, el procedimiento de resolución logra un buen comportamiento con respecto a los costos, reduciendo notablemente el efecto negativo de la solución inicial.

El análisis del caso de costos dinámicos y de demanda y retornos estacionales, arrojan ambos el mismo resultado que el caso estático: Se aprecia un mal comportamiento para la política TSRH inicialmente, que luego mejora, hasta llegar a un excelente comportamiento; y en el caso de TSRH URWW se aprecia un muy buen comportamiento para todos los casos.

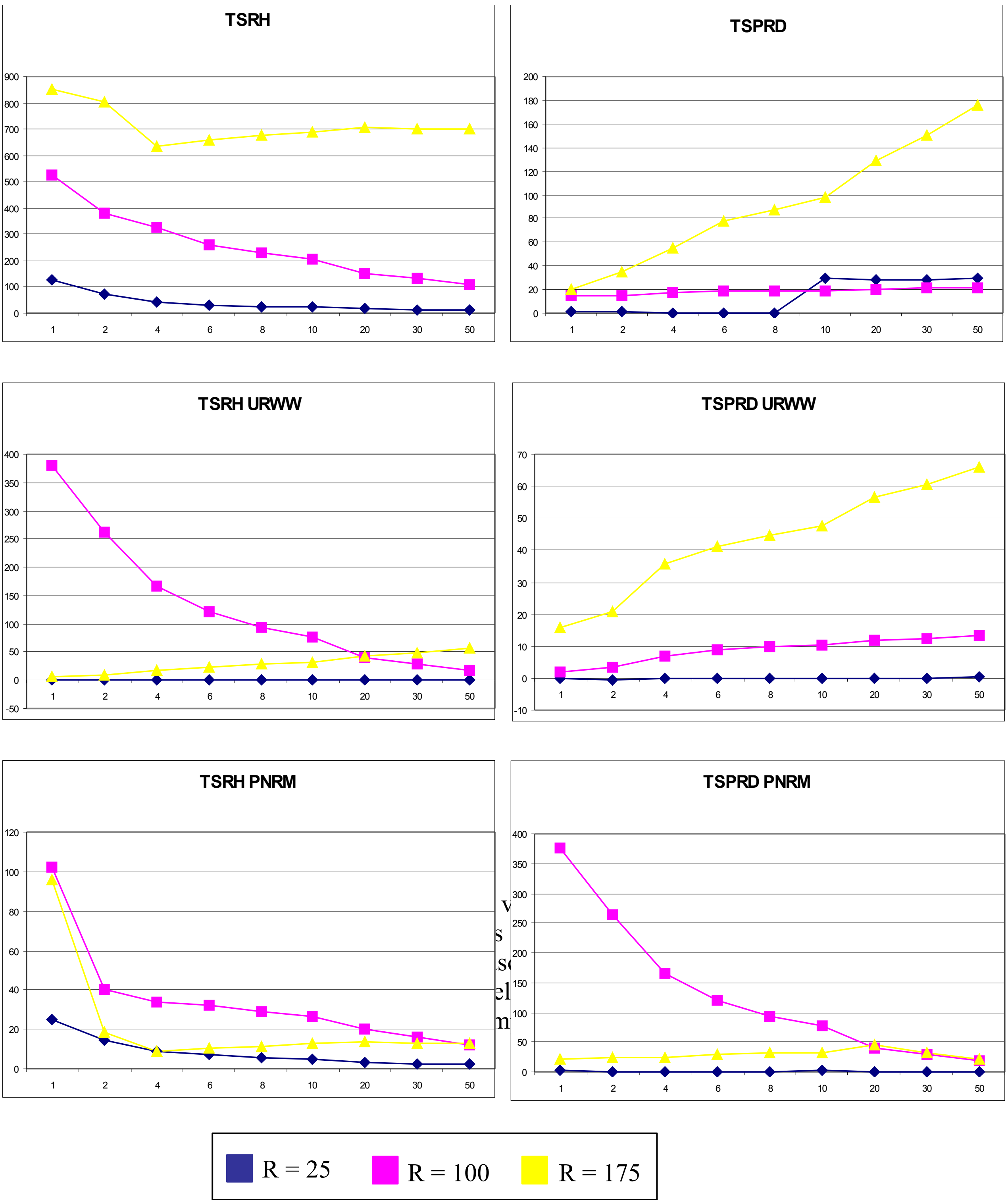
A manera de ejemplo, a continuación se presentan los resultados para la política TSRH URWW en el caso de costos dinámicos y de demanda y retornos estacionales, respectivamente.





El único caso que muestra promedialmente un mal comportamiento para las políticas basadas en *Tabu Search*, es el de gran tamaño, que no analizamos para las otras políticas. En este caso si tiene sentido el análisis, ya que uno de los objetivos de una implementación de *Tabu Search*, es la de poder obtener soluciones para problemas de grandes dimensiones.

En el caso de gran tamaño se analizaron las implementaciones de *Tabu Search* determinísticas y estocásticas, y se hicieron uso de las políticas URWW y PNRM WWR para obtener las soluciones iniciales. A continuación se muestran los resultados obtenidos para las versiones determinísticas y estocásticas solamente así como con las políticas URWW y PNRM WWR.


TSRH
TSPRD
TSRH URWW
TSPRD URWW
TSRH PNRM
TSPRD PNRM
R = 25
R = 100
R = 175

encuentra en la solución inicial de partida así como en el número de iteraciones. En el caso estocástico, la aleatoriedad en la exploración de las soluciones vecinas puede provocar un alojamiento de una buena solución.

En conclusión los procedimientos de resolución basados en la metaheurísticas de *Tabu Search* arrojan muy buenos resultados en todos los casos, aunque esto depende de la solución inicial de partida y también del número de iteraciones, aunque en menor medida, ya que partiendo de buenas soluciones iniciales, el algoritmo encuentra soluciones de buena calidad rápidamente. Además, la obtención de buenas soluciones iniciales se puede hacer eficientemente mediante alguna de las políticas vistas: URWW, PNRM o RSiempre, dependiendo de la situación.

En el caso de problemas de gran tamaño, no se obtuvieron buenos resultados, muy probablemente asociado al número de iteraciones empleadas. Habría que analizar en detalle el número de iteraciones que asegure soluciones de buena calidad, dependiendo el tamaño del espacio de soluciones. Otro tema a analizar es la mejora en la forma que se realiza la exploración del espacio de soluciones, quizás haciendo un híbrido entre el caso determinístico y el estocástico.

. Conclusiones Generales

En esta Tesis de Maestría se analiza el problema del Control de Inventario con Remanufacturación y Disposición Final, de tiempo discreto y determinístico. Esto significa que se considera el tiempo como una secuencia finita y ordenada de períodos, y que los valores de demanda y de retornos se suponen conocidos en cada uno de ellos. Una solución de este problema consiste en las cantidades a producir, remanufacturar y disponer finalmente en cada período, para satisfacer la demanda de un artículo. El objetivo del control es determinar la solución óptima, o sea aquella que minimice los costos involucrados. Los costos del problema son los de realizar cada una de las actividades y los de mantener en inventario artículos listos y usados. El problema de determinar una solución óptima está dentro del conjunto de problemas NP-difícil para una variedad de estructuras de costos [12][35][43].

Los aportes de nuestra Tesis al Control de Inventario con Remanufacturación y Disposición Final, son fundamentalmente tres:

- El análisis y la presentación de nuevos resultados teóricos, según nuestro conocimiento, de cómo realizar la remanufacturación independiente en un contexto particular de retornos, que definimos como Retornos Útiles. Este caso de retornos incluye casos de retornos suficientes e insuficientes.

- La definición de políticas simples, en donde se aplican entre otros los resultados teóricos realizados en nuestra tesis, y de procedimientos de resolución basados en la metaheurística de *Tabu Search*. Según nuestro conocimiento sería la primera vez que se utiliza esta metaheurística para la resolución de este problema.

- La implementación informática de una biblioteca extensible y fácil de usar, con las políticas y procedimientos de resolución propuestos para el Control de Inventario con Remanufacturación y Disposición Final

En el caso de los aportes teóricos, pensamos que los resultados obtenidos son significativos por dos motivos fundamentales. Primero, se extienden resultados anteriores a casos de costos más generales, utilizando para ello la modelización mediante Redes de Flujo [44][45]. Esta modelización permite asociar, por primera vez según nuestro conocimiento, el problema de control de inventario con remanufacturación con el caso tradicional. Segundo, se obtienen resultados novedosos, según nuestro conocimiento, de cómo realizar la remanufacturación de forma independiente, en un contexto particular que incluye tanto situaciones de retornos insuficientes como suficientes. Para ello se introduce una nueva clasificación de los retornos, que denominamos Retornos Útiles, que involucra tanto a casos de retornos insuficientes como suficientes, siempre y cuando la cantidad de retornos disponibles en un período no supere la demanda restante. En este contexto de retornos, se desarrollo un procedimiento que denominamos Wagner-Whitin Reverso Útil (URWW), para hallar la Remanufacturación Útil, que es aquella en la cual la cantidad remanufacturada en un período es siempre menor o igual a la demanda restante. El procedimiento URWW realiza la mejor remanufacturación posible, o sea de menor costo, si no se tiene en cuenta el costo de mantener en inventario artículos listos.

En cuanto a las políticas propuestas, en la mayoría se logra conjugar eficientemente la simplicidad en la forma y la minimización de los costos involucrados. Sobre todo en aquellas políticas que tienen en cuenta los costos y no reciben parámetros, como por ejemplo las de la familia URWW y PNRM con sus variantes, así como RSiempre. También se realizaron extensiones de políticas conocidas, como es el caso de Pull y Push, que han sido políticas empleadas con éxito en el caso de demanda y retornos estocásticos. Estas dos políticas, al igual que RMAXM, reciben parámetros, y por lo tanto su comportamiento con respecto a los costos, depende de los valores asignados a los mismos. En el caso de RMAXM, el parámetro sirve para indicar la cantidad de veces que se quiere remanufacturar, lo que puede ser muy útil en situaciones donde esté limitada por alguna razón las veces que se puede llevar a cabo esta actividad.

De los tests realizados para diferentes situaciones de demanda, retornos y costos, se puede concluir que para una determinada situación al menos una de las políticas propuestas tiene buenos resultados con respecto a la minimización de los costos totales. A grandes rasgos, las políticas de la familia URWW tienen un muy buen comportamiento en el caso de costos similares, y las de la familia PNRM cuando los costos son muy diferentes. En tanto, la política RSiempre muestra un resultado mejor que el esperado a priori, debido a la simplicidad de su forma, siendo aceptable en casi todos los casos, y muy bueno en el caso de retornos similares a la demanda. La política RMAXM muestra un buen comportamiento, siempre y cuando el valor de veces a remanufacturar sea igual o próximo al número de veces que se realiza esta actividad en la mejor solución hallada. En el caso de las políticas Push y Pull no se obtienen buenos comportamientos en ningún caso, porque los valores de los parámetros se fijaron arbitrariamente. Por otro lado este mal comportamiento de Push y Pull nos permite concluir experimentalmente que no es trivial encontrar los valores correctos de cada una de las actividades, sin ningún tipo de análisis sobe la relación entre las mismas y los niveles de inventario.

Una conclusión importante que se obtiene de los tests realizados, es que cuando los retornos son similares a la demanda, tanto URWW, como PNRM y RSiempre tienen un comportamiento excelente con respecto a la minimización de los costos. Esto pensamos que se debe a que en la mayoría de los casos analizados los costos asociados a los retornos son sensiblemente menores a los de producir artículos nuevos. Además, de alguna manera u otra, tanto URWW como PNRM y RSiempre privilegian la actividad de remanufacturación sobre la producción.

En cuanto a las políticas y procedimientos de resolución basados en *Tabu Search*, podemos concluir que según los resultados obtenidos, la aplicación de esta metaheurística al problema de Control de Inventario con Remanufacturación y Disposición Final es exitosa. En casi todos los casos se obtuvieron resultados muy buenos, e incluso mejores que el de la mejor solución encontrada mediante GAMS/Cplex. Del análisis de los resultados surge que es importante la solución inicial de partida, así como el número de iteraciones empleado. En el caso de la solución inicial, se puede obtener una de buena calidad mediante la aplicación de alguna de las políticas propuestas, dependiendo la elección de cual, de los costos y los niveles de retornos. Cualquiera sea la elección, la solución inicial se obtiene de forma muy eficiente. Con respecto al número de iteraciones pensamos que sería interesante analizar en un futuro, el valor mínimo que permita obtener una solución final de buena calidad. De la misma manera, algo interesante de investigar en un futuro, es un procedimiento híbrido, entre las versiones determinísticas y estocásticas, que permita realizar conjuntamente las estrategias de intensificación y diversificación.

Salvo en el caso de RMAX, los tiempos de ejecución de las implementaciones del resto de las políticas, son muy buenos, siendo en todos los casos menores a 1 segundo. En el caso de las implementaciones de *Tabu Search*, el tiempo de ejecución depende del número de iteraciones elegido, y del tamaño del espacio de soluciones. De todas maneras se registraron tiempos máximos de alrededor de 60 segundos para el caso de gran tamaño, con un número considerable de iteraciones.

Con respecto a la perspectiva ecológica que se establecido como base del desarrollo de la Tesis, pensamos que en todas las políticas propuestas, así como en los análisis teóricos realizados, se tiene siempre en cuenta la maximización de la recuperación de los retornos. Una muestra de ello, es que la disposición final sólo se realiza en aquellos casos de exceso de retornos, es decir cuando no son útiles para satisfacer la demanda. Este concepto de utilidad, fue definido formalmente como Retornos Útiles, y fue empleado para el análisis teórico de cómo realizar la remanufacturación de forma independiente.

En cuanto a la implementación informática, en la biblioteca se incluyen cada una de las políticas propuestas con las variantes correspondiente, al igual que los procedimientos de resolución basados en *Tabu Search*. Además se incluye un módulo especifico para la generación de valores de demanda, retornos y costos, así como un módulo para generar la entrada y salida mediante archivos, de forma amigable para el usuario. La entrada de datos se realiza mediante un archivo de texto plano con una estructura particular, fácil de escribir y de extender. Se tuvo en cuenta el caso de costos estáticos, para no repetir los valores para cada uno de los períodos. En vez de eso, se indica mediante un atributo si un problema es de costos estáticos o dinámicos, y en el caso estático, se ingresa el valor sólo una vez. Para la salida de datos, que se corresponde con la solución hallada según la política aplicada, se manejaron dos formatos de archivo: Valores separados por comas, extensión csv, que permite abrir el mismo en un manejador de planillas electrónicas tipo MS Excel, o html para ver los resultados, utilizando los recursos gráficos de un navegador Web. La implementación permite fácilmente la extensión a otros contextos de ejecución, como por ejemplo una arquitectura en tres capas, así como la inclusión de nuevas políticas o procedimientos de resolución para el problema de control de inventario. Esto es posible gracias a que se realizó un diseño orientado a objetos simple, y a las facilidades que ofrece el lenguaje Java.

Algo importante de mencionar, como comentario final, es que en el comienzo de la Tesis, no se tenía conocimiento formal de la complejidad del problema. Una muestra de ello es que el trabajo de van den Heuvel [35] sobre la complejidad, es de fines del 2004. Esta fue una de las causas, por las cuales se demoró el desarrollo de la Tesis, ya que en un principio se emprendió una búsqueda de la forma de la solución óptima. Luego de saber con certeza que la complejidad del problema era NP-difícil, se decide optar por el desarrollo de políticas y procedimientos de resolución basados en la metaheurística de *Tabu Search*. Se elige esta metaheurística, por la simplicidad de su forma, y porque según nuestro conocimiento es la primera vez que se aplica al problema de Control de Inventario con Remanufacturación y Disposición Final, y ha sido aplicada con éxito a una gran variedad de problemas [11].

Por lo tanto, como conclusión final, consideramos que los resultados obtenidos durante el desarrollo de la Tesis de Maestría, satisfacen debidamente los requerimientos planteados al inicio de la misma, de analizar el problema de Control de Inventario con Remanufacturación y Disposición Final. Esto queda demostrado en los aportes obtenidos, ya que además de proponer políticas simples de buen comportamiento dependiendo de la situación en que se apliquen, se obtuvieron resultados teóricos novedosos, y se aplicó con éxito la metaheurística de *Tabu Search*. Otro aporte que nos parece importante, es la herramienta de software que se implementó, con la cual se pueden evaluar distintas alternativas de manera eficiente, lo cual es muy útil par la toma de decisiones. También, dadas las características del lenguaje seleccionado, permite la extensión a un contexto de ejecución distribuido, como por ejemplo Internet, sin mucho esfuerzo.

. Trabajos Futuros

En esta sección del informe se presentan aquellos temas que consideramos de interés para el Control de Inventario con Remanufacturación y Disposición Final, que tienen como base el trabajo realizado en nuestra Tesis de Maestría, y que quedaron fuera del alcance de la misma, por motivos de tiempo o de complejidad.

En primer instancia, podemos referirnos a temas relacionados con los aportes realizados en nuestra Tesis. En cuanto a los aportes teóricos sería interesante generalizar, o investigar si es posible, los resultados obtenidos con respecto a la forma de realizar la remanufacturación de menor costo en el contexto de Retornos Útiles. Sobre este tema hay dos puntos que nos parecen interesantes. El primero sería de que manera incluir al problema de sólo remanufacturación, el costo de inventario de artículos listos, de tal forma que sea posible determinar la solución óptima con un algoritmo eficiente. Esto no parece una tarea fácil de lograr, si los retornos no son suficientes para satisfacer la demanda y es necesario producir al menos la diferencia entre ambas cantidades. Quizás una de las maneras de hacerlo sea introduciendo dos variables positivas para el inventario de artículos listos, que permita manejar niveles negativos de inventario mediante la diferencia entre ambas. Esto fue utilizado por Zangwill en [45] para el caso donde se permiten faltantes, y por lo tanto niveles de inventario negativo, que luego son satisfechos con la producción de períodos superiores.
Una consecuencia importante de incluir el costo de inventario de artículos listos en la determinación de la remanufacturación independiente, es la incidencia en la resolución del problema original, o sea del ELSR. Algo que parece tener sentido en el contexto de retornos útiles, donde no habría necesidad de la disposición final, es que considerar independientemente primero la remanufacturación, y luego la producción, puede llevar a una solución del ESLR próxima a la óptima. Esto es: determinar la remanufacturación óptima teniendo en cuenta todos los costos involucrados, y luego si es necesario, determinar la producción óptima para la demanda restante.

El segundo punto, que está de alguna forma relacionado con el primero, es estudiar la posibilidad de extender alguno de los resultados obtenidos a estructuras de costos más generales, como por ejemplo costos cóncavos. Un ejemplo es el procedimiento URWW, para el que se demostró que determina una solución óptima del U-ESLR en el caso de costos de la forma de una constante más una variable para las actividades, y costos lineales de mantener en inventario.

Con respecto a las políticas propuestas, un tema que sería interesante investigar, y que por motivos de tiempo no se hizo en nuestro trabajo, es el de los valores correctos para aquellas políticas que reciben parámetros. Estas son: RMAXM, Push y Pull, así como las distintas implementaciones de *Tabu Search*. En el caso de RMAXM el valor correcto para el número de veces a remanufacturar, según los tests realizados, parecería ser el indicado por la mejor solución encontrada. Por otro lado, es bueno contar con un método que provea soluciones alternativas, como en el caso de la implementación de RMAXM. En relación a esta política, sería interesante determinar formalmente la complejidad del algoritmo asociado, lo que probablemente no sea sencillo debido a que está relacionado con el tamaño del problema original y el número de veces a remanufacturar. Con respecto a Push y Pull no se realizó ningún análisis sobre el valor de los parámetros, y pensamos que está es la causa del mal comportamiento de estas políticas. Para las implementaciones de *Tabu Search*, como se mencionó en la Sección 6, habría que analizar en detalle el número de iteraciones que asegure soluciones de buena calidad, dependiendo el tamaño del espacio de soluciones. Otro tema a analizar es la mejora en la forma que se realiza la exploración del espacio de soluciones, quizás haciendo un híbrido entre el caso determinístico y el estocástico, para aprovechar eficientemente las estrategias de intensificación y diversificación.

Desde el punto de vista de la solución informática implementada, sería interesante extender la biblioteca a un ambiente de ejecución en capas, como por ejemplo Internet. Esto es posible, ya que se eligió como lenguaje de desarrollo a Java, que permite fácilmente la integración en un contexto como este, mediante el uso de la plataforma J2EE, para aplicaciones distribuidas y corporativas.

Otro hecho en que nos parece importante trabajar en un futuro, es en generar una biblioteca de pruebas de un volumen importante de casos, que permita medir el comportamiento de las políticas propuestas en nuestro trabajo, como de otras que surjan en un futuro. En nuestro trabajo, se construyeron cuatro marcos de pruebas: costos estáticos, costos dinámicos, demanda y retornos estacionales, y gran tamaño. La intención era testear las políticas propuestas en un espectro amplio de situaciones de demanda, retornos y costos. Habría que analizar si estos marcos son lo suficientemente generales, y proponer otros como por ejemplo uno de costos dinámicos estacionales, o combinaciones de los mismos: demanda, retornos y costos estacionales.

Otros posibles trabajos futuros están relacionados con las características que se asumieron para el problema. Estas se podrían extender para cubrir un mayor rango de casos reales, o modificar para obtener algún caso particular y resolver el problema de forma eficiente. Dentro de estas características consideramos importantes las siguientes:

- Permitir faltantes. Esto es, la demanda de un período puede ser satisfecha con la producción y/o remanufacturación de ese período, o de un período posterior.

- Considerar algún tipo de relación explicita entre los valores de la demanda y los de retornos, para de esta manera incluir esta relación en el modelo y utilizarla en el análisis de resolución del problema.

- Considerar tiempos de entrega no instantáneos, para la producción, la remanufacturación y la disposición final. A su vez se tendría que diferenciar entre tiempos de entrega iguales o diferentes para cada una de las actividades.

- Considerar la capacidad de cada una de las actividades como finita. Esto es que la cantidad que se puede producir, remanufacturar o disponer finalmente este limitada por un valor máximo, posiblemente distinto para cada una de las ellas. Observar que en el caso de la remanufacturación y la disposición final, esta sería una limitación distinta que la impuesta por la cantidad de retornos.

También es posible extender el problema a otros casos más complicados que sólo modificar una característica del mismo. Por ejemplo analizar el problema de varios artículos dependientes. Esto es considerar artículos compuestos por otros, con lo cual la demanda de un artículo final afecta la demanda de uno o varios artículos. También se puede extender la composición a los retornos, en donde alguno de los retornos esta compuesto por otros retornos.

Otra extensión, quizás más simple y realista, es considerar la actividad de clasificación de los artículos usados. Esto permitiría incluir más de un inventario de artículos usados, a costos diferentes, y posiblemente varios tipos de remanufacturación, dependiendo de la calidad de los artículos usados. Una extensión relacionada con la anterior, podría ser la inclusión del concepto de: Artículos Usados Perecederos. Esto es considerar la degradación de los retornos a medida que transcurre el tiempo, con respecto a la calidad mínima necesaria para ser remanufacturados. De esta manera se consideran diferentes inventarios, cada uno para un estado diferente de los retornos y con un costo asociado. Luego de un cierto tiempo un retorno que está en un estado o inventario determinado, si no es remanufacturado, pasa inmediatamente al siguiente estado e inventario correspondiente.

En todos estos casos planteados, se podría analizar el comportamiento de algunas de las políticas propuestas en nuestra Tesis, siempre y cuando admitan la extensión o modificación correspondiente. De la misma manera, se podría hacer uso de los resultados teóricos obtenidos para la forma de realizar la remanufacturación de forma independiente.

Por último, otros posibles trabajos de interés, podrían ser la integración del problema del Control de Inventario con Remanufacturación y Disposición final, con otro de los problemas de la Logística Inversa. Por ejemplo un problema de interés es el de Ruteo e Inventario, o sea integrar los problemas relacionados a la recolección y recuperación de los retornos. A este problema, en la Logística tradicional se le conoce como Problema de Inventario y Ruteo, o IRP, de sus siglas en inglés.

. Referencias

[1] Aggarwal A., Park J.K., 1993. *Improved Algorithm for Economic Lot Size Problems*. Operations Research 41(3), pp. 549-571.

[2] Arrow K., Karlin S., Scarf H.E, 1958. *Studies in the Mathematical Theory of Inventory and Production*. Standord University Press, Standford, California, USA.

[3] Beltrán J.L., Krass D., 2002. *Dynamic lot sizing with returning items and disposals*. IIE Transactions 34, pp. 437-448.

[4] de Brito M. P., Dekker R., 2002. *Reverse Logistics – a framework*. Econometric Institute Report EI 2002-38, Erasmus University Rotterdam, The Netherlands. Web: http://www2.eur.nl/WebDOC/doc/econometrie/feweco20021018095304.pdf, 29/12/2005.

[5] Fleischmann M., Bloemhof-Ruwaard J.M., Dekker R., van der Laan E., van Nunen J.A.E.E., Van Wassenhove L.N., 1997. *Quantitative models for reverse logistics : A review*. European Journal of Operational Research 103(1), pp. 1-17.

[6] Fleischmann M., 2001. *Reverse Logistics Network Structures and Design*. Erasmus Research Institute of Management, ERS-2001-52-LIS, Erasmus University Rotterdam, The Netherlands. Web: https://ep.eur.nl/bitstream/1765/113/1/erimrs20010919163815.pdf, 24/08/2005.

[7] Fleischmann M., Kuik. R., 2003. *On optimal inventory control with stochastic item returns*. European Journal of Operational Research 151(1), pp. 25-37.

[8] Florian M., Lenstra J.K., Rinnooy Kan H.G., 1980. *Deterministic production planning algorithms and complexity*. Management Science 26(7), pp. 669-679.

[9] GAMS: General Algebraic Modeling System. GAMS Development Corporation, 1217 Potomac Street, NW, Washington, DC 20007, USA. Web: http://www.gams.com, 17/01/2006.

[10] Gass S.I., Harris C.M. eds., 1996. *Encyclopedia of Operations Research and Management Science*. Kluwer, ISBN 0-7923-9590-5.

[11] Glover F., 1990. *Tabu Search: A Tutorial*. Interfaces 20(4) pp. 74-94.

[12] Golany B., Yang J., Yu G., 2001. *Economic Lot-sizing with Remanufacturing Options*. IIE Transactions 33, pp. 995-1003.

[13] Guide Jr. V. D. R., 2000. *Production planning and control for remanufacturing: industry practice and research needs*. Journal of Operations Management 18, pp. 467-483.

[14] Gungor A., Gupta S.M., 1999. *Issues in environmentally conscious manufacturing and product recovery: a survey*. Computers & Industrial Engineering 36, pp. 811-853.

[15] Harris F.W., 1913. *Operations Cost*. Factory, the Magazine of Management 10, pp. 135-136. (Reimpreso en 1990, Operations Research 38(6), pp. 947-950.

[16] Hillier F.S., Lieberman G.L., 1991. *Introducción a la Investigación de Operaciones*. McGraw-Hill, ISBN 968-422-993-3, pp. 687-732.

[17] Hormozi A.M., 2003. *The Art and Science of Remanufacturing: An In-Depth Study*. 34th. Annual Meeting of the Decision Sciences Institute, Washington D.C., Noviembre 22-25, 2003, Marriott Wardman Park Hotel. Web: http://www.sbaer.uca.edu/research/dsi/2003/procs/337-4758.pdf, 29/08/2005.

[18] Inderfuth K., 1997. *Simple optimal replenishment and disposal policies for a product recovery system with leadtimes*. OR Spektrum 19(2), pp. 111-122.

[19] Iyer A.V., Schrage L.E., 1992. *Analysis of the Deterministic (s,S) Inventory Problem*. Management Science 38(9), pp. 1299-1313.

[20] Kiesmüller G.P., 2002. *Optimal control of a one product recovery system with leadtimes*. International Journal of Production Economics 81-82, pp. 333-340.

[21] Kiesmüller G.P., Scherer C.W., 2003. *Computational issues in a stochastic finite horizon one product recovery inventory model*. European Journal of Operational Research 146(3), pp. 553-579.

[22] Koh S.G., Hwang H., Sohn K., Ko C., 2002. *An optimal ordering and recovery policy for reusable items*. Computers & Industrial Engineering 43(1/2), pp. 59-73.

[23] Mahadevan B., Pyke D.F., Fleischmann M., 2003. *Periodic review, push inventory policies for remanufacturing*. European Journal of Operational Research 151(3), pp. 536-551.

[24] Minner S., Kleber R., 2001. *Optimal control of production and remanufacturing in a simple recovery model with linear cost functions*. OR Spektrum 23(1), pp. 3-24.

[25] Richter K., 1996. *The EOQ repair and waste disposal model with variable setup numbers*. European Journal of Operational Research 95(2), pp. 313-324.

[26] Richter K., 1997. *Pure and mixed strategies for the EOQ repair and waste disposal problem*. OR Spektrum 19(2), pp. 123-129.

[27] Richter K., Sombrutzki M., 2000. *Remanufacturing Planning for the Reverse Wagner/Whitin Models*. European Journal of Operational Research 121(2), pp. 304-315.

[28] Richter K., Weber J., 2001. *The Reverse Wagner/Whitin Model with Variable Manufacturing and Remanufacturing Cost*. International Journal of Production Economics 71(1-3), pp. 447-456.

[29] Rogers D.S., Tibben-Lembke R.S., 1998. *Going Backwards: Reverse Logistics Trends and Practices*. Center for Logistics Management, University of Nevada, Reno. Web: http://www.rlec.org /reverse.pdf, 29/12/2005.

[30] Scarf H., 1959. *The Optimality of (S,s) Policies in the Dynamic Inventory Problem*. Mathematical Methods in the Social Sciences, pág 196-202, 1960, Vol. IV Stanford Mathematical Studies in the Social Sciences, Stanford University Press, Standford, California, USA.

[31] Silver E.A., Meal H.C., 1973. *A heuristic for selecting lot size requirements for the case of deterministic time-varying demand rate and discrete opportunities for replenishment*. Production Inventory Management 14(3), pp. 64-74.

[32] Simpson V.P., 1978. *Optimum Solution Structure for a Repairable Inventory Problem*. Operations Research 26(2), pp. 270-281.

[33] Taha H.A., 1991. *Investigación de Operaciones*. 2da. edición, Alfaomega, México, D.F., ISBN 968-6223-25-8.

[34] Teunter R.H., 2001. *Economic Ordering Quantities for Recoverable Item Inventory Systems*. Naval Research Logistics 48(6), pp. 484-495.

[35] van den Heuvel W., 2004. *On the complexity of the economic lot-sizing problem with remanufacturing options*. Econometric Institute Report EI 2004-46, Erasmus University Rotterdam, The Netherlands. Web: http://www.few.eur.nl/few/people/wvandenheuvel/papers/ei200446.pdf, 11/08/2005.

[36] van der Laan E., Salomon M., 1997. *Production Planning and Inventory Control with Remanufacturing and Disposal*. European Journal of Operational Research 102(2), pp. 264-278.

[37] van der Laan E., Salomon M., Dekker R., 1999. *Investigation of Lead-time Efects in Manufacturing/Remanufacturing Systems under Simple PUSH and PULL Control Strategies*. European Journal of Operational Research 115(1), pp. 195-214.

[38] van der Laan, E., M. Salomon, R. Dekker, van Wassenhove L., 1999. *Inventory Control in Hybrid Systems with Remanufacturing*. Management Science 45(5), pp. 733-747.

[39] van Hoesel C.P.M., Wagelmans A.P.M., 1996. *An O(T3) Algorithm for the Economic Lot Sizing Problem with Constant Capacities*. Management Science 42(1), pp. 142-150.

[40] Wagelmans A., van Hoesel S., Kolen A., 1992. *Economic Lot Sizing: An O(n logn) Algorithm that runs in Linear Time in the Wagner-Whitin case*. Operations Research 40(1), pp. 145-156.

[41] Wagner, H.M. and T.M. Whitin. 1959. *Dynamic Version of the Economic Lot Size Model*. Management Science 5(1), pp. 89-96.

[42] Wilson R.H., 1934. *A Scientific Routine for Stock Control*. Harvard Business Review 13, pp. 116-128.

[43] Yang J., Golany B., Yu G., 2005. *A Concave-cost Production Planning Problem with Remanufacturing Options*. Naval Research Logistics 52(5), pp. 443-458. Web: http://www-ec.njit.edu/~yang/research/concave/nrl_concave.pdf, 10/08/2005.

[44] Zangwill W.I., 1968. *Minimum Concave Cost Flows In Certain Networks*. Management Science 14(7), pp. 429-450.

[45] Zangwill W.I., 1969. *A Backlogging Model and a Multiechelon Model of a Dynamic Economic Lot Size Production System-A Network Approach*. Management Science 15(9), pp. 506-527.

[46] Zheng Y.S., Federgruen A., 1991. *Finding Optimal (s,S) Policies is about as simple as evaluating a single policy*. Operations Research 39(4), pp. 654-665.

Anexo A

Testeo de las Políticas Propuestas

Índice

Objetivo

En este documento se presentan en forma completa, los datos y resultados de los testeos realizados a las políticas y procedimientos de resolución propuestos en la Tesis de Maestría.

Para cada uno de los marcos analizados, se presentan los valores empleados para la demanda, los retornos y los distintitos tipos de costos. Los marcos analizados son:

- Costos Estáticos
- Costos Dinámicos
- Problemas de Gran Tamaño
- Demanda y Retornos Estacionales

Para cada uno de ellos, se presentan los resultados obtenidos en forma de tablas que muestran la distancia en porcentaje con la mejor solución, generalmente la óptima salvo para los problemas de Gran Tamaño, hallada mediante GAMS/Cplex, versión de distribución gratuita.

Los valores para los parámetros de las distintas políticas son los presentados en la Sección 5, para cada uno de los marcos de testeo.

La nomenclatura empleada en el resto del documento es la siguiente:

- n: Número de períodos
- D: Demanda.
- R: Retornos.
- Kp: Costo fijo de producir
- Kr: Costo fijo de remanufacturar
- Kd: Costo fijo de disponer finalmente
- cp: Costo unitario de producir
- cr: Costo unitario de remanufacturar
- cd: Costo unitario de disponer finalmente
- hs: Costo unitario de mantener inventario de artículos listos en un período
- hr: Costo unitario de mantener inventario de artículos usados en un período
- EA: Escala de aumento utilizada. Es la lista de valores utilizados para la variación de los costos de producir con respecto a los de remanufacturar y/o los de inventario de artículos listos con respecto a los de artículos usados. Según sea la o las variaciones de costos empleadas.
- VC: Variaciones de costos utilizadas. Pueden ser: aumento de los costos de producir y de mantener en inventario artículos listos a la vez (Kp/Kr, cp/cr, hs/hr), aumento sólo de los costos de producir (Kp/Kr, cp/cr), y aumento sólo de los costos de mantener en inventario artículos listos (hs/hr).

Para los componentes dentro de un marco de testeo, se dan directamente el o los valores que se mantienen para todas las pruebas realizadas, o los valores promedios, que luego se detallan para cada prueba en particular. En este último caso se señalan con un asterisco, luego del símbolo del componente. En el caso de los valores obtenidos mediante un procedimiento pseudoaleatorios, en todos los casos se uso una dispersión igual a 25, alrededor de la media.

