Equilibrio General en Dimensión Infinita

Marina Paola Gardella Oddone

Programa de Posgrado en Ingeniería Matemática
Facultad de Ingeniería, Facultad de Ciencias
Universidad de la República

Montevideo – Uruguay
Junio de 2019

Equilibrio General en Dimensión Infinita

Marina Paola Gardella Oddone

Tesis de Maestría presentada al Programa de Posgrado en Ingeniería Matemática, Facultad de Ingeniería de la Universidad de la República, como parte de los requisitos necesarios para la obtención del título de Magister en Ingeniería Matemática.

Director de tesis:
PhD. Prof. Elvio Accinelli

Director académico:
PhD. Prof. Pablo Monzón

Montevideo – Uruguay
Junio de 2019

Gardella Oddone, Marina Paola

Equilibrio General en Dimensión Infinita / Marina Paola Gardella Oddone. - Montevideo: Universidad de la República, Facultad de Ingeniería, Facultad de Ciencias, 2019.

IX, 0 p. 29, 7cm.

Director de tesis:

Elvio Accinelli

Director académico:

Pablo Monzón

Tesis de Maestría – Universidad de la República, Programa de Ingeniería Matemática, 2019.

1. Equilibrio General, 2. Óptimos de Pareto, 3. Primer Teorema de Bienestar Social, 4. Segundo Teorema de Bienestar Social. I. Accinelli, Elvio. II. Universidad de la República, Programa de Posgrado en Ingeniería Matemática. III. Título.

INTEGRANTES DEL TRIBUNAL DE DEFENSA DE TESIS

PhD. Prof. Juan Dubra

PhD. Prof. Ernesto Mordecki

PhD. Prof. Franco Robledo

Montevideo – Uruguay
Junio de 2019

Para mi mamá

Agradecimentos

Las palabras no van a alcanzar nunca para expresar la gratitud que siento hacia todas las personas que han acompañado este proceso. Sin embargo, vale la pena hacer el intento.

A mi mamá, por haber sido siempre un pilar en mi vida. Por saber estar presente en cada momento.

A mis hermanos. A Euse por siempre impulsarme a mejorar. A Juampi por ser la dulzura más dulce que conozco.

A Cami, por bancarme en todas y siempre estar cuando más la necesito.

A mi papá, porque sé que me apoya a pesar de no estar siempre de acuerdo con mis decisiones.

A Pablo, por la dedicación como Director Académico que ha puesto en este proyecto.

A Elvio, por la paciencia que me ha tenido a la hora de escribir esta tesis.

Por último, me gustaría agradecer el apoyo económico recibido para la realización de este trabajo por parte de la Comisión Académica de Posgrados, la Comisión Sectorial de Investigación Científica y la Universidad Autónoma San Luis Potosí.

RESUMEN

Este trabajo está dedicado el estudio de la Teoría de Equilibrio General en economías de intercambio de dimensión infinita. Para ello, se intenta caracterizar las principales dificultades que aparecen en este contexto y, posteriormente, se presentan los teoremas que constituyen el núcleo de esta teoría: el Primer Teorema de Bienestar Social, el Segundo Teorema de Bienestar Social, un teorema de existencia de equilibrio y un estudio sobre la existencia de óptimos de Pareto. Finalmente, se exhiben ejemplos de economías en las cuales no es posible probar la existencia de equilibrio.

Palabras claves:
Equilibrio General, Óptimos de Pareto, Primer Teorema de Bienestar Social, Segundo Teorema de Bienestar Social.

ABSTRACT

This work is dedicated to the study of the Theory of General Equilibrium in exchange economies of infinite dimension. To do this, we try to characterize the main difficulties that appear in this context and, subsequently, the theorems that constitute the core of this theory are presented: the First Social Welfare Theorem, the Second Social Welfare Theorem, an equilibrium existence theorem and a study on the existence of Pareto optima. Finally, there are examples of economies in which it is not possible to prove the existence of equilibrium.

Keywords:
General Equilibrium, Pareto Optima, First Social Welfare Theorem, Second Social Welfare Theorem.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

¿Por qué es necesario introducir espacios de dimensión infinita? ¿Acaso el mundo no es finito-dimensional? La teoría clásica en dimensión finita permite modelar economías donde el consumo o la producción son contingentes en el tiempo, siempre que la cantidad de estados de la naturaleza y de períodos considerados sea finita. Sin embargo, para obtener modelos realistas de la economía, es necesario considerar economías dinámicas (intertemporales) e inciertas. Existen aspectos fundamentales que los modelos estáticos y determinísticos no logran capturar, resultando inadecuados para explicar la realidad. Los modelos dinámicos, tanto si el tiempo se considera discreto o no, así como los modelos que consideran la incertidumbre propia de los mercados, requieren la introducción de espacios vectoriales de dimensión infinita.

Para ilustrar la forma en la diferentes espacios aparecen naturalmente en la economía, se describen a continuación tres problemas de modelación que dan lugar a los mismos.

- **Problemas de asignación intertemporal.** La forma más natural de pensar los problemas de asignación intertemporal es pensar en canastas de bienes como secuencias. Si se considera, por ejemplo, el consumo de un bien en un horizonte infinito pero con períodos de consumo discretos, las canastas de consumo se pueden respresentar como sucesiones de números reales acotadas. De esta forma, surge naturalmente considerar el espacio $l_\infty(\mathbb{R})$ de sucesiones reales acotadas donde, un elemento $x \in l_\infty(\mathbb{R})$ simboliza una secuencia de consumo y $x(n)$ representa el consumo en el período n-ésimo. Asimismo, se puede modelar el consumo y la producción en tiempo continuo en lugar de considerar períodos discretos. En este caso surgen los espacios de funciones medibles acotadas $L_\infty([0, T])$ si se considera un horizonte temporal finito o bien, $L_\infty([0,+\infty))$ si se considera un horizonte infinito. En cualquiera de ambos casos, un elemento $x \in L_\infty$ representa un flujo de consumo y $x(t)$ el consumo en el instante t.

- **Problemas de asignación bajo incertidumbre.** Este es el tipo de problemas que surgen cuando los bienes dependen del estado de la naturaleza, por ejemplo, como suele suceder en el campo de las finanzas. En este caso, surge naturalmente considerar que las canastas están formadas por variables aleatorias sobre cierto espacio de probabilidad (Ω, A, P). En la mayoría de los modelos de asignación bajo incertidumbre, se requiere a su vez que dichas variables aleatorias tengan esperanza y varianza finita, dando lugar al espacio de funciones cuadrado integrables $L_2(\Omega, A, P)$. En este caso, si $X \in L_2(\Omega, A, P)$, $X(s)$ se interpreta como el consumo si el estado s ocurre.

- **Modelos con diferenciación de bienes.** Cuando la hipótesis de bienes homogéneos no se cumple, se tiene una economía en la que los bienes se encuentran diferenciados a través de una variedad de características. Se suele considerar el espacio $M(K)$ de medidas de Borel positivas y acotadas sobre un espacio métrico K como el espacio de bienes. En este contexto, K representa las características de los bienes. Un elemento $\mu \in M(K)$ es una canasta que representa el consumo de dichas características en distintas cantidades. En efecto, si $B \subset K$ es un conjunto Borel medible formado por ciertas características, $\mu(B)$ representa la cantidad de las mismas que es consumida en la canasta μ.

El presente documento pretende ilustrar la Teoría de Equilibrio General para economías de intercambio definidas sobre espacios de bienes de dimensión infinita, como los mencionados.

Con este fin, se presenta un primer capítulo sobre los fundamentos matemáticos requeridos para abordar la teoría. Dicho capítulo es opcional al lector, quedando a su consideración si leerlo previo al desarrollo del documento o remitirse a él en caso de ser necesario. Asimismo, cabe destacar que las pruebas de la mayor parte de los resultados citados fueron omitidas, recomendándose su lectura o ampliación en las referencias [4] y [13].

Posteriormente se expone una breve reseña de las principales dificultades que presenta el desarrollo de la teoría en dimensión infinita. La mayor parte de ellas son presentadas en contraposición al caso finito-dimensional, sin embargo, el conocimiento de la Teoría de Equilibrio General en $\mathbb{R}^n$ no es un requisito para su lectura.

A continuación se presenta un capítulo donde se resume el modelo a trabajar así como las principales definiciones que deben manejarse. Este trabajo pretende desarrollarse con la mayor generalidad posible, por lo que las hipótesis sobre las bases de la economía que se presentan en dicho capítulo son básicas. En otros apartados será necesario adicionar nuevos supuestos que serán introducidos con su debida justificación para sobrellevar dificultades concretas.

Seguidamente, se desarrolla el núcleo central de este documento en dos capítulos, destinados a los principales teoremas de la Teoría de Equilibrio General. El primero de ellos trata sobre los principales teoremas de la Economía de Bienestar y se encuentra subdividido en dos secciones. La primer sección aborda el Primer Teorema de Bienestar Social, que pretende dar condiciones sobre las cuales una asignación de equilibrio constituye un óptimo de Pareto. La siguiente sección se encuentra destinada al Segundo Teorema de Bienestar Social, que se enfoca en hallar condiciones bajo las cuales un óptimo de Pareto puede ser soportado por un precio, o, en otras palabras, cuándo existe un precio que conjuntamente con dicho óptimo conforman un equilibrio.

El siguiente capítulo se orienta hacia las pruebas de existencia. Los principales conceptos que surgen en esta teoría son el de equilibrio y el de óptimo de Pareto. El primer teorema de existencia que se expone refiere a la existencia de equilibrio competitivo en una economía de intercambio en dimensión infinita. El siguiente, sienta las bases para garantizar la existencia de óptimos de Pareto generales, que van más allá de la asignación de Pareto trivial que consiste en asignar todos los bienes a un consumidor.

El capítulo final está reservado a la exposición de ejemplos que reflejan la teoría. Todos ellos pretenden mostrar que las hipótesis manejadas en el presente trabajo son necesarias. Para ello, se presentan diversos contraejemplos obtenidos al quitar alguno de los supuestos manejados. Por último, se presentan algunos comentarios finales del documento.

Capítulo 2

Fundamentos Matemáticos

El objetivo de este capítulo es introducir los intrumentos matemáticos que serán necesarias para el desarrollo posterior del documento. El abordaje de economías de dimensión infinita requiere de ciertos conocimientos de Análisis Funcional que serán desarrollados en esta sección.

2.1. Espacios Vectoriales Topológicos

2.1.1. Topologías lineales

Definición. 1.1 *Una topología τ en un espacio vectorial X es una topología lineal si las operaciones de suma y multiplicación por escalares son continuas respecto a τ. En dicho caso, el par (X, τ) se denomina espacio vectorial topológico.*

Las topologías lineales son invariantes por traslaciones. En particular, si X es un espacio vectorial topológico y $a \in X$, todo entorno de a es de la forma $a+V$ donde V es un entorno de 0. En otras palabras, el sistema de entornos en 0 determina el sistema de entornos en todo punto de X por traslación.

A continuación se describen algunas propiedades algebraicas que pueden presentar los subconjuntos de un espacio vectorial.

Definición. 1.2 *Un subconjunto A de un espacio vectorial X es:*

- ***convexo*** *si el segmento que une dos puntos cualesquiera $x, y \in A$ está contenido en A,*

- ***absorbente*** *si para cualquier* $x \in A$ *existe* $\alpha_0 > 0$ *tal que* $\alpha x \in A$ *para todo* $0 \leq \alpha \leq \alpha_0$*,*
- ***balanceado*** *si para cualquier* $x \in A$*, el segmento que une* x *y* $-x$ *está contenido en* A*,*
- ***simétrico*** *si* $x \in A$ *implica* $-x \in A$*.*

El siguiente teorema caracteriza la estructura de las topologías vectoriales.

Teorema. 1.3 *Si* (X, τ) *es un espacio vectorial topológico, existe una base* B *de entornos en 0 tal que:*

1. *Cada* $V \in B$ *es absorbente,*
2. *Cada* $V \in B$ *es balanceado,*
3. *Cada* $V \in B$ *es cerrado,*
4. *Para cada* $V \in B$ *existe* $W \in B$ *tal que* $W + W \subset V$*.*

2.1.2. Teoremas de separación

En primer lugar se debe definir formalmente qué se entiende por separación. Para ello, se procede primeramente a definir el dual algebraico y el dual topológico de un espacio vectorial.

Definición. 1.4 *Si* X *un espacio vectorial, se define el* ***dual algebraico*** X^* *de* X *como el espacio vectorial de todos los funcionales lineales en* X*. Por otro lado, si* (X, τ) *es un espacio vectorial topológico, se define el* ***dual topológico*** X' *de* X *como el espacio vectorial de todos los funcionales lineales* τ*-continuos en* X*.*

El dual algebraico no tiene en cuenta consideraciones topológicas y resulta un espacio más grande que el dual topológico.

Definición. 1.5 *Sea* X *un espacio vectorial. Un* ***hiperplano*** *es un conjunto de la forma* $[f = \alpha] := \{x \in X \text{ tal que } f(x) = \alpha\}$ *donde* f *es un funcional lineal no nulo. Un hiperplano define dos* ***semi-espacios estrictos****:* $[f < \alpha]$ *y* $[f > \alpha]$*, y también define dos* ***semi-espacios débiles****:* $[f \leq \alpha]$ *y* $[f \geq \alpha]$*.*

Definición. 1.6 *Se dice que el hiperplano* $[f = \alpha]$ ***separa*** *dos conjuntos* A *y* B *si se verifica alguna de las siguientes afirmaciones: o bien* $A \subset [f \geq \alpha]$ *y* $B \subset [f \leq \alpha]$*, o bien* $B \subset [f \geq \alpha]$ *y* $A \subset [f \leq \alpha]$*.*

Se dice que el hiperplano $[f = \alpha]$ ***separa estrictamente*** *dos conjuntos* A *y* B *si se verifica alguna de las siguientes afirmaciones: o bien* $A \subset [f > \alpha]$ *y* $B \subset [f < \alpha]$*, o bien* $B \subset [f > \alpha]$ *y* $A \subset [f < \alpha]$*.*

Se dice que el hiperplano $[f = \alpha]$ ***separa fuertemente*** *dos conjuntos* A *y* B *si existe* $\varepsilon > 0$ *tal que se verifica alguna de las siguientes afirmaciones: o bien* $A \subset [f \geq \alpha + \varepsilon]$ *y* $B \subset [f \leq \alpha]$*, o bien* $B \subset [f \geq \alpha + \varepsilon]$ *y* $A \subset [f \leq \alpha]$*.*

Las definiciones precedentes no hacen uso de la topología del espacio, son meramente algebraicas.

El primer teorema importante de separación es bastante general: es válido en cualquier espacio vectorial y no requiere de hipótesis topológicas, solamente asume una propiedad puramente algebraica.

Definición. 1.7 *Sea* X *un espacio vectorial y* $x \in X$*. Se dice que* x *es un* ***punto interno*** *de un conjunto* A *si existe un conjunto absorbente* B *tal que* $x + B \subset A$*, o equivalentemente, si el conjunto* $A - x$ *es absorbente.*

Observación. 1.8 *Es claro que si* X *es un espacio vectorial topológico, en virtud del Teorema 1.3, los puntos interiores son puntos internos. Sin embargo, en general, un punto interno no tiene por qué ser interior.*

Teorema. 1.9 *Dados dos subconjuntos convexos, no vacíos y disjuntos de un espacio vectorial, si uno de ellos tiene un punto interno, entonces existe un funcional lineal no nulo que los separa.*

Ahora bien, muchas veces resulta deseable obtener conclusiones topológicas, principalmente, se pretende en muchos casos la continuidad del funcional lineal que realiza la separación. Para ello, se deben imponer condiciones topológicas. En virtud de la Observación 1.8, si uno de los conjuntos convexos tiene interior topológico no vacío, aplicando el Teorema 1.9, existe un funcional lineal -no necesariamente continuo- que los separa. Ahora bien, se procede a presentar condiciones que garanticen la continuidad de dicho funcional.

