



UNIVERSIDAD
DE LA REPUBLICA
URUGUAY



Resolución de Problemas Inversos en Mecánica de
Sólidos con aplicación al modelado e identificación de
propiedades mecánicas de tejidos biológicos

Jorge Martín Pérez Zerpa

Programa de Posgrado en Ingeniería Estructural
Facultad de Ingeniería
Universidad de la República

Montevideo – Uruguay
Diciembre de 2015



UNIVERSIDAD
DE LA REPUBLICA
URUGUAY



Resolución de Problemas Inversos en Mecánica de Sólidos con aplicación al modelado e identificación de propiedades mecánicas de tejidos biológicos

Jorge Martín Pérez Zerpa

Tesis de Doctorado presentada al Programa de Posgrado en Ingeniería Estructural, Facultad de Ingeniería de la Universidad de la República, como parte de los requisitos necesarios para la obtención del título de Doctor en Ingeniería Estructural.

Director de tesis:

Prof. D.Sc. Alfredo Canelas Botta

Codirectores:

Prof. D.Sc. Daniel Bia Santana

Prof. D.Sc. Ricardo L. Armentano

Montevideo – Uruguay

Diciembre de 2015

Pérez Zerpa, Jorge Martín

Resolución de Problemas Inversos en Mecánica de Sólidos con aplicación al modelado e identificación de propiedades mecánicas de tejidos biológicos / Jorge Martín Pérez Zerpa. - Montevideo: Universidad de la República, Facultad de Ingeniería, 2015.

XVIII, 150 p.: il.; 29, 7cm.

Director de tesis:

Alfredo Canelas Botta

Codirectores:

Daniel Bia Santana

Ricardo L. Armentano

Tesis de Doctorado – Universidad de la República, Programa de Ingeniería Estructural, 2015.

Referencias bibliográficas: p. 139 – 150.

1. Problemas inversos, 2. Elasticidad,
3. Viscoelasticidad, 4. Optimización convexa,
5. Biomecánica. I. Canelas Botta, Alfredo *et al.*
II. Universidad de la República, Programa de Posgrado en
Ingeniería Estructural. III. Título.

INTEGRANTES DEL TRIBUNAL DE DEFENSA DE TESIS

Prof. Luis Segura, Dr.Ing.

Prof. Pablo J. Blanco, DSc.

Prof. Gabriel Usera, Dr.Ing.

Prof. Pablo Ezzatti, Dr.Ing.

Prof. Pedro Curto, Dr.Ing.

Montevideo – Uruguay
Diciembre de 2015

A mi hermano Diego y mi madre Selva.

Agradecimientos

Agradezco a mi orientador el Profesor Alfredo Canelas por su apoyo, por su respeto y por ser un ejemplo de dedicación al trabajo científico de calidad.

Agradezco al Profesor Daniel Bia por sus aportes y su apoyo, vitales para hacer posible este trabajo, así como también agradezco a todo el equipo humano de CUIiDARTE. Al Profesor Armentano por sus aportes a mi formación al igual que al equipo del Grupo de Ingeniería Aplicada a los Procesos Biológicos y Agrícolas del Centro Universitario Paysandú.

Especialmente agradezco a los integrantes del tribunal por haber aceptado formar parte del mismo y por haber aportado a la mejora de la presente tesis. Destaco el agradecimiento al Profesor Pablo Blanco, del grupo *Hemodynamics Modeling Laboratory* del *Laboratório Nacional de Computação Científica*, por su seriedad y disposición a trabajar en cooperación, así como también a todo el gran equipo de estudiantes e investigadores que dirige, en particular a Gonzalo Maso, Gonzalo Ares y Carlos Bulant.

Agradezco a mis colegas y a las autoridades del Instituto de Estructuras y Transporte por apoyar la realización de este plan de trabajo. En particular agradezco a Pablo Castrillo por su apoyo como amigo y compañero de trabajo en numerosas ocasiones, así como también por haber colaborado en la implementación del pos-proceso de la herramienta de análisis de Elasticidad no lineal desarrollada durante mi trabajo. Al Profesor Berardi Sensale por las ideas aportadas. A Jimena Machado por su gran ayuda en la obtención de material bibliográfico.

Agradezco a todos los funcionarios docentes y no docentes de la Facultad de Ingeniería que han sido parte de mi formación (académica, profesional y personal) desde mi ingreso en el año 2003.

Agradezco a la Comisión Académica de Posgrado y a la Profesora María Simón por apoyar el desarrollo de la clase UdelarT_EX (utilizada para esta tesis) y a Pablo Castrillo y Mihdí Caballero por realizar el desarrollo.

Agradezco a toda mi familia por su apoyo constante en todos mis proyectos. A mis amigos por la motivación para seguir adelante y a Mariangel por acompañarme en este cierre de etapa y en el inicio de otras.

Finalmente agradezco a las agencias financiadoras que apoyaron este trabajo, la Agencia Nacional de Investigación e Innovación (fondos FMV-3-2011-1-6125 y POS-2011-1-3570) y la Comisión Sectorial de Investigación Científica.

La simplicidad de la matemática

“Existe una opinión muy generalizada según la cual la matemática es la ciencia más difícil cuando en realidad es la más simple de todas. La causa de esta paradoja reside en el hecho de que, precisamente por su simplicidad, los razonamientos matemáticos equivocados quedan a la vista. En una compleja cuestión de política o arte, hay tantos factores en juego y tantos desconocidos o inaparentes, que es muy difícil distinguir lo verdadero de lo falso. El resultado es que cualquier tonto se cree en condiciones de discutir sobre política y arte -y en verdad lo hace- mientras que mira la matemática desde una respetuosa distancia.”

Ernesto Sábato, “Uno y el universo”, 1945.

RESUMEN

Los problemas de modelado e identificación de propiedades mecánicas consisten en buscar reproducir un comportamiento constitutivo observado, a través de la identificación de parámetros de un modelo dado. Dada la importancia de sus aplicaciones, el planteo y resolución de estos problemas en el estudio de tejidos biológicos ha generado gran interés en diversas comunidades científicas en las últimas décadas. En esta tesis se desarrollan nuevas herramientas para la resolución de problemas inversos asociados al modelado del comportamiento mecánico de tejidos biológicos.

Se presentan tres nuevas formulaciones de optimización convexa del problema de identificación no homogénea de material elástico lineal. Se desarrolla también una metodología para incluir una técnica de regularización, junto con una estrategia para la elección del parámetro de regularización. Se resuelven seis ejemplos numéricos para validar y comparar las formulaciones propuestas. Analizando los resultados se concluye que las mismas son más eficientes que las presentes en la literatura, así como también apropiadas para su aplicación a datos con errores.

Se presenta también un nuevo modelo viscoelástico fraccional para el modelado del comportamiento constitutivo del tejido arterial. Se desarrolla un método de caracterización, el cual es aplicado a la resolución de tres ejemplos numéricos con datos artificiales, comprobando su efectividad. Al aplicar el método a datos obtenidos experimentalmente de presión y diámetro de arterias, se muestran las ventajas del nuevo modelo y su factibilidad para ser aplicado a datos obtenidos de forma no invasiva.

Se concluye que tanto las formulaciones propuestas para el Problema de Identificación como el nuevo modelo viscoelástico fraccional constituyen aportes a la resolución de problemas inversos asociados al modelado de tejidos biológicos. Se presentan recomendaciones sobre posibles cambios en procedimientos de obtención de datos de presión y diámetro en humanos. También se presentan trabajos futuros a desarrollar para concretar a corto plazo la aplicación a datos obtenidos *in-vivo*.

Palabras claves:

Problemas inversos, Elasticidad, Viscoelasticidad, Optimización convexa, Biomecánica.

ABSTRACT

The modeling and identification of mechanical properties of solids consists in obtaining a representation of the constitutive behavior observed through the determination of parameters of a given model. Given the importance of their applications, the formulation of these problems in biological tissue modeling have raised increasing interest in the last decades. In this thesis, new tools for the resolution of these problems are presented.

Three new formulations of the non homogeneous linear elastic material identification problem are presented. A methodology is developed for the efficient application of an appropriate regularization technique along with an automatic selection strategy of the regularization parameter. Six numerical examples are solved using synthetic input data. The results obtained let us conclude that the proposed formulations are more efficient than others presented in the literature.

A new fractional viscoelastic element is also presented, which is used to improve viscoelastic models usually applied to the modeling of arterial tissue constitutive behavior. A numerical method for the characterization of mechanical properties of viscoelastic models is applied to fit data synthetically generated, verifying the effectiveness of the method. The method is finally applied using experimental data obtained using ovine arteries, showing that the method can be applied to data obtained through non-invasive procedures.

It is concluded that the contributions made to the material identification and the viscoelastic modeling represent advances in the resolution of problems associated with the modeling of biological tissue behavior. Recommendations for modifications of the noninvasive experimental procedures applied for pressure diameter measurement in adults are suggested. Important issues for future research are enumerated, particularly those tasks related to the processing of data obtained through *in-vivo* procedures.

Keywords:

Inverse Problems, Elasticity, Viscoelasticity, Convex Optimization, Biomechanics.

Lista de figuras

1.1	Gráfico de causas de muerte en humanos a nivel global.	3
1.2	Gráfico con causas de muerte en aumento destacadas.	5
1.3	Imagen de sección transversal de arteria carótida.	7
2.1	Deformación de barra sometida a momento torsor.	15
2.2	Esquema de región Ω ocupada por el sólido.	16
2.3	Esquema del problema directo de Elasticidad Lineal.	19
2.4	Esquemas de modelos Sólido Estandar Lineal y Doble brazo de Maxwell-Wiechert.	24
2.5	Esquema de estructura reticulada plana.	30
2.6	Esquema de estructura reticulada óptima obtenida.	31
2.7	Esquema del Problema de Identificación de Material.	36
3.1	Esquema de sección longitudinal arteria.	40
4.1	Resultados de ejemplo unidimensional de identificación.	53
5.1	Esquema de geometría y condiciones de contorno de Ejemplo 1.	71
5.2	Resultados de Ejemplo 1, identificación sin regularización.	76
5.3	Resultados de Ejemplo 1, módulos de Young obtenidos utilizando datos con error de interpolación.	77
5.4	Resultados de Ejemplo 1, errores relativos obtenidos utilizando datos con error de interpolación.	78
5.5	Esquema de geometría y condiciones de contorno de Ejemplo 2.	79
5.6	Resultados de Ejemplo 2, módulos de Young obtenidos utilizando datos con error en E	80
5.7	Resultados de Ejemplo 2 errores relativos obtenidos utilizando datos con error en E	80

5.8	Resultados de Ejemplo 2, módulos de Young obtenidos utilizando datos con error en desplazamientos.	82
5.9	Resultados de Ejemplo 2, errores relativos obtenidos utilizando datos con error en desplazamientos.	82
5.10	Resultados de Ejemplo 3, valores de tiempos de ejecución y errores obtenidos para mallas de diferente cantidad de elementos finitos.	84
5.11	Esquema de Ejemplo 4: geometría y particiones de malla.	86
5.12	Resultados de Ejemplo 4, identificación con 16 grupos de elementos.	89
5.13	Resultados de Ejemplo 4, módulos de Young obtenidos por identificación sin grupos.	90
5.14	Resultados de Ejemplo 4, errores relativos obtenidos por identificación sin grupos.	91
5.15	Resultados de Ejemplo 4, identificación realizada con un campo de desplazamientos y datos con error en E	93
5.16	Resultados de Ejemplo 4, identificación con tres desplazamientos separados y error en E	94
5.17	Resultados de Ejemplo 4, errores relativos, identificación con tres desplazamientos separados y error en E	94
5.18	Resultados de Ejemplo 5, geometría considerada y comparación de desplazamientos.	96
5.19	Resultados de Ejemplo 5, mapas de propiedades mecánicas obtenidas.	97
5.20	Ejemplo 5, geometría anular, comparación de desplazamientos de MEF y <i>Optical Flow</i>	98
5.21	Resultados de Ejemplo 5 con geometría anular, propiedades mecánicas obtenidas.	99
5.22	Esquema de Ejemplo 6: geometría, condiciones de contorno y malla de 1250 elementos.	100
5.23	Ejemplo 6: Deformación y mapa de magnitudes de desplazamientos (<i>Displacements</i>) producidos para la carga aplicada y malla no estructurada de 2254 elementos.	101
5.24	Resultados de Ejemplo 6, módulos de Young obtenidos.	102
6.1	Esquema de modelo reológico Sólido Estandar Lineal Fraccional	110

7.1	Resultados de Ejemplo 1: histéresis obtenidas usando datos sin error y con error.	119
7.2	Gráfico de función objetivo del óptimo para cada valor $\alpha \in S_\alpha$ para Ejemplo 1.	121
7.3	Resultados de Ejemplo 2, gráfica de valores óptimos de función objetivo con $\alpha \in [0.3, 1.6]$	123
7.4	Resultados de Ejemplo 3, gráfico de valores de la función objetivo (<i>Fitness</i>).	125
7.5	Resultados de Ejemplo 3, histéresis tensión-deformación (<i>stress-deformation</i>) obtenidas usando datos de $\beta = 10000$, identificación usando modelo con <i>spring-pot</i> y modelo con elemento HOSP.126	
7.6	Esquema de sistema arterial ovino.	127
7.7	Resultados de Ejemplo 4, histéresis obtenidas experimental y de modelo usando I_α^1 y I_α^2	129
7.8	Resultados de Ejemplo 4, gráfico de valores óptimos de función objetivo.	129
7.9	Resultados de Ejemplo 4, histéresis experimental y de modelo obtenidas para Aorta Torácica para I_α^1 y para I_α^2	130

Lista de tablas

1.1	Porcentajes de causas de muerte en humanos a nivel global. . .	4
5.1	Ejemplo 1: promedios de niveles de error η_E y $\eta_{\mathbf{u}}$ obtenidos. . .	73
5.2	Resultados de Ejemplo 1, error introducido en E	74
5.3	Resultados de Ejemplo 1, error de interpolación en \mathbf{U}	75
5.4	Resultados de Ejemplo 2, error en E , $\eta_E = 0.1$	79
5.5	Resultados de Ejemplo 2, ruido $\delta_U = 0.01$	81
5.6	Resultados de Ejemplo 3.	84
5.7	Resultados de Ejemplo 4, para identificación con 3 grupos de elementos.	88
5.8	Resultados de Ejemplo 4, identificación usando 16 grupos de elementos.	88
5.9	Resultados de Ejemplo 4, identificación sin utilizar grupos de elementos.	90
5.10	Ejemplo 3, tiempos requeridos por procedimientos numéricos usados.	90
5.11	Resultados de Ejemplo 4.	93
7.1	Resultados de Ejemplo 1, valores promedio de cinco conjuntos de datos generados para cada error.	120
7.2	Resultados de Ejemplo 2	122
7.3	Resultados de Ejemplo 3.	125
7.4	Resultados de Ejemplo 4, usando datos de Aorta Ascendente. . .	128

Lista de símbolos

Lista de los símbolos más relevantes de la tesis.

- α Orden de derivación fraccional, 105
- α_R Factor de regularización, 35
- B** Matriz de derivadas de funciones de interpolación, 21
- $\tilde{\mathbf{B}}$ Matriz modificada de derivadas de funciones de forma, 61
- χ Función de deformación, 10
- C** Tensor constitutivo, 17
- \mathcal{E}_{CEGM} Funcional de *Constitutive Equation Gap Method*, 37
- \mathcal{E}_q Funcional CEG modificado cuadrático, 65
- E Módulo de Young, 20
- ϵ Tensor de deformaciones infinitesimales, 16
- η Viscosidad de amortiguadores en modelos viscoelásticos, 23
- η_E Nivel de error introducido en módulos de Young, 72
- $\eta_{\mathbf{u}}$ Nivel de error introducido en los desplazamientos, 73
- \mathcal{E}_{tot} Energía potencial total del sólido, 11
- E** Vector de valores de módulos de Young de elementos, 42
- f_s Frecuencia de muestreo, 25
- Γ Subconjunto del contorno de región Ω , 10
- K** Matriz de rigidez de Método de Elementos Finitos, 21
- L** Tensor de deformaciones de Lagrange, 11
- λ Primer parámetro de Lamé, 12
- \mathbb{L}^m Cono de Lorentz, 29
- μ Segundo parámetro de Lamé o módulo de corte, 12
- N** Matriz de funciones de interpolación, 21
- ν Coeficiente de Poisson, 20
- Ω Región del espacio euclideo ocupada por el sólido, 10

- Ψ Función de densidad de energía de deformación, 11
- \mathbf{Q} Conjunto cónico, 28
- \mathbb{Q}^m Cono de Lorentz rotado, 29
- \mathbb{R} Conjunto de los números reales, 10
- \mathcal{R} Funcional de regularización, 35
- \mathbf{S} Segundo tensor de Piola-Kirchhoff o tensor de tensiones de Cosserat, 12
- $\boldsymbol{\sigma}$ Tensor simétrico de tensiones de Cauchy, 12
- Σ Conjunto de campos de tensores de tensión estáticamente admisibles, 37
- τ_ϵ Tiempo de fluencia de modelos viscoelásticos, 24
- τ_σ Tiempo de relajación de modelos viscoelásticos, 24
- τ_U y τ_F Variables auxiliares en formulación cónica de identificación no homogénea, 60
- \mathbf{u} Campo vectorial de desplazamientos, 10
- \mathbf{U} Vector de desplazamientos nodales, 20
- \mathbf{u}^m Campo de desplazamientos medido, 35
- \mathcal{U} Conjunto de desplazamientos cinemáticamente admisibles, 18
- \mathbf{U}^m Vector de desplazamientos nodales medidos, 42
- \emptyset Conjunto vacío, 10
- \mathcal{V} Conjunto de desplazamientos virtuales, 18
- \mathbf{Z} Variables auxiliares asociadas a la variación de módulos de Young entre elementos, 57

Tabla de contenidos

Lista de figuras	x
Lista de tablas	XIII
Lista de símbolos	XV
I Introducción	1
1 Introducción	2
2 Preliminares	10
2.1 Elasticidad	10
2.1.1 Elasticidad no lineal	10
2.1.2 Elasticidad lineal: caso compresible	16
2.1.3 Elasticidad lineal: caso incompresible	21
2.2 Viscoelasticidad	23
2.2.1 Modelos viscoelásticos	23
2.2.2 Transformada Discreta de Fourier	25
2.3 Optimización convexa	26
2.3.1 Nociones básicas de optimización no lineal	26
2.3.2 Optimización cónica	28
2.3.3 Optimización cuadrática	33
2.4 Problema Inverso de Identificación de Material	34
2.4.1 Teoría de Problemas Inversos	34
2.4.2 Problema Inverso de identificación de material	35
3 Estado del arte	39
3.1 Sobre la Biomecánica	39

3.2	Revisión identificación no homogénea	41
3.3	Revisión de modelado viscoelástico	45
II Identificación no homogénea		48
4	Métodos para Identificación no Homogénea	49
4.1	Ejemplo unidimensional	50
4.2	Regularización	54
4.2.1	Elección del término regularizador para el PIM	54
4.2.2	Aplicación de regularización	55
4.2.3	Análisis de coeficiente de regularización	57
4.3	Nuevas formulaciones del PIM	58
4.3.1	Formulaciones cónicas del PIM	59
4.3.2	Formulación Cuadrática del PIM	64
4.4	Implementación de formulaciones existentes	66
4.4.1	Error cuadrático en desplazamientos	67
4.4.2	Constitutive Equation Gap	67
5	Resultados numéricos	69
5.1	Resultados numéricos comparación formulaciones	70
5.1.1	Ejemplo 1	70
5.1.2	Ejemplo 2	77
5.1.3	Ejemplo 3	83
5.2	Resultados numéricos problemas realistas	85
5.2.1	Ejemplo 4	86
5.2.2	Ejemplo 5	95
5.2.3	Ejemplo 6	99
III Modelado Viscoelástico Fraccional		103
6	Herramientas para el modelado fraccional	104
6.1	Un nuevo modelo fraccional	104
6.1.1	Modelado Viscoelástico Fraccional	105
6.1.2	Nuevo elemento viscoelástico fraccional	106
6.1.3	Nuevo modelo viscoelástico fraccional	109
6.2	Modelado de comportamiento de arterias	110

6.2.1	Modelo FSLS con r_0 conocido	111
6.2.2	Modelo FSLS con r_0 desconocido	111
6.2.3	Modelo SLS con r_0 conocido y dinámica	113
6.3	Método de Caracterización	114
7	Resultados de modelado fraccional	117
7.1	Ejemplos utilizando datos Artificiales	118
7.1.1	Ejemplo 1 - Datos FSLS	118
7.1.2	Ejemplo 2 - Datos DMW	121
7.1.3	Ejemplo 3 - Datos SLS dinámico	123
7.2	Ejemplo 4 - Modelado comportamiento pared arterial	127
IV	Conclusión	131
8	Conclusiones	132
	Referencias bibliográficas	139

Parte I

Introducción

Capítulo 1

Introducción

Los problemas de modelado e identificación de propiedades mecánicas consisten en buscar reproducir un comportamiento constitutivo observado, a través de la identificación de parámetros de un modelo dado. Dada la importancia de sus aplicaciones, en las últimas décadas los problemas de modelado e identificación asociados a tejidos biológicos han cobrado gran interés por parte de diversas comunidades científicas. Esto incluye no solamente a Médicos y Biólogos sino también a Ingenieros y Matemáticos. El aporte de estas diversas disciplinas ha favorecido el surgimiento de nuevos abordajes en busca de soluciones para problemas conocidos. En esta tesis se presentan nuevas herramientas para la resolución de problemas inversos en mecánica de sólidos asociados al estudio del comportamiento mecánico de los tejidos biológicos.

El presente texto representa el inicio de una nueva línea de investigación del Departamento de Estructuras del Instituto de Estructuras y Transporte (IET) de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de la República. Para poder formar un equipo humano que continúe el desarrollo de conocimiento en Biomecánica, en el año 2013 fue creado el grupo Mecánica de Sólidos Computacional (MecSolCom). El grupo, formado por docentes de dicho departamento, trabaja en diversas temáticas entre las cuales se destaca el fortalecimiento de la línea de investigación Biomecánica.

Ha sido vital para el desarrollo de este trabajo la cooperación de grupos e instituciones médicas que realizan investigación tanto clínica como básica como el Centro Universitario de Investigación, Innovación y Diagnóstico Arterial (CUiiDARTE) de la Universidad de la República y el Grupo de Ingeniería Aplicada a los Procesos Biológicos y Agrícolas, Universidad de la República.

La cooperación con el grupo *Hemodynamics Modeling Laboratory* (HeMo-Lab) del Laboratorio Nacional de Computación Científica (LNCC) de Brasil, ha permitido obtener datos numéricos que acercan los problemas resueltos en esta tesis a los problemas reales asociados a la identificación no homogénea de parámetros mecánicos *in-vivo*. Como veremos, estos problemas continúan representando un gran desafío para la comunidad científica.

La investigación que da origen a los resultados presentados en la presente tesis fue realizada con el apoyo de la Agencia Nacional de Investigación e Innovación (códigos: FMV-3-2011-1-6125 y POS-2011-1-3570), así como también con apoyo de la Facultad de Ingeniería y la Comisión Sectorial de Investigación Científica (CSIC) de la Universidad de la República.

Problemática y motivación

Las enfermedades cardiovasculares (ECV) representan en la actualidad la mayor causa de muerte a nivel mundial. En la Figura 1.1 se pueden ver representadas las causas de muerte en humanos a nivel mundial al año 2013. Todas

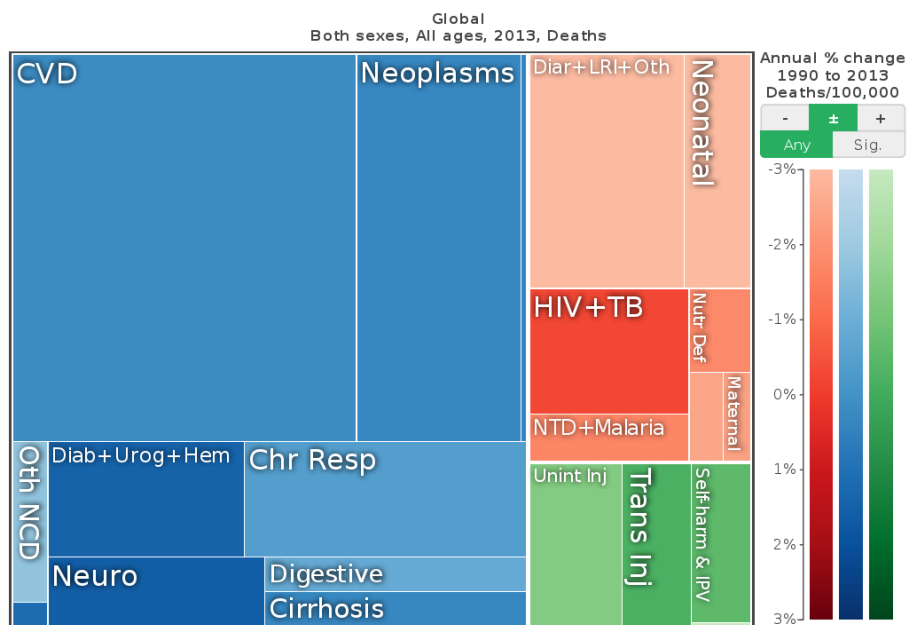


Figura 1.1: Gráfico de causas de muerte en humanos a nivel global en 2013 agrupadas, fuente: www.healthdata.org.

las causas son agrupadas en categorías diversas, incluyendo desde ECV (en inglés CVD: *CardioVascular Diseases*) hasta heridas no intencionales (*Uninten-*

tional Injuries). Las causas en color azul representan enfermedades no transmisibles, que alcanzan un 70 %; las causas verdes están asociadas a lesiones, las cuales representan un 9 %. Finalmente el grupo rojo incluye enfermedades transmisibles y de otros tipos. En la Tabla 1.1 se muestran los porcentajes de seis de las causas más importantes. De forma general, se puede decir que el

Grupo	Porcentaje (%)
CVD	32
<i>Neoplasms</i>	15
<i>Chronic Respiratory Diseases</i>	7.8
HIV+TB	4.8
<i>Unintentional Injuries</i>	3.7
<i>Transport Injuries</i>	2.7

Tabla 1.1: Porcentajes de causas de muerte en humanos a nivel global en 2013.

grupo llamado *Neoplasms* abarca las causas de muerte asociadas a distintos tipos de Cáncer. Observando los datos se destaca que las ECV junto con los Cánceres representan casi el 50 % de las causas de muerte a nivel global hoy, pero no solamente es importante ver los datos actuales sino también analizar la tendencia. Las siglas HIV y TB representan el Virus de Inmunodeficiencia Humana y la Tuberculosis respectivamente. La intensidad de los colores en la Figura 1.1 refleja el nivel de crecimiento o decrecimiento que cada grupo de causas ha tenido en el período 1990-2013.

En la Figura 1.2 se muestran las causas a nivel global pero sin la agrupación general, donde únicamente tienen colores las causas que han incrementado en el período 1990-2013. Se puede observar que la mayoría de las ECV y buena parte de los cánceres han incrementado, mientras que la mayoría de las otras causas de muerte se han reducido en porcentaje. Esto permite destacar la importancia de buscar nuevas herramientas para el tratamiento y diagnóstico de este tipo de enfermedades para revertir esta tendencia.

Actualmente es aceptado que algunos de los factores de riesgo más directamente asociados con las ECV son el tabaquismo, el consumo de alcohol y malos hábitos alimenticios. A pesar de haber logrado avances en la reducción de consumo de tabaco, la alimentación continúa siendo un problema. Se ha visto que los hábitos alimenticios son factores de riesgo para distintos tipos de cáncer (Bosetti et al., 2013) y ECV. En particular, algunos estudios recientes asocian estas enfermedades con el consumo de carnes procesadas (Rohrmann et al., 2013). Según algunos investigadores, como Herrero et al. (2013), los há-

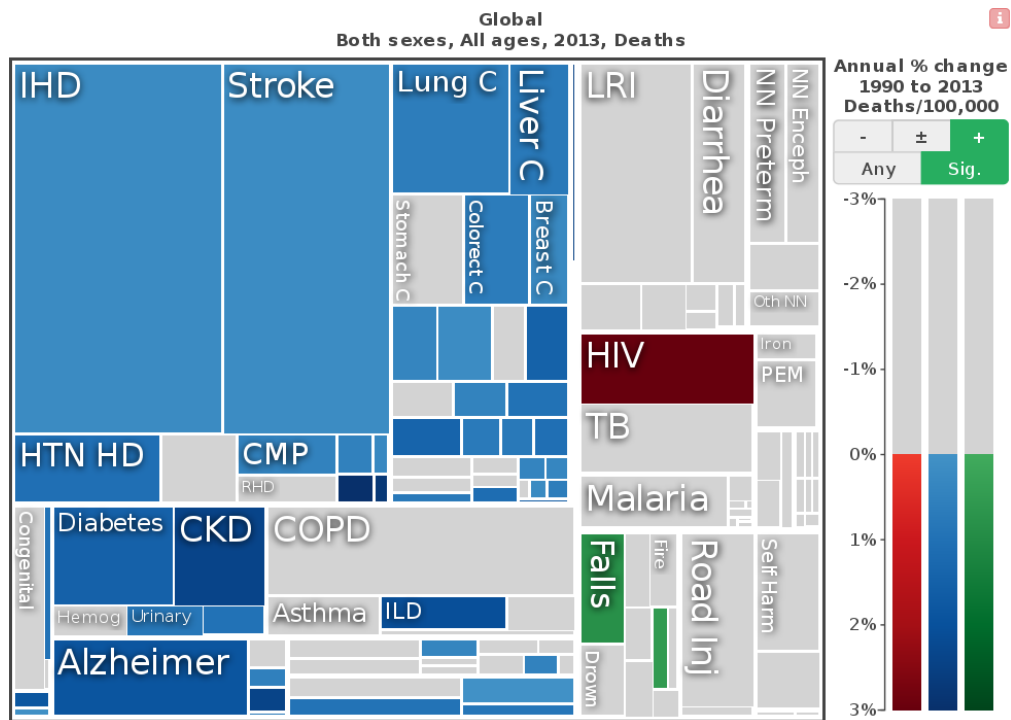


Figura 1.2: Gráfico con causas de muerte en humanos a nivel global en aumento en período 1990-2013 destacadas, fuente: www.healthdata.org.

bitos alimenticios actuales no solamente afectan la salud del ser humano sino también al medio ambiente. A pesar de esto, estas costumbres están profundamente arraigadas como resultado de un proceso social desarrollado durante siglos (Cordain et al., 2005), por lo que la modificación de este factor de riesgo a corto plazo no será sencilla.