. Costos Estáticos

Tabla de Datos	
N	24

D*	200
R*	{25,50,75,100,125,150,175,200}
Kp	500
Kr	500
Kd	500
Cp	5
Cr	5
Cd	3
Hs	1
Hr	1
EA	{1, 2, 4, 6, 8, 10, 20, 30, 50}
VC	{(Kp/Kr, cp/cr, hs/hr), (Kp/Kr, cp/cr), (hs/hr)}

D=200, R=25	
D	196,217,192,183,213,178,181,180,193,195,218,180,195,175,186,199,211,190,221,223,196,184,179,211
R	46,41,20,7,39,44,39,22,24,36,14,2,7,28,12,32,37,28,15,24,41,10,3,29

D=200 R=25	**Costos Kp/Kr, cp/cr, hs/hr**								
Políticas	**1**	**2**	**4**	**6**	**8**	**10**	**20**	**30**	**50**

URWW	0,99	0,45	0,57	0,67	0,72	0,76	0,87	0,95	1,04
URWW Fit	0,99	0,45	0,57	0,67	0,72	0,76	0,87	0,95	1,04
RSiempre	19,87	11,35	7,37	5,69	5,3	5,07	4,22	4,12	3,45
P1RM WWR	114,32	118,24	120,91	121,73	122,16	122,42	123,05	123,37	123,68
PNRM WWR	13,55	7,73	4,3	2,86	2,13	1,68	0,81	0,56	0,39
PNRM SMR	15,02	7,95	4,33	2,86	2,13	1,68	0,81	0,56	0,39
RMAXM	0,99	0,45	0,57	0,67	0,72	0,76	0,87	0,95	1,04
TSRH	0,41	0,68	0,49	0,43	0,43	0,41	0,05	0,05	0,12
TSRH URWW	0,31	0,45	0,11	0,13	0,14	0,15	0,21	0,28	0,35
Push	36,95	32,32	30,2	29,53	29,18	28,97	28,59	28,52	28,5
Pull	26,68	25,73	25,71	25,78	25,82	25,84	25,94	26,03	26,14
NoR	8,5	10,62	12,31	12,99	13,34	13,55	14,03	14,25	14,45

D=200 R=25	**Costos Kp/Kr, cp/cr, hs=2hr**								
Políticas	**1**	**2**	**4**	**6**	**8**	**10**	**20**	**30**	**50**
URWW	0,34	0,45	0,17	0,35	0,27	0,18	0,34	0,23	0,21
URWW Fit	0,34	0,45	0,17	0,35	0,27	0,18	0,34	0,23	0,21
RSiempre	20,29	11,35	8,04	8,32	7,97	9,61	9,18	4,81	1,95
P1RM WWR	216,4	118,24	60,17	39,35	28,5	21,99	9,09	4,74	1,91
PNRM WWR	13,7	7,73	4,09	3,06	2,37	1,97	1,03	0,64	0,27
PNRM SMR	14,08	7,95	4,21	3,15	2,44	2,03	1,06	0,66	0,28
RMAXM	1,4	0,45	0,17	0,35	0,27	0,18	0,09	0,06	0,28
TSRH	-0,03	0,68	0,19	0,28	0,0987	0	0	0,15	-0,03
TSRH URWW	-0,03	0,45	0,1	0	0	0	0	0	-0,03
Push	49,7	32,32	24,66	23,26	22,94	23,08	24,58	25,48	27,19
Pull	38,4	25,73	20,96	20,66	20,93	21,44	23,71	24,88	26,83
NoR	8,4	10,62	12,19	13,01	13,37	13,63	14,12	13,97	14,23

D=200 R=25	**Costos Kp=2Kr, cp=2cr, hs/hr**								
Políticas	**1**	**2**	**4**	**6**	**8**	**10**	**20**	**30**	**50**
URWW	0,99	0,45	0,57	0,67	0,72	0,76	0,87	0,95	1,04
URWW Fit	0,99	0,45	0,57	0,67	0,72	0,76	0,87	0,95	1,04
RSiempre	9,1	11,35	13,59	15,23	16,09	16,34	16,24	16,18	16,18
P1RM WWR	114,32	118,24	120,91	121,73	122,16	122,42	123,05	123,37	123,68
PNRM WWR	13,55	7,73	4,3	2,86	2,13	1,68	0,81	0,56	0,39
PNRM SMR	15,02	7,95	4,33	2,86	2,13	1,68	0,81	0,56	0,39
RMAXM	0,99	0,45	0,57	0,67	0,72	0,76	0,87	0,95	1,04
TSRH	0,41	0,68	0,49	0,43	0,43	0,41	0,05	0,05	0,12
TSRH URWW	0,31	0,45	0,11	0,13	0,14	0,15	0,21	0,28	0,35
Push	36,95	32,32	30,2	29,53	29,18	28,97	28,59	28,52	28,5
Pull	26,68	25,73	25,71	25,78	25,82	25,84	25,94	26,03	26,14
NoR	8,5	10,62	12,31	12,99	13,34	13,55	14,03	14,25	14,45

D=200, R=50	
D	195,181,179,189,209,184,198,197,198,211,203,212,221,191,195,192,214,189,209,212,184,179,222,219
R	33,45,36,49,55,63,41,65,67,58,54,44,46,65,74,29,51,30,35,74,39,55,54,33

D=200 R=50	**Costos Kp/Kr, cp/cr, hs/hr**								
Políticas	**1**	**2**	**4**	**6**	**8**	**10**	**20**	**30**	**50**
URWW	1,39	1,25	1,82	2,08	2,2	2,3	2,5	2,62	2,78
URWW Fit	1,39	1,25	1,8	2,08	2,2	2,3	2,5	2,62	2,78

RSiempre	11,48	9,25	6,87	6,49	6,26	6,15	5,91	5,88	5,92
P1RM WWR	94,34	98,48	101,59	102,46	102,87	103,16	103,78	104,09	104,47
PNRM WWR	21,8	13,4	7,86	5,38	4,04	3,24	1,59	1,07	0,71
PNRM SMR	21,8	13,93	7,91	5,38	4,04	3,24	1,59	1,07	0,71
RMAXM	1,39	0	0,14	0,66	0,3	0,35	0,45	1,32	0,66
TSRH	1,26	0,13	0	0,02	0	0,01	0,54	0,19	0,28
TSRH URWW	1,07	0	0,12	0,23	0,19	0,17	0,15	0,19	0,28
Push	10,84	13,28	15,58	16,53	17,01	17,32	17,98	18,26	18,57
Pull	50,34	44,16	41,08	40	39,4	39,05	38,35	38,17	38,12
NoR	15,5	21,81	26,66	28,59	29,57	30,21	31,53	32,04	32,54

D=200 R=50	**Costos Kp/Kr, cp/cr, hs=2hr**								
Políticas	**1**	**2**	**4**	**6**	**8**	**10**	**20**	**30**	**50**
URWW	1,54	1,25	0,86	0,77	0,6	0,88	0,59	0,74	0,46
URWW Fit	1,54	1,25	0,86	0,77	0,6	0,88	0,59	0,74	0,46
RSiempre	9,54	9,25	7,4	9,34	6,62	11,37	7,56	3,96	1,44
P1RM WWR	170,54	98,48	52,04	33,71	24,08	18,44	7,39	3,85	1,37
PNRM WWR	22,37	13,4	7,81	5,28	3,75	3,06	1,62	0,83	0,51
PNRM SMR	23,23	13,93	8,11	5,5	3,92	3,2	1,7	0,88	0,55
RMAXM	0,41	0,34	0,68	0,41	0,32	0,88	0,59	0,74	0,46
TSRH	0,78	0,13	0,56	0,02	0,03	0	0	0	0
TSRH URWW	0,76	0	0,83	0,1	0,08	0,24	0,02	0	0
Push	15,26	13,28	15,11	16,59	17,86	19,16	23,43	25,58	28,04
Pull	51,57	44,16	42,93	43,32	44,08	45,18	49,28	51,5	54,14
NoR	15,73	21,81	26,56	28,04	28,84	29,47	31,15	31,56	32,04

D=200 R=50	**Costos Kp=2Kr, cp=2cr, hs/hr**								
Políticas	**1**	**2**	**4**	**6**	**8**	**10**	**20**	**30**	**50**
URWW	0,5	1,25	2,1	3,01	3,63	4,24	7,91	11,52	18,02
URWW Fit	0,5	1,25	2,1	3,01	3,63	4,24	7,91	11,52	18,02
RSiempre	8,94	9,24	8,32	9,25	14,43	16,13	19,23	19,28	19,28
P1RM WWR	52,99	98,48	187,25	275,46	370,77	465,8	942,87	1420,8	2376,7
PNRM WWR	13,01	13,4	13,91	13,82	13,74	13,66	13,94	14,4	14,55
PNRM SMR	13,01	13,93	13,99	13,82	13,74	13,66	13,94	14,4	14,55
RMAXM	0,43	0	0,61	0,62	0,9	1,18	3,16	5,09	7,3
TSRH	0,65	0,13	1,53	0,82	1,03	1,07	1,48	1,48	1,48
TSRH URWW	0,5	0	0,49	0,3	0,81	0,78	1,2	1,89	1,68
Push	12,88	13,28	19,05	27,55	39,07	50,57	108,77	167,2	284,07
Pull	46,19	44,16	46,65	53,44	63,7	73,94	125,97	178,28	282,89
NoR	21,62	21,81	22,48	23,11	22,93	22,74	22,55	22,55	22,55

D=200, R=75	
D	206,192,190,223,216,214,200,199,189,220,214,179,186,208,203,185,218,213,189,217,187,209,218,202
R	84,85,90,70,61,60,86,68,94,74,56,92,53,77,92,76,84,73,55,96,80,68,76,52

D=200 R=75	**Costos Kp/Kr, cp/cr, hs/hr**								
Políticas	**1**	**2**	**4**	**6**	**8**	**10**	**20**	**30**	**50**
URWW	1,23	1,8	3,23	3,93	4,35	4,66	5,38	5,68	5,93
URWW Fit	1,23	1,8	3,23	3,93	4,35	4,66	5,38	5,68	5,93
RSiempre	4,89	5,16	6,23	6,05	5,99	9,56	9,51	9,54	7,86
P1RM WWR	72,1	76,89	79,67	80,17	80,52	80,79	81,52	81,86	82,14
PNRM WWR	25,48	18,22	11,64	8,23	6,41	5,31	3,05	2,3	1,69
PNRM SMR	25,48	18,76	11,64	8,23	6,41	5,31	3,05	2,3	1,69

RMAXM	0	0,15	2,63	3,09	3,39	3,61	4,16	4,4	4,6
TSRH	2,05	1,25	0,66	0,55	0,53	0,55	0,6	0,44	0,57
TSRH URWW	2,07	0,38	0,11	0,15	0,17	0,22	0,35	0,42	0,43
Push	72,13	66,72	64,43	63,68	63,34	63,18	62,96	62,96	62,97
Pull	58	61,96	66,45	68,48	69,65	70,45	72,26	72,98	73,57
NoR	21,64	33,76	43,94	48,26	50,68	52,25	55,69	56,97	58,03

D=200 R=75	**Costos Kp/Kr, cp/cr, hs=2hr**								
Políticas	**1**	**2**	**4**	**6**	**8**	**10**	**20**	**30**	**50**
URWW	2,2	1,8	1,72	1,3	1,09	1,41	1,02	1,12	0,69
URWW Fit	2,2	1,8	1,72	1,3	1,09	1,41	1,02	1,12	0,69
RSiempre	9,25	5,16	8,2	10,57	13,55	15,6	5,74	2,96	0,66
P1RM WWR	127,34	76,89	41,05	26,71	19,34	15,05	5,42	2,73	0,53
PNRM WWR	29,3	18,22	10,15	7,01	5,55	4,61	1,89	1,23	0,53
PNRM SMR	30,11	18,76	10,47	7,25	5,74	4,76	1,97	1,29	0,56
RMAXM	0,71	0,15	1,47	1,27	0,83	1,19	1,28	0,81	0,5
TSRH	1,62	1,25	0,12	0,11	0	0,59	0,14	0,02	0,02
TSRH URWW	0,81	0,38	0,31	0,16	0,22	0,16	0,09	0,03	0,02
Push	66,4	66,72	71,12	74,83	78,12	81,09	87,73	91,85	95,54
Pull	53,17	61,96	72,99	79,64	84,65	88,77	98,01	103,19	107,79
NoR	23,04	33,76	42,13	45,88	48,39	50,25	53,19	54,59	55,31

D=200 R=75	**Costos Kp=2Kr, cp=2cr, hs/hr**								
Políticas	**1**	**2**	**4**	**6**	**8**	**10**	**20**	**30**	**50**
URWW	0,83	1,8	3,43	5,82	6,69	7,9	14,08	20,39	33,03
URWW Fit	0,83	1,8	3,43	5,82	6,69	7,9	14,08	20,39	33,03
RSiempre	7,72	5,16	8,38	8,89	11,12	12,29	16,47	18,68	20,77
P1RM WWR	42,02	76,89	142,45	209,53	278,96	349,35	701,13	1053,4	1758
PNRM WWR	15,44	18,22	19,84	20,17	19,83	19,9	20,33	20,77	20,77
PNRM SMR	15,44	18,76	20,18	20,17	19,83	19,9	20,33	20,77	20,77
RMAXM	0,67	0,15	1,09	1,77	2,12	2,89	6,43	9,49	14,82
TSRH	0,63	1,25	0,4	1,92	2,72	2,67	2,54	2,53	2,53
TSRH URWW	0,39	0,38	0,16	0,64	1,34	1,38	2,88	2,97	3
Push	73,21	66,72	60,57	59,79	60,91	62,56	70,95	79,52	96,71
Pull	68,02	61,96	56,42	56,1	57,61	59,65	69,96	80,45	101,47
NoR	32,3	33,76	35,47	36,99	36,48	36,42	36,24	36,22	36,22

D=200, R=100	
D	223,200,219,221,198,221,215,202,187,182,188,208,198,208,206,193,182,210,188,193,192,194,220,188
R	112,117,113,109,112,107,78,84,93,114,100,117,86,111,101,109,124,99,84,108,94,93,114,91

D=200 R=100	**Costos Kp/Kr, cp/cr, hs/hr**								
Políticas	**1**	**2**	**4**	**6**	**8**	**10**	**20**	**30**	**50**
URWW	1,54	2,24	5,14	6,61	7,44	8,01	9,36	9,94	10,57
URWW Fit	1,54	2,09	4,86	6,26	7,07	7,61	8,91	9,48	10,09
RSiempre	7,44	7,88	9,2	12,96	12,52	12,46	12,82	12,78	15,9
P1RM WWR	49,02	51,55	53,56	53,28	53,12	53,06	53,06	53,19	53,5
PNRM WWR	25,52	19,63	13,78	9,89	7,67	6,26	3,27	2,27	1,57
PNRM SMR	25,52	20,59	14,04	9,89	7,67	6,26	3,27	2,27	1,57
RMAXM	1,54	1,82	4,32	5,31	5,88	6,26	7,24	7,67	8,18
TSRH	0,97	1,7	0,19	0,08	0,02	0,64	0,41	0,36	1,09

TSRH URWW	0,73	0,3	0,68	0,71	0,73	0,77	2,02	1,99	2,09
Push	15,01	41,24	57,15	66,88	72,44	101,38	105,15	58,29	59,68
Pull	44,06	61,34	79,62	88,16	93,03	108,21	114,77	144,1	146,4
NoR	28,42	48,44	68,75	78,18	83,57	87,1	95,03	98,07	100,86

D=200 R=100	Costos Kp/Kr, cp/cr, hs=2hr								
Políticas	**1**	**2**	**4**	**6**	**8**	**10**	**20**	**30**	**50**
URWW	3,68	2,44	3,43	2,65	2,25	2,32	1,96	1,33	1,57
URWW Fit	3,47	2,29	3,33	2,57	2,19	2,27	1,93	1,31	1,56
RSiempre	5,95	8,1	13,02	20,44	14,49	10,9	3,96	1,53	0,21
P1RM WWR	81,83	51,86	29,42	19,21	13,28	9,89	3,4	1,14	-0,03
PNRM WWR	30,03	19,87	12,55	8,79	6,43	4,96	2,35	1,14	-0,03
PNRM SMR	31,39	20,83	13,18	9,26	6,8	5,27	2,53	1,26	0,04
RMAXM	0,8	2,01	3,66	3,03	2,23	2,24	1,96	1,33	1,43
TSRH	1,27	1,91	0,83	2,65	0,23	0,18	0,02	0,05	-0,03
TSRH URWW	1,11	0,5	0,68	0,41	0,57	0,3	0,05	0	-0,02
Push	73,78	84,58	100,94	110,03	115,75	120,64	134,91	141,03	148,25
Pull	57,28	77,15	101,61	114,66	122,74	129,25	147,39	155,05	163,71
NoR	29,8	48,74	67,38	75,59	79,87	83,18	91,82	94,31	96,99

D=200 R=100	Costos Kp=2Kr, cp=2cr, hs/hr								
Políticas	**1**	**2**	**4**	**6**	**8**	**10**	**20**	**30**	**50**
URWW	2,4	2,44	6,54	11,59	15,34	18,8	35,97	53,44	87,5
URWW Fit	2,4	2,29	6,1	10,86	14,33	17,5	33,24	49,26	80,44
RSiempre	12,61	8,1	4,66	9,21	6,7	9,64	8,52	9,87	9,69
P1RM WWR	31,4	51,86	92,59	134,41	177,37	220,19	434,83	650	1081,1
PNRM WWR	17,78	19,87	22,21	23,17	23,36	23,36	22,94	22,85	22,85
PNRM SMR	17,78	20,83	22,61	23,17	23,19	23,36	22,94	22,85	22,85
RMAXM	2,4	2,01	1,49	1,85	2,61	3,37	7,66	11,86	18,65
TSRH	1,03	1,91	0,79	0,76	0,59	0,42	0,07	0	0
TSRH URWW	1,25	0,5	0,5	1,38	1,21	1,04	0,69	1,25	1,25
Push	93,23	84,58	79,8	80,82	83,05	85,27	97,27	109,74	134,99
Pull	93,23	77,15	71,91	72,26	73,77	75,27	83,64	92,46	110,38
NoR	48,93	48,74	51,35	54,43	54,16	53,9	53,37	53,26	53,26

D=200, R=125	
D	224,187,184,198,203,188,195,178,189,220,206,209,186,190,219,198,216,204,205,203,204,209,217,204
R	139,104,136,140,115,131,107,134,107,125,148,103,125,149,115,139,137,146,146,120,105,107,116,120

D=200 R=125	Costos Kp/Kr, cp/cr, hs/hr								
Políticas	**1**	**2**	**4**	**6**	**8**	**10**	**20**	**30**	**50**
URWW	1,96	3,05	6,87	9,34	10,91	12,03	14,7	15,73	16,6
URWW Fit	1,96	3,03	6,82	9,28	10,84	11,96	14,62	15,64	16,51
RSiempre	7,01	5,65	11,48	10,4	9,82	9,5	8,88	8,66	8,47
P1RM WWR	37,05	39	40,26	39,73	39,51	39,45	39,44	39,46	39,47
PNRM WWR	23,99	20,05	15,14	11,4	9,22	7,83	4,75	3,6	2,62
PNRM SMR	23,99	20,46	15,49	11,4	9,22	7,83	4,75	3,6	2,62
RMAXM	2,83	3,12	6,22	8	9,15	9,99	12,18	12,92	13,55
TSRH	2,15	0,54	1,02	0,21	0,22	0,28	0,28	0,3	0,57
TSRH URWW	1,37	0,28	0,87	1,2	0,22	0,29	3,97	3,13	3,03
Push	82,29	99,31	121,01	133,02	140,41	145,52	157,45	162	165,87
Pull	70,54	92,97	119,7	134,21	143,11	149,23	163,48	168,91	173,52

NoR	34,51	62,97	94,71	111,59	121,89	128,95	145,31	151,53	156,82

D=200 R=125	Costos Kp/Kr, cp/cr, hs=2hr								
Políticas	**1**	**2**	**4**	**6**	**8**	**10**	**20**	**30**	**50**
URWW	2,03	3,05	3,37	3,68	3,38	2,86	2,85	2,03	2,16
URWW Fit	1,99	3,03	3,36	3,67	3,37	2,85	2,84	2,02	2,16
RSiempre	4,96	5,65	13,92	14,99	12,33	8,94	2,98	0,64	0,36
P1RM WWR	56,85	39	22,46	15,22	10,66	7,53	2,17	0,07	0
PNRM WWR	26,94	20,05	12,5	9,59	6,94	5,13	2,17	0,07	0
PNRM SMR	27,47	20,46	12,78	9,81	7,12	5,28	2,25	0,13	0,04
RMAXM	2,58	3,12	4,37	4,45	4,11	2,1	1,95	1,72	1,76
TSRH	1,03	0,54	1,26	0,47	0,62	0,47	0,16	0,06	0,01
TSRH URWW	0,34	0,28	0,26	0,56	0,46	0,39	0,07	0,08	0,04
Push	75,01	99,31	128,11	146,4	157,92	165,87	190,52	200,6	215,03
Pull	63,41	92,97	127,2	148,37	161,71	170,91	198,68	210,02	225,74
NoR	34,16	62,97	91,54	107,11	116	121,56	137,56	142,55	150,45

D=200 R=125	Costos Kp=2Kr, cp=2cr, hs/hr								
Políticas	**1**	**2**	**4**	**6**	**8**	**10**	**20**	**30**	**50**
URWW	1,24	3,05	7	12,77	17,91	22,94	46,55	68,06	111,03
URWW Fit	1,24	3,03	6,93	12,66	17,75	22,73	46,11	67,39	109,9
RSiempre	16,09	5,65	3,63	8,64	8,69	8,25	9,33	9,81	8,92
PNRM WWR	15,9	20,05	22,95	24,76	25	25,27	25,68	25,63	25,54
PNRM SMR	15,9	20,46	23,46	24,76	25	25,27	25,68	25,63	25,54
RMAXM	1,24	3,12	5,09	7,79	9,84	11,78	19,96	27,98	43,99
TSRH	2,26	0,54	0,88	1,59	2,87	3,04	3	2,96	2,88
TSRH URWW	0,57	0,28	0,94	0,72	0,69	0,67	2,98	4,03	4,21
Push	105,8	99,31	94,94	96,79	99,21	101,67	114,1	126,51	151,32
Pull	99,55	92,97	88,18	89,43	91,23	93,05	102,34	111,62	130,15
P1RM WWR	23,4	39	67,03	95,5	124,44	153,39	298,27	443,04	732,24
NoR	61,1	62,97	66,6	70,77	70,7	70,67	70,6	70,53	70,4

D=200, R=150	
D	215,184,180,215,224,205,191,212,218,209,195,201,205,184,191,191,224,187,188,189,189,220,206,195
R	172,155,125,159,135,155,137,145,148,174,131,171,157,131,172,134,156,152,138,146,150,137,164,172

D=200 R=150	Costos Kp/Kr, cp/cr, hs/hr								
Políticas	**1**	**2**	**4**	**6**	**8**	**10**	**20**	**30**	**50**
URWW	0,58	3,61	9	13,92	17,23	19,58	25,43	27,83	29,95
URWW Fit	0,58	3,02	7,72	12,23	15,25	17,4	22,76	24,94	26,9
RSiempre	7,46	8,95	14,22	14,35	14,47	14,55	18,49	18,35	18,24
P1RM WWR	15,26	18,56	19,46	19,12	18,94	18,81	18,49	18,35	18,24
PNRM WWR	11,4	12,39	10,51	8,42	7,07	6,11	3,72	2,74	1,87
PNRM SMR	12,76	12,84	10,82	8,42	7,07	6,11	3,72	2,74	1,87
RMAXM	0,58	3,61	11,45	15,61	18,4	20,38	25,33	27,35	29,15
TSRH	0,49	2,49	0,15	1,55	3,28	3,53	4,17	3,7	3,85
TSRH URWW	1	0,63	1,09	2,27	3,07	3,65	2,83	3,16	3,91
Push	20,05	32,75	49,87	62,25	70,52	76,4	91,05	97,05	102,37
Pull	94,19	138,11	193,28	230,04	254,52	271,96	315,35	333,14	348,9
NoR	38,19	80,72	133,23	167,46	190,25	206,48	246,86	263,41	278,09

D=200 R=150	Costos Kp/Kr, cp/cr, hs=2hr

Políticas	1	2	4	6	8	10	20	30	50
URWW	3,75	3,54	4,37	5,22	5,52	5,31	4,02	2,91	1,87
URWW Fit	3,04	3,02	3,93	4,86	5,21	5,05	3,86	2,8	1,8
RSiempre	5,98	8,95	11,41	9,74	7,1	5,11	1,31	0,95	0,61
P1RM WWR	26,92	18,56	10,75	6,76	4,59	2,93	0	-0,01	-0,01
PNRM WWR	16,78	12,39	7,9	5,78	4,59	2,93	0	-0,01	-0,01
PNRM SMR	17,33	12,84	8,24	6,06	4,82	3,13	0,12	0,08	0,05
RMAXM	3,05	3,29	5,32	5,22	5,52	4,69	3,4	2,46	1,58
TSRH	0,87	2,49	1,07	0	0,11	0,35	0,23	0,05	0,03
TSRH URWW	0,52	0,63	0,89	1,43	0	-0,07	0,17	0,1	0,06
Push	52,61	48,35	46,28	46,05	46,63	46,96	49,79	52,94	55,89
Pull	122,12	151,03	192,46	219,79	240,06	254,61	297,3	321,06	343,31
NoR	40,3	80,72	129,43	158,09	178,17	191,88	228,01	245,87	261,18

D=200 R=150	Costos Kp=2Kr, cp=2cr, hs/hr								
Políticas	1	2	4	6	8	10	20	30	50
URWW	1,5	3,67	14,91	18,74	26,39	33,54	68,43	102,97	170,57
URWW Fit	1,5	3,09	8,98	15,88	22,4	28,42	57,64	86,5	142,75
RSiempre	10,01	9,02	7,02	6,2	8,91	11,63	9,18	6,11	5,48
P1RM WWR	10,3	18,64	32,7	45,18	57,64	70,08	132,56	195,5	321,41
PNRM WWR	8,34	12,46	16,49	17,74	17,59	17,46	17,12	17,12	17,12
PNRM SMR	9,47	12,91	16,91	17,74	17,59	17,46	17,12	17,12	17,12
RMAXM	1,5	3,36	10,17	14,41	18,07	21,63	37,12	51,37	75,25
TSRH	0,64	2,56	0,15	3,35	4,24	3,38	2,37	1,81	3,18
TSRH URWW	1,16	0,7	0,15	0,64	0,9	1,91	1,05	4,2	4,19
Push	124,66	117,4	113,5	115,5	117,5	119,51	130,2	141,51	164,14
Pull	119,5	112,66	109,14	111,38	113,62	115,87	127,75	140,23	165,2
NoR	78,79	80,84	85,79	90,67	90,43	90,21	89,67	89,66	89,66

D=200, R=175	
D	178,203,181,181,181,212,193,192,213,209,198,196,195,203,215,222,222,199,217,215,211,199,177,188
R	154,188,152,188,196,191,184,191,160,183,154,160,175,185,187,171,171,196,153,157,198,179,175,190

D=200 R=175	Costos Kp/Kr, cp/cr, hs/hr								
Políticas	1	2	4	6	8	10	20	30	50
URWW	2,15	4,72	12,13	19,01	24,23	28,34	40,27	46,7	53,68
URWW Fit	2,15	3,22	8,4	13,65	17,64	20,77	30,23	34,87	40,4
RSiempre	7,08	5,79	5,82	4,58	3,63	2,88	1,01	0,15	0
P1RM WWR	4,16	5,14	5,82	4,58	3,63	2,88	1,01	0,15	0
PNRM WWR	4,16	5,14	5,82	4,58	3,63	2,88	1,01	0,15	0
PNRM SMR	4,16	5,14	5,82	4,58	3,63	2,88	1,01	0,15	0
RMAXM	10,58	6,66	12,69	18,64	23,17	26,72	37,23	42,34	48,87
TSRH	4,02	10,27	1,37	2,15	2,13	0,53	1,01	0,15	0
TSRH URWW	1,06	0	0,97	2,04	2,85	3,49	5,65	6,74	8,56
Push	32,47	55,58	94,38	124,79	147,89	166,03	219,64	245,77	273,97
Pull	111,54	175,83	278,18	356,49	415,97	462,68	600,38	667,42	738,96
NoR	45,19	103,95	195,81	265,49	318,41	359,97	482,35	541,93	605,22

D=200 R=175	Costos Kp/Kr, cp/cr, hs=2hr								
Políticas	1	2	4	6	8	10	20	30	50
URWW	5,31	4,72	3,99	3,46	4,41	5,41	4,14	3,14	2,11
URWW Fit	3,65	3,22	2,72	2,36	3,42	4,52	3,54	2,68	1,8
RSiempre	3,72	5,79	6,19	3,62	2,28	2,71	1,84	1,39	0,94

P1RM WWR	7,48	5,14	2,25	0,27	0	0	0	0	0
PNRM WWR	6,76	5,14	2,25	0,27	0	0	0	0	0
PNRM SMR	7,25	5,58	2,71	0,6	0,29	0,26	0,18	0,13	0,09
RMAXM	6,31	8,84	8,78	7,61	6,84	7,61	6,43	4,87	3,28
TSRH	1,26	10,27	0	0,6	14,06	0,34	19,89	21,54	23,14
TSRH URWW	0,49	0	0	0,3	0,02	0,02	0,01	0,01	0,01
Push	53,54	55,58	59,85	62,97	67,54	71,6	84,15	90,61	97,21
Pull	121,91	175,83	260,38	322,35	375,91	420,34	557,29	627,89	699,98
NoR	46,4	103,95	187,07	244,32	291,76	329,95	443,15	497,63	550,5

D=200 R=175	**Costos Kp=2Kr, cp=2cr, hs/hr**								
Políticas	**1**	**2**	**4**	**6**	**8**	**10**	**20**	**30**	**50**
URWW	1,24	4,72	15,82	26,69	36,46	45,32	89,93	133,83	220,31
URWW Fit	1,24	3,22	11,35	19,26	26,09	32,01	61,88	91,01	147,96
RSiempre	8,39	5,79	5,93	3,2	3,72	4,26	1,72	2,49	2,02
P1RM WWR	1,82	5,14	11,3	13,71	16,12	18,54	31,73	45,09	71,81
PNRM WWR	1,82	5,14	10,01	10,38	10,12	9,9	9,78	9,83	9,92
PNRM SMR	1,82	5,58	10,42	10,38	10,12	9,9	9,78	9,83	9,92
RMAXM	0	8,84	13,75	20,63	27,47	34,31	63,9	91,13	143,87
TSRH	5,14	10,27	2,49	1,82	1,38	1,81	2,17	0,39	0,39
TSRH URWW	0,44	0	1,24	2	1,78	1,84	2,49	2,49	2,49
Push	36,32	55,58	100,17	145,71	191,03	236,22	464,49	693,25	1150,8
Pull	167,6	175,83	205,06	236,22	267,23	298,2	456,18	614,74	931,88
NoR	100,3	103,95	113,32	118,27	117,74	117,27	116,95	116,95	116,95

D=200, R=200	
D	220,197,188,177,192,186,213,200,219,177,216,209,220,215,175,191,198,179,201,212,182,198,213,212
R	185,216,196,211,181,185,202,181,221,219,201,190,208,221,203,198,178,178,198,215,216,223,191,189

D=200 R=200	**Costos Kp/Kr, cp/cr, hs/hr**								
Políticas	**1**	**2**	**4**	**6**	**8**	**10**	**20**	**30**	**50**
URWW	3,45	0,98	2,83	4,57	6,19	7,71	14,09	18,97	25,91
URWW Fit	3,45	0	0	0	0	0	0	0	0
RSiempre	3,45	0	0	0	0	0	0	0	0
P1RM WWR	3,45	0	0	0	0	0	0	0	0
PNRM WWR	3,45	0	0	0	0	0	0	0	0
PNRM SMR	3,45	0	0	0	0	0	0	0	0
RMAXM	15,85	2,52	7,29	11,75	15,93	19,85	36,27	48,81	66,69
TSRH	9,52	5,49	0	0	0	0	0	0	0
TSRH URWW	3,45	0	0	0	0	0	0	0	0
Push	57,31	109,4	218,19	319,78	414,87	504,07	878,2	1163,8	1571
Pull	109,87	189,2	353	505,97	649,15	783,45	1346,8	1776,8	2389,9
NoR	52,16	129,19	284,97	430,45	566,62	694,35	1230,1	1639,1	2222,1

D=200 R=200	**Costos Kp/Kr, cp/cr, hs=2hr**								
Políticas	**1**	**2**	**4**	**6**	**8**	**10**	**20**	**30**	**50**
URWW	1	0,98	0,94	0,91	0,88	0,86	0,74	0,65	0,53
URWW Fit	0	0	0	0	0	0	0	0	0
RSiempre	0	0	0	0	0	0	0	0	0
P1RM WWR	0	0	0	0	0	0	0	0	0
PNRM WWR	0	0	0	0	0	0	0	0	0
PNRM SMR	0	0	0	0	0	0	0	0	0
RMAXM	2,56	2,52	2,43	2,35	2,28	2,21	1,91	1,68	1,36

TSRH	3,11	5,49	8,9	56,27	70,58	83,43	31,89	95,58	57,81
TSRH URWW	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Push	94,49	109,4	137,7	164,12	188,86	212,06	309,37	383,66	489,57
Pull	119,67	189,2	321,14	444,35	561,17	667,85	1121,6	1467,9	1961,8
NoR	53,37	129,19	264,9	386,9	498,62	601,57	1024,2	1337,4	1776,1

D=200 R=200	**Costos Kp=2Kr, cp=2cr, hs/hr**								
Políticas	**1**	**2**	**4**	**6**	**8**	**10**	**20**	**30**	**50**
URWW	0,68	0,98	2,86	4,89	4,89	8,8	18,58	28,36	47,93
URWW Fit	0,68	0	0	0	0	0	0	0	0
RSiempre	0,68	0	0	0	0	0	0	0	0
P1RM WWR	0,68	0	0	0	0	0	0	0	0
PNRM WWR	0,68	0	0	0	0	0	0	0	0
PNRM SMR	0,68	0	0	0	0	0	0	0	0
RMAXM	0,68	2,52	7,55	12,59	12,59	22,66	47,83	73	123,35
TSRH	12,69	5,49	0	0	0	0	0	0	0
TSRH URWW	0,68	0	0	0	0	0	0	0	0
Push	68,88	109,4	192,74	276,08	276,08	442,76	859,45	1276,1	2109,5
Pull	174,57	189,2	222,2	255,19	255,19	321,17	486,14	651,1	981,02
NoR	120,29	129,19	141,53	148,32	148,32	148,32	148,32	148,32	148,32

. Costos Dinámicos

Tabla de Datos	
n	24
D*	200
R*	{25,50,75,100,125,150,175,200}
Kp*	{(1000,2000), (2000,4000), (5000,10000), (10000,20000)}
Kr*	(1000,2000)
Kd*	(1000,2000)
cp*	{(50,100), (100,200), (250,500), (500,1000)}
cr*	(50,100)
cd*	(20,40)
hs*	{(1,20), (10,40), (20,80), (40,100)}
hr*	(1,20)
EA	{1,2,5,10}
VC	{(Kp/Kr, cp/cr, hs/hr)}

Kp=(1000,2000), cp=(50,100), hs=(1,20)	
Kp	1743,1306,1575,1582,1748,1403,1165,1145,1828,1873,1433,1435,1765,1384,1583,1504,1753,1947, 1803,1443,1749,1432,1808,1106
Kr	1900,1989,1972,1297,1565,1261,1237,1854,1666,1525,1460,1735,1975,1322,1132,1246,1081,1833, 1515,1569,1866,1084,1436,1378
Kd	1181,1324,1804,1529,1642,1228,1290,1312,1923,1554,1207,1535,1061,1290,1464,1041,1076,1224, 1599,1676,1436,1816,1841,1003
cp	95,90,65,86,93,95,69,87,65,96,67,82,70,82,90,72,83,79,80,51,90,60,70,50
cr	85,91,57,99,55,91,94,64,63,97,90,59,87,65,89,79,87,78,63,52,64,68,58,66
cd	30,25,21,38,39,29,31,33,39,24,21,26,25,31,20,32,30,22,24,28,38,29,21,30
hs	14,2,5,17,2,13,3,15,11,15,15,12,5,10,12,1,15,11,8,12,19,13,5,8
hr	18,12,1,18,10,18,15,2,12,17,14,9,1,10,17,18,3,5,8,19,14,6,8,7

Kp=(2000,4000), cp=(100,200), hs=(10,40)	
Kp	2619,2259,2447,2617,3788,3971,3341,2139,2096,2896,3393,2396,3436,3341,3918,2639,3411,2367, 2296,3048,2890,3689,2180,2237
Kr	1203,1039,1978,1179,1343,1513,1741,1726,1125,1674,1074,1353,1055,1197,1518,1424,1394,1718, 1990,1871,1699,1304,1556,1762
Kd	1729,1133,1326,1920,1167,1731,1029,1816,1616,1509,1313,1077,1968,1711,1053,1765,1114,1253, 1431,1218,1491,1859,1297,1633
cp	146,199,189,142,133,161,181,119,111,115,155,167,117,178,141,137,109,184,173,121,121,135,181, 163
cr	85,64,56,76,57,61,94,63,56,87,79,89,83,74,66,50,52,51,81,66,92,60,61,54
cd	29,37,21,21,35,33,32,21,21,30,29,39,26,35,35,20,22,32,30,27,22,38,39,36
hs	31,16,11,30,25,19,22,24,28,36,24,25,34,32,36,15,26,18,30,10,14,24,24,32
hr	18,1,16,16,9,14,11,3,17,3,19,11,11,1,3,16,12,2,11,3,11,17,1,2