Lema 1.10 *Si un funcional lineal en un espacio vectorial topológico está acotado superior o inferiormente en un entorno de 0, entonces es continuo.*

Lema 1.11 *Si A es un subconjunto no vacío de un espacio vectorial topológico X y f es un funcional lineal que satisface $f(x) \geq \alpha$ para todo $x \in A$, entonces $f(x) > \alpha$ para todo x en el interior topológico de A.*

Combinando los dos resultados precedentes, se obtiene:

Corolario. 1.12 *Si A es un subconjunto con interior topológico no vacío de un espacio vectorial topológico X y f es un funcional lineal que satisface $f(x) \geq \alpha$ para todo $x \in A$, entonces f es continuo.*

Ahora bien, la versión topológica del Teorema 1.9 resulta:

Teorema. 1.13 (Teorema de Hahn Banach) *Sea X un espacio vectorial topológico. Si A y B son subconjuntos convexos, no vacíos, disjuntos y uno de ellos tiene interior no vacío, entonces existe un funcional lineal no nulo y continuo que los separa.*

Si bien no será utilizado más adelante, existe una versión más fuerte del Teorema 1.13, que se obtiene a partir del siguiente lema.

Lema 1.14 *Un funcional lineal no nulo y continuo en un espacio vectorial topológico separa dos conjuntos no vacíos si y sólo si separa sus clausuras.*

Corolario. 1.15 *Sea X un espacio vectorial topológico. Si A y B son subconjuntos convexos, no vacíos, disjuntos y uno de ellos tiene interior no vacío, entonces existe un funcional lineal no nulo y continuo que separa $\bar{A}$ y $\bar{B}$, donde $\bar{A}$ y $\bar{B}$ denotan las clausuras de A y B respectivamente.*

Para obtener teoremas de separación con conclusiones más fuerte que la separación simple, resulta necesario imponer condiciones más fuertes. Una de ellas, es que el espacio vectorial sea localmente convexo.

Definición. 1.16 *Un espacio vectorial topológico es **localmente convexo** si existe una base de entornos de 0 formada por conjuntos convexos.*

Si A y B son conjuntos convexos, no vacíos en un espacio X localmente convexo y uno de ellos es compacto y el otro cerrado, entonces se tiene que $0 \notin A - B$ (pues A y B son disjuntos) y $A - B$ es un convexo cerrado. Como X es un espacio vectorial localmente convexo y $(A-B)^C$ es un entorno de 0, existe un entorno V abierto, balanceado y convexo de 0 contenido en $(A-B)^C$. Aplicando el Teorema 1.13 a los conjuntos $A-B$ y V, y tomando como $\varepsilon = f(v_0)$ para cierto v_0 in V, se obtiene el siguiente resultado de separación fuerte:

Teorema. 1.17 *Si A y B son conjuntos convexos y no vacíos en un espacio vectorial localmente convexo y uno de ellos es compacto y el otro cerrado, entonces existe un funcional lineal no nulo y continuo que separa fuertemente A y B.*

Corolario. 1.18 *En un espacio vectorial topológico localmente convexo, si K es un conjunto no vacío, cerrado y convexo y $z \notin K$, entonces existe un funcional lineal no nulo y continuo que separa fuertemente K y z.*

2.1.3. Pares Duales

Definición. 1.19 *Un **par** consiste en dos espacios vectoriales (X, X') conjuntamente con un funcional bilineal $(x, x') \mapsto x \cdot x'$, de $X \times X'$ en $\mathbb{R}$.*

Definición. 1.20 *Un **par dual** es un par (X, X') de espacios vectoriales conjuntamente con un funcional bilineal $(x, x') \mapsto x \cdot x'$, de $X \times X'$ en $\mathbb{R}$ y que separa puntos de X y de X' (i.e. si $x \cdot x' = 0$ para todo $x' \in X'$ entonces $x = 0$ y si $x \cdot x' = 0$ para todo $x \in X$ entonces $x' = 0$).*

Debreu introdujo los pares duales en la economía para describir la dualidad entre bienes y precios. Según su interpretación, dado un par (X, X'), X representa el espacio de bienes, X' el espacio de precios y $x \cdot x'$ el costo de la canasta x a precios x'.

Dado un par (X, X'), existen varias topologías τ Hausdorff (en general, todas las topologías consistentes con un par dual son Hausdorff) y localmente convexas tales que el dual topológico de (X, τ) es precisamente X'. Estas topologías son llamadas **topologías consistentes** con el par dual (X, X') y, dentro de éstas, las más importantes son la topología débil y la topología de Mackey, que se proceden a definir.

Definición. 1.21 *La **topología débil** $\sigma(X, X')$ en X es la menor topología respecto a la cual los mapas $x \mapsto x \cdot x'$ son continuos para todo $x' \in X'$. En términos de redes, $\{x_n\}$ converge a x en la topología $\sigma(X, X')$ si y sólo si $\{x_n \cdot x'\}$ converge a $x \cdot x'$ para todo $x' \in X'$.*

*La **topología débil** $\sigma(X', X)$ en X' es la menor topología respecto a la cual los mapas $x' \mapsto x \cdot x'$ son continuos para todo $x \in X$. En términos de redes, $\{x'_n\}$ converge a x' en la topología $\sigma(X', X)$ si y sólo si $\{x \cdot x'_n\}$ converge a $x \cdot x'_n$ para todo $x \in X$.*

Definición. 1.22 *La **topología de Mackey** $\tau(X, X')$ en X es la topología para la cual la convergencia $x_n \to x$ significa que $x_n \cdot x' \to x.x'$ uniformemente para x' en cualquier subconjunto de X' $\sigma(X', X)$-compacto. En otras palabras, $\{x_n\}$ converge a x si y sólo si para todo $K \subset X'$ $\sigma(X', X)$-compacto se cumple que $\sup_{x' \in K} |x_n \cdot x' - x \cdot x'|$ tiende a 0 cuando n tiende a infinito.*

*La **topología de Mackey** $\tau(X', X)$ en X' es la topología para la cual la convergencia $x'_n \to x'$ significa que $x \cdot x'_n \to x \cdot x'_n$ uniformemente para x en cualquier subconjunto de X $\sigma(X, X')$-compacto. En otras palabras, $\{x'_n\}$ converge a x' si y sólo si para todo $K \subset X$ $\sigma(X, X')$-compacto se cumple que $\sup_{x \in K} |x'_n \cdot x - x' \cdot x|$ tiende a 0 cuando n tiende a infinito.*

Ambas topologías son Hausdorff y localmente convexas y verifican que, dentro de las topologías Hausdorff, localmente convexas y consistentes con un par dual, la topología débil es la más débil y la topología de Mackey es la más fuerte. Más aún, se tiene que:

Teorema. 1.23 *Todas las topologías localmente convexas consistentes con un par dual tienen los mismos conjuntos cerrados convexos.*

En virtud de este último Teorema, dado un par dual, se puede referir a conjuntos convexos cerrados sin especificar la topología compatible siempre que ésta sea localmente convexa.

Un aspecto crucial de la topología $\sigma(X', X)$ es que muchos subconjuntos de X' resultan compactos respecto a la misma, esto es el Teorema de Alaoglu:

Teorema. 1.24 (Teorema de Alaoglu) *Sea L un espacio vectorial topológico localmente convexo y sea W un entorno simétrico de 0. Entonces, el conjunto $\{p \in X' : |p \cdot w| \leq 1 \text{ para todo } w \in W\}$ es $\sigma(X', X)$-compacto.*

2.1.4. Espacios Reflexivos

Para introducir los espacios reflexivos, en primer lugar, se debe definir la topología fuerte $\beta(X, X')$ en X, siendo (X, X') un par.

Definición. 1.25 *La **topología fuerte** $\beta(X, X')$ en X es la topología para la cual la convergencia $x_n \to x$ significa que $x_n \cdot x' \to x \cdot x'$ uniformemente para x' en cualquier subconjunto de X' $\sigma(X', X)$-acotado*[1]*. En otras palabras, $\{x_n\}$ converge a x si y sólo si para todo $B \subset X'$ $\sigma(X', X)$-acotado se cumple que $\sup_{x' \in B} |x_n \cdot x' - x \cdot x'|$ tiende a 0 cuando n tiende a infinito.*

En las secciones precedentes, se consideró únicamente el dual L' de un espacio L. Si se considera el dual $(L')'$ del dual L' se obtiene el bidual de L. En este caso, para introducir la noción de reflexividad, será de interés considerar esta construcción al dotarla de la topología fuerte recién definida.[2]

Definición. 1.26 *Sea X un espacio vectorial topológico Hausdorff y localmente convexo y sea $X' = (X', \beta(X', X))$. Se define el **bidual fuerte** de X como el espacio $X'' = (X', \beta(X', X))'$ dotado con la topología $\beta(X'', X')$.*

Cada elemento $x \in X$ define una aplicación $J(x) : X' \to \mathbb{R}$ dada por: $J(x)(p) = p \cdot x$ para cada $p \in X'$. Esta aplicación es un funcional lineal continuo de X' en $\mathbb{R}$, por lo que $J(x) \in X''$. De esta forma, se obtiene una aplicación, llamada **evaluación** $J : X \to X''$ dada por $J(x)(p) = p \cdot x$. Por tanto, $J(X) \subset X''$. De las propiedades que puede tener J surgen los espacios reflexivos y semi-reflexivos.

Definición. 1.27 *Sea X un espacio vectorial topológico Hausdorff y localmente convexo y sea $J : X \to X''$ el mapa dado por $J(x)(p) = p \cdot x$. Se dice que X es:*

- ***semi-reflexivo*** *si J es sobreyectiva,*
- ***reflexivo*** *si J es un homeomorfismo sobreyectivo.*

El énfasis en este documento estará puesto sobre los espacios semi-reflexivos más que sobre los espacios reflexivos. En virtud de esto, algunas caracterizaciones de los espacios semi-reflexivos se presentan a continuación.

Teorema. 1.28 *Un espacio vectorial topológico Hausdorff localmente convexo X es semi-reflexivo si y sólo si se verifica alguna de las propiedades siguientes:*

[1]Se dice que un conjunto B es $\sigma(X', X)$-acotado si existe un entorno V de 0 en la topología $\sigma(X', X)$ y un real K tal que $B \subset kV$ para todo $k \geq K$.

[2]Esto tiene sentido ya que, la noción de reflexividad surgió en primer lugar para espacios normados. En estos espacios, la topología inducida por la norma coincide con la topología fuerte.

1. *X con la topología $\sigma(X, X')$ tiene la propiedad de Heine-Borel (i.e. los conjuntos acotados y cerrados son compactos).*

2. *$\beta(X', X) = \tau(X', X)$, es decir, $\beta(X', X)$ es una topología coherente con el par dual (X', X).*

2.2. Espacios de Banach

Todos los espacios de dimensión finita tienen una norma natural: la norma euclídea. La métrica inducida por esta norma hace de ellos espacios métricos completos. Los espacios de Banach generalizan estas propiedades a espacios de dimensión infinita.

Definición. 2.29 *Un **espacio normado** es un espacio vectorial X equipado con una norma $||\cdot|| : X \to \mathbb{R}$ que satisface:*

1. *$||x|| \geq 0$ y $||x|| = 0$ si y sólo si $x = 0$,*

2. *$||\alpha x|| = |\alpha|||x||$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ y $x \in X$,*

3. *$||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ para todo $x, y \in X$.*

Una norma induce una métrica d mediante la fórmula $d(x, y) = ||x - y||$. Las propiedades 1 y 2 de la definición de norma garantizan que las bolas de radio r alrededor de 0 son convexas, por lo tanto, se tiene que la topología generada por la métrica d, además de ser Hausdorff, es localmente convexa.

Definición. 2.30 *Se dice que un espacio métrico (X, d) es **completo** si toda sucesión de Cauchy contenida en X es convergente en X.*

Definición. 2.31 *Un **espacio de Banach** es un espacio normado que es completo respecto a la métrica inducida por la norma.*

2.2.1. Dualidad

La continuidad para aplicaciones entre espacios normados puede ser descripta mediante la proposición que se presenta a continuación.

Proposición. 2.32 *Sean X, Y espacios normados y sea $T : X \to Y$ un operador lineal. Entonces T es continuo si y sólo si es acotado respecto a la norma $||T|| = \sup_{||x|| \leq 1} ||Tx||$.*

Esta cualidad de los operadores continuos permite definir el dual topológico de un espacio normado de forma precisa.

Definición. 2.33 *El **dual respecto a la norma** X' de un espacio normado $(X, || \cdot ||)$ es el espacio $L(X, \mathbb{R})$ de operadores acotados de x en $\mathbb{R}$.*

El dual de un espacio normado resulta un espacio de Banach[3], en efecto, la norma dual es:

$$||p|| = \sup_{||x|| \leq 1} |p \cdot x| = \sup_{||x|| = 1} |p \cdot x|.$$

Ahora bien, ¿cómo se relaciona la topología inducida por la norma con las topologías presentadas en los anteriores capítulos? A continuación se presentan algunos resultados al respecto.

Teorema. 2.34 *Un operador lineal $T : X \to Y$ entre dos espacios normados X e Y es continuo en la topología iducida por la norma si y sólo si T es continuo con la topología débil.*

Teorema. 2.35 *Sea X un espacio normado y X' su dual respecto a la norma. Entonces, la topología de Mackey, la topología fuerte y la topología de la norma coinciden.*

2.2.2. Teorema de Bishop-Phelps

El Teorema de Bishop-Phelps afirma que, en un espacio de Banach, el conjunto de puntos soporte de un conjunto convexo y cerrado es denso en el borde. Antes de exponer este resultado, se definirán los conceptos clave para su entendimiento, así como su relación con la separación de conjuntos convexos.

Definición. 2.36 *Sea A un subconjunto no vacío de un espacio topológico X y sea f un funcional lineal continuo no nulo en X. Si f alcanza su máximo o*

[3] En general. si X es un espacio normado e Y es un espacio de Banach, entonces $L(X, Y)$ es un espacio de Banach.

*mínimo en A es un punto $x \in A$, se dice que f **soporta** A en x o que x es un **punto soporte** de A. Asimismo, si se define $\alpha = f(x)$, se dice que el conjunto A está soportado por el hiperplano $[f = \alpha]$ en x.*

Claramente, sólo los puntos del borde de un conjunto pueden ser puntos soporte. Sin embargo, no todo punto que esté en el borde es necesariamente un punto soporte. A continuación se presenta un teorema que caracteriza a los puntos con esta característica.

Teorema. 2.37 *Sea C un conjunto convexo de un espacio vectorial topológico localmente convexo y sea x en el borde de C. Si $x \in C$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *el conjunto C está soportado en x,*
2. *existe un cono convexo no denso con vértice en x que incluye C,*
3. *existe un cono abierto K con vértice en x tal que $K \cap C = \emptyset$,*
4. *existe un vector no nulo v y un entorno V de 0 tal que $x - \alpha v + z \in C$ implica $z \notin \alpha V$.*

Algunas de estas caracterizaciones han sido introducidas en la economía para garantizar la separación de convexos. Un análisis riguroso de su significado económico y su equivalencia se presenta en el Capítulo 5.2.