Por lo dicho anteriormente, es evidente que nuevos enfoques deben ser desarrollados para el tratamiento y diagnóstico temprano de estas enfermedades. Existen grupos de investigación que se encuentran desarrollando nuevas metodologías de evaluación de riesgo de contraer ECV (Naghavi et al., 2003), incluso utilizando indicadores clínicos obtenibles a través de estudios no invasivos en Uruguay (Bia et al., 2011). Otros enfoques también han sido recientemente desarrollados aunque con el aporte de diversas ramas de la Ingeniería como veremos a continuación.

Enfoque

Uno de los nuevos enfoques desarrollados en las últimas décadas consiste en la aplicación del conocimiento presente en la Ingeniería Estructural y la Mecánica de Sólidos, a la resolución de problemas asociados al diagnóstico de enfermedades. Un ejemplo interesante es el presentado en (Li et al., 2008), donde se utiliza la mecánica de sólidos y modelos numéricos de arterias con aterosclerosis para intentar predecir rupturas de la pared arterial (las rupturas suelen desatar procesos que finalizan en infartos). En (Ferrara and Pandolfi, 2008) se aplica el criterio de Von-Mises (usualmente utilizado como criterio de diseño de estructuras de acero), al desarrollo de un modelo para la predicción de la ruptura de la pared arterial. En (Zhang and Liu, 2014) se muestra de forma teórica cómo métodos de optimización topológica (usualmente aplicados en optimización estructural) pueden ser aplicados al diseño y planificación de cirugías complejas como el procedimiento de *bypass*.

En algunas aplicaciones recientes con datos experimentales se procura resolver problemas reales cómo en (Goenezen et al., 2012) donde se presenta la resolución de problemas de identificación no homogénea para detectar tumores de mama malignos en 10 pacientes. En (Formaggia et al., 2003; Cito et al., 2014) se presentan modelos y resultados de simulaciones numéricas de flujos sanguíneos en geometrías de arterias de un paciente específico, brindando así un insumo importante (para los médicos) en la toma de decisiones ante la elección de *stents* para una intervención quirúrgica.

El enfoque adoptado en este trabajo consiste en aplicar conocimiento de la Ingeniería Estructural, Problemas Inversos y Cálculo Numérico para resolver problemas similares a los descritos, considerando el uso de datos obtenidos con procedimientos experimentales. La elección de los problemas abordados se ha realizado tomando en cuenta el tipo de datos disponibles en Uruguay actualmente, así como también los datos obtenibles a corto plazo. Afortunadamente el avance de la tecnología y el crecimiento de la inversión en la salud ha permitido mejorar las herramientas disponibles para la obtención de datos.

En Uruguay CUiiDARTE ha trabajado en la obtención y procesamiento de diferentes parámetros mecánicos arteriales con importancia clínica (Avolio, 2013) a través de la utilización de procedimiento no invasivos tanto en adultos como niños (Bia and Zócalo, 2014). La información obtenida por este Centro permite analizar los cambios de propiedades biomecánicas de arterias de po-

blaciones diversas de uruguayos, procurando separar casos en que los motivos son asociados a cambios fisiológicos (crecimiento, embarazo, etc) de los motivos enfermedad-dependientes (Hipertensión arterial, insuficiencia renal, Diabetes). Como ejemplo, en la Figura 1.3 se ve una imagen de una sección transversal de arteria carótida obtenida utilizando equipamiento de CUiDARTE. A través



Figura 1.3: Imagen de ultrasonido de sección transversal de arteria carótida.

de la aplicación de diferentes dispositivos y técnicas de procesamiento de imágenes es posible estimar valores de presión sanguínea y diámetro de la sección arterial.

Objetivos

El objetivo central de este trabajo es obtener nuevos métodos de resolución de problemas inversos de mecánica de sólidos, que puedan ser aplicados al modelado de propiedades mecánicas de tejidos biológicos en la población Uruguaya a mediano plazo. Considerando los procedimientos de obtención de datos, se pueden distinguir dos grupos de objetivos: Identificación no Homogénea (procedimientos invasivos) y Modelado Viscoelástico (procedimientos no invasivos).

Tomando en cuenta la experiencia de las instituciones médicas vinculadas y

el interés por el desarrollo de aplicaciones sobre medidas no invasivas, se prioriza la obtención de métodos para la aplicación a éste tipo de datos. En el caso de la Identificación no Homogénea, considerando el desafío que actualmente representa la obtención de datos y su utilización, se buscará realizar aportes en la mejora de las técnicas numéricas disponibles actualmente. Con esto se busca comenzar a recorrer el camino hacia la aplicación real a mediano plazo.

El objetivo de este trabajo en el área de identificación no homogénea es aportar nuevas formulaciones que reduzcan de forma crítica el tiempo necesario para la resolución del problema de identificación sin perder precisión en el resultado. Las formulaciones presentadas deben permitir su resolución utilizando herramientas numéricas disponibles así como también proveer soluciones aceptables incluso al utilizar datos con error de diverso tipo. Se desea obtener un acercamiento a la resolución de problemas de identificación con datos médicos, utilizando datos obtenidos a través del procesamiento de imágenes.

En el modelado viscoelástico, se aspira a obtener un método de caracterización de propiedades viscoelásticas aplicable a datos obtenidos de forma no invasiva en adultos y niños uruguayos a corto plazo. Para posibilitar esto, se deberán obtener además recomendaciones concretas sobre posibles modificaciones a realizar en los procedimientos actuales de obtención de datos para la aplicación de los métodos desarrollados.

Estructura de la tesis

El texto tiene cuatro partes tituladas: Introducción, Identificación no homogénea, Modelado Viscoelástico Fraccional y Conclusión. En la Introducción se introduce al lector al problema, se describen conceptos importantes para la comprensión del aporte realizado y se presenta el estado del arte de las líneas de investigación involucradas.

En la parte titulada Identificación no homogénea se describe la metodología desarrollada para abordar los problemas planteados en el área de identificación no homogénea, para luego presentar resultados numéricos validando los aportes realizados al área.

En la parte Modelado Viscoelástico Fraccional se presenta un nuevo modelo para representar el comportamiento mecánico de materiales viscoelásticos así como también se presenta un método para el ajuste de parámetros del modelo a partir de datos experimentales. La validación del método se realiza mediante

la resolución de ejemplos numéricos cuyos resultados son presentados. El método es aplicado a datos experimentales obtenidos utilizando arterias de oveja, mostrando que el nuevo modelo permite modelar de mejor forma el comportamiento mecánico del tejido arterial.

Finalmente en la última parte se enumeran las conclusiones obtenidas a partir del análisis de los resultados, así como también se plantean distintas líneas de trabajo a continuar para lograr los objetivos a mediano plazo establecidos por el grupo MecSolCom en el área Biomecánica.

Capítulo 2

Preliminares

En este capítulo se presentan conceptos de diferentes disciplinas, necesarios para una correcta comprensión del desarrollo de la metodología utilizada en la tesis. Cada sección describe de forma esquemática los conceptos básicos de cuatro disciplinas: Elasticidad, Viscoelasticidad, Optimización Convexa y Problemas Inversos.

2.1. Elasticidad

En esta sección se definen de forma sintética los problemas de la teoría de la Elasticidad que serán considerados a lo largo del texto. Se comienza describiendo el problema de Elasticidad no Lineal y luego se pasa a desarrollar los problemas de Elasticidad Lineal que consideraremos.

2.1.1. Elasticidad no lineal

El problema de Elasticidad no Lineal consiste en encontrar una configuración deformada de un sólido hiperelástico de forma tal de equilibrar las cargas externas aplicadas. Se omitirán numerosas hipótesis importantes para la presentación formal del tema, el lector puede continuar la lectura en (Holzapfel, 2000).

Formulación del problema

Consideremos un sólido formado por un material hiperelástico isótropo, ocupando la región $\Omega \in \mathbb{R}^3$ con contorno unión disjunta de $\Gamma_{\mathbf{t}}$ y $\Gamma_{\mathbf{u}}$, es decir

$\partial\Omega = \Gamma_{\mathbf{u}} \cup \Gamma_{\mathbf{t}}$ y $\Gamma_{\mathbf{u}} \cap \Gamma_{\mathbf{t}} = \emptyset$. Llamaremos configuración de referencia a dicho conjunto, asociado al instante de tiempo $t = 0$. Consideremos que una tensión de contacto \mathbf{t}_R es aplicada en el contorno $\Gamma_{\mathbf{t}}$. En el instante de tiempo t , cada partícula \mathbf{x} de la configuración de referencia es deformada a una posición final \mathbf{X} dada por la función de deformación χ , esto es $\mathbf{X} = \chi(\mathbf{x}, t)$. Se define el campo vectorial de desplazamientos \mathbf{u} y su gradiente $\nabla\mathbf{u}$ de la siguiente forma:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \chi(\mathbf{x}) - \mathbf{x}, \quad \text{y} \quad \nabla\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \nabla_{\mathbf{x}}\chi(\mathbf{x}) - \mathbf{I}, \quad (2.1)$$

donde se omitió t , dado que analizaremos la deformada en un único instante. También se podrá omitir la evaluación en el punto \mathbf{x} de ahora en adelante.

El estado local de deformaciones está definido por el gradiente $\nabla\chi$ aunque pueden utilizarse diferentes definiciones de tensores que representan la deformación en un entorno de \mathbf{x} . Una herramienta útil es el tensor de deformaciones de Lagrange \mathbf{L} definido por

$$\mathbf{L} = \frac{1}{2} (\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T + \nabla\mathbf{u}^T \nabla\mathbf{u}). \quad (2.2)$$

La función de deformación χ debe cumplir ciertas hipótesis de continuidad para verificar $J \geq 0$, donde $J = |\nabla\chi|$ representa la razón de variación volumétrica local en cada punto del sólido.

Se considera que el material es elástico, es decir que las tensiones internas producidas en el sólido dependen únicamente de la deformación actual. Se asume ahora que el material es hiperelástico, por lo que existe una función escalar de densidad de energía de deformación interna $\Psi(\mathbf{L}) : \text{Sym} \rightarrow \mathbb{R}$, la cual determina el comportamiento constitutivo de cada material, es decir la relación entre deformación y tensión. La energía de deformación interna o energía potencial elástica total del sólido es calculada como:

$$\mathcal{E}_{int}(\chi) = \int_{\Omega} \Psi(\mathbf{L}(\mathbf{x})) \, dV. \quad (2.3)$$

El equilibrio del sólido ocurre cuando éste adquiere una configuración donde su energía potencial total \mathcal{E}_{tot} es mínima. Asumiendo que las cargas aplicadas son conservativas se puede calcular la energía potencial asociada a las cargas

externas aplicadas a menos de una constante de la siguiente forma:

$$W_{ext}(\chi) = \int_{\Gamma_t} \mathbf{t}_R \cdot \chi \, dA. \quad (2.4)$$

Considerando esto, buscar el equilibrio consiste en encontrar la configuración χ que minimiza la energía potencial total. Esto se escribe, de forma genérica, como un problema de cálculo variacional

$$\min_{\chi} \mathcal{E}_{tot}(\chi) = \min_{\chi} \mathcal{E}_{int}(\chi) - W_{ext}(\chi), \quad (2.5)$$

donde por simplicidad es omitido el espacio al que pertenece la función de deformación χ .

Materiales compresibles

Dado que el comportamiento del material es determinado por la función Ψ veremos algunos ejemplos de funciones propuestas para modelar diferentes comportamiento constitutivos. Es importante representar el estado de tensiones internas en cada punto del sólido a través de un tensor de segundo orden, una de las formas más habituales es el tensor de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$. Para algunos materiales resulta útil utilizar el segundo tensor de Piola-Kirchhoff o tensor de Cosserat \mathbf{S} , el cual puede ser relacionado con $\boldsymbol{\sigma}$

$$\mathbf{S} = J(\nabla\chi)^{-1}\boldsymbol{\sigma}(\nabla\chi)^{-T}, \quad (2.6)$$

o ser obtenido a partir de la definición de material hiperelástico

$$\mathbf{S} = \frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{L}}(\mathbf{L}). \quad (2.7)$$

Saint-Venant Kirchoff El modelo de Saint-Venant-Kirchhoff establece una relación lineal entre el tensor de Cosserat y el tensor de deformaciones de Lagrange. La expresión matemática de Ψ en este caso es:

$$\Psi(\mathbf{L}) = \frac{\lambda}{2} \text{Tr}(\mathbf{L})^2 + \mu \text{Tr}(\mathbf{L}^2), \quad (2.8)$$

donde λ y μ son los parámetros de Lamé, valores reales que caracterizan el comportamiento del material. Esta función establece entonces una expresión

para las tensiones en todo punto a partir de la deformación:

$$\mathbf{S} = \lambda \text{Tr}(\mathbf{L})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{L}. \quad (2.9)$$

En el caso de pequeñas deformaciones este modelo lleva a la conocida ley constitutiva de Hooke.

Curnier El modelo de Saint-Venant-Kirchoff permite representar el comportamiento a tracción para grandes deformaciones aunque no es capaz de reproducir buenos resultados en compresión. Por esto, Curnier (1994) propuso un modelo modificado capaz de representar estados de compresión en grandes deformaciones. La expresión de la densidad de energía de deformación es:

$$\Psi(\mathbf{L}) = \lambda(J - \log(J) - 1) + \mu \text{Tr}(\mathbf{L}^2), \quad (2.10)$$

donde λ y μ son los parámetros de Lamé.

Funciones de energía de deformación de materiales incompresibles

Se consideran ahora materiales que no sufren variaciones de volumen al ser deformados, es decir que la función χ debe cumplir la condición $J = 1$ en todo punto. En este caso la relación entre tensión y deformación está dada por

$$\mathbf{S} = -p\mathbf{I} + \frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{L}}(\mathbf{L}), \quad (2.11)$$

donde p es un campo escalar a determinar, interpretado como una presión y asociado a un estado tensional esférico.

Neo-Hookean El modelo más simple para representar este tipo de comportamientos es el modelo Neo-Hookean:

$$\Psi(\mathbf{L}_C) = c(\text{Tr}(\mathbf{L}_C) - 3), \quad (2.12)$$

donde el escalar c representa el parámetro material del modelo y \mathbf{L}_C es otra medida del estado de deformaciones local, dado por $\mathbf{L}_C = 2\mathbf{L} + \mathbf{I}$.

Delfino En (Delfino et al., 1997) se propone una función de energía de deformación apropiada para el modelado de ciertos comportamientos observados

experimentalmente en arterias carótidas. La función está dada por:

$$\Psi(\mathbf{L}_C) = \frac{a}{b} \left(e^{\frac{b}{2}(\text{Tr}(\mathbf{L}_C)-3)} - 1 \right), \quad (2.13)$$

donde a y b son dos parámetros constitutivos del material, los cuales deben ser positivos. En (Holzapfel et al., 2000) se menciona que a pesar de asumir la fuerte hipótesis de isotropía, se obtiene una buena representación del comportamiento de arterias sometidas a grandes deformaciones.

Veronda-Westmann En (Veronda and Westmann, 1970) se propone una función de energía de deformación para el modelado del comportamiento constitutivo de tejido de piel, la cual luego es aplicada en (Goenezen et al., 2012) al desarrollo de una técnica para diagnóstico de cáncer de mama. La función puede ser escrita como:

$$\Psi(\mathbf{L}_C) = \mu \left(\frac{1}{\gamma} (e^{\gamma(\text{Tr}(\mathbf{L}_C))} - 1) - \frac{1}{2} (I_2(\mathbf{L}_C) - 3) \right) \quad (2.14)$$

donde μ y γ son parámetros del modelo e $I_2(\cdot)$ es el segundo invariante del tensor argumento.

Implementación de herramienta numérica

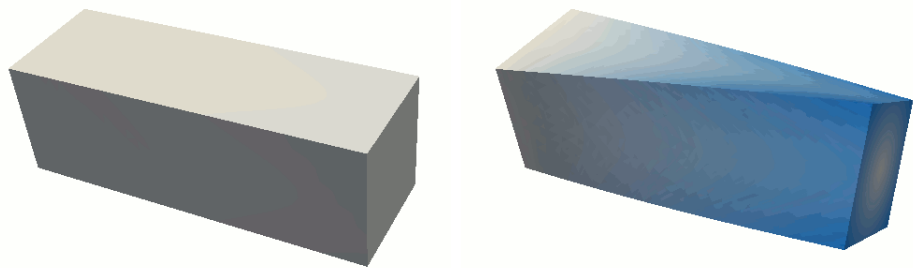
Las soluciones analíticas del problema de Elasticidad no Lineal se reducen a un conjunto muy acotado (Hunter, 1979; Collin et al., 2009), por lo tanto diferentes métodos numéricos son aplicados para la resolución de problemas.

Contar con herramientas de resolución propias brinda importantes ventajas a la hora de desarrollar metodologías eficientes de identificación y modelado, permitiendo también al grupo MecSolCom disponer de recursos vitales para avanzar hacia el desarrollo como grupo de investigación.

El autor ha implementado un código FORTRAN para la resolución de problemas de elasticidad no lineal utilizando el Método de los Elementos Finitos (MEF) (Hughes, 1987) siguiendo principalmente (Belytschko et al., 2000) y (Holzapfel, 2000). Se utiliza la herramienta GMSH (Geuzaine and Remacle, 2009) para la generación de mallas, la visualización de los resultados se realiza utilizando PARAVIEW (Ayachit, 2015). Los modelos constitutivos implementados hasta el momento son Saint-Venant-Kirchoff, Curnier y Neo-Hookean, utilizando una formulación híbrida simplificada para el caso incompresible

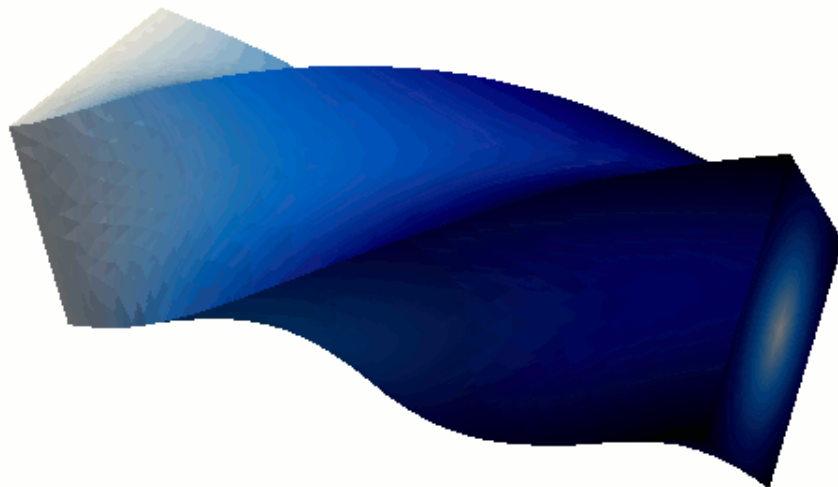
(Holzapfel et al., 2000). Se utiliza un esquema de diferenciación numérica de paso complejo similar al descrito en (Kiran and Khandelwal, 2014).

Para ilustrar el tipo de simulaciones que el código permite realizar en la Figura 2.1 se muestran imágenes de dos etapas de la deformación de una barra al ser aplicadas distintos esfuerzos de torsión en un extremo de la misma considerando el otro extremo empotrado. Se muestran las deformaciones pro-



(a) Barra sin carga aplicada.

(b) Deformación producida por carga de menor magnitud.



(c) Deformación producida por carga de mayor magnitud.

Figura 2.1: Deformación de barra sometida a momento torsor.

ducidas al considerar cargas aplicadas de baja y alta magnitud, demostrando la capacidad de la herramienta de resolver problemas con fuerte no linealidad. La intensidad de color indica la magnitud del desplazamiento de cada punto.

Actualmente el código está siendo extendido para la resolución de problemas viscoelásticos. A futuro se buscarán nuevas formulaciones para el caso

incompresible para incluir los modelos constitutivos de Veronda y Delfino.

2.1.2. Elasticidad lineal: caso compresible

Consideremos un sólido ocupando una región Ω con las hipótesis anteriormente consideradas, es decir, la región tiene borde $\partial\Omega$, tal que $\partial\Omega = \Gamma_{\mathbf{u}} \cup \Gamma_{\mathbf{t}}$ y $\Gamma_{\mathbf{u}} \cap \Gamma_{\mathbf{t}} = \emptyset$. Como vimos, el campo vectorial de los desplazamientos $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow V^3$ se puede definir a partir de la función de deformación, siendo V^3 el espacio tridimensional de vectores.

Consideremos que en el borde $\Gamma_{\mathbf{t}}$ las tensiones de contacto aplicadas sobre el sólido son conocidas y están dadas por el campo vectorial $\hat{\mathbf{t}}$ mientras que el desplazamiento es conocido en los puntos del borde $\Gamma_{\mathbf{u}}$ y está dado por el campo vectorial $\hat{\mathbf{u}}$. Estas representan las condiciones de contorno del problema dadas por las siguientes ecuaciones

$$\boldsymbol{\sigma}[\mathbf{n}] = \hat{\mathbf{t}} \text{ en } \Gamma_{\mathbf{t}} \quad \text{y} \quad \mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} \text{ en } \Gamma_{\mathbf{u}}. \quad (2.15)$$

donde $\boldsymbol{\sigma}$ es el tensor simétrico de tensiones de Cauchy. En la Figura 2.2 se muestra un esquema de la región junto con las condiciones de contorno.

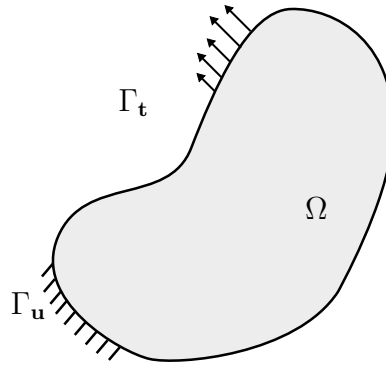


Figura 2.2: Esquema de región Ω ocupada por el sólido.

Como vimos en la Sección 2.1.1 el estado de deformaciones está determinado por el tensor \mathbf{L} , el cual depende del gradiente de la función de deformación. Se considera ahora la hipótesis de pequeñas deformaciones, es decir $\|\nabla\chi\| \ll 1$, lo que permite definir el tensor de deformaciones infinitesimales $\boldsymbol{\varepsilon}$ dado por:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla\mathbf{u} + \nabla^T\mathbf{u}). \quad (2.16)$$

Bajo la hipótesis de pequeñas deformaciones, este tensor representa una buena

aproximación del tensor \mathbf{L} , es decir $\boldsymbol{\varepsilon} \approx \mathbf{L}$. El tensor $\boldsymbol{\varepsilon}$ será referido de forma abreviada como tensor de deformaciones.

Consideremos que el sólido está compuesto por un material elástico lineal heterogéneo. Es decir que la relación entre el tensor de tensiones de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ y el tensor de deformaciones es lineal y está dada por la ecuación constitutiva:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}[\boldsymbol{\varepsilon}] \text{ en } \Omega, \quad (2.17)$$

donde \mathbb{C} es un tensor de cuarto orden que, dado que depende de las propiedades del material en cada punto, está definido por un campo de tensores $\mathbb{C} : \Omega \rightarrow \mathcal{C}$. El conjunto \mathcal{C} es el espacio al cual pertenece cada tensor $\mathbb{C}(\mathbf{x})$, definido a partir de las hipótesis consideradas para el comportamiento del material.

Formulación fuerte

El tensor de tensiones $\boldsymbol{\sigma}$ debe satisfacer la ecuación de equilibrio en todo punto del sólido

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = 0, \quad (2.18)$$

donde \mathbf{b} es el campo vectorial de fuerzas de volumen aplicadas en el sólido, el cual despreciaremos dada la naturaleza de los problemas que se abordarán en esta tesis.

El problema de elasticidad lineal en su forma fuerte consiste en: hallar el campo del desplazamientos $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow V^3$, el campo de tensores de tensión $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \rightarrow \text{Sym}$ y el campo de tensores de deformación $\boldsymbol{\varepsilon} : \Omega \rightarrow \text{Sym}$, que verifican las siguientes ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0 \text{ en } \Omega \\ \boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}[\boldsymbol{\varepsilon}] \text{ en } \Omega \\ \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}}{2} \text{ en } \Omega \\ \boldsymbol{\sigma}[\mathbf{n}] = \hat{\mathbf{t}} \text{ en } \Gamma_{\mathbf{t}} \\ \mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} \text{ en } \Gamma_{\mathbf{u}}, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (2.19a) \\ (2.19b) \\ (2.19c) \\ (2.19d) \\ (2.19e) \end{array}$$

siendo Sym el espacio de tensores simétricos de segundo orden. En este problema se asume que el campo de tensores constitutivos \mathbb{C} es conocido.

Formulación débil

El problema de elasticidad lineal también puede ser enunciado en su forma débil, lo cual permite la implementación directa del MEF. En esta formulación se sustituye la ecuación de equilibrio puntual (2.19a) y las condiciones de contorno en tensiones (2.19d) por un balance de trabajos internos y externos descrito a continuación.

El campo incógnita \mathbf{u} debe pertenecer a un conjunto de campos de desplazamientos que cumplan con las condiciones de contorno. Esto es representado como $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ siendo \mathcal{U} el conjunto de desplazamientos cinemáticamente admisibles, dado por:

$$\mathcal{U} = \{ \mathbf{u} \in H_1(\Omega)^2 : \mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} \text{ en } \Gamma_{\mathbf{u}} \}. \quad (2.20)$$

Se consideran también los campos de desplazamientos virtuales \mathbf{v} (también llamadas funciones *test*), los cuales se anulan en $\Gamma_{\mathbf{u}}$. \mathcal{V} es el conjunto de desplazamientos virtuales:

$$\mathcal{V} = \{ \mathbf{v} \in H_1(\Omega)^2 : \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ en } \Gamma_{\mathbf{u}} \}. \quad (2.21)$$

El trabajo virtual interno de las tensiones producidas en el sólido al considerar un campo de desplazamientos virtual \mathbf{v} es representado por el operador bilineal $a_{\mathbb{C}}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, dado por:

$$a_{\mathbb{C}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbb{C}[\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})] : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, dV \quad (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathcal{U} \times \mathcal{V}, \quad (2.22)$$

donde $:$ representa el producto interno dado por $\mathbf{A} : \mathbf{B} = \text{Tr}(\mathbf{B}^T \mathbf{A})$ definido en el espacio de tensores de segundo orden. El trabajo virtual de las fuerzas externas $\ell(\mathbf{v})$ está dado por:

$$\ell(\mathbf{v}) = \int_{\Gamma_{\mathbf{t}}} \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{t}}, \, d\Gamma \quad \mathbf{v} \in \mathcal{V}. \quad (2.23)$$

Estas definiciones permiten formular el problema de elasticidad lineal en su forma débil, el cual consiste en hallar \mathbf{u} tal que:

$$a_{\mathbb{C}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \ell(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}. \quad (2.24)$$

El problema planteado puede ser representado en el esquema de la Figura 2.3. A la izquierda se ve el sólido con la distribución de propiedades

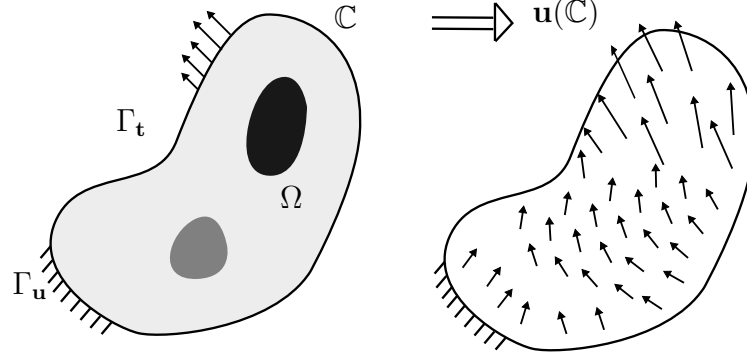


Figura 2.3: Esquema del problema directo de Elasticidad Lineal.

mecánicas \mathbb{C} y condiciones de contorno conocidas y a la derecha el campo de desplazamientos solución del problema $\mathbf{u}(\mathbb{C})$. Esto es llamado Problema Directo.