Kp=(5000,10000), cp=(250,500), hs=(20,80)	
Kp	5263,5616,9690,9828,5884,9652,6863,6844,8682,5114,7320,5170,9542,5072,7465,7192,6965,6400, 5278,5708,6505,8400,5587,7792
Kr	1193,1490,1619,1731,1865,1943,1547,1627,1950,1639,1659,1087,1916,1069,1253,1444,1664,1086, 1648,1141,1046,1797,1573,1335
Kd	1429,1838,1011,1572,1660,1861,1400,1746,1720,1579,1516,1433,1701,1548,1499,1188,1055,1562, 1594,1759,1667,1603,1708,1486
cp	480,416,290,334,307,346,418,379,474,438,420,329,402,351,455,404,437,457,316,386,483,337,261, 336
cr	68,93,79,55,72,91,84,79,85,76,57,86,92,98,71,59,93,84,54,75,64,55,51,99
cd	33,20,32,38,33,20,36,32,33,28,21,36,38,22,21,39,38,32,23,29,30,35,34,39
hs	22,68,67,50,70,42,76,69,68,51,32,77,32,51,24,41,29,25,28,67,53,63,52,73
hr	12,18,8,12,1,18,18,8,16,5,13,2,9,7,2,7,12,7,18,7,10,2,4,7

Kp=(10000,20000), cp=(500,1000), hs=(40,100)	
Kp	18934,16197,13439,15977,14509,18534,12815,13095,18767,19801,18427,10730,12063,19221,18856, 19846,13777,13467,18185,14240,15754,12146,13475,14188
Kr	1125,1573,1477,1673,1190,1915,1666,1501,1363,1738,1524,1908,1888,1886,1128,1138,1632,1899, 1458,1523,1449,1148,1758,1498
Kd	1190,1438,1839,1977,1936,1712,1841,1651,1227,1740,1446,1147,1108,1871,1836,1955,1511,1597, 1381,1127,1927,1602,1878,1613
cp	899,730,567,756,716,671,678,586,627,899,806,812,504,514,650,692,728,908,650,754,937,533,630, 920
cr	58,95,80,89,93,60,82,95,98,51,71,80,57,59,68,78,71,70,55,78,51,73,67,90
cd	28,24,39,20,27,28,28,29,24,35,38,35,36,21,33,39,30,31,39,20,31,36,39,30
hs	98,79,87,79,88,96,55,55,45,65,92,77,55,53,49,60,88,96,67,80,59,62,81,86
hr	3,16,11,15,7,16,5,19,18,18,5,7,3,12,9,19,15,5,17,10,2,1,18,2

D=200, R=25	
D	196,217,192,183,213,178,181,180,193,195,218,180,195,175,186,199,211,190,221,223,196,184,179,211
R	46,41,20,7,39,44,39,22,24,36,14,2,7,28,12,32,37,28,15,24,41,10,3,29

D=200 R=25	**Costos Kp/Kr, cp/cr, hs/hr**			
Políticas	**1**	**2**	**5**	**10**
URWW	1,54	0,46	2,27	1,36
URWW Fit	1,54	0,46	2,27	1,36
RSiempre	17,13	10,5	4,65	2,25
P1RM WWR	144,11	158,92	155,75	139,29
PNRM WWR	19,78	8,5	6,63	5,46
PNRM SMR	19,78	8,5	6,63	5,46
RMAXM	2,21	0,46	2,76	1,21
TSRH	0,03	0,0021	0	0,06

TSRH URWW	0,18	0,0021	0	0,08
Push	24,94	20,18	16,75	21,57
Pull	37,3	36,13	31,61	39,06
NoR	5,93	11,09	13,9	15,41

D=200, R=50	
D	195,181,179,189,209,184,198,197,198,211,203,212,221,191,195,192,214,189,209,212,184,179,222,219
R	33,45,36,49,55,63,41,65,67,58,54,44,46,65,74,29,51,30,35,74,39,55,54,33

D=200 R=50	**Costos Kp/Kr, cp/cr, hs/hr**			
Políticas	**1**	**2**	**5**	**10**
URWW	2,15	1,99	3,91	3,98
URWW Fit	2,15	1,99	3,91	3,96
RSiempre	13,83	4,14	5,01	2,87
P1RM WWR	120,79	133,44	140,34	127,59
PNRM WWR	27,35	15,61	11,11	7,36
PNRM SMR	26,91	19,3	11,11	7,36
RMAXM	2,83	1,99	2,38	3,98
TSRH	0,18	0,64	0,29	0,13
TSRH URWW	0,18	0,72	0,44	0,13
Push	15,62	19,38	17,44	24,97
Pull	51,59	49,58	46,56	57,41
NoR	11,96	22,29	29,49	33,04

D=200, R=75	
D	206,192,190,223,216,214,200,199,189,220,214,179,186,208,203,185,218,213,189,217,187,209,218,202
R	84,85,90,70,61,60,86,68,94,74,56,92,53,77,92,76,84,73,55,96,80,68,76,52

D=200 R=75	**Costos Kp/Kr, cp/cr, hs/hr**			
Políticas	**1**	**2**	**5**	**10**
URWW	3	3,96	6,13	6,42
URWW Fit	3,01	3,96	6,1	6,32
RSiempre	11,41	2,18	2,92	1,21
P1RM WWR	102,6	104,84	120,16	113,7
PNRM WWR	37,58	22,08	12,56	10,72
PNRM SMR	35,63	24,82	13,02	10,72
RMAXM	3,09	4,18	5,8	6,42
TSRH	0,34	0,27	0,22	0,31
TSRH URWW	0,34	0,27	0,22	0,41
Push	25,36	24,84	27,18	33,04
Pull	70,41	79,27	82,03	97,88
NoR	16,96	35,47	49,85	56,17

D=200, R=100	
D	223,200,219,221,198,221,215,202,187,182,188,208,198,208,206,193,182,210,188,193,192,194,220,188
R	112,117,113,109,112,107,78,84,93,114,100,117,86,111,101,109,124,99,84,108,94,93,114,91

D=200 R=100	**Costos Kp/Kr, cp/cr, hs/hr**			
Políticas	**1**	**2**	**5**	**10**
URWW	4,29	5,6	8,24	10,65
URWW Fit	4,52	4,56	8,01	10,11
RSiempre	6,21	4,57	2,3	0,57

P1RM WWR	70,54	75,77	93,12	94,48
PNRM WWR	33,02	28,26	17,26	17,01
PNRM SMR	37,36	33,19	17,41	17,01
RMAXM	2,95	6,64	10,01	9,29
TSRH	1,03	0,38	0,39	0,99
TSRH URWW	1,37	0,38	0,46	2,01
Push	27,38	31	38,27	41,08
Pull	78,87	105,7	124,66	149,51
NoR	22,28	53,91	80,94	94,61

D=200, R=125	
D	224,187,184,198,203,188,195,178,189,220,206,209,186,190,219,198,216,204,205,203,204,209,217,204
R	139,104,136,140,115,131,107,134,107,125,148,103,125,149,115,139,137,146,146,120,105,107,116,120

D=200 R=125	**Costos Kp/Kr, cp/cr, hs/hr**			
Políticas	**1**	**2**	**5**	**10**
URWW	5,89	8,89	12,51	12,81
URWW Fit	7,56	7,58	11,79	11,42
RSiempre	9,61	2,68	2,17	5,6
P1RM WWR	59,17	60,81	75,17	81,99
PNRM WWR	35,73	30,55	18,13	18,27
PNRM SMR	44,39	36,96	18,75	18,54
RMAXM	2,35	9,42	11,59	13,54
TSRH	2,29	3,11	0,93	0,13
TSRH URWW	1,67	1,37	1,17	2,06
Push	19,66	21,58	30,49	33,14
Pull	78,65	114,43	157,61	197,35
NoR	26,41	69,01	114,49	138,34

D=200, R=150	
D	215,184,180,215,224,205,191,212,218,209,195,201,205,184,191,191,224,187,188,189,189,220,206,195
R	172,155,125,159,135,155,137,145,148,174,131,171,157,131,172,134,156,152,138,146,150,137,164,172

D=200 R=150	**Costos Kp/Kr, cp/cr, hs/hr**			
Políticas	**1**	**2**	**5**	**10**
URWW	5,12	10,53	20,7	23,03
URWW Fit	6,37	9,61	16,31	19,77
RSiempre	5,28	3,27	6,25	2,41
P1RM WWR	34,79	34,74	48,04	60,98

PNRM WWR	25,01	24,1	14	21,27
PNRM SMR	35,65	30,32	14,98	21,61
RMAXM	5,12	7,09	10,13	16,08
TSRH	0,7	2,56	1,87	2,9
TSRH URWW	0,7	2,77	0,87	1,91
Push	27,88	31,57	50,44	57,08
Pull	86,6	150,96	223,44	299,4
NoR	29,87	87,6	167,3	218,87

D=200, R=175	
D	178,203,181,181,181,212,193,192,213,209,198,196,195,203,215,222,222,199,217,215,211,199,177,188
R	154,188,152,188,196,191,184,191,160,183,154,160,175,185,187,171,171,196,153,157,198,179,175,190

D=200 R=175	**Costos Kp/Kr, cp/cr, hs/hr**			
Políticas	**1**	**2**	**5**	**10**
URWW	5,4	13,24	29,81	35,68
URWW Fit	9,96	11,38	14,51	23,35
RSiempre	5,95	3,82	4,88	8,01
P1RM WWR	11,57	16,45	22,6	33,72
PNRM WWR	9,14	16,45	13,41	17,93
PNRM SMR	17,29	17,82	13,74	17,93
RMAXM	3,49	8,36	10,92	17,56
TSRH	3,41	6,94	0,27	2,11
TSRH URWW	3,41	1,1	0,27	2,3
Push	19,26	23,78	43,94	63,62
Pull	88,45	177,3	323,82	486,53
NoR	33,55	111,1	254,88	371,37

D=200, R=200	
D	220,197,188,177,192,186,213,200,219,177,216,209,220,215,175,191,198,179,201,212,182,198,213,212
R	185,216,196,211,181,185,202,181,221,219,201,190,208,221,203,198,178,178,198,215,216,223,191,189

D=200 R=200	**Costos Kp/Kr, cp/cr, hs/hr**			
Políticas	**1**	**2**	**5**	**10**
URWW	3,11	2,2	3,19	4,34
URWW Fit	2,81	0,61	-0,2	-0,53
RSiempre	3,41	1,09	0,2	0

P1RM WWR	2,81	0,61	-0,2	-0,53
PNRM WWR	2,81	0,61	-0,2	-0,53
PNRM SMR	2,81	0,61	-0,2	-0,53
RMAXM	14,32	5,11	9,01	12,51
TSRH	26,19	6,15	16,11	0
TSRH URWW	2,81	0,61	-0,2	-0,53
Push	32	53,08	107,44	162,08
Pull	82,72	191,39	458,5	830,55
NoR	34,21	133,53	382,87	685,13

. Problema de Gran Tamaño

Tabla de Datos	
n	240
D*	200
R*	{25,100,175}
Kp	500
Kr	500
Kd	500
cp	5
cr	5
cd	3
hs	1
hr	1
EA	{1, 2, 4, 6, 8, 10, 20, 30, 50}
VC	{(Kp/Kr, cp/cr, hs/hr)}

D=200, R=25	
D	196,217,192,183,213,178,181,180,193,195,218,180,195,175,186,199,211,190,221,223,196,184,179,211
R	46,41,20,7,39,44,39,22,24,36,14,2,7,28,12,32,37,28,15,24,41,10,3,29

D=200 R=25	**Costos Kp/Kr, cp/cr, hs/hr**								
Políticas	**1**	**2**	**4**	**6**	**8**	**10**	**20**	**30**	**50**
URWW	0,23	-0,15	0,05	0,19	0,26	0,3	0,43	0,52	0,62
URWW Fit	0,23	-0,23	0,05	0,19	0,26	0,3	0,43	0,52	0,62
RSiempre	16,15	8,65	7,67	5,86	5,61	5,02	4,08	3,99	3,63

PNRM WWR	176,93	97,96	51,9	35,22	26,63	21,4	10,79	7,25	4,42
PNRM SMR	176,93	98,66	51,99	35,22	26,63	21,4	10,79	7,25	4,42
TSRH	125,8	73,5	41,2	31,54	26,58	23,55	15,59	13,9	12,56
TSRH URWW	0,41	-0,21	-0,14	-0,08	-0,04	-0,02	0,06	0,14	0,22
TSRH PNRM	25,35	14,68	8,91	6,85	5,49	4,78	3,46	2,75	2,14
TSPRD	1,4	0,69	0,65	0,48	0,67	29,45	27,91	28,06	29,22
TSPRD URWW	0,04	-0,41	-0,26	-0,18	-0,12	-0,08	0,06	0,12	0,22
TSPRD PNRM	1,34	0,69	0,69	0,67	0,65	1,58	1,16	1,21	0,93
Push	26,22	20,55	17,79	16,87	16,4	16,11	15,58	15,45	15,38
Pull	95,89	63,32	45,17	38,75	35,45	33,44	29,4	28,09	27,07
NoR	8,07	10,38	12,19	12,9	13,27	13,5	14	14,23	14,44

D=200, R=100	
D	223,200,219,221,198,221,215,202,187,182,188,208,198,208,206,193,182,210,188,193,192,194,220,188
R	112,117,113,109,112,107,78,84,93,114,100,117,86,111,101,109,124,99,84,108,94,93,114,91

D=200 R=100	**Costos Kp/Kr, cp/cr, hs/hr**								
Políticas	**1**	**2**	**4**	**6**	**8**	**10**	**20**	**30**	**50**
URWW	2,16	3,5	6,97	8,69	9,68	10,34	11,91	12,57	13,27
URWW Fit	2,16	3,48	6,94	8,66	9,64	10,3	11,86	12,52	13,22
RSiempre	7,08	7,92	10,53	10,26	10,01	9,87	11,67	11,67	15,9
PNRM WWR	380,2	263,51	165,88	120,49	94,56	77,82	41,32	28,2	17,42
PNRM SMR	380,2	264,18	166,34	120,49	94,56	77,82	41,32	28,2	17,42
TSRH	522,66	381,48	325,61	262,72	226,79	203,62	153,14	135,04	108,97
TSRH URWW	2,07	2,97	5,74	7,14	7,73	8,1	8,8	8,81	8,9
TSRH PNRM	102,35	40,34	33,72	32,35	28,82	26,59	19,96	16,17	11,91
TSPRD	14,13	15,39	17,55	18,98	18,55	19,19	20,45	21,54	21,29
TSPRD URWW	2,1	3,48	6,94	8,65	9,63	10,3	11,85	12,51	13,21
TSPRD PNRM	376,87	263,51	165,88	120,49	94,56	77,82	41,32	28,2	17,42
Push	28,37	33,86	41,53	45,44	47,31	48,7	51,91	53,2	54,47
Pull	108,59	108,21	112,6	114,89	116,2	117,1	119,29	120,26	121,36
NoR	28,36	48,4	68,72	78,16	83,55	87,09	95,02	98,06	100,85

D=200, R=175	
D	178,203,181,181,181,212,193,192,213,209,198,196,195,203,215,222,222,199,217,215,211,199,177,188
R	154,188,152,188,196,191,184,191,160,183,154,160,175,185,187,171,171,196,153,157,198,179,175,190

D=200 R=175	**Costos Kp/Kr, cp/cr, hs/hr**								
Políticas	**1**	**2**	**4**	**6**	**8**	**10**	**20**	**30**	**50**

URWW	2,48	8,98	22,2	33,36	41,83	48,49	68,31	77,99	88,79
URWW Fit	2,48	5,91	14,59	22,41	28,36	33,02	47	53,83	61,66
RSiempre	4,61	7,11	7,95	10,98	14,38	15,59	24,85	24	25,48
PNRM WWR	136,59	129,9	110,71	94,85	82,79	73,33	46,26	33,2	21,25
PNRM SMR	136,86	130,3	111,34	94,85	82,79	73,33	46,26	33,2	21,25
TSRH	850,62	803,33	636,38	659,05	676,26	689,78	708,68	703,47	699,33
TSRH URWW	7,55	9,67	16,59	23,2	28,11	31,96	43,26	48,98	55,7
TSRH PNRM	96,02	18,24	8,95	10,38	11,42	12,62	13,66	13,03	12,75
TSPRD	20,8	34,52	55,3	77,92	87,55	98,45	129,23	150,96	175,27
TSPRD URWW	15,69	20,7	35,94	41,09	44,73	47,59	56,34	60,65	66,03
TSPRD PNRM	20,95	25,28	23,61	29,84	32,04	32,51	46,26	33,2	21,25
Push	24,39	41,46	71,04	94,55	112,42	126,44	167,96	188,19	210,19
Pull	120,51	176,16	266,05	335,32	387,94	429,26	551,14	610,51	674,07
NoR	45,08	103,8	195,57	265,17	318,04	359,56	481,82	541,33	604,56

. Demanda y Retornos Estacionales

Tabla de Datos	
n	24
D*	{50,100,150,200}={A,B,C,D}
R*	{25,75,125,175}={A,B,C,D}
Kp	500
Kr	500
Kd	500
cp	5
cr	5
cd	3
hs	1
hr	1
EA	{1, 2, 4, 6, 8, 10, 20, 30, 50}
VC	{(Kp/Kr, cp/cr, hs/hr)}

Demanda		**Retornos**	
A	51,41,42,67,43,59	A	23,46,16,4,47,17
B	102,124,83,106,75,113,	B	64,61,61,83,81,97
C	130,165,170,130,142,163,	C	146,125,120,128,119,113
D	197,203,179,196,222,219	**D**	150,169,198,180,158,197

ABCD **D = {50, 100, 150, 200}**
ABCD **R = {25, 75, 125, 175}**

	Costos Kp/Kr, cp/cr, hs/hr								
Políticas	**1**	**2**	**4**	**6**	**8**	**10**	**20**	**30**	**50**
URWW	1,84	3,17	9,77	13,88	16,95	19,36	26,06	29,05	31,69
URWW Fit	1,84	2,4	8,03	11,57	14,23	16,36	22,3	24,98	27,32
RSiempre	10,48	4,99	16,57	17,99	19,26	20,39	23,81	25,42	26,81
P1RM WWR	10,67	12,09	18,56	20,97	22,07	23,65	27,14	28,78	30,2
PNRM WWR	5,09	3,16	5,15	4,86	4,53	4,32	4,22	4,32	4,36
PNRM SMR	5,09	3,98	5,29	5,14	4,57	4,32	4,22	4,32	4,36
RMAXM	12,48	5,46	10,99	14,21	15,94	17,61	22,7	24,77	26,7
TSRH	4,65	2,73	1,21	0,01	0	0,33	0,71	1,01	1,23
TSRH URWW	0,54	1,09	0,03	0,57	0,58	0,6	0,71	1,01	1,23
Push	109,68	144,18	197,5	229,95	252,59	269,53	314,38	333,85	351,19
Pull	89,33	139,88	199,24	238,82	266,25	286,67	340,47	363,75	384,52
NoR	39,64	82,1	141,98	178,3	203,4	222,02	270,94	292,07	310,93

ABCD	D = {50, 100, 150, 200}								
DCBA	R = {175, 125, 75, 25}								
	Costos Kp/Kr, cp/cr, hs/hr								
Políticas	**1**	**2**	**4**	**6**	**8**	**10**	**20**	**30**	**50**
URWW	10,7	29,7	65,32	92,52	114,01	131,36	181,87	206,19	229,69
URWW Fit	10,7	7,64	13,89	20,71	26,74	31,86	47,09	54,52	61,7
RSiempre	26,36	11,78	4,12	1,65	0,76	0,46	0,09	0,07	0,04
P1RM WWR	36,93	35,07	35,45	36,23	37,64	39,08	43,88	46,37	48,77
PNRM WWR	32,4	27,84	24,21	22,11	21,3	20,97	20,63	20,66	20,68
PNRM SMR	34,02	28,99	25,43	22,45	21,33	20,97	20,63	20,66	20,68
RMAXM	4,24	19,49	25,74	13,67	9,9	10,62	9,89	10,55	11,18
TSRH	1,23	0,81	0,48	0,12	0,14	0,15	0,2	0,22	0,24
TSRH URWW	1,8	0,68	0,25	0,13	0,14	0,15	0,2	0,22	0,24
Push	66,13	92,37	142,8	181,51	212,16	236,94	309,1	343,85	377,44
Pull	55,87	90,82	151,9	197,77	233,77	262,75	346,99	387,51	426,67
NoR	14,39	47,97	103,35	144,34	176,31	201,97	276,46	312,27	346,88

ADBC	D = {50, 200, 100, 150}								
BADC	R = {75, 25, 175, 125}								
	Costos Kp/Kr, cp/cr, hs/hr								
Políticas	**1**	**2**	**4**	**6**	**8**	**10**	**20**	**30**	**50**
URWW	6,88	3,53	4,92	7,87	10,29	12,27	17,47	19,67	21,63
URWW Fit	6,88	2,05	1,77	3,73	5,48	6,98	10,94	12,64	14,15
RSiempre	23,7	12,82	6,57	5,29	4,92	4,91	5,12	5,26	0,47
P1RM WWR	18,14	22,72	31,74	37,7	41,85	44,98	53,12	56,56	59,62
PNRM WWR	5,93	4,18	5,52	6,65	7,5	8,2	12,2	11,08	11,86

PNRM SMR	6,24	4,33	5,53	6,95	7,74	8,2	10,2	11,08	11,86
RMAXM	10,53	14,93	30,99	36,57	21,95	23,89	27,48	29,5	31,3
TSRH	7,28	1,16	1,59	2,69	3,31	3,68	4,61	5	5,29
TSRH URWW	2,31	-0,93	0,28	1,08	1,71	2,31	3,81	4,44	4,99
Push	89,38	109,91	142,04	164,99	181,21	193,42	224,55	237,56	249,14
Pull	85,3	113	152,98	180,52	199,83	214,28	251,04	266,39	280,05
NoR	33,42	64,6	105,98	133,33	152,3	166,39	202,17	217,08	230,35

CDAB	**D = {150, 200, 50, 100}**								
DABC	**R = {175, 25, 75, 125}**								
	Costos Kp/Kr, cp/cr, hs/hr								
Políticas	**1**	**2**	**4**	**6**	**8**	**10**	**20**	**30**	**50**
URWW	13,87	10,22	12,19	14,14	15,95	17,52	21,64	23,39	24,94
URWW Fit	13,87	9,55	10,75	12,26	13,78	15,14	18,73	20,26	21,62
RSiempre	19,84	10,72	6,77	5,36	4,96	4,93	5,1	5,22	5,33
P1RM WWR	19,75	18,7	19,66	19,44	19,45	19,51	19,7	19,79	19,87
PNRM WWR	16,37	13,56	12,32	10,8	9,94	9,35	7,93	7,36	6,85
PNRM SMR	16,37	14,72	13,16	10,8	10,08	9,35	7,93	7,36	6,85
RMAXM	13,02	28,75	24,91	30,17	29,7	31,94	37,09	39,48	41,59
TSRH	1,51	2,43	3,43	1,56	1,85	2,05	2,56	2,77	1,9
TSRH URWW	4,12	2,02	2,75	1,56	1,85	2,05	2,56	2,77	2,96
Push	99,24	120,36	155,25	176,72	191,95	203,42	232,44	244,46	255,09
Pull	91,09	124,73	173,51	202,89	223,37	238,62	277,07	292,96	307,02
NoR	36,48	68,92	113,38	139,88	158,19	171,75	205,88	219,97	232,44

DCBA	**D = {200, 150, 100, 50}**								
ABCD	**R = {25, 75, 125, 175}**								
	Costos Kp/Kr, cp/cr, hs/hr								
Políticas	**1**	**2**	**4**	**6**	**8**	**10**	**20**	**30**	**50**
URWW	11,94	6,56	3,43	2,67	2,39	2,37	2,81	3,06	3,26
URWW Fit	11,94	6,5	3,32	2,54	2,25	2,21	2,63	2,87	3,06
RSiempre	20,3	11,6	6,76	5,42	4,81	4,56	4,51	4,58	4,63
P1RM WWR	11,43	14,42	18,7	20,75	21,97	22,86	24,97	25,8	26,48
PNRM WWR	1,02	-0,27	-0,09	-0,1	-0,14	-0,11	-0,06	-0,03	-0,01
PNRM SMR	1,32	0,56	-0,13	0,08	-0,12	-0,01	-0,06	-0,03	-0,01
RMAXM	9,56	10,84	16,37	26,93	27,03	28,24	15,78	16,5	17,1
TSRH	2,86	3,77	0,35	0,42	0,23	0,12	0,55	0,6	0,64
TSRH URWW	3,54	0,98	0,32	0,03	-0,06	-0,12	-0,06	0,81	0,59
Push	83,34	87,81	94,88	99,59	102,7	105,06	111,4	113,95	116,64
Pull	74,81	93,2	112,92	123,73	130,47	135,28	147,3	152,01	155,96
NoR	27,3	45,8	64,85	75,02	81,29	85,72	96,63	100,88	104,45

DCBA	**D = {200, 150, 100, 50}**								
DCBA	**R = {175, 125, 75, 25}**								
	Costos Kp/Kr, cp/cr, hs/hr								
Políticas	**1**	**2**	**4**	**6**	**8**	**10**	**20**	**30**	**50**
URWW	3,99	6,72	14,81	22,05	27,24	31,44	44,68	51,39	57,81
URWW Fit	3,99	6,32	13,91	20,82	25,79	29,82	42,58	49,08	55,28
RSiempre	20,15	16,68	10,93	7,07	4,61	3,13	0,82	0,39	0,07
P1RM WWR	7,7	6,44	6,02	5,05	3,7	2,73	0,82	0,39	0,07
PNRM WWR	7,7	6,44	6,02	5,05	3,7	2,73	0,82	0,39	0,07

PNRM SMR	7,7	6,44	6,13	6,29	5,38	2,73	0,82	0,39	0,07
RMAXM	1,94	5,42	9,48	19,38	23,6	25,66	32,16	36,46	40,61
TSRH	5,73	0,98	1,25	1,28	0,7	0,35	4,88	4,91	5,04
TSRH URWW	4,44	1,89	2,38	0,89	0,48	1,41	1,61	2,12	2,68
Push	109,6	142,27	192,25	228,52	254,04	273,82	332,35	360,84	387,9
Pull	96,7	144,16	211,86	259,3	292,56	318,12	392,74	428,71	462,84
NoR	41,71	83,57	141,85	182,15	210,36	231,97	294,72	324,86	353,43

Anexo B

Control de Inventario: Estado del Arte

Índice

. Objetivo

El objetivo de este documento es abordar los distintos problemas relacionados con el Control de Inventario, y los Modelos y Políticas que se emplean en cada caso. Dentro de los problemas de inventario, en este documento se consideran dos grandes grupos: aquellos que involucran un solo artículo (*single-item*) y los de varios artículos, que pueden o no considerarse de forma conjunta (*multi-item*), según haya o no relación en la demanda de los artículos.

Para ambos grupos se presentan los enfoques de demanda determinística y estocástica. A su vez cada uno de estos casos de demanda puede clasificarse dependiendo de cómo se realice la revisión del nivel del inventario: en cualquier instante de tiempo o cada ciertos períodos de tiempo, conocidos como de revisión continua y revisión periódica, respectivamente.

En cada una de las secciones, se brindará información sobre los modelos y algoritmos encontrados más a menudo en la bibliografía y en aquellos trabajos de investigación pioneros y más recientes, de los que se pudo obtener conocimiento y a los que se ha podido acceder.

Dada la extensión de esta área dentro de la Investigación de Operaciones, y las limitaciones obvias de tiempo para el desarrollo de este trabajo, aquí se presentan los resultados fundamentales de cada caso, brindando las referencias necesarias, para aquellos que quieran profundizar en cada tema.

. Control de Inventario

En esta sección se brindan los conceptos fundamentales relacionados a los problemas y al control de inventario, así como una descripción de sus características, formas de clasificación y componentes de los mismos.

1. Introducción

Se puede definir como inventario o stock, a un conjunto de artículos o productos que deben ser mantenidos en algún lugar, durante algún tiempo, y de los cuales se espera tener algún beneficio en el futuro. En lo que resta del documento las apalabras inventario y stock, al igual que artículo o producto, se usarán de manera indistinta.
El beneficio, puede ser la venta directa a un cliente, así como el consumo interno para la fabricación de otro producto final.

Cuando la cantidad de artículos que debemos mantener en stock es grande, o cuando la incertidumbre en cuanto a las ventas, demandas, precios, etc. es importante, estamos en condiciones de decir que tenemos un **problema de inventario** y que es necesario un control sobre el mismo.

Se conoce como **control de inventarios** al conjunto de técnicas que buscan respuesta a las siguientes interrogantes:

1. ¿Cuándo debería reabastecerse el stock de determinado artículo?
2. ¿Cuánto debería adquirirse en cada reabastecimiento?

En lo que sigue, se entiende como adquisición del artículo, a una actividad que insume un cierto costo, como por ejemplo la compra a un distribuidor o importador del mismo, así como a la producción de una cierta cantidad de artículo por parte de la empresa.

El control de inventario involucra:

- Formular un modelo matemático que describe el comportamiento del sistema.
- Obtener a partir del modelo, una política, en lo posible óptima, o sea que minimice los costos comprendidos en un problema de inventario.
- Utilizar un software para mantener un registro de los niveles de inventario y señalar cuando y cuanto conviene reabastecer.

Se llama **política de stock** o de inventario, al conjunto de reglas que responde a las interrogantes de un problema de control de inventario. Es deseable que una política de stock, posea dos características fundamentales:

1. La primera, es la que se mencionó anteriormente, que sea óptima desde el punto de vista de la minimización de los costos, lo cual no siempre es posible debido la complejidad del modelo matemático o a la falta de información. En relación con el último punto, se emplean distintos métodos de pronósticos, y que son de vital importancia para la confiabilidad de la solución de un problema de inventarios.

2. La primer característica está dada desde el punto cuantitativo de una política. Desde el punto de vista cualitativo es deseable que la política que se obtiene sea sencilla, para que pueda ser aplicada de forma correcta en la práctica.

En la realidad, existen diversos tipos de problemas de inventario, dependiendo en que campo de aplicación nos encontremos (industria, comercio, etc.), y cada uno de ellos tiene características diferentes a los demás, por lo cual, los modelos matemáticos que se utilizaran para representarlos pueden llegar a ser bastante diferentes.

Dada esta diversidad de posibilidades, el modelo matemático para un sistema de inventarios depende directamente de las características que se quieran incluir de la realidad.

Existen diversos modelos que intentan representar distintas realidades (en general, la mayoría de ellos, representan los casos más comunes que se presentan) y a la hora de solucionar un problema en particular, lo más conveniente es ver si el problema que se intenta resolver puede estar representado por alguno de los modelos ya existentes.
Para poder chequear si ya existe un modelo que puede aplicarse a nuestro problema se debe comparar las características del problema a las de los modelos ya especificados.

Es probable que ninguno de los modelos se ajuste perfectamente al problema que queremos resolver, pero casi con seguridad, exista un modelo cuyas características sean lo suficientemente aproximadas como para que la solución que nos plantea, aunque no sea óptima, sea suficientemente buena.

De aquí en más nos referiremos a un problema de inventario, directamente como al modelo que lo representa e incluso en algunas secciones obviaremos esta diferencia para hacer más clara la exposición.

Una de las posibles formas en que los modelos de inventario pueden clasificarse es en *determinísticos o estocásticos,* según si se conoce, o se supone conocida, la demanda con

exactitud en los momentos necesarios o si la misma esta dada por una distribución de probabilidad. Otra vez, la exactitud, siempre está relacionada a que tan eficiente sea el pronóstico de la demanda.
A su vez, pueden ser divididos según si la revisión del inventario se hace en forma continua o periódica. En el primer caso la cantidad o el nivel de stock, se puede determinar y modificar en cualquier momento. En el segundo caso este nivel se pude medir y modificar solo en ciertos momentos de tiempo, como por ejemplo al inicio o final de cada período de tiempo.

2. Motivaciones

Las motivaciones o las necesidades de realizar un control del inventario de una organización, se pueden deber básicamente a dos causas: la incertidumbre presente en el mercado y al volumen de las transacciones comerciales. Cuando estas dos causas están presentes, en menor o mayor grado, generalmente si no se realiza un control o gestión de inventario, apoyado en la investigación de operaciones, puede resultar en grandes perdidas económicas para la organización. A continuación se presentan algunas de las motivaciones más importantes.

- **Limitaciones físicas**: Cuando la demanda es conocida, y no hay incertidumbre en los tiempos de entrega, parece razonable no contar con un inventario de artículos. Sin embargo puede suceder que la capacidad de compra o producción sea limitada, al igual que el espacio de depósito. Además puede resultar atractivo económicamente, comprar por anticipado, debido a los costos fijos y los descuentos por cantidad.

- **Limitaciones de producción**: Generalmente, cuando se produce más de un mismo artículo, con el mismo equipamiento, es conveniente producir más de lo necesario para el momento actual, debido a los tiempos y costos de preparar los equipos para cada tipo de artículo.

- **Stock de seguridad**: Cuando los tiempos de entrega son inciertos, así como la demanda y el suministro de artículos, es necesario mantener una cantidad de artículo en stock, lo que se conoce como stock de seguridad, para satisfacer la demanda del cliente en cualquier momento. Hay que tener en cuenta que el cliente puede ser interno a la organización.

- **Stock interno**: En algunos casos, antes de que un artículo llegue a manos del cliente final, debe pasar por una cadena de centros de distribución, los cuales necesitan mantener un stock de artículos, para poder satisfacer los requerimientos en tiempo y forma de cada de los centros relacionados.

- **Stock de anticipación**: En situaciones en donde se sabe con anticipación del aumento de los costos de compra y de los niveles de la demanda para un cierto momento, resulta razonable contar con un stock de artículos.

Como se puede observar existen distintas causas que obligan a mantener un inventario, y a realizar un control del mismo de forma adecuada. Alguna de las veces porque las exigencias del mercado así lo indican, y otras porque puede ser económicamente atractivo.

3. Características y Componentes

Se presentan a continuación una serie de características que forman parte de la mayoría de los modelos de inventarios. Como se observará en el resto de las secciones de este documento, las mismas influyen en el análisis utilizado para poder determinar la política óptima de administrar los inventarios.
Como ya se mencionó, estas características son clave y deben ser evaluadas a la hora de decidir que modelo de inventarios se adapta mejor a un problema real.

Características de la Demanda

La forma en que se comporta la demanda es uno de los principales factores que afectan el análisis de un modelo y por tanto la solución final.
En el caso general, podemos encontrar entonces dos tipos de demanda:

- **Demanda Determinística**: se conoce, o mejor dicho se asume, con certeza cual será la demanda de un artículo en un cierto periodo. En la realidad esto depende de la eficacia del pronóstico empleado.

- **Demanda Probabilística**: la demanda del artículo responde a una variable aleatoria cuya distribución es conocida. Como es de esperarse, en este caso, la modelización de esta incertidumbre supone una mayor complejidad matemática del modelo.

Cuando se trata de un inventario de varios artículos, pueden ocurrir básicamente dos situaciones:

1. Los artículos no están relacionados entre sí, esto es, la demanda de uno de ellos no afecta la demanda de los otros.

2. Los artículos están relacionados de forma que la demanda de uno de ellos afecta la demanda de uno o más de los otros. Este es el caso típico cuando los ítems en

inventario son las partes, material o subproductos necesarios para fabricar un producto final.

Cuando los artículos no están relacionados, hablamos de **Demanda Independiente**.
Si por otro lado, la demanda de un artículo afecta la demanda de otros, se está frente a un caso de **Demanda Dependiente**.

En muchas situaciones, estas clasificaciones se encuentran combinadas, lo cual trae aparejado una mayor complejidad matemática y de dimensionamiento de los problemas. En este documento se verá un trabajo reciente de investigación sobre el problema de control de inventario de varios artículos y con demanda estocástica. A su vez se describirá el mecanismo conocido como Plan de Requerimiento de Materiales, o MRP de sus siglas en inglés, que esta muy difundido por su eficacia y flexibilidad ante cambios repentinos, que se utiliza cuando se tiene varios artículos con demanda relacionada.