Ahora sí, se presenta el principal resultado de esta sección:

Teorema. 2.38 (Bishop-Phelps) *Sea C un conjunto convexo y cerrado de un espacio de Banach X. Entonces, el conjunto de puntos soporte de C es denso en el borde de C.*

El teorema 2.38 es válido únicamente en espacios de Banach, pues hace uso fuertemente de la propiedade de homogeneidad de la norma, no siendo posible su extensión incluso a espacios métricos.

En este sentido, en 7 se muestra la existencia de un subconjunto cerrado y convexo en un espacio completo y localmente convexo que no admite puntos soporte.

2.2.3. Ejemplos

Los espacios de Banach son considerados la clase más importante de espacios localmente convexos. A continuación se presenta una lista con algunos ejemplos de espacios de Banach.

- El espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ con la norma euclídea. Un caso particular es $\mathbb{R}$ con el valor absoluto $|\cdot|$.
- Los espacios L_p con $1 \leq p < \infty$ con la norma $||f||_p = \left(\int |f|^p\right)^{1/p}$.
- El espacio L_∞ con la norma $||f|| = \sup|f|$.
- El espacio c_0 de sucesiones reales que convergen a 0 con la norma del supremo $||x||_\infty = \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\}$.
- El espacio $C_b(\Omega)$ de funciones relaes acotadas definidas en un espacio topológico Ω con la norma del supremo $||f||_\infty = \sup\{|f(\omega)| : \omega \in \Omega\}$.
- El espacio $C^k[a, b]$ de funciones reales diferenciables en $[a, b]$ con k derivadas continuas con la norma $||f|| = ||f||_\infty + ||f'||_\infty + \cdots + ||f^{(k)}||_\infty$.

2.3. Espacios de Riesz

2.3.1. Órdenes, lattices y conos

Definición. 3.39 *Un **orden parcial** es una relación binaria $\geq$ sobre un conjunto X que es reflexiva, antisimétrica y transitiva. En otras palabras, para $x, y, z \in X$ se tiene que:*

- *Reflexividad: $x \geq x$,*
- *Antisimetría: si $x \geq y$ e $y \geq x$ entonces $x = y$,*
- *Transitividad: si $x \geq y$ e $y \geq z$ entonces $x \geq z$.*

*Dado un conjunto parcialmente ordenado $(X, \geq)$ y dos elementos $x, y \in X$, se dice que z es el **supremo** de x e y si verifica:*

1. *$z \geq x$ y $z \geq y$ o, en otras palabras, z es una cota superior de $\{x, y\}$,*

2. z es la menor de dichas cotas, o sea, si $u \geq x$ y $u \geq y$ entonces $u \geq z$.

De forma análoga se define el ***ínfimo*** *de $x, y \in X$.*

Un conjunto parcialmente ordenado $(X, \geq)$ es un ***lattice*** *si cada para de elementos $x, y \in X$ tiene un supremo y un ínfimo. Las funciones $(x, y) \mapsto \sup\{x, y\} := x \vee y$ y $(x, y) \mapsto \inf\{x, y\} := x \wedge y$ son llamadas* ***operaciones de lattice****.*

Definición. 3.40 *Un* ***espacio vectorial ordenado*** *X es un espacio vectorial real con una relación de orden $\geq$ que es compatible con las operaciones de X, en el siguiente sentido:*

1. *si $x \geq y$ entonces $x + z \geq y + z$ para todo $z \in X$,*
2. *si $x \geq y$ entonces $\alpha x \geq \alpha y$ para todo $\alpha \geq 0$.*

En un espacio vectorial ordenado X, el conjunto $X^+ = \{x \in X : x \geq 0\}$ es un cono convexo llamado ***cono positivo (o no-negativo)*** *de X.*

Definición. 3.41 *Un* ***espacio de Riesz o lattice vectorial*** *es un espacio vectorial ordenado que también es un lattice.*

Los espacios de Riesz capturan algunas de las principales propiedades de orden que presentan los números reales, en particular, la noción de positividad. La importancia de trabajar con este tipo de espacios vectoriales en economía radica en el hecho de que suele haber un orden natural en los espacios de bienes para los que mayor cantidad es mejor. Esto se traduce en preferencias monótonas en el orden del espacio de bienes.

Para un vector x en un espacio de Riesz, se definen la parte positiva, la parte negativa y el valor absoluto como:

- *Parte positiva:* $x^+ = x \vee 0$,
- *Parte negativa:* $x^- = (-x) \vee 0$,
- *Valor absoluto:* $|x| = x^+ \vee x^-$.

Con esta notación, x y su valor absoluto se pueden escribir como:

$$x = x^+ - x^- \quad \text{y} \quad |x| = x^+ + x^-.$$

Si se interpreta $(X, \geq)$ como un espacio de bienes y X' es su dual topológico, el orden parcial $\geq$ permite dar una noción de positividad para los funcionales lineales en X' que será de utilidad para definir precios, a los que se le pedirá que sean positivos.

Definición. 3.42 *Sea $p \in X'$, se dice que p es un:*

1. ***funcional positivo:*** *si para todo $x \in X^+$, $p \cdot x \geq 0$,*

2. ***funcional estrictamente positivo:*** *si para todo $x > 0$, $p \cdot x > 0$.*

2.3.2. Descomposición de Riesz

Los espacios de Riesz satisfacen una propiedad importante conocida como la descomposición de Riesz.

Teorema. 3.43 *En un espacio de Riesz, si un vector y satisface $|y| \leq \left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right|$ entonces existen $y_1, \ldots, y_n$ tales que $y = \sum_{i=1}^{n} y_i$ y $|y_i| \leq |x_i|$ para todo $i = 1, \cdots, n$. Si y es positivo, entonces los elementos y_i pueden ser elegidos positivos también.*

La prueba se realiza por inducción. Para el caso base, $n = 2$, basta con definir y_1 y y_2 como sigue:

$$y_1 = |(-|x_1|) \vee y| \wedge |x_1| \quad y_2 = y - y_1.$$

Mas-Colell sugirió una interpretación económica de esta propiedad: si $x_i \geq 0$ representa el vector de activos de la persona i, entonces $\sum_{i=1}^{n} x_i = x$ representa los activos totales de la economía. En este contexto, si y simboliza un vector de impuestos o tasas, que es factible en el agregado, entonces la propiedad de Riesz afirma que existe una forma de distribuir este impuesto o tasa entre todos los individuos de la economía.

2.3.3. Espacios de Riesz topológicos

Definición. 3.44 *Un subconjunto A de un espacio de Riesz es **sólido** si cada vez que se verifica que $|y| \leq |x|$ con $x \in A$, se tiene que $y \in A$.*

*Una topología lineal τ en un espacio de Riesz X es una **topología localmente sólida** si y sólo si τ tiene una base de entornos de 0 conformada por conjuntos sólidos. En dicho caso, se dice que (X, τ) es un **espacio de Riesz localmente sólido.***

La solidez local está intrínsicamente relacionada con la continuidad uniforme[4] de las operaciones de lattice. En concreto, se tiene que:

Proposición. 3.45 *Una topología lineal τ en un espacio de Riesz es localmente sólida si y sólo si las operaciones de lattice son uniformemente continuas respecto a τ.*

A partir de la identidad de lattice $x = x^+ - x^-$, el cono positivo X^+ se puede escribir como:

$$X^+ = \{x \in X : x^- = 0\}.$$

Ahora bien, si (X, τ) es un espacio de Riesz localmente sólido, las operaciones de lattice son uniformemente continuas, por lo que $x \mapsto x^-$ es una función uniformemente continua. A partir de esta observación se obtiene el siguiente resultado:

Proposición. 3.46 *En un espacio de Riesz localmente sólido (X, τ) el cono positivo X^+ es τ-cerrado.*

2.3.4. Ejemplos

Ejemplos. 1 *A continuación se listan algunos ejemplos de espacios de Riesz para ilustrar que gran parte de los espacios de bienes que surgen del análisis económico son espacios de ésta característica.*

[4]Una función $f : X \to Y$ entre dos espacios topológicos es uniformemente continua si para todo entorno W de 0 en Y existe un entorno de 0 V en X tal que $x - y \in V$ implica $f(x) - f(y) \in W$.

1. *El espacio euclídeo* $\mathbb{R}^n$ *con el orden* $x \geq y$ *si y sólo si* $x_i \geq y_i$ *para todo* $i = 1, \ldots, n$ *y siendo* $x \vee y = (\text{máx}\{x_1, y_1\}, \ldots, \text{máx}\{x_n, y_n\})$ *y* $x \wedge y = (\text{mín}\{x_1, y_1\}, \ldots, \text{mín}\{x_n, y_n\})$.

2. *El espacio* l_p $(0 \leq p \leq \infty)$ *con el orden usual punto a punto.*

3. *El espacio* $L_p(\mu)$ $(0 \leq p \leq \infty)$ *con el orden dado por* $f \geq g$ *si* $f(x) \geq g(x)$ *en casi todo punto respecto a* μ *y siendo* $f \vee g(x) = \text{máx}\{f(x), g(x)\}$ *y* $f \wedge g = \text{mín}\{f(x), g(x)\}$.

4. *El espacio* $M(A)$ *de medidas signadas acotadas sobre un sigma álgebra* A *de subconjuntos de* X *con el orden dado por* $\mu \geq \nu$ *si* $\mu(E) \geq \nu(E)$ *para todo* $E \in A$ *y siendo* $\mu \vee \nu(E) = \sup\{\mu(B) + \nu(E \setminus B) : B \in A, B \subset E\}$ *y* $\mu \wedge \nu(E) = \text{ínf}\{\mu(B) + \nu(E \setminus B) : B \in A, B \subset E\}$.

Capítulo 3

Principales Dificultades

Extender la Teoría de Equilibrio General a espacios vectoriales de dimensión infinita conlleva una serie de dificultades asociadas a las características estructurales de dichos espacios. Estas dificultades, además de constituir problemas matemáticos, muchas veces dificultan la interpretación económica de los resultados obtenidos.

- **No hay un espacio canónico de dimensión infinita.** En contraste con la tería desarrollada para dimensión finita, donde $\mathbb{R}^n$ es el espacio vectorial canónico de dimensión n, en el caso de dimensión infinita se tiene que distintos modelos dan lugar a espacios vectoriales de dimensión infinita no isomorfos.

- **No hay una única elección de topología.** En dimensión finita todas las topologías Haussdorf lineales son equivalentes. Sin embargo, en espacios de dimensión infinita, existen varias topologías con éstas características. En algunos casos, dichas topologías serán comparables (es decir, una resulta más fina o más gruesa que la otra), mientras que en otros no. La elección de una topología en el espacio de bienes debe responder a consideraciones económicas. En efecto, una topología puede ser vista como una noción de cercanía entre vectores de X, por tanto, lo natural es considerar que dos vectores $x, y \in X$ son cercanos si son percibidos como tales por los agentes de la economía.

- **Positividad de precios.** No todo espacio de Riesz admite un funcional lineal estrictamente positivo. Por ejemplo, considérese $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, el espacio vectorial de sucesiones reales. El dual de este espacio es el espacio de secuencias que son nulas excepto por una cantidad finita de términos. Por tanto, todo precio que se pueda considerar sobre $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, al ser un elemento del dual, debe asignar un precio no estrictamente positivo a alguna canasta.

- **Continuidad de precios.** En dimensión finita, todo funcional lineal es continuo debido a que el núcleo de un funcional lineal es un subespacio de dimensión finita y por tanto es cerrado. En otras palabras, el dual topológico y el dual algebraico en espacios de dimensión finita coinciden. En dimensión infinita pueden existir funcionales lineales no continuos. En efecto, considérese el espacio $C_c(\mathbb{R})$ de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ con soporte compacto y el funcional lineal $\int_{\mathbb{R}} : C_c(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. Sean, para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n(t)$ las funciones que valen 1 si $t \in [0, n]$, 0 si $t \notin [-1, n+1]$ y son lineales en $[n, n+1]$ y en $[-1, 0]$. Claramente, $x_n \in C_c(\mathbb{R})$ y además, verifican $||x_n||_\infty = 1$, por lo que $x_n \in B_0 = \{f \in C_c(\mathbb{R}) : ||f||_\infty \leq 1\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Ahora bien, se tiene que:

$$\int_{\mathbb{R}} x_n(t) = n + 1 \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Por tanto, $\int_{\mathbb{R}}$ es un funcional lineal no acotado en la bola unidad B_0 por lo que no puede ser continuo.[1]

- **Multiplicidad de espacios duales.** Al trabajar con modelos económicos en espacios de dimensión infinita, los pares duales (X, X') describen la dualidad entre bienes y precios, donde X es el espacio de bienes y X' es el dual topológico de X. Como se señalaba en puntos anteriores, no existe una elección canónica respecto a la topología con la que se debe dotar X. Es en virtud de esto, que dicho espacio puede presentar diversos duales topológicos, según cuál sea la topología con la que sea dotado.

- **Continuidad del mapa $(x, p) \mapsto x \cdot p$ de $X \times X'$ en $\mathbb{R}$.** En el caso finito-dimensional, este mapa resulta continuo siempre. Sin embargo, en el caso de dimensión infinita, esto no es cierto en general. En efecto, se considera $X = L_2[0,1]$ y $X' = L_2[0,1]$, ambos dotados con la topología débil descripta en 1.21 y sean $\{x^n\} \subset X$ y $\{p^n\} \subset X'$ definidas como $x^n = p^n = 1 + r^n$ donde

[1] Sean (X, p) e (Y, q) espacios seminormados y $A : X \to Y$ lineal. Luego, A es continua si y sólo si A es acotado en la bola unidad cerrada.

$$r^n(t) = \begin{cases} 1 & \text{si el n-ésimo dígito de la expansión binaria de } t \text{ es } 0, \\ \\ -1 & \text{si el n-ésimo dígito de la expansión binaria de } t \text{ es } 1. \end{cases}$$

Aplicando el Lema de Borel-Cantelli a r^n, se obtiene que $r^n \to 0$ en la topología débil. Por tanto, $x^n \to 1$ y $p^n \to 1$ en la topología débil. Sin embargo,

$$x^n \cdot p^n = (1 + r^n) \cdot (1 + r^n) = 2 \ \forall n.$$

Por tanto, en este caso se tiene que $x^n \cdot p^n \not\to 1 \cdot 1$ de donde se desprende la no continuidad del mapa $(x, p) \mapsto x \cdot p$ para este ejemplo.

La necesidad de continuidad de dicho mapa resulta de importancia para distintos argumentos de punto fijo, frecuentemente utilizados en Teoría de Equilibrio General por lo que será necesario en algunos casos adicionar hipótesis que garanticen su continuidad.

- **Compacidad de conjuntos.** Una gran dificultad que se adiciona al trabajar en economías de dimensión infinita es que muchos conjuntos que se definen típicamente para desarrollar la Teoría de Equilibrio General no resultan acotados, como sí lo son en el caso de dimensión finita. Por ejemplo, el conjunto de asignaciones factibles es definido como

$$Z = \{(x_1, \ldots, x_n) \in X^n : x_i \in X_i, \sum x_i \leq \omega\},$$

donde X_i representa el conjunto de consumo de cada agente i y ω designa la dotación inicial de la economía. Si se considera $X = C^1[0, 1]$ el conjunto de funciones derivables con derivadas continuas, dotado con la norma $||x||_1 = \sup |x(t)| + \sup |x'(t)|$, $X_1 = X_2 = X^+$ y dotaciones iniciales $\omega_1 = \omega_2 = 1$, el conjunto de asignaciones factibles resulta

$$Z = \{(x_1, x_2) : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \leq 2\}.$$

Dado que funciones arbitratiamente cercanas a 0 pueden tener derivadas arbitrariamente grandes, el conjunto Z no es acotado con la norma $|| \cdot ||_1$.