Isotropía y estados planos

Consideremos ahora que el material es isótropo en todos los puntos, es decir que la relación tensión-deformación es independiente de la orientación del cuerpo. Esta aproximación permite escribir la relación constitutiva en función de los parámetros de Lamé:

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}. \quad (2.25)$$

La relación es obtenida también como aproximación de pequeñas deformaciones del modelo descrito de Saint-Venant-Kirchoff. Los parámetros de Lamé pueden ser escritos como

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.26)$$

donde ν es el coeficiente de Poisson y E el módulo de Young, parámetros usualmente utilizados en ingeniería.

Consideremos ahora problemas planos, donde las componentes relevantes corresponden al plano x - y . Denotaremos el campo vectorial de desplazamientos \mathbf{u} como $\mathbf{u} = [u_x, u_y]$ siendo u_x y u_y las componentes del desplazamiento de cada punto según x e y respectivamente. En los problemas de estado plano de deformaciones (EPD) la componente del tensor de deformaciones ε_{zz} es nula,

por lo que el desplazamiento según z es nulo o constante. Por otra parte en el estado plano de tensiones (EPT) la componente del tensor de tensiones σ_{zz} es nula. En ambos casos se cumple:

$$\varepsilon_{yz} = \varepsilon_{xz} = 0 \quad \text{y} \quad \sigma_{yz} = \sigma_{xz} = 0. \quad (2.27)$$

En cualquiera de estos casos los únicos términos que aportan al trabajo virtual interno son las componentes σ_{xx} , σ_{yy} y σ_{xy} con sus respectivas componentes del tensor de deformaciones. Para los problemas planos entonces, denotaremos los tensores de forma vectorial

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{bmatrix}. \quad (2.28)$$

Estado plano de tensiones Se puede probar que en el caso de estado plano de tensiones el tensor constitutivo escrito en términos de E y ν está dado por:

$$\mathbb{C} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

y la deformación ε_{zz} cumple $\varepsilon_{zz} = -\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})$.

Estado plano de deformaciones En el caso de estado plano de deformaciones el tensor constitutivo toma la forma

$$\mathbb{C} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix}, \quad (2.30)$$

y que la tensión σ_{zz} cumple $\sigma_{zz} = -\nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$.

Implementación MEF

En esta sección se presenta la descripción básica de la implementación del MEF para el problema de elasticidad lineal descrito. El lector puede continuar la lectura en (Hughes, 1987).

El dominio Ω es discretizado en una malla de elementos finitos triangulares. El desplazamiento es interpolado linealmente dentro de cada elemento a partir de los desplazamientos nodales \mathbf{U}^e . Las deformaciones y tensiones son interpoladas utilizando las derivadas de estas funciones de interpolación lineales. Las interpolaciones son expresadas de forma matricial como sigue:

$$\mathbf{u}^e = \begin{bmatrix} u^e \\ v^e \end{bmatrix} = \mathbf{N}^e \mathbf{U}^e \quad \boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{B}^e \mathbf{U}^e \quad \boldsymbol{\sigma}^e = \mathbb{C}^e \mathbf{B}^e \mathbf{U}^e \quad (2.31)$$

donde \mathbf{N}^e es la matriz de funciones de interpolación y \mathbf{B}^e es la matriz de derivadas de funciones de interpolación correspondiente para problemas de estado plano.

Aplicando la interpolación de elementos finitos obtenemos una expresión para la Ecuación (2.24) para cada elemento Ω^e de la malla de elementos finitos

$$\int_{\Omega^e} (\mathbf{V}^e)^T (\mathbf{B}^e)^T \mathbb{C} \mathbf{B}^e \mathbf{U}^e dV. \quad (2.32)$$

Definiendo la matriz de rigidez en cada elemento \mathbf{K}^e y ensamblando en una matriz global \mathbf{K} de la siguiente forma

$$\mathbf{K} = \mathbb{A}_{i=1}^{n_{elem}} \mathbf{K}^e \quad , \quad \text{con} \quad \mathbf{K}^e = \int_{\Omega^e} (\mathbf{B}^e)^T \mathbb{C} \mathbf{B}^e dV, \quad (2.33)$$

se obtiene la forma discretizada del principio de trabajos virtuales, representado por el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{F}, \quad (2.34)$$

donde \mathbf{F} es el vector de fuerzas nodales.

2.1.3. Elasticidad lineal: caso incompresible

Los materiales incompresibles son aquellos que conservan su volumen al ser deformados. Este tipo de problemas son usuales en mecánica de los fluidos, aunque también existen sólidos que son considerados incompresibles ya que se requiera una elevada cantidad de energía para modificar su volumen. Como dice Fung (1981), los tejidos biológicos son incompresibles o quasi incompresibles, por lo que es de interés considerar este problema.

Formulación fuerte

Dado que los sólidos incompresibles tienen un coeficiente de Poisson $\nu = 0.5$ la ecuación constitutiva debe ser modificada, por lo que se considera la siguiente:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (2.35)$$

donde p es un campo escalar que representa una presión a determinar en cada problema. Modificando la ecuación constitutiva y agregando la restricción de $\text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) = 0$ en la Ecuación (2.19) se puede obtener la expresión correspondiente a la formulación fuerte, la cual será omitida aquí.

Estado plano de tensiones

El estudio de este problema tiene interés ya que es una de las hipótesis consideradas al resolver problemas de sólidos asociados a deformación de tejidos biológicos. En este caso particular sabemos que $\sigma_{zz} = 0$ por lo tanto despejando p y sustituyendo en la ecuación constitutiva se obtiene la siguiente expresión

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu(\boldsymbol{\varepsilon} + (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})\mathbf{I}) \quad (2.36)$$

Escribiendo esta ecuación de forma matricial tenemos:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}\boldsymbol{\varepsilon} \quad \mathbb{C} = 2\mu \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

donde $\mu : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ es el campo de módulos de corte del material.

Implementación MEF

Tal como se explica en (Hughes, 1987) para resolver este tipo de problemas sin obtener errores numéricos graves (como el efecto de bloqueo o *mesh locking*), se deben utilizar formulaciones del MEF diferentes a la vista para el caso compresible. De todas formas, en el problema de estado plano de tensiones este problema no surge por lo que la metodología para aplicar el MEF sería la misma que ya fue descrita para el caso compresible, aunque se debe modificar el tensor constitutivo \mathbb{C} .

2.2. Viscoelasticidad

En esta sección se presentan de forma sintética algunos modelos simplificados de la teoría de viscoelasticidad. En pocas palabras, se puede decir que los materiales viscoelásticos son aquellos en los cuales la tensión no depende únicamente de la deformación actual sino también de la historia de deformaciones sufrida hasta el instante actual. Existe una extensa e interesante bibliografía sobre la viscoelasticidad y sus aplicaciones a la cual el lector puede recurrir, un par de ejemplos son (Lakes, 2009; Marques and Creus, 2012).

2.2.1. Modelos viscoelásticos

Diversos materiales de la naturaleza presentan un comportamiento viscoelástico notable, por lo que es de interés presentar los modelos usualmente utilizados para representar su comportamiento.

El comportamiento constitutivo de los diferentes materiales es representado a través de esquemas de resortes y amortiguadores, los que llamaremos modelos reológicos. Consideraremos que los materiales no tienen envejecimiento por lo que los parámetros de cada uno de estos elementos será constante en el tiempo. Las relaciones básicas entre tensión y deformación serán las dadas por: un resorte (*spring*) o un amortiguador (*dash-pot*). Estas son representadas matemáticamente por:

$$\sigma(t) = E \varepsilon(t) \quad \text{y} \quad \sigma(t) = \eta \dot{\varepsilon}(t), \quad (2.38)$$

respectivamente, donde $\dot{\varepsilon}$ es la derivada primera respecto al tiempo de la función de deformación $\varepsilon(t)$ y η es un parámetro llamado viscosidad el cual está asociado al amortiguador. A continuación se describen dos modelos reológicos obtenidos combinando resortes y amortiguadores.

Modelo Estándar Lineal Sólido - SLS

En este modelo la relación entre tensión y deformación es la que se obtiene al considerar un modelo formado por dos resortes y un amortiguador dispuestos de la forma que vemos a la izquierda en la Figura 2.4. Utilizando equilibrio y las relaciones dadas por la Ecuación (2.38) se obtiene la ecuación constitutiva

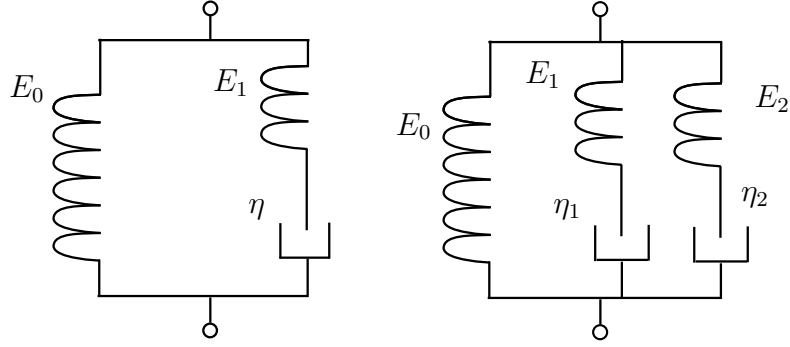


Figura 2.4: Esquemas de modelos reológicos: Sólido Estandar Lineal (izquierda) y Doble brazo de Maxwell-Wiechert (derecha).

del modelo, dada por:

$$\sigma + \tau_\sigma \dot{\sigma} = E_0 (\varepsilon + \tau_\varepsilon \dot{\varepsilon}), \quad (2.39)$$

donde se omite la dependencia del tiempo y τ_σ y τ_ε son llamados tiempos de relajación y fluencia respectivamente y están dados por:

$$\tau_\sigma = \frac{\eta_1}{E_1}, \quad y \quad \tau_\varepsilon = \frac{E_1 + E_0}{E_0} \tau_\sigma. \quad (2.40)$$

Modelo de Doble brazo de Maxwell-Wiechert - DMW

En este modelo reológico la respuesta del material es representada por un arreglo de tres resortes y dos amortiguadores dispuestos como se puede ver en la Figura 2.4. Nuevamente operando se obtiene la ecuación constitutiva dada por la siguiente expresión:

$$\sigma + \dot{\sigma}\chi_1 + \ddot{\sigma}\chi_2 = E_0(\varepsilon + \dot{\varepsilon}\nu_1 + \ddot{\varepsilon}\nu_2), \quad (2.41)$$

donde fueron utilizados los siguientes parámetros:

$$\chi_1 = \tau_{\sigma 1} + \tau_{\sigma 2}, \quad \chi_2 = \tau_{\sigma 1}\tau_{\sigma 2}, \quad (2.42)$$

$$\nu_1 = \tau_{\sigma 1} + \tau_{\sigma 2} + \nu_1 + \nu_2, \quad \nu_2 = \tau_{\sigma 1}\tau_{\sigma 2} + \nu_1\tau_{\sigma 2} + \nu_2\tau_{\sigma 1}, \quad (2.43)$$

siendo

$$\tau_{\sigma 1} = \frac{\eta_1}{E_1}, \quad \tau_{\sigma 2} = \frac{\eta_2}{E_2}, \quad \nu_1 = \frac{\eta_1}{E_0}, \quad y \quad \nu_2 = \frac{\eta_2}{E_0}. \quad (2.44)$$

Este modelo y el SLS son aplicados en (Wang et al., 2013) para ajustar datos experimentales obtenidos ensayando tejidos porcinos (bazo e hígado). Los

resultados muestran que el modelo DMW produce un ajuste considerablemente mejor que el SLS.

2.2.2. Transformada Discreta de Fourier

Una herramienta útil para la resolución de este tipo de ecuaciones diferenciales es la transformada discreta de Fourier, o *Discrete Fourier transform* (DFT).

Dada una magnitud y variable en el tiempo, representada por una función periódica $y(t)$, consideremos los valores obtenidos evaluando en N instantes de tiempo a partir de $t = 0$. La señal discreta está dada por

$$y_n = y(T \cdot n) \quad , \text{ con } n = 0, \dots, N - 1, \quad (2.45)$$

donde T es el tiempo entre muestras. La Transformada Discreta de Fourier DFT como una función vectorial $\mathbf{Y} = \text{TDF}(\mathbf{y})$ donde la entrada k -ésima de \mathbf{Y} está dada por

$$Y_k = \sum_{n=0}^{N-1} y_n \cdot e^{-i\omega_k \frac{n}{f_s}} \quad \text{con } k = 0, \dots, N - 1, \quad (2.46)$$

donde $\omega_k = 2\pi k \frac{f_s}{N}$ es la k -ésima frecuencia y $f_s = 1/T$ es la frecuencia de muestreo, es decir, el número de valores medidos por unidad de tiempo. De forma general se considera que \mathbf{y} e \mathbf{Y} son vectores con entradas complejas.

Se define también la transformada inversa de Fourier, $\mathbf{y} = \text{TIDF}(\mathbf{Y})$, donde la n -ésima entrada de \mathbf{y} está dada por

$$y_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y_k \cdot e^{i\omega_k \frac{n}{f_s}}, \quad n = 0, \dots, N - 1. \quad (2.47)$$

Suponiendo que la función continua y se puede descomponer en una suma de funciones exponenciales se obtienen las siguientes expresiones:

$$y(t) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_k e^{i\omega_k t} \quad \dot{y}(t) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} i\omega_k y_k e^{i\omega_k t}. \quad (2.48)$$

Si tenemos en los tiempos que cumplen $t = n/f_s$ se puede observar que los coeficientes de estas descomposiciones se pueden obtener mediante el uso de la

DFT.

Es sencillo aplicar la DFT a cualquier de las ecuaciones diferenciales de los modelos reológicos descritos en la sección anterior y mostrar que se pasa a obtener un sistema lineal de la forma

$$\mathbf{M}_\sigma \mathbf{Y}_\sigma = \mathbf{M}_\varepsilon \mathbf{Y}_\varepsilon, \quad (2.49)$$

donde las matrices \mathbf{M} son matrices que dependen de los parámetros conocidos del problema, y los vectores \mathbf{Y} son vectores de las DFT de las tensiones y deformaciones.

2.3. Optimización convexa

Los algoritmos de resolución de problemas generales de optimización no lineal garantizan buenos órdenes de convergencia únicamente para problemas particulares. En general la convergencia es asintótica por lo que se desea estudiar problemas de optimización no lineales donde la buena convergencia sea efectivamente alcanzable. En esta sección se presentan conceptos básicos de la teoría de optimización no lineal, para luego describir aspectos importantes de dos tipos de problemas de optimización convexa: optimización cónica y optimización cuadrática.

2.3.1. Nociones básicas de optimización no lineal

En esta sección se describen de forma sintética conceptos básicos de la teoría de optimización no lineal, se recomienda consultar (Luenberger and Ye, 2008) para una presentación detallada.

Problema de optimización no lineal

El problema general de optimización no lineal consiste en encontrar los valores $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que la función objetivo $f(\mathbf{x})$ alcance un mínimo satisfaciendo ciertas condiciones o restricciones dadas por las funciones vectoriales $\mathbf{g}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^m$ y $\mathbf{h}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^p$. Dicho problema es representado como se muestra a

continuación:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min_{\mathbf{x}} & f(\mathbf{x}) \\ \text{sujeto a:} & \\ & \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \\ & \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\ & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \end{array} \right. \quad (2.50)$$

donde la desigualdad \leq representa una relación entrada-a-entrada entre los vectores. Este problema es llamado Problema de Optimización No Lineal si f , \mathbf{g} o \mathbf{h} es no lineal.

Se dice que un punto \mathbf{x} es factible si cumple con las restricciones. El conjunto de puntos factibles es llamado región factible $D \subset \mathbb{R}^n$. Se asume que las funciones f , \mathbf{g} y \mathbf{h} cumplen con condiciones de regularidad y continuidad para todos los puntos de la región factible.

Condiciones de optimalidad

Las condiciones de optimalidad representan una herramienta vital para la búsqueda de soluciones de problemas de optimización. Las condiciones de primer orden establecen que: sea \mathbf{x}^* un mínimo local del problema dado por la Ecuación (2.50), entonces deben existir vectores $\lambda_{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^m$ y $\mu_{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^p$ tales que se cumpla:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla f(\mathbf{x}^*) + \lambda_{\mathbf{x}}^T \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^*) + \mu_{\mathbf{x}}^T \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0} \\ \lambda_{\mathbf{x}}^T \mathbf{g}(\mathbf{x}^*) = 0 \\ \lambda_{\mathbf{x}}^T \geq \mathbf{0} \end{array} \right. \quad (2.51)$$

Estas condiciones son necesarias para que el punto sea un punto crítico del problema. Las condiciones necesarias para que sea una solución del problema (es decir un mínimo) exigen que una combinación de las matrices hessianas de f , \mathbf{g} y \mathbf{h} sea semi-definida positiva.

Los algoritmos basados en gradientes (*gradient-based*) utilizan métodos numéricos iterativos para buscar soluciones del sistema de ecuaciones no lineales asociado a las condiciones de optimalidad, junto con diferentes estrategias para imponer las condiciones sobre la hessiana.

Un ejemplo de problema de optimización no lineal es el de hallar la configuración de equilibrio de un sólido. Si una discretización de MEF es aplicada y la energía potencial total de la Ecuación (2.5) es expresada en función de

desplazamientos nodales \mathbf{U} , el problema de Elasticidad No Lineal puede ser formulado como un problema de optimización. Hallar los desplazamientos asociados a una configuración de equilibrio es equivalente a buscar la configuración o el vector de desplazamientos que cumplan (al menos) las condiciones de optimalidad de primer orden:

$$\nabla_{\mathbf{U}} \mathcal{E}_{tot}(\mathbf{U}) = \mathbf{0} \quad (2.52)$$

Para buscar un mínimo se debe incluir también una restricción de desigualdad representando la condición de optimalidad de segundo orden, la cual no es presentada aquí pero puede ser encontrada en la literatura.

2.3.2. Optimización cónica

En esta sección veremos de forma resumida algunas definiciones básicas de la teoría de optimización convexa (Ben-Tal and Nemirovski, 2001) y en particular problemas de optimización cónica (Alizadeh and Goldfarb, 2003).

Optimización cónica

La optimización cónica abarca una familia de formulaciones de optimización aplicables a la resolución de problemas de diseño. En (Lobo et al., 1998) se describen algunas aplicaciones interesantes y diversas que van desde el diseño de portafolios de inversión hasta la optimización de estructuras de barras.

Un problema ampliamente conocido y estudiado es el de optimización lineal (*Linear Programming LP*), donde tanto el funcional como las restricciones son lineales. En el caso de restricciones de desigualdad se puede escribir como:

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \{ \mathbf{c}^T \mathbf{x} \mid \mathbf{A} \mathbf{x} \geq \mathbf{b} \}. \quad (2.53)$$

Con la intención de resolver problemas con restricciones no lineales pero conservando parte de las propiedades importantes de la teoría de programación lineal, en los problemas de optimización cónica se generaliza la definición de la desigualdad como veremos esquemáticamente a continuación.

Definición 1 (Conjunto cónico con punta convexo). El conjunto \mathbf{Q} es un cono con punta convexo (*convex pointed conic set*) si cumple las siguientes propiedades:

1. $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{Q} \Rightarrow \mathbf{a} + \mathbf{b} \in \mathbf{Q}$
2. $\mathbf{a} \in \mathbf{Q}, \lambda \geq 0 \Rightarrow \lambda \mathbf{a} \in \mathbf{Q}$
3. $\mathbf{a} \in \mathbf{Q}, -\mathbf{a} \in \mathbf{Q} \Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{0}$

A partir de esta definición ahora es posible generalizar la relación de desigualdad entre vectores, asociada al conjunto \mathbf{Q} , de la siguiente forma.

$$\mathbf{a} \geq_{\mathbf{Q}} \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a} - \mathbf{b} \geq_{\mathbf{Q}} \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{a} - \mathbf{b} \in \mathbf{Q}. \quad (2.54)$$

Consideremos algunos ejemplos para introducir la idea. El primer ejemplo es el conjunto ortante positivo definido como: $\mathbb{R}_+^m = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \mid x_i \geq 0 \ i = 1, \dots, m\}$. Se puede mostrar que este conjunto es un cono con punta convexo y que define la desigualdad entrada-a-entrada usual para vectores. Es decir que se cumple:

$$a_i \geq b_i \Leftrightarrow \mathbf{a} \geq_{\mathbb{R}_+^m} \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a} - \mathbf{b} \in \mathbb{R}_+^m \quad (2.55)$$

Otros ejemplos de conjuntos cónicos importantes son el cono de Lorentz \mathbb{L}^m y el cono de Lorentz rotado \mathbb{Q}^m dados por:

$$\mathbb{L}^m = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \mid x_m \geq \sqrt{\sum_{i=1}^{m-1} x_i^2} \right\} \quad \text{y} \quad \mathbb{Q}^m = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \mid 2x_1x_2 \geq \sum_{i=3}^m x_i^2 \right\} \quad (2.56)$$

respectivamente.

Podemos ahora formular el problema de Optimización Cónica general:

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \{ \mathbf{c}^T \mathbf{x} \mid \mathbf{Ax} - \mathbf{b} \geq_{\mathbf{Q}} \mathbf{0} \} \quad (2.57)$$

siendo \mathbf{Q} un conjunto cónico convexo con punta. Los problemas de programación cónica son clasificados en función del tipo de conjuntos cónicos de las desigualdades. El problema de Optimización Cónica de Segundo Orden (SOCP: *Second Order Conic Programming*) consta de un funcional lineal y restricciones cónicas asociadas a conos de Lorentz y/o Ortantes positivos.

Aplicación: optimización de estructura reticulada

Consideremos el modelo más simple (y menos realista) de optimización para una estructura reticulada. El objetivo es mostrar una aplicación de opti-

mización cónica, así como también introducir una formulación presentada en la literatura que utilizaremos más adelante en el texto. Existe un abundante desarrollo de conocimiento en el área de optimización estructural que será omitido al abordar este ejemplo.

Consideremos que el objetivo del diseño óptimo de una estructura es obtener la estructura más rígida posible dada una cierta cantidad de material. Sea una estructura compuesta por todas las barras que unen una grilla de nodos, con apoyos y sometida a una fuerza P , tal como se muestra en la Figura 2.5. Cada barra está formada por un material conocido y tiene un largo conocido

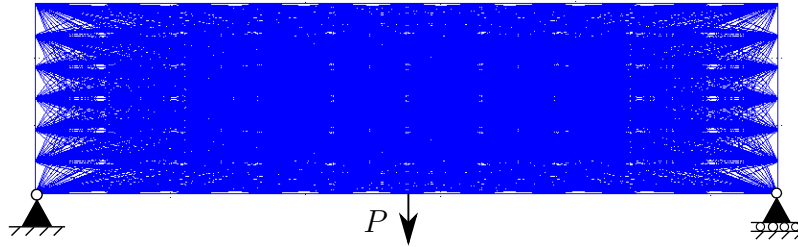


Figura 2.5: Esquema de estructura reticulada plana.

ℓ_i y una sección transversal de área a definir (diseñar) A_i . Aplicando el MEF podemos obtener una matriz de rigidez $\mathbf{K}(\mathbf{A})$ para cada combinación de áreas representada por el vector \mathbf{A} . Si el vector de fuerzas nodales es \mathbf{F} y el volumen de material disponible es V_m , se desea encontrar las áreas que generan la estructura con la menor energía de deformación. El problema de optimización es formulado como sigue:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{mín}_{\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n_E}} \quad \frac{1}{2} \mathbf{F}^T \mathbf{K}(\mathbf{A})^{-1} \mathbf{F} \\ \text{s.a.} \quad \sum_{i=1}^{n_E} A_i \ell_i = V_m \\ \mathbf{A} \geq \mathbf{0} \end{array} \right. \quad (2.58)$$

Se puede mostrar que el funcional es convexo pero dado que es no lineal se deben usar algoritmos generales para optimización no lineal, lo que motiva a buscar una nueva formulación del problema.

Aplicando el procedimiento descrito en (Beck et al., 2009) se obtiene la

siguiente formulación equivalente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underset{\mathbf{A}, \mathbf{e}, \tau_A, \tilde{\sigma}}{\text{mín}} \quad \frac{1}{2} \tau_A \\ \text{s.a.} \\ \sum_{i=1}^{n_E} A_i \ell_i = V_m \\ \sum_{i=1}^{n_E} \tilde{\mathbf{B}}_i \tilde{\sigma}_i = \mathbf{F} \\ \sum_{i=1}^{n_E} 2e_i \leq \tau_A \\ \mathbf{A} \geq \mathbf{0} \\ 2A_i e_i \geq \|\tilde{\sigma}_i\|^2 \quad i = 1, \dots, n_E \end{array} \right. \quad (2.59)$$

donde $e_i \in \mathbb{R}$ y $\tilde{\sigma}_i \in \mathbb{R}^3$ son variables auxiliares. Las matrices $\tilde{\mathbf{B}}_i$ serán presentadas más adelante. El problema obtenido tiene un funcional lineal, restricciones lineales y un grupo de restricciones dadas por conos de Lorentz rotados \mathbb{Q}^5 , por lo que estamos ante un problema de optimización cónica de segundo orden. Resolviendo la formulación cónica de la estructura del ejemplo obtenemos las áreas óptimas para las barras. Veamos la estructura con las áreas óptimas en la Figura 2.6. Se observa que las barras de menor aporte a la rigidez de la

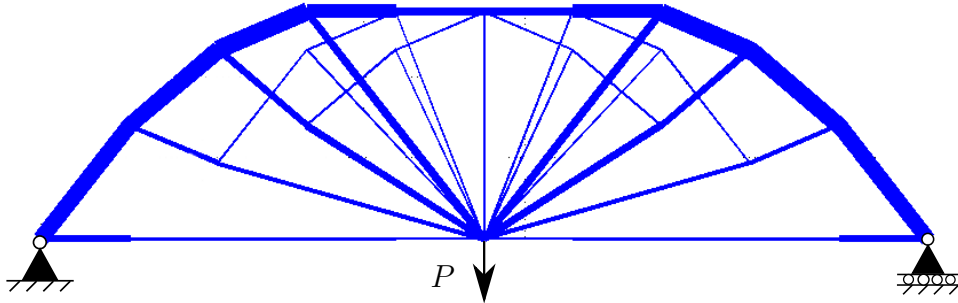


Figura 2.6: Esquema de estructura reticulada óptima obtenida.

estructura tienen menor área o fueron eliminadas de la estructura.

El modelo de optimización considerado en este ejemplo no es realista dado que no considera características presentes en estructuras reales como: no linealidad geométrica, múltiples estados de cargas, inestabilidad estructural y otras consideraciones que aumentan la complejidad del problema volviéndolo realmente desafiante.

Dualidad

Para todo problema de optimización se puede definir un problema asociado llamado problema dual (el problema original es llamado primal). En el caso de problemas de optimización cónica de la forma:

$$(\text{Primal}) \begin{cases} \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{s.a.} & \\ & \mathbf{A}_{eq} \mathbf{x} = \mathbf{b}_{eq} \\ & \mathbf{A}_{in} \mathbf{x} - \mathbf{b}_{in} \geq_{\mathbf{Q}} \mathbf{0} \end{cases} \quad (2.60)$$

el problema dual es definido como:

$$(\text{Dual}) \begin{cases} \min_{(\mathbf{y}_{eq}, \mathbf{y}_{in}) \in \mathbb{R}^{m+p}} & -\mathbf{b}_{eq}^T \mathbf{y}_{eq} - \mathbf{b}_{in}^T \mathbf{y}_{in} \\ \text{s.a.} & \\ & \mathbf{A}_{eq}^T \mathbf{y}_{eq} + \mathbf{A}_{in}^T \mathbf{y}_{in} = \mathbf{c} \\ & \mathbf{y}_{in} \geq_{\mathbf{Q}^*} \mathbf{0} \end{cases} \quad (2.61)$$

donde \mathbf{Q}^* denota el cono dual de \mathbf{Q} . Para los conjuntos cónicos presentados en la sección se cumple $\mathbf{Q}^* = \mathbf{Q}$. Definido el problema dual introducimos el teorema de dualidad cónica.

Teorema 1 (Teorema de dualidad cónica fuerte). *Sean los problemas primal*

$$(CP) : \mathbf{c}^* = \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \{ \mathbf{c}^T \mathbf{x} \mid \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{b} \geq_{\mathbf{K}} \mathbf{0} \} \quad (2.62)$$

y dual

$$(CD) : \mathbf{b}^* = \max_{\lambda \in \mathbb{R}^m} \{ \mathbf{b}^T \lambda \mid \mathbf{A}^T \lambda = \mathbf{c}, \lambda \geq_{\mathbf{K}^*} \mathbf{0} \}, \quad (2.63)$$

se cumplen las siguientes afirmaciones:

1. La dualidad es simétrica.
2. Para cada par factible (\mathbf{x}, λ) el duality gap es no negativo:

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x} - \mathbf{b}^T \lambda \geq 0 \quad (2.64)$$

3. Si (CP) es acotado por abajo y es estrictamente factible, entonces (CD) tiene solución y $\mathbf{c}^* = \mathbf{b}^*$
4. Si (CP) o (CD) es acotado y estrictamente factible, entonces el par (\mathbf{x}, λ) es un par de soluciones \Leftrightarrow

- a) $\mathbf{b}^T \lambda = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$ (*duality gap nulo*)
- b) $\lambda^T (\mathbf{Ax} - \mathbf{b}) = 0$ (*holgura complementaria*)

A partir de este teorema se puede obtener el siguiente corolario.