Faltantes

Durante el proceso de vida de un inventario, puede ocurrir que en determinado momento los artículos que se mantienen en el mismo, se agoten o no sean suficientes para satisfacer la demanda, y no haya determinada una orden o producción para ese momento. Existen casos en los cuales esta situación afecta de forma importante. Por ejemplo, en un hospital, existen muchos elementos de los cuales depende la vida de los pacientes, por lo tanto no se debe permitir un faltante de esos elementos.
En cambio, pueden existir otros casos en los cuales se permiten faltantes, ya que los ítems en inventario no son utilizados para tareas criticas, o porque se pueden satisfacer los requerimientos actuales con la producción de períodos futuros, e incluso puede ser económicamente atractivo hacerlo de esta manera.

Cuando se permite que haya faltantes en el inventario, se pueden considerar desde el punto de vista de la modelización, dos situaciones diferentes:

- **Nivel de inventario positivo:** dado que en el momento en que una cierta cantidad de elemento fue requerida, y en el inventario había una cantidad inferior, ese saldo se considera como una venta perdida, o se maneja de forma extraordinaria mediante una producción urgente. Por lo tanto el nivel de inventario es cero o estrictamente positivo.

- **Nivel de inventario negativo:** El segundo caso, la demanda no se pierde, sino que se satisface con la producción de periodos posteriores, lo que se conoce en la literatura, como actividad de ***backlogging*** y solo se incurre en un retraso.

En ambos casos, al existir una cantidad demanda insatisfecha, se incurre en un costo por unidad no satisfecha, denominado **costo por faltante**.

Revisión

Esta característica hace referencia a la forma en que se controlara el nivel del inventario. Existen dos estrategias o formas de revisar el nivel de inventario:

- **Revisión Periódica:** En un modelo de revisión periódica, el tiempo se considera de forma discreta, y por lo tanto la cantidad de inventario se puede determinar solo en ciertos momentos, por ejemplo al final de cada mes, y por lo tanto también se pude ordenar y de esta manera alterar el nivel de inventario, en ciertos momentos de tiempo.

- **Revisión Continua:** Cuando la revisión es continua, la cantidad en inventario se puede determinar y ordenar en cualquier momento de tiempo.

El tipo de revisión, determina directamente la forma de la política a utilizar, como se verá más adelante, a medida que se presenten las distintas políticas de stock.

Como característica general, se puede observar que en un modelo de **Revisión Periódica** la cantidad solicitada suele ser diferente en cada período, ya que depende de cual es el estado del inventario en el momento de la revisión.
En un modelo de **Revisión Continua** los pedidos pueden realizarse en cualquier momento, y generalmente consiste en ordenar la misma cantidad, la única condición necesaria para realizar una orden es que el inventario llegue a un nivel previamente especificado llamado **Punto de Reorden.**

Tiempos de Entrega

Cuando se realiza un pedido de producción o de orden, para reabastecer el inventario, el tiempo transcurrido entre la solicitud y el momento en que llegan los insumos solicitados se llama **Tiempo de entrega** o **Tiempo Líder**.

Los tiempos de entrega, al igual que la demanda, también pueden ser modelados como determinísticos o estocásticos, según si el tiempo de entrega es conocido de forma precisa o si está dado en función de una distribución de probabilidad. Generalmente se considera que el tiempo de entrega es determinístico, ya que el tiempo de entrega suele aumentar la complejidad del modelo, como se verá en el caso de demanda estocástica.

En muchas ocasiones puede suponerse que este tiempo es cero, lo que se conoce como **entrega instantánea**, o sea, que si este intervalo es demasiado pequeño comparado con las demás consideraciones de tiempo del sistema, puede suponerse que la entrega es instantánea, lo cual conduce a un modelo más simple y tratable matemáticamente; en cambio existen circunstancias en que no se puede despreciar este tiempo de entrega porque el mismo afecta el análisis de la política óptima del inventario.

Descuentos por Cantidad

Es muy común que los proveedores ofrezcan distintos precios dependiendo de la cantidad solicitada. En general, se cumple que cuanto mayor sea el pedido, menor sea el precio unitario. Parece evidente que en estas circunstancias hacer pedidos de gran tamaño disminuye el costo total, pero debemos tener en cuenta el costo en que se incurre por el mantenimiento del inventario, el cual aumenta a medida que crece la cantidad en stock.

Factor de Descuento

Cuando una empresa decide gastar dinero en mantener un cierto volumen de stock, no puede usar ese dinero en otra inversión, no puede, por ejemplo, colocarlo en una cuenta bancaria y obtener ganancias de una forma relativamente segura. Al considerar el factor de descuento, en una política de stock, estamos reflejando la situación de desvalorización del capital invertido. Generalmente se denomina con la letra α al factor de descuento, con un valor entre cero y uno. Cuanto más pequeño sea este valor, menor será la importancia del capital invertido a largo plazo, y viceversa cuando el factor es cercano a uno.

Costos

Este quizás sea el componente más significativo de un problema de inventario. Un problema de inventario puede involucrar muchos tipos de costos, que a su vez son transportados al modelo de la manera adecuada, según sea la simplificación que se desea realizar. A continuación se presentan los costos más representativos, y los aspectos más significantes de cada uno.

Costos de Ordenar

El **costo ordenar** o de **producir**, es aquel en que se incurre por adquirir o fabricar un determinado artículo. Los mismos se pueden describir mediante una función c(z), donde z representa la cantidad a ordenar, y c() es una función que en los casos más generales es directamente proporcional al costo c de cada artículo:

- $c(z) = c * z$

También puede suponerse que cada vez que se desea producir se incurre en un **costo fijo** de preparación, generalmente representado por la letra K, con lo cual la función de costos de ordenar queda definida de la siguiente manera:

- $c(z) = K + c * z \qquad \text{si } z > 0$
  $c(z) = 0 \qquad \text{si } z \leq 0$

El caso anterior se puede extender a un contexto de descuento en el costo de producción, cuando la cantidad de artículos aumenta:

- $c(z) = K + c_1 * z \qquad \text{si } 0 < z \leq Q_1$
  $c(z) = K + c_2 * z \qquad \text{si } Q_1 < z \leq Q_2$

En general

$$c(z) = K + c_i * z \qquad \text{si } Q_{i-1} < z \leq Q_i \qquad \forall\ i > 0.$$

donde $Q_0 = 0$, $c_i < c_{i+1}$

Existen otras suposiciones respecto a esta función, pero en general estas formas son las más usadas en la realidad.

Costos de Mantener o Almacenar en Inventario

Es el costo asociado a mantener en inventario, una cierta cantidad de artículos, durante un lapso de tiempo, hasta el momento en que se venden o son utilizados. En general está dado por el costo de almacenamiento, alquiler del espacio físico donde se almacenan los artículos, capital invertido, y otros costos extra como pueden ser seguros, impuestos, artículos defectuosos, etc. La forma en que se calcula el costo de inventario está fuera de los alcances de este documento y generalmente se puede ver como conformado de dos partes principales: *gastos de almacenamiento* y *costos de oportunidad por el dinero comprometido*.

El costo de almacenamiento en inventario se describe como una función de la cantidad en stock, tomando para ello alguna de las siguientes cantidades:

- la cantidad exacta en un momento de tiempo
- la cantidad máxima que se almacena en un período.
- la cantidad promedio en un período.
- los excesos acumulados producidos por una cantidad de recursos mayores a las demandas.

Estas son las expresiones más usadas en la práctica, aunque también pueden usarse otras que reflejen los costos por almacenamientos particulares del caso.

La función de costos de almacenamientos, en general es proporcional a la cantidad z que se considera en stock, o sea $h(z) = h * z$

Costos de Penalización

El **costo de penalización** por faltantes surge cuando la cantidad que se demanda de un artículo es superior al nivel de inventario actual (la suma del inventario disponible y la producción determinada para ese período o momento de tiempo).
Existen dos tipos de consideraciones para el caso en que la demanda no se puede satisfacer en su totalidad:

- No se Permiten Faltantes: Cuando la demanda es mayor que el inventario el modelo puede adoptar dos posturas, la demanda insatisfecha se cubre con lo que llamaremos envío prioritario o no se cumple. En el primer caso el costo de penalización es el costo del envío prioritario y en el segundo caso el costo es la perdida de la ganancia. En este caso el nivel de inventario es cero o estrictamente positivo.

- Se Permiten Faltantes: En este caso la demanda insatisfecha se cubre cuando se cuenta de nuevo con el artículo. Aquí el costo puede interpretarse como la mala disposición del cliente a volver a hacer negocios, el costo del ingreso retrasado y los registros adicionales que implican los faltantes. En este caso el nivel de inventario es cero o estrictamente positivo.

Según sea el sistema a modelar, puede suceder que se permitan o no faltantes. Por ejemplo, es normal que un distribuidor de artículos domésticos cumpla en forma tardía con los pedidos sin perder la actividad normal del negocio, sin embargo en un hospital es inconcebible la falta de gasas en medio de una operación quirúrgica.

Costos de Recuperación

Es el valor que tiene un artículo sobrante al termino del horizonte de planeación del modelo de inventario. Si el modelo de inventario contempla un horizonte de planeación infinito (periodos infinitos) no existen los sobrantes: lo que queda en inventario al final de un periodo, es la cantidad inicial de inventario en el próximo período a considerar. Si consideramos una cantidad de periodos finitos n, el costo de recuperación puede verse como el costo que tiene la devolución de los artículos sobrantes. Si el costo de almacenamiento es una función del exceso en stock, el costo de deshecho estaría incluido en este costo. Aunque el horizonte de planeación sea finito, no siempre existe el costo de recuperación.

. Modelos de Inventario de Un Artículo

En esta sección se presentarán los modelos de inventarios referidos a los problemas de un solo artículo. El contenido del mismo, está formado por aquellos modelos más frecuentemente encontrados en la literatura, así como por casos representativos y más recientes dentro de este campo de investigación.

La clasificación de los distintos modelos se efectúa primero teniendo en cuenta el tipo de la demanda: determinística o estocástica, especificando en cada caso situaciones especiales, como por ejemplo dentro de la demanda estocástica el caso de demanda markoviana.
A su vez dentro del tipo de demanda, se hará una clasificación según la forma en que se realiza la revisión del inventario: de forma continua en el tiempo o periódica.

1. Demanda Determinística

En esta sección se describen los modelos de inventarios en los que se asume que los valores de la demanda son conocidos con exactitud por anticipado. Generalmente estos valores se obtienen mediante algún método de pronóstico aplicado a los datos históricos de la demanda.

Revisión Continua

Examinaremos a continuación la situación en que el nivel de inventario se puede determinar y/o alterar en cualquier momento de tiempo. Para este tipo de revisión, tiene sentido considerar la demanda como una tasa constante o estacionaria (conocida), que también se conoce con el nombre demanda uniforme.

El objetivo será entonces, es minimizar es el total de los costos promedios por unidad de tiempo.

La política que se describirá al principio de esta sección, es la primera política que se obtuvo como resultado de un análisis matemático de los problemas de control de inventarios, y fue propuesta en el año 1913 por Harris [4]. La política se conoce como tamaño del lote económico, o *EOQ*, de sus siglas en inglés. Esta política es la base del control de inventarios, y fue extendida para casos más generales, primero por Wilson, en la década de 1930 [4].

El objetivo de esta sección es brindar una introducción detallada de esta política, mediante un resumen del tema, presente en la bibliografía [1] [2] [3], y al final, presentar las líneas de investigación actuales en control de inventario, utilizando la política de *EOQ*.

Política *EOQ*

La forma de la política EOQ, se obtiene, a partir del análisis de la formulación matemática del modelo de inventario con demanda uniforme. Las asunciones del caso son las siguientes:

- La tasa de demanda es conocida y constante
- No hay restricciones de capacidad sobre la cantidad a producir u ordenar
- No hay descuentos por cantidad
- Los factores de costos son fijos y conocidos
- En el caso de aplicarse para un ambiente multi-item, cada artículo se considera de forma independiente.
- El tiempo de entrega es instantáneo
- No se permiten faltantes

Bajo las asunciones anteriores, no hay incertidumbres de ninguna clase, y resulta apropiado restringir la atención a la clase de políticas de ordenar siempre una misma cantidad $Q > 0$, cada vez que el nivel de inventario es cero. Esto se repite de forma cíclica durante el largo de tiempo del proceso.

De esta manera la cantidad promedio que se debe mantener en inventario durante un ciclo es $Q/2$ por unidad de tiempo, con el costo correspondiente de $h.Q/2$, donde h es el costo de mantener en inventario un artículo por unidad de tiempo. De esta manera, si a es la tasa de demanda, entonces la longitud del ciclo es Q/a, y el costo de mantener en inventario por ciclo es:

$$\frac{hQ^2}{2a}$$

Si, a su vez, la función de costo de ordenar o producir está dada por:

$$\begin{cases} 0 & Q = 0 \\ K + cQ & Q > 0 \end{cases}$$

Con $K > 0$, $c > 0$, el costo total por ciclo es:

$$T(Q) = K + cQ + \frac{hQ^2}{2a}$$

y por unidad de tiempo:

$$TU(Q) = \frac{T(Q)}{Q/a} = \frac{aK}{Q} + ac + \frac{hQ}{2}$$

Es evidente que el valor óptimo de Q^*, se obtiene derivando e igualando a cero la función de costos por unidad de tiempo, o sea $\delta TU/\delta Q = 0$. Se puede ver además que Q^* es un mínimo ya que se verifica que $dTU^2/dQ^2 > 0$, de manera que:

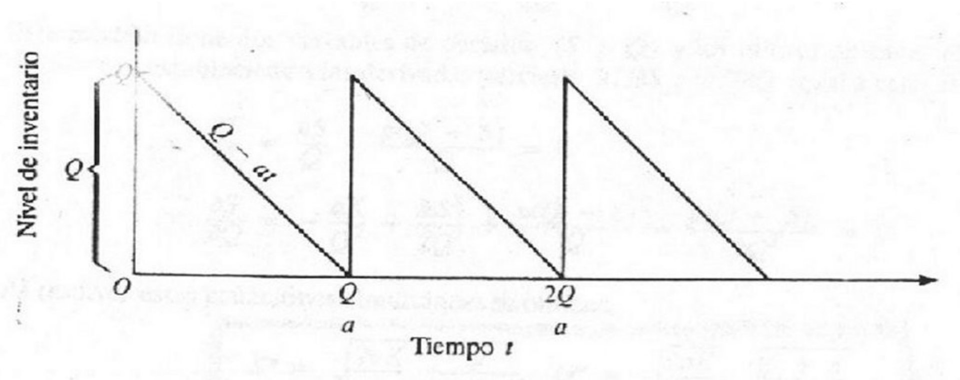
$$Q^* = \sqrt{\frac{2aK}{h}}$$

Para este valor de Q^*, la longitud del ciclo esta dada por:

$$t^* = \frac{Q^*}{a} = \sqrt{\frac{2K}{ah}}$$

A la política de stock que indica ordenar Q* unidades artículos cada t* unidades de tiempo, se le conoce como **tamaño del lote económico**, o ***EOQ*** de sus siglas en inglés. En realidad la política es de la forma "ordenar-hasta", y es un caso particular de la política (s,S) que es la política óptima para una gran variedad de casos en que la demanda es estocástica, que indica ordenar hasta S unidades de artículos, cuando el nivel de inventario es menor que s. En este caso, en donde la demanda es determinística, $s = 0$ y $S = Q^*$, por lo cual el tamaño de la orden es siempre Q^*.

En la figura siguiente, se muestra como evoluciona a través del tiempo el nivel del inventario cuando se aplica la política *EOQ*.

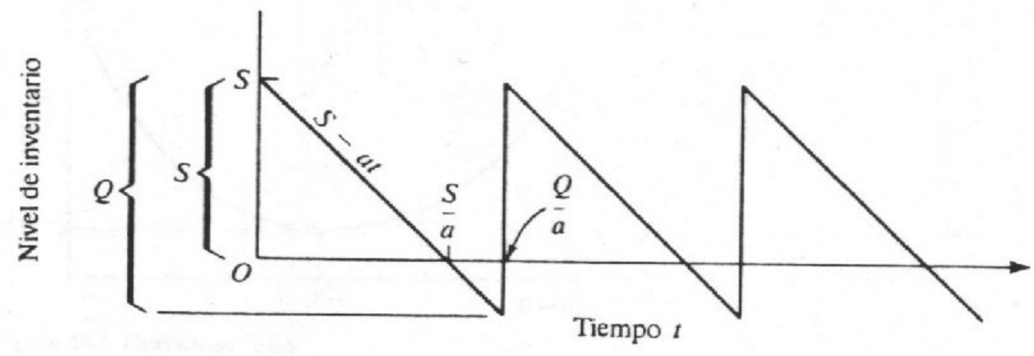


La optimalidad de la estrategia *EOQ* para el caso de demanda constante y las asunciones antes mencionadas, esta basada directamente en la formulación matemática del problema, y una posible demostración se puede encontrar en [1.7], modificando la función de costos de mantener en inventario, y de notación correspondiente.

En las secciones siguientes se eliminarán algunas de las asunciones, y se mostrarán las extensiones de la política *EOQ* para estas nuevas situaciones.

EOQ y Se permiten Faltantes

En este caso se permite que la demanda no sea satisfecha en el momento requerido, y por lo tanto que el nivel de inventario sea negativo. Por cada unidad de demanda hay un costo de penalización por unidad de tiempo, la demanda insatisfecha es cumplida cuando se recepciona la siguiente orden o producción. En la figura que sigue se ilustra esta situación.



Las asunciones son las siguientes:

- La tasa de demanda es conocida y constante
- No hay restricciones de capacidad sobre la cantidad a producir u ordenar
- No hay descuentos por cantidad
- Los factores de costos son fijos y conocidos, incluido p, el costo de penalización por unidad de demanda no satisfecha, por unidad de tiempo.
- En el caso de aplicarse para un ambiente multi-item, cada artículo se considera de forma independiente.
- El tiempo de entrega es instantáneo

Utilizando el contexto del caso anterior, donde no se permiten faltantes, llámese S, a la cantidad de inventario al principio de un ciclo (Esta S, no tiene ninguna relación, a priori con la política (s,S) mencionada anteriormente). Durante un tiempo S/a el nivel de stock es positivo, y por lo tanto el costo de mantener en inventario la cantidad promedio S/2 por unidad de tiempo, durante un ciclo es:

$$\frac{hS}{2}.\frac{S}{a} = \frac{hS^2}{2a}$$

De forma análoga, durante un tiempo (Q – S)/a el nivel de inventario es negativo. De esta manera el costo por faltantes durante un ciclo, por unidad de tiempo es:

$$\frac{p(Q-S)}{2}.\frac{(Q-S)}{a} = \frac{p(Q-S)^2}{2a}$$

Con la misma función de costos de ordenar que en el caso sin faltantes, el costo total por ciclo es:

$$T(S,Q) = K + cQ + \frac{hS^2}{2a} + \frac{p(Q-S)^2}{2a}$$

y el costo total por unidad de tiempo es:

$$TU(S,Q) = \frac{T(S,Q)}{Q/a} = \frac{aK}{Q} + ac + \frac{hS^2}{2Q} + \frac{p(Q-S)^2}{2Q}$$

La ecuación anterior tiene dos variables de decisión, y los valores óptimos S* y Q* se obtienen tomando las derivadas parciales δTU/δS, δTU/δQ igualadas a cero. Al resolver estas ecuaciones de forma simultanea se obtiene:

$$S^* = \sqrt{\frac{2aK}{h}}\sqrt{\frac{p}{p+h}} \qquad Q^* = \sqrt{\frac{2aK}{h}}\sqrt{\frac{p+h}{p}}$$

La longitud óptima del ciclo t* está dada por:

$$t^* = \frac{Q^*}{a} = \sqrt{\frac{2K}{ah}}\sqrt{\frac{p+h}{p}}$$

De esta manera se obtuvo una política óptima para el caso en donde se permiten faltantes, que indica ordenar una cantidad Q* de artículos, cada t* unidades de tiempo.

Analizando los resultados, se pueden obtener las siguientes conclusiones:

- La cantidad máxima de faltantes es $Q^* - S^* = \sqrt{\frac{2aK}{p}}\sqrt{\frac{h}{p+h}}$
- La fracción de tiempo en que no existen faltantes es $\frac{S^*/a}{Q^*/a} = \frac{p}{p+h}$

Descuentos Por Cantidad

Los modelos anteriores consideraban que el valor de cada artículo era constante (c > 0) con lo cuál la solución óptima era independiente de dicho valor. En esta sección se considera que el costo unitario de los artículos producidos u ordenados varia según la cantidad, de tal manera que a mayor cantidad, menor costo. Partiremos de la función de costos concluida en el modelo del lote económico que no permitía faltantes.
En este caso la función de costos por unidad de tiempo tiene la siguiente expresión:

$$T_j = \frac{aK}{Q} + ac_j + \frac{hQ}{2}$$

En donde j:1,2,..,n son las distintas franjas de descuento, por ejemplo para tres franjas, c1 = 12 para cantidades menores a 10.000, c2j = 10 para cantidades entre 10.000 y 25.000, y
c3 = 9,50 para cantidades mayores a 25.000.

La forma de la política óptima se determina de la manera siguiente. Primero se calcula el valor del lote económico, Q, como en el caso sin descuento y sin faltantes. En realidad este valor no depende del costo de producción, y es el mismo para cada una de las ecuaciones Tj. Después se determinan los valores Qf, que son los tamaños de lotes mínimos factibles para cada una de las franjas. Estos valores se encuentran en uno de los límites para cada franja, salvo aquella en donde se encuentra el valor de Q. Observar que el valor Q será el mínimo factible de una de las franjas. Por ejemplo tomando los valores citados en el párrafo anterior sería necesario evaluar **T_1(9.999) y T_3(25.001), si Q fuera el valor mínimo factible para T_2.**

Cuanto ordenar: $Q^* = \min\left\{Q = \sqrt{\frac{2aK}{h}},\ T_j(Q_j^f)\right\} \quad j = 1,2,..n$

Cuando ordenar: $t^* = \frac{Q^*}{a} = \sqrt{\frac{2K}{ah}}$

Como antes, el valor t^* indica la longitud óptima del ciclo.

Tiempo de Entrega Positivo

Los ejemplos anteriores se pueden ampliar para el caso de un tiempo de entrega no instantáneo, de $L > 0$ unidades de tiempo.
Para este es necesario determinar, el *punto de reorden*, o sea la cantidad o el nivel de stock en donde debe realizarse la orden o la producción (recordar que la revisión es continua).

Cuando el nivel de inventario es igual punto de reorden se realiza una orden que llegará en un tiempo $L > 0$ a partir del punto en donde se hizo la orden. Este punto de reorden (*PR*) se calcula como:

$$PR = \left| \ t^* - L \ \right|$$

En donde t^* es lapso de tiempo de reabastecimiento óptimo.

Sea primero el caso en que $t^* > L$. Por ejemplo si la tasa de demanda es de 1 unidad por día, el tiempo de reabastecimiento es de 10 días, y el tiempo de entrega es de 3 días, entonces se deberá realizar la orden a los 7 días, luego de cada reabastecimiento.
En el caso en que $t^* < L$, la diferencia es que es necesario más de un reabastecimiento para que el proceso de estabilice, además de que habrá ordenes superpuestas. Tomando el ejemplo anterior, si $L = 12$, entonces, la primera orden se realiza cuando $t = 8$, y hay dos ordenes a la vez durante toda la vida del proceso.

Hasta aquí, se presentaron los modelos y extensiones de la política *EOQ*, presente en la mayoría de los libros de texto de Investigación Operativa clásicos [13], [15] y [21].

A continuación se presentan dos trabajos de investigación relacionados con la política *EOQ*. El primer y segundo caso son parte de un trabajo del año 1950, que puede considerarse como un trabajo pionero en el área. Los casos presentados hacen referencia a cuando las funciones de costos de ordenar o producir y de mantener en inventario lineales-cóncavas particulares, y cuando existen restricciones sobre el tiempo en que puede realizarse una orden o producción, respectivamente.

El tercero es de diciembre del 2003 y se trata del caso en que se permiten faltantes y hay descuento por cantidades producidas.

Funciones de Costos Lineales-Cóncavas

Este caso en particular de control de inventario, es uno de los abordados en el trabajo de investigación , pinero en el área, referenciado en [2]. Se ha decidido adaptar la notación de [2] a la utilizada en este documento, para mantener una coherencia de nomenclatura y de esta manera facilitar al lector la comprensión de los temas abordados. Partiendo de todas las definiciones anteriores, se modifican las funciones de costos de ordenar o producir, y de mantener en inventario por las siguientes:

$$c(z) = K + z(c_0 - c_1 z) \qquad K > 0, \quad c_0 \geq 0, \quad c_1 \geq 0, \quad z \geq 0$$

$$h(y) = h_0 + 2h_1 y \qquad h_0 \geq 0, \quad h_0 \geq 0, \quad y \geq 0$$

En donde las variables *z*, *y* representan la cantidad a ordenar y el nivel del inventario en un ciclo, respectivamente. Como en los casos anteriores la demanda *D*, es constante y uniforme.

En este caso la política óptima también es de la forma "*ordenar hasta*", pero la cantidad óptima a ordenar no es exactamente la cantidad expresada por la ecuación de *EOQ*, si no que sufre una ligera modificación. Llamemos *S**, a la cantidad óptima a ordenar o producir, y *t** al intervalo de tiempo en el que debe ser colocada la orden, entonces [16]:

$$S^* = \sqrt{\frac{KD}{(h_1 - c_1 D)}}$$

$$t^* = \sqrt{\frac{K}{D(h_1 - c_1 D)}}$$

En realidad, observando un poco en detalle, el resultado es el mismo que para el caso de *EOQ*, si las funciones de costos se toman estrictamente lineales como en el caso "clásico" de *EOQ*.

Limitaciones en el Tiempo de Ordenar o Producir

Al igual que en el párrafo anterior, este caso, es uno de los abordados en el trabajo de investigación referenciado en [2] y también se ha decidido adaptar la notación, para

facilitar al lector la comprensión de los temas abordados. En los casos anteriores, se tomo al tiempo como una línea continua, y de esta manera la duración del ciclo óptimo, t^*, se podía fijar libremente. Puede darse el caso que en una situación real, solo se pueda ordenar o producir cada cierto tiempo, digamos una semana, un mes, tres meses, etc. Notemos por t^0 el largo del intervalo que la organización necesita adoptar, por ejemplo una semana, y por
t^f, al mejor intervalo de tiempo factible. En este caso, para determinar el valor de t^f, se debe seguir el siguiente procedimiento [2]:

Si $t^0 \geq t^*$ Entonces
    $t^f = t^*$
De lo contrario
    Si t^* es múltiplo de t^0
        $t^f = t^0$
    De lo contrario
        Sea n tal que $n < t^*/ t^0 < (n + 1)$
        $t^f = \min_t \{TU(Q), \quad t \in \{nt^0, (n+1)t^0\}\}$
    Fin Si
Fin Si

En donde $TU(Q)$ es la función de costos por unidad de tiempo, teniendo en cuenta que en los casos de demanda uniforme D, se cumple $Q = D.t^*$, en donde Q es el tamaño del lote económico, o sea el valor de la cantidad óptima a ordenar de la política *EOQ*.
En realidad, este resultado es válido, para funciones de costo más generales, que para el caso de *EOQ*. Por más detalles consultar [2].

Se permiten Faltantes y Descuentos por Cantidad

En el artículo referenciado en [16] presenta un modelo de demanda constante, en donde se permiten faltantes y hay descuentos por cantidad producida u ordenada. Es preciso realizar un comentario sobre la forma en que se puede considerar los descuentos por cantidad, según lo mencionado en este artículo. En este caso, al igual que en el caso analizado anteriormente en la sección 2.1.1.2, los descuentos están determinados por el total de las unidades compradas o producidas, que exceden un cierto nivel crítico. A esta forma de descuento se le denomina **descuento por cantidades totales**. Otra forma de aplicar los descuentos, es mediante los **descuentos incrementales**. En este último caso, a una misma cantidad, se le aplican distintos descuentos, según distintos niveles críticos.

Las asunciones realizadas para el análisis del caso abordado en [16] son las siguientes:

- La tasa de demanda es conocida y constante
- No hay restricciones de capacidad sobre la cantidad a producir u ordenar
- Hay descuentos por cantidad. Se consideran franjas de descuentos de la forma [uj-1, uj) para j = 2,3,..., J y para j = 1 (u0, u1), con 0 = u0 < u1 < ...< uJ = ∞, y para cada intervalo uj-1 ≤ q < uj un costo de ordenar pj: p1 > p2 > ... > pJ > 0.

- El costo de ordenar es independiente de la cantidad
- El costo de mantener en inventario es por unidad y no depende del tiempo.

- En el caso de aplicarse para un ambiente multi-item, cada artículo se considera de forma independiente.
- El tiempo de entrega es instantáneo
- Se permiten faltantes. El costo por faltantes es por unidad insatisfecha y no depende del tiempo.

Los componentes del problema y su notación es la siguiente:

- $D > 0$, demanda por unidad de tiempo
- $K > 0$, costo fijo de ordenar
- $J > 0$, número de franjas de descuento
- u_j, punto de corte de cada una de las franjas. Se supone $0 = u_0 < u_1 < ...< u_J = \infty$
- p_j, costo de ordenar unitario, una cantidad q en la franja $u_{j-1} \leq q < u_j$ con $j = 2,3,...,J$. Se asume que $p_1 > p_2 > ... > p_J > 0$
- h_j, costo de mantener en inventario unitario una unidad de tiempo. Se considera que $h_j = r.p_j$, en donde r es la tasa de interés por unidad monetaria y unidad de tiempo.
- w_0, costo de faltante por unidad, independiente del tiempo.
- EOQ_j, tamaño del lote económico para la franja j, o sea $EOQ_j = \sqrt{2KD/h_j}$
- I_j, intervalo $[u_{j-1}, u_j)$ para $j = 2,3,..., J$ en donde $I_1 = (u_0, u_1)$
- R_j, región $\{(q,b): q \in I_j, 0 \leq b \leq q\}$, $j = 2,3,..., J$

  Las variables de decisión son las siguientes:

- $q > 0$, cantidad a ordenar
- b, cantidad máxima de faltantes por ciclo, o nivel de reorden, con $0 \leq b \leq q$

El objetivo es encontrar el valor de la cantidad a ordenar o producir, q, y la cantidad máxima de faltantes b, por ciclo. Para la resolución de este problema, los autores realizan un análisis de las propiedades de la ecuación de costos totales por unidad de tiempo en cada una de las franjas, y de como la ecuación de costos del problema completo, se relaciona con estas ecuaciones por franjas. La función de costos por unidad de tiempo para cada franja j, es la siguiente:

$$C_j(q,b) = K\frac{D}{q} + h_j\frac{(q-b)^2}{2q} + w_0\frac{Db}{q} + p_j D$$

Sujeto a que $(q,b) \in R_j$, en donde $R_j = \{(q,b): q \in I_j, 0 \leq b \leq q\}$. La ecuación de costos del problema completo, que se define como la yuxtaposición de cada una de las funciones $C_j(q,b)$, o sea $C(q,b) = C_j(q,b)$ si $(q,b) \in R_j$. La ecuación $C(q,b)$ esta definida sobre $R = \{(q,b): q > 0, 0 \leq b \leq q\}$.

La relación entre la ecuación del problema completo y el de cada uno de las franjas es la siguiente:

$$\min_{(q,b)\in R} C(q,b) = \min_j \left\{ \min_{(q,b)\in R_j} C_j(q,b) \right\}$$

En el caso de que $C(q,b)$ tenga mínimo en R, si no es así:

$$\inf_{(q,b)\in R} C(q,b) = \inf_{(q,b)\in R_j} C_j(q,b)$$

De esta manera el problema de minimizar $C(q,b)$ en R se reduce al problema de minimizar la función $C_j(q,b)$ en R_j. La minimización de la función de costos de cada franja, los autores la plantean por un método de dos fases:

- **Fase 1**: En la función $C_j(q,b)$ la cantidad q es fijada en un valor ā, con lo que se obtiene una función $C_j(\bar{a},b)$, cuadrática en b. Para esta función el valor óptimo b^* puede calcularse fácilmente.

- **Fase 2**: La función $C_j(q,b)$ alcanza el mínimo (q^*,b^*) si y solo si la función $C_j(q,b^*)$ alcanza su mínimo en q, en donde b* es el valor de b hallado en la fase 1.

El procedimiento de resolución, y el algoritmo desarrollado, están apoyados en tres lemas propuestos por los autores, que no se desarrollan aquí, pero se pueden consultar en [12].

El algoritmo propuesto para determinar los valores óptimos de la política *EOQ* para este caso, es el siguiente:

Objetivo: Obtener los valores de q^* y b^*, que minimizan la función $C(q,b)$

Paso 1:

(a). Calcular $EOQ_J = \sqrt{2KD/h_J}$. Si $EOQ_J > w_0D/h_J$, entonces $C(q,b)$ no alcanza su mínimo en la región factible. El ínfimo de $C(q,b)$ es $(w_0+p_J)D$ y se obtiene si $q \to \infty$ en la línea $b = q - w_0D/h_J$. Fin.

(b). Si $EOQ_J = w_0D/h_J$, entonces $C(q,b)$ el mínimo se alcanza para todos los puntos en la región $\{(q,b): q \geq \max(EOQ_J, u_{J-1}), b = q - w_0D/h_J\}$ con valor $C(q,b) = (w_0+p_J)D$.
Fin.

(c). Si $EOQ_J < w_0D/h_J$, y $EOQ_J \geq u_{J-1}$, entonces el mínimo de $C(q,b)$ se alcanza en $q = EOQ_J$ y en $b = 0$, con valor $C(EOQ_J,0) = \sqrt{2KD/h_J} + p_JD$.
Fin.

(d). De otra manera, ir al paso 2.

Paso 2:

(a). Calcular $EOQ_j = \sqrt{2KD/h_j}$ para cada $j = J - 1, J - 2,.....$ de forma sucesiva, hasta encontrar el primer índice j, para el cual la desigualdad $EOQ_j \geq \min\{ u_{j-1}, w_0D/h_j \}$ se cumpla.

(b). Para cada $i = j + 1, ..., J$ calcular $b_i* = \max(0, u_{j-1} - w_0D/h_j)$ y $C_i(u_{j-1}, b_i*)$.

Paso 3:

(a). Si $u_{j-1} \leq EOQ_j < w_0D/h_j$, entonces comparar los costos $C_j(EOQ_j,0)$, $C_{j+1}(u_j, b_{j+1}*)$, $C_{j+2}(u_{j+1}, b_{j+2}*),..., C_J(u_{J-1}, b_J*)$ y seleccionar la solución óptima $(q*,b*)$ correspondiente.
Fin.

(b). De otra manera, comparar los costos $C_{j+1}(u_j, b_{j+1}*)$, $C_{j+2}(u_{j+1}, b_{j+2}*),..., C_J(u_{J-1}, b_J*)$ y seleccionar la solución óptima $(q*,b*)$ correspondiente.
Fin.

Fin

Al final los autores presentan, además de ejemplos de aplicación del algoritmo, posibles extensiones al modelo propuesto:

- En el modelo original se supone que $h_j = r.p_j$, pero en realidad estos resultados son validos para el caso $h_1 \geq h_2 ... \geq h_J$
- Se pude extender el algoritmo para los casos $u_0 > 0$ y $u_J < \infty$
- También se pude considerar a la variable de decisión correspondiente a la cantidad a ordenar q, como entera, en este caso el problema se convierte en un problema de optimización entera mixta no lineal y se puede extender el algoritmo planteado.
- Al igual que con otros casos, es posible incorporar costos de transporte al modelo, ya que la ecuación de costos es análoga a la presentada en este trabajo.

Además de este resultado, en la revisión del estado del arte específico en está área del control de inventario que realizan los autores como parte de su trabajo, así como en las referencias, se puede obtener información sobre otras líneas de investigación referentes al control de inventario y la política *EOQ*.

Conclusiones

Las sección 2.1.1 pretendió cubrir los casos clásicos de control de inventario con demanda uniforme, así como presentar dos trabajos de investigación sobre este punto.

La política óptima para este tipo de demanda y cuando la revisión es continua, es algún tipo de variación de la política *EOQ*. Esta fue la primer política investigada, y se puede considerar como el modelo más sencillo desde el punto de vista de considera todos los componentes constantes y conocidos. A pesar de esto puede ser útiles para una variedad de casos reales, y en otros casos complejos, como una primera aproximación.

Aunque este caso de control de inventario fue el primero investigado a fondo, actualmente hay grupos de investigación dedicados a estudiar distintas extensiones al caso básico de demanda constante y revisión continua que está dominado por la política *EOQ*, como lo muestra el trabajo presentado de diciembre del 2003 [16].