- **Separación de conjuntos convexos.** Un paso clave a la hora de demostrar el Segundo Teorema de Bienestar Social en economías de dimensión finita consiste en aplicar el teorema de separación de conjuntos convexos. En dimensión infinita, se requieren hipótesis adicionales para garantizar esta separación, como se muestra en 2.1.2. Estas hipótesis, en general, no se verifican para economías en dimensión infinita, sino que será necesario adicionar condiciones sobre las preferencias para poder aplicar los teoremas de separación en este contexto.

Capítulo 4

Modelo y Conceptos Principales

Se asumirá que el espacio de bienes (L, τ) es un espacio vectorial topológico Haussdorf y localmente convexo. Asimismo, se asume que L está dotado con un orden parcial $\geq$ para el cual, el cono positivo L^+ es no degenerado (i.e. $L^+ \neq \{0\}$), cerrado y convexo. Estas hipótesis son minimales, para algunas pruebas más adelante se asumirán hipótesis adicionales.

Existe una cantidad de consumidores finita e igual a N. La decisión a la que se enfrenta cada uno de ellos en una economía de mercado es decidir que cantidad de cada bien disponible consumirá. Cada consumidor i está descripto por un conjunto de consumición X_i, una relación de preferencia $\succeq_i$ y una dotación inicial $\omega_i \in X_i$ para la cual asumiremos una hipótesis de deseabilidad: $\alpha\omega_i \succ_i 0$ para $\alpha > 0$, $i = 1, \cdots, N$.

Los conjuntos de consumición representan las restricciones físicas de consumo que existen en la economía, formalmente, se trata de un subconjunto del cono positivo del espacio de bienes $X_i \subset L^+$ para todo consumidor i. Como hipótesis básicas, se pedirá que para cada i, X_i sea cerrado, convexo y satisfaga la propiedad de descarte ("‘free disposal") es decir, que si $x \in X_i$ y $x' \in L^+$, $x' \leq x$, entonces $x' \in X_i$.

Por otro lado, las relaciones de preferencia representan los gustos de los consumidores. Se asume que para cada i la relación de preferencia $\succeq_i$ es un pre-orden (i.e. una relación transitiva y reflexiva) completo que es:

- τ-continuo: los conjuntos $U_i^x = \{y \in X_i : y \succeq_i x\}$ y $L_i^x = \{z \in X_i : x \succeq_i z\}$ son cerrados para todo $x \in X_i$ y para todo consumidor i,
- convexo: cada conjunto de la forma $\{y : y \succeq x\}$ es convexo,

- monótono: para cada $x \in X_i$ y para cada $v \in L^+$, $x + v \succeq_i x$,
- estricamente monótono (en un sentido débil): existe $v_0 \in L^+$ tal que $x + \alpha v_0 \succ_i x$ para todo $x \in X_i$ y $\alpha > 0$.

Usualmente las preferencias son representadas mediante funciones de utilidad.

Definición. 0.1 *Dada una preferencia $\succeq$ definida en X_i, una función de utilidad $u : X_i \to \mathbb{R}$ representa $\succeq$ si para todo $x, y \in X_i$, $x \succeq y$ si y sólo si $u(x) \geq u(y)$.*

Para garantizar la existencia de funciones de utilidad continuas que representen las preferencias de los individuos, se presenta el siguiente resultado.

Proposición. 0.2 (MAS-COLLEL, 1986.) *Sea $\succeq$ una relación de preferencia continua definida en un subconjunto X de un espacio vectorial ordenado L de la forma $X = \{x \in L : a \leq x \leq b\}$ para ciertos $a, b \in L$ fijos. Supóngase que para cualquier $x, y \in X$, $x \geq y$ implica $x \succeq y$, entonces existe una función de utilidad continua $u : X \to [0, 1]$ que representa la relación de preferencia.*

Dem.

Observar que si $X = \emptyset$ o si $a \succeq b$ no hay nada que probar. Por tanto, sea $b \geq a$ y $b \succ a$. Se considera el conjunto $J = \{\alpha a + (1 - \alpha)b : 0 \leq \alpha \leq 1\}$. Como J es topológicamente un intervalo, existe una función continua $f : J \to [0, 1]$ que representa $\succeq$ en J y tal que $f(a) = 0$ y $f(b) = 1$.

Ahora bien, si $x \in X$, existe $v(x) \in J$ tal que $v(x) \sim x$ ya que J es conexo y no puede ser cubierto por los conjuntos $\{z : z \succ x\}$ y $\{z : z \prec x\}$. Se define, por tanto, $u : X \to [0, 1]$ como $u(x) = f(v(x))$. Para probar la continuidad de u, se considera $t \in [0, 1]$, como $u(X) = [0, 1]$, existe $x \in X$ tal que $u(x) = t$. Luego, los conjuntos $u^{-1}([t, \infty)) = \{z : z \succeq x\}$ y $u^{-1}((\infty, t]) = \{z : x \preceq z\}$ son cerrados por continuidad de $\succeq$.

□

Esta proposición, sin embargo, no garantiza la existencia de una función de utilidad en todo L^+ incluso de la relación de preferencia está definida en L^+.

Sea $\omega = \sum_i \omega_i$ la dotación inicial agregada, es decir, la dotación inicial de la economía en su conjunto, obtenida mediante la suma de las dotaciones individuales. El conjunto de asignaciones factibles corresponde a aquellas canastas de bienes que pueden ser alcanzadas con la dotación que la economía posee. Formalmente,

$$Z = \{x = (x_1, \ldots, x_N) \in X_1 \times \cdots \times X_N : \sum_i x_i \leq \omega\}.$$

En virtud de la Proposición 0.2, si se asume que el intervalo ordenado $[0, \omega] \subset X_i$ para todo $i = 1, \ldots, N$, entonces para cada consumidor existe una función de utilidad continua $u_i : X \to [0, 1]$ siendo $X = \{x \in L : 0 \leq x \leq \omega\}$ con $u_i(0) = 0$ y $u_i(\omega) = 1$. Se define la utilidad agregada como $U : X^N \to [0, 1]^N$ como $U(x_1, \ldots, x_N) = (u_1(x_1), \ldots, u_N(x_N))$.

El conjunto de utilidad factible corresponde a aquellas utilidades que se pueden alcanzar dado el conjunto de consumición factible, en efecto,

$$U = \{v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : v \leq (u_1(x_1), \ldots, u_N(x_N)) \text{ para cierta canasta } (x_1, \ldots, x_N) \in Z\}.$$

Definición. 0.3 *Un vector de utilidad $u \in U$ es un:*

- ***óptimo de Pareto débil*** *si no existe otro vector $u' \in U$ tal que $u'_i > u_i$ para todo $i = 1, \ldots, N$,*
- ***óptimo de Pareto*** *si no existe otro vector $u' \in U$ tal que $u'_i \geq u_i$ para todo $i = 1, \ldots, N$ y $u'_{i_0} > u_{i_0}$ para algún i_0.*

Análogamente, se definen estos conceptos para asignaciones.

Definición. 0.4 *Una asignación $x \in Z$ es un:*

- ***óptimo de Pareto débil*** *si su correspondiente vector de utilidad $U(x)$ lo es,*
- ***óptimo de Pareto*** *si su correspondiente vector de utilidad $U(x)$ lo es.*

Un precio (o sistema de precios) será un funcional lineal $p : L \to \mathbb{R}$ continuo respecto a la topología τ en L. Por tanto, se le pide a los precios que, en primer lugar, sean lineales. En segundo lugar, que estén definidos en todas las canastas de L. Finalmente, se requiere la continuidad respecto a la topología τ dada.

Definición. 0.5 *Un par $(x, p) \in Z \times L'$ con $p \neq 0$ constituye un* ***equilibrio económico*** *si para cada i, x_i es maximal para $\succeq_i$ en el conjunto presupuestario $\{x_i \in X_i : p \cdot x_i \leq p \cdot \omega_i\}$.*

Definición. 0.6 *Un par $(x, p) \in Z \times L'$ con $p \neq 0$ constituye un* ***quasi-equilibrio económico*** *si para cada i, si $z_i \succ_i x_i$ entonces $p \cdot z_i \geq p \cdot \omega_i$.*

Con preferencias estríctamente monótonas, las definiciones precedentes son equivalentes a las que se presentan a continuación. En efecto, la condición de que si $x_i^* \succ_i x_i$ entonces se tiene que $p \cdot x_i \geq p \cdot \omega_i$ para todo consumidor i implica que $p \cdot x_i^* \geq p \cdot \omega_i$. Asimismo, como $\sum_i x_i^* \leq \omega$, se debe verificar $\sum_i p \cdot x_i^* \leq p \cdot \omega$ y por tanto, debe ser $p \cdot x_i^* = p \cdot \omega_i$ para todo consumidor i.

Definición. 0.7 *Un par $(x, p) \in Z \times L'$ con $p \neq 0$ constituye un* ***equilibrio*** *si para todo $i = 1, \ldots, N$ $p \cdot \omega_i = p \cdot x_i$ y $p \cdot z > p \cdot x_i$ siempre que $z \succ_i x_i$.*

Definición. 0.8 *Un par $(x, p) \in Z \times L'$ con $p \neq 0$ constituye un* ***quasi-equilibrio*** *si para todo $i = 1, \ldots, N$ $p \cdot \omega_i = p \cdot x_i$ y $p \cdot z_i \geq p \cdot x_i$ siempre que $z_i \succ_i x_i$.*

Para el Segundo Teorema de Bienestar Social será de utilidad definir cuándo un precio soporta un vector de utilidad o una asignación.

Definición. 0.9 *Un precio $p \in L'$ soporta al vector de utilidad $u \in U$ si $p \cdot \omega \neq 0$ y $p \cdot (\sum x_i' - \omega) \geq 0$ siempre que $u_i(x_i') \geq u_i$. Análogamente, $p \in L'$ soporta una canasta x si soporta a su correspondiente vector de utilidad $U(x)$.*

En otras palabras, si $p \in L'$ soporta la canasta x, entonces para cualquier otra canasta x' tal que $u_i(x_i') \geq u_i(x_i)$ se tendrá que $p \cdot (\sum_i x_i' - \sum_i x_i) \geq 0$.

Definición. 0.10 *Un par $(x, p) \in Z \times L'$ con $p \neq 0$ constituye un* ***quasi-equilibrio con transferencias*** *si existe un vector de transferencias $T = (T_1, \cdots, T_N)$ tal que $\sum_i T_i = p \cdot \omega$ y para todo $i = 1, \ldots, N$, si $p \cdot z_i \geq T_i$ siempre que $z_i \succeq_i x_i$.*

Capítulo 5

Teoremas Fundamentales de la Economía del Bienestar

Hay dos teoremas fundamentales de la economía del bienestar, que tratan cuestiones relativas a la eficiencia económica y al bienestar social. El primero afirma que cualquier equilibrio competitivo lleva a una situación de asignación de recursos económicos que es eficiente en el sentido de Pareto. El segundo teorema afirma que cualquier asignación eficiente u óptimo de Pareto se puede obtener mediante un equilibrio competitivo. A pesar de la aparente simetría de ambos teoremas, en realidad el primero es mucho más general que el segundo, requiriendo hipótesis más débiles.

5.1. Primer Teorema de Bienestar Social

El Primer Teorema de Bienestar Social asegura, bajo las hipótesis y el modelo planteado en el capítulo anterior, toda asignación de equilibrio constituye un óptimo de Pareto.

Teorema. 1.1 (Debreu, 1954.) *Si (x, p) es un equilibrio entonces x es una asignación óptima en el sentido de Pareto.*

Dem. Sea (x, p) un equilibrio y x' una asignación tal que $u_i(x'_i) \geq u_i(x_i)$ para todo i y $u_{i_0}(x'_{i_0}) > u_{i_0}(x_{i_0})$ para cierto i_0. Luego, se tiene que:

$$p \cdot x'_i \geq p \cdot x_i \text{ para } i \in \{1, \ldots, N\} \setminus \{i_0, \}$$
$$p \cdot x'_i > p \cdot x_i \text{ para } i = i_0.$$

La primer desigualdad se obtiene del hecho de que las preferencias son estrictamente monótonas, mientras que la segunda se obtiene de la propia definición de equilibrio.

Sumando a ambos lados, se obtiene que

$$p \cdot \sum x'_i > p \cdot \sum x_i.$$

Ahora bien, como (x, p) es un equilibrio, se tiene que $p \cdot x_i = p \cdot \omega_i$, de donde, sumando, se obtiene que

$$p \cdot \sum \omega_i = p \cdot \omega = p \cdot \sum x_i.$$

Finalmente, sustituyendo esta expresión en la desigualdad obtenida previamente, se concluye que

$$p \cdot \sum x'_i > p \cdot \omega.$$

Como las preferencias son monótonas, p debe ser positivo, por tanto, x_i no es una asignación factible. □

La demostración de este Teorema es válida incluso con menos hipótesis que las planteadas: el argumento se basa en la definición de equilibrio, en la linealidad de p en el conjunto de asignaciones factibles y en la deseabilidad de los bienes (que garantiza que p sea positivo).

Asimismo, cabe mencionar, que la demostración es completamente análoga a la hecha para el caso de un espacio de bienes de dimensión finita, aqui la dimensión no juega un rol importante.

5.2. Segundo Teorema de Bienestar Social

El segundo Teorema de Bienestar Social pretende dar condiciones bajo las cuales existe un precio de equilibrio que soporta una asignación Pareto óptima. Matemáticamente, se busca establecer condiciones para las cuales, dado un óptimo de Pareto x, existe un precio $p^* \in L'$ que soporta dicha asignación.

Ahora bien, ¿qué sentido económico tiene un precio soporte para una asignación Pareto óptima? La respuesta a esta pregunta se encuentra en el siguiente resultado:

Proposición. 2.2 *Si x es un óptimo de Pareto y p^* es un precio que soporta dicha asignación, entonces (x, p^*) es un quasi-equilibrio con transferencias.*

Dem. Sea x un óptimo de Pareto y p^* un precio soporte. Se definen las transferencias $T_i = p^* \cdot x_i$ para todo i. Como $\sum_i x_i = \omega$, se tiene que $\sum_i T_i = \sum_i p^* \cdot x_i = p^* \cdot \omega$.

Ahora bien, sea $i \in \{1, \ldots, N\}$ y sea z_i una canasta tal que $u_i(z_i) \geq u_i(x_i)$. Se considera la asignación $x' = (x_1, \ldots, x_{i-1}, z_i, x_{i+1}, \ldots, x_N)$ que verifica que $u_i(x_i') \geq u_i(x_i)$ para todo i. Luego, como p^* soporta la asignación x, se verifica que $p^* \cdot (\sum_i x_i' - \sum_i x_i) \geq 0$, pero como $x_j' = x_j$ para todo $j \neq i$ y $x_i' = z_i$, la desigualdad anterior implica que $p^* \cdot z_i \geq p^* \cdot x_i$, de donde se concluye que (x, p^*) constituye un quasi-equilibrio con transferencias. $\square$

La prueba de este teorema en el caso finito dimensional se basa es la separación de conjuntos convexos disjuntos. Sin embargo, como se expuso anteriormente, en el caso infinito dimensional, la separación de conjuntos convexos disjuntos requiere de la hipótesis adicional de que uno de ellos tenga interior no vacío. Esto constituye un verdadero problema, pues el conjunto $\{x' \in X : x' \succeq x\}$ tendrá interior vacío siempre que L^+ tenga interior vacío, lo cual imposibilita la aplicación de el Teorema 1.13 si no se agregan hipótesis adicionales.