Teorema 2 (Corolario de Teorema de dualidad fuerte). *Si (CP) y (CD) son estrictamente factibles entonces ambos tienen solución y los valores óptimos son iguales y cada una de las condiciones 4.1 y 4.2 son condición necesaria y suficiente para la optimalidad.*

Este corolario brinda una herramienta fundamental para la caracterización de las soluciones de problemas de optimización cónica y el desarrollo de los algoritmos de resolución que fueron aplicados en la presente tesis.

Herramientas numéricas disponibles

Existen numerosas herramientas numéricas capaces de resolver eficientemente este tipo de problemas. En (Imre, 2011) se enumeran trece ejemplos, entre los que se destacan MOSEK, CVXOPT y Sedumi. MOSEK es una herramienta de optimización general muy potente de licencia comercial, mientras que CVXOPT es de código abierto orientada a optimización convexa muy eficiente aunque, para los ejemplos resueltos, no tan robusta como Sedumi.

Sedumi consiste en un *software* que puede ser ejecutado en Matlab, para la resolución eficiente de problemas de optimización cónica. Fue presentada en (Sturm, 1999) y en la misma se han implementado algoritmos presentados en los trabajos (Sturm and Zhang, 1997) y (Sturm, 2002), donde también se obtienen órdenes de convergencia eficientes asociados a dichas técnicas. Algo importante a resaltar de esta herramienta es que se pueden obtener resultados de mayor precisión si se escalan adecuadamente las variables del problema.

2.3.3. Optimización cuadrática

Finalmente se describe un problema importante de la optimización: el problema de optimización cuadrática. Considerando el problema general dado por la Ecuación (2.50), se dice que consiste en un problema de optimización cuadrática o *Quadratic Programming* (QP), cuando $f(\mathbf{x})$ es una función cuadrática y tanto $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ como $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ son funciones lineales. Tanto GNU-Octave como Matlab disponen de funciones implementadas para su resolución eficientes.

2.4. Problema Inverso de Identificación de Material

En esta sección veremos algunas definiciones básicas de la teoría de problemas inversos, para luego pasar a describir el problema inverso de identificación de material y las formulaciones más apropiadas para su resolución.

2.4.1. Teoría de Problemas Inversos

Frecuentemente científicos e ingenieros desean estimar parámetros o propiedades a partir de mediciones de magnitudes observables que están indirectamente relacionadas con los parámetros a estimar. Este tipo de problemas, llamados Problemas Inversos, surgen en diversas aplicaciones en las cuales los datos suelen estar contaminados por errores, generando errores amplificados en el parámetro estimado. Este fenómeno es llamado inestabilidad en la solución, y veremos algunas herramientas matemáticas necesarias para caracterizarlo y tratarlo. El lector puede continuar la lectura en (Kirsch, 2011).

Sea una región Ω y dos espacios de funciones \mathcal{H}_1 y \mathcal{H}_2 ambos normados, se considera que existe un operador \mathbb{P} que relaciona elementos $f \in \mathcal{H}_1$ con elementos $g \in \mathcal{H}_2$, es decir $\mathbb{P}(f) = g$.

Definición 2. (Problema bien puesto) Sea un operador $\mathbb{P} : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$, el problema dado por la ecuación

$$\mathbb{P}(f) = g, \tag{2.65}$$

es bien puesto si y solo si se verifican las siguientes condiciones:

1. para cada $g \in \mathcal{H}_2$ existe una solución $f \in \mathcal{H}_1$ para los cuales se verifica (2.65),
2. para cada g , la solución f es única, y
3. la solución f depende continuamente de g .

Definición 3. (Problema mal puesto) Un problema es mal puesto si no es un problema bien puesto, es decir, si no se cumple alguna de las tres condiciones requeridas.

Consideremos ahora que el operador \mathbb{P} consiste en un sistema de ecuaciones no lineales y que los datos g tienen errores, por lo que es posible que no exista

un f solución del problema. Buscaremos entonces el f que mejor ajuste los datos, lo que puede ser formulado como:

$$\min_{f \in \mathcal{H}_1} \|\mathbb{P}(f) - g\|^2. \quad (2.66)$$

Dado que en la resolución de problemas reales siempre existen errores presentes en los datos, se debe prever alguna herramienta que permita reducir el efecto negativo que estos tienen sobre los resultados de los algoritmos de identificación. Para ello debemos aportar alguna información sobre el tipo de solución esperada. Esta información es aportada adicionando un término, llamado regularizador $\mathcal{R}(f)$, al funcional a minimizar obteniendo el problema

$$\min_{f \in \mathcal{H}_1} \|\mathbb{P}(f) - g\|^2 + \alpha_R \mathcal{R}(f), \quad (2.67)$$

donde α_R es el factor de regularización. El mismo controla cuanto es afectada la solución y su correcta elección es crucial. Existen diversas posibilidades para el término de regularización, como por ejemplo $\|g\|_{\mathcal{H}_2}$.

Entre los diversos criterios posibles para la elección de α_R se adopta el de Morozov (Vogel, 2002), que establece que el α_R adecuado es el mayor valor para el cual se verifica la siguiente relación:

$$m(\alpha) = \frac{\|\mathbb{P}(f_\alpha^*) - g\|_{\mathcal{H}_2}}{\delta_R} \leq 1 \quad (2.68)$$

donde f_α^* es la solución obtenida al resolver el problema dado por la Ecuación (2.67) utilizando el valor α_R , y δ_R es una estimación de la norma del error presente en los datos.

2.4.2. Problema Inverso de identificación de material

Hasta ahora hemos presentado problemas de elasticidad donde el material es conocido y los desplazamientos son obtenidos como solución del problema. El Problema de Identificación de Material (PIM) consiste en estimar los parámetros materiales utilizando como información los desplazamientos producidos en cada punto del sólido. Este Problema Inverso es uno de los tantos problemas inversos en Elasticidad, el lector interesado puede encontrar más ejemplos en (Bonnet and Constantinescu, 2005).

Si el campo de desplazamientos medido es \mathbf{u}^m , el PIM consistirá entonces

en determinar el campo de propiedades del material $\mathbb{C} : \Omega \rightarrow \mathcal{C}$ (i.e., identificar el material que conforma al sólido). En la Figura 2.7 vemos un esquema del problema.

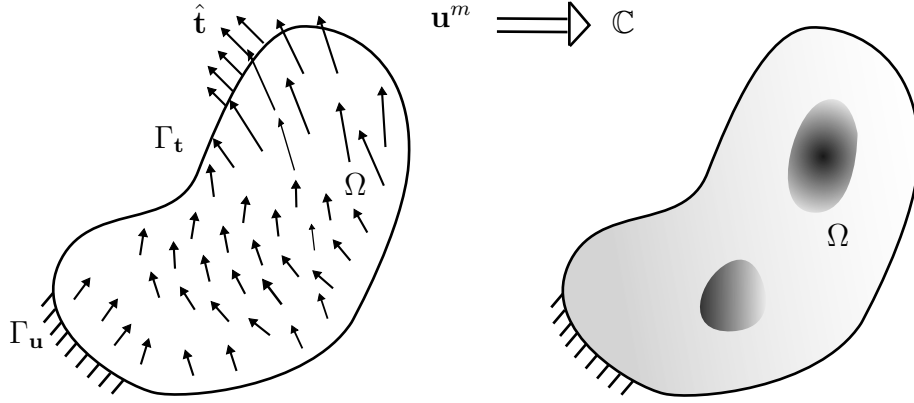


Figura 2.7: Esquema del Problema de Identificación de Material.

El problema puede escribirse como un problema de optimización de la siguiente forma:

$$\min_{\mathbb{C} \in \mathcal{C}} \mathcal{J}(\mathbf{u}(\mathbb{C}) - \mathbf{u}^m), \quad (2.69)$$

donde $\mathbf{u}(\mathbb{C})$ es la solución del problema directo descrito por la Ecuación (2.24) para el campo de parámetros materiales \mathbb{C} y \mathcal{C} es el conjunto de campos tensoriales considerado en su forma más general como en (Geymonat and Pagano, 2003):

$$\begin{aligned} \mathcal{C} = \{ & \mathbb{C} \in (L_\infty(\Omega))^{3 \times 3}; \mathbb{C} = \mathbb{C}^T, \mathbb{C}[\boldsymbol{\varepsilon}] : \boldsymbol{\varepsilon} \geq \gamma |\boldsymbol{\varepsilon}|^2 \\ & \gamma > 0 \forall \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbb{C}[\boldsymbol{\varepsilon}] : \boldsymbol{\varepsilon}' \leq \xi |\boldsymbol{\varepsilon}| |\boldsymbol{\varepsilon}'| M > 0 \forall \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}' \}, \end{aligned} \quad (2.70)$$

siendo $L_\infty(\Omega)$ el espacio de Lebesgue de funciones dado por la norma del supremo. De forma simplificada podemos decir que el funcional \mathcal{J} caracteriza las diferentes formulaciones posibles del problema.

Error cuadrático en desplazamiento

Una de las formulaciones más utilizadas en la literatura es la que llamaremos norma de error cuadrático en desplazamiento, ampliamente utilizada en la literatura definida tanto en el continuo (Goenezen et al., 2011; Banerjee et al., 2013) como directamente sobre el vector de desplazamientos de los nodos de referencia (Doyley et al., 2000; Franquet et al., 2012). La definición en el

continuo puede ser expresada de la siguiente forma:

$$\mathcal{J}_2(\mathbb{C}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{u}(\mathbb{C}) - \mathbf{u}^m\|_{L_2(\Omega)^2}^2 \quad (2.71)$$

donde $\|\cdot\|_{L_2(\Omega)^2}$ es una norma dada por:

$$\|\mathbf{u}\|_{L_2(\Omega)^2} = \sqrt{\int_{\Omega} |\mathbf{u}|^2 dV}. \quad (2.72)$$

El funcional \mathcal{J}_2 consiste en una función no lineal y no convexa. A continuación veremos una formulación con un funcional convexo.

Error en ecuación constitutiva

El funcional descrito en esta sección es llamado Error en Ecuación Constitutiva o *Constitutive Equation Gap* (CEG) y se define de la siguiente forma:

$$\mathcal{E}_{CEG}(\mathbf{w}, \boldsymbol{\sigma}, \mathbb{C}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma} - \mathbb{C}[\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w})]) : \mathbb{C}^{-1} [\boldsymbol{\sigma} - \mathbb{C}[\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w})]] dV. \quad (2.73)$$

siendo $\mathbf{w} \in \mathcal{U}$ un campo de desplazamientos cinemáticamente admisible, $\boldsymbol{\sigma} \in \Sigma$ un campo de tensiones estáticamente admisible y $\mathbb{C} \in \mathbf{C}$ el campo de tensores constitutivos. Uno de los primeros trabajos donde este funcional es aplicado al PIM es (Geymonat and Pagano, 2003). Se puede decir que el funcional surge como una modificación del propuesto en (Ladeveze and Leguillon, 1983) utilizado para la optimización de mallas de elementos finitos.

Para resolver el PIM con este funcional se debe introducir la información de los desplazamientos medidos \mathbf{u}^m , una de las variantes posibles para introducir esta información consiste en imponer $\mathbf{w} = \mathbf{u}^m$. Esta variante es llamada *Constitutive Equation Gap Method* (CEGM) (Florentin and Lubineau, 2010; Pagano and Bonnet, 2012). El método consiste básicamente en resolver el siguiente problema de optimización:

$$\min_{\mathbb{C} \in \mathbf{C}} \mathcal{J}_{CEG}(\mathbb{C}) \quad \text{con} \quad \mathcal{J}_{CEG}(\mathbb{C}) = \min_{\boldsymbol{\sigma} \in \Sigma} \mathcal{E}_{CEGM}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbb{C}), \quad (2.74)$$

donde el funcional \mathcal{E}_{CEGM} surge de sustituir \mathbf{u}^m en la definición de \mathcal{E}_{CEG} :

$$\mathcal{E}_{CEGM}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbb{C}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma} - \mathbb{C}[\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^m)]) : \mathbb{C}^{-1} [\boldsymbol{\sigma} - \mathbb{C}[\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^m)]] dV \quad (2.75)$$

siendo Σ el espacio de los campos de tensores de tensión de Cauchy estáticamente admisibles. En nuestro caso esto equivale a:

$$\Sigma = \{ \boldsymbol{\sigma} \in H^{\text{div}}(\Omega) : \text{div}(\boldsymbol{\sigma}) = 0 \text{ en } \Omega, \quad \boldsymbol{\sigma}[\mathbf{n}] = \hat{\mathbf{t}} \text{ en } \Gamma_{\mathbf{t}} \}. \quad (2.76)$$

El funcional \mathcal{E}_{CEG} presenta propiedades teóricas importantes para la resolución de problemas de optimización como la convexidad (Geymonat and Pagano, 2003). De acuerdo con Avril et al. (2008) éste es uno de los funcionales más adecuados para la resolución del PIM. A pesar de que en los últimos años han surgido diversas variantes de funcionales inspirados en el CEG (Florentin and Lubineau, 2010; Warner et al., 2014; Diaz et al., 2015) sigue siendo un método de referencia.

Capítulo 3

Estado del arte

Este capítulo presenta una revisión bibliográfica de las áreas de investigación correspondientes al tema abordado. En la Sección 3.1 se describen esquemáticamente algunos conceptos básicos sobre el comportamiento mecánico de los tejidos biológicos citando algunas referencias relevantes de la literatura. En la Sección 3.2 se presenta una revisión histórica de la literatura del área de Identificación no Homogénea de material, la cual incluye al Problema de Identificación de Material descrito anteriormente. Finalmente en la Sección 3.3 se presenta el estado del arte del área de modelado constitutivo a través de modelos reológicos o viscoelásticos, haciendo énfasis en modelos aplicados al modelado constitutivo de tejido arterial.

3.1. Sobre la Biomecánica

La Biomecánica es básicamente la ciencia que aplica la mecánica a la biología. A pesar de que su desarrollo comienza en el siglo XVI, consideraremos a (Fung, 1981) como la referencia fundamental. En dicho texto se describe cómo conceptos de la Mecánica son aplicados a la Biología, en particular al modelamiento del comportamiento constitutivo de tejidos biológicos. Se puede decir que un grupo importante de tejidos tienen un comportamiento elástico lineal dentro de un cierto rango de deformaciones y frecuencias de aplicación de cargas. Luego de superado dicho umbral, se comienza a observar un comportamiento no lineal, en algunos casos debido a propiedades viscoelásticas o a un comportamiento elástico no lineal (mecánico o geométrico).

Un ejemplo claro de los modelos constitutivos para tejidos es el desarrollado

por Veronda and Westmann para el modelado del comportamiento de piel (Veronda and Westmann, 1970) el cual establece básicamente que el tejido es isótropo e incompresible y tiene un comportamiento elástico no lineal dado por una función de densidad de energía de deformación vista en el capítulo anterior de esta tesis. Más adelante veremos que este modelo fue recientemente aplicado al diagnóstico de cáncer de mama.

Otro ejemplo interesante relevante es el estudio del comportamiento del tejido arterial. En (Holzapfel et al., 2000) se presentan los modelos más relevantes utilizados para el modelado del comportamiento elástico de tejido arterial, como el presentado en (Delfino et al., 1997), también descrito en el capítulo anterior. En la Figura 3.1 se presenta un esquema de una sección longitudinal arterial, donde se puede apreciar una compleja estructura compuesta por diferentes capas, con fibras de distintos tipos en distintas direcciones. La

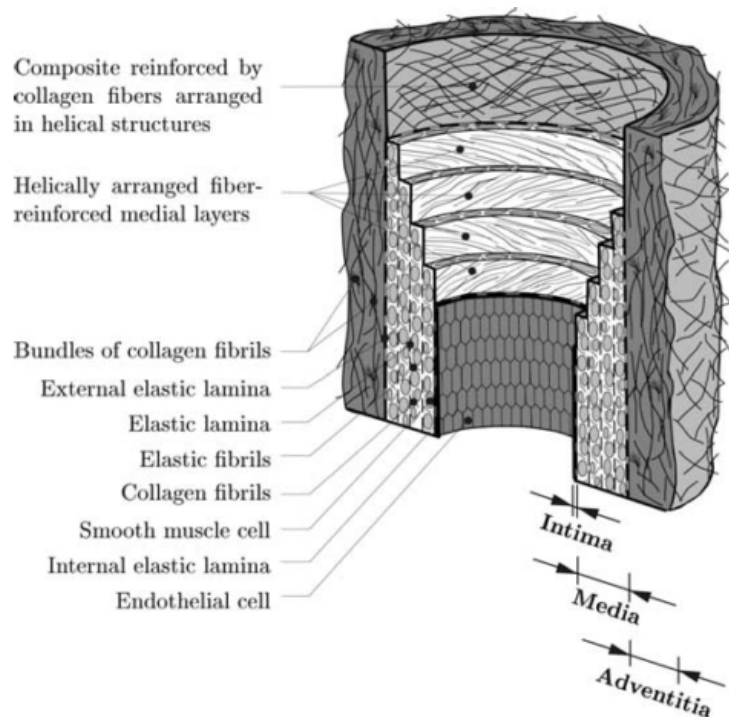


Figura 3.1: Esquema de sección longitudinal arteria mostrado en Holzapfel et al. (2000).

presencia de fibras produce un comportamiento anisótropo, mientras que la geometría y el proceso de crecimiento a lo largo de los años generan tensiones internas o residuales, sumado a un comportamiento no lineal. Adicionalmente, en algunas arterias, las propiedades mecánicas de las fibras de músculo liso pueden cambiar repentinamente, como resultado de procesos químicos que

ocurren en el endotelio o a nivel de sistema nervioso. Este fenómeno es llamado activación y aporta mayor complejidad a los nuevos modelos que buscan reproducirlo (Holzapfel and Ogden, 2010).

Por otra parte las arterias, junto con el corazón, conforman el sistema cardiovascular, en el cual la sangre circula transportando nutrientes vitales para el correcto funcionamiento del organismo (Nichols et al., 2011). Las arterias ubicadas en diferentes regiones del sistema tienen propiedades mecánicas diferentes, las cuales les permiten desempeñar funciones específicas logrando que el sistema pueda cumplir su función (Bia et al., 2005). Como ya fue dicho, actualmente se están comenzando a desarrollar y aplicar modelos complejos para modelar anomalías en el sistema cardiovascular y poder asistir a la toma de decisiones de los médicos sobre intervenciones quirúrgicas localizadas (Cito et al., 2014). Por otra parte modelos del sistema arterial completo están siendo desarrollados permitiendo reproducir y comprender ciertas funciones del sistema cardiovascular (Blanco et al., 2015b) los cuales continúan siendo desarrollados para abordar problemas cada vez más realistas (Moireau et al., 2012; Blanco et al., 2015a).

La resolución de problemas inversos asociados a estos modelos complejos es aún más desafiante debido a la dificultad que plantean los problemas inversos, por ejemplo por la reducida disponibilidad de datos. Los modelos considerados a la hora de resolver problemas inversos deben ser más simplificados si se desean aplicar a datos obtenidos con procedimientos de relativa baja invasividad. En las siguientes secciones se presenta una revisión bibliográfica de las áreas vinculadas a los problemas inversos abordados en el texto.

3.2. Revisión identificación no homogénea

En (Bonnet and Constantinescu, 2005) se presenta una extensa revisión de problemas inversos en mecánica de sólidos y enfoques para abordar su resolución. Uno de los problemas descritos es el Problema de Identificación de Material (PIM), el cual consiste en determinar alguna propiedad del material que conforma un cuerpo, a partir de alguna información sobre su comportamiento al someterlo a un ensayo conocido.

Una de las aplicaciones donde este problema es usualmente formulado es en la identificación de daño de estructuras, donde se buscan desperfectos geométricos o mecánicos estructurales resolviendo un problema inverso (Lee et al.,

2007; Stull et al., 2011; Wang and Brigham, 2014), no solamente aplicado el MEF sino también el Método de los Elementos de Contorno (Rus and Gallego, 2002). Este tipo de enfoques suele ser valorado ya que en muchos casos representa un análisis no destructivo.

Por otra parte, este tipo de abordaje puede ser utilizado para el desarrollo de nuevas técnicas de diagnóstico de enfermedades, buscando distinguir tejido sano de enfermo a partir de sus propiedades constitutivas. A partir del trabajo publicado por Ophir et al. ha habido un gran interés de la comunidad científica por el desarrollo de métodos para la resolución del PIM con aplicación a tejidos biológicos (Doyley, 2012).

Entre las primeras referencias donde se formulan problemas de identificación de parámetros mecánicos encontramos los trabajos (Kavanagh and Clough, 1971; Cottin et al., 1984), donde se presentan formulaciones de problemas de optimización para la determinación de los mejores parámetros de un modelo mecánico considerado.

Por otra parte, en (Ophir et al., 1991) surge la elastografía como una técnica que permite, estimar las propiedades de materiales, procesando datos obtenidos utilizando ultrasonido. Luego en (Kallel and Bertrand, 1996; Doyley et al., 2000) se proponen métodos de identificación con un enfoque diferente a los de elastografía, donde se formula el problema inverso como un problema de optimización. En este tipo de formulación las variables a optimizar son las propiedades mecánicas en cada región del material \mathbf{E} y el funcional a minimizar consiste en alguna medida de la distancia entre el vector de desplazamientos medidos experimentalmente \mathbf{U}^m y el de desplazamientos obtenido por un modelo numérico $\mathbf{U}(\mathbf{E})$:

$$\min_{\mathbf{E} \in \mathbb{R}^n} \|\mathbf{U}(\mathbf{E}) - \mathbf{U}^m\|^2. \quad (3.1)$$

La resolución del problema de optimización se realiza aplicando técnicas iterativas usualmente basadas en calculo del gradiente del funcional como las mencionadas en el capítulo anterior. En (De Korte et al., 2000; Chandran et al., 2003) se aplican métodos de este tipo para identificar módulos de Young en modelos de arterias.

El PIM, al igual que otros problemas inversos en ingeniería, plantea grandes desafíos como la unicidad o la inestabilidad de la solución respecto a errores en los datos. A través del trabajo de Ingenieros y Matemáticos se han obte-

nido algunos resultados sobre la unicidad de solución bajo ciertas condiciones para sólidos incompresibles (Barbone and Gokhale, 2004), utilizando datos de ensayos dinámicos (McLaughlin and Yoon, 2004) así como también sobre la aplicación de regularización (Gockenbach and Khan, 2005).

Los métodos usualmente utilizados en la literatura para resolver los problemas de optimización del PIM tienen aspectos a mejorar para poder ser aplicados en problemas reales de gran escala. Entre ellos se destaca la necesidad de buscar formulaciones eficientes en las que sea posible aplicar técnicas de regularización para reducir el impacto de errores en los datos. Una de las innovadoras para la resolución del PIM consiste en aplicar el método adjunto (Oberai et al., 2004), el cual se ha aplicado exitosamente para, utilizando la función de energía de deformación propuesta por Veronda and Westmann (1970), distinguir tumores malignos de benignos en tejido mamario (Goenezen et al., 2012). Estas técnicas siguen estando basadas en cálculo de gradientes, por lo que la convergencia puede seguir siendo un aspecto a mejorar.

Los métodos para la resolución del PIM han continuado su desarrollo, generándose diversas variantes de las formulaciones del problema de optimización. En (Avril et al., 2008) se presenta una revisión de diferentes métodos de identificación donde se asume que se conoce el campo de desplazamientos en todo el interior del material, lo que es llamado medidas de desplazamiento completo o en inglés *Full-field Measurements* (FFM). A partir del desarrollo de técnicas de procesamiento de imágenes y la disponibilidad de equipos a costos accesibles, la utilización de métodos FFM creció de forma destacada.

En este tipo de métodos se asume que se cuenta con la información del desplazamiento de todos los puntos de una cierta malla de puntos interiores. Estos métodos han sido aplicados a caracterización de diversos materiales, como chapas de aleaciones de aluminio (Avril et al., 2008), de PVC (Pagnacco et al., 2007), e incluso identificación de propiedades hiperelásticas de arterias asumiendo material homogéneo (Avril et al., 2010). En este trabajo abordaremos el desarrollo de métodos numéricos basados en FFM y utilizaremos datos generados de forma similar a como es realizado en (Goenezen et al., 2011; Franquet et al., 2012).

También en la mayoría de los algoritmos utilizados para resolver problemas con FFM se calculan y utilizan gradientes de las funciones (Florentin and Lubineau, 2010; Franquet et al., 2012, 2013). Por otra parte en otros casos se utilizan algoritmos sin derivada (Stull et al., 2011), entre los cuales se ha

mostrado que para algunos problemas de optimización se puede obtener un desempeño similar al de algoritmos basados en gradientes (Auger et al., 2009). Este tipo de algoritmos puede ser la única opción si no es posible calcular un gradiente analíticamente o se tiene un problema del tipo caja negra o *black-box optimization*. En la mayoría de los problemas de identificación se asume un modelo constitutivo y se cuenta con una forma de calcular los gradientes. En esta tesis se utilizarán formulaciones apropiadas para algoritmos de gradiente.

En la Sección 2.4.2 se introdujo una formulación del PIM destacada, basada en un método llamado *Constitutive Equation Gap Method* (Pagano and Bonnet, 2012). Se puede decir que el mismo está inspirado en un funcional presentado por Ladeveze and Leguillon para la generación eficiente de mallas de elementos finitos de calidad. Dicho funcional fue modificado para la resolución de problemas de identificación de parámetros con resultados teóricos positivos (Geymonat and Pagano, 2003) y luego aplicado a diversos PIMs (Florentin and Lubineau, 2010, 2011). Recientemente varios métodos surgieron como variantes del mismo (Warner et al., 2014; Ben Azzouna et al., 2015; Diaz et al., 2015), lo que muestra que este método representa uno de los más apropiados para el problema.

La mayoría de los artículos citados hasta el momento consideran comportamiento elástico lineal, esto se debe a que la identificación no homogénea de parámetros de modelos viscoelásticos plantea un desafío aún mayor. Recientemente se presentaron resultados sobre una extensión de la metodología utilizada en (Warner et al., 2014) para la identificación no homogénea de parámetros viscoelásticos (Diaz et al., 2015). En dicho trabajo se logran identificar distribuciones no homogéneas de parámetros de un modelo constitutivo lineal compresible isótropo para módulo de dilatación volumétrica real y módulo de corte complejo. Se describe que el caso de ambos parámetros complejos se torna poco estable para la formulación del problema propuesto.

Por otra parte, a pesar de que el comportamiento de los tejidos biológicos es no lineal en ciertos rangos de deformaciones, la identificación no homogénea no es usual en estos modelos. La identificación de propiedades de modelos no lineales ha sido generalmente abordada asumiendo que el material es homogéneo (Schulze-Bauer and Holzapfel, 2003; Avril et al., 2010). A pesar de que existen algunos resultados destacados (Goenezen et al., 2011) la identificación no homogénea de propiedades de modelos no lineales plantea un desafío aún vigente en la comunidad científica.

En este trabajo se presentan tres formulaciones eficientes del PIM. Dos de ellas consisten en problemas de optimización cónica de segundo orden, mientras que la tercera consta de un problema de optimización cuadrática. Todas pueden ser resueltas utilizando algoritmos de optimización convexa de gran eficiencia. También es presentada una metodología para la introducción de regularización y elección automática del coeficiente de regularización respectivo. Ejemplos numéricos son resueltos mostrando que las formulaciones propuestas son considerablemente más eficientes que implementaciones del método CEGM destacado entre los métodos actuales para la resolución del PIM.

Objetivos PIM El objetivo de este trabajo en esta temática es aportar nuevas formulaciones que reduzcan de forma crítica el tiempo necesario para la resolución del PIM sin perder precisión en el resultado. Se desea también obtener formulaciones que puedan ser implementadas de forma simple, así como también que puedan ser resueltas utilizando herramientas numéricas disponibles. Las formulaciones presentadas deben permitir que se pueda aplicar regularización de manera simple y eficaz para reducir el efecto de error en los datos sobre la solución obtenida.

3.3. Revisión de modelado viscoelástico

Tal como es descrito por Fung (1981) los tejidos biológicos son viscoelásticos. En diversos casos las propiedades viscoelásticas adquieren relevancia debido a, entre otros factores, el tipo de cargas a las que el tejido es sometido. Un ejemplo importante es el de las arterias donde, como veremos más adelante, durante el ciclo de carga y descarga se produce una disipación de energía debido a la naturaleza viscoelástica del material.

Como fue visto antes, el problema de identificación no homogénea viscoelástico ha sido abordado muy recientemente y con ciertas hipótesis particulares. El enfoque utilizado en gran parte de la comunidad de ingeniería biomédica para el modelado del comportamiento viscoelástico consiste en utilizar modelos viscoelásticos simples.