Revisión Periódica

El inventario se dice de revisión periódica, cuando el nivel del mismo se puede determinar y alterar solo en ciertos momentos de tiempo, separados por un intervalo de tiempo conocido, denominado período. Generalmente, aquellos períodos donde se realza una orden o producción se loes denomina períodos de decisión.

A continuación se presentarán los modelos de inventarios y las políticas de inventario más significativas para los casos de demanda determinística y revisión periódica. En estos suele denominarse a la demanda como dinámica, debido a que los valores de la misma es o puede se diferente en cada período, pero su valor es conocido, o se asume conocida con exactitud.

Primero se brindará un esquema general del problema, presentando la formulación matemática, para lo que se conoce como Problema del Tamaño del Lote Económico o ELSP de sus siglas en inglés. Luego se presentará el algoritmo de Wagner-Whitin, que se puede considerar el algoritmo clásico para determinar la política óptima, cuando la demanda es determinista y dinámica. Así mismo se plantearan otras formulaciones y algoritmos para el mismo problema.

Luego se presentaran brevemente varias extensiones de las que se tiene conocimiento, tanto a nivel de modelos como de algoritmos, para el caso de demanda periódica determinística y dinámica.

ELSP: Problema del Tamaño del **Lote Económico**

Al control de inventario de un solo artículo, con demanda determinística periódica (o dinámica), se le conoce como Problema del Tamaño del Lote Económico, o *ELSP* de sus siglas en inglés.

Para el problema básico de *ELSP*, se asume un horizonte de planeación finita, de $n < \infty$ períodos de igual longitud. La demanda durante un período puede ser satisfecha con la producción de ese período o con la producción de períodos anteriores, lo cual obviamente supone un nivel de inventario positivo para los períodos consecutivos al período de decisión.

A menos que se indique lo contrario, se asume que el consumo, utilización o venta de los artículos, o sea el momento en que se satisface la demanda, es al inicio de cada período. Sin perdida de generalidad [1], se puede suponer que el nivel de inventario inicial y final es cero, por ejemplo adicionando dos períodos más al problema, al inicio y al final.

Los componentes del problema son los siguientes:

- $d_i \geq 0$: demanda durante el período i, $1 \leq i \leq n$
- $c_i(x) \geq 0$: costo de ordenar o producir una cantidad x durante el período i, $1 \leq i \leq n$
- $h_i(y) \geq 0$: costo de mantener en inventario una cantidad y desde el período $i-1$ hasta el período i, $2 \leq i \leq n$

A continuación se realizará la formulación matemática para este problema, teniendo en cuenta las asunciones y componentes presentados.

Formulación Matemática

El modelo matemático para este problema tiene $2n + 1$ variables: $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_{n+1}$ con $1 \leq i \leq n$. Si la demanda, y las cantidades a ordenar y mantener en inventario se toman como valores reales, el problema de satisfacer la demanda con el mínimo costo tiene la siguiente formulación:

$$\begin{cases} \min \sum_{i=1}^{n} \{c_i(x_i) + h_i(y_i)\} \\ s.a \\ (1) \quad y_1 = y_{n+1} = 0 \\ (2) \quad x_i \geq 0 \qquad 1 \leq i \leq n \\ (3) \quad y_i \geq 0 \qquad 1 \leq i \leq n \\ (4) \quad x_i + y_i = d_i + y_{i+1} \quad 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

La primer restricción hace referencia a la asunción de que el inventario inicial y el final deben ser cero. La segunda y tercera restricción aseguran que la cantidad ordenada y el nivel de inventario sean siempre cantidades positivas, e implícitamente que la demanda de cada período se satisfaga totalmente, al no permitir niveles de inventario negativos, mientras que la cuarta restricción se denomina ecuación de balance, ya que hace referencia a que el nivel de inventario en el próximo período sea igual al nivel de inventario del período actual más la cantidad ordenada y la demanda correspondiente.

Se puede demostrar que la política óptima [1], también denominada plan de ordenamiento o de producción, está completamente determinada para cualquier valor de x_i de la demanda que sea mayor o igual que cero.

Si las funciones $c_i()$ y $h_i()$ son de forma arbitraria, entonces el problema del tamaño de lote económico es de la clase NP-difícil, como lo demostraron Florian, Lenstra y Rinnooy [8]. Por lo tanto se han realizado varios supuestos sobre la forma de las funciones de costos, que abordaremos a continuación, junto con las distintas soluciones.

Solución 1: Programación Dinámica

Para la solución por programación dinámica asumiremos que los costos son constantes por período, o sea:

- $c_i(x) = K_i + c_i^0 x \qquad K_i > 0, c_i^0 > 0$
- $h_i(y) = h_i^0 y \qquad h_i^0 > 0$

Si denominamos como $B_i(y_i,x_i)$ a los costos correspondientes al período i, dadas la cantidad inicial de inventario y la cantidad a ordenar, respectivamente, entonces $B_i(y_i,x_i)$ tiene la siguiente expresión:

$$B_i(y_i,x_i) = \begin{cases} K_i + c_i^0 x_i + h_i^0 (y_i + x_i - d_i) & x_i > 0 \\ h_i^0 (y_i - d_i) & x_i = 0 \end{cases}$$

Sea $C_i(y_i,x_i)$ el costo de la política óptima a partir del período i, hasta el período n, dado el nivel de inventario inicial y_i, y se decide ordenar una cantidad x_i. La formulación de programación dinámica, hacia atrás (*backward*), es la siguiente:

$$\begin{cases} C_{n+1}(y,x) = 0 \\ C_i(y_i,x_i) = \min\limits_{\substack{x_i \geq 0 \\ x_i \geq d_i - y_i}} \left[B_i(y_i,x_i) + C_{i+1}(y_i + x_i - d_i) \right] \end{cases}$$

En realidad la forma de ambas funciones de costos puede ser arbitraria, y la formulación de programación dinámica sigue siendo válida [15]. Por eso la mayoría de los algoritmos desarrollados en los últimos cincuenta años están basados de alguna forma en programación dinámica, como el que veremos a continuación, que es quizás el algoritmo clásico para los problemas de demanda periódica determinística y dinámica.

Solución 2: Algoritmo de Wagner-Whitin

Originalmente el algoritmo de Wagner-Whitin [24] estaba desarrollado para el caso en que las funciones de costo tenían la siguiente forma:

- $c_i(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ K_i + c^0 x & x > 0 \end{cases}$

- $h_i(y) = h_i^0 y$

En donde todas las constantes son positivas. Más tarde, otros investigadores extendieron el algoritmo de Wagner-Whitin para otros casos más generales de las funciones de costo, hasta llegar al caso más significativo presentado por Veinott en [1], que demuestra que el algoritmo de Wagner-Whitin es válido para el caso en que las funciones de costos $c_i()$ y $h_i()$ sean funciones cóncavas.

La importancia del algoritmo de Wagner-Whitin radica en que fue el primer algoritmo eficiente para este tipo de problema, con una complejidad de $O(n^2)$, en donde n es la cantidad de períodos de planeación. El algoritmo es una simplificación de la formulación de programación dinámica anterior, y está basado en las siguientes propiedades:

1. Si el nivel de inventario inicial es nulo, $y_1 = 0$, entonces en cualquier período de tiempo se tiene la relación $x_i . y_i = 0$, que se conoce como **propiedad de inventario-cero**, y significa que existe una política óptima en donde solo se ordena, en aquellos períodos en que el nivel de inventario es cero.

2. La cantidad que se ordena o produce en el período i, x_i, es óptima si y solo si es nula, $x_i = 0$, o si satisface exactamente la demanda de los períodos i, i+1, ..., k, consecutivos, con $k \geq i$.

Basándose en estas propiedades, se disminuye considerablemente el número de casos posibles de la programación dinámica. En este caso la formulación de programación dinámica hacia atrás, es la siguiente:

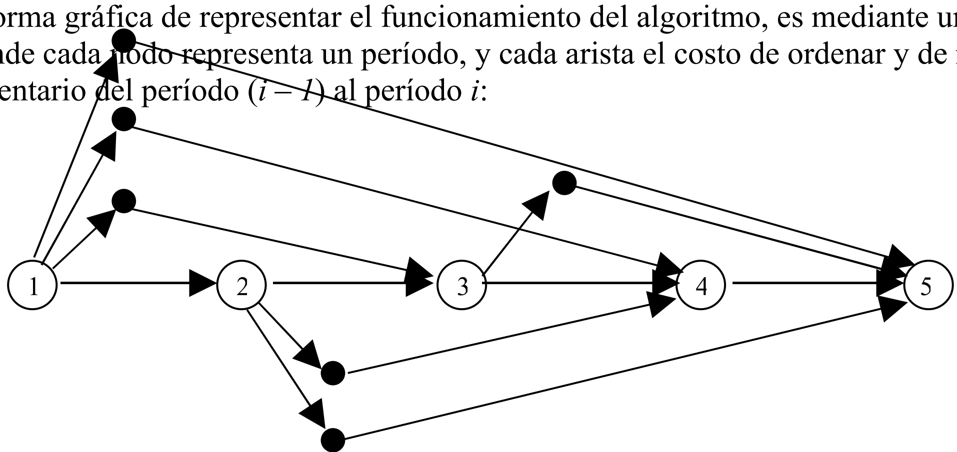
$$\begin{cases} C_{n+1} = 0 \\ C_i = \min\limits_{j=i,i+1,\dots,n} \left[C_{j+1} + K + c_i D_{ij} + H_{ij} \right] \end{cases}$$

En donde

$$D_{ij} = \sum_{k=i}^{j} d_i \qquad\qquad H_{ij} = \sum_{k=i}^{j-1} h_k d_{k+1,j}$$

Observar que en este caso no tienen sentido las variables y_i y x_i, en la formulación, ya que en los períodos donde se ordena la variable $y_i = 0$, y la variable x_i es la demanda acumulada de algún número consecutivo de períodos.

Una forma gráfica de representar el funcionamiento del algoritmo, es mediante un grafo, en donde cada nodo representa un período, y cada arista el costo de ordenar y de mantener en inventario del período ($i-1$) al período i:



Para este caso de n = 5, el número de casos posibles es de 25, o sea, generalizando, hay que evaluar un total de n^2 políticas posibles, por lo tanto el orden del algoritmo es $O(n^2)$. Si bien el orden de algoritmo es bajo, en la actualidad existen algoritmos más eficientes de orden $O(n\log(n))$, que se presentarán brevemente al final de esta sección.

El interés en estudiar el problema del tamaño del lote económico con funciones de costos lineales y cóncavas radica en que en el a mayoría de las aplicaciones reales se trabaja en un contexto de **economía de escala** o de costos marginales decrecientes, en la cual, los costos tienen esta forma.

Solución 3: Programación Entera

Si bien en muchos casos, tiene sentido hablar de cantidades de producción reales o en la práctica estos valores son aceptables, en otras situaciones es necesario exigir que las cantidades a ordenar sean valores enteros. Observar que en el caso del algoritmo de Wagner-Whitin las cantidades a ordenar o producir, están determinadas por los valores de la demanda, que generalmente son cantidades enteras. De todas maneras se presenta el enfoque de programación entera para solucionar el problema del tamaño del lote económico:

$$\min \sum_{i=1}^{n} \left\{ v_i K + c_i x_i + h_i \left(\sum_{k=1}^{i} x_k - d_k \right) \right\}$$

$s.a.$

$$(1) \quad \sum_{i=1}^{n} v_i x_i \geq \sum_{i=1}^{n} d_i$$

$$(2) \quad x_i \in Z^+$$

$$(3) \quad v_i \in \{0,1\}$$

La variable v_i, indica si se ordena (v_i = 1) o no (v_i = 0) en ese período. Observar que si bien no hay cotas sobre los valores superiores de x_i, la estructura del problema obligará a que estos valores sean lo más pequeño posibles, ya que se trata de un problema de minimización. Otra característica es que el problema tiene n variables enteras y n variables binarias, lo que puede transformarse en un problema de dimensionalidad si n, la cantidad de períodos, es grande.

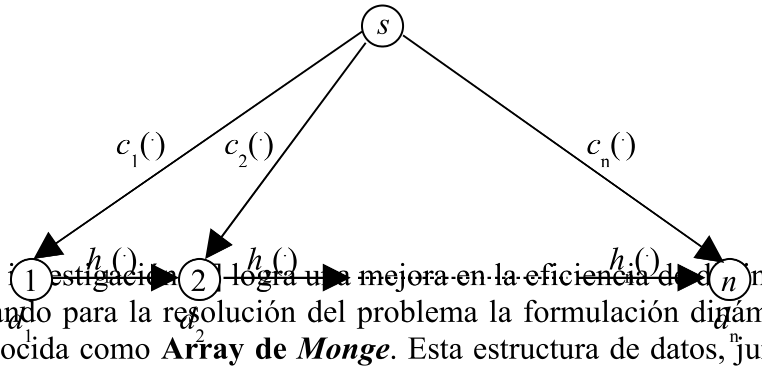
Algoritmos Eficientes para el ELSP

Aunque la complejidad del algoritmo de Wagner-Whitin es baja, se han investigado en las últimas décadas formas de disminuir la complejidad de este algoritmo, o de extender ese resultado a otros contextos, dentro del problema del tamaño del lote económico. A continuación se brindará una tabla comparativa de la complejidad de los distintos algoritmos clásicos para el *ELSP* [1] y la de algoritmos eficientes que utilizan técnicas diferentes para disminuir la complejidad de los algoritmos.

Estructura de Costos	**Algoritmos Clásicos**	**Algoritmos Eficientes (Monge) [1]**	**Algoritmos Eficientes (Envoltura Convexa) [23]**
$c_i(0)=0$ $c_i(x)=c_i^0+c_i^1 x \quad x>0$ $c_i^0 \geq 0$ $h_i(y)=h_i^1 y$ $c_i^1 \leq c_{i-1}^1+h_i^1$	$O(n^2)$ Wagner-Whitin	$O(n)$ Aggarwal-Park	$O(n.\log n)$ Wagelmans-Hoesel-Kolen
$c_i(0)=0$ $c_i(x)=c_i^0+c_i^1 x \quad x>0$ $c_i^0 \geq 0$ $h_i(y)=h_i^1 y$	$O(n^2)$ Zabel, Eppen-Gould-Pashigian	$O(n.\log n)$ Aggarwal-Park	$O(n.\log n)$ Wagelmans-Hoesel-Kolen
$c_i(\cdot)$ y $h_i(\cdot)$ son cóncavas	$O(n^2)$ Veinott	No hay mejora	-

Los algoritmos clásicos están basados en el método de resolución de programación dinámica, generalmente simplificada, mediante alguna propiedad particular del problema, como es el caso de la propiedad de inventario cero para el algoritmo de Wagner-Whitin.

Un enunciado formal de este hecho se encuentra en [1], en donde se modela a los problemas de *ELSP* como una red de flujos, y se citan trabajos previos donde se ha demostrado que un flujo óptimo para esa red (política de stock óptima) es arborescente, lo cual posibilita una formulación de programación dinámica del problema. La modelización del *ELSP* mediante una red de flujo fue propuesta por Zangwill en 1968 [1], y es la siguiente: un grafo dirigido G, que consiste de una fuente s, capaz de generar un flujo $\sum_{i=1}^{n} d_i$, con n nodos, tal que el nodo i requiere de una entrada de flujo de d_i unidades. Además existe un arco entre el nodo fuente y cada uno de los otros n nodos con un costo asociado $c_i(\cdot)$, un arco entre los nodos $(i-1, i)$ con un costo asociado $h_i(\cdot)$.



El trabajo de investigación [illegible] logra una mejora en la eficiencia de distintos algoritmos del *ELSP*, aplicando para la resolución del problema la formulación dinámica y la estructura de datos conocida como **Array de *Monge***. Esta estructura de datos, junto con algoritmos de búsqueda eficientes desarrollados para la misma, permite disminuir la complejidad de los algoritmos de *ELSP*.

En el caso de [23], se logra una disminución en la complejidad del algoritmo de Wagner-Whitin mediante una técnica diferente, inspirada en una observación geométrica del problema. Esta, consiste en encontrar la envoltura convexa de los puntos en el plano $(d_{i,n}, G(i))$, en donde $d_{i,n}$ es la demanda acumulada desde el período i hasta el n, y $G(i)$ es el valor de la política óptima para un horizonte planeación de i hasta n. Mediante esta envoltura se reconocen los denominados períodos eficientes, de los cuales un subconjunto son los períodos de producción que determinan la política óptima.

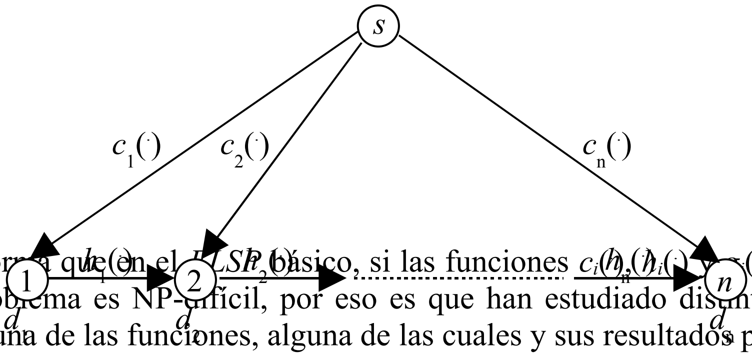
ELSP con Faltantes

En el *ELSP* clásico o básico, se asume que la demanda de un cierto período se satisface con la producción o la orden de ese período o períodos anteriores. Si se permite que la demanda de un período o una fracción de la misma, sea satisfecha con la producción de un período posterior, entonces se está en una situación donde se permiten faltantes, o más precisamente lo que se conoce como ***backlogging***. Esto, obviamente involucra un costo por faltantes. Con respecto a la formulación matemática del problema, se agrega una nueva función de costo, y se elimina la restricción de que el nivel de inventario en cada período sea positiva o cero.

$$
\begin{cases}
\min \sum_{i=1}^{n} \{ c_i(x_i) + h_i(y_i) + g_i(-y_i) \} \\
s.a \\
(1) \quad y_1 = y_{n+1} = 0 \\
(2) \quad x_i \geq 0 \qquad 1 \leq i \leq n \\
(3) \quad x_i + y_i = d_i + y_{i+1} \quad 1 \leq i \leq n
\end{cases}
$$

En donde la función $g_i(\cdot)$ solo tiene sentido en la región positiva $[0,+\infty)$, por eso se toma el valor negativo del nivel de inventario, ya que cuando ha faltantes, este nivel es negativo.

Como en el *ELSP* clásico es posible modelar el problema de *ELSP* con faltantes mediante una red de flujo, con un nuevo arco del nodo i al nodo $i-1$, con un costo asociado $g_i(\cdot)$.



De la misma forma que en el *ELSP* básico, si las funciones $c_i(\cdot)$, $h_i(\cdot)$ y $g_i(\cdot)$ son arbitrarias, entonces el problema es NP-difícil, por eso es que han estudiado distintos casos para la forma de cada una de las funciones, alguna de las cuales y sus resultados presentamos en la siguiente tabal [1].

Estructura de Costos	**Algoritmos Clásicos**	**Algoritmos Eficientes (Monge) [1]**
$c_i(0)=0$ $c_i(x)=c_i^0+c_i^1x \quad x>0$ $c_i^0\geq 0$ $g_i(z)=g_i^1z$ $h_i(y)=h_i^1y$ $c_i^1\leq c_{i+1}^1+g_i^1$ $c_i^1\leq c_{i-1}^1+h_i^1$	$O(n^2)$ Morton $(c_i^1=c^1; g_i^1=g^1;$ $h_i^1=h^1)$	$O(n)$ Aggarwal-Park
$c_i(0)=0$ $c_i(x)=c_i^0+c_i^1x \quad x>0$ $c_i^0\geq 0$ $g_i(z)=g_i^1z$ $h_i(y)=h_i^1y$	$O(n^2)$ Blackburn-Kunreuther-Lundin-Morton	$O(n.\log n)$ Aggarwal-Park
$c_i(0)=0$ $c_i(x)=c_i^0+c_i^1x \quad x>0$ $c_i^0\geq 0$ $c_i(\cdot)$ y $g_i(\cdot)$ son cóncavas	$O(n^2)$ Veinott	No hay mejora
$c_i(\cdot)$, $h_i(\cdot)$ y $g_i(\cdot)$son cóncavas	$O(n^3)$ Zangwill	$O(n^2)$ Aggarwal-Park

ELSP con Restricciones de Capacidad

La restricción de capacidad, significa que la cantidad que se puede producir u ordenar esta limitada de alguna forma. Al problema de tamaño del lote económico con restricción de capacidad se le conoce con la sigla *CELSP*, del inglés *Capacited Economic Lot-Sizing Problem*. Esta cantidad límite puede tener varias formas, a continuación se describe un algoritmo para resolver el caso con capacidad constante e igual para todos los períodos.

Como era de prever, los investigadores han demostrado que este es un problema NP-difícil. Considerando la dificultad del problema, se ha diseñado una forma de clasificar los distintos casos de ELSP con restricción de capacidad, para el caso de costos de producción y de inventario lineales: se usan cuatro atributos: $\alpha/\beta/\gamma/\delta$ donde cada uno de los parámetros expresa respectivamente el costo fijo de producción, costo de inventario por unidad, costo de producción por unidad y el tipo de capacidad. Cada uno de los parámetros $\alpha/\beta/\gamma$ puede tomar los valores G, C, ND, NI o Z, que representan: valor arbitrario todo el tiempo, constante, no decreciente, no incremental y cero. El parámetro δ puede tomar los valores G, C, ND ó NI; en el caso de que no exista la restricción de capacidad, el campo cuatro es omitido. Distintos investigadores han desarrollado algoritmos para los distintos casos:

G / G / G / G	Programación dinámica NP difícil	Chen (1994)
ND / Z / ND / NI	$O(n)$	Bitran, Yanasse
C / Z / C / G	$O(n \log n)$	Bitran, Yanasse
NI / G / NI / ND	$O(n)$	Chung, Lin
G / G / G / C	$O(n^4)$	Florian, Klein (1971)

En [20] Hoesel y Wagelmans presentan un algoritmo para el caso en que los costos de producción y de inventario son cóncavos y lineales respectivamente, es posible resolver el problema de ELSP con restricción de capacidad constante en $O(n^3)$, y por lo tanto se mejora en un grado el algoritmo de Florian y Klein.

El algoritmo esta basado en el siguiente propiedad:

"*existe una política óptima tal que entre cualquier par de períodos con producciones fraccionales hay al menos un período con inventario cero. Esta propiedad es llamada* ***propiedad de producción fraccional***."

Un período de producción fraccional es un período en el que se produce una cantidad menor a la capacidad de producción.

Para cualquier solución factible se define un *subplan (j,k)* con $0 \leq j \leq k < n$ como el conjunto de períodos consecutivos que comienzan con j y terminan con k tal que a lo sumo un período tiene producción fraccional y $I_{j-1} = I_k = 0$. Por lo tanto solo se deben tener en cuenta aquellas soluciones factibles que se pueden dividir en subplanes. Esto sugiere crear un método por le cual podamos determinar las soluciones óptimas para cada uno de los subplanes, y luego a partir de estas hallar la solución óptima para el problema completo.

Basándose en la propiedad de producción fraccional y en el método de los subplanes, los autores desarrollan un algoritmo *greedy*. El algoritmo consta de dos fases: en la primera fase se encuentran las soluciones óptimas para cada uno de los subplanes y en la segunda estas soluciones son usadas para determinar la solución del problema completo. A continuación se describen brevemente cada fase, por más detalle ver [20]:

- **Fase 1:** Encontrar el costo mínimo para todos los subplanes (j,k), $1 \leq j \leq k \leq n$

- **Fase 2:** Encontrar en el grafo dirigido con vértices $\{0,..., n\}$ y arcos $(j-1, k)$, $1 \leq j \leq k \leq n$, el camino más corto desde el vértice 0 al vértice n, donde el largo del arco $(j-1, k)$ es igual al costo mínimo del subplan (j, k).

Excepto por el vértice 0, los demás vértices en el camino más corto corresponden al último período de cada uno de los subplanes, los cuales constituyen un plan de producción óptimo. Si tenemos el costo de cada subplan, entonces la segunda fase se puede realizar en $O(n^2)$, ya que el grafo es acíclico y el número de arcos es $O(n^2)$; ya que esta parte no es la problemática, el análisis se focalizará la primera fase.
Considerando todos los productos fraccionales posibles y usando el algoritmo voraz, una solución de costo mínimo (óptima) para un subplan dado puede ser encontrada en tiempo $O(n^2)$. Como hay $O(n^2)$ subplanes esto implica un algoritmo de tiempo $O(n^4)$. No obstante esto se brindará una mejora para implementar un algoritmo de tiempo $O(n^3)$.

En [20] se describe uno trabajo, más reciente, que investiga un caso de *CELSP* más genérico, con una función de costos de producción lineal a trozos y una función de costos de mantener en inventario arbitraria.
Este es un problema NP-difícil, para el cual se conocía un algoritmo de complejidad pseudopolinomial $O(n^2DC)$, en donde n es la cantidad de períodos, D es la demanda promedio, y C es el costo unitario de producción. Para este problema, los autores presentan un algoritmo pseudopolinomial de complejidad $O(n^2QC)$, en donde Q es el número de trozos necesario para expresar la función de costos, esto significa que en el caso de un costo de producción clásico, de la forma $c(x) = K + c_i x$ la complejidad del algoritmo es de $O(n^2C)$, lo cual es importante, ya que la dependencia en cuanto a la magnitud de los datos del problema es ahora lineal. Según los autores, el algoritmo presentado es extensible al caso en donde se permiten faltantes (*backlogging*).

Tiempos de Entrega

Como se habrá notado, en el caso de demanda periódica o dinámica, en ninguno de los casos vistos, se encuentra como un componente del problema el tiempo de entrega de una orden o una producción. Esto es debido que en este caso se asume un tiempo de entrega conocido, y por lo tanto no altera la política óptima en su estructura, si en los momentos en que debe hacerse una orden o una producción, o sea los períodos de decisión, pero de manera trivial. Para un determinado problema de *ELSP*, si existe un tiempo de entrega de L unidades de tiempo, entonces a la política que indica ordenar en los períodos r, con $1 \leq r \leq n$, en la que no se toma en cuenta el tiempo de entrega, hay que modificarla por la política que indica ordenar en los períodos $r - L$, obviamente, en este caso puede resultar que el período $r - L$, sea negativo, lo cual quiere decir que debe ordenarse antes de comenzar a aplicar la política de stock calculada, o sea antes del período inicial.

Conclusiones

El caso de demanda determinística y revisión periódica ha sido estudiado extensivamente desde la década de 1950. Sin lugar a duda, este caso permite modelar situaciones en que la demanda varía de forma conocida de período en período, lo cual ocurre a menudo en la práctica.

El descubrimiento clásico del control de inventario con demanda determinística dinámica, es el de la propiedad de inventario cero, que permitió el desarrollo de un algoritmo eficiente para la determinación de la política de stock óptima, el algoritmo de Wagner-Whitin, de complejidad $O(n^2)$, que es una simplificación de la formulación de programación dinámica.

Las últimas investigaciones relacionadas al control de inventario de demanda dinámica, radican en la extensión del problema clásico, a situaciones como por ejemplo de restricciones de capacidad de producción, así como a la búsqueda de algoritmos aún más eficientes, de los cuales hasta ahora [1] y [23] son las más recientes, según la información disponible, y ambos describen algoritmos de complejidad $O(n \log n)$, en donde n es la cantidad de períodos.

2. Demanda Estocástica

En los problemas de inventario abordados en esta sección, se considera que la demanda está dada por una distribución de probabilidad conocida, o por alguna medida de la misma, como por ejemplo la media y la dispersión.

Primero se hará un análisis del caso de un solo período denominado comúnmente modelo estático. Este modelo se aplica por ejemplo en aquellos casos donde los artículos se vuelven obsoletos rápidamente, o con una sola temporada de venta.
Este caso es la base para el análisis del modelo dinámico, o sea el que involucra más de una etapa o período de toma de decisiones. A menos que se indique lo contrario, se considerará una distribución de política continua, lo cual implica sustituir en el caso de distribución discreta, las integrales por sumatorias [3].

La política óptima, para la mayoría de los casos con demanda estocástica, es la política (s,S), que indica realizar una orden o producción cuando el nivel de inventario es menor que s, por una cantidad $S - s$, o lo que es lo mismo hasta que el nivel de inventario sea S, con $S > s$. Cualitativamente, está es una política "buena", ya que es muy simple. Como se vera en los punto finales de esta sección, esta propiedad cualitativa se pierde cuando se consideran tiempos de entrega positivos.

Aunque está demostrada que la política óptima es de la forma (s,S), para la mayoría de los casos de demanda estocástica, es difícil obtener los valores óptimos de s y S. Aquí se presentarán las referencias sobre los distintos algoritmos desarrollados para estos casos.

Modelo Estático. Un solo período

Para este caso de demanda estocástica, se considera un solo período de decisión, lo que significa que al comienzo del período, en el tiempo cero, se debe determinar cuanto ordenar o producir, si es que se decide producir una cantidad positiva. Este tipo de modelo se puede aplicar a problemas de inventario en los que los artículos se vuelven obsoletos rápidamente, como es el caso de los periódicos. Además el análisis del caso estático es la base para el estudio del problema dinámico, donde hay una cantidad finita o infinita de períodos de decisión. Se denotará por $\varphi(\xi)$ a la función de densidad de la distribución de la demanda que se asume como una función continua y positiva.

Los costos para este caso son los siguientes:

- $c(z)$: función de costos de ordenar o producir de la forma $c(z) = k(z) + c^0.z$, con
$$k(z) = \begin{cases} K & z > 0 \\ 0 & z \leq 0 \end{cases}$$
- $h(\cdot)$: función de costo de almacenamiento en inventario. Se asume $h(x) = 0$ si $x \leq 0$
- $p(\cdot)$: función de costo de penalización por demanda insatisfecha. Se asume $p(x) = 0$ si $x \leq 0$
- $v(\cdot)$: función de beneficio al final del período por la cantidad disponible en inventario, o sea el valor de recuperación. Se asume $v(x) = 0$ si $x \leq 0$
- r : ganancia unitaria.

Teniendo en cuenta estos componentes para el problema, llamemos $C_y(x)$ a la función de costos si al inicio del proceso se cuenta con x unidades de stock, y se decide ordenar o producir una cantidad $z = y - x$. Entonces, si ξ es el valor de la demanda, la expresión de $C_y(x)$ es la siguiente:

$$(1) \qquad C_y(x) = k(y-x) + c^0(y-x) + h(y-\xi) + p(\xi - y) - v(y-\xi) - r.\min(\xi, y)$$

Si asumimos que $h(\cdot)$ y $p(\cdot)$ son funciones continuas y con derivadas segundas continuas a trozos, entonces el costo total esperado es el siguiente:

$$(2) \qquad EC_y(x) = -c^0 x + k(y-x) + L(y)$$

en donde

$$(3) \qquad L(y) = c^0 y + \int_0^y [h(y-\xi) - v(y-\xi) - r\xi]\varphi(\xi)\partial\xi + \int_y^{+\infty} [p(\xi - y) - ry]\varphi(\xi)\partial\xi$$

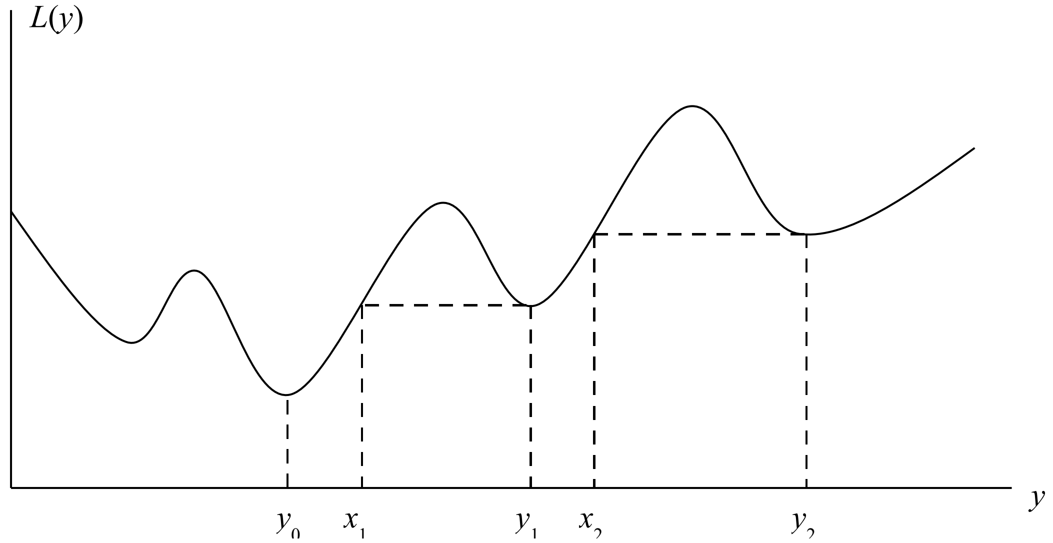
Para un primer análisis de la forma de la política óptima, tomaremos el caso en que el costo de ordenar o producir es sin costo fijo, o sea $k(\cdot) \equiv 0$.

Forma de la Política Optima sin Costo de Preparación

La política óptima está definida por la regla que determina ordenar una cantidad $z = y - x$ que minimiza la función de costo esperado $EC_y(x)$. Si asumimos que la cantidad al comienzo x, es conocida, lo que se necesita obtener es el valor de y que minimiza dicha función. En el caso en que no se toma en cuenta el costo de preparación, el valor de y que minimiza $EC_y(x)$, es el mismo que minimiza $L(y)$. Un análisis de la primer y segunda derivada de $L(y)$, más la restricción de que $Ep'(\cdot) > c - r$, sugieren la siguiente forma de la política óptima, como queda explicado por la siguiente figura:

Política óptima:

- Si $x < y_0$, ordenar hasta y_0.
- Si $y_0 < x < x_1$, no ordenar.
- Si $x_1 < x < y_1$, ordenar hasta y_1.
- Si $y_1 < x < x_2$, no ordenar.
- Si $x_2 < x < y_2$, ordenar hasta y_2.
- Si $x > y_2$, no ordenar.



La restricción de que $Ep'(\cdot) > c - r$, es necesaria para que $L'(0) < 0$.

Obviamente es deseable contar con una política se stock que sea sencilla, y no como la anterior. Para eso se debe determinar bajo que condiciones la función $L(y)$ tiene un único mínimo. En ese caso la política óptima sería de la forma: ordenar hasta una cantidad y^* si el nivel de stock x es menor que y^*, de otra manera no ordenar, en donde $y^* > 0$ es el valor que minimiza $L(y)$.

La función $L(y)$ tiene un único mínimo si:

i. $Ep' > c - r$; ó lo que es lo mismo cero no es mínimo relativo de $L(y)$.
ii. $L(y) \to \infty$ si $y \to \infty$
iii. $L'(y) = 0$ tiene una única raíz.

Si la condición (*i*) no se satisface, entonces lo más adecuado sería mantener un nivel de stock cero. Si el costo de mantenimiento en inventario, o de ordenar es significativamente superior al valor del saldo, la condición (*ii*) se cumplirá.
Sin duda que la condición (*iii*) es la más importante, ya que si esto se cumple, lo que resta es obtener una solución de una ecuación, lo que es numéricamente sencillo. Por lo tanto se deben establecer las condiciones sobre las funciones de costos y la función de densidad de probabilidad de la demanda, para las cuales la condición (*iii*) se satisface, y la política óptima sea de la forma sencilla, de estilo *ordenar hasta*.

Condiciones que aseguran una Política Optima Simple

Existen condiciones sobre las funciones de costo y de benficio, bajo las cuales la política óptima es la más simple posible, lo cual implica que se pueda determinar el valor crítico que indica hasta donde se debe ordenar o producir, si la cantidad inicial de stock es menor que ese valor.

Sea $s(y - \xi) = h(y - \xi) - v(y - \xi)$, entonces si $s(\cdot)$ y $p(\cdot)$ son funciones convexas crecientes, $L(y)$ debe ser convexa y además $L''(y) > 0$ [3], y entonces $L'(y) = 0$ a lo sumo una vez.

Por lo tanto si $s(\cdot)$ y $p(\cdot)$ son funciones convexas crecientes, se asegura que se cumpla la condición (*iii*) y si las condiciones (*i*) y (*ii*) se cumplen la forma de la política óptima es:

Si $x < y^*$, ordenar una cantidad $(y^* - x)$
De lo contrario no ordenar

En donde y^* es el mínimo de la función $L(y)$.