En la literatura destacan tres condiciones que abordan este problema: la condición de preferencias propias ([11]), la condición de cono ([7]) y la condición de bienes extremadamente deseables ([15] y [14]). Un hecho a destacar es que la segunda condición requiere que el espacio de bienes L sea un espacio de Banach, que es una hipótesis más restrictiva, sin embargo, a continuación se probará que, en realidad, las tres condiciones son equivalentes, por lo que se podrá trabajar con cualquiera de las restantes, que aplican para espacios más generales.

Definición. 2.3 *Una relación de preferencia $\succeq$ es **propia** en x respecto a $v \in L$, $v > 0$ si existe un cono abierto y convexo Γ_x con vértice en 0 que contiene a v tal que $x - \Gamma_x$ no intersecta al conjunto $\{x' \in X : x' \succeq x\}$.*

El hecho de que una preferencia sea propia en x respecto a cierto vector v indica que una mejora en la dirección de v es deseable, en el sentido de que no se puede compensar mediante un vector z que resulte pequeño respecto a la pérdida. En efecto, para visualizar esto, se puede partir de la canasta x. A dicha canasta, se le sustrae una parte αv, obteniendose la canasta $x - \alpha v \in x - \Gamma_x$. Como $x - \Gamma_x$ es un cono abierto, existe un entorno V de $x - \alpha v$ tal que $V \subset x - \Gamma_x$. Por tanto, como $x - \Gamma_x \cap \{x' \in X : x' \succeq x\} = \emptyset$, para todo $z \in V$ se tiene que $x - \alpha v + z \not\succeq x$.

Definición. 2.4 *Sea $C(Y, x)$ el menor cono con vértice en x que contiene a Y, i.e. $C(Y, x) = \{z : z = \alpha(y - x) + x$ con $y \in Y, \alpha \geq 0\}$. La **condición de cono***

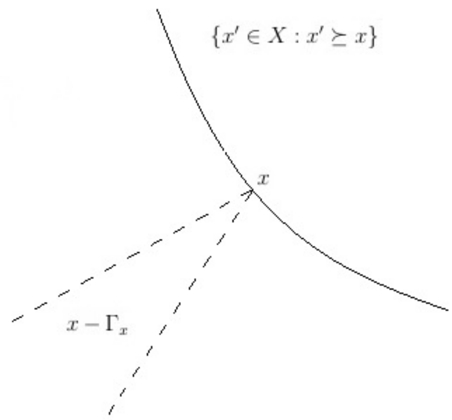

Figura 5.1: Preferencia propia en x.

es satisfecha en x e Y si existe un vector w a una distancia positiva del conjunto $C(Y,x)$.

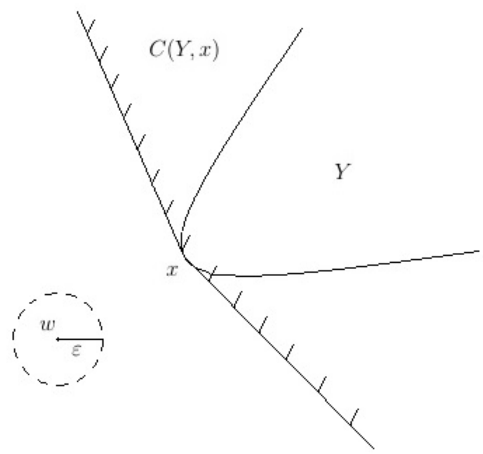

Figura 5.2: Condición de cono en x e Y.

Definición. 2.5 *Dada una relación de preferencia convexa $\succeq$, se dice que v es una **canasta extremadamente deseada** en x si $(-C) \cap \{y - x : y \succeq x\} = \emptyset$ donde $C = \{\alpha v - z : z \in \alpha U, \alpha \in \mathbb{R}\}$ siendo U un entorno abierto de 0.*

Proposición. 2.6 (CHICHILINSKY, 1992.) *Sea L un espacio de Banach ordenado. La condición de cono es equivalente a la condición de preferencia propia.*

Dem.

En primer lugar se asume que la preferencia es propias en x respecto a cierto vector $v > 0$. Por definición, debe existir un cono abierto Γ_x con vértice en 0 que contiene a v y tal que $(x - \Gamma_x) \cap \{z : z \succeq x\} = \emptyset$. Se considera $Y = \{z : z \succeq x\}$ y $C(Y, x) = \{\alpha(z-x)+x : z \succeq x, \alpha \geq 0\}$. Luego, se tiene que $C(Y, x) \cap (x - \Gamma_x) = \emptyset$. En efecto, si $g \in C(Y, x) \cap (x - \Gamma_x)$ entonces se puede escribir $g = \alpha(z - x) + x$ para cierto $\alpha \geq 0$ y $z \succeq x$. Por tanto, se debe tener que $\alpha(z - x) \in -\Gamma_x$ lo que es equivalente a $z - x \in -\Gamma_x$ ya que Γ_x es un cono. Trasladando x, se tiene que $z \in x - \Gamma_x$ lo que contradice que las preferencias sean propias en x ya que $z \succeq x$, por tanto, se debe tener $C(Y, x) \cap (x - \Gamma_x) = \emptyset$. Finalmente, para corroborar la condición de cono, basta con considerar el vector $x - v \in x - \Gamma_x$ que se encuentra a una distancia positiva de $C(Y, x)$.

A la inversa, se asume que se verifica la condición de cono en x e $Y = \{z : z \succeq x\}$. Por definición, existe un vector w, que puede ser elegido negativo si $x \geq 0$, a una distancia positiva de $C(Y, x)$. Entonces, existe $\varepsilon > 0$ tal que $V_\varepsilon = \{||z - w|| < \epsilon$ no intersecta $C(Y, x)$. En particular, el cono generado por V_ε, $x - \Gamma = \{u : u = \alpha z + x$ con $z \in V_\varepsilon, \alpha \geq 0\}$ no intersecta $C(Y, x)$ ya que este último también es un cono. Por tanto, $x - \Gamma$ no intersecta $\{z : z \succeq x\}$ pues este conjunto está contenido en $C(Y, x)$ y, además, $-\Gamma$ contiene al vector w, por lo que la preferencia resulta propia en x respecto a $-w$. $\square$

Proposición. 2.7 (CHICHILINSKY, 1992) *La condición de canasta extremadamente deseable es equivalente a la condición de preferencia propia.*

Dem. Para mostrar esta equivalencia basta ver que la definición de bien extremadamente deseado v en x es análoga a la de preferencia propia en x tomando $\Gamma_x = C$. $\square$

Debido a las equivalencias mostradas, de ahora en más se trabajará con la condición de preferencias propias para abordar el problema que surge en los espacios cuyo cono positivo tiene interior vacío.

Cabe destacar que, con cualquiera de estas propiedades, la estrategia de prueba del Segundo Teorema de Bienestar se basa en el Teorema 1.13, no habiendo literatura que haga uso del Teorema 2.38 de Bishop-Phelps. Sin embargo, la caracterización de puntos soporte presentada en el Teorema 2.37 hace pensar que este camino alternativo no conduce a nuevos resultados.

La prueba del Segundo Teorema de Bienestar Social se dividirá en dos casos. Primero se trabajará con un solo consumidor ($N = 1$) y luego se extenderá a una cantidad finita de los mismos.

5.2.1. Un solo consumidor

Teorema. 2.8 (Mas-Collel, 1986.) *Sea x un óptimo de Pareto. Si $\succeq$ es propia en x además de verificar las hipótesis del Capítulo 4, entonces existe $p^* \in L'$ que soporta la asignación x.*

Dem. Si $\succeq$ es propia, entonces existe $v \geq 0$ y un cono convexo en 0 abierto que contiene a v tal que $x - \Gamma_x \cap \{x' \in X : x' \succeq x\} = \emptyset$. El hecho de que $v \in \Gamma_x$ garantiza que $x - \Gamma_x$ tiene interior no vacío y, como se trata de un cono trasladado, es un conjunto convexo. Asimismo, la convexidad de las preferencias asegura la convexidad del conjunto $\{x' \in X : x' \succeq x\}$. Por tanto, se está en las hipótesis de el Teorema 1.13 que afirma la existencua de $p^* \in L'$ y una constante c tal que $p^* \cdot z \leq c \leq p^* \cdot x'$ para cada $z \in x - \Gamma_x$ y $x' \succeq x$. Ahora bien, como $x \succeq x$, se debe tener que $c \leq p^* \cdot x$. Por otra parte, $x - \Gamma_x$ es un cono con vértice en x y como las preferencias son continuas, se debe tener $c \geq p^* \cdot x$. Juntando ambas desigualdades, se tiene que $c = p^* \cdot x$, luego:

$$p^* \cdot x \geq p^* \cdot x' \text{ para todo } x' \succeq x.$$

$\square$

5.2.2. Varios consumidores

Si bien el hecho de que la preferencia sea propia es suficiente para el caso de un solo consumidor, no bastará para el caso de varios. En ese sentido, será necesaria una condición más fuerte que garantice la soportabilidad para la globalidad de los consumidores, no siendo suficiente la soportabilidad individual. El concepto de preferencias propias se puede reforzar para garantizar esto, con la introducción de las preferencias uniformemente propias.

Definición. 2.9 *Se dice que $\succeq$ es **uniformemente propia** respecto a v en el subconjunto $Y \subset X$ si es propia en cada $y \in Y$ y la elección del cono no depende de y.*

Asimismo, para demostrar el Segundo Teorema de Bienestar Social con una cantidad finita de consumidores habrá que asumir hipótesis adicionales a las expuestas en el Capítulo 4.

Teorema. 2.10 (MAS-COLLEL, 1986.) *Sea L un espacio de Riesz topológico, localmente sólido y localmente convexo. Si las relaciones de preferencia $\succeq_i$, $i = 1, \ldots, N$. en L^+ verifican ser uniformemente propias en el intervalo ordenado $[0, \omega]$ respecto de ω, además de las hipótesis del Capítulo 4, entonces existe un conjunto $K \subset L'$ convexo y $\sigma(L', L)$-compacto tal que $p \cdot \omega \neq 0$ para todo $p \in K$ y todo óptimo de Pareto débil puede ser soportado por algún $p \in K$.*

Dem. Sea x un óptimo de Pareto débil. Para cada $i = 1, \ldots, N$, sea Γ_i el cono de cada preferencia, dado por la condición de preferencias uniformemente propias, y sea $\Gamma = \cap_i \Gamma_i$. Como las preferencias son continuas, pueden ser traducidas en utilidades[1] llamando u_i a la función de utilidad que representa la preferencia del individuo i se puede definir:

$$V = \left\{ \sum_{i=1}^{i=N} (z_i - x_i) : u_i(z_i) \geq u_i(x_i) \text{ para cada } i \right\}.$$

El conjunto V es convexo, en efecto, sean $v^1, v^2 \in V$. Existen z^1, z^2 tal que

$$v^j = \sum_{i=1}^{N} (z_i^j - x_i) \text{ y } u_i(z_i^j) \geq u_i(x_i) \text{ para todo } i = 1, \ldots, N \text{ y } j = 1, 2.$$

Sea $\alpha \in [0, 1]$, y se considera la combinación convexa de v^1 y v^2:

$$\alpha v^1 + (1 - \alpha) v^2 = \sum_{i=1}^{N} [\alpha z_i^1 + (1 - \alpha) z_i^2 - x_i].$$

Se tiene que $u_i(\alpha z_i^1 + (1 - \alpha) z_i^2) \geq u_i(x_i)$ para todo i pues las preferencias son convexas. Luego, $\alpha v^1 + (1 - \alpha) v^2 \in V$ de donde se concluye la convexidad de este conjunto.

Afirmación: $V \cap (-\Gamma) = \emptyset$.

En primer lugar se observa que $V = \{\sum_i z_i - \omega : u_i(z_i) \geq u_i(x_i) \text{ para cada } i\}$ ya que $\sum_i x_i = \omega$. Por absurdo, considérese $z - \omega \in V \cap (-\Gamma)$. Sea W un entorno de

[1] Este paso no es necesario, en su paper original Mas-Collel trabaja directamente con preferencias, definiendo $V = \{\sum_{i=1}^{i=N} (z_i - x_i) : z_i \succeq_i x_i \text{ para cada } i\}$.

0 tal que $\omega+W$ generan Γ. Como la topología es localmente convexa y localmente sólida (además de ser una topología vectorial) se puede asumir que W es convexo, simétrico y sólido. Ahora bien, si $z-\omega \in V \cap (-\Gamma)$ entonces se tiene que por una parte $z-\omega \in V$ por lo que:

$$\exists z_i \text{ tal que } z = \sum_i z_i \text{ con } u_i(z_i) \geq u_i(x_i).$$

Por otra parte, como $z-\omega \in -\Gamma$ y por ende $\omega - z \in \Gamma$ donde $\omega + W$ genera Γ debe existir $v \in W$ tal que $\omega - z = \alpha(\omega + v)$ para cierto $\alpha > 0$. Luego,

$$z - (1-\alpha)\omega = -\alpha v \Rightarrow z - (1-\alpha)\omega \in \alpha(-W) = \alpha W \text{ pues } W \text{ es simétrico.}$$

Como $z \geq 0$ y $(1-\alpha)\omega \leq \omega$ se tiene que $(1-\alpha)\omega - z \leq \omega$, por tanto $[(1-\alpha)\omega - z]^+ \leq \omega$.

Ahora bien, se puede escribir z como:

$$\begin{aligned} z &= (1-\alpha)\omega - [(1-\alpha)\omega - z] \\ &= (1-\alpha)\omega - [(1-\alpha)\omega - z]^+ + [(1-\alpha)\omega - z]^- \\ &\geq -\alpha\omega + [(1-\alpha)\omega - z]^- \end{aligned}$$

Donde en la primer línea se utilizó la descomposición en parte positiva y negativa del vector $[(1-\alpha)\omega - z]$ y en la segunda se introdujo la desigualdad $[(1-\alpha)\omega - z]^+ \leq \omega$.

De esta forma, se obtiene la desigualdad $[(1-\alpha)\omega - z]^- \leq z + \alpha\omega$ o, equivalentemente, $[(1-\alpha)\omega - z]^- \leq \sum_i (z_i + \alpha\omega_i)$. Aplicando el Teorema de Descomposición de Riesz 3.43, existen s_i tales que $\sum_i s_i = [(1-\alpha)\omega - z]^-$ y $0 \leq s_i \leq z_i + \alpha\omega_i$.