El comportamiento constitutivo de diversos materiales es usualmente representado por modelos reológicos simples compuestos por resortes y amortiguadores lineales. De todas formas, como es indicado en (Lakes, 2009), los modelos formados por un pequeño número de resortes y amortiguadores cumplen un

rol pedagógico y los materiales reales no pueden ser, en general, modelados por este tipo de modelos. Una de las formas de aumentar la complejidad de los modelos es a través de un aumento del número de elementos.

En estos modelos se considera que el material es homogéneo. Dado que no se realiza discretización del dominio estos modelos son llamados 0-D. Esto hace que la aplicabilidad sea limitada, por ejemplo no se podría reproducir el comportamiento de arterias con un alto grado de estenosis¹ usando un modelo donde se considere que el material es homogéneo. En la literatura podemos encontrar diferentes modelos reológicos aplicados al modelado de diversos tejidos (Then et al., 2012; Zhang et al., 2008). En el caso de arterias, se han aplicado modelos reológicos simples para modelar el comportamiento de tejido arterial ovino, relacionando diámetro arterial con tensión tangencial (Valdez-Jasso et al., 2009, 2011).

Con un enfoque más general, en (Wang et al., 2013) se muestra que el uso de modelos reológicos formados por varios resortes y amortiguadores en serie y paralelo, mejora el ajuste de los modelos a datos obtenidos en ensayos con tejidos vivos. Se utilizan datos de bazo e hígado porcino mostrando que una buena precisión en el modelado es obtenida al utilizar un modelo compuesto por 3 resortes y 2 amortiguadores. También se analizan diferentes disposiciones de estos elementos mostrando cómo algunas configuraciones son apropiadas para el modelado del comportamiento de sólidos mientras que otras lo son para fluidos.

Por otra parte, recientemente en (Anssari-Benam et al., 2015) se presentó también un planteo de unificación de modelos reológicos. Entre los diversos modelos descritos como apropiados para el modelado de tejidos biológicos (arterias, válvulas aórticas, ligamentos) se mencionan configuraciones que Wang et al. (2013) no recomienda para sólidos. Los resultados son presentados para un rango temporal que no permite verificar el defecto que Wang et al. (2013) menciona sobre estos modelos.

Procurando mejorar la capacidad de los modelos viscoelásticos han surgido Modelos Viscoelásticos Fraccionales (MVF), los cuales consisten en modelos viscoelásticos incluyendo por lo menos un elemento fraccional.

En el elemento fraccional la tensión corresponde a un intermedio entre un resorte y un amortiguador. También es conocido como *spring-pot*, una combi-

¹Proceso de engrosamiento de las paredes arteriales con reducción de la sección transversal disponible para el flujo de la sangre.

nación entre resorte en inglés (*spring*) y amortiguador en inglés *dash-pot*. El comportamiento intermedio es representado matemáticamente imponiendo que la tensión sea proporcional a la derivada fraccional de la deformación respecto al tiempo, es decir, $\sigma \propto D^\alpha \varepsilon(t)$ (Podlubny, 1999). El orden de la derivada α es considerado como otro parámetro mecánico, y es denominado parámetro fraccional. En los MVFs presentados en la literatura revisada por los autores el parámetro fraccional se considera dentro del intervalo $[0, 1]$.

Las primeras investigaciones sobre modelos fraccionales surgieron a partir de observaciones experimentales y se encuentran en la literatura de principios del siglo XX (Scott Blair, 1947). En las siguientes décadas el interés en estos modelos se incrementó y aspectos importantes fueron mejorados, tales como definiciones matemáticas de la derivada fraccional con adecuada interpretación física (Stiassnie, 1979; Podlubny, 1999). En los años 80 Bagley and Torvik (1983) presentaron vínculos entre las teorías moleculares y modelos viscoelásticos fraccionales macroscópicos en (Bagley and Torvik, 1983). Ellos también contribuyeron a la determinación de las restricciones algebraicas para los parámetros relevantes de los modelos, tomando en cuenta las limitaciones de la termodinámica en (Bagley and Torvik, 1986), así como otros artículos en la literatura (Friedrich, 1991).

Los MVFs han demostrado ser adecuados para el modelado del comportamiento de materiales complejos reales, tales como elementos estructurales anisótropos compuestos por materiales reforzados con fibras (Allam and Zenkour, 2003), polímeros (Lewandowski and Chorążyczewski, 2010) y tejidos biológicos. En el caso de tejidos biológicos, los MVFs han representado una buena e innovadora alternativa para el modelado del comportamiento de la pared arterial (Zhang and Liu, 2015; Craiem et al., 2008).

Objetivos Modelado viscoelástico El objetivo en esta área es obtener alguna mejora sobre los modelos viscoelásticos presentes en la literatura. Esto quiere decir que los modelos propuestos deben ser capaces de reproducir de mejor forma el comportamiento de los materiales a modelar. En particular se buscará reproducir el comportamiento de la pared arterial con mejor precisión que otros modelos utilizados en la literatura. También se deberá desarrollar un método para la caracterización de los parámetros del modelo de forma eficiente.

Parte II

Identificación no homogénea

Capítulo 4

Métodos para Identificación no Homogénea

Los aportes realizados al área de la identificación no homogénea de material son desarrollados en este capítulo. Se comienza por la Sección 4.1, donde se formula y resuelve un Problema de Identificación de Material (PIM) unidimensional con el objetivo de mostrar que una correcta formulación del problema puede tener efectos positivos sobre los resultados obtenidos. En la Sección 4.2 se presenta la técnica de regularización a utilizar, junto con un procedimiento de discretización adecuado para su aplicación al PIM. En la Sección 4.3 se desarrollan tres nuevas formulaciones del PIM tanto en el continuo como en el dominio discreto obtenido al aplicar el MEF. Finalmente en la Sección 4.4 se describe la metodología a utilizar para comparar las formulaciones presentes en la literatura con las propuestas en esta tesis.

Para el desarrollo de las formulaciones se considera que el material es isótropo y que el coeficiente de Poisson ν es conocido, por lo que el campo de tensores constitutivos puede ser escrito como $\mathbb{C}(\mathbf{x}) = E(\mathbf{x})\mathbb{C}_1$ para todo punto $\mathbf{x} \in \Omega$, siendo \mathbb{C}_1 el tensor constitutivo correspondiente a $E = 1$. En este caso el PIM consiste en hallar un campo escalar de módulos de Young $E : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ a partir de los desplazamientos medidos \mathbf{u}^m . Estas hipótesis tienen validez en diversos problemas de identificación, destacando estudios numéricos sobre caracterización de propiedades de arterias carótidas realizados recientemente (Franquet et al., 2012, 2013). Por otra parte, es razonable considerar esta hipótesis si se desea desarrollar formulaciones para identificar propiedades a partir de datos obtenidos *in-vivo*, donde no es posible (actualmente) obtener

la información necesaria para identificar todo el tensor constitutivo.

Para resolver los problemas de optimización asociados al PIM aplicaremos el MEF para obtener un dominio discretizado formado por n_E elementos triangulares con interpolación lineal. El módulo de Young es considerado uniforme dentro de cada elemento, por lo que la función escalar de módulo de Young E pasa a ser descrita por un vector \mathbf{E} con tantas entradas como elementos n_E tenga la malla. También se consideran rangos admisibles para el valor del módulo de Young en cada elemento como es realizado en (Chandran et al., 2003).

Las formulaciones serán desarrolladas e implementadas para el PIM considerando estados planos para un sólido elástico lineal compresible, de todas formas pueden ser aplicadas de forma directa a problemas tridimensionales de sólido compresible o de estado plano para sólidos incompresibles.

4.1. Ejemplo unidimensional

Para buscar formulaciones eficientes del problema debemos comenzar por plantearnos una simple pregunta: ¿Qué normas son las más apropiadas para el problema formulado en la Ecuación (3.1)? En esta sección resolveremos un problema de identificación de material extremadamente sencillo, pero adecuado para mostrar las diferencias en resultados obtenidos utilizando distintas normas.

Sea una barra de largo ℓ y sección transversal de área constante A , formada por un material elástico lineal, con su extremo izquierdo fijo y su extremo derecho libre con una carga puntual aplicada P . El problema directo consiste en hallar los desplazamientos de cada punto de la barra y es resuelto de forma numérica discretizando la barra en $n_E = 20$ elementos finitos de barra de dos nodos de igual largo, con un valor de módulo de Young conocido E_i^r uniforme en cada elemento i . El PIM en este caso consiste en: dados los desplazamientos nodales, encontrar los valores de los módulos de Young de cada elemento.

Consideremos la siguiente distribución de módulos de Young solución o de referencia: $E^r = 1$ Pa para los 10 elementos de la izquierda y $E^r = 2$ Pa para los 10 elementos de la derecha. Resolviendo el problema directo obtenemos los desplazamientos solución o de referencia \mathbf{U}^r . Adicionando un error a los desplazamientos de referencia se obtienen lo que representarían desplazamientos “medidos” \mathbf{U}^m . Ahora, el problema inverso es formulado como un problema de

optimización con un funcional de este tipo

$$\min_{\mathbf{E} \in \mathbb{R}^{n_E}} \|\mathbf{U}(\mathbf{E}) - \mathbf{U}^m\|^2 + \alpha_R \mathcal{R}(\mathbf{E}) \quad (4.1)$$

donde $\mathbf{U}(\mathbf{E})$ es el vector de desplazamientos obtenidos al resolver el problema directo con los módulos de Young \mathbf{E} , $\mathcal{R}(\mathbf{E})$ es un término de regularización apropiado para el PIM y α_R el coeficiente de regularización que determina el peso de dicho término en el funcional. También consideraremos que se conoce lo suficiente del material como para establecer un intervalo de valores esperable para E_i , el cual en este ejemplo será $\mathbf{I}_E = [0.5, 2.5]$. Resolvemos el PIM y analizamos los resultados.

Comenzamos por reformular el problema de la Ecuación (4.1) obteniendo la siguiente formulación equivalente:

$$(FU) \left\{ \begin{array}{l} \min_{\mathbf{E}, \mathbf{U}} \|\mathbf{U} - \mathbf{U}^m\|^2 + \alpha_R \mathcal{R}(\mathbf{E}) \\ \text{s.a.} \\ \mathbf{K}(\mathbf{E})\mathbf{U} = \mathbf{F} \\ \mathbf{E} \in \mathbf{I}_E^{n_E} \quad \mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n_U} \end{array} \right. \quad (4.2)$$

donde $\mathbf{K}(\mathbf{E})$ y \mathbf{F} son la matriz de rigidez y el vector de fuerzas nodales obtenidos al aplicar el MEF, y n_U es el número de grados de libertad con valor de desplazamiento desconocido (en este ejemplo $n_E = n_U = 20$). Introduciendo un vector de fuerzas residuales \mathbf{R} es posible eliminar la variable \mathbf{U} y obtener una nueva formulación

$$(FR) \left\{ \begin{array}{l} \min_{\mathbf{E}, \mathbf{R}} \|\mathbf{R}\|^2 + \alpha_R \mathcal{R}(\mathbf{E}) \\ \text{s.a.} \\ \mathbf{K}(\mathbf{E})\mathbf{U}^m = \mathbf{F} + \mathbf{R} \\ \mathbf{E} \in \mathbf{I}_E^{n_E} \quad \mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n_U} \end{array} \right. \quad (4.3)$$

En ambas formulaciones $\|\cdot\|$ son normas en \mathbb{R}^{n_U} .

En este ejemplo veremos las ventajas y desventajas de las formulaciones FU y FR al considerar la norma euclídeana en el funcional. A pesar de esto, dado que en (Avril et al., 2008) se enumeran distintas formulaciones obtenidas al considerar diferentes normas en FU, es interesante mencionar qué conexiones o equivalencias entre formulaciones surgen al variar la norma utilizada.

La formulación FU con la norma euclídeana representa una de las formu-

laciones más comúnmente utilizadas en la literatura, probablemente por su simple implementación. Consiste en un problema de optimización no lineal el cual puede no ser sencillo de resolver de forma eficiente. Por otra parte, dado que tiene restricciones no lineales, el conjunto factible puede no ser convexo, por lo tanto no se puede garantizar que un mínimo local sea mínimo global del problema. La mayoría de los algoritmos de optimización que se podrían utilizar para resolver este problema requieren un punto inicial. Por otra parte, dado que el problema no es convexo, distintos puntos iniciales podrían conducir a distintas soluciones.

La formulación FR (con norma euclídeana) cuenta con un funcional convexo y restricciones lineales, por lo que nos encontramos ante un problema convexo, lo que garantiza que todo mínimo local es también mínimo global. Dado que existe una amplia gama de algoritmos eficientes para la resolución de problemas de optimización convexa, consideramos esto como una propiedad importante a la hora de buscar normas adecuadas o formulaciones eficientes del PIM. En este caso el funcional es cuadrático lo cual, junto con las restricciones lineales, define un problema de optimización cuadrática como fue visto anteriormente.

Si utilizamos la norma $\|\cdot\|_{\mathbf{K}(\mathbf{E})^{-2}}$ en FR, obtenemos una formulación equivalente a FU con norma Euclídeana, por lo que se puede ver que puede existir algún tipo de equivalencias entre ambas formulaciones al considerar diferentes normas. De todas formas en dicho cambio de FR se perderían las propiedades positivas mencionadas sobre la misma.

Veamos ahora el procedimiento seguido para la generación de desplazamientos nodales con error. Consideremos los valores de Young de referencia E^r , excepto por el elemento 11, para el cual utilizaremos un valor que se encuentre fuera del intervalo factible \mathbf{I}_E , por ejemplo $E_{11} = 3$ Pa. El problema directo es resuelto con estos valores de E , obteniendo así los desplazamientos con error o desplazamientos “medidos” \mathbf{U}^m .

Al realizar la optimización sin considerar el término de regularización ($\alpha_R = 0$), obtenemos el resultado que vemos en la Figura 4.1(a) donde se muestran los valores de E en cada punto de la barra identificado por el número de elemento (*Element number* en inglés). Podemos apreciar que para ambas formulaciones la restricción $E_{11} \leq 2.5$ Pa se vuelve activa y los valores de E obtenidos para los elementos cercanos al 11 también pasan a tener un error considerable. Este efecto es considerablemente más negativo en la formulación FR que en la FU.

Luego se considera el término de regularización escogiendo el coeficiente de

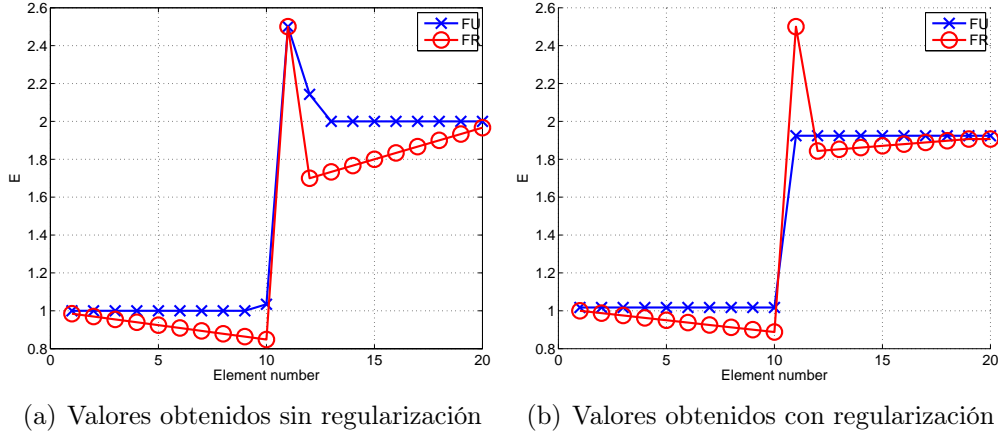


Figura 4.1: Resultados de ejemplo unidimensional de identificación de material.

regularización α_R utilizando la estrategia descrita en la Sección 4.2.3. Como vemos en la Figura 4.1(b) el resultado obtenido con la formulación FU mejora al aplicar regularización, consiguiendo identificar los valores correctos de E . Los resultados obtenidos usando la formulación FR muestran que no es posible identificar los valores correctos de E . Si se utilizan valores mayores para α_R en la formulación FR el valor E_{11} disminuye pero los valores de E de los elementos 12 a 20 también lo hacen, aumentando el error global del resultado.

Comparemos las formulaciones y los resultados obtenidos analizando tres aspectos importantes: convexidad, costo computacional y aplicabilidad de regularización. Respecto a la convexidad, ya hemos dicho que la FR consiste en un problema de optimización convexa lo que representa una ventaja importante respecto a la FU. Sobre el costo computacional, también la FR es más adecuada ya que, al permitir su resolución utilizando algoritmos para optimización cuadrática, su costo computacional es considerablemente menor al asociado a resolver la FU, que consiste en un problema de optimización no lineal general. Por último, viendo los resultados concluimos que no es posible aplicar regularización exitosamente a la formulación FR del PIM mientras que sí es posible en el caso de la FU. Esta desventaja de la FR es crítica ya que en aplicaciones reales siempre será necesario aplicar regularización y ésta debe tener efectos positivos sobre los resultados tal como lo hace sobre la formulación FU.

A partir de las conclusiones obtenidas enumeraremos algunas propiedades que consideramos son fuertemente deseables para toda formulación del PIM:

- convexidad: el problema de optimización formulado debe ser convexo,
- eficiencia: debe ser posible la resolución del problema de forma eficiente comparada con las formulaciones existentes, así como también su aplicación a la resolución de problemas de gran escala sin perder eficiencia,
- regularización efectiva: debe ser posible aplicar regularización para reducir el efecto de error en los datos sin afectar excesivamente la solución,
- formulación en el continuo: la formulación debe ser establecida en el continuo para reducir la dependencia de los resultados respecto a la malla utilizada.

4.2. Regularización

Como vimos en la Sección 2.4.1, al formular problemas inversos se debe prever la utilización de alguna estrategia de regularización. En esta sección se presenta brevemente el término de regularización escogido para las formulaciones del PIM introducidas en este trabajo. Luego se desarrolla una estrategia para su inclusión a los problemas de optimización del PIM y finalmente se describe una estrategia para la elección del coeficiente de regularización α_R .

4.2.1. Elección del término regularizador para el PIM

Considerando las hipótesis enunciadas anteriormente, la variable material a identificar será E . Se puede ver que el error presente en los desplazamientos medidos tiene un efecto negativo sobre las distribuciones obtenidas, produciendo soluciones con elevado gradiente de E . Es posible limitar el efecto negativo del error en los datos penalizando soluciones con elevada magnitud de dicho gradiente, es decir, definiendo como término regularizador una norma de ∇E . Podríamos por ejemplo considerar $\mathcal{R}(E) = \|\nabla E\|_{L_2(\Omega)^2}^2$, funcional que tiene la ventaja de ser diferenciable, pero puede mostrarse que esto proveería distribuciones de E demasiado suaves donde se penaliza excesivamente los saltos o escalones en las propiedades de materiales. En problemas donde el sólido tiene una inclusión de diferente material con una interfaz claramente definida, no se debe penalizar excesivamente las soluciones con saltos, por lo que este regularizador no es apropiado y tampoco es frecuente en la literatura del PIM.

Existen otros enfoques diferentes como en (Warner et al., 2014; Diaz et al., 2015) donde el funcional utilizado es similar al CEG visto en la Sección 2.4.2 y

el término de regularización consiste en una distancia entre los desplazamientos medidos y los considerados en el funcional CEG. Esto permite relajar la imposición de los desplazamientos medidos, obteniendo soluciones con gradientes de menor magnitud.

Uno de los regularizadores más apropiados para problemas donde existen inclusiones con cambio brusco de los parámetros mecánicos es el de variación total o *Total Variation* (TV) (Vogel, 2002), que está dado por:

$$\mathcal{R}(E) = \|\nabla E\|_{L_1(\Omega)^2} = \int_{\Omega} |\nabla E| \, d\Omega, \quad (4.4)$$

donde E es la función escalar definida en Ω . Utilizando este término se logra obtener distribuciones de E suaves, aunque la presencia de inclusiones no es severamente penalizada. Inclusiones o cambios abruptos en las propiedades del material son esperables en la resolución de problemas de identificación de tumores en tejido mamario (Goenezen et al., 2012).

El regularizador TV debe ser utilizado cuidadosamente, dado que en puntos de gradiente nulo no es diferenciable. Esto puede provocar un mal desempeño al utilizar algoritmos de optimización basados en gradientes. En (Vogel, 2002) se describe una técnica utilizada para evitar esto, la cual consiste en considerar el siguiente funcional modificado:

$$\mathcal{R}'(E) = \int_{\Omega} \sqrt{|\nabla E|^2 + c_V^2} \, d\Omega, \quad (4.5)$$

donde c_V es un parámetro real suficientemente pequeño. Este procedimiento es aplicado en (Goenezen et al., 2011, 2012) y permite obtener resultados satisfactorios aunque introduce el inconveniente de tener que definir un parámetro adicional. En la siguiente sección presentaremos una metodología para la evaluación sin requerir el uso de dicho parámetro.

4.2.2. Aplicación de regularización

Como ya hemos mencionado el parámetro mecánico E es uniforme dentro de cada elemento finito, por lo que existen discontinuidades en las interfaces entre elementos. Para poder presentar el desarrollo matemático formal es conveniente introducir la siguiente proposición previa.

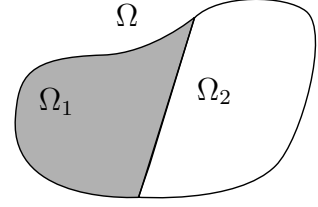
Proposición 1. *Sea una región $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y la función $f \in L_{\infty}(\Omega)$ dada por:*

$$f(x) = \begin{cases} f_1 & \text{si } x \in \Omega_1 \\ f_2 & \text{si } x \in \Omega_2 \\ a & \text{si } x \in P_\Omega \end{cases} \quad (4.6)$$

donde f_1 y f_2 son valores reales conocidos, las regiones Ω_1 y Ω_2 cumplen que $\overline{\Omega_1} \cup \overline{\Omega_2} = \overline{\Omega}$ y $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$, y el conjunto $P_\Omega = \overline{\Omega_1} \cap \overline{\Omega_2}$ está incluido en un hiperplano. a es un valor real conocido.

Entonces se cumple:

$$TV(f) = \int_{\Omega} |\nabla f| d\Omega = |f_2 - f_1| \int_{P_\Omega} dS. \quad (4.7)$$



En la figura del enunciado se muestra un esquema del dominio en el caso \mathbb{R}^2 . Una demostración de esta proposición se puede encontrar en (Ambrosio et al., 2000). Es importante remarcar que el valor de la integral no depende del valor a .

La proposición vista será útil para evaluar \mathcal{R} en una malla de elementos finitos. Al aplicar la discretización de elementos finitos obtenemos una malla de elementos triangulares divididos por n_{seg} segmentos (o triángulos en el caso de mallas de tetraedros). Cada segmento interior de la malla m separa a dos elementos cuyos dominios pueden ser considerados como Ω_1 y Ω_2 en la proposición, obteniendo la siguiente igualdad:

$$\mathcal{R}(\mathbf{E}) = \sum_{m=1}^{n_{seg}} |\mathbf{P}_m \mathbf{E}| = \|\mathbf{PE}\|_1, \quad (4.8)$$

donde \mathbf{P} es una matriz de tamaño $n_{seg} \times n_E$ y \mathbf{P}_m es la m -ésima fila de la matriz. Si el segmento m divide a los elementos p y q la matriz \mathbf{P} está dada por:

$$\mathbf{P}_{mj} = \begin{cases} \ell_m & \text{si } j = p \\ -\ell_m & \text{si } j = q \\ 0 & \text{si } j \neq q \text{ y } j \neq p \end{cases} \quad (4.9)$$

donde ℓ_m es la longitud del segmento m .

El término obtenido en la Ecuación (4.8) permite el cálculo de la integral en un dominio discretizado. A pesar de esto el funcional continúa siendo no diferenciable en puntos con gradiente nulo por lo tanto se considera la siguiente

identidad:

$$\|\mathbf{PE}\|_1 \equiv \begin{cases} \min_{\mathbf{Z}} & \mathbf{1}_{n_{seg}}^T \mathbf{Z} \\ \text{s.a.} & \\ & \mathbf{PE} - \mathbf{Z} \leq 0 \\ & -\mathbf{PE} - \mathbf{Z} \leq 0 \\ & \mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{n_{seg}} \end{cases} \quad (4.10)$$

donde \mathbf{Z} es una variable auxiliar asociada a la variación de E entre elementos contiguos y $\mathbf{1}_{n_{seg}}^T = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^{n_{seg}}$. Más adelante presentaremos las formulaciones discretizadas del PIM incluyendo este término de regularización y confirmaremos que no es necesario el uso del parámetro c_V para obtener buenos resultados.

4.2.3. Análisis de coeficiente de regularización

Como vimos, uno de los aspectos más importantes de la técnica de regularización es la elección del factor de regularización α_R . En esta sección se describe una estrategia para la selección automática de dicho valor utilizando el criterio de *Morozov* y un método de bisección.

El criterio de *Morozov* establece que el α_R apropiado es el máximo valor para el cual se cumple

$$m(\alpha_R) = \frac{\|\mathbf{u}_{\alpha_R}^* - \mathbf{u}^m\|_{L_2(\Omega)^2}}{\delta_R} \leq 1, \quad (4.11)$$

donde \mathbf{u}^m es el campo de desplazamientos medido, $\mathbf{u}_{\alpha_R}^*$ es el desplazamiento solución del problema directo usando los parámetros mecánicos obtenidos al resolver el problema de identificación con el coeficiente α_R y δ_R es una estimación del error de medida. En pocas palabras, el α_R adecuado es el mayor valor que produce en \mathbf{U} una diferencia del mismo nivel que el error presente en los datos.

Consideremos que deseamos alcanzar un cierto valor objetivo m_{obj} que, para satisfacer la desigualdad del criterio de Morozov, debe ser menor a 1, y que existen dos valores $(\alpha_R)_{left}$ y $(\alpha_R)_{right}$ tales que $m((\alpha_R)_{left}) < m_{obj}$ y $m((\alpha_R)_{right}) > m_{obj}$. Es posible entonces aplicar un método de bisección en escala logarítmica, donde en cada iteración (k) se define un nuevo α_R de la

siguiente forma

$$\log_{10} \alpha_R^{(k)} = \frac{\log_{10}((\alpha_R^{(k)})_{left}) + \log_{10}((\alpha_R^{(k)})_{right})}{2}, \quad (4.12)$$

continuando el proceso como en el método bisección usual,

$$\begin{cases} \text{si } m(\alpha_R^{(k)}) < m_{obj} & (\alpha_R)_{left}^{(k+1)} = \alpha_R^{(k)} \\ \text{si } m(\alpha_R^{(k)}) > m_{obj} & (\alpha_R)_{right}^{(k+1)} = \alpha_R^{(k)} \end{cases} \quad (4.13)$$

El criterio de parada consistirá en que se cumpla la condición: $|m(\alpha_R^{(k)}) - m_{obj}| < tol_m$, donde tol_m es una tolerancia definida.

La hipótesis de que se pueda encontrar un $(\alpha_R)_{left}$ tal que $m((\alpha_R)_{left}) < m_{obj}$ puede no ser satisfecha cuando el nivel de ruido estimado δ_R es relativamente elevado, por lo que esto podría representar una limitación para el método propuesto. En caso de no poder ser aplicada esta estrategia se puede realizar la identificación para diferentes valores de α_R en un intervalo definido y aún así aplicar el criterio de *Morozov* o visualizar la distribución para aceptar o rechazar el valor α_R .

En (Goenez et al., 2011) se eligen valores de α de acuerdo con el criterio de *Morozov* aunque no se describe un método automático. Una técnica de elección de α_R ligeramente similar ha sido utilizada en (Warner et al., 2014) aunque el método de bisección propuesto aquí promete una mejor convergencia. La comparación de desempeño de las diferentes estrategias debe ser realizada a futuro.

4.3. Nuevas formulaciones del PIM

Como fue visto en el ejemplo unidimensional, la formulación utilizada para resolver el PIM puede modificar notablemente la calidad de los resultados obtenidos. En esta sección se desarrollan tres nuevas formulaciones del PIM, las cuales poseen las propiedades anteriormente mencionadas como deseables. Para cada formulación un problema de optimización es formulado inicialmente en el continuo para luego presentar las versiones discretas obtenidas al aplicar el MEF.

4.3.1. Formulaciones cónicas del PIM

En esta sección se presentan dos nuevas formulaciones, las cuales consisten en problemas de optimización cónica como los presentados en la Sección 2.3.2.

Desarrollo en el continuo

Como se vio en la Sección 3.2 el CEGM representa uno de los métodos de referencia para la resolución del PIM. Para desarrollar nuevas formulaciones que conserven sus buenas propiedades partiremos del problema definido por la Ecuación (2.74). Podemos ver que el mismo es equivalente a resolver

$$\min_{(\boldsymbol{\sigma}, \mathbb{C}) \in \Sigma \times \mathbf{C}} \mathcal{E}_{CEGM}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbb{C}), \quad (4.14)$$

donde recordamos que el funcional \mathcal{E}_{CEGM} está dado por la Ecuación (2.75).