Así como existen condiciones sobre las funciones de costo y de beneficio, también se pueden obtener condiciones para la función de densidad de probabilidad de la demanda. En [3] se hace un análisis de este caso, en el cual se llega a la conclusión de que si la función de densidad de probabilidad está dentro de la clase de funciones *Polya Frequency Functions*, PFF de sus siglas en inglés, entonces la política tiene la misma forma simple que para el caso de funciones de costo y de beneficio convexas crecientes. Por un detalle profundo de este último caso se puede consultar el capítulo 8 de [3].

Funciones de Costos Lineales

En [13] se analiza la forma de la política óptima para el problema de inventario con demanda estocástica, pero con funciones de costos lineales y sin incluir en el modelo la función de beneficio, o sea:

- $c(z)$: función de costos de ordenar o producir de la forma $c(z) = c^0 z$ con $z \geq 0$
- $h(\cdot)$: costo de almacenamiento en inventario de la forma $h(x) = h^0 x$ con $x \geq 0$
- $p(\cdot)$: costo de penalización por demanda insatisfecha, $p(x) = p^0 x$ con $x \geq 0$
- $v(\cdot) = 0$: beneficio al final del período por la cantidad disponible en inventario nulo
- $r = 0$: ganancia unitaria nula

En este caso particular, $C_y(x)$ la función de costos, toma la siguiente forma:

$$C_y(x) = c^0(y - x) + h^0(y - \xi) + p^0(\xi - y)$$

El costo total esperado es:

$$EC_y(x) = -c^0 x + L(y)$$

en donde

$$L(y) = c^0 y + \int_0^y h^0(y - \xi)\varphi(\xi)\partial\xi + \int_y^{+\infty} p^0(\xi - y)\varphi(\xi)\partial\xi$$

Si se cumplen las condiciones (*i*) y (*ii*) y al ser las funciones de costos lineales, se cumple la condición (*iii*) presentada en al sección 2.2.1.1, y por lo tanto la política óptima es de la forma simple. Lo que falta es determinar el valor crítico de y^*, lo cual al ser $L(y)$ una función simple, se puede obtener analíticamente al igualar la derivada a cero, o sea.

El valor crítico y^* es el valor de y para el que se cumple que [13]:

$$\Phi(y^*) = \frac{p^0 - c^0}{p^0 + h^0}$$

en donde la función $\Phi(y)$ es la función de distribución acumulada de la variable aleatoria de la demanda, o sea:

$$\Phi(y) = \int_0^y \varphi(\xi)\partial\xi$$

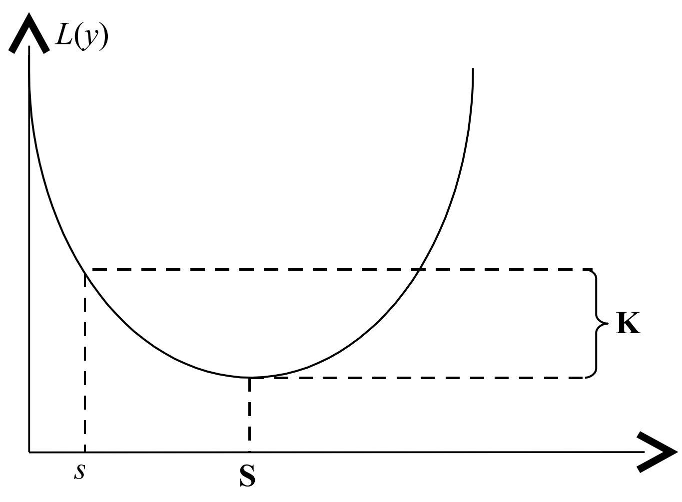
La derivación de la solución se puede consultar en la página 712 de [13], teniendo en cuenta algunas diferencias sencillas de notación.

Forma de la Política Optima con Costo de Preparación. Política (*s*,*S*)

Si se considera la función de costos $c(z)$ con $K > 0$, entonces, al igual que en el caso de sin costo de preparación, se debe determinar bajo que condiciones la función de costos tiene a lo sumo un valor mínimo. Como se sabe, si se cumplen las condiciones (*i*) y (*ii*), y $L'(y)$ tiene una única raíz, entonces $L(y)$ tiene un único mínimo, o se se cumple la condición (*iii*) de 2.2.1.1. Sea y^* la única raíz de $L(y)$, y el número positivo s menor de y^*, tal que:

$$L(s) = L(y^*) + K$$

Si ese número no existe, se puede tomar $s = 0$. Si en vez de y* utilizamos la letra S, entonces esta es la conocida política (s,S) con $s < S$, que indica ordenar hasta una cantidad S, siempre y cuando el nivel de inventario inicial sea menor que s. La demostración de este resultado es trivial [3], pero un mayor detalle se puede obtener en [13], página 714. En la siguiente figura se muestra una explicación gráfica de la forma de la política (s,S).



Las condiciones bajo las cuales $L(y)$ posee las características para asegurar que la política óptima es de la forma (s,S) son las mismas que para el caso sin costo de preparación ($K = 0$) y la forma de la política simple [3].

Para un análisis detallado sobre la naturaleza de la política óptima en el caso de una función de costos de ordenar o pruducir genérica, se puede consultar la sección 2 del capítulo 8 de [3].

Política Optima para una Cantidad a Ordenar Predeterminada

Existen casos en donde la cantidad que se puede producir u ordenar cada vez, está restringida a un cierto valor fijo, o situaciones en las que el costo de producir una cierta cantidad menor a la permitida por la capacidad es economicamente negligible. Para este tipo de casos se considera que se ordena o produce una cantidad b, en el caso que se decida ordenar, por lo tanto el objetivo es si se debe o no realizar una orden.

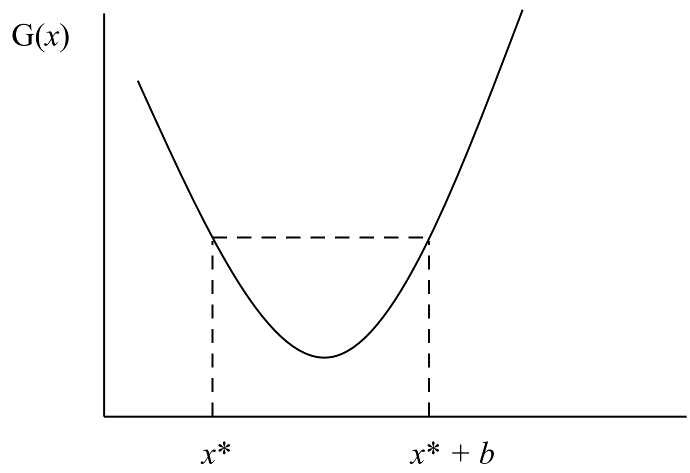
Se considera para el problema una demanda estocástica determinada por $\varphi_D(\xi)$ como la función de densidad de la distribución de la demanda, que al igual que en los casos anteriores se asume como continua y positiva. Los costos son los siguientes:

- $c(\cdot)$: costo de ordenar o producir de la forma $c(z) = c^0.z$
- $h(\cdot)$: costo de almacenamiento en inventario. Se asume $h(x) = 0$ si $x \leq 0$
- $p(\cdot)$: costo de penalización por demanda insatisfecha. Se asume $p(x) = 0$ si $x \leq 0$

Observar que en este caso no tiene sentido incorporar al análisis de la política óptima, el costo de ordenar o producir, ya que la cantidad es conocida de antemano y no se puede modificar.
La función de costos esperado para este caso, si al inicio del proceso se tiene una cantidad x en inventario y no se realiza ninguna orden, es la siguiente:

$$L(x) = \int_0^x h(x-\xi)\varphi(\xi)\partial\xi + \int_x^{+\infty} p(\xi - x)\varphi(\xi)\partial\xi$$

Si en cambio, se ordena una cantidad b, entonces el costo destá determinado por $L(x + b)$.
Si la función $L(x)$ primero decrece y luego crece, cuando x crece, entonces la función tiene un único mínimo, y un único número crítico para el cual se cumple que $L(x^*) = L(x^* + b)$, para valores lo sufcientemente pequeños de b, como se muestra en la siguiente figura.



De esta manera la política óptima toma la siguiente forma simple, con el número crítico x^*:

Si $x < x^*$, ordenar la cantidad b
De lo contrario no ordenar

Lo que resta es determinar las condiciones para las cuales la función $L(x)$ tiene el comportamiento que asegura la existencia de un único valor mínimo. Las condiciones para que $L(x)$ tenga un solo mínimo son:

1. Si $h(\cdot)$ y $p(\cdot)$ son convexas, entonces $L(x)$ es convexa
2. Si $\varphi(\xi)$ es PFF y $h(\cdot)$ y $p(\cdot)$ son funciones crecientes, entonces $L(x)$ primero decrece y luego crece, y por lo tanto tiene un único valor mínimo.

Estas condiciones se pueden extender al caso en que el costo de ordenar es de la forma $c(z) = k(z) + c^0.z$, con

$$k(z) = \begin{cases} K & z > 0 \\ 0 & z \leq 0 \end{cases}$$

Si se incurre en un costo fijo K al realizar la orden, entonces se debe encontrar un número crítico para el cual la ecuación $L(x^*) = L(x^* + b) + K$ se cumpla.

Si no se cumple alguna de las condiciones para que exista un único valor mínimo, entonces $L(x)$ puede tener una cantidad sin límite de valores mínimos, y la política óptima es la misma que para el caso en que la cantidad a ordenar puede ser cualquiera, o sea estar determinada por una cantidad de valores críticos.

Al final del capítulo 8 de [3] se realiza un análisis para el caso más complejo, en que la cantidad a ordenar es una variable aleatoria, o sea la cantidad que se ordena no se conoce con exactitud, si no que esta dada por ejemplo, por una función de densidad de probabilidad.

Política Optima para el caso de Media y Varianza de la Demanda

Para este caso en particular, se considera que la demanda está dada por la media y por la varianza, y que los costos involucrados son estrictmantes convexos.

Los componentes del problema son los siguientes:

- μ : media de la distribución de la demanda
- σ : varianza de la distribución de la demanda
- c : costo por unidad adquirida mediante una orden o producción
- r : ganancia por unidad vendida

Este modelo fue planteado por Herbert Scarf, y está presente en el capítulo 12 de [3], el cual plantea una solución por el procedimiento *Min-Max*. La formulación matemática del problema es la siguiente:

$$P(y)=\min_{\substack{\int \xi \partial\Phi=\mu \\ \int (\xi-\mu)^2 \partial\Phi=\sigma^2}} \left[r\int_0^{+\infty} \min(y,\xi)d\Phi(\xi)-cy \right]$$

y el objetivo es encontrar el valor de y para el cual se cumple que:

$$y^* = \max_{y\geq 0}\{P(y)\}$$

Se puede demostrar que la solución para este problema es la siguiente:

$$y^* = \begin{cases} 0 & \frac{c}{r}\left(1+\frac{\sigma^2}{\mu^2}\right) > 1 \\ \mu+\sigma f(\frac{c}{r}) & \frac{c}{r}\left(1+\frac{\sigma^2}{\mu^2}\right) < 1 \end{cases}$$

en donde

$$f(a)=\frac{1}{2}\left(\frac{1-2a}{\sqrt{a(1-a)}}\right)$$

Por lo tanto la política óptima es ordenar o producir una cantidad y^*, y esta es la cantidad que maximiza el beneficio si se tienen en cuenta todas las distribuciones de probabilidad con la media y desviación dadas.

En [10] se propone una extensión a esta formulación en el caso en que se considera un costo por faltantes unitario p y un costo unitario por mantenimiento en inventario h. La solución para este caso es:

$$y^* = \mu + \frac{\sigma}{2}\left(\sqrt{\frac{p}{h}}-\sqrt{\frac{h}{p}}\right)$$

Además en [10] se hace un análisis más detallado del problema, en el cual se resaltan otros resultados para el caso en que la demanda está dada por la media y la varianza.

Modelo Dinámico. Más de un período

En esta sección se analizará el problema de inventario con demanda estocástica, en donde hay que tomar desiciones en más de un período. La dsición consiste en si se debe o no ordenar o producir al comienzo de cada período, y cual es la cantidad óptima, o sea la que minimiza el costo esperado para el problema de n períodos, con n posiblemente infinito.

Primero se hará una formulación general del problema, para luego plantear las políticas óptimas para distintas restricciones del modelo. Dada la complejidad matemática del problema, sin estas restricciones, muchas veces no es posible obtener una política óptima, al menos no de forma sencilla desde el punto de vista cualitativo.

En particular se propondrán restricciones sobre la forma de las funciones de costos y de la distribución de la demanda, para obtener políticas óptimas sencillas, como la que vimos para el caso estático, de un número crítico, o la conocida (s,S). Al final de la sección se presentaran alguno de los algoritmos conocidos para hallar los valores óptimos de s y S.

Al igual que en el caso estático o de un solo período, se considera una demanda estocástica con distribución conocida, dada por una función de densidad continua y positiva., denotada por $\varphi(\xi)$ para $\xi \geq 0$. Esta asunción se realiza para simplificar la exposición (cap. 9, [3]), y los resultados obtenidos son válidos para el caso en que la distribución de la demanda es totalmente discreta, y las funciones de costo están solo definidas para valores enteros. En ese caso las integrales deben ser sustituidas por las sumatorias correspondientes.

Las funciones de costo para el modelo son las siguientes:

- $c(z)$: función de costos de ordenar o producir de la forma $c(z) = k(z) + c^0.z$, con
$$k(z) = \begin{cases} K & z > 0 \\ 0 & z \leq 0 \end{cases}$$
- $h(\cdot)$: costo de almacenamiento en inventario. Se asume $h(x) = 0$ si $x \leq 0$
- $p(\cdot)$: costo de penalización por demanda insatisfecha. Se asume $p(x) = 0$ si $x \leq 0$
- α : factor de descuento, con $0 < \alpha < 1$

La relación básica utilizada para derivar la política óptima, es mediante una ecuación funcional que expresa la relación recursiva entre los distintos períodos del proceso.
Si denotamos como $C_n(x)$, a la función de costo mínimo para un horizonte de planeación de n períodos, entonces $C_n(x)$ debe cumplir la siguiente relación recursiva [17].

$$C_n(x) = \min_{y \geq x} \left\{ c(y-x) + L(y) + \alpha \int_0^{+\infty} C_{n-1}(y-\xi)\varphi(\xi)\partial\xi \right\}$$

en donde

$$L(y) = \int_0^y h(y-\xi)\varphi(\xi)\partial\xi + \int_y^{+\infty} p(\xi - y)\varphi(\xi)\partial\xi$$

La teoría general implica (ver pág. 137 de [3]) que $C_n(x)$ converge a $C(x)$, en donde $C(x)$ denota la relación recursiva para una cantidad infinita de períodos de desición, o sea que la política óptima del caso de n períodos converge al caso infinito, cuando n tiende a infinito.

Por lo tanto, una solución óptima para el problema truncado de n períodos, puede ser usada para obtener una solución óptima para el problema de infinitas etapas de desición, además de que el problema de n períodos tiene un sentido prático real.

A continuación se describen diferentes situaciones y las políticas óptimas para cada caso.

Forma de la Política Optima Sin Costo de Preparación

En este caso consideraremos el problema de inventario con demanda estocástica, con costos de ordenar o producir lineal de la forma $c(z) = c^0.z$, o sea el costo fijo de preparación de una orden K, es nulo, $K = 0$.

Horizonte de Planeación Finito ($n < \infty$)
Se analizará primero el caso en que la cantidad de períodos de decisión es finita. En este caso la relación recursiva del costo esperado es la siguiente:

$$C_n(x) = \min_{y \geq x} \left\{ c(y-x) + L(y) + \alpha \int_0^{+\infty} C_{n-1}(y-\xi)\varphi(\xi)\partial\xi \right\}$$

en donde

$$L(y) = \int_0^y h(y-\xi)\varphi(\xi)\partial\xi + \int_y^{+\infty} p(\xi - y)\varphi(\xi)\partial\xi$$

y para simplificar la exposición, se denomina $G_k(y)$ a la función de costos esperados de cada etapa k, que tiene la siguiente expresión:

$$G_k(y) = c^0 y + L(y) + \alpha \underset{\xi}{E}\, G_{k-1}(y-\xi)$$

Si exigimos las siguientes condiciones (ver pág 82 de [5])

i. $Ep' > c$
ii. $G_k(y) \rightarrow \infty$ si $y \rightarrow \infty$
iii. $L(y)$ es convexa, o lo que es lo mismo $L'(y) = 0$ tiene una única raíz.

Entonces la función $G_k(y)$ es convexa y además posee un único valor mínimo. Observar, que estas son las condiciones similares para la forma de la política simple del caso estático. Se puede demostrar (ver pág 82 de [5]) entonces, que si se cumplen estas condiciones la forma de la política óptima es la simple para cada un o de los períodos de decisión, o sea:

Para cada período k:
Si $x_k < y_k$*, ordenar una cantidad ($y_k^* - x_k$)
De lo contrario no ordenar

En donde y_k^* es el valor que minimiza la función de costos esperados $G_k(y)$.
La convexidad de la función $L(y)$ se cumple particularmente cuando las funciones de costo son convexas y crecientes, por ejemplo cuando $h(\cdot)$ y $p(\cdot)$ son lineales.

Se puede demostrar además (ver pág. 721 de [13]) que los valores críticos de la política óptima satisfacen la siguiente relación:

$$y_1^* \geq y_2^* \geq y_3^* \geq \ldots\ldots \geq y_n^*$$

Desafortunadamente encontrar los valores críticos para cada uno de los períodos es una tarea compleja. Por ejemplo para el caso de dos períodos y funciones de costo lineales, los valores críticos se dan a continuación.

El valor crítico y_2^* es el valor de y para el que se cumple que (ver pág. 718-720 de [13])

$$\Phi(y_2^*) = \frac{p^0 - c^0}{p^0 + h^0}$$

en donde la función $\Phi(y)$ es la función de distribución acumulada de la variable aleatoria de la demanda, o sea:

$$\Phi(y) = \int_0^y \varphi(\xi)\partial\xi$$

y el valor y_1^* se obtiene a partir de la siguiente expresión:

$$-p + (p+h)\Phi(y_1^*) + (c-p)\Phi(y_1^* - y_2^*)$$
$$+ (p+h)\int_0^{y_1^* - y_2^*} \Phi(y_1^* - \xi)\varphi(\xi)\partial\xi = 0$$

Sin embargo, dada la relación recursiva de la función de costos esperados, se puede plantear una formulación de programación dinámica hacia adelante, para resolver el problema [5].

$$J_{N+1}(x_{N+1}) = 0$$
$$J_k(x_k) = \min_{y_k \geq 0}\left[c^0 y_k + L(x_k + y_k) + \alpha \underset{\xi}{E}\{J_{k+1}(x_k + y_k - \xi)\}\right]$$

en donde $L(\cdot)$ es la función de costos acumulados de penalización por faltantes y de mantenimiento en inventario, para el caso de costos lineales. Observar que se sustituyó el integral correspondiente al valor esperado de la demanda, por la esperanza. De esta manera se independiza la formulación de la forma de la distribución de probabilidad.

<u>Horizonte de Planeación Infinito ($n = \infty$)</u>

El caso de horizonte de planeación infinito, al contrario de lo que puede parecer inicialmente, es más sencillo, y por lo tanto la política óptima es simple, y está determinada por un solo valor crítico.

La formulación matemática para este caso es:

$$C(x) = \min_{y \geq x}\left\{-c^0 x + G(y)\right\}$$

en donde

$$G(y) = cy + L(y) + \alpha \underset{\xi}{E}\, C(y-\xi)$$

$$L(y) = \int_0^y h(y-\xi)\varphi(\xi)\partial\xi + \int_y^{+\infty} p(\xi - y)\varphi(\xi)\partial\xi$$

Se puede demostrar que bajo ciertas condiciones, que se enumeran a continuación, $G(y)$ tiene un único valor mínimo, y por lo tanto la política óptima es de la forma simple, o sea:

Para cada período k:
Si $x_k < y^*$, ordenar una cantidad $(y^* - x_k)$
De lo contrario no ordenar

Se puede demostrar además que el valor crítico y^* corresponde al valor de y que satisface la siguiente ecuación:

$$L'(y^*) + c^0(1-\alpha) = 0$$

con

$$L(y) = \int_0^y h(y-\xi)\varphi(\xi)\partial\xi + \int_y^{+\infty} p(\xi - y)\varphi(\xi)\partial\xi$$

Este valor de y es único si se cumplen las siguientes condiciones:

i. $Ep' > c$
ii. $G_k(y) \to \infty$ si $y \to \infty$
iii. $L(y)$ es convexa, o lo que es lo mismo $L'(y) = 0$ tiene una única raíz.

Estas condiciones se cumplen en particular cuando las funciones de costos son funciones convexas crecientes, por ejemplo en el caso usual, cuando son lineales.

Por más detalle sobre la demostración y extensiones, se puede consultar el capítulo 9 de [3] y las páginas 268-270 de [5].

Variación para el caso de horizonte de planeación finito

Una pequeña variación del modelo de etapa finita, o sea $n < \infty$ también conduce a la política óptima del caso de infinitos períodos.

La variación consiste en agregar un precio de venta o recuperación, unitario r al inventario que queda en inventario en el último período, o sea el período n. Los faltantes durante este período también tienen un costo unitario r. Esta variación fue presentada por A. F. Veinott [13].

Política (k,Q)

Este modelo fue introducido por A. F. Veinott en 1965 [13], y se trata de un caso de control de inventario con demanda estocástica, en donde no hay costo de fijo de preparación ($K = 0$), de horizonte finito, en el que en el último período n, la cantidad que queda en stock se puede recuperar a un precio r, y los faltantes que ocurran en ese período, también tienen un costo r. Se considera también un factor de descuento $0 < \alpha < 1$, y lo más importante es que la cantidad a ordenar o producir debe ser un múltiplo de Q, con $Q > 0$.

La política (k,Q) tiene la siguiente forma [13]: Si al inicio del período k, la cantidad en inventario es menor que k, entonces se debe hacer una orden por una cantidad $t.Q$, con $t > 0$ entero, de tal forma que $t.Q$ sea el menor múltiplo de Q que sea mayor que k.

Veinott demostró que la política (k,Q) es la óptima para el modelo planteado anteriormente. Para determinar la política óptima, lo que hay que hacer es encontrar el valor de k. El valor de k se obtiene como se explica a continuación.

Sea y^* el valor mínimo de la función de costo esperado del problema, como en el caso en que se puede ordenar cualquier cantidad. Dado que y^* es el valor óptimo, y que la función de costos esperados, $G(y)$ es convexa, entonces k debe ser el valor de y para el cual se cumplen las siguientes relaciones:

$$k \leq y^* \leq k + Q$$
$$G(k) = G(k + Q)$$

Para todos los períodos, se usa el mismo valor de k. Esta política y su optimalidad se pueden trasladar al caso de horizonte infinito. Por más detalle consultar las páginas 723-725 de [13].

Forma de la Política Optima con costo de preparación. Política (*s*,*S*)

En esta sección, se agrega al costo de ordenar o porducir, el costo de preparación de la orden, expresado por la constante $K > 0$. Al igual que con el caso de un solo período o modelo estático, cuando se cumplen una series de condiciones sobre las funciones de costo y parámetros del modelo, la política óptima es de la forma (s,S), pero en este caso existe un valor de s y S para cada uno de los períodos, lo cual dificulta la resoloución del problema.

Si consideramos nuevamente la función de costos esperados para cada período, que tiene la siguiente expresión:

$$G_k(y) = c^0 y + L(y) + \alpha \underset{\xi}{E}\, G_{k-1}(y - \xi)$$

al igual que en el caso de un solo período, tenemos que buscar el valor positivo de y, que se le denomina s_k, para el cual se cumple que $G_k(s_k) = G_k(S_k) + K$, en donde S_k es el valor que minimiza la función $G_k(y)$.

Desafortunadamente cuando el valor de K es mayor que cero, no necesariamente se cumple la convexidad de $G_k(y)$. Con este inconveniente, la función $G_k(y)$ puede tener más de un mínimo relativo, lo cual lleva a una política óptima que no sería sencilla dedse el punto cualitativo, y difícil de obtener.

Para solucionar este problema, en 1958-60, el investigador H. Scarf (ver [17]) desarrolla el concepto de la K-convexidad, que es el siguiente [17]:

Definición: Sea $K \geq 0$, y sea $g(x)$ una función diferenciable. Se dice que $g(x)$ es K-convexa si:

$$K + g(a + x) - g(x) - ag'(x) \geq 0\,, \quad \text{para todo valor positivo de } a \text{ y todo valor de } x$$

En el casode que la función $g(x)$ no sea diferenciable, la definición es la siguiente:

$$K + g(a + x) - g(x) - a\left[\frac{g(x) - g(x - b)}{b}\right] \geq 0$$

Mediante esta propiedad H. Scarf demuestra (ver [17] y pág 84-89 de [5]) que la función $G_k\,(y)$ es K-convexa, y por lo tanto tiene un único mínimo global (observar que de todas maneras la función $G_k\,(y)/\partial y$ más de un cero), lo cual demuestra la optimalidad de la política (s,S).

En conclusión la política óptima es la siguiente:

Para cada período k:
Si $x_k < s_k$, ordenar una cantidad $(S_k - x_k)$
De lo contrario no ordenar

En el caso de horizonte de planeación infinito, o sea $n = \infty$, se puede utilizar la misma línea de argumentos que para el caso en el que no hay costo de preparación, o sea $K = 0$. En este caso también se puede demostrar la K-convexidad de la función $G(y)$. Por más detalle consultar el capítulo 6 de [5].

Tiempos de Entrega Positivos

En los modelos vistos anteriormente para el caso de demanda estocástica, se suponía que el tiempo de entrega de una orden o producción era instantáneo. Al levantar este supuesto, crece la complejidad de las formulaciones matemáticas y de las políticas óptimas desde el punto de vista cualitativo.

A continuación se verán tres modelos con tiempos de entrega positivos. El primero es un modelo de revisión continua, basado en una extensión de la política *EOQ*. El segundo y el tercero son dos modelos para el caso de revisión periódica.

Modelo de Revisión Continua

Los modelos presentados en las secciones anteriores sobre demanda estocástica, consideraban el tiempo de entrega como instantáneo, y la revisión se efectuaba de forma periódica, ya que las decisiones se tomaban al comienzo del único período o de cada uno de los períodos. En el caso de demanda determinística constante o uniforme, se vio que la política óptima es la del lote económico, o *EOQ*, de sus siglas en inglés, que indica ordenar una cantidad Q, cada un cierto tiempo t, que es cuando el nivel de inventario alcanza un nivel crítico, conocido también como *punto de reorden*.

En esta sección se presenta un modelo análogo al de *EOQ*, de revisión continua, pero en donde la demanda está dada por una función de densidad de probabilidad $\varphi(\xi)$. En realidad esta extensión de la política *EOQ*, se puede ver como una política (s,S), en donde S es el punto de reorden y Q, la cantidad a ordenar es $S - s$.

El inconveniente principal radica en que ahora, al considerar un tiempo de entrega positivo $\lambda > 0$, en vez de considerar el nivel de inventario, se debe trabajar con la **posición de inventario**, que es el nivel de inventario actual, menos los faltantes, más la cantidad ordenada o producida que aún no se ha recibido en el stock.

El modelo está compuesto por costos de mantener en inventario y por faltantes lineales, con parámetros h y p, respectivamente. El costo de ordenar es de la forma $c(\mathrm{z}) = c^0 z + K$, con
$K > 0$, siempre y cuando $z > 0$.

Por lo tanto la política óptima consiste en determinar los valores s^* y Q^*, de tal forma que cuando la posición de inventario sea s^*, ordenar una cantidad Q^*. Observar, que como el tiempo de entrega es mayor que cero, durante el tiempo que transcurre desde que se hace la orden hasta que esta llega, el inventario puede quedar con un nivel negativo. Observar también, que esta política esta conformada por ciclos. Cada ciclo comienza cuando se recibe una orden y termina justo antes de que llegue la siguiente orden.

Para facilitar la formulación matemática del modelo, se asumen las siguientes condiciones:

1. Nunca habrá más de una orden pendiente
2. El punto de reorden, s, se supone positivo

Debido a lo extenso de la exposición matemática, y dado que esta no revela ninguna complejidad mayor, solo se presentarán aquí los resultados. El lector interesado puede consultar en detalle las páginas 724 a 729 de [13].

Los valores óptimos s^* y Q^* de la política, son los que satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones:

$$Q^* = \sqrt{\frac{\left\{2a\left[K + p\int_{s^*}^{\infty}(\xi - s^*)\varphi(\xi)\partial\xi\right]\right\}}{h}}$$

$$\int_{s^*}^{\infty}\varphi(\xi)\partial\xi = \frac{hQ^*}{pa}$$

El parámetro a, es la tasa de demanda esperada por unidad de tiempo, y se obtiene a partir de los datos de la distribución de la demanda. Por ejemplo si la demanda mensual esperada es de 10 unidades, y la unidad de tiempo es un año, entonces la tasa de la demanda esperada es $a = 10*12 = 120$.

Como se puede apreciar, el sistema de ecuaciones no se puede resolver de forma simultanea. Por eso se ha desarrollado un procedimiento iterativo para obtener los valores de s^* y Q^* [13]:

1. Como paso inicial, se utiliza $p = 0$, para obtener el primer valor de Q^*. Observar que el valor de Q^* que se obtiene es el mismo que para el caso de demanda determinística, o sea el valor de Q^* de la política *EOQ*.
2. Se obtiene el valor de s^*, a partir del valor de Q^* obtenido en 1, utilizando la ecuación 2.
3. Se obtiene un nuevo valor de Q^* para el s^* hallado en el paso 2.
4. Se repite el proceso hasta que los valores de Q^* y s^* obtenidos anteriormente sean lo suficientemente cercanos a los obtenidos en el iteración anterior.

Este procedimiento converge sin problemas en unas cuantas iteraciones, siempre y cuando $p > h$, o sea el valor de costos por faltantes p, sea mayor que el del costo de mantener en inventario h, ya que de otra manera el número de faltantes en un ciclo puede ser grande, lo cual conduce a una contradicción en la derivación del sistema de ecuaciones [13].
En la práctica el costo por faltantes es mayor que el costo de mantener en inventario, y se está libre de este inconveniente. Por más detalles sobre un análisis del procedimiento iterativo se pueden consultar las páginas 728 y 729 de [13].

<u>Modelo de Revisión Periódica</u>
En este caso, se sigue la misma línea de revisión que para los casos con y sin costo de preparación vistos en las secciones 2.2.2.1 y 2.2.2.2, pero se agrega al modelo el tiempo de entrega de las cantidades ordenadas o producidas, mediante la inclusión del parámetro λ al modelo, que expresa la cantidad de períodos en los que se recibe una orden.

En este documento se presentan dos resultados diferentes, uno para el caso en que se permiten faltantes y son satisfechos con la producción de períodos posteriores, lo que se conoce como *backlogging*, o sea se permite que el nivel de inventario negativo, y un caso que el exceso de demanda se considera como ventas perdidas o sea el nivel de inventario será siempre positivo.
Se presentarán solo los resultados más significativos en cada caso, ya que la exposición matemática del tema además de ser compleja, es extensa. Para un análisis detallado de la misma se pueden consultar las referencias indicadas en cada caso.

Modelo 1. Se permiten Faltantes y Sin costo de preparación

En este caso se permite que el exceso de demanda sea satisfecho con la producción de períodos posteriores, o sea *backlogging*, lo cual lleva a tener posiblemente un nivel de inventario negativo. Inicialmente se considera que el horizonte de planeación es infinito.

La demanda está dada por una función de densidad de distribución de probabilidad, $\varphi(\xi)$ continua y positiva. Los demás componentes del modelo son los siguientes:

- $c(z)$: función de costos de ordenar o producir de la forma $c(z) = c^0.z$
- $h(\cdot)$: costo de almacenamiento en inventario. Se asume $h(x) = 0$ si $x \leq 0$
- $p(\cdot)$: costo de penalización por demanda insatisfecha. Se asume $p(x) = 0$ si $x \leq 0$
- α : factor de descuento, con $0 < \alpha < 1$

Sea $C(u)$, el mínimo costo esperado para el caso de infinitos períodos, si la posición de inventario es u. La posición de inventario es igual al nivel de inventario actual, x, más las ordenes efectuadas que llegarán en el período siguiente hasta el período que esta á $\lambda - 1$ períodos del actual, o sea $y_1, y_2,..., y_{\lambda - 1}$, respectivamente. Entonces, el valor de $C(u)$ se obtiene a partir de:

$$C(x, y_1, y_2,..., y_{\lambda-1}) =$$
$$\min_{z\geq 0}\{c(z) + L(x) + \alpha\int_0^{\infty} C(x - \xi + y_1, y_2,..., y_{\lambda-1}, z)\varphi(\xi)\partial\xi\}$$

en donde, como es habitual

$$L(y) = \int_0^{y}[h(y - \xi) + p(\xi - y)]\varphi(\xi)\partial\xi$$

Se puede demostrar que si las funciones de costos $h(\cdot)$ y $p(\cdot)$ son crecientes y convexas, y el tiempo de entrega es λ, la política óptima es de la forma:

Para cada período k:

Si la posición de inventario, $u_{\lambda - 1} < x^*$, entonces ordenar una cantidad $x^* - u_{\lambda - 1}$

De lo contrario, no ordenar

En donde $u_{\lambda - 1} = x + y_1 + y_2 + ... + y_{\lambda - 1}$, y el valor crítico de x^* se obtiene a partir de la siguiente ecuación:

$$c^0(1-\alpha) + \alpha^{\lambda}\int_0^{\infty}\cdots\int_0^{\infty} L'(x^* - \xi_1 - \xi_2 - \cdots - \xi_{\lambda})\varphi(\xi_1)\varphi(\xi 2)\cdots\varphi(\xi_{\lambda})\partial\xi_1\cdots\partial\xi_{\lambda} = 0$$

Como se puede apreciar, la forma de obtener el valor crítico de la política no es trivial. La forma de la política óptima se puede extender al caso de períodos finitos. En este caso es necesario determinar un número crítico para cada uno de los períodos. Por más detalle sobre la demostración de la optimalidad de esta política para ambos casos de horizonte se puede consultar la sección 2 del capítulo 10 de [3].

Modelo 1. Se permiten Faltantes y Con costo de preparación. Política (s,S)

En este caso se permiten faltantes con *backlogging*, pero el costo de preparación de una orden o producción es positivo, o sea el costo de ordenar es de la forma $c(z) = K + c^0.z$, siempre y cuando $z > 0$.

Al igual que en el caso anterior, la demanda está dada por una función de densidad de distribución de probabilidad, $\varphi(\xi)$ continua y positiva. Los demás componentes del modelo son los siguientes:

- $c(z)$: función de costos de ordenar o producir de la forma $c(z) = K + c^0.z$
- $h(\cdot)$: costo de almacenamiento en inventario. Se asume $h(x) = 0$ si $x \leq 0$
- $p(\cdot)$: costo de penalización por demanda insatisfecha. Se asume $p(x) = 0$ si $x \leq 0$
- α : factor de descuento, con $0 < \alpha < 1$

Sea $C_n(u)$ el mínimo valor esperado de los costos durante n períodos, si la posición de inventario es u (posición de inventario es igual al nivel de inventario actual, x, más las ordenes efectuadas que llegarán en el período siguiente hasta el período que esta á $\lambda - 1$ períodos del actual, o sea y_1, y_2,..., $y_{\lambda-1}$, respectivamente). Entonces, el valor de $C(u)$ se obtiene a partir de:

$$C_n(x, y_1, y_2, ..., y_{\lambda-1}) =$$
$$\min_{z\geq 0}\{c(z) + L(x) + \alpha\int_0^{\infty} C_{n-1}(x - \xi + y_1, y_2, ..., y_{\lambda-1}, z)\varphi(\xi)\partial\xi\}$$

en donde, como es habitual

$$L(y) = \int_0^y \left[h(y-\xi) + p(\xi - y)\right]\varphi(\xi)\partial\xi$$

Si se cumple la condición de que la función de costos acumulada $L(x)$, sea convexa, y el tiempo de entrega es de λ períodos, entonces la política óptima es de la forma (s,S), con la siguiente característica

Para cada período k:

Si la posición de inventario, $u_{\lambda-1} < s_k$, entonces ordenar una cantidad $S_k - u_{\lambda-1}$

De lo contrario, no ordenar

En donde $u_{\lambda-1} = x + y_1 + y_2 + ... + y_{\lambda-1}$, es la posición de inventario para un tiempo de entrega de λ períodos, y el valor de S_k es el valor que minimiza la función de costos esperados $G_k(y)$, y s_k es valor de y para el que se cumple que $G_k(s_k) = G_k(S_k) + K$.
En donde $G_k(y)$ es la siguiente:

$$G_k(y) = c^0 y + L(y) + \alpha \underset{\xi}{E}\, G_{k-1}(y - \xi)$$

La demostración de que esta es la política óptima se debe a H. Scarf y a la utilización de la propiedad de K-convexidad. Por más detalle de la demostración se puede consultar [17].