Se define $v_i = z_i + \alpha\omega_i - s_i$. Se tiene que $v_i \geq 0$ ya que $0 \leq s_i \leq z_i + \alpha\omega_i$. Ahora bien,

$$\begin{aligned} \sum_i v_i &= \sum_i z_i - \alpha \sum_i \omega_i - \sum_i s_i \\ &= z - \alpha\omega - [(1-\alpha)\omega - z]^- \\ &\leq z + \alpha\omega + [(1-\alpha)\omega - z]^- + [(1-\alpha)\omega - z]^+ \\ &= z + \alpha\omega + [(1-\alpha)\omega - z] \\ &= \omega \end{aligned}$$

En particular, $0 \leq v_i \leq \omega$ para todo i, por lo que se puede aplicar la propiedad de las preferencias en v_i. Para ello, es conveniente observar primeramente que:

$$0 \leq s_i \leq [(1-\alpha)\omega - z]^- \leq (1-\alpha)\omega - z \in \alpha W \Rightarrow s_i \in \alpha W.$$

Se concluye entonces que:

$$v_i - (\alpha\omega_i - s_i) \notin \{x' \in L_+ \text{ tal que: } u_i(x') \geq u_i(v_i)\} \text{ ya que } \alpha\omega_i - s_i \in \Gamma.$$

Ahora bien, se puede escribir z_i como $z_i = v_i - \alpha\omega + s_i$ luego, la condición de preferencias uniformemente propias recién mencionada implica que $z_i \notin \{x' \in L_+$ tal que: $u_i(x') \geq u_i(v_i)\}$ para todo i. Por tanto, se debe tener que $u_i(z_i) < u_i(v_i)$. Esto contradice la optimalidad de la asignación x ya que la asignación $v = (v_1, \ldots, v_N)$ verifica que $u_i(x_i) \leq u_i(z_i) < u_i(v_i)$ y $\sum_i v_i \leq \omega$. Esto es absurdo, por lo que se concluye que $V \cap (-\Gamma) = \emptyset$.

El conjunto $V + \Gamma$ es convexo y además $0 \notin V + \Gamma$ pues $V \cap (-\Gamma) = \emptyset$. Luego, el Teorema 1.13 afirma que existe $p^* \in L'$ tal que $p^* \cdot y > 0$ para todo $y \in V + \Gamma$. Como Γ es un cono y $0 \in V$, se tiene que $p^* \cdot v \geq 0$ para todo $v \in V$ y $p^* \cdot z > 0$ para todo $z \in \Gamma$. En particular, $p^* \cdot \omega > 0$ por lo que se puede tomar, sin pérdida de generalidad, p^* tal que $p^* \cdot \omega = 1$. Luego, si $z \in W$, $\omega - z \in \Gamma$, por lo que $p^* \cdot z \leq p^* \cdot \omega = 1$. Como lo mismo aplica a $-z$ porque W es simétrico, se tiene entonces que $|p^* \cdot z| \leq 1$ para todo $z \in W$. Aplicando el Teorema 1.24, se concluye que p^* pertenece a un conjunto $K \subset L'$ que resulta $\sigma(L', L)$-compacto.

Finalmente, sea z con $u_i(z_i) \geq u_i(x_i)$. Se tiene que $\sum_i (z_i - x_i) \in V$, por lo que $p^* \cdot \sum_i (z_i - x_i) \geq 0$, de donde resulta $p^* \cdot \sum_i z_i \geq p^* \cdot x_i$, y por tanto, p^* soporta la canasta x.

□

5.2.3. Casos especiales

Como se mencionaba al comenzar este capítulo, los principales problemas para demostrar la soportabilidad de los óptimos de Pareto surge cuando se trabaja en espacios cuyos conos positivos tienen interior vacío y, es para subsanar este inconveniente, que se introduce la noción de preferencias propias. Sin embargo, existen espacios que no presentan estas dificultades (i.e. cuyos conos positivos tienen interior no vacío) como por ejemplo $C([0,1])$ cuyo cono positivo es $C([0,1])^+ = \{x : x(t) \geq 0 \text{ para todo } t\}$ y $L_\infty(\mu)$ cuyo cono positivo es $L_\infty(\mu)^+ = \{x : x(t) \geq 0 \text{ c.t.p } \mu\}$.

En esta sección se presentará el Segundo Teorema de Bienestar Social para el caso particular de espacios cuyo cono positivo tiene interior no vacío.

Teorema. 2.11 (Bewley, 1972.) *Se asume, además de las hipótesis básicas de el Capítulo 4, que $\omega \in \operatorname{int} L^+$. Entonces, existe un conjunto $K \subset L'$ convexo y*

$\sigma(L', L)$-compacto tal que $p \cdot \omega \neq 0$ para todo $p \in K$ y todo óptimo de Pareto débil puede ser soportado por algún $p \in K$

Dem. En primer lugar, se observa que si $\omega \in \operatorname{int} L^+$, entonces el conjunto $K = \{p \in L' : p \geq 0 \text{ y } p \cdot \omega = 1\}$ es $\sigma(L', L)$-compacto. En efecto, sea W un entorno abierto y simétrico de 0 tal que $\omega + W \subset L^+$. Si $p \in K$, la restricción de p a $\omega + W$ es positiva, por tanto, la restricción de p a W está acotada inferiormente por -1 pues $p \cdot \omega = 1$. Asimismo, como W es simétrico, se debe tener que la restricción de p a W está acotada superiormente por 1. Luego, el Teorema 1.24 implica que K es compacto.

Ahora bien, sea x un óptimo de Pareto débil. Se considera el conjunto:

$$V = \left\{ \sum_i z_i - x_i : u_i(z_i) \geq u_i(x_i) \text{ para cada } i \right\}.$$

Es claro que $0 \notin \operatorname{int} V$ (de lo contrario x no podría ser un óptimo) y que $\operatorname{int} V \neq \emptyset$ pues $\operatorname{int} L^+ \neq \emptyset$ y $L^+ \subset V$. Por tanto, se puede aplicar el Teorema 1.13 para encontrar un funcional lineal $p \in L'$ tal que $p \neq 0$ y $p \cdot v \geq 0$ para todo $v \in V$. Se tiene que $p \geq 0$ pues p toma valores no negativos en V y $L^+ \subset V$ y $p \cdot \omega > 0$ pues $\omega \in \operatorname{int} V$. Se puede asumir, sin pérdida de generalidad que $p \cdot \omega = 1$ y que, por tanto, $p \in K$

Finalmente, sea z con $u_i(z_i) \geq u_i(x_i)$. Se tiene que $\sum_i (z_i - x_i) \in V$, por lo que $p \cdot \sum_i (z_i - x_i) \geq 0$, de donde resulta $p \cdot \sum_i z_i \geq p \cdot x_i$, y por tanto, p soporta la canasta x. □

Capítulo 6

Teoremas de Existencia

Los principales conceptos de la Teoría de Equilibrio General son el de equilibrio propiamente dicho y el de óptimo de Pareto. Este capítulo busca completar la teoría mostrando dos teoremas de existencia. El primero de ellos, la existencia de pares (x, p) que conforman equilibrios competitivos. El segundo de ellos procura garantizar la existencia de óptimos de Pareto generales.

6.1. Existencia de Equilibrio

Uno de los principales problemas de la Teoría de Equilibrio General consiste en determinar bajo qué condiciones se puede asegurar la existencia de asignaciones y precios de equilibrio. En este capítulo de expondrá uno de los principales resultados respecto a dicho problema en economías de dimensión infinita, desarrollado en [11]. El enfoque desarrollado por dicho trabajo se basa en el Segundo Teorema de Bienestar Social, utlizándose, a su vez, un argumento de punto fijo al igual que en el caso finito-dimensional.

Sea $\Delta = \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_N) \in \mathbb{R}^N : \sum_i \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0 \text{ para todo } i = 1, \ldots, N\}$ el $N-1$ símplex cerrado. Se define la función $f : \Delta \to \mathbb{R}$ dada por $f(s) = \sup\{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha s \in U\}$ siendo U el conjunto de utilidad factible. Se observa que, por la monotonía de las preferencias, U está acotado superiormente por $(u_1(\omega), \ldots, u_N(\omega))$ por lo que f está bien definida. Más aún, se tiene que $f(s) > 0$ para todo $s \in \Delta$. Esta función f será parte de la construcción del argumento de punto fijo, por lo que es conveniente destacar algunas de sus propiedades.

Proposición. 1.1 *Sea $f : \Delta \to \mathbb{R}$ dada por $f(s) = \sup\{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha s \in U\}$, entonces f es continua.*

Dem. El objetivo de la prueba consiste en mostrar que, dado $s \in \Delta$ y dada una sucesión $\{s^n\}$ tal que $s^n \to s$, $\liminf f(s^n) \geq f(s)$ y $\limsup f(s^n) \leq f(s)$. Dado que la demostración de ambas desigualdades es análoga, se realizará la prueba de la primera de ellas únicamente.

Sea $s \in \Delta$ y sean $\alpha > 0$ y $x \in Z$ tal que $\alpha s = U(x)$. Sea $\{s^n\}$ una sucesión tal que $s^n \to s$ y $0 < \beta < \alpha$ tal que $\beta s_i^n < \alpha s_i$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo consumidor i con $s_i > 0$. Para cualquier otro i con $s_i = 0$ sea $\{\delta_i^n\}$ dada por $u_i(\delta_i^n \omega) = \beta s_i^n$. Sea $\delta^n = \sum_{s_i=0} \delta_i^n$, se tiene que $\delta^n \to 0$ pues cada $\delta_i^n \to 0$ y son finitos.

Se define la sucesión de asignaciones $\{y^n\}$ mediante: $y_i^n = \begin{cases} \delta_i^n \omega & \text{si} \quad s_i = 0 \\ \\ (1-\delta^n)x_i & \text{si} \quad s_i > 0 \end{cases}$

Para cada dicha sucesión se verifica que $u_i(y_i^n) = \beta s_i^n$ si $s_i = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y que $u_i(y_i^n) \to u_i(x_i) = \alpha s_i > \beta s_i^n$ si $s_i > 0$. Por tanto, para n suficientemente grande, se tiene que $U(y^n) \geq \beta s^n$. Ahora bien, sea $\mu_i \in [0,1]$ tal que $u_i(\mu_i y_i^n) = \beta s_i^n$. Se tiene que:

$$\sum_{i=1}^{N} \mu_i y_i^n \leq \sum_{i=1}^{N} y_i^n \leq \omega \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

De esta forma, se ha construído una sucesión $\{\mu y^n\}$ de asignaciones factibles con $U(\mu y^n) = \beta s^n$. Como $\beta < \alpha$ es arbitratio, se concluye que $\liminf f(s_n) \geq f(s)$. $\square$

Si x es un óptimo de Pareto débil, luego $U(x)$ debe pertenecer a la frontera de U. En otras palabras, si x es un óptimo de Pareto débil y se define s como el vector normalizado de $U(x)$:

$$s = \frac{1}{\sum_i u_i(x_i)} U(x) = \frac{1}{\sum_i u_i(x_i)} (u_1(x_1), \ldots u_N(x_N)),$$

se tiene que $f(s)$ corresponde a un máximo, es decir, que el valor $f(s)s$ es alcanzado por U.

Sin embargo, con las hipótesis manejadas, no es posible garantizar que $f(s)$ sea un máximo para todo $s \in \Delta$, es decir, para que el supremo se alcance. Para ello, es necesario asumir que U es cerrado.

La prueba de existencia de equilibrio no se puede realizar si no se garantiza con cierta generalidad la existencia de óptimos de Pareto débiles, por tanto, se añadirá la hipótesis de que U es cerrado. En términos de preferencias, esta hipótesis toma la siguiente forma:

Sea $\{x^n\} \subset Z$ una sucesión para la cual si $n > m$ entonces $x_i^n \succeq_i x_i^m$ para todo i. Entonces, existe $x \in Z$ tal que $x_i \succeq_i x_i^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo i.

Como se mencionó anteriormente, la prueba de existencia se basa en un argumento de punto fijo basado en el Teorema de Kakutani, que se expone a continuación.

Teorema. 1.2 (Teorema de Kakutani) *Sea $K \subset \mathbb{R}^m$ un conjunto compacto y convexo y sea $\Gamma : K \to K$ una correspondencia hemi-continua superiormente*[1] *que toma valores no vacíos, cerrados y convexos. Entonces Γ tiene un punto fijo.*

Teorema. 1.3 (Mas-Collel, 1986.) *Supongamos que, además de las hipótesis del Capítulo 4, se verifica que:*

1. *U es cerrado,*
2. *existe un conjunto $K \subset L'$ convexo, $\sigma(L', L)$-compacto tal que $p \cdot \omega \neq 0$ para todo $p \in K$ y todo óptimo de Pareto débil puede ser soportado por algún $p \in K$.*

Entonces la economía tiene un quasi-equilibrio (x, p).

Dem.

La demostración será hecha en tres pasos: en el primero, se definirá una cierta correspondencia $\Phi : \Delta \to \mathbb{R}^N$ con la propiedad de que sus ceros corresponden a quasi-equilibrios de la economía. Seguidamente, se probará que Φ es una correspondencia hemi-continua superiormente, y, finalmente, se demostrará que Φ tiene al menos un cero.

Paso 1: definición de Φ y algunas propiedades.

Sea $f : \Delta \to \mathbb{R}$ como en la Proposición 1.1. Para cualquier $s \in \Delta$, sea $x(s)$ una asignación tal que $U(x(s)) = f(s)s$. Geométricamente, $x(s)$ corresponde a la asignación de $U \cap \mathbb{R}_+^N$ más lejana a 0 por la recta que une el origen y s, como se observa en la siguiente imagen.

Sin pérdida de generalidad se puede asumir que $\sum_i x_i = \omega$. En efecto, si esto no fuese así, el remanente se podría usar para mejorar la situación de algún consumidor.

[1] Una correspondencia $\Gamma : A \to B$ es hemi-continua superiormente en $a \in A$ si para toda sucesión $\{a_n\} \subset A$ con $a_n \to a$ y para toda sucesión $\{b_n\}$ tal que $b_n \in \Gamma(a_n)$, se tiene que si $b_n \to b$, entonces $b \in \Gamma(a)$.

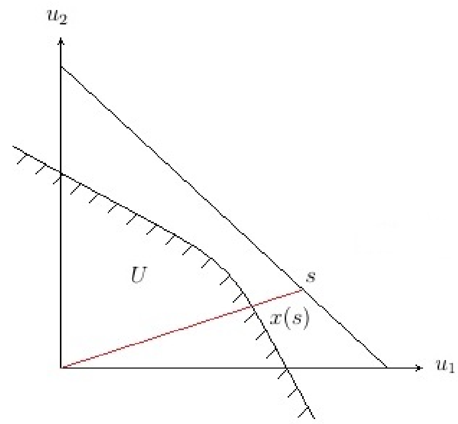

Figura 6.1: Definición geométrica de $x(s)$.

Sea $P(s)$ el conjunto de precios en K que soportan $x(s)$, o sea,

$$P(s) = \{p \in K : p \text{ soporta } x(s)\}.$$

Por la hipótesis número 2, se tiene que $P(s)$ es no vacio y convexo para cada $s \in \Delta$.

Ahora bien, se define la correspondencia $\Phi : \Delta \to \mathbb{R}^N$ por

$$\Phi(s) = \{(p \cdot (\omega_1 - x_1(s)), \ldots, p \cdot (\omega_N - x_N(s))) : p \in P(s)\}.$$

Luego, Φ toma valores no vacios y convexos, en virtud de las características del conjunto $P(s)$. Asimismo, se observa que $Im(\Phi) = \{z \in \mathbb{R}^N : \sum_i z_i = 0\}$ ya que $\sum_i x_i = \sum_i \omega_i = \omega$. Por otra parte, si $0 \in \Phi(s)$, entonces existe $p \in P(s)$ tal que $p \cdot \omega_i = p \cdot x_i(s)$ para todo i y si z es otra asignación con $u_i(z_i) \geq u_i(x_i(s))$ entonces se debe tener que $p \cdot z_i \geq p \cdot x_i(s)$ ya que p soporta $x(s)$, de donde resulta que $x(s)$ es un quasi-equilibrio.