Uno de los desafíos de este tipo de métodos es la construcción del conjunto Σ , particularmente cuando se utilizan elementos finitos con funciones de interpolación de orden superior a uno. Utilizando el principio de los trabajos virtuales dado por la Ecuación (2.24) podemos reescribir el problema de la siguiente forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\boldsymbol{\sigma}, \mathbb{C}} \mathcal{E}_{CEGM}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbb{C}), \\ \text{s.a.} \\ \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, dV = l(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \\ \mathbb{C} \in \mathbf{C} \quad \boldsymbol{\sigma} \in H^{div}(\Omega), \end{array} \right. \quad (4.15)$$

logrando así eliminar el conjunto Σ de la formulación.

Para eliminar el tensor de tensiones $\boldsymbol{\sigma}$ como variable podemos aplicar una estrategia mencionada en (Pagano and Bonnet, 2012) que consiste en considerar que dicho campo de tensores de tensiones deriva de un campo de desplazamientos \mathbf{w} . Sustituyendo tenemos

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\mathbf{w}, \mathbb{C}} \mathcal{E}_{CEGM}(\mathbb{C}\mathbf{w}, \mathbb{C}), \\ \text{s.a.} \\ \int_{\Omega} \mathbb{C}[\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w})] : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, dV = l(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \\ \mathbb{C} \in \mathbf{C} \quad \mathbf{w} \in \mathcal{U}. \end{array} \right. \quad (4.16)$$

Desarrollando el funcional obtenemos el siguiente problema equivalente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\mathbf{w}, \mathbb{C}} \quad \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbb{C}[\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^m)] : (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^m)) \, dV, \\ \text{s.a.} \\ \int_{\Omega} \mathbb{C}[\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w})] : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, dV = l(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \\ \mathbb{C} \in \mathbf{C} \quad \mathbf{w} \in \mathcal{U}. \end{array} \right. \quad (4.17)$$

Utilizando la hipótesis de isotropía y aplicando la discretización de elementos finitos obtenemos la siguiente formulación

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\mathbf{E}} \quad \frac{1}{2} (\mathbf{W} - \mathbf{U}^m)^T \mathbf{K}(\mathbf{E}) (\mathbf{W} - \mathbf{U}^m), \\ \text{s.a.} \\ \mathbf{K}(\mathbf{E}) \mathbf{W} = \mathbf{F}, \\ \mathbf{E}_{\min} \leq \mathbf{E} \leq \mathbf{E}_{\max}, \end{array} \right. \quad (4.18)$$

donde fue incluido el intervalo admisible para los valores de E .

Finalmente, sustituyendo la restricción en el funcional obtenemos la siguiente formulación equivalente

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\mathbf{W}, \mathbf{E}} \quad \frac{1}{2} (\mathbf{U}^m)^T \mathbf{K}(\mathbf{E}) \mathbf{U}^m + \frac{1}{2} \mathbf{F}^T \mathbf{K}(\mathbf{E})^{-1} \mathbf{F}, \\ \text{s.a.} \\ \mathbf{E}_{\min} \leq \mathbf{E} \leq \mathbf{E}_{\max}. \end{array} \right. \quad (4.19)$$

La formulación obtenida hasta aquí consiste en un problema de optimización no lineal con un funcional no lineal pero convexo dado que fue obtenido a partir del \mathcal{E}_{CEGM} . Se puede ver que el problema de optimización obtenido tiene una estructura similar al obtenido al considerar el modelo simple de optimización estructural en la Sección 2.3.2. Es por esto que se desarrollará un procedimiento equivalente para obtener también un problema de optimización cónica para el PIM.

Formulación Cónica Primal

Consideremos ahora dos variables auxiliares τ_U y τ_F , con dos respectivas restricciones de desigualdad, obteniendo la siguiente formulación equivalente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{mín} \\ \mathbf{E}, \tau_U, \tau_F \\ \text{s.a.} \end{array} \quad \begin{array}{l} \frac{1}{2}\tau_U + \frac{1}{2}\tau_F \\ (\mathbf{U}^m)^T \mathbf{K}(\mathbf{E}) \mathbf{U}^m \leq \tau_U \\ \mathbf{F}^T \mathbf{K}(\mathbf{E})^{-1} \mathbf{F} \leq \tau_F \\ \mathbf{E}_{\text{mín}} \leq \mathbf{E} \leq \mathbf{E}_{\text{máx}}. \end{array} \right. \quad (4.20)$$

El problema obtenido tiene un funcional lineal, restricciones lineales y una restricción no lineal escalar.

Para eliminar la restricción no lineal aplicaremos un procedimiento similar al que se muestra en (Beck et al., 2009) para la formulación de problemas de optimización estructural, aplicado también en la Sección 2.3.2. En este caso en lugar de utilizar la áreas como variables utilizaremos los módulos de Young. La matriz de rigidez puede ser escrita como:

$$\mathbf{K}(\mathbf{E}) = \sum_{i=1}^{n_E} E_i \mathbf{B}_i \mathbf{C}_1 \mathbf{B}_i^T |\Omega_i| = \sum_{i=1}^{n_E} E_i \tilde{\mathbf{B}}_i \tilde{\mathbf{B}}_i^T, \quad (4.21)$$

donde \mathbf{B}_i es la matriz de derivadas de funciones de interpolación del elemento i -ésimo, la matriz $\tilde{\mathbf{B}}_i$ es dada por $\tilde{\mathbf{B}}_i = \mathbf{B}_i \sqrt{\mathbf{C}_1} \sqrt{|\Omega_i|}$ y $|\Omega_i|$ es el volumen del elemento i -ésimo. En la literatura suele usarse otra notación en la que lo que aquí se define como \mathbf{B}_i es el traspuesto de la matriz de derivadas de las funciones de forma. Por simplicidad de notación mantendremos este criterio.

La formulación obtenida aplicando el procedimiento mencionado tiene la siguiente expresión:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{mín} \\ \mathbf{E}, \tau_U, \tau_F, \mathbf{e}, \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \\ \text{s.t.} \end{array} \quad \begin{array}{l} \frac{1}{2}\tau_U + \frac{1}{2}\tau_F \\ (\mathbf{U}^m)^T \mathbf{K}(\mathbf{E}) \mathbf{U}^m \leq \tau_U \\ \sum_{i=1}^{n_E} 2e_i \leq \tau_F \\ \sum_{i=1}^{n_E} \tilde{\mathbf{B}}_i \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_i = \mathbf{F} \\ \|\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_i\|^2 \leq 2E_i e_i \quad i = 1, \dots, n_E \\ \mathbf{E}_{\text{mín}} \leq \mathbf{E} \leq \mathbf{E}_{\text{máx}}, \end{array} \right. \quad (4.22)$$

donde las variables creadas e_i son escalares y las variables $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_i$ representan tensores de la misma dimensión que el tensor de tensiones evaluado en cada elemento $\boldsymbol{\sigma}_i$. La restricción lineal que involucra a $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ representa una condición de equilibrio o compatibilidad de tensiones, a su vez, en la solución del problema, $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_i$ puede ser asociado con la tensión en el i -ésimo elemento.

Incluyamos ahora el término proveniente de la regularización visto en la Sección 4.2.2 y utilicemos la notación para problemas de optimización cónica vista en la Sección 2.3.2. Obtenemos así nuestra primer formulación cónica del PIM:

$$\begin{array}{l}
\text{(CPCEG)} \left\{ \begin{array}{l}
\text{mín} \\
\mathbf{E}, \tau_U, \tau_F, \mathbf{e}, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \mathbf{Z} \\
\text{s.a.}
\end{array} \right. \begin{array}{l}
\frac{1}{2}\tau_U + \frac{1}{2}\tau_F + \alpha_R \mathbf{1}^T \mathbf{Z}, \\
\sum_{i=1}^{n_E} \tilde{\mathbf{B}}_i \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_i = \mathbf{F} \\
-\mathbb{A}_E \mathbf{E} + \tau_U \geq_{\mathbb{R}_+} 0 \\
-\sum_{i=1}^{n_E} 2 e_i + \tau_F \geq_{\mathbb{R}_+} 0, \\
-\mathbf{E} + \mathbf{E}_{\text{máx}} \geq_{\mathbb{R}_+^{n_E}} \mathbf{0}, \\
\mathbf{E} - \mathbf{E}_{\text{mín}} \geq_{\mathbb{R}_+^{n_E}} \mathbf{0}, \\
-\mathbf{P}\mathbf{E} + \mathbf{Z} \geq_{\mathbb{R}_+^{n_S}} \mathbf{0}, \\
\mathbf{P}\mathbf{E} + \mathbf{Z} \geq_{\mathbb{R}_+^{n_S}} \mathbf{0}, \\
[E_i, e_i, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_i^T]^T \geq_{\mathbb{Q}^5} \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, n_E,
\end{array} \quad (4.23)
\end{array}$$

donde \mathbb{A}_E es una matriz que cumple $\mathbb{A}_E \mathbf{E} = (\mathbf{U}^m)^T \mathbf{K}(\mathbf{E}) \mathbf{U}^m$.

La formulación resultante tiene restricciones cónicas de segundo orden y un funcional lineal por lo que consiste en un problema de programación cónica de segundo orden (SOCP). Como mencionamos existen diversos algoritmos para la resolución eficiente de este tipo de problemas y dado que la formulación resultante fue obtenida a partir del método CEG y es equivalente al CEGM, hereda sus buenas propiedades teóricas como la convexidad del funcional. Dado que la formulación consiste en un problema de *Conic Programming* esta formulación será llamada CPCEG.

Hasta ahora fue considerado el caso en el cual se dispone de un único vector de desplazamientos nodales medido. En diversas aplicaciones es posible tener más de un campo de desplazamientos para distintos estados de carga. Por ejemplo en (Goenezen et al., 2011) se utilizan dos campos de desplazamiento

para un estado de cargas variando la magnitud de la presión y otros dos campos para otro estado de cargas.

Consideremos el caso en el que se dispone de dos campos de desplazamientos bajo la hipótesis de pequeñas deformaciones para estados de cargas proporcionales. Esto quiere decir que contamos con el vectores de desplazamientos medidos \mathbf{U}_1^m asociado al estado de cargas \mathbf{F} y el vector \mathbf{U}_c^m asociado al estado de cargas $c\mathbf{F}$. Introduciendo la modificación $\mathbf{U}_2^m = \frac{1}{c}\mathbf{U}_c^m$ pasamos a obtener dos campos de desplazamientos asociados al vector de fuerzas nodales \mathbf{F} . Ahora realizando el procedimiento desde el comienzo, considerando dos términos del funcional \mathcal{E}_{CEGM} asociados a cada campo de desplazamientos, se puede ver que la formulación del problema pasa a ser:

$$\begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l}
 \text{mín} \\
 \mathbf{E}, (\tau_U)_1, (\tau_U)_2, \tau_F, \mathbf{e}, \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \\
 \text{s.a.}
 \end{array} \right\} \begin{array}{l}
 \frac{1}{2}(\tau_U)_1 + \frac{1}{2}(\tau_U)_2 + \tau_F + \alpha_R \mathbf{1}^T \mathbf{Z} \\
 \\
 \sum_{i=1}^{n_E} \tilde{\mathbf{B}}_i \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_i = \mathbf{F} \\
 -(\mathbf{U}_1^m)^T \mathbf{K}(\mathbf{E}) \mathbf{U}_1^m + (\tau_U)_1 \geq_{\mathbb{R}_+} 0 \\
 -(\mathbf{U}_2^m)^T \mathbf{K}(\mathbf{E}) \mathbf{U}_2^m + (\tau_U)_2 \geq_{\mathbb{R}_+} 0 \\
 -\sum_{i=1}^{n_E} 2 e_i + \tau_F \geq_{\mathbb{R}_+} 0 \\
 -\mathbf{E} + \mathbf{E}_{\text{máx}} \geq_{\mathbb{R}_+^{n_E}} \mathbf{0} \\
 \mathbf{E} - \mathbf{E}_{\text{mín}} \geq_{\mathbb{R}_+^{n_E}} \mathbf{0} \\
 -\mathbf{P}\mathbf{E} + \mathbf{Z} \geq_{\mathbb{R}_+^{n_S}} \mathbf{0} \\
 \mathbf{P}\mathbf{E} + \mathbf{Z} \geq_{\mathbb{R}_+^{n_S}} \mathbf{0} \\
 [E_i, e_i, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_i^T]^T \geq_{\mathbb{Q}^5} \mathbf{0} \quad i = 1, \dots, n_E
 \end{array}
 \end{array} \quad (4.24)$$

Si los estados de cargas asociados a los campos de desplazamientos medidos no son proporcionales, es sencillo utilizar una formulación más general donde se consideren restricciones adicionales para las variables e y $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ asociadas a cada estado de cargas.

Finalmente se puede mencionar que a partir de los valores $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_i$ es sencillo obtener las tensiones en cada elemento. Esto podría significar una ventaja adicional importante al considerar otros modelos constitutivos o alguna ley para definir tensiones admisibles en el sólido. Investigar esto será objeto de trabajos futuros.

Formulación Cónica Dual

En algunos problemas de optimización puede ser conveniente resolver el problema dual, por ejemplo en algunos modelos de optimización estructural se obtienen formulaciones más eficientes al resolver la formulación dual (Ben-Tal and Nemirovski, 1997). En esta sección se presenta brevemente la formulación dual del CPCEG.

Aplicando la definición de problema dual vista en la Sección 2.3.2 a la formulación CPCEG dada por la Ecuación (4.23), y simplificando algunas variables y restricciones triviales obtenemos la siguiente formulación:

$$\text{(CDCEG)} \left\{ \begin{array}{l} \text{mín} \\ \mathbf{y}, \mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_6 \\ \text{s.a.} \\ \\ \mathbf{z}_3 + \mathbf{z}_4 = \alpha_R \mathbf{1}^T, \\ -\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2 - \mathbf{P}\mathbf{z}_3 + \mathbf{P}\mathbf{z}_4 + \mathbf{1}_E \mathbf{z}_5 = \frac{1}{2} \mathbf{A}_E^T \\ \mathbf{z}_1 \geq_{\mathbb{R}_+} 0 \\ \mathbf{z}_2 \geq_{\mathbb{R}_+} 0 \\ \mathbf{z}_3 \geq_{\mathbb{R}_+} 0 \\ \mathbf{z}_4 \geq_{\mathbb{R}_+} 0 \\ \mathbf{y}^T \tilde{\mathbf{B}}_i \tilde{\mathbf{B}}_i^T \mathbf{y} - 2(\mathbf{z}_6)_i \leq 0 \quad i = 1, \dots, n_E \end{array} \right. \quad (4.25)$$

donde \mathbf{y} y \mathbf{z}_i son las variables duales del problema primal. Así como las variables primales tienen interpretaciones físicas, las variables duales también pueden ser interpretadas como energías, desplazamientos y deformaciones.

Esta formulación también puede ser resuelta utilizando los mismos algoritmos eficientes utilizados para la formulación CPCEG. El teorema de dualidad nos permite asegurar que si la formulación primal es factible entonces esta también lo será por lo que ambas tienen las mismas propiedades teóricas deseadas. Los resultados numéricos sobre el desempeño computacional de estas dos formulaciones cónicas del PIM serán presentados en el siguiente capítulo.

4.3.2. Formulación Cuadrática del PIM

Veamos ahora otra formulación que, de acuerdo con la investigación realizada en la literatura, no ha sido anteriormente utilizada para resolver el PIM. En esta sección se presenta una formulación en la que el problema puede ser resuelto de forma muy eficiente, a través de la resolución de un problema de

optimización cuadrática, al igual que en la FR, pero sin perder las ventajas más destacables del método CEGM.

Consideremos nuevamente ahora el problema dado por la Ecuación (4.15) el cual consiste en una formulación equivalente al CEGM. Modifiquemos ahora el funcional considerando que el tensor \mathbb{C}^{-1} deja de depender de \mathbb{C} , y pasa a ser un campo tensorial dado $(\mathbb{C}^{(k)})^{-1}$, donde (k) puede representar un paso de una iteración en caso de modificar el tensor para realizar varias identificaciones. Se obtiene el funcional modificado \mathcal{E}_q dado por:

$$\mathcal{E}_q^{(k)}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbb{C}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma} - \mathbb{C}[\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^m)]) : (\mathbb{C}^{(k)})^{-1} [\boldsymbol{\sigma} - \mathbb{C}[\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^m)]] \, dV. \quad (4.26)$$

Este funcional cuadrático es similar al presentado por (Ladeveze and Leguillon, 1983) para el análisis de calidad de mallas de elementos finitos, pero no ha sido aplicado a la resolución del PIM.

Consideremos ahora el cambio de variable $\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - \mathbb{C}[\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^m)]$. Reescribiendo la formulación del PIM con el nuevo funcional y utilizando el cambio de variable obtenemos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\mathbb{C}, \mathbf{s}} \quad \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{s} : (\mathbb{C}^{(k)})^{-1} [\mathbf{s}] \, dV, \\ \text{s.a.} \\ \int_{\Omega} \mathbb{C}[\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^m)] : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, dV + \int_{\Omega} \mathbf{s} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, dV = l(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \\ \mathbb{C} \in \mathbf{C} \quad \mathbf{s} \in H^{\text{div}}(\Omega), \end{array} \right. \quad (4.27)$$

donde se consideró el dominio más general para el tensor \mathbf{s} .

Aplicemos ahora la discretización del MEF a la formulación presentada en la Ecuación (4.27). El campo tensorial \mathbf{s} pasará a definir un vector de sollicitaciones $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{3n_E}$. Utilizando también que el material es isótropo, obtenemos la siguiente igualdad

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{s} : (\mathbb{C}^{(k)})^{-1} [\mathbf{s}] \, dV = \sum_{i=1}^{n_E} \frac{1}{E_i^{(k)}} (\mathbf{S}_i)^T \mathbb{C}_1^{-1} (\mathbf{S}_i) |\Omega_i|, \quad (4.28)$$

donde \mathbf{S}_i es el vector con las componentes correspondientes al elemento i -ésimo.

Para simplificar la notación definimos la matriz $\mathbf{M}^{(k)}$ como

$$\mathbf{M}^{(k)} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \mathbf{M}_{n_E} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_i = \mathbb{C}_1^{-1} |\Omega_i| \frac{1}{E_i^{(k)}}. \quad (4.29)$$

Finalmente considerando también las variables asociadas a la regularización obtenemos la nueva formulación cuadrática del PIM:

$$(\text{QPCEG}) \left\{ \begin{array}{l} \underset{\mathbf{E}, \mathbf{S}}{\text{mín}} \quad \frac{1}{2} \mathbf{S}^T \mathbf{M}^{(k)} \mathbf{S} + \alpha_R \mathbf{1}^T \mathbf{Z} \\ \text{s.a.} \\ \mathbf{K}(\mathbf{E}) \mathbf{U}^m + \mathbf{B} \mathbf{S} = \mathbf{F} \\ -\mathbf{E} + \mathbf{E}_{\text{máx}} \geq_{\mathbb{R}_+^{n_E}} \mathbf{0} \\ \mathbf{E} - \mathbf{E}_{\text{mín}} \geq_{\mathbb{R}_+^{n_E}} \mathbf{0} \\ -\mathbf{P} \mathbf{E} + \mathbf{Z} \geq_{\mathbb{R}_+^{n_S}} \mathbf{0} \\ \mathbf{P} \mathbf{E} + \mathbf{Z} \geq_{\mathbb{R}_+^{n_S}} \mathbf{0}. \end{array} \right. \quad (4.30)$$

El problema tiene un funcional cuadrático, n_U restricciones lineales $2n_E$ restricciones de caja y $4n_E$ variables, por lo que es un problema de programación cuadrática. Esto permite asegurar que si hay mínimo entonces es un mínimo global. Llamaremos a esta formulación QPCEG dado que consiste en una formulación modificada del CEGM en la cual debemos resolver simplemente un problema de optimización cuadrática. En el siguiente capítulo se mostrarán resultados obtenidos utilizando esta formulación.

4.4. Implementación de formulaciones existentes

Para obtener resultados concretos sobre la eficiencia computacional de las formulaciones propuestas debemos establecer una metodología de validación y comparación. La misma consistirá en la implementación de dos formulaciones del PIM utilizadas en la literatura y la posterior resolución de ejemplos numéricos, comparando los resultados con los obtenidos con las formulaciones propuestas. En esta sección se presenta una implementación realizada para las

formulaciones vistas en la Sección 2.4.2.

4.4.1. Error cuadrático en desplazamientos

A partir de la formulación del problema inverso utilizando el funcional dado por la Ecuación (2.71) y aplicando la discretización de elementos finitos obtenemos la siguiente formulación:

$$(\text{NPQED}) \begin{cases} \min_{\mathbf{E}} & \frac{1}{2} \|\mathbf{U}(\mathbf{E}) - \mathbf{U}^m\|_{\mathbf{M}_u}^2 \\ \text{s.a.} & \\ & \mathbf{E}_{\min} \leq \mathbf{E} \leq \mathbf{E}_{\max} \end{cases} \quad (4.31)$$

donde \mathbf{M}_u es la matriz asociada a la discretización de la norma considerada para $L_2(\Omega)^2$, \mathbf{U}^m es el vector de desplazamientos nodales medidos y la norma $\|\cdot\|_{\mathbf{M}_u}$ está definida como

$$\|\mathbf{U}\|_{\mathbf{M}_u} = \sqrt{\mathbf{U}^T \mathbf{M}_u \mathbf{U}} \quad \forall \mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n_u}. \quad (4.32)$$

Dado que $\mathbf{U}(\mathbf{E})$ es una función no lineal en \mathbf{E} el funcional a minimizar también lo será, por lo que debe ser utilizado un algoritmo para problemas generales de optimización no lineal, por lo que llamaremos NPQED (*Nonlinear Programming Quadratic Error in Displacements*) a la formulación. Dado que es posible y sencillo el cálculo de gradientes del funcional se pueden utilizar algoritmos basados en gradientes, y eventualmente, para mejorar la convergencia de los algoritmos, se puede calcular la matriz Hessiana, provocando también un aumento considerable del tiempo requerido en cada iteración del algoritmo.

4.4.2. Constitutive Equation Gap

Consideremos la formulación del CEGM dada por la Ecuación (4.15) y nuevamente consideremos $\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}[\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w})]$. Aplicando la discretización del método

de elementos finitos obtenemos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\mathbf{E}, \mathbf{W}} \quad \frac{1}{2} \|\mathbf{W} - \mathbf{U}^m\|_{\mathbf{K}(\mathbf{E})}^2 \\ \text{s.a.} \\ \mathbf{K}(\mathbf{E})\mathbf{W} = \mathbf{F} \\ \mathbf{E}_{\min} \leq \mathbf{E} \leq \mathbf{E}_{\max} \\ \mathbf{W} \in \mathbb{R}^{n_U} \end{array} \right. \quad (4.33)$$

Finalmente podemos utilizar la restricción para eliminar la variable \mathbf{W} y obtener así la siguiente formulación:

$$\text{(NPCEG)} \left\{ \begin{array}{l} \min_{\mathbf{E}} \quad \frac{1}{2} \|\mathbf{U}(\mathbf{E}) - \mathbf{U}^m\|_{\mathbf{K}(\mathbf{E})}^2 \\ \text{s.a.} \\ \mathbf{E}_{\min} \leq \mathbf{E} \leq \mathbf{E}_{\max} \end{array} \right. \quad (4.34)$$

A pesar de que el funcional es no lineal, es convexo y esto garantiza que los mínimos obtenidos al aplicar algoritmos de optimización serán mínimos globales. Esta propiedad es muy importante, particularmente cuando se utilizan algoritmos basados en gradiente. También utilizaremos algoritmos de optimización no lineal (*Nonlinear Programming*) para resolver esta formulación y por eso es llamada NPCEG.

Capítulo 5

Resultados numéricos

Luego de haber presentado las nuevas formulaciones del PIM en el capítulo anterior, en este capítulo se presentan resultados sobre su desempeño numérico. Los ejemplos que serán resueltos son ampliamente utilizados en la literatura y en la mayoría de los casos están inspirados de alguna forma en problemas de identificación de propiedades en tejidos biológicos. En la Sección 5.1 se resuelven tres ejemplos numéricos de identificación, con el fin de validar las implementaciones de los métodos de resolución y comparar el desempeño numérico de las mismas. En la Sección 5.2 se abordan ejemplos con alguna característica que acerca el problema a un caso más realista asociado a los desafíos planteados en la identificación de propiedades de tejidos biológicos.

Sobre los códigos y computadora usada Para resolver los problemas de optimización planteados en las formulaciones NPQED y NPCEG se utiliza la función *fmincon* de MATLAB, con las siguientes opciones: *Algorithm: interior-point*, $\text{TolFun} = \text{TolX} = 10^{-9}$. En ambos casos los gradientes requeridos por *fmincon* son calculados evaluando expresiones analíticas. Los problemas de programación cónica de las formulaciones CPCEG y CDCEG son resueltos utilizando la herramienta numérica Sedumi v1.30 (Sturm, 1999), ejecutada en MATLAB. Para la formulación QPCEG fue implementado un código usando la función *quadprog* de MATLAB. La resolución del problema directo de elasticidad se realiza utilizando una implementación propia del método de elementos finitos, utilizando como mallador la herramienta GMSH (Geuzaine and Remacle, 2009) y Paraview (Ayachit, 2015) para la visualización. Todos los ejemplos son resueltos utilizando un computador Intel Core i7 con 8 GB de Memoria RAM y los códigos son seriales, por lo que no se utiliza paralelización para

resolver los problemas.

Medidas de error Para medir el error de las soluciones obtenidas en cada ejemplo utilizaremos diferentes normas del error relativo Δ_E . Utilizaremos las normas L_p de la siguiente forma:

$$\delta E_{L_p} = \frac{\|\Delta_E\|_{L_p(\Omega)}}{\|1\|_{L_p(\Omega)}}, \quad \Delta_E = \frac{|E - E^r|}{E^r}, \quad (5.1)$$

donde p es un número natural, E^r es el campo de módulos de Young de referencia o solución y E es la distribución de módulos de Young de la que se desea calcular el error. También utilizaremos la norma infinito como sigue:

$$\delta E_\infty = \frac{\|\Delta_E\|_{L_\infty(\Omega)}}{\|1\|_{L_\infty(\Omega)}} = \sup_{x \in \Omega} \Delta_E, \quad (5.2)$$

donde aquí se utilizó que $\|1\|_{L_\infty(\Omega)} = 1$.

5.1. Resultados numéricos comparación formulaciones

Para comparar el desempeño de las formulaciones presentadas, resolveremos tres ejemplos numéricos similares a los más usualmente utilizados en la bibliografía reciente de identificación de material. Se desea obtener conclusiones sobre el desempeño numérico de las formulaciones propuestas.

5.1.1. Ejemplo 1

Buscando obtener una primer comparación del desempeño de las formulaciones descritas en el capítulo anterior, resolveremos un problema de referencia ampliamente utilizado en la literatura (Florentin and Lubineau, 2010; Lubineau and Florentin, 2011; Moussawi et al., 2013). En particular se desea evaluar la eficacia de la regularización para mejorar la solución en las nuevas formulaciones del PIM propuestas, así como también confirmar numéricamente que las formulaciones CPCEG y NPCEG son equivalentes. Por ahora no será considerada la formulación CDCEG, la cual es teóricamente equivalente a CPCEG.

El problema a resolver consiste en un sólido de sección cuadrada de lado $\ell = 0.01$ m y espesor unitario, formado por un material elástico lineal sometido a un estado plano de deformaciones. El coeficiente de Poisson es $\nu = 0.3$ y el módulo de Young está definido en dos regiones como se puede ver en la Figura 5.1(a), con los valores de referencia $E_1^r = 1$ MPa y $E_2^r = 2$ MPa. La tensión aplicada

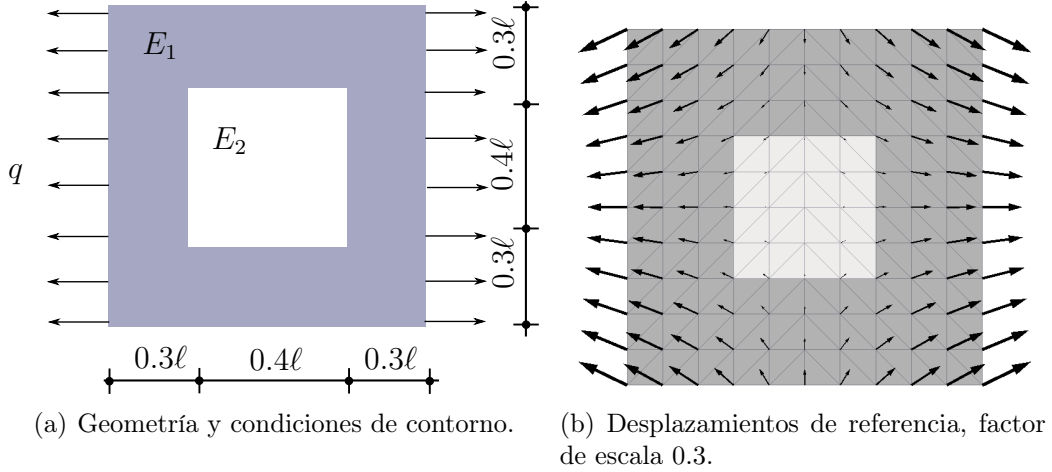


Figura 5.1: Esquema de geometría y condiciones de contorno de Ejemplo 1 y desplazamientos de referencia correspondientes.

es $q = 1$ MPa. En las referencias citadas se utiliza este ejemplo para identificar los valores de coeficiente de Poisson y módulo de Young aunque no se aplica regularización. En este caso identificaremos solamente módulo de Young y aplicaremos regularización para reducir el efecto del error en los datos sobre la solución.