Modelo 2. No se permiten Faltantes

Este caso, es más complejo que el caso en que se permiten faltantes [3][17]. Más exactamente en este caso, el exceso de demanda se considera como venta perdida o producción urgente, lo cual lleva a tener un nivel de inventario siempre positivo.

Al igual que en el caso anterior, la demanda está dada por una función de densidad de distribución de probabilidad, continua y positiva. Los demás componentes del modelo son los siguientes:

- $c(z)$: función de costos de ordenar o producir de la forma $c(z) = c^0.z$
- $h(\cdot)$: costo de almacenamiento en inventario. Se asume $h(x) = 0$ si $x \leq 0$
- $p(\cdot)$: costo de penalización por demanda insatisfecha. Se asume $p(x) = 0$ si $x \leq 0$
- α : factor de descuento, con $0 < \alpha < 1$

La formulación matemática de la función de costos esperado, para el caso de infinitos períodos es la siguiente:

$$c(x, y_1, y_2, ..., y_{\lambda-1}) =$$
$$\min_{z\geq 0}\{c(z) + L(x) + \alpha C(y_1, y_2, ..., y_{\lambda-1}, z)\int_x^{\infty}\varphi(\xi)\partial\xi$$
$$+\alpha\int_0^x C(x-\xi+y_1, y_2, ..., y_{\lambda-1}, z)\varphi(\xi)\partial\xi\}$$

en donde

$$L(y) = \int_0^y h(y-\xi)\varphi(\xi)\partial\xi + \int_y^{+\infty} p(\xi - y)\varphi(\xi)\partial\xi$$

Para este modelo, el único resultado del que se pudo tener conocimiento es el que se presenta en [3], el cual expresa lo siguiente:

Si todas las funciones de costo son lineales, y el tiempo de entrega λ = 1, entonces la política óptima indica ordenar una cantidad $z^*(x)$, que es una función continua y con las siguientes propiedades:

$$z^*(x) > 0 \qquad x < x^*$$
$$z^*(x) = 0 \qquad x \geq x^*$$

No se brinda una forma de computar el valor crítico de x^*, aunque en la sección 4 del capítulo 10 de [3] se brindan algunas alternativas para el cálculo de este valor ante distintas situaciones. El lector interesado puede consultar [3] si quiere obtener el detalle matemático de la demostración y análisis restantes.

Lo importante de este caso, es que no existe una política óptima, al menos de nuestro conocimiento, que tenga la forma simple como en los otros casos.

Algoritmos para determinar los valores de la política (*s*,*S*)

En las secciones 2.2.1 y 2.2.2 anteriores se ha demostrado la optimalidad en diferentes situaciones de la política (s,S). En está sección se presentarán dos algoritmos distintos para determinar los valores de s y S de la política, de los cuales se pudo tener conocimiento. Ambos algoritmos son para el caso de un horizonte de planeación infinito, pero cada uno de estos algoritmos presenta diferentes enfoques.

El primero es un algoritmo iterativo [25], que se aplica para el caso de horizonte infinito y minimización del costo promedio, que está basado en la determinación de propiedades que debe cumplir una política (s,S), para luego aplicar en el algoritmo. De esta manera los autores obtienen un algoritmo eficiente.

El segundo es un algoritmo denominado de aplicación directa [14], porque opera sobre la información histórica de la demanda y está basado en propiedades de la política (s,S). Se obtiene un algoritmo relativamente sencillo de complejidad $O(n^4)$, en donde n es el número de períodos, u horizonte de planeación. La idea del algoritmo es utilizar un número n lo suficientemente grande para obtener los valores de s y S lo más cercanos a los valores óptimos.

Debido a que en ambos casos la exposición es extensa, solo se presentarán aquí los algoritmos y los conceptos fundamentales para la comprensión de los mismos, dejando para el lector interesado la profundización de los conceptos y un análisis detallado de cada trabajo.

Algoritmo 1. Horizonte Infinito. Minimización de Costo Promedio

Este algoritmo se aplica primariamente para el caso de horizonte infinito y la minimización de los costos promedios, aunque los autores plantean otras alternativas al final de su trabajo, como por ejemplo el caso de costo con descuentos y revisión continua.

Es un algoritmo planteado para el caso de revisión periódica, en donde se permiten faltantes que son satisfechas en períodos futuros, o sea *backlogging*, el tiempo de entrega es fijo y puede ser mayor que cero, la demanda es de distribución discreta e idénticamente distribuida en cada período, y la estructura de costos y demás parámetros es estacionaria, lo cual quiere decir que es independiente del tiempo.

Los componentes fundamentales del problema son los siguientes:

- D : la demanda de un período (variable aleatoria)
- p_j : $\Pr\{D = j\}, j = 0,1,2,...;$
- K : costo fijo de una orden o producción
- $G(y)$: el costo esperado de un período, que incluye el costo de mantener en inventario y por faltantes, cuando al inicio del período el nivel de inventario es y, con y entero.

Observar que la estructura de costos es como se ha visto en las secciones anteriores, con la diferencia de que la demanda está dada por una distribución discreta, lo cual se mencionó en su oportunidad no afectaba los resultados obtenidos, con respecto a la forma de la política óptima.

Además se tienen las siguientes restricciones:

- $K > 0$
- $-G(\cdot)$ sea unimodal
- $\lim\limits_{|y|\to\infty} G(y) > \min\limits_{y} G(y) + K$

Con estas dos restricciones, según los autores, Veinott en [22] demostró que la política óptima para el caso de minimización del costo promedio, es (s,S). En este caso la expresión del costo promedio de una política (s,S), utilizando los conceptos de la teoría renovadora de probabilidad (*renewal theory*) [25], es la siguiente;

$$c(s,S) = \frac{K + \sum_{j=0}^{S-s-1} m(j)G(S-j)}{M(S-s)}$$

en donde

$$m(0) = (1 - p_0)^{-1}$$

$$m(j) = \sum_{l=0}^{j} p_1 m(j-l), \qquad j = 1,2,...$$

$$M(0) = 0$$

$$M(j) = M(j-1) + m(j-1), \qquad j = 1,2,...$$

En lo que sigue del artículo, los autores exponen los distintos resultados obtenidos sobre distintas propiedades de al función de costos $c(\cdot,\cdot)$ y las cotas superiores e inferiores de los valores óptimos s^* y S^*. Basándose en los lemas y corolarios demostrados, se formula el siguiente algoritmo:

```
// Inicialización:
s := y*;
S0 := y*;
Repetir
     s := s - 1
hasta que c(s,S0) ≤ G(s);
s0 := s;
c0 := c(s0,S0);
S0 := S0;
S := S0 + 1;

// Determinación de los valores óptimos
Mientras G(S) ≤ c0
     Si c(s,S) < c0 Entonces
          S0 := S
          Mientras c(s,S0) ≤ G(s+1)
               s := s + 1;
          Fin-Mientras;
          c0 := c(s,S0);
     Fin-Si;
     S := S + 1;
Fin-Mientras
```

El valor de y^* es el valor de y que minimiza $G(y)$. En la sección de inicialización se busca el valor óptimo de s, tomando como S el valor de y^*. La optimalidad de s está asegurada por el corolario 1 presentado por los autores en [25].

En la segunda sección lo que se hace es buscar el menor valor de S que sea mayor que S^0, que mejora el valor de la función de costos $c(\cdot,\cdot)$. El valor de c^0 es una cota superior del valor óptimo c^* de $c(\cdot,\cdot)$. La optimalidad de esta sección esta asegurada por los lemas 2 y 3 de [25].

Un estudio de la complejidad del algoritmo, que culmina con el enunciado y demostración de un teorema, indica que la complejidad del algoritmo es a lo sumo 2,4 veces el tiempo necesario para evaluar la función de costos $c(\cdot,\cdot)$ para un s y S específicos.

Al final del trabajo los autores plantean un caso de ejemplo, y como extender el resultado para el caso de revisión continua y el criterio de costos con descuentos. El lector interesado puede referirse directamente a [25].

Como una posible extensión a [25], en [4] se hace un análisis para el caso en que la demanda está dada como una cantidad continua, pero que también se puede aplicar para el caso de demanda discreta, el cual básicamente se reduce al algoritmo presentado en [25].

Algoritmo 2. Horizonte Infinito. Método de Aplicación Directa

El enfoque clásico para la determinación de los valores de s y S, están basados en las características de la teoría renovadora de probabilidad (*renewal theory*) aplicadas al problema. Básicamente estos algoritmos usan alguna propiedad que deben cumplir los valores de s, S y la función $c(s,S)$ (costo total de aplicar la política con los valores de s y S) para:

1. Determinar el valor óptimo s^* para cada S^*, $c(s^*,S^*) \leq c(s,S)$
2. Luego verificar, mediante alguna propiedad que el par (s^*,S^*), es óptimo. Si no es así determinar un nuevo valor de S^*, y volver al paso 1.

Este es el caso, por ejemplo, del algoritmo 1, presentado en la sección 2.2.3.1.

Esa clase de algoritmos obliga a conocer, o a determinar de alguna forma y suponer correcta, la función de densidad de probabilidad para la demanda en cada momento de tiempo o período.

Existe otra clase de algoritmos, los de **aplicación directa**, los cuales utilizan directamente los datos históricos de la demanda para determinar los valores de s y S.
Si bien esta clase de algoritmos tiene la desventaja de que no puede asegurar la optimalidad para un horizonte de planeación infinito ya que trabaja con un conjunto finito de datos estimados (no olvidemos que la demanda es estocástica), ofrece la ventaja de que no hace asunciones sobre la forma de la distribución de probabilidad, lo cual es fundamental cuando se dispone de una cantidad importante de datos históricos de la demanda, y ningún otra información.

En conclusión, los algoritmos de aplicación directa generan los valores de s y S para una muestra de largo n de valores de la demanda, sin utilizar ninguna otra suposición sobre el comportamiento estocástico de la misma. Si la demanda es independiente e idénticamente distribuida (*idd*), una conjetura obvia es que la política determinada por aproximación directa converge a la política óptima, cuando el número de observaciones n, tiende a infinito, o al menos es lo suficientemente grande [14].

Los componentes del problema y sus características son los siguientes:

- $n > 0$: horizonte de planeación
- K : costo fijo de hacer una orden o producción
- p : costo por unidad faltante por período
- h : costo unitario de mantener en inventario por período
- c : costo unitario de orden o producción
- d_t : demanda en el período t, con $t = 1,2,3,...n$
- $L > 0$: tiempo de entrega

- I_t : nivel de inventario "neto" en el período t, que satisface la siguiente relación

$$I_t = I_{t-1} + z_{t-L} - d_{t-1}$$

En donde z es la cantidad ordenada o producida L períodos antes.
- P_t : posición de inventario en el período t, que satisface la siguiente relación

$$P_t = P_{t-1} + z_{t-l} - d_{t-1}$$

En donde z es la cantidad ordenada o producida L períodos antes.

Usando argumentos similares al algoritmo de Wagner-Whitin para el caso de demanda determinística, los autores plantean y demuestran los siguientes lemas, en los que está basado su algoritmo.

Lema 1: Existe una política (s,S) óptima, en la cual la cantidad en stock es igual s, en al menos un período.

Lema 2: Existe una política (s,S) óptima, en la cual la cantidad en stock es cero, en al menos un período.

Sea I_t el nivel de inventario (cantidad en stock al comienzo) en el período t. El lema 1 implica que debe haber un par de períodos i, j con $i \leq j$ para los cuales se cumple que $I_i = S$ y no se realiza ninguna orden hasta el fin del período j, con $I_j = s$. Además debe existir un par de períodos i, j con $i \leq j$ con $d_i + d_{i+1} + ... + d_j = (S - s)$.

El lema 2 establece que para valores de s y S que no cumplan esta propiedad, los mismos pueden ser cambiados para que la cumplan, sin modificar los costos involucrados.

El algoritmo desarrollado en [14] determina los valores óptimos de s y de S, utilizando los resultados de los lemas 1 y 2. Básicamente lo que hace el algoritmo, es calcular todas las diferencias posibles de $(S - s)$, que para n períodos es $n(n + 1)/2$. Para cada una de estas diferencias obtiene después los valores óptimos de S y s, y se queda con el par que genera una política de menor costo.

Entrada: Parámetros de costos K, p, h y c; número de períodos n; una lista de demandas de largo n: $(d_1, ..., d_n)$.

Salida: Los valores de s^* y S^* que genera una política óptima entre todas las políticas de la forma (s,S), con la condición inicial de que $I_1 = S$.

Algoritmo:

```
Menor_costo := ∞;
// Generamos todos los valores posibles de Sdif = (S – s). Por la
// propiedad 1 necesitamos considerar n(n +1)/2 valores.
For i := 0 to n {
      For j := i to n {
            Sdif = di + … + dj

            // Calculamos la cantidad a ordenar en cada período t, Order(t), para
            // este valor de Sdif
```

```
(1): t := 1;
Torder := 0;
OrderOut(1) := 0;
(i): Order(t) := Torder;
Torder := 0;
(ii): Torder := Torder + dt;
t := t +1;
If (t > n) go to (2);
OrderIn := Order (t);
OrderOut(t) := OrdeOut(t - 1) + Order(t - 1) + OrderIn;
If (Torder > Sdif) go to (i);
Order(t) := 0;
Go to (ii);

// Generamos todos los valores posibles de S para Sdif
// Por la propiedad 2, un candidato S debe causar un
// nivel de inventario cero en al menos un período.
(2): Dsum := d1;
For k := 2 to (n + 1) {
        // El valor de S que deja un nivel de inventario cero en k
        S := OrderOut(k) + Dsum;
        s := S - Sdif;
        If (c(s,S) < Menor_costo) {
                Menor_costo := c(s,S);
                S* := S;
                s* := s;
        }
        If (Order(k) >0)
                Dsum := 0;
        Dsum = Dsum + dk;
}
        }
}
```

El valor de $c(s,S)$ puede ser determinado en tiempo n. Este cálculo está dentro de un triple loop, por lo tanto el orden del algoritmo es en el peor caso $O(n^4)$. (Ver [14]).

Al final del trabajo referenciado en [14] se muestra un ejemplo, que demuestra la efectividad del enfoque de aplicación directo para el caso en que la demanda se comporta como un proceso de *Poisson* serial.

Caso Especial de Demanda Estocástica: Demanda Markoviana

En esta sección se presentarán los resultados relevantes de los que se ha tenido conocimiento, sobre el control de inventario cuando la demanda es estocástica y se comporta como un proceso de Markov, lo cual significa que la demanda de un período depende solamente de la demanda del período anterior. El estado del proceso está dado por la cantidad de la demanda, que se asume discreta y finita.

En todos los casos que se presentarán, se demuestra que la política óptima es la política (s,S), siempre y cuando se cumplan ciertas restricciones. Si bien la forma de la política óptima es conocida, no se pudo encontrar ningún trabajo de investigación relacionado con la formulación de un algoritmo para encontrar los valores óptimos de s y S.
Debido a la complejidad matemática y a lo largo de las exposiciones, solo se muestran en este documento los resultados más significativos, dejando al lector la posibilidad de

consultar [41.] y [6] para los detalles de las demostraciones y el análisis más profundo de los mismos y de otros casos que en esos trabajos se presentan.

Formulación del Problema

Para la formulación matemática del problema, se consideran los siguientes componentes:

- N : horizonte del problema, con $0 < N \leq \infty$
- (Ω, F, P) : espacio de probabilidad
- I : $\{1,2,...,L\}$ una colección finita de posibles estados de la demanda
- i_k : el estado de la demanda en el período k
- $\{i_k\}$: una cadena de Markov con matriz de transición $P_{LxL} = \{p_{ij}\}$
- ξ_k : la demanda en el período k, $\xi_k \geq 0$, ξ_k depende de i_k
- $\phi_{i,k}(\cdot)$: función de densidad condicional de ξ_k cuando $i_k = i$, $E\{\xi_k \mid i_k = i\} \leq M < \infty$
- $\Phi_{i,k}(\cdot)$: función de distribución correspondiente a $\phi_{i,k}(\cdot)$
- u_k : cantidad ordenada en el período k
- x_k : nivel de inventario inicial en el período k
- $c_k(i,u)$: el costo de ordenar $u \geq 0$ unidades, en el período k, cuando $i_k = i$
- $f_k(i,x)$: costo por mantener x unidades de inventario en el período k, cuando $i_k = i$, $f_k(i,x) \geq 0$ y $f_k(i,0) \equiv 0$. Esta es la función de costo por faltantes cuando $x \leq 0$
- $\delta(z)$: 0 cuando $z \leq 0$ y 1 cuando $z > 0$

Se asume que las ordenes son colocadas al comienzo de un período, que el tiempo de entrega es instantáneo, y luego ocurre la demanda de ese período. Se permiten faltantes y la demanda insatisfecha en un período es satisfecha con la producción de futuros períodos. Además el costo de ordenar tiene la siguiente forma:

$$c_k(i,u) = K_k^i \delta(\mathrm{u}) + c_k^i u \qquad K_k^i \geq 0, \quad c_k^i \geq 0$$

Se asume que la función de costos por faltantes $f_k(i,x)$ es convexa y asintóticamente lineal, o sea $f_k(i,x) \leq C(1 + |x|)$ para algún $C > 0$. En [6] se relaja está restricción para funciones de costos con crecimiento polinomial y funciones semicontinuas.

La función a ser minimizada, que comprende cada uno de los costos esperados del problema durante un intervalo $[n,N]$ con $i_n = i$ y $x_n = x$, es la siguiente:

$$J_n(i,x;U) = E\left\{\sum_{k=n}^{N} [c_k(i_k,u_k) + f_k(i_k,x_k)]\right\}$$

en donde $U = (u_n, u_{n+1},...,u_{N-1})$ es una decisión admisible, no anticipativa, para el problema y $u_N = 0$. La ecuación de balance de inventario es la siguiente:

$$x_{k+1} = x_k + u_k - \xi_k, \qquad k \in [n, N-1]$$

El objetivo es determinar el valor funcional $v_n(i,x)$ para el problema, en el intervalo $[n,N]$ con $i_n = i$ y $x_n = x$, que se define de la siguiente manera:

$$v_n(i,x) = \inf_{U \in \Psi} J_n(i,x;U)$$

en donde ψ denota la clase de todas las decisiones admisibles. Notar que no es necesaria la existencia de una política óptima para definir el valor funcional. Por supuesto, si la existencia es establecida, el "inf" puede ser remplazado por el "min".

Después de haber definido formalmente el problema, se procede a realizar una formulación de programación dinámica para el valor funcional $v_n(i,x)$ del problema. La formulación es la siguiente:

$$\begin{cases} v_n(i,x) = f_n(i,x) + \inf\limits_{u\geq 0}\left\{c_n(i,u) + E\left[v_{n+1}(i_{n+1}, x+u-\xi_n)\middle| i_n = i\right]\right\} \\ \qquad\quad = f_n(i,x) + \inf\limits_{u\geq 0}\left\{c_n(i,u) + F_{n+1}(v_{n+1})(i, x+u)\right\}, \quad n\in(0,N-1) \\ v_N(i,x) = f_N(i,x) \end{cases}$$

En donde

$$F_{n+1}(b)(i,y) = \sum_{j=1}^{L} p_{ij}\int_0^{\infty} b(j, y-z)\phi_{i,n}(z)\partial z$$

es el valor esperado en el siguiente período, dado que el nivel actual de inventario es x y se decide ordenar o producir una cantidad u.

Como siguiente paso se debe demostrar primero que existe solución para la formulación de programación dinámica para cualquier valor de x, y luego que el resultado, o se la política obtenida, es una decisión óptima para $J_0(i,x;U)$. Por un detalle de los teoremas necesarios y sus demostraciones se puede consultar las secciones 2 de [19] y [6]. El resultado relevante de estas secciones es que existe dicha política admisible $\hat{U} = (\hat{u}_0, \hat{u}_1, ..., \hat{u}_{N-1})$ que es óptima para el problema $J_0(i,x;U)$, y además que :

$$v_0(i,x) = \min_{U\in\Psi} J_0(i,x;U)$$

La política óptima $\hat{U} = (\hat{u}_0, \hat{u}_1, ..., \hat{u}_{N-1})$ es la solución de la formulación de programación dinámica, con:

$$\begin{cases} \hat{u}_k = \hat{u}_k(i_k, x_k), \quad k\in(0.N-1), \quad i_0 = i \\ x_{k+1} = x_k + \hat{u}_k - \xi_k, \quad k\in(0.N-1), \quad x_0 = x \end{cases}$$

Lo que resta entonces, es demostrar que la política óptima $\hat{U}$, es de la forma (s,S). Para eso son necesarias las siguientes condiciones:

A.1 $\quad K_n^i \geq \bar{K}_{n+1}^{\,i} \equiv \sum_{j=1}^{L} p_{ij} K_{n+1}^j \geq 0$

A.2 $\quad c_n^i x + F_{n+1}(f_{n+1})(i,x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

Para demostrar la optimalidad de la política (s,S) es extender la propiedad de *K*-convexidad propuesta por H. Scarf en [17]. Mediante las extensiones presentadas en [19] sobre la propiedad de K-convexidad y las asunciones de la formulación, más A1 y A.2 es posible demostrar la optimalidad de la política (s,S) para el caso de horizonte finito, funciones de costo no estacionarias y demanda markoviana. Por detalles sobre la demostración consultar la sección 4 de [19].

Forma de la Política (*s*,*S*) para el caso de Demanda Markoviana

Para el problema de control de inventario con demanda markoviana de la formulación anterior, en donde se satisfacen las condiciones A.1 y A.2, existe una secuencia de números s_n^i y S_n^i, con $n \in [0, N-1]$ y en donde $s_n^i \leq S_n^i$, tal que la política óptima es:

$$\hat{u}_n(i,x) = (S_n^i - x)\delta(s_n^i - x)$$

En donde x es el nivel inicial de inventario en el período k. Para un detalle sobre la demostración ver la proposición 4.2 y el teorema 4.1 de [19].

La optimalidad de la política (s,S) se verifica para otras clases de horizontes de planeación y otras funciones de costos, al igual que para algunas extensiones del modelo inicial presentado en la formulación. A continuación se presenta una lista de situaciones en las cuales está demostrada la optimalidad de la política (s,S). Por más detalles al respecto consultar las últimas secciones de [19] y [6]. A menos que se indique lo contrario, las condiciones necesarias para la optimalidad A.1 y A.2 son las mismas que las del último enunciado.

- **Modelo no estacionario y horizonte de planeación finito e infinito**. O sea los componentes del problema, funciones de costos $c_k(i,\cdot)$ y $f_k(i,\cdot)$ y la distribución de la demanda $\Phi_{i,k}(\cdot)$ dependen del tiempo, o sea del período k, y N puede ser finito o infinito.

- **Modelo no estacionario con descuento y horizonte de planeación infinito**. Los componentes del problema dependen del tiempo, y N es infinito, y existe un factor de descuento por período $0 < \alpha \leq 1$.

- **Modelo estacionario con descuento y horizonte de planeación infinito**. En este caso los componentes del problema no dependen del tiempo, o sea $c_k(i,\cdot) = c(i,\cdot)$, $f_k(i,\cdot) = f(i,\cdot)$, y la distribución de la demanda es $\Phi_{i,k}(\cdot) = \Phi_i(\cdot)$. El horizonte de planeación N es infinito, y existe un factor de descuento por período $0 < \alpha \leq 1$. Como observación, cabe decir que los valores de s y S solo dependen de i.

- **Modelo con demanda cíclica y horizonte de planeación infinito**. Este es un caso especial de demanda markoviana, en done los estados de la demanda se dan de forma cíclica, de tal manera que $p_{ij} = 1$ si $j = i + 1$, o si $i = L$ y $j = 1$.

También puede verificarse el caso de la optimalidad para los casos en que no está permitido ordenar o producir en ciertos períodos, o existen restricciones sobre la capacidad de inventario y de cantidades a ordenar o producir. Por más detalle sobre estos casos especiales se puede consultar [19].

Conclusiones

Como ha quedado expresado en las secciones 2.2.1, 2.2.2 y 2.2.4 el problema de inventario con demanda estocástica es más complejo tanto matemáticamente como desde el punto de vista de la forma y el cálculo de las políticas óptimas, si lo comparamos con en el caso de demanda determinística, lo cual era previsible.

Este es el precio que se paga por incorporar un mayor grado de realismo al modelo. Como caso especial de complejidad, se puede mencionar el caso en que el tiempo de entrega es positivo. Para este caso, el conocimiento que se pudo recavar fue limitado, y dificultoso de abordar.

Sin duda, la política (s,S) es la política de inventario de mayor relevancia para el caso de demanda estocástica, dada su optimalidad para los casos más reales y su uso difundido en la práctica dada su simplicidad.

Como se puede apreciar en la sección 2.2.4, la optimalidad de la política (s,S) se verifica para una gran variedad de casos en que la demanda se comporta como una cadena de Markov. En cambio no se ha tenido conocimiento de algún algoritmo desarrollado para alguno de los casos, si bien es cierto que cada uno de estos problemas se pueden resolver mediante programación dinámica, generalmente la dimensionalidad de los casos prácticos hacen prohibitiva está opción, además de que no necesariamente la política óptima encontrada sea de la forma (s,S), ya que con las condiciones dadas no está asegurada la unicidad de la política óptima con la forma de (s,S).

El material bibliográfico referenciado en [3] es un aporte importantísimo para el caso de demanda estocástica, ya que se brindan las bases matemáticas de los distintos problemas. Además, en los últimos capítulos se hace un análisis profundo sobre extensiones a los problemas clásicos presentados en los primeros capítulos, como por ejemplo un análisis de estacionalidad de la política (s,S), y de la existencia de las distribuciones límites para las mismas, distintos ejemplos de demanda, y un análisis sobre la relación con procesos estocásticos.

. Modelos de Inventario de Varios Artículos

En las sección 2 y 3 se realizó una revisión del estado del arte lo más detallado posible del problema de control de inventario de un solo artículo. En la realidad, frecuentemente los problemas de inventario consisten de varios productos, en donde el objetivo sigue siendo satisfacer un cierto requerimiento –generalmente la demanda- a un costo mínimo o ganancia máxima. Una restricción que generalmente se agrega en el caso de varios artículos, es el volumen o espacio de almacenamiento para el total de los artículos.

Una diferencia importante del control de inventario de varios artículos, consiste en como está relacionada la demanda de cada uno de los artículos. Cuando la demanda de un artículo no incide en la demanda de otros artículos, se dice que el problema es con **demanda independiente**, mientras que en el otro caso se dice que la demanda es **dependiente**. Al igual que en el caso de un solo artículo la demanda puede ser determinística o estocástica.

A continuación se presentarán tres casos representativos del control de inventario de varios artículos. El primero consiste de un modelo de demanda independiente y determinística constante, que tiene en cuenta el espacio de almacenamiento. En segundo orden se analizará el caso de demanda estocástica, tanto independiente, como dependiente. Como último caso, se presentará un mecanismo muy utilizado en la práctica para determinar las cantidades necesarias de cada artículo, en el caso de demanda dependiente, conocido como Planeamiento de Requerimiento de Materiales, o **MRP** de sus siglas en inglés.

1. Demanda Constante Independiente con Limitación de Espacio de Almacenamiento. EOQ extendido

En este modelo se considera que existen $n > 1$ artículos, cuya demanda es constante y que todos compiten por un único espacio de almacenamiento de capacidad V.

El objetivo es determinar las cantidades a ordenar de cada producto i: $Q_1, Q_2,..., Q_n$ de tal forma de minimizar los costos totales promedio de inventario. Los componentes del modelo son los siguientes:

- d_i : taza de demanda del artículo i : $1,2,...,n$
- K_i : costo fijo de ordenar del artículo i : $1,2,...,n$
- h_i : costo de mantener una unidad de tiempo en inventario una unidad del artículo i : $1,2,...,n$

Se supone además que la producción o el reorden es instantáneo, que no existen descuentos por cantidad, y no se permiten faltantes, por lo cual no hay demandas diferidas a períodos anteriores. Observar, que como en el caso de *EOQ*, no es necesario incorporar al modelo el costo unitario de ordenar o producir.

Si consideramos un solo artículo y una cantidad de reorden Q_i, entonces la función de costos totales para un artículo por unidad de tiempo es:

$$C_i = \frac{d_i K_i}{Q_i} + \frac{h_i Q_i}{2}$$

en donde C_i es la formulación de costos para el caso de revisión continua y demanda constante de la política *EOQ*, como se vio para el caso de demanda determinística constante en la sección 2.1.1.1.

Si tenemos en cuenta los n artículos a la vez, la función de costos totales anterior para los n artículos, se transforma en:

(1) $$C = \sum_{i=1}^{n} \frac{d_i K_i}{Q_i} + \frac{h_i Q_i}{2}$$

Si cada unidad de artículo *i* ocupa un volumen v_i, y sabiendo que el espacio de almacenamiento total tiene una capacidad V, se tiene además la siguiente restricción:

(2) $$\sum_{i=1}^{n} v_i Q_i \leq V \qquad Q_i \geq 0$$

Por lo tanto el problema consiste en calcular los valores de Q_i que minimicen (1) sujetos a la restricción (2).

Este es un problema de programación no-lineal que puede resolverse, entre otros métodos, por el método clásico de Lagrange [15]. El lagrangeano de esta función es:

(3) $$L(Q_1,\ldots,Q_n,\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \frac{d_i K_i}{Q_i} + \frac{h_i Q_i}{2} - \lambda\left[\sum_{i=1}^{n} v_i Q_i - V\right]$$

con $\lambda < 0$, como el multiplicador de Lagrange. Los valores óptimos de Q_i y de λ que minimizan (3), se encuentran resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones:

(4) $$\frac{\partial L}{\partial Q_i} = \frac{h_i}{2} - \frac{a_i K_i}{Q_i^2} - \lambda v_i = 0$$

(5) $$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -\sum_{i=1}^{n} v_i Q_i + V = 0$$

Al resolver (4) se puede obtener una expresión para Q_i*

(6) $$Q_i^* = \sqrt{\frac{2a_i K_i}{h_i - 2\lambda^* v_i}}$$

Mediante la expresión (6) se obtiene el valor óptimo Q_i en función del valor óptimo de la variable λ*. El valor de λ*, que debe ser menor que cero [15], se encuentra mediante el método de prueba y error. En efecto, se proporciona un valor negativo de λ y utilizando (6) se obtienen valores provisorios de Q_i. Con estos valores se verifica si se satisface la ecuación (5). Si no se satisface, se modifica el valor de λ por otro valor negativo y se repite el proceso, hasta lograr una aproximación lo suficientemente pequeña de (5). Este proceso iterativo se puede comenzar con un valor de $\lambda = 0$, e ir restando un valor constante $R > 0$, hasta obtener un valor de (5) igual a ε, con ε lo suficientemente pequeño.

A continuación se muestra un ejemplo que se encuentra en la pág. 123 de [15] de aplicación del proceso iterativo explicando anteriormente.

Supóngase una bodega de 25000 m^3 de espacio real de almacenamiento de productos agrícolas (maíz, trigo y frijol). Este espacio toma en cuenta el espacio para las maniobras de estiba. Las características de estos productos son:

Producto	**Demanda Constante Mensual d_i**	**Espacio ocupado por tonelada de grano v_i**	**Costo fijo de reorden K_i**	**Costo de almacenamiento h_i**
i=1 Maíz	2 toneladas	1000 m^3	$ 10	$ 300
i=2 Frijol	4 toneladas	1000 m^3	$ 5	$ 100
i=3 Trigo	3 toneladas	1000 m^3	$ 15	$ 200

Se utiliza un valor arbitrario de λ, que variará en incrementos de -0,005 empezando con el valor $\lambda = 0$. Con este valor de λ y la fórmula (6) se calcula Q_i. Una vez conocidos éstos valores, se sustituyen los valores calculados en la fórmula (5) hasta calcular un valor cercano a $\varepsilon = 0$. En forma de tabla se tiene:

Iteración	**Valor de λ**	**Maíz Q_1***	**Frijol Q_2***	**Trigo Q_3***	$\left[\sum_{i=1}^{3} v_i Q_i^* - 25000\right]$
1	0	11,2	20	21,2	27400
2	-0,05	10	14,1	17,3	16400
3	-0,10	9	11,5	14,9	10400
4	-0,15	8,2	10	13,4	6600
5	-0,20	7,6	8,9	12,2	3700
6	-0,25	7,1	8,2	11,3	1600
7	-0,30	6,7	7,6	10,6	-100

Se puede observar que el valor óptimo de λ se encuentra en el intervalo $-0,3 < \lambda < -0,25$. Por interpolación se puede encontrar un valor más aproximado. Para el ejemplo basta con decir que una buena aproximación de λ es $\lambda = -0,3$ y por lo tanto la cantidad a ordenar óptima mensual será de $Q_1* = 6,7$ toneladas de maíz, $Q_2* = 7,6$ toneladas de frijol y $Q_3* = 10,6$ toneladas de trigo, ocupando un espacio total de 24900 m^3.
Cuando $\lambda = 0$ la restricción (2) está inactiva y puede ignorarse. Por ejemplo, si el espacio de almacenamiento V fuera mayor que $11200 + 20000 + 21200 = 52400 \leq V$ se puede ignorar tranquilamente dicha restricción (hay espacio para todos).

2. Demanda Estocástica. Demanda Independiente o Dependiente

En esta sección se abordará el problema de inventario de varios artículos con demanda estocástica, para distintos casos de horizontes de planeación y con demanda independiente y dependiente. El contenido de esta sección esta basado exclusivamente en el material bibliográfico referenciado en [7], en donde se pueden consultar las demostraciones de lo expuesto a continuación, y un análisis más profundo de cada uno de los casos.

Como sucede en el caso de un solo artículo con demanda estocástica, si se compara con el de demanda determinística, la complejidad y la dimensionalidad de los problemas aumentan, y en este caso es aún mayor, debido a que la cantidad de artículos es mayor que uno y a las restricciones de espacio de almacenamiento limitado y de demanda dependiente.

Antes de comenzar con cada caso, se brinda unan lista de los componentes y de la nomenclatura empleadas desde un punto de vista general del problema, sin tener en cuenta si la demanda es independiente o dependiente, que son utilizadas en [7].

Consideraciones Generales

En el caso de varios artículos, las cantidades, tanto de inventario como de orden o producción, son representadas por medio de vectores. Se denotará al j-ésima componente del vector x, como x^j. Además para los vectores $x, y \in R^n$ la notación:

- $y > x$ significa $y^j > x^j \ \forall j : 1,\ldots,n$
- $y \geq x$ significa $y^j \geq x^j \ \forall j : 1,\ldots,n$
- $x \cdot y = \sum_{j=1}^{n} x^j y^j$

Todos los casos que se presentarán son de revisión periódica, en donde se permiten faltantes que son satisfechos con la producción de períodos posteriores, o sea *backlogging*, y los tiempos de entrega para cada artículo es instantánea. Los componentes para los distintos casos son:

- $N > 0$: horizonte de planeación. Con N posiblemente infinito
- $r > 0$: cantidad de artículos
- y_k^j : nivel de inventario (o de faltantes) del artículo j en el período k, después que la orden o producción ha sido recibida, y antes de que la demanda del período k sea satisfecha.

- M : volumen o capacidad del espacio de almacenamiento, de tal manera que en cada período se tiene que cumplir la siguiente restricción:

  (1) $$y_k \in \Gamma := \left\{ y \in R^r : \sum_{j=1}^{r} (y^j)^+ \leq M \right\}$$

  en donde $x^+ = \max\{0,x\}$. Notar que esta es una restricción sobre el nivel de inventario de cada artículo, y no sobre la cantidad de faltantes. Por lo tanto la restricción (1) es no lineal en y.

- $x \in \Gamma$: vector de nivel de inventario inicial, en donde x^j es el nivel de inventario inicial de cada artículo.

- $\xi_{k+1} \in R^r_+$: vector de demanda en el período k. Se asume que la demanda de cada período es independiente, pero no necesariamente idénticamente distribuida. La demanda de un artículo puede ser dependiente o independiente.