Paso 2: Φ es una correspondencia hemi-continua superiormente.

Se consideran las sucesiones $\{s^n\}$ y $\{t^n\}$ tales que $s^n \to s$ en Δ y $t^n \in \Phi(s^n)$ para todo n. Sea p^n tal que $t_i^n = p^n \cdot (x_i(s^n) - \omega_i)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y para cada consumidor i. Como K es $\sigma(L', L)$-compacto, se tiene que $\{p^n\}$ tiene límite en K, pasando a una subsucesión si es necesario. Llamando p a dicho límite, se define $t_i = p \cdot (x_i(s) - \omega_i)$.

Hay que probar que $t = (t_1, \ldots, t_N) \in \Phi(s)$ y que $t^n \to t$. Para la primer afirmación, hay que mostrar que $p \in P(s)$, o sea, que p soporta la asignación $x(s)$. Para ello, sea z una asignación con $u_i(z_i) \geq u_i(x_i(s))$. Como $f(s^n)s^n \to f(s)s$ por ser f continua, se debe tener que a partir de cierto n, $u_i(z_i) \geq u_i(x_i(s^n))$ lo que implica que $p^n.z_i \geq p^n.s^n$ pues p^n soporta $x(s^n)$. Sumando y tomando límite, se obtiene que $p.\sum_i z_i \geq p \cdot \omega$. Luego, p soporta la asignación $x(s)$ y por tanto $t \in \Phi(s)$.

Para probar que $t^n \to t$, se observa que, como t^n está definida mediante $t_i^n = p^n \cdot (x_i(s^n) - \omega_i)$ y t está definido mediante $t_i = p \cdot (x_i(s) - \omega_i)$, basta con probar que $p^n \cdot x_i(s^n) \to p \cdot x_i(s)$ para cada i. Sea $z_i \in X_i$ tal que $u_i(z_i) \geq x_i(s)$, luego, a partir de cierto n se tiene que $u_i(z_i) \geq x_i(s^n)$. Se considera la asignación $(x_1(s^n), \ldots, x_{i-1}(s^n), z_i, x_{i+1}(s^n), \ldots, x_N(s^n))$. Como p^n soporta $x(s^n)$ se debe tener que:

$$0 \leq p^n \cdot (z_i - \omega_i) + \sum_{j \neq i} p^n \cdot (x_j(s^n) - \omega_j).$$

Por otro lado, se sabe que $\sum_j x_j(s^n) = \sum_j \omega_j$ por lo que $\sum_{j\neq i}(x_j(s^n) - \omega_j) = -(x_i(s^n) - \omega_i))$. Combinando esto con la desigualdad anterior, se tiene que:

$$\begin{aligned} p^n \cdot (z_i - \omega_i) + \sum_{j \neq i} p^n \cdot (x_j(s^n) - \omega_j) &= p^n \cdot (z_i - \omega_i) - p^n \cdot (x_i(s^n) - \omega_i) \\ &= p^n \cdot (z_i - x_i(s^n)). \end{aligned}$$

Se tiene entonces que $0 \leq \liminf p^n \cdot (x_i(s) - x_i(s^n))$ para todo i. Como $p^n \cdot x_i(s) \to p \cdot x_i(s)$ y $\liminf(-p^n \cdot x_i(s^n)) = -\limsup p^n \cdot x_i(s^n)$, se concluye que $p \cdot x_i(s) \geq \limsup p^n \cdot x_i(s^n)$. Ahora bien, sumando en i y recordando que $\sum_i x_i(s^n) = \sum_i x_i(s) = \omega$ se obtiene la siguiente cadena de desigualdades:

$$p \cdot \omega \geq \limsup \sum_i p^n \cdot x_i(s^n) = \limsup p^n \cdot \omega = p \cdot \omega.$$

Luego, $p^n \cdot x_i(s^n) \to p \cdot x_i(s)$ para todo i de donde se concluye, finalmente, que $t^n \to t$.

Paso 3: Φ tiene al menos un cero.

En primer lugar, se observa que si $0 \in \Phi(s)$ entonces existe $p \in P(s)$ tal que $p \cdot \omega_i = p \cdot x_i(s)$ para todo i y si z_i es tal que $u_i(z_i) \geq u_i(x_i(s))$ entonces $p \cdot z_i \geq p \cdot x_i(s)$ pues p soporta la asignación $x(s)$.

Por tanto, probar que Φ tiene un cero equivale a probar la existencia de un par (x, p) de equilibrio. Para mostrar esto, se considera la correspondencia auxiliar

$s \mapsto \Phi(s) + s$. Se observa que esta correspondencia hereda las propiedades de Φ y que mapea Δ en Δ, por lo que se está en las hipótesis de el Teorema 1.2 que afirma la existencia de un punto fijo para dicha correspondencia auxiliar. Se concluye finalmente que Φ tiene un cero.

$\square$

La continuidad conjunta del mapa $(x, p) \mapsto p \cdot x$, señalada como una de las principales dificultades que se presentan en dimensión infinita, en realidad no representa un gran inconveniente en la prueba precedente. En efecto, si se considera una secuencia $\{p^n\}$ de vectores precio con $p^n \to p$ en la topología $\sigma(L', L)$ y una secuencia de asignaciones $\{x^n\}$ con $x^n \to x$ en la topología $\sigma(L, L')$, en general no existen garantías de que $p^n \cdot x^n \to p \cdot x$. Sin embargo, en el argumento desarrollado en la prueba de el Teorema 1.3, se demuestra la convergencia bajo ciertas hipótesis específicas: (1) $\sum_i x_i = \omega$ y (2) p^n soporta x^n. Lo demostrado permite afirmas que si nos restringimos a los pares (x, p) que verifican las hipótesis (1) y (2), el mapa $(x, p) \mapsto p \cdot x$ resulta conjuntamente continuo.

Asimismo, se observa que en la prueba de el Teorema 1.3 no se hace uso de la continuidad total de las preferencias. Sin embargo, dicho Teorema sólo garantiza la existencia de un quasi-equilibrio. Es en la demostración de que un quasi-equilibrio es en efecto un equilibrio que la continuidad total de las preferencias es necesaria, como se presenta a continuación.

Proposición. 1.4 *Si además de las hipótesis del Capítulo 4 existe $z_i \in X_i$ tal que $p \cdot z_i < p \cdot \omega_i$ para cada consumidor i, entonces todo quasi-equilibrio es un equilibrio.*

Dem. Sea (x, p) un quasi-equilibrio y z_i como en las hipótesis.Si x_i no maximiza las preferencias del consumidor i dentro de sus posibilidades presupuestarias, entonces existe $y_i \in X_i$ tal que $y_i \succ_i x_i$ y $p \cdot y_i = p \cdot \omega_i$. Se considera z_i como en las hipótesis y se define, para cada $\alpha \in [0, 1)$ la canasta $\alpha y_i + (1 - \alpha) z_i$. Para cada $\alpha \in [0, 1)$, se verifica que $p \cdot [\alpha y_i + (1 - \alpha) z_i] < p \cdot \omega_i$. Por continuidad, existe $\alpha_0 \in [0, 1)$ tal que $\alpha_0 y_i + (1 - \alpha_0) z_i \succ_i x_i$, lo que contradice la hipótesis de quasi-equilibrio. $\square$

Cabe señalar que la prueba de esta última proposición es independiente de la dimensión, siendo válida tanto para el caso finito como para el caso infinito.

6.2. Existencia de Óptimos de Pareto

En el capítulo anterior se vio que si U es cerrado entonces la economía tiene óptimos de Pareto. El objetivo del presente capítulo es profundizar en este aspecto: se darán condiciones que garantizan que U es cerrado y se explorará la existencia y unicidad de óptimos de Pareto que maximizan cierta función de utilidad social.

Las hipótesis generales de este capítulo son similares a las manejadas en los previos: se asumirá que L es un espacio vectorial topológico Hausdorff, localmente convexo y completo. Asimismo, se pedirá a las preferencias $\succeq_i$ que sean completas, transitivas, reflexivas y estrictamente monótonas.

Siendo Δ el símplex $(N-1)$-dimensional, para cada $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_N)$, se introduce la siguiente función de utilidad social:

$$u_\lambda = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i u_i(x),$$

donde u_i corresponde a la función de utilidad individual del consumidor i.

Las funciones de utilidad social revisten cierto interés de política económica. En efecto, si bien existe consenso respecto a la deseabilidad de distribuir los bienes en una economía de forma tal que su asignación resulte un óptimo de Pareto, este concepto generalmente resulta vago cuando se persiguen objetivos de justicia social[2]. Es en virtud de esto, que muchas veces los planificadores centrales se focalizan en óptimos de Pareto que asimismo maximicen cierta función de utilidad social, como la presentada.

Teorema. 2.5 (Araujo, 1986.) *Si además de las hipótesis generales, se verifica que L es semi-reflexivo, $\succeq_i$ es $\sigma(L, L')$- continua[3] para todo i y el conjunto de asignaciones factibles Z es $\sigma(L, L')$-cerrado y acotado, entonces, la economía tiene asignaciones de Pareto óptimas.*

Más aún, si $\succeq_i$ puede ser representada mediante una función de utilidad u_i para todo $i = 1, \cdots, N$ al menos en el conjunto Z entonces, para todo $\lambda \in \Delta$ existe un óptimo de Pareto que es solución al siguiente problema de optimización:

[2] Por ejemplo, si las preferencias son estrictamente monótonas, asignar todos los bienes a un sólo consumidor resulta un óptimo de Pareto.

[3] Esto es, los conjuntos $\{x \in X_i : x \succeq_i y\}$ y $\{x \in X_i : y \succeq_i x\}$ son $\sigma(L, L')$-cerrados para todo $x \in X_i$.

$$\max_{x\in Z} \sum_{i=1}^{N} \lambda_i u_i(x).$$

Dem. En primer lugar se observa que si Z es $\sigma(L, L')$-cerrado y acotado, y L es semi-reflexivo, entonces en virtud de el Teorema 1.28, Z es compacto y por tanto, el conjunto de utilidades posibles U es cerrado.

Por otra parte, si las preferencias son $\sigma(L, L')$-continuas y admiten representación mediante funciones de utilidad (ver Teorema 0.2) entonces las mismas son $\sigma(L, L')$ continuas. Sumando esto al hecho de que Z es $\sigma(L, L')$-compacto, el problema de maximización planteado tiene solución u^*_λ. Por tanto, existe $x_\lambda \in Z$ tal que $u^*_{\lambda_i} = u_i(x_{\lambda_i})$ para todo i.

Dado que las preferencias son estrictamente monótonas, las utilidades también lo son, por lo que u_λ debe pertenecer a la frontera del conjunto de utilidades posibles. Se concluye entonces que x_λ es un óptimo de Pareto.

$\square$

Teorema. 2.6 *Si a las hipótesis del Teorema anterior se agrega que las funciones de utilidad u_i son estrictamente cóncavas, entonces existe una única solución al problema de maximización*

$$\max_{x\in Z} \sum_{i=1}^{N} \lambda_i u_i(x).$$

Dem. Si u_i es estrictamente cóncava para todo i, entonces su combinación convexa también lo es. Luego, el máximo de u_λ sobre el conjunto de asignaciones factibles se alcanza en un único punto. $\square$

Teorema. 2.7 (Araujo, 1986.) *Sea L como en las hipótesis generales y supongamos que toda economía que satisface:*

1. *$\succeq_i$ es $\sigma(L, L')$- continua para todo i,*
2. *el conjunto de asignaciones factibles Z es $\sigma(L, L')$-cerrado y acotado,*

tiene un óptimo de Pareto. Entonces, L debe ser semi-reflexivo.

Dem. Por absurdo, supóngase que L no es semi-reflexivo. Entonces, debe existir un conjunto C acotado $\sigma(L, L')$-cerrado que no es $\sigma(L, L')$-compacto. Sin pérdida de generalidad, se puede suponer que C es convexo y simétrico alrededor de 0. Como C no es $\sigma(L, L')$-compacto, existe un funcional lineal continuo p que no alcanza su supremo en C.

El siguiente paso consiste en definir una economía que no admite óptimos de Pareto. Sea $N = 2$, $X_1 = X_2 = C$ y $\omega_1 = -\omega_2 \in C$. Se consideran las preferencias, representadas mediante las funciones de utilidad $u_1(x) = p \cdot x$ y $u_2(x) = -p \cdot x$. Luego, supóngase que $(\hat{x}, -\hat{x})$ es un óptimo de Pareto, entonces, $\hat{x}$ debe ser solución de $\sup_{x \in C} p \cdot x$, que no existe. Luego, la economía no admite óptimos de Pareto, lo cual contradice la hipótesis. Por tanto, L debe ser semi-reflexivo. $\square$

Los Teoremas 2.5 y 2.7 conjuntamente afirman que si las preferencias son débilmente continuas y el conjunto de asignaciones factibles es cerrado y acotado respecto a la topología débil, entonces la existencia de óptimos de Pareto es equivalente a la semi-reflexividad del espacio de bienes.

Capítulo 7

Ejemplos y Conclusiones

Ejemplo. 0.1 ***Elección de la topología en*** L**.**

Como se mencionó en el Capítulo 3, la elección de una topología en el espacio de bienes debe responder a consideraciones económicas. En este ejemplo se verá cómo algunas restricciones sobre las preferencias pueden ser expresadas en términos topológicos.

Sea $L = l_\infty$ el espacio de sucesiones reales acotadas. Como se mencionó en la Introducción, se interpreta un elemento $x \in l_\infty$ como una secuencia de consumo en tiempo discreto sobre un horizonte temporal infinito. Se considera un consumidor, cuyo conjunto de consumición es L^+ y cuyas preferencias están dadas por la relación $\succeq$.

La continuidad de $\succeq$ respecto a la topología inducida por la norma en l_∞ no impone ninguna restricción sobre el momento en que el individuo prefiere consumir. En particular, la continuidad de las preferencias respecto a la norma resulta una hipótesis conveniente cuando se quiere expresar que los individuos asignan la misma utilidad al consumo de cierto bien, independientemente de cuándo sea consumido.

Por otra parte, la continuidad superior de $\succeq$ respecto a la topología débil $\sigma(l_\infty, l_1)$ impone una suerte de impaciencia superior, en el sentido de que ganancias en el consumo a futuro son percibidas como despreciables. En efecto, sean $x, y \in l_\infty$ tales que $x \succ y$ y sea, para cada $n \in \mathbb{N}$, $z_n \in l_\infty$ la secuencia de consumo que vale 0 en los primeros n períodos y 1 en adelante. Como l_1 es el espacio de sucesiones cuyas series convergen en valor absoluto, las colas deben tender a 0, por lo que $y + z_n \to y$ en la topología débil $\sigma(l_\infty, l_1)$. Por lo tanto, la semicontinuidad superior de $\succeq$ respecto a dicha topología implica que $x \succ y + z_n$ para

n suficientemente grande, lo que expresa el hecho de que ganancias de consumo futuras resultan despreciables. De forma análoga, la semi-continuidad inferior de $\succeq$ respecto a $\sigma(l_\infty, l_1)$ representa una impaciencia inferior: las pérdidas de consumo futuro resultan insignificantes.