Para resolver el problema directo utilizamos una malla estructurada de 200 elementos triangulares con interpolación lineal de los desplazamientos. El campo de desplazamientos obtenido es llamado desplazamiento solución o de referencia. El vector de desplazamientos nodales es notado \mathbf{U}^r y es mostrado en la Figura 5.1(b). Para el problema inverso se considera la misma malla que para el problema directo y cada uno de los elementos tendrá un valor de módulo de Young a determinar. Es por esto que el problema inverso tiene 200 valores de módulo de Young como incógnitas a determinar.

Para emular desplazamientos medidos experimentalmente, se adiciona error a los desplazamientos reales tal como es realizado en diversos artículos de la literatura. En este ejemplo consideraremos error en desplazamientos de dos formas: adicionando error aleatorio a los valores de módulo de Young de referencia y adicionando un error debido a la interpolación de desplazamientos

nodales entre mallas diferentes. Más adelante veremos una justificación del error introducido como interpolación de mallas.

Dado que uno de los objetivos es comparar las formulaciones NPQED y NPCEG se utilizaron los mismos parámetros para definir el criterio de parada y en ambos casos el funcional fue escalado de forma tal de tener gradiente unitario para el punto inicial. Como punto inicial se consideró la distribución uniforme $E(x) = 1.5$ MPa. Para la identificación con la formulación CPCEG no se utiliza punto inicial (el algoritmo no lo requiere) y se consideraron las opciones `pars.eps = 0` y `pars.bigeps = 10-30` para la ejecución del Sedumi. La formulación QPCEG es resuelta utilizando `quadprog`, para el cual no se utilizó valor inicial. De todas formas se utilizó la distribución $E(x) = 1.5$ MPa para el cálculo de $\mathbf{M}^{(k)}$ en la Ecuación (4.30). En el caso de la formulación QPCEG con selección automática de α_R , la distribución E^* obtenida para cada valor α_R es usada para calcular $\mathbf{M}^{(k)}$, para la identificación con el nuevo α_R . Para la inicialización del proceso de bisección se consideró $(\alpha_R)_{left} = 10^{-40}$ y $(\alpha_R)_{right} = 10^5$ y un Morozov objetivo de 0.95 ± 0.05 para todas las formulaciones. El intervalo de valores E factibles está determinado por los valores mínimo y máximo $E_{\min} = 10$ Pa y $E_{\max} = 10^9$ Pa respectivamente.

Resultados para error en E

Para la introducción de error en los datos a través del valor de E se utiliza una metodología similar a la aplicada en (Canelas et al., 2014). En la misma se introducen errores en los parámetros materiales de referencia \mathbf{E}^r obteniendo parámetros con error \mathbf{E}^m con los que se resuelve el problema directo, obteniendo desplazamientos medidos \mathbf{U}^m . Al valor de elasticidad solución de cada elemento E_i^r se adiciona un error d_{E_i} de la siguiente forma:

$$E_i^m = E_i^r(1 + d_{E_i}), \quad i = 1, \dots, n_E, \quad (5.3)$$

donde d_{E_i} es generado de forma aleatoria con una distribución normal de media nula y varianza tal que el nivel del ruido introducido $\eta_E = \delta E_{L_1}^m$ sea independiente de la malla utilizada. Resolviendo el problema directo utilizando los parámetros materiales \mathbf{E}^m se obtienen los campos de desplazamientos \mathbf{U}^m para tres niveles de ruido η_E : 0.01, 0.05, y 0.1.

Recordando la definición de la Ecuación (5.1) obtenemos la siguiente ex-

presión

$$\eta_E = \frac{\sum_{i=1}^{n_E} |d_{E_i}| |\Omega_i|}{|\Omega|}. \quad (5.4)$$

Introduciendo un cambio de variable $X_i = d_{E_i} |\Omega_i|$ y considerando X de distribución normal $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma_E^2)$ se puede mostrar que, para un número de elementos n_E considerablemente elevado, se cumple:

$$\eta_E = \mathbb{E}(|X|) \frac{n_E}{|\Omega|}, \quad (5.5)$$

donde $\mathbb{E}(\cdot)$ es la función esperanza. Operando llegamos a una expresión para la varianza:

$$\sigma_E = \eta_E \sqrt{\frac{\pi}{2} \frac{|\Omega|}{n_E}}. \quad (5.6)$$

Dado un nivel de error en E y una malla, podemos ahora utilizar esta expresión para introducir de forma apropiada el error.

Dado que la información utilizada para resolver el problema inverso consiste en desplazamientos, es importante tener una noción del nivel del error que estamos introduciendo a los desplazamientos. Para esto realizamos 10 resoluciones del problema directo para cada nivel de ruido para dos mallas: 198 y 1126 elementos. En la Tabla 5.1 vemos los valores de los promedios de los errores obtenidos.

Error	n_E	η_E (%)		
		1	5	10
η_E	198	0.963	5.035	10.22
$\eta_{\mathbf{u}}$	198	0.194	0.798	1.952
η_E	1126	1.013	5.015	9.975
$\eta_{\mathbf{u}}$	1126	0.096	0.498	1.051

Tabla 5.1: Ejemplo 1: promedios de niveles de error η_E y $\eta_{\mathbf{u}}$ obtenidos para 10 ejecuciones.

En la tabla $\eta_{\mathbf{u}}$ es calculado de la siguiente forma:

$$\eta_{\mathbf{u}} = \frac{\|\mathbf{u}^m - \mathbf{u}^r\|_{L_2(\Omega)^2}}{\|\mathbf{u}^r\|_{L_2(\Omega)^2}}. \quad (5.7)$$

Podemos ver que en mallas de menor número de elementos el error producido en \mathbf{u} es mayor.

Se realiza la identificación utilizando los parámetros enumerados anteriormente. En todas las formulaciones se utiliza el procedimiento descrito en la Sección 4.2.3 para la elección de α_R . En la Tabla 5.2 vemos los resultados del error obtenido para diferentes niveles de ruido η_E . En cada formulación el E^* utilizado para calcular los errores es el obtenido al finalizar el proceso iterativo de bisección. En la tabla t. representa el tiempo total requerido y la

Formulación	$\eta_E = 0.01$			$\eta_E = 0.05$			$\eta_E = 0.1$		
	$\delta E_{L_1}^*$	δE_∞^*	t. (s)	$\delta E_{L_1}^*$	δE_∞^*	t. (s)	$\delta E_{L_1}^*$	δE_∞^*	t. (s)
NPQED	1.096	19.544	23253	3.753	39.662	19993	6.373	37.996	18643
NPCEG	0.510	5.139	15067	2.485	14.556	14677	4.737	27.488	12740
CPCEG	0.510	5.096	29.4	2.485	14.501	27.4	4.737	27.486	24.4
QPCEG	0.525	6.120	7.6	2.321	15.920	8.2	4.511	29.913	7.7
CPCEG NR	1.344	5.906	2.7	4.530	16.959	2.8	10.289	48.388	2.7

Tabla 5.2: Resultados de Ejemplo 1, error introducido en E .

formulación CPCEG NR consiste en ejecutar la identificación con la formulación CPCEG sin utilizar regularización ($\alpha_R = 0$) para la cual no se aplica el método de bisección. Los niveles de error introducidos en \mathbf{u} en este caso son: 0.27 %, 0.94 % y 2.4 % correspondientes a η_E : 1 %, 5 % y 10 % respectivamente.

Lo primero que se observa es que los resultados de las formulaciones NPCEG y CPCEG son prácticamente idénticos en error y que la CPCEG requiere un tiempo 500 veces menor. También vemos que la formulación NPQED requiere un tiempo 40 % mayor que la NPCEG, logrando obtener un error ligeramente superior en el E . Finalmente vemos que la formulación QPCEG provee, en este caso, resultados comparables con los de la NPCEG y la CPCEG en un tercio del tiempo requerido por la CPCEG.

Resultados para error en U

A continuación se resuelve el problema incluyendo error en los desplazamientos considerando el error producido al interpolar desplazamientos obtenidos con una malla fina en una malla gruesa. Es decir, los desplazamientos nodales son interpolados a nodos de una malla formada por menos elementos. Este tipo de error puede surgir al utilizar datos obtenidos experimentalmente en un conjunto de puntos distinto a los nodos de la malla de elementos finitos utilizada para resolver el problema inverso, como se plantea en (Franquet et al., 2012).

En este caso se generan los desplazamientos de referencia con una malla de 20000 elementos, y luego se interpola a la misma malla de 200 elementos utilizada anteriormente, produciendo un nivel de error $\eta_{\mathbf{u}}$ de 1.77%. Es importante destacar que este error es de una naturaleza diferente al producido al considerar error en E dado que en este caso no es seguro que exista un campo de propiedades mecánicas que produzca los desplazamientos \mathbf{U}^m .

En la Tabla 5.3 vemos los resultados de error obtenido así como también los tiempos necesarios para la identificación donde 'its.' representa el número

Form	δE_{L_1}	δE_{∞}	α_R	m	t.(s)	its.	t./its. (s)
NPQED	5.613	40.59	2.690	0.957	24115	7	3445
NPCEG	0.747	3.811	20.35	0.962	15622	8	1953
CPCEG	0.747	3.811	20.35	0.962	21	8	2.7
QPCEG	0.559	3.386	$4.5 \cdot 10^{-12}$	0.916	7	8	0.9
CPCEG NR	39.32	110.4	0	-	2.8	1	2.8

Tabla 5.3: Resultados de Ejemplo 1, error de interpolación en \mathbf{U} .

de iteraciones del método de bisección y por lo tanto el valor 't./its.' indica el tiempo promedio que lleva realizar una identificación con cada formulación. Los valores de α_R y m son los correspondientes a la última iteración del método de bisección.

Observamos que la formulación NPQED requiere un tiempo considerablemente mayor que las otras formulaciones, así como también el error es mayor. Por otra parte NPCEG logra obtener un error reducido aunque no logra reducir considerablemente el tiempo de resolución respecto a NPQED. La formulación CPCEG provee resultados idénticos en el orden de una milésima parte del tiempo. Finalmente vemos que, en este ejemplo, la formulación QPCEG logró un resultado mejor que las otras formulaciones en un tercio del tiempo de la CPCEG.

Para ver los resultados de forma gráfica se presentan los mapas de propiedades mecánicas y error. En la Figura 5.2 comenzamos viendo el mapa de propiedades mecánicas (a: escala de color azul) y error relativo (b: escala de colores rojo a amarillo) obtenidos al aplicar la identificación sin regularización CPCEG NR a los datos con error de interpolación. Se puede apreciar gráficamente que el error es elevado y no es posible identificar la geometría de la inclusión.

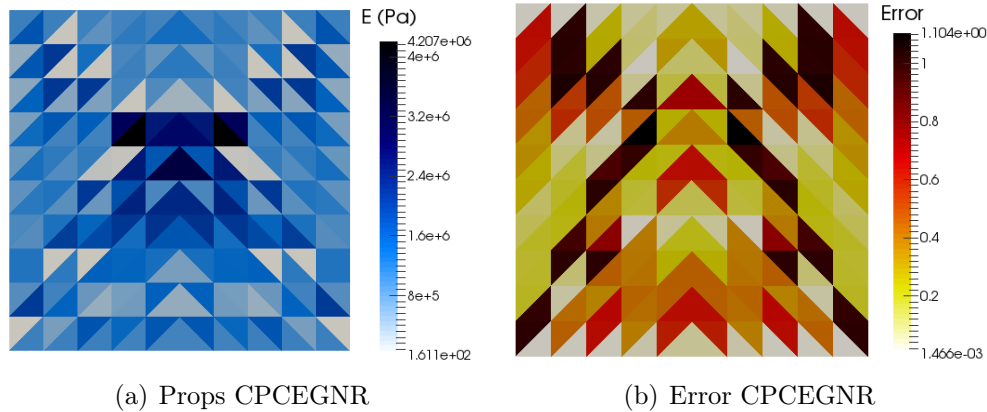


Figura 5.2: Resultados de Ejemplo 1, identificación sin regularización.

En la Figura 5.3 vemos los mapas de propiedades mecánicas obtenidos al aplicar las cuatro formulaciones utilizando regularización. Vemos que las tres últimas formulaciones logran identificar claramente la inclusión y obtener los valores de módulo de Young con un error muy reducido. De todas formas veremos los mapas de error relativo para buscar posibles diferencias en los resultados.

En la Figura 5.4 vemos los mapas de error relativo en propiedades mecánicas obtenidos al aplicar las cuatro formulaciones. Confirmamos nuevamente los resultados de la tabla, donde vemos que NPCEG y CPCEG proveen resultados idénticos mientras que QPCEG aporta resultados con un error ligeramente menor en este ejemplo.

Conclusiones preliminares

Viendo los resultados obtenidos para las formulaciones NPCEG y CPCEG confirmamos lo esperado: ambas formulaciones son equivalentes y por ello proveen distribuciones de módulos de Young prácticamente iguales. De todas formas vimos que la formulación CPCEG es más eficiente ya que requiere un tiempo considerablemente menor. Se destaca además que el tiempo necesario para hacer la identificación para NPCEG y NPQED depende del punto inicial utilizado. Los resultados obtenidos fueron generados utilizando un punto inicial considerablemente cercano al punto solución.

Vemos que en este ejemplo la formulación QPCEG compite con la CPCEG, ya que los errores son comparables y los tiempos son ligeramente inferiores. En los próximos ejemplos continuaremos comparando estas dos formulaciones.

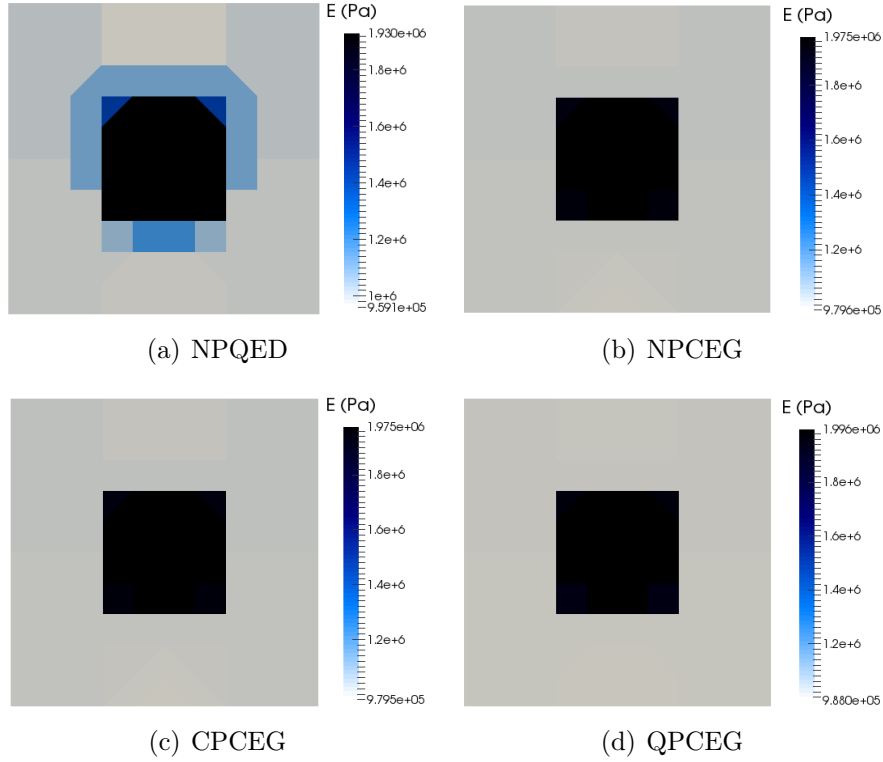


Figura 5.3: Resultados de Ejemplo 1, módulos de Young obtenidos utilizando datos con error de interpolación.

A partir de los resultados obtenidos sin y con regularización, confirmamos que es necesario considerar un término regularizador para obtener soluciones con un error aceptable en E y que las formulaciones propuestas son compatibles con el funcional de variación total. En los siguientes ejemplos no aplicaremos las formulaciones NPCEG y NPQED con el objetivo de centrarnos en las formulaciones propuestas.

5.1.2. Ejemplo 2

A continuación resolveremos otro problema con el objetivo de comparar en mayor profundidad el desempeño de las formulaciones CPCEG y QPCEG. La geometría considerada en este caso también corresponde a un ejemplo usualmente utilizado en la literatura (Banerjee et al., 2013), el cual está inspirado en problemas de identificación en tejidos biológicos. Comenzaremos describiendo el problema y luego mostraremos los resultados obtenidos al considerar diferentes tipos de errores en los datos.

La geometría del problema consiste en un dominio cuadrado de lado $\ell =$

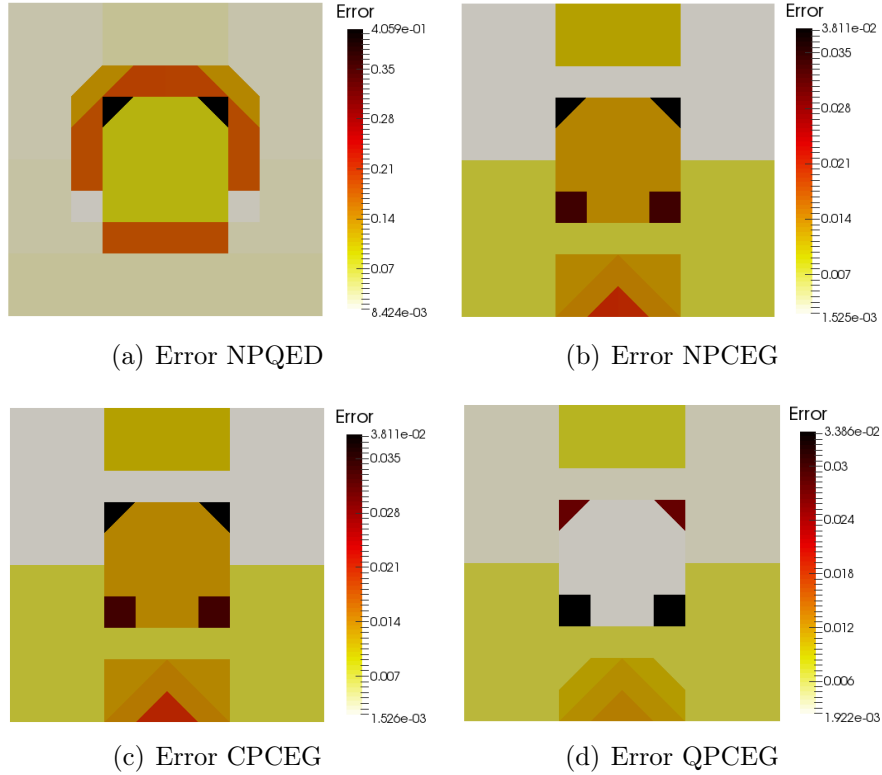


Figura 5.4: Resultados de Ejemplo 1, errores relativos obtenidos utilizando datos con error de interpolación.

0.1 m con dos inclusiones circulares de 0.0125 m de radio y con condiciones de contorno que se pueden ver en la Figura 5.5. Los valores de módulos de Young de referencia considerados son: $E_1^r = 2.5$ MPa, $E_2^r = 10$ MPa y $E_3^r = 5$ MPa. Se considera que el material es elástico lineal e isótropo con coeficiente de Poisson uniforme conocido $\nu = 0.2$. Se genera un campo de desplazamientos obtenido con una tensión aplicada $q = 1$ MPa.

Resultados para error en E

Comenzaremos considerando error en el módulo de Young de la misma forma que fue hecho en la Sección 5.1.1 con $\eta_E = 0.1$. Para la optimización al igual que en los ejemplos anteriores se consideran los siguientes límites mínimo y máximo para el valor de E : $E_{\min} = 10$ Pa y $E_{\max} = 10^9$ Pa. Las tolerancias para los criterios de parada para cada algoritmo son consideradas iguales al ejemplo anterior. Se utiliza una malla no estructurada de 1078 elementos tanto para la generación de los desplazamientos como para la identificación. La elección del parámetro α_R se realiza de forma automática aplicando la metodología

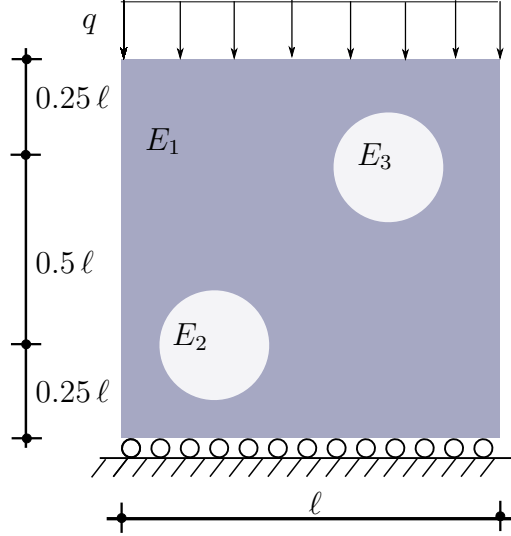


Figura 5.5: Esquema de geometría y condiciones de contorno de Ejemplo 2.

descrita anteriormente con un Morozov objetivo $m = 0.95 \pm 0.05$ partiendo de $(\alpha_R)_{izq} = 10^{-40}$ y $(\alpha_R)_{der} = 10^5$.

En la Tabla 5.4 vemos los resultados obtenidos al aplicar las formulaciones CPCEG y QPCEG. Vemos que las distribuciones de módulos de Young

Form	$\delta E_{L_1}^*$	δE_{∞}^*	tiempo(s)	its	tiempo/its (s)
CPCEG	3.705	23.405	667.5	8	83.4
QPCEG	3.612	23.819	53.0	9	5.9

Tabla 5.4: Resultados de Ejemplo 2, error en E , $\eta_E = 0.1$

obtenidas con ambas formulaciones tiene errores similares, mientras que la formulación QPCEG requiere menos de una décima parte del tiempo necesario para resolver el problema con la formulación CPCEG. Nuevamente la formulación QPCEG sigue siendo competitiva con CPCEG en términos de error.

Para comparar de forma gráfica los resultados veamos los mapas de propiedades mecánicas presentados en la Figura 5.6. Apreciamos que a pesar de no obtener de forma precisa el valor de E_2 , ambas formulaciones consiguen identificar las geometrías de las inclusiones. Veamos el mapa de errores relativos para apreciar los errores más claramente.

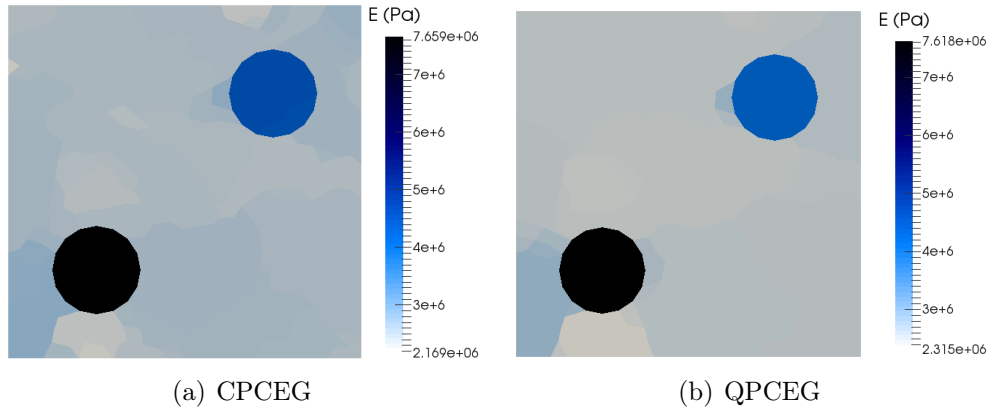


Figura 5.6: Resultados de Ejemplo 2, módulos de Young obtenidos utilizando datos con error en E .

En la Figura 5.7 podemos ver los mapas de error relativo obtenidos para cada formulación. En estas imágenes podemos apreciar que para ambas formu-

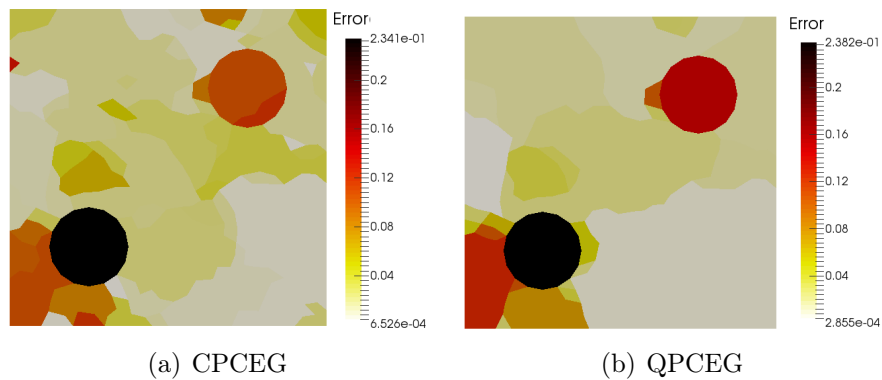


Figura 5.7: Resultados de Ejemplo 2 errores relativos obtenidos utilizando datos con error en E .

laciones el error se concentra en la región 2 donde ambas soluciones tienen un error relativo de 23.5% aproximadamente. QPCEG tiene un error promedio menor pero un error máximo mayor, por lo que siguen compitiendo de forma similar.

Resultados para error en U

A continuación aplicaremos ambas formulaciones a casos con errores en los datos considerablemente más exigentes. Se considera error incluido directamente en el vector de desplazamientos siguiendo un procedimiento utilizado en (Banerjee et al., 2013; Warner et al., 2014).

Para generar los desplazamientos a utilizar se resuelve el problema directo con las propiedades mecánicas de referencia y un mallado de 12312 elementos. Los desplazamientos nodales obtenidos son (desplazamientos de referencia) \mathbf{U}^r son afectados por un error aleatorio para generar los desplazamientos “medidos”, de la siguiente forma:

$$U_i^m = U_i^r(1 + \delta_U r_i) \quad (5.8)$$

donde r_i representa la entrada i -ésima de un vector de valores aleatorios de distribución gaussiana de media cero y varianza unitaria y el valor considerado para δ_U es 0.01. Estos desplazamientos nodales son finalmente interpolados a la malla utilizada para realizar la identificación, que tendrá una menor cantidad de elementos. En este ejemplo consideraremos tres mallas: 1078, 1552 y 3186, que se corresponderán con los niveles de error η_U : 0.59%, 0.58% y 0.57%, respectivamente.

Se observó que el método propuesto para la elección automática de α_R no es efectivo cuando existe error aleatorio en U del nivel considerado y el factor δ_R es calculado utilizando el $\eta_{\mathbf{u}}$ correspondiente. Realizaremos la elección de α_R de forma manual, utilizando como criterio las geometrías identificadas y el error δE_{L_1} .

En la Tabla 5.5 vemos los resultados obtenidos luego de la identificación. Nuevamente vemos que la formulación QPCEG es 10 veces más rápida que la

Form	n_E	$\delta E_{L_1}^*$	δE_{∞}^*	α_R	tiempo(s)
CPCEG	1078	5.810	47.215	$1.19 \cdot 10^{-4}$	91.3
QPCEG	1078	7.499	47.502	$2.15 \cdot 10^{-14}$	7.8
CPCEG	1552	5.805	40.936	$1.19 \cdot 10^{-4}$	249.9
QPCEG	1552	8.161	45.972	$9.43 \cdot 10^{-15}$	9.6
QPCEG	3186	11.74	68.070	$2.03 \cdot 10^{-15}$	23.7

Tabla 5.5: Resultados de Ejemplo 2, ruido $\delta_U = 0.01$

CPCEG, aunque en este caso vemos que el error de la solución de la QPCEG es al menos un 30% mayor. También se ve que al aumentar la cantidad de elementos de la malla, la formulación CPCEG disminuye el error obtenido, no siendo así en la formulación QPCEG. La formulación CPCEG requiere mayores recursos de memoria por lo que no pudo ser aplicada para el mallado de 3186 elementos, mientras que la formulación QPCEG es capaz de resolver

este problema, gracias a la menor cantidad de variables y la eficiencia de los códigos de programación cuadrática utilizados.

En la Figura 5.8 vemos los mapas de módulos de Young obtenidos para las formulaciones CPCEG y QPCEG para la malla de 1552 elementos. Ambas

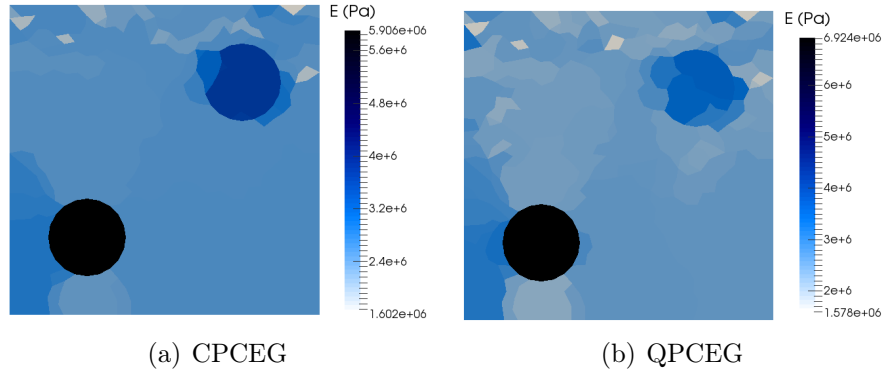


Figura 5.8: Resultados de Ejemplo 2, módulos de Young obtenidos utilizando datos con error en desplazamientos con $\delta_U = 0.01$ y $n_E = 1552$.

formulaciones logran identificar las inclusiones de forma aceptable y no se percibe una diferencia importante en los mapas, por lo que pasamos a ver los mapas de errores.

En la Figura 5.9 vemos los mapas de errores relativos. En estos gráficos

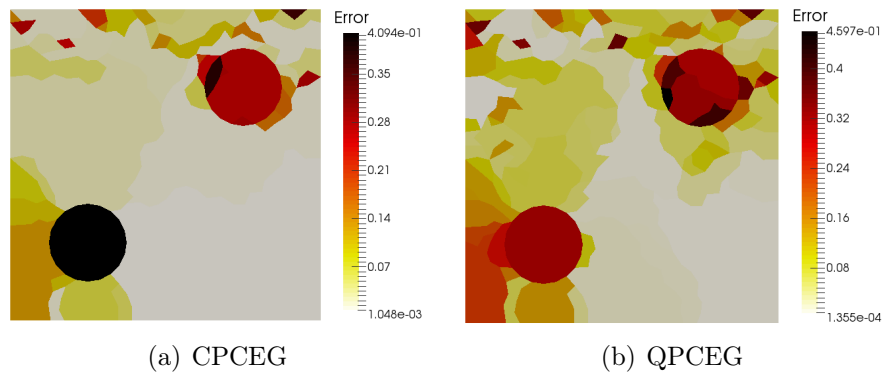


Figura 5.9: Resultados de Ejemplo 2, errores relativos obtenidos utilizando datos con error en desplazamientos con $\delta_U = 0.01$ y $n_E = 1552$.

logramos distinguir una diferencia importante en el error, mientras en la CPCEG el error se concentra en una inclusión, en la QPCEG está más disperso en el dominio, explicando el error δ_{E^*} superior obtenido.

Se debe aclarar que los resultados obtenidos en este ejemplo y los presentados en la literatura no son comparables de forma directa ya que en otros

trabajos, como en (Warner et al., 2014) se utiliza más de un campo de desplazamientos como dato.

Conclusiones preliminares

Al utilizar error en los módulos de Young, ambas formulaciones proveen resultados buenos de identificación pudiendo reconocer la geometría de las inclusiones y los valores de E con un error global menor al 4%. Nuevamente ambas formulaciones son eficientes aunque la QPCEG requiere un tiempo menor así como también menores recursos de memoria.

Se aprecia que el error es mayor en la región de la inclusión con mayor valor E . Esto puede ser debido a que el efecto de la regularización de proveer distribuciones uniformes de E afecta en mayor medida a los valores obtenidos en regiones con mayor diferencia de E , es decir, un mayor error en la inclusión 2 que en la 3.

Los resultados vistos para datos con error en desplazamiento marcan una primer diferencia entre las formulaciones QPCEG y CPCEG: la QPCEG obtiene resultados con un error mayor a la CPCEG. A pesar de que el error obtenido por la QPCEG es aceptable y es ejecutada en un tiempo menor, la CPCEG se muestra como una formulación más robusta en este caso.

5.1.3. Ejemplo 3

En este ejemplo se busca obtener una última comparación entre formulaciones, contrastando la CPCEG con su formulación dual CDCEG presentada en la Ecuación (4.25). Por otra parte también se desea obtener una estimación empírica de la relación entre el tamaño del problema a resolver y el tiempo requerido por cada formulación.

Resolveremos un problema con la geometría del Ejemplo 1, considerando error en los valores de módulo de Young de nivel $\eta_E = 0.05$. Utilizaremos mallas estructuradas de: 32, 392, 512, 800, 1152, 1352 y 1568 elementos, tanto para el problema directo como para el inverso. Para cada malla un error en E es generado, produciendo un error en \mathbf{U} ligeramente diferentes indicados en la tabla de resultados.

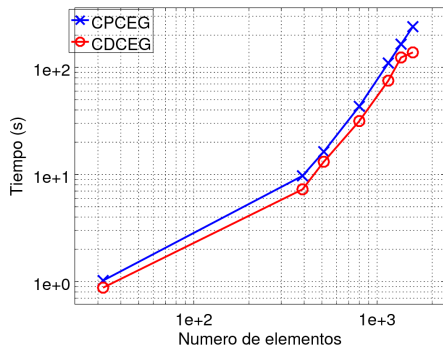
En la Tabla 5.6 vemos los resultados obtenidos al resolver el problema. Se puede ver que la formulación CDCEG obtiene un error igual o ligeramente superior a la CPCEG en nueve de diez mallados, mientras que en el último

Nelem	δU_{L_2}	CPCEG			CDCEG		
		$\delta E_{L_1}^*$	δE_{∞}^*	tiempo(s)	$\delta E_{L_1}^*$	δE_{∞}^*	tiempo(s)
32	3.943	11.19	41.64	1.023	11.19	41.67	0.878
392	1.020	2.094	15.61	9.711	2.100	15.99	7.262
512	0.821	1.905	19.32	16.32	1.879	19.55	13.14
800	0.785	1.812	20.34	43.26	1.889	22.00	31.52
1152	0.854	1.743	20.62	109.7	1.761	20.22	75.13
1352	0.681	1.551	21.45	164.7	1.936	24.89	123.6
1568	0.445	1.387	17.61	239.6	4.834	43.32	137.9

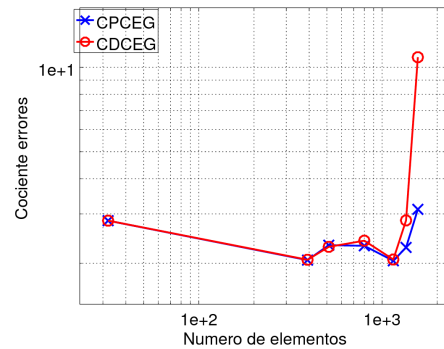
Tabla 5.6: Resultados de Ejemplo 3.

mallado se detecta un error considerablemente superior. También vemos que la formulación CDCEG requiere aproximadamente un 20% menos tiempo en todos los casos excepto para la última malla de 1568 elementos.

Continuemos el análisis viendo la representación gráfica de los resultados. En la Figura 5.10 vemos representados en escala logarítmica los resultados obtenidos. A la izquierda vemos el gráfico de tiempos de ejecución en las orde-



(a) Tiempos.



(b) Cociente de errores $\delta E_{L_1}^*/\delta U_{L_2}$.

Figura 5.10: Resultados de Ejemplo 3, valores de tiempos de ejecución y errores obtenidos para mallas de diferente cantidad de elementos finitos.

nadas y el número de elementos de la malla en el eje de abscisas. Lo primero que se observa es que para ambas formulaciones existe una clara relación lineal entre el logaritmo del tiempo requerido y el logaritmo del tamaño del problema. Dejando de lado el dato para 32 elementos se obtiene una relación aproximada entre el tiempo de ejecución t y el número de elementos de la malla n , dada

por:

$$\log_{10}(t) \approx 2 \log_{10}(n) - 4.2 \quad \Rightarrow \quad t \approx 6.3 \times 10^{-5} n^2 \quad (5.9)$$

Según esta relación un problema de 10000 variables requeriría menos de dos horas para ser resuelto.

Para la última malla la formulación CDCEG no logra resolver el problema de forma satisfactoria. Esto puede ser observado en el gráfico de la derecha, donde vemos graficado el cociente de errores $\delta E_{L_1}^*/\delta U_{L_2}$.

La herramienta numérica Sedumi no realiza ciertos pre procesamientos de los sistemas lineales a resolver, por lo que para resolver el CPCEG se ha visto que un escalamiento de las variables mejora el resultado. Dicho escalado fue realizado en cada aplicación del CPCEG. Por otra parte, en el caso de CDCEG los módulos de Young son variables duales, por lo que el escalado en las variables primales del CDCEG no mejoraría el precisión de los E obtenidos.

Conclusiones preliminares

Sintetizando el análisis de los resultados, concluimos que la formulación CDCEG es ligeramente más eficiente que la CPCEG en la mayoría de los casos resueltos, aunque en los otros casos CDCEG no logra resultados satisfactorios si se utiliza herramientas como Sedumi. Esto muestra a la CDCEG como más eficiente que la CPCEG pero no tan robusta como esta última. Un análisis más cuidadoso de la resolución de la CDCEG debe ser realizado para su aplicación al PIM, utilizando también otras herramientas numéricas.

5.2. Resultados numéricos problemas realistas

En esta sección abordaremos problemas similares a los anteriores con la particularidad de contemplar condiciones más realistas que las consideradas hasta el momento. Comenzaremos resolviendo un ejemplo donde la geometría, parámetros y condiciones de contorno considerados están inspirados en las de un vaso arterial. Luego resolveremos problemas de identificación utilizando desplazamientos obtenidos aplicando una técnica de procesamiento de imágenes usualmente usada para procesar imágenes de ultrasonido intra vascular (IVUS). Finalmente se resuelve un ejemplo en el cual los datos medidos son generados utilizando un modelo de Elasticidad no Lineal.

5.2.1. Ejemplo 4

En este ejemplo resolveremos otro problema presente en la literatura del área, donde se consideran valores de propiedades mecánicas y cargas en el orden de las consideradas al modelar una sección transversal de una arteria carótida con un importante grado de estenosis. Se desea someter la formulación CPCEG a un problema desafiante no resuelto en la literatura del área tal como es abordado aquí.

El ejemplo está inspirado en el análisis realizado por Li et al. (2008), aunque para las consideraciones del problema de identificación y modelado, usaremos prácticamente todas las hipótesis consideradas por Franquet et al. (2012).

El problema consiste en un dominio con la geometría dada en la Figura 5.11, donde la región del sólido está dividida en 16 particiones. Se consideran apoyos de forma tal de eliminar movimientos rígidos y una presión uniforme interna $q = 5$ kPa, aplicada como se muestra en la figura. En la figura se puede apreciar

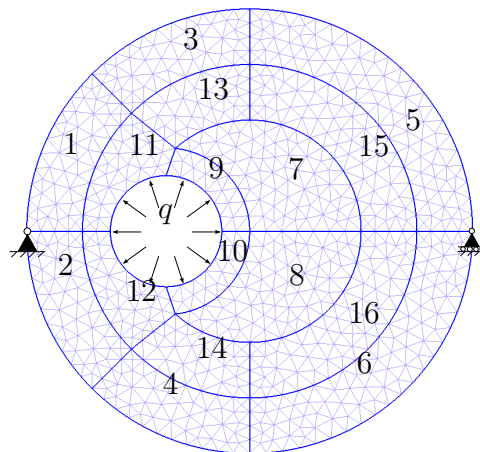


Figura 5.11: Esquema de Ejemplo 4: geometría y particiones de malla.

la malla de elementos finitos a utilizar para el problema inverso, formada por 1492 elementos triangulares lineales.

Respecto a las propiedades materiales se consideran tres materiales que componen la pared arterial. El anillo exterior es considerado arteria sana, o *healthy artery* (HA) y su valor de módulo de Young es $E_{HA} = 600$ kPa, en el esquema esta región está formada por las zonas 1 a 6. Luego en contacto con esta zona tenemos tejido enfermo o *diseased tissue* (DT) con un módulo de Young ligeramente superior $E_{DT} = 800$ kPa, y esta zona es formada por las

regiones 9 a 16. Finalmente tenemos un centro lipídico o *lipidic core* (LC) donde se considera un módulo de Young bajo $E_{LC} = 10$ kPa, ocupando las regiones 7 y 8. Se considera estado plano de deformaciones al igual que en (Franquet et al., 2012). Por otra parte, dado que se cuenta con una herramienta de análisis para sólido compresible el coeficiente de Poisson será $\nu = 0.3$ en lugar de 0.49.

Identificación con un campo de desplazamientos

Para la generación del desplazamiento de referencia se resuelve el problema directo con una malla no estructurada de 12770 elementos, para luego interpolar los desplazamientos obtenidos a la malla de 1492 elementos obteniendo así \mathbf{U}^r . Los desplazamientos obtenidos al utilizar la malla de 1492 elementos con los valores de E^r , serán los \mathbf{U}^m y presentan un error de nivel $\eta_U = 4.52\%$.

En (Franquet et al., 2012) se considera una variable de E por cada uno de los materiales de referencia, es decir que se consideran tres variables para identificar. En este ejemplo serán considerados los mismos tres grupos de dicho artículo, así como también consideraremos los 16 grupos definidos por las particiones. Finalmente se resolverá el problema considerando un valor de módulo de Young por cada elemento de la malla, como en los ejemplos anteriores.

En los casos donde haya grupos no se aplicará regularización, ya que la propia agrupación oficia de regularizador. Esta agrupación podría ser obtenida a partir de la aplicación de alguna técnica de segmentación automática a imágenes de tejidos biológicos obtenidas utilizando ultrasonido (Witzenburg et al., 2015). A continuación desarrollaremos los resultados obtenidos al utilizar cada una de estas agrupaciones de particiones.

Identificación con tres grupos Consideremos ahora que los elementos son agrupados según los módulos de Young de referencia: HA incluirá los elementos de las particiones 1 a 6, LC incluirá las particiones 7 y 8, y DT incluirá las particiones 9 a 16. La identificación se realiza utilizando la formulación CP sin término de regularización, los valores mínimo y máximo considerados para E son $E_{\min} = 10$ Pa y $E_{\max} = 10^9$ Pa. Se considera una variable E por cada grupo, es decir que tendremos 3 valores E a identificar. Se podría decir que, estrictamente, este problema no forma parte de los problemas de identificación no homogénea. De todas formas, será resuelto dado que es el enfoque presente en la literatura para la geometría de interés utilizada.

En la Tabla 5.7 se muestran los resultados de la identificación, donde los módulos de Young obtenidos son E^* y el error relativo es calculado como $\delta E = \frac{E^* - E^r}{E^r}$. Podemos ver que el error obtenido en los valores de E es aceptable

Región	E^r (kPa)	E^* (kPa)	$\delta E(10^{-2})$
HA	600	581.66	-3.06
LC	10	8.90	-11.0
DT	800	764.82	-4.40

Tabla 5.7: Resultados de Ejemplo 4, para identificación con 3 grupos de elementos.

teniendo en cuenta el nivel de error en U . El mayor error relativo se presenta en la región con menor E , aunque en términos absolutos el mayor error se presenta en la región con mayor módulo de Young. En este caso vemos que la propia agrupación de elementos funcionó como regularizador tal como era esperado.

Identificación con 16 grupos Consideremos ahora que cada una de las particiones mostradas en la Figura 5.11 tiene una variable de módulo de Young a identificar. Nuevamente realizamos la identificación con los mismos parámetros que en el caso anterior.

En la Tabla 5.8 vemos los resultados obtenidos para cada grupo de elementos. En este caso obtenemos errores ligeramente superiores al caso anterior.

Región	E^r (kPa)	E^* (kPa)	$\delta E(10^{-2})$
1	600	568.41	-5.27
2	600	568.39	-5.27
3	600	560.06	-6.66
4	600	559.96	-6.67
5	600	568.65	-5.22
6	600	568.63	-5.23
7	10	8.42	-15.76
8	10	8.42	-15.76
9	800	773.22	-3.35
10	800	773.34	-3.33
11	800	764.63	-4.42
12	800	764.63	-4.42
13	800	629.80	-21.28
14	800	629.89	-21.26
15	800	728.04	-8.99
16	800	728.00	-9.00

Tabla 5.8: Resultados de Ejemplo 4, identificación usando 16 grupos de elementos.

En la Figura 5.12(a) vemos el mapa de valores de módulo de Young obtenidos en la identificación. Apreciamos que la región correspondiente al *lipid*

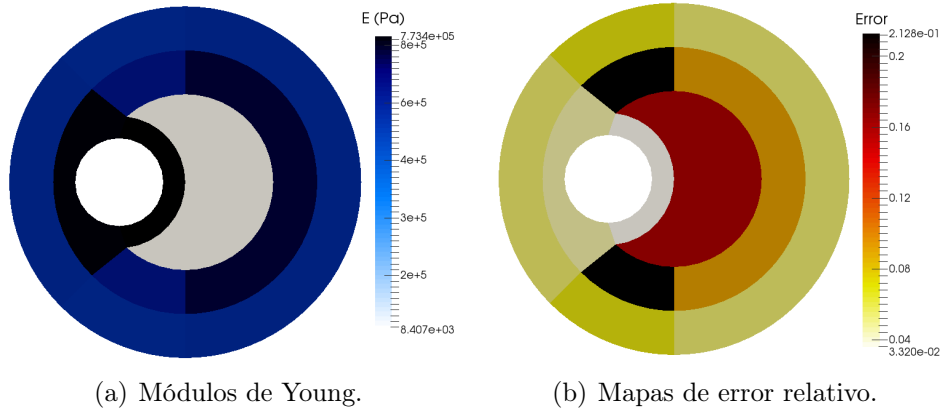


Figura 5.12: Resultados de Ejemplo 4, identificación con 16 grupos de elementos.

pool es claramente identificada respecto a los valores las otras regiones.

En la Figura 5.12(b) vemos el mapa de errores relativos en valor absoluto. Podemos apreciar que en este caso el mayor error relativo ocurre en las regiones 13 y 14, y en segundo lugar, nuevamente en las regiones 7 y 8. En términos absolutos el error en 7 y 8 no es significativo mientras que al ver el error considerable de las regiones 13 y 14 se repite otra vez el efecto de reducción de los valores de E más elevados de la solución en regiones en contacto con valores menores. Esto se ve también en las regiones 15 y 16, aunque en menor medida. De todas formas vemos que se logran identificar las relaciones de rigideces entre las regiones.

Identificación sin grupos Finalmente realizamos la identificación con un valor de módulo de Young por cada elemento. En este caso se debe aplicar regularización al igual que en los ejemplos anteriores. La resolución de este ejemplo sin grupos no ha sido encontrada en la literatura del área.

En la Tabla 5.9 vemos los errores obtenidos para dos valores de α_R , un valor bajo $\alpha_R = 10^{-7}$ y otro valor elevado $\alpha_R = 3.0 \times 10^{-6}$. También se presentan los valores correspondientes del parámetro de Morozov m .

En la Figura 5.13(a) vemos el mapa de módulos de Young con: un valor de $\alpha_R = 10^{-7}$ mientras que en la Figura 5.13(b) vemos el mapa obtenido utilizando $\alpha_R = 3.0 \times 10^{-6}$.

Los mapas de errores relativos son presentados en la Figuras 5.14(a) y

α_R	δE_{L_2}	δE_∞	m
1.00E-007	15.6	99.84	0.26
3.00E-006	30.2	50.07	2.47

Tabla 5.9: Resultados de Ejemplo 4, identificación sin utilizar grupos de elementos.

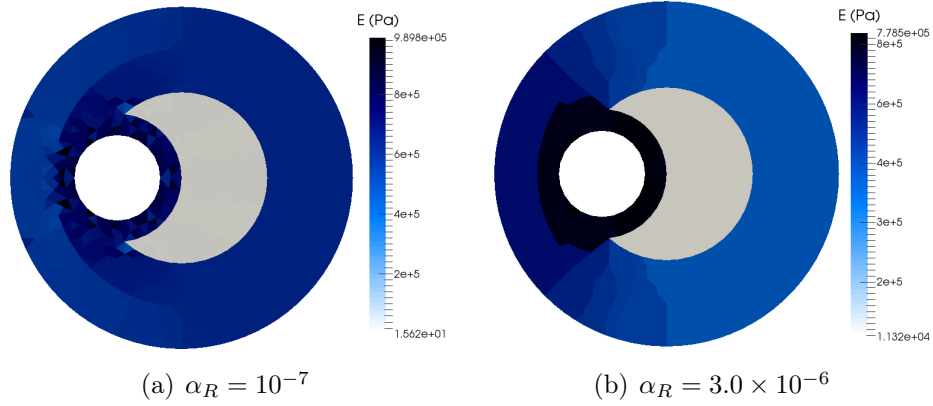


Figura 5.13: Resultados de Ejemplo 4, módulos de Young obtenidos por identificación sin grupos.

5.14(b), para α_R bajo y alto respectivamente. Vemos que nuevamente la región LC es identificada aunque las interfaces entre los otros materiales no pueden ser claramente identificadas. También podemos apreciar que el regularizador no es suficientemente efectivo ya que incluso para el valor de α_R bajo, observan discontinuidades en la zona central y continuidad en la zona derecha, lejos de la zona de aplicación de la carga.

Tiempos En la Tabla 5.10 vemos los tiempos requeridos para cada identificación. No es posible hacer una comparación directa con los tiempos presentados

Método	tiempo (s)	t_I/t_A
directo	0.56	-
3 grupos	26.1	46.6
16 grupos	29.7	53.0
libre	276.1	493.0

Tabla 5.10: Ejemplo 3, tiempos requeridos por procedimientos numéricos usados.

en (Franquet et al., 2012) ya que no se están utilizando los mismos computadores ni los mismos códigos. De todas formas, podemos tomar como referencia

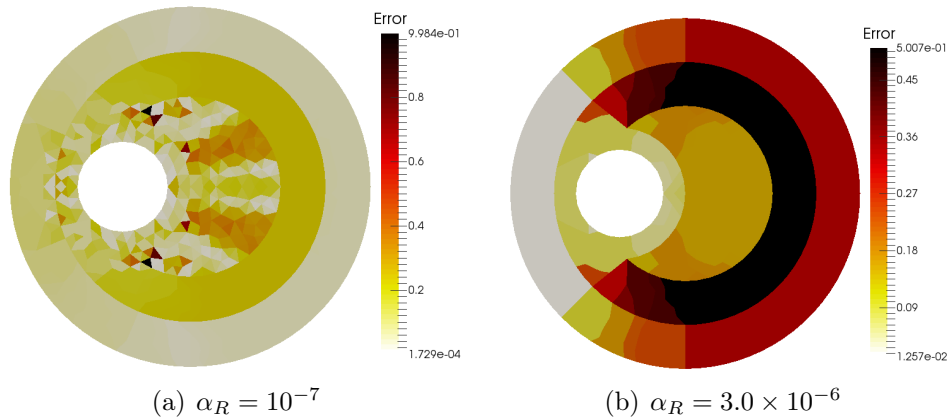


Figura 5.14: Resultados de Ejemplo 4, errores relativos obtenidos por identificación sin grupos.

el tiempo que requiere el código propio desarrollado en realizar el análisis de elementos finitos del problema elástico lineal, y ver la relación con el tiempo de identificación. En la tabla t_I/t_A representa el cociente entre tiempo de identificación y tiempo de análisis.

En (Franquet et al., 2012) se resuelve un problema directo más complejo con una malla más densa y elementos finitos de mayor orden, y el tiempo requerido para cada resolución del problema directo es similar, lo que muestra que disponemos de una herramienta considerablemente más lenta. Tomando esto en cuenta podemos concluir que la formulación cónica es claramente más eficiente que el método utilizado en (Franquet et al., 2012) lo que es esperado ya que en dicho artículo se utiliza un método de gradiente.

Conclusiones preliminares

Observando los resultados se puede decir que este ejemplo representa un desafío para el método de identificación con la estrategia de regularización utilizada. El autor no ha visto resuelto este ejemplo considerando un E por cada elemento en la literatura, lo que confirma el desafío que representa. El problema es debido en parte a la sensibilidad de los desplazamientos respecto a la variación del E de cada elemento.

Se observó también que al considerar otras condiciones de contorno sobre el problema, como una presión externa de la misma magnitud que la interna, los resultados de la identificación mejoran significativamente. Estas condiciones de contorno no representan la realidad que se intenta reproducir, pero el

resultado muestra que, para esta formulación, la precisión en los módulos de Young obtenidos en cada elemento pueden estar asociados al nivel de deformación del elemento. Esto permite sugerir que en regiones con menor energía de deformación, la sensibilidad del funcional ante una variación en E es considerablemente menor. Modificaciones en el funcional y el regularizador serán consideradas como parte de los trabajos futuros a proponer.

Una alternativa para paliar el resultado negativo visto en la resolución de este problema, consiste en utilizar como datos más de un campo de desplazamientos. En la siguiente sección presentaremos un resultado preliminar del trabajo que se está realizando en esta dirección.

Identificación con tres campos de desplazamientos

Viendo los resultados obtenidos anteriormente en este ejemplo, surge la motivación de buscar estrategias para mejorar las distribuciones de E obtenidas al realizar la identificación sin grupos. Una posible alternativa es utilizar más de un campo de desplazamientos como dato. En esta sección continuaremos utilizando la misma geometría y condiciones de contorno pero generaremos los desplazamientos dato adicionando error en E .

Considerando los mismos valores utilizados anteriormente para E^r y utilizando el procedimiento del Ejemplo 1, son generados de forma aleatoria tres distribuciones de E^m con $\eta_E = 0.02$. Tanto para la resolución del problema directo como para la identificación se utiliza una misma malla de 748 elementos. Los tres campos de desplazamiento generados \mathbf{U}^m tienen niveles de error $\eta_{\mathbf{u}}$ iguales a: $7.37 \cdot 10^{-3}$, $8.34 \cdot 10^{-3}$ y $1.11 \cdot 10^{-2}$.

Comenzamos realizando la identificación con un campo de desplazamientos. Se utiliza la misma geometría y condiciones de contorno por lo que nos encontramos ante un problema similar al resuelto anteriormente. Utilizamos el primer campo de desplazamientos, el cual tiene menor error, y aplicamos la estrategia de selección automática de α_R obteniendo los resultados mostrados en la Figura 5.15. Podemos apreciar que a pesar de considerar un error bajo en E y de utilizar el campo de desplazamientos de menor error no es posible obtener una identificación satisfactoria del mapa de propiedades mecánicas. Esto es coherente con los resultados vistos en la sección anterior.

Procedemos ahora a realizar la identificación considerando dos casos más. Por una parte utilizaremos los tres campos de desplazamientos considerando

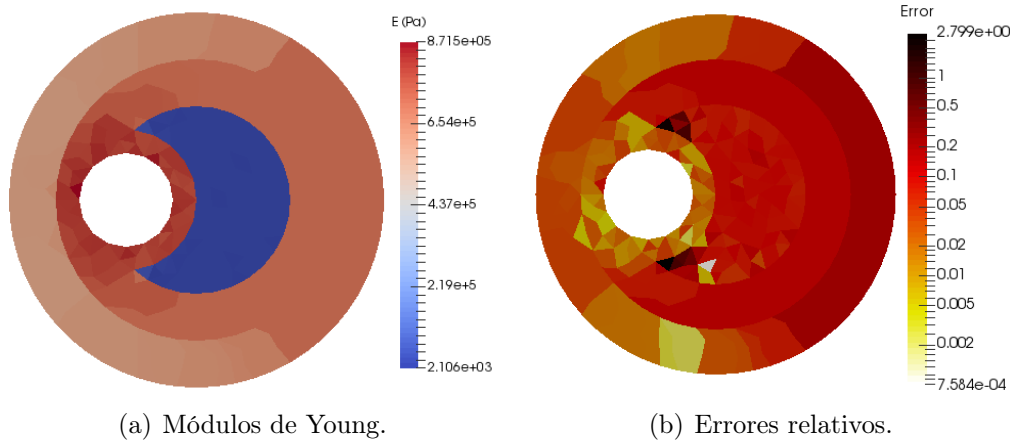


Figura 5.15: Resultados de Ejemplo 4, identificación realizada con un campo de desplazamientos y datos con error introducido en E .

el desplazamiento promedio en cada nodo, y por otra parte consideraremos los tres desplazamientos de forma independiente para aplicar la formulación presentada en la Ecuación (4.24). En los tres casos se realiza la identificación aplicando el criterio de selección de α_R con los mismos parámetros, con la formulación CPCEG.

En la Tabla 5.11 se presentan los resultados numéricos más importantes. Se puede apreciar que, en este ejemplo, el uso más de un campo de despla-

Formulación	$\delta E_{L_1}^*$ (%)	δE_{∞}^* (%)	its	α_R
Un desplazamiento	9.23	279.9	11	3.22E-07
Desplazamiento promedio	6.63	131.9	9	3.06E-07
Tres desplazamientos	7.89	87.95	8	8.43E-07

Tabla 5.11: Resultados de Ejemplo 4.

zamientos produce una notoria mejoría en los resultados, reduciendo el error máximo entre un 50 y 70 %. La utilización del promedio provee un menor error δE_{L_1} mientras que utilizar los desplazamientos de forma independiente reduce el máximo error cometido.

Para complementar el análisis, en la Figura 5.16 se presentan los mapas de propiedades mecánicas y errores relativos obtenidos al utilizar tres campos de desplazamientos de forma independiente. En este caso se logra distinguir más claramente la interfaz entre los distintos materiales en la zona derecha del dominio, lo que representa una clara mejoría. El error máximo no parece estar