- $\Phi_k(\cdot)$: distribución de probabilidad conjunta de ξ_{k+1} en el período k. Se asume que para $p > 1$, existe una constante D positiva y un $\varepsilon > 0$ del tal manera que se cumple que:

(2) $$E\left|\xi_k^j\right|^{p+\varepsilon} \leq D < \infty, \quad k = 1,\ldots,N, \;\; j = 1,\ldots,r$$

donde E es el operador de valor esperado de una variable aleatoria.

- u_k : vector de cantidades ordenadas de cada artículo en el período k
- $c_k(u) : R^r_+ \to R_+$: función de costos de ordenar o producir una cantidad u en el período k
- $f_k(y) : R^r \to R_+$: función de costos de mantener en inventario una cantidad y en el período k, si $y \geq 0$, en caso contrario, representa el costo por faltantes en el período k
- α : factor de descuento, con $0 < \alpha < 1$

A continuación se hace el análisis del caso de horizonte finito, y se presenta la forma de la política óptima, la cual se mantiene en el caso de horizonte de planeación infinito, y para el caso estacionario, como se aclarará oportunamente.

Horizonte de Planeación Finito y Factor de Descuento

En el siguiente modelo se considera un horizonte de planeación finito, comenzando en el período $n > 0$ y $N < \infty$.

Formulación del Problema

Para la resolución de este problema se asumen las siguientes restricciones:

- Ecuaciones de balance:

(3) $$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + u_k - \xi_{k+1}, & k = 1,\ldots,N-1 \\ x_n = x \end{cases}$$

- Para satisfacer la restricción de limitación de almacenamiento, las cantidades ordenadas deben satisfacer las siguientes condiciones:

(4) $$u_k \geq 0 \qquad k = 1,\ldots,N-1$$
(5) $$x_k + u_k \in \Gamma \qquad k = 1,\ldots,N-1$$

- Una decisión o política $U = (u_n,\ldots,u_{N-1})$ es admisible si cada u_k con $k = 1,..,N - 1$ satisface las condiciones (4) y (5), y es no anticipativa con respecto al proceso de demanda. Se denotará como Ψ al conjunto de todas las políticas admisibles U.
- Una política U se denomina de "realimentación" (*feedback policy* en inglés), si para cada k, la cantidad a ordenar u_k en el período k depende solamente del nivel

inicial de inventario x_k.

Teniendo en cuenta que en cada período k se cumple que $y_k = x_k + u_k$ las condiciones (4) y (5) se pueden escribir como:

$$u_k \in A(x_k) \vee y_k \in B(x_k)$$

con

(7) $$A(x) := \left\{ u \in R^r, u \geq 0, \sum_{j=1}^{r} \left(x^j + u^j\right)^+ \leq M \right\}$$

(8) $$B(x) := \left\{ y \in R^r, y \geq x, \sum_{j=1}^{r} \left(y^j\right)^+ \leq M \right\}$$

Es necesario además que las funciones de costos cumplan las siguientes condiciones:

(9.*i*) La función de costos de ordenar o producir $c_k(\cdot)$ es semicontinua inferiormente (*lsc*) y además $c_k(0) = 0$, para $k = 1,\dots, N-1$

(9.*ii*) La función de costos de mantener en inventario (o por faltantes) $f_k(\cdot)$ es semicontinua inferiormente (*lsc*) y con crecimiento exponencial con tasa q :

$$f_k(x) \leq f_0(1 + \|x\|^q)$$

para $k = 1,..,N-1$, en donde f_0 es una constante no negativa.

Para concluir, la función objetivo a minimizar es el valor esperado de todos los costos involucrados, durante todo el intervalo $[n, N]$, y tiene la siguiente expresión:

$$J_n(x;U) = \sum_{k=n}^{N-1} \alpha^{k-n} E\left[c_k(u_k) + f_k(x_k)\right] + \alpha^{N-n} f_N(x_n)$$

que está siempre definida, si se permite que el lado derecho pueda ser eventualmente una cantidad infinita.

Forma de la Política Optima: *Base-Stock* Modificada

A partir de la formulación matemática del problema presentada en 3.2.2.1, lo que sigue es construir una formulación de programación dinámica y demostrar que existe un valor funcional mínimo para dicha formulación, y luego que este valor funcional es válido para la formulación matemática anterior, o sea:

$$v_0(x) = \min_{U \in \Psi} J_0(x;U)$$

Aquí se omite esta serie de demostraciones que se puede consultar en las secciones 2 y 3 de [7], y se presentan a continuaciones los resultados relevantes, que también están demostrados en [7].

La política que se presentará a continuación es óptima, si el valor funcional es una función convexa. Las siguientes condiciones aseguran la convexidad del valor funcional:

(10) $f_k(x)$ convexa

(11) $c_k(u) = c_k \cdot u = \sum_{j=1}^{r} c_k^j \cdot u^j$

(12) $c_k \cdot x + \alpha F_{k+1}(f_{k+1})(x) \underset{\|x\| \to \infty}{\longrightarrow} \infty$

en donde F_{k+1} es el valor esperado de la política óptima en el siguiente período, y se define como:

$$F_{k+1}(b)(y) = E[b(y - \xi_{k+1})] = \int_{R_+^r} b(y - \xi) \partial \Phi_{k+1}(\xi)$$

A partir de las restricciones y condiciones enunciadas se puede obtener el siguiente resultado:

Política Optima: *Base-Stock* Modificada
Sea el problema de varios artículos, no estacionario, sobre un horizonte de planeación $[n, N]$, con $n > 0$ y $N < \infty$, en el que se cumplen las restricciones (2), (9) y (10) - (12). Entonces existe una secuencia de r-vectores S_k y funciones $Y_k : \Gamma \setminus \{x : x \leq S_k\} \to \Gamma$, $k = 1,\ldots,n$ tal que la política óptima es la siguiente:

$$u_k(x) = \begin{cases} S_k - x & x \leq S_k \\ Y_k(x) - x & x > S_k \end{cases}$$

Además se pueden seleccionar las funciones Y_k de tal forma que se cumpla que $Y_k^j = x_k^j > S_k^j$.

A esta política se le denomina ***base-stock* modificada**, porque es una extensión de la política original de Ignall y Veinott (1969). Esta política indica ordenar cuando el nivel de inventario x es menor o igual al valor crítico S_k, esta es la política de *base-stock* clásica. En el caso en que el nivel de inventario sea mayor que S_k, es necesario ordenar una cantidad $Y_k(x) - x$, que será siempre positiva. Esta segunda forma se conoce como política miope o *myopic policy* en inglés.

Esta política también es óptima para el caso de horizonte infinito, o sea cuando $N = \infty$. Como se podrá observar esta política es bastante más compleja que las presentadas hasta el momento, debido al componente ”miope” de la misma. Esta perdida cualitativa de las políticas óptimas es el precio que se paga por la mayor complejidad del modelo.

Horizonte de Planeación Infinito y Factor de Descuento. Modelo Estacionario

En esta sección la distribución de la demanda y los costos se asumen constantes a través del tiempo, o sea:

(13.*i*) $\Phi_k = \Phi$
(13.*ii*) $c_k(\cdot) = c_k = c$
(13.*iii*) $f_k(\cdot) = f(c)$

Observar que en este caso además, se considera una función de costos de ordenar o producir estrictamente lineal. Para este caso se puede demostrar, bajo ciertas condiciones, que la política óptima es la siguiente:

Forma de la Política Optima: *Base-Stock* Modificada

Sea el problema de varios artículos, estacionario sobre un horizonte de planeación infinito, en el que se cumplen las restricciones (2), (9) y (10) - (13). Entonces existe un par (S, $Y(x)$) que describen la siguiente política óptima $U = (u(x),..., u(x),...)$ con la siguiente forma:

$$u(x) = \begin{cases} S - x & x \le S \\ Y(x) - x & x > S \end{cases}$$

Además, el valor de S se puede obtener como:

$$S = \arg\min_{S \in \Gamma} \left\{ 1 - \alpha c \cdot y + \alpha \int_{R^r} f(y - \xi) \partial \Phi(\xi) \right\}$$

Una propiedad importante de este modelo, es determinar si en algún momento de tiempo el nivel de inventario será menor o igual al valor crítico S. A partir de ese momento la política óptima será sencilla, ya que solo es necesario ordenar hasta una cantidad S en cada período.

Beyer, Sthi y Sridhar en [7] demostraron que el tiempo en que el nivel de inventario del proceso alcanza la región recurrente $R = \{x : x \le S\}$ es finito, por lo cual, luego de ese momento la política óptima es sencilla. Por detalles de la demostración consultar el apéndice de [7].

Modelo Estacionario Separable

En este caso se considera el modelo de varios artículos de la sección anterior, pero con las siguientes asunciones:

- Las funciones de costo de ordenar y de mantener en inventario son separables, o sea:

(14.*i*) $c(u) = \sum_{j=1}^{r} c^j(u^j)$

$$(14.ii)\quad f(x)=\sum_{j=1}^{r} f^{j}(x^{j})$$

(14.*iii*) $f^{j}(\cdot)$ es diferenciable y estrictamente convexa, con $j = 1,2,\ldots,r$

- La demanda ξ^{j} de cada artículo j es independiente. Por lo tanto la distribución conjunta de la demanda es:

$$(15)\qquad \Phi(\xi)=\Phi^{1}(\xi^{1})\cdot\Phi^{2}(\xi^{2})\cdot\ldots\cdot\Phi^{r}(\xi^{r})$$

Teniendo en cuenta estas restricciones, se puede demostrar que la política miope (*myopic policy*) es óptima, y tiene la forma $Y = (y(x_0),\ldots,y(x_n),\ldots)$, en donde

$$y(x)=\arg\min_{y\in\Gamma:y\geq x} g(y)$$

en donde $g(y)$ es el costo esperado de un período, y está definido como:

$$g(y):=(1-\alpha)c\cdot y+\alpha\int_{R^{r}} f(y-\xi)\partial\Phi(\xi)$$

Por más detalle sobre la demostración y un análisis más profundo del caso, consultar la sección 5 de [7]

Como comentario final, para dar punto final a la sección de varios artículos con demanda dependiente, aunque al final se vio un caso particular de demanda independiente, hasta donde se pudo investigar no existe un análisis para el caso de costos fijos de ordenar. En [7] plantean esto como un problema a resolver, quizás por el camino de la *K*-convexidad, pero dejando en claro que no existe una forma clara de ampliar este concepto para el problema de varios artículos.

Así mismo no se pudo encontrar ninguna pista sobre algún algoritmo desarrollado para el caso de varios artículos con demanda dependiente.

3. Plan de Requerimiento de Materiales (MRP)

Definición

El Plan de Requerimiento de Materiales, MRP de sus siglas en inglés, es un procedimiento que permite determinar las cantidades necesarias de cada unos de los artículos que componen el inventario, de tal manera de satisfacer la demanda externa de los artículos finales.

El procedimiento de MRP esta diseñado para aquellas situaciones en que la demanda de los artículos es dependiente, o sea la demanda de un cierto artículo, genera demanda de otros artículos. Esta situación se da en aquellas organizaciones que producen uno o más productos formados por distintas partes o subproductos, por eso la utilización del termino Materiales dentro del procedimiento.

Por lo tanto, MRP se puede considerar como una política de stock de varios artículos para el caso de demanda dependiente, ya que el resultado del procedimiento es indicar cuando y cuanto se debe ordenar o producir de cada uno de los artículos, para satisfacer la demanda de cada uno de ellos, y en particular aquellos artículos con demanda externa. Si bien su objetivo explícito no es el de minimizar los costos involucrados, en la práctica es muy efectivo, ya que intenta reducir al máximo el nivel de inventario de cada artículo y su uso está muy difundido, debido a su capacidad de adaptación a los cambios.

Objetivos

Los objetivos fundamentales del MRP son los siguientes [11]:

- Asegurar la disponibilidad de materiales, componentes y artículos, según el plan de producción de la empresa y la demanda externa
- Mantener el mínimo nivel de inventario posible
- Indicar las cantidades y los momentos en donde se deben realizar las actividades de ordenamiento o producción de cada ítem, para satisfacer la demanda, tanto interna como externa

Se usa la palabra ítem en vez de artículo para no hacer diferencias entre artículos con demanda externa o demanda interna. El procedimiento de MRP supone que la demanda de cada artículo es determinística, y el horizonte de planeación es finito, y considera el tiempo de forma discreta, o sea que se asemeja a una política de revisión periódica.

Formulación

Básicamente, el procedimiento de MRP puede considerarse como un algoritmo que necesita de tres entradas [11]:

- **Plan Maestro de Producción** (**MPS** en inglés): Expresa cuanta cantidad es necesaria de cada ítem y en cada momento o período. Generalmente estos valores son calculados mediante métodos de pronósticos, teniendo en cuenta la demanda externa, interna y los stock de seguridad.

- **Lista de Materiales** (**BOM** en inglés): Contiene la información de cómo está compuesto cada ítem, además de información necesaria de cada uno de ellos, como por ejemplo los tiempos de entrega. Desde el punto de vista del cálculo de MRP interesa saber como se relacionan cada uno de los artículos desde le punto de vista de la demanda y los tiempos de entrega de cada uno de ellos.

- **Registro de Inventario**: Es la información del nivel de inventario de cada ítem en el período inicial, así como de las cantidades a recibir en los próximos períodos que ya han sido planeadas.

Mediante estos tres datos es posible determinar la siguiente información, que es clave para el procedimiento de MRP:

- **Nivel de un ítem**: Es una forma de clasificar los ítems de una manera jerárquica. Para explicar su significado, es más fácil hacerlo mediante un ejemplo [11]. Las filas y la columnas de la matriz representan a los artículos, y el elemento a_{ij} expresa la cantidad necesaria del artículo j por cada unidad del artículo i. En el siguiente ejemplo los ítems están etiquetados como I, II, A, B, C, D, E, F y G.

	I	II	A	B	C	D	E	F	G

I			2		1				
II				1		1	3		
A				1				2	
B					2		1		
C								1	3
D				2	1				
E									
F									
G									

Los niveles de los distintos ítems son:

Nivel 0: I y II
Nivel 1: A, D
Nivel 2: B
Nivel 3: C y E
Nivel 4: F y G

Los ítems E, F y G se denominan materiales, debido a que no generan demanda de ningún otro ítem del sistema.

- **Requerimientos Brutos** (***Gross Requirements***): Indica los requerimientos o demanda de cada uno de los artículos, después que se ha establecido la demanda externa y la influencia de cada artículo sobre el resto, mediante la información contenida en el BOM.

- **Requerimientos Netos** (***Net Requirements***): Expresa la demanda de cada uno de los artículos, luego que se han restado de los requerimientos brutos, las ordenes planeadas de cada uno de los ítems y la cantidad inicial en stock.

El procedimiento de MRP, comienza por los ítems de los niveles inferiores, o sea desde los artículos finales, y termina con el nivel correspondiente a los artículos denominados materiales, o sea aquellos artículos que no están compuestos por ningún otro.

La fundamentación de esta lógica de proceso es muy sencilla: solamente luego de determinar el plan de ordenamiento para los artículos de un nivel $k \geq 0$, se puede tener información sobre los requerimientos o demanda de los artículos del nivel $k + 1$, ya que la demanda de los artículos del nivel $k + 1$, depende de la demanda de los artículos en los niveles 1,2,...k. Notar que los artículos de un mismo nivel no están relacionados desde el punto de vista de la demanda.

Antes de mostrar el algoritmo de MRP, presentaremos el último detalle importante del procedimiento.

Después que se ha determinado la demanda o los requerimientos netos de un ítem, se procede a determinar el plan de ordenamiento para ese artículo. Este plan se obtiene mediante la aplicación de una política de stock para el artículo. Dada las características del problema, lo más lógico *a priori* parecería utilizar el algoritmo de Wagner-Whitin, que determina una política de stock óptima en el caso de demanda determinística y revisión periódica. Sin embargo, se debe observar, que si bien se logra una optimización por niveles del problema, no se obtiene la solución óptima para el problema global, que involucra todos los artículos de cada uno de los niveles.

En la práctica, además de utilizar el algoritmo de Wagner-Whitin, se utilizan otras políticas de stock que han dado buenos resultados globales en la práctica, como por ejemplo *Lot-For-Lot* (L4L), que indica ordenar la cantidad demandada cada vez, manteniendo un nivel de inventario nulo, lo cual puede ser ventajoso en situaciones en donde la demanda y el tiempo de suministro están determinados de forma precisa.

Luego del algoritmo se presentaran distintas heurísticas de políticas de stock, que se utilizan muy a menudo, como reglas de ordenamiento en el procedimiento de MRP.

Algoritmo de MRP

Teniendo en cuenta las definiciones anteriores, el algoritmo del procedimiento de MRP se puede resumir en el siguiente pseudocódigo:

```
Entrada: MPS, BOM, Registro de Inventario
Salida: Plan de MRP
Comienzo
      Cálculo de los niveles
      M := máximo nivel
      Para cada nivel k = 0.. M
            Para cada artículo a del nivel k
                  Determinar los requerimientos brutos del artículo a
                  Determinar los requerimientos netos del artículo a
                  Determinar el plan de ordenamiento del artículo a
            Fin Para
      Fin Para
Fin
```

El cálculo de los niveles, se puede hacer fácilmente a partir de la información del BOM, y teniendo en cuenta la regla de que si un ítem *a* determina la demanda o está compuesto por un artículo *b*, entonces el nivel de *b* debe ser mayor que el nivel de *a*.

Los requerimientos brutos de cada artículo se obtienen a través de la demanda externa, que es una información contenida en el MPS, y de la demanda influenciada por los artículos de los niveles superiores, que figuran en el BOM. Los requerimientos netos se obtienen a partir de los brutos, restando en los períodos que corresponda las ordenes planeadas con anterioridad, que también es una información que está en el MPS, y la cantidad de inventario inicial.

Para determinar el plan de ordenamiento, es necesario saber la política de stock que se debe aplicar al artículo, así como los valores de costos y el tiempo de entrega, que es información que suele estar contenida en el BOM.

Lo que resta entonces es describir las distintas reglas de ordenamientos o políticas de stock, que se aplican con mayor frecuencia para el procedimiento de MRP a los distintos artículos y en los distintos niveles. Se puede utilizar una política distinta para cada uno de los artículos, o para cada uno de los niveles, no hay ningún tipo de restricción en el mecanismo de MRP, y la elección depende de la naturaleza de comportamiento de cada artículo con respecto a la variabilidad de la demanda y del tiempo de suministro.

Políticas de Inventario para MRP

Para el problema de inventario de demanda determinística y revisión periódica, la política óptima determina cuanto y cuando se debe ordenar para satisfacer la demanda aun costo mínimo. La política óptima para ese caso, se obtiene mediante la aplicación del algoritmo de Wagner-Whitin, siempre y cuando se cumplan las condiciones necesarias, que se pueden consultar en la sección 1.4.1.2 de este documento. Para el caso de MRP estamos dentro de estas condiciones ya que en la mayoría de los casos se asumen funciones de costos lineales.

Como se mencionó en al final de la sección 3.3.3, cuando se considera el problema desde el punto de vista global, y no por niveles, el uso del algoritmo de Wagner-Whitin no asegura la optimalidad en cuanto a la minimización de los costos. Si en cambio, en la práctica, se ha usado una cantidad importante de heurísticas, que proporcionan una política de stock, que para determinadas situaciones logran un buen resultado con respecto a los costos involucrados. A continuación se brindan algunas de las políticas heurísticas de las que se ha logrado conocimiento, y que figuran en la mayoría de la bibliografía.

Heurístico del Silver-Meal

El método de Silver-Meal consiste en determinar el número de períodos para los cuales se acumulara la demanda, a incluir en una orden o producción de un determinado período. El heurístico balancea el costo fijo de ordenar y el costo constante de mantener, para brindar una aproximación al plan de ordenamiento óptimo. Los períodos en los cuales son liberadas las ordenes, se denominan períodos de decisión. Al comienzo, el primer período es de decisión, los demás períodos de decisión los determina el procedimiento de cálculo. Los cálculos son los siguientes:

1. Calculamos el costo total TC para el primer período como $TC(1) = K$, donde K es el costo fijo de ordenar. El costo promedio AC para el primer período es $AC(1) = K/1 = K$.

2. La demanda del período $j + 1$ se incluye en la orden del período de decisión k si $AC(j + 1) \leq AC(j)$ comenzando con $j = 1$. Si esto no es así, el período $j + 1$ se vuelve el próximo período de decisión. El cálculo de TC y AC para el período j se obtiene de la siguiente forma:

$$TC(j) = K + \sum_{i=k}^{j} i.h.d_i$$

$$AC(j) = \frac{TC(j)}{j}$$

donde k es el período de decisión actual ($k = 1$ al comienzo), y $j > k$, h es el costo unitario de mantenimiento en inventario, igual para todos los períodos, y d_i es la demanda del período i.

Hasta aquí se supuso un tiempo de entrega $L = 0$. En el caso en que $L > 0$, los períodos de decisión, o sea en los que se debe ordenar, son los períodos $i - L$, en donde i es un período de decisión con $L = 0$. Si $i – L$ es negativo, se puede suponer que el tiempo de entrega es instantáneo en este caso, para poder aplicar el método.

Tamaño de Lote Fijo (LFS)

Esta política consiste en ordenar, cuando es necesario, o sea cuando el nivel de inventario es menor a la demanda o requerimiento actual, una cantidad fija. Más formalmente, sea I_{i-1} el nivel de inventario al inicio del período i ($I_0 = 0$). Si $I_{i-1} < d_i$ entonces se realiza una orden en el período $j = i - L$ por la cantidad C. Si j <= se considera que el tiempo de entrega es instantáneo, o que hay un recibo planeado para ese período, para que sea factible el plan.

Lote a Lote (L4L)

La firma de esta política, es ordenar en cada período la cantidad necesario. De esta manera el nivel de inventario es nulo, y por lo tanto el costo de mantener en inventario es nulo. Al contrario de lo que pueda parecer, esta política es muy efectiva en los contextos de producción *just-in-time* o *JIT* de sus siglas en inglés, en donde los niveles de demanda y tiempos de suministros se conocen con exactitud. De todas maneras los costos pueden ser elevados si el costo fijo o de preparación de un a orden es alto, y la demanda de todos los períodos es positiva. En este último caso se puede extender la forma de la política, ordenando cada vez una cantidad igual a la suma de la demanda de una cantidad fija de períodos.

Método de Menor Costo Unitario (LUC)

Similar al heurístico de Silver-Meal, el método de menor costo unitario, acumula la demanda de períodos sucesivos, mientras se cumpla cierta condición. Este método tiene en cuenta el costo fijo o de preparación, y el costo de mantener en inventario, y la forma de la política es la siguiente. Sea K el costo fijo de ordenar, y h_{ij} el costo unitario acumulado de mantener en inventario desde el período i al período j, y sea $i = 1$ el primer período de decisión, entonces se debe acumular la demanda del período $k \geq 2$, siempre que se cumpla:

$$CU(k) = \frac{K + \sum_{j=i+1}^{k>i} h_{ij-1} d_j}{d_{ik}} \leq CU(k-1)$$

En donde $CU(1) = K/d_1$. El proceso comienza nuevamente en el período j, que no cumple dicha condición. Cuando el tiempo de entrega L es positivo, se debe realizar la orden en el período $j = i - L$, si i es un período de decisión. Si $j \leq 0$, se puede considerar que el tiempo de entrega es nulo, o que hay una orden asignada para el período, para que el plan determinado sea factible.

Método de Menor Costo Total (LTC)

La idea del método es incluir la demanda de períodos consecutivos mientras el costo acumulado de mantenimiento por unidad de artículo no supere el costo fijo de ordenar K.
Determinamos el costo unitario de mantenimiento para el período 1 como $CUM(1) = 0$. Para un período j:

$$CUM(j) = h_{ij-1} d_j + CUM(j-1)$$

en donde i es el período en el cual se liberará la orden, en el primer caso $i = 1$. El j que se busca es aquel período que cumple:

1. $\left| CUM(j) - K \right| < \left| CUM(j+1) - K \right|$
2. $\left| CUM(j) - K \right| < \left| CUM(j-1) - K \right|$

Esto indica que se debe liberar una orden en le período $i - L > 0$ por la cantidad d_{ij}.
Si $i - L \leq 0$ se considera un recibo asignado para el período j, con los costos asociados del período 1 del plan.

Método de Balance de Parte (PPB)

Al igual que en la mayoría de todos las procesos heurísticos de políticas de stock, el procedimiento se basa en acumular la demanda de períodos consecutivos, en este caso de la siguiente forma: se calcula primero el *EPP* (parte económica por períodos) del problema como $EPP = K/h$. Para determinar el tamaño del lote a ordenar en el período j procedemos de la siguiente forma: se calcula el *EEP* acumulado para los períodos $j+1$ (comenzando con $j = 1$) hasta k, como:

$$EPP_{ac} = \sum_{i=j+1}^{k} (i-1)d_i$$

El período k es aquel tal que EPP_{ac} de j a k es más cercano aritméticamente al *EPP* del problema comparado con $k - 1$ y $k + 1$.
Esto indica que debe liberarse una orden en el período $j - L$ por una cantidad d_{jk}. En el caso de que $j - L \leq 0$ se debe colocar un recibo asignado en el período j.
Como la orden satisface exactamente la demanda de los períodos $j..k$ la próxima orden debe ser para cumplir la demanda de los períodos $k + 1..q$, con un q a determinar de forma análoga a k, tomando como primer período esta vez $k + 1$, y la orden debe ser liberada en $k - L$.
Observar que en este caso se asume que el costo de mantener en inventario es igual para todos los períodos.

Cantidad de Ordenamiento Periódica (POQ)

Este método usa el estándar *EOQ* para calcular un número fijo de períodos para los cuales su demanda es incluida en cada orden. En los casos que la demanda de cada período es baja, los costos fijos son relativamente altos y que hay pocos niveles en el BOM, este método resulta en un costo total más bajo que el de L4L, porque combina los requerimientos de más de un período en una orden. El procedimiento es el siguiente:

1. Calcular el *EOQ* de manera estándar
2. Usar el resultado de *EOQ* para calcular N, el número de órdenes totales, dividiendo los requerimientos totales del artículo, *R* por EOQ.
3. Calcular el *POQ* dividiendo el número de períodos de planeación, entre N. Redondear el valor para obtener el valor entero correspondiente a *POQ*.
4. Comenzar con el primer período para el cual es necesaria una orden e incluir los siguientes períodos hasta el número de períodos que indica el *POQ*.

Este método no minimiza los costos totales pero usualmente es más económica que la decisión de ordenar en cada período o seleccionar un número fijo de períodos en los cuales ordenar.

Limitaciones y Extensiones de MRP

El procedimiento de MRP es muy utilizado en la práctica debido a su sencillez y a que resuelve con eficacia el problema de determinar las cantidades necesarias de cada uno de los artículos, para satisfacer la demanda externa e interna, y además es un mecanismo flexible, que permite ajustes en las cantidades y en los recibos de las ordenes.

A pesar de poseer estas buenas características, en algunas situaciones no es posible utilizar el procedimiento de MRP de forma directa debido a ciertas restricciones de la organización que no están contempladas en el procedimiento clásico de MRP. Algunas de estas limitaciones son:

- **Capacidad**: El proceso de MRP no tiene en cuenta explícitamente la capacidad de ordenamiento o producción de la organización. Una forma de lidiar con esta restricción es mediante el uso de ciertas políticas de stock para cada uno de los artículos. Por ejemplo el uso de la política de stock LFS, puede indicar la cantidad máxima que se puede ordenar o producir, de ese artículo en particular. Una forma de atacar este problema es asegurarse que las cantidades que figuran en el MPS son factibles, o mediante el uso del plan de capacidad que tiene en cuenta las restricciones de capacidad sobre cada artículo, en conjunción con el procedimiento de MRP.

- **Tiempos de Entrega**: El procedimiento de MRP asume que los tiempos de entrega de cada artículo, son valores constantes. En aquellas situaciones en donde el tiempo de entrega sea muy variable, el procedimiento de MRP debe ser ajustado con frecuencia, para contar con las cantidad de artículos necesarias en cada momento.

- **Robustez**: La forma en que está pensado el procedimiento de MRP, obliga a trabajar con los valores exactos del MPS. Esto significa que pequeños cambios en alguno de estos valores, produce resultados de MRP bastante diferentes [11].

Debido a estos inconvenientes, en las últimas décadas se han desarrollado algunas extensiones al procedimiento clásico de MRP. Este es el caso del Plan de Recursos de Producción, conocido como MRP II, que intenta integrar los problemas de capacidad de producción, junto con problemas de otras áreas funcionales de la organización, como por ejemplo las de Marketing y Contabilidad. Además incluye operaciones de pronósticos para el manejo de capacidad y requerimientos, operaciones de control de entrada y salida, etc. La idea fundamental del MRP II es clasificar los objetivos, en decisiones de corto, mediano y largo plazo.

Otra extensión conocida, es el caso del Plan de Recursos de la Empresa, o ERP de sus siglas en inglés. Este es un sistema apoyado fuertemente en la tecnología informática, basado en la integración de las distintas áreas de la empresa y el manejo centralizado de los datos.

. Conclusiones y Extensiones

Lo que este documento ha intentado, es brindar la información actualizada sobre los distintos problemas de inventario de uno y varios artículos, y los modelos y algoritmos para determinar las políticas óptimas en cada caso.

Como se puede observar a través de sus páginas, la cantidad de problemas y de modelos es lo suficientemente grande, por lo que se ha intentado reflejar la mayor cantidad de casos a los que se ha tenido acceso, teniendo en cuenta las limitaciones temporales necesarias para este tipo de trabajo, desarrollando una ardua tarea de selección y de búsqueda del material al que se ha podido acceder.

A manera de conclusión de este trabajo, se puede decir que han sido expuestos los principales modelos de inventario y las políticas de stock óptimas para cada caso, como por ejemplo es el caso de *EOQ* para la demanda determinística constante, el algoritmo de Wagner-Whitin para el caso de demanda determinística dinámica, y la política (s,S) para una gran variedad de problemas con demanda estocástica.
Lo que se puede observar desde un punto de vista general, es que la complejidad matemática de los problemas de inventario de un solo artículo, están relacionados con la forma de la demanda. Cuando la demanda es estocástica la complejidad matemática aumenta, al igual que la forma de las políticas óptimas, y los algoritmos desarrollados para encontrar las mismas. En el caso de varios artículos, los problemas suelen ser complejos desde el punto de vista de su dimensionalidad, sobre todo en el caso de demanda dependiente.

De lo anterior entonces resulta oportuno observar que la forma de la demanda se puede tomar como un nivel de abstracción en la modelización de los problemas de inventario, por lo cual, conviene en muchas situaciones considerar el comportamiento la demanda primero como determinista, y luego como estocástico.

Sin duda quedaron fuera del alcance de este documento, otros problemas de inventario no menos importantes, como por ejemplo, el caso de más de un depósito de inventario, lo que se conoce como *Multi-Echelon*, la consideración de tiempos de entrega estocásticos, el control de inventario de artículos deteriorables, y de inventario con remanufacturación y disposición final, al igual que problemas de inventarios relacionados a problemas de transporte y rutéo de vehículos, entre otros, lo cual podría ser perfectamente una extensión de este documento.

. Referencias

[1] Aggarwal A., Park J.K., 1993. *Improves Algorithms for Economic Lot Size Problems*. Operations Research 41(3), pp. 549-571.

[2] Arrow K., Harris T., Marschak J., 1951. *Optimal Inventory Policy*. Econometrica 19, pp. 250 – 272.

[3] Arrow K., Karlin S., Scarf H.E, 1958. *Studies in the Mathematical Theory of Inventory and Production*. Standord University Press, Standford, California, USA.

[4] Bázsa E., Iseger P.D., 2002. *Optimal Continuous Order Quantity (s,S) Policies*. Econometric Institute Report EI 2002-47, Erasmus University Rotterdam, The Netherlands. Web: http://www2.eur.nl/WebDOC/doc/econometrie/feweco20021219120649.pdf, 24/01/2006.

[5] Bertsekas D.P., 1976. *Dynamic Programming and Stochastic Control*. Mathematics in Science and Engineering Vol. 125, Academic Press, ISBN 0-12-093250-4.

[6] Beyer D., Sethi S.P., Taksar M., 1993. *Inventory Models with Markovian Demand and Costs Functions of Polynomial Growth*. Journal of Optimization Theory and Applications 98(2), pp. 281-323. Web: http://citeseer.ist.psu.edu/beyer96inventory.html, 28/05/2004.

[7] Beyer D., Sethi S.P., Sridhar R., 1997. *Stochastic Multi-Product Inventory Models with Limited Storage*. Faculty of Management, University of Toronto, Ontario, Canada. Web: http://citeseer.ist.psu.edu/169717.html, 28/05/2004.

[8] Florian M., Lenstra J.K., Rinnooy A.H.G., 1980. *Deterministic Production Planning: Algorithms and Complexity*. Management Science 26, pp. 669-679.

[9] Fogarty D.W., Blackstone J.H., Hoffmann T.R., 1991. *Production & Inventory Management.* 2nd ed., South Western Publishing Co., Cincinnati, Ohio, USA, ISBN: 0-538-07461-2.

[10]Gallego G., 2001. *Stochastic Demand*. Material del curso IEOR 4000: Production Management. Web: http://citeseer.ist.psu.edu/465276.html, 28/05/2004.

[11]Gallego G., 2001. *Material Requirements Planning (MRP)*. Material del curso IEOR 4000: Production Management. Web: http://citeseer.ist.psu.edu/493501.html, 28/05/2004.

[12]Gass S.I., Harris C.M. eds., 1996. *Encyclopedia of Operations Research and Management Science*. Kluwer, ISBN 0-7923-9590-5.

[13]Hillier F.S., Lieberman G.L., 1991. *Introducción a la Investigación de Operaciones*. McGraw-Hill, ISBN 968-422-993-3, pp. 687-732.

[14]Iyer A.V., Schrage L.E., 1992. *Analysis of the Deterministic (s,S) Inventory Problem*. Management Science 38(9), pp. 1299-1313.

[15]Prawda J.,1981. *Métodos y Modelos de Investigación de Operaciones*. *Vol. 2, Modelos Estadísticos*. Editorial Limusa, México, ISBN 968-18-1247-6.

[16]San José L.A., García-Laguna J., 2003. *An EOQ Model with Backorders and All-Units Discounts*., Top (11)2, pp. 253-274, Publiched by Sociedad de Estadística e Investigación Operativa, Madurid, España. Web: http://top.umh.es/top11203.pdf, 28/05/2004.

[17]Scarf H., 1959. *The Optimality of (S,s) Policies in the Dynamic Inventory Problem*. Mathematical Methods in the Social Sciences, pág 196-202, 1960, Vol. IV Stanford Mathematical Studies in the Social Sciences, Stanford University Press, Standford, California, USA.

[18]Segerstedt A., 1996. *Formulas of MRP*. International Journals of Production Economics 46-47, pp. 127-136.

[19]Sethi S.P., Cheng F., 1997. *Optimality of (s,S) Policies in Inventory Models with Markovian Demand*. Operations Research 45(6), pp. 931-939 Web: http://citeseer.ist.psu.edu/389903.html, 28/05/2004.

[20]Shaw D.X., Wagelmans A.P.M., 1995. *An Algorithm for Single-Item Capacitated Economic Lot-Sizing with Piecewise Linear Production Costs and General Holdings Costs*. Economic Institute Report 105, Erasmus University Rotterdam, Econometric Institute. Web: http://www.eur.nl/WebDOC/doc/econometrie/eeb19960111120009.ps, 26/01/2006

[21]Taha H.A., 1991. *Investigación de Operaciones*. 2da. edición, Alfaomega, México, D.F., ISBN 968-6223-25-8.

[22]Veinott A.,1966. *On the Optimality of (s,S) Inventory Policies: New Condition and a new Proof*. SIAM Journal on Applied Mathematics 14, pp. 1067-1083.

[23]Wagelmans A., van Hoesel S., Kolen A., 1992. *Economic Lot Sizing: An O(n logn) Alhorithm that runs inn Linear Time in the Wagner-Whitin case*. Operations Research 40(1), pp. 145-156.

[24]Wagner, H.M. and T.M. Whitin. 1959. *Dynamic Version of the Economic Lot Size Model*. Management Science 5(1), pp. 89-96.

[25]Zheng Y.S., Federgruen A., 1991. *Finding Optimal (s,S) Policies is about as simple as evaluating a single policy*. Operations Research 39(4), pp. 654-665.