Ejemplo. 0.2 ***Precios finitos.***

Una de las hipótesis manejadas en el Capítulo 4 es que los precios consisten en funcionales lineales $p : L \to \mathbb{R}$, es decir, que estén definidos en todas las canastas de L. Esta hipótesis si bien luce razonable, puede resultar restrictiva en algunos casos donde no todas las canastas están presentes en el mercado, como se mostrará en este capítulo.

Considérese una economía con un sólo consumidor $L = L_2([0,1])$, $X_1 = L^+$ y sea $\omega = 1$ la dotación de la economía. Con dicha dotación, el conjunto de consumición factible resulta:

$$Z = \left\{ f \in (L_2([0,1])^+) : f \leq 1 \right\} \subset L_\infty.$$

Ahora bien, si en lugar de considerarse $p \in L_2([0,1])$, se considera $p \in L_1([0,1]) \setminus L_2([0,1])$ se tendrá que p asigna precios finitos a todas las canastas factibles pero, sin embargo, p no asigna un precio finito a todos los elementos de $L_2([0,1])$.

Ejemplo. 0.3 ***Interpretación económica de los precios.***

Al trabajar con los espacios l_∞ y L_∞ la interpretación económica de los precios se vuelve engorrosa debido a la dificultad que presentan sus espacios duales. Sería una característica deseable que los precios de equilibrio pertenecieran a l_1 y L_1 respectivamente, pues éstos tienen interpretaciones económicas naturales. Sin embargo, el siguiente ejemplo muestra que la posibilidad de que los precios de equilibrio no pertenezcan a estos espacios es real.

Considérese una economía con un sólo consumidor, siendo el espacio de bienes $L = l_\infty$, el conjunto de consumición $X_1 = l_\infty^+$ y la dotación inicial $\omega = (1, 1, \cdots)$. Sea $u : l_\infty^+ \to \mathbb{R}$ la función de utilidad dada por:

$$u(x) = \liminf x(t).$$

Luego, u resulta cóncava y continua respecto a la topología inducida por la norma en l_∞, por lo que debe existir $p \in l'_\infty$ tal que $p \cdot x \geq p \cdot \omega > 0$ siempre que

$u(x) \geq u(\omega) = 1$. Ahora bien, dicho precio no puede pertenecer a l_1. En efecto, sea $\{x^k\} \subset l_\infty$ dada por:

$$x^k(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t < k \\ \\ 2 & si \quad t \geq k \end{cases}$$

Luego, $u(x^k) = 2 > u(\omega)$ pero, si $p \in l_1$ se tendría que $p \cdot x^k \to 0$ mientras que $p \cdot \omega > 0$, lo cual es absurdo.

En este caso el hecho de que $p \notin l_1$ tiene sentido económico ya que la función de utilidad mencionada depende únicamente de lo que pasa en el infinito, por lo que es de esperarse que el precio de equilibrio tenga toda su masa concentrada en infinito.

Ejemplo. 0.4 ***Conjunto de utilidad factible no cerrado.***

Una de las hipótesis fundamentales del Teorema 1.3 es que el conjunto de utilidades alcanzables U es cerrado. Esta propiedad se da naturalmente en dimensión finita, ya que el conjunto Z de asignaciones factibles es cerrado y acotado y, por ende, compacto. Sin embargo, en dimensión infinita esto no tiene por qué ser así, como se muestra en este ejemplo, que resalta la necesidad de incluir la hipótesis de que U sea cerrado.

Se considera una economía con dos consumidores cuyo espacio de bienes es $L = l_\infty$. Las preferencias de los consumidores son descriptas mediante las siguientes funciones de utilidad:

$$u_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n} \text{ y } u_2(x) = \liminf x_n,$$

y las dotaciones iniciales son $\omega_1 = 1$ y $\omega_2 = 1$. Luego, el conjunto de utilidad factible resulta:

$$Z = \left\{ \left(\{x_n^1\}, \{x_n^2\} \right) \in l_\infty \times l_\infty : x_n^1 + x_n^2 \leq 2 \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Ahora bien, para determinar el conjunto de utilidad factible, se observa que si $(\{x_n^1\}, \{x_n^2\})$ es tal que $x_n^2 \neq 0$ para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces $u_1(x_n^1) < \sum 1/2^n = 2$. Por tanto, el conjunto de utilidad factible resulta:

$$U = \left\{ (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 : u_1 < 2, u_2 \leq 2 \text{ o bien } u_1 \leq 2, u_2 \leq 0 \right\}.$$

Como se muestra en la siguiente figura, este conjunto no resulta cerrado.

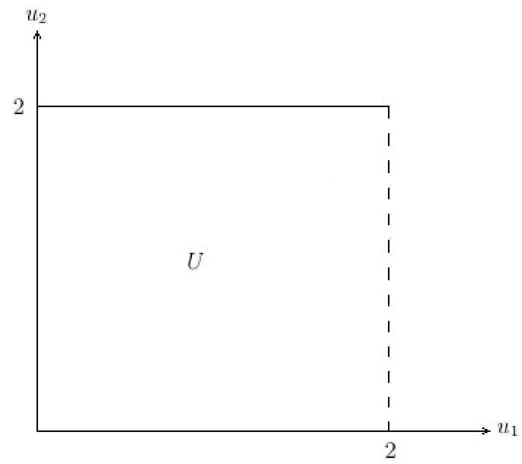

Figura 7.1: Conjunto de utilidad factible U.

Ejemplo. 0.5 ***No existencia de precio soporte no nulo.***

Como se señaló tanto en el Capítulo 3 como a la hora de probar el Segundo Teorema de Bienestar Social, una de las principales dificultades en dimensión infinita es la separación de conjuntos convexos (en particular, el conjunto de canastas preferidas), dado que la mayoría de los espacios trabajados tienen cono positivo con interior vacío. Este ejemplo muestra que las hipótesos adicionales trabajadas para la prueba de un sólo consumidor son necesarias para garantizar la existencia de un precio soporte no nulo para óptimos de Pareto.

Considérese el espacio de bienes es $L = l_2$ y el conjunto de consumición $X_1 = L^+$. Sea la función de utilidad $u : l_2^+ \to \mathbb{R}$ dada por $u(x(t)) = \sum_{t=0}^{\infty} v_t(x(t))$ donde $v_t(x(t))$ está dada por:

$$v_t(x(t)) = \begin{cases} 2^t x(t) & si \quad x(t) \leq \frac{1}{2^{2t}} \\ \\ 2^{-t}[x(t) + 1 - 2^{-2t}] & si \quad x(t) > \frac{1}{2^{2t}} \end{cases}$$

Se tiene que u es continua respecto a la topología inducida por la norma, cóncava y monótona. Sin embargo, si $\omega \in l_2$ es tal que $\omega(t) = 2^{-4t}$, entonces el conjunto de canastas prefereidas a ω no puede ser soportado por ningún precio no nulo.

En efecto, si se considera una canasta x dada por $x(t) = 1/2^{kt}$ con $k = 4 - \epsilon$ entonces x es preferida a ω. Luego, si p es un precio soporte, debe verificar que: $p \cdot x > p \cdot \omega$. El único candidato resulta ser $p(t) = 2^t$ que no pertenece a l_2.

En este ejemplo, también es posible probar de forma directa que las preferencias no son propias.

Ejemplo. 0.6 ***Preferencias propias pero no uniformemente propias.***

Si bien la hipótesis de preferencias propias garantiza la existencia de un precio soporte para el Segundo Teorema de Bienestar cuando se trabaja con un sólo consumidor, como se mencionó en la Sección 5.2.2, esto no alcanza para garantizar la soportabilidad de los óptimos de Pareto sociales. Este ejemplo pretende ilustrar la necesidad de introducir la hipótesis más restrictiva de preferencias uniformemente propias para tratar el caso de varios consumidores.

Se considera una economía con dos consumidores sobre el espacio de bienes $L = l_2$ con conjuntos de consumición $X_1 = X_2 = l_2^+$. Sea $u : l_2^+ \to \mathbb{R}$ como en el ejemplo anterior. Si q_1, q_2 son funcionales lineales estrictamente positivos en l_2 y son no colineales, se definen las funciones de utilidad:

$$u_i(x_i) = \text{mín}\{u(x_i), q_i \cdot x_i + u_i(\omega) - q_i \cdot \omega\},$$

siendo $\omega = \omega_1 = \omega 2$ la dotación inicial de cada consumidor. Estas funciones de utilidad son continuas, cóncavas y estrictamente monótonas. Para cada consumidor, el conjunto de canastas preferidas a ω_i es:

$$\{x_i \in l_2^+ : u(x_i) \geq u(\omega_i)\} \cap \{x_i \in l_2^+ : q_i \cdot x_i \geq q_i \cdot \omega_i\}.$$

Ahora bien, para la asignación Pareto óptima (ω_1, ω_2), los únicos precios que que soportan los conjuntos de canastas preferidas son: para el consumidor 1, múltiplos positivos de cualquier combinación convexa entre q_1 y 2^t mientras que, para el consumidor 3 múltiplos positivos de cualquier combinación convexa entre q_2 y 2^t. Los únicos elementos mencionados que pertenecen a l_2 son los propios q_1 y q_2, pero como fueron elegidos no colineales, esto significa que no hay un precio en común que sirva de soporte para ambos conjuntos.

Ejemplo. 0.7 ***Espacios no localmente sólidos.***

Sea $L = L_\infty([0,1])$ el espacio de bienes con la topología débil $\sigma(L_\infty, C^1([0,1]))$ de forma tal que el espacio dual de L resulta $C^1([0,1])$. Considérese una economía con dos consumidores, los conjuntos de consumición $X_1 = X_2 = L^+$ y dotaciones iniciales $\omega_1 = \omega_2 = 1$. Se definen las funciones de utilidad:

$$u_1(x_1) = \int tx_1(t)dt \text{ y } u_2(x_2(t)) = \int (1-t)x_2(t)dt.$$

Estas funciones de utilidad son continuas y uniformemente propias, dado que son lineales. Sin embargo, si se considera el óptimo de Pareto (ω_1, ω_2) dado por $\omega_1 = \chi_{[0,1/2]}$ y $\omega_2 = \chi_{[1/2,1]}$ entonces no existe un precio $p \in C^1([0,1])$ que soporte dicha asignación. En efecto, para $i = 1, 2$ el único funcional lineal que verifica que si $x_i \succeq \omega_i$ entonces $p \cdot x_i \geq p \cdot \omega_i$ es

$$p(t) = \begin{cases} 1-t & si \quad 0 \leq t \leq 1/2 \\ \\ t & si \quad 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

o algún múltiplo de éste, pero $p \notin C^1([0,1])$.

La falla que presenta este ejemplo es que las operaciones de lattice no resultan continuas al considerar $L = L_\infty([0,1])$ con la topología débil $\sigma(L_\infty, C^1([0,1]))$. En efecto, si se consideran las funciones de Rademacher discutidas en 3, se observa que si bien $r^n \to 0$ en la topología débil, $r^n \vee r^n = 1$, por lo que las operaciones de lattice no son continuas y por la Proposición 3.45, el espacio falla en ser localmente sólido.

Ejemplo. 0.8 ***Preferencias propias respecto a una topología.***

Uno de los principales conceptos trabajados es el de preferencias propias y uniformemente propias pues resulta la hipótesis clave para demostrar la existencia de precios soporte para óptimos de Pareto y, más aún, la existencia de pares de equilibrio. Cabe destacar, que ésta condición es una condición topológica, expresada mediante el requerimento del que el cono Γ sea abierto. El siguiente ejemplo muestra que, al cambiar la topología, una misma preferencia puede dejar de ser propia.

Considérese el espacio de medidas $L = M([0,1])$ con la topología débil $\sigma(M([0,1]), C[0,1])$ de forma tal que $L' = C[0,1]$. Se define la función de utilidad $u : L^+ \to \mathbb{R}$ dada por:

$$u(\mu) = \int t^{1/2} d\mu.$$

Esta función de utilidad es continua respecto a la topología débil $\sigma(M([0,1]), C[0,1])$. Dada una dotación inicial ω una medida de Lebesgue, el único precio soporte para la asignación ω resulta $p \in C[0,1]$ dado por $p(t) = t^{1/2}$.

Sin embargo, si se considera $L = M([0,1])$ con la topología débil $\sigma(M([0,1]), \mathrm{Lip}[0,1])$ de forma tal que $L' = \mathrm{Lip}[0,1]$ el conjunto de funciones que son Lipschitz en $[0,1]$, u sigue siendo continua en esta topología pero $p \notin \mathrm{Lip}[0,1]$.

Como comentarios finales, cabe destacar que la extensión de la Teoría de Equilibrio General de economías finitas a economías infinitas no resulta tan directa como sería deseable. Las dificultades matemáticas, así como las dificultades de interpretación económica de los resultados, constituyen un gran desafío en dicha extensión.

Los espacios de Riesz topológicos parecen ser los espacios abstractos más generales que capturan las especificidades de una economía. A través de ellos, se recuperan las nociones de orden y positividad que suelen estar presentes al hablar de bienes.

Sin embargo, la carencia de una topología canónica localmente convexa, sólida y Hausdorff en éstos espacios hace que la modelación de economías presente mayores dificultades que deban ser atendidas mediante rigurosos análisis y, muchas veces, mediante la incorporación de hipótesis adicionales.

Bibliografía

[1] Accinelli, E. *“Existence of GE: Are the Cases of Non Existence a Cause of Serious Worry?”* General Equilibrium: Problems and Prospects. 2002.

[2] Accinelli, E. *“The equilibrium set of infinite dimensional Walrasian economies and the natural projection”* Journal of Mathematical Economics, v.: 49 6. 2013.

[3] Aliprantis, C. *“Equilibria in markets with a Riesz space of commodities”.* Journal of Mathematical Economics. 1983.

[4] Aliprantis, C.; Border, K. *“Infinite Dimensional Analysis”.* Berlin, Springer-Verlag. 1994.

[5] Araujo, A. *“A note on the existence of Pareto Optima in topological vector spaces”.* Economic Letters 23. 1986.

[6] Chichilnisky, G. *“The cone condition, properness, and extremely desirable commodities”.* Econ. Theory 3. 1993.

[7] Chichilnisky, G.; Kalman, P. *“Application of functional analysis to models of efficient allocation of economic resources”.* J. Optim. Theory App. 30. 1980.

[8] Debreu, G. *“Valuation equilibrium and Pareto optimum”.* Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 40. 1954.

[9] Green, J.; Mas-Collel, A.; Whinston, M. *“Microeconomic theory”.* Oxford University Press. 1995.

[10] Klee, V. *“On a question of Bishop and Phelps”.*American Journal of Mathematics, 85:95-98. 1963.

[11] Mas-Colell, A. *“The Price Equilibrium Existence Problem in Topological Vector Lattices”.* Econometrica, Vol. 54, No. 5. 1986.

[12] Mas-Colell, A.; Zame, W. *"Equilibrium Theory in Ininite Dimensional Spaces".* Handbook of Mathematical Economics. 1991.

[13] Narici, L.; Beckenstein, E. *"Topological Vector Spaces".* A Program of Monographs, Textbooks, and Lecture Notes. 1985.

[14] Rustichini, A.; Yannelis, N. *"Edgeworth's conjecture in economies with a continuum of agents and commodities".* J. Math. Econ. 20. 1991.

[15] Yannelis, N.; Zame, W. *"Equilibria in Banach lattices without ordered preferences".* J. Math. Econ. 15. 1986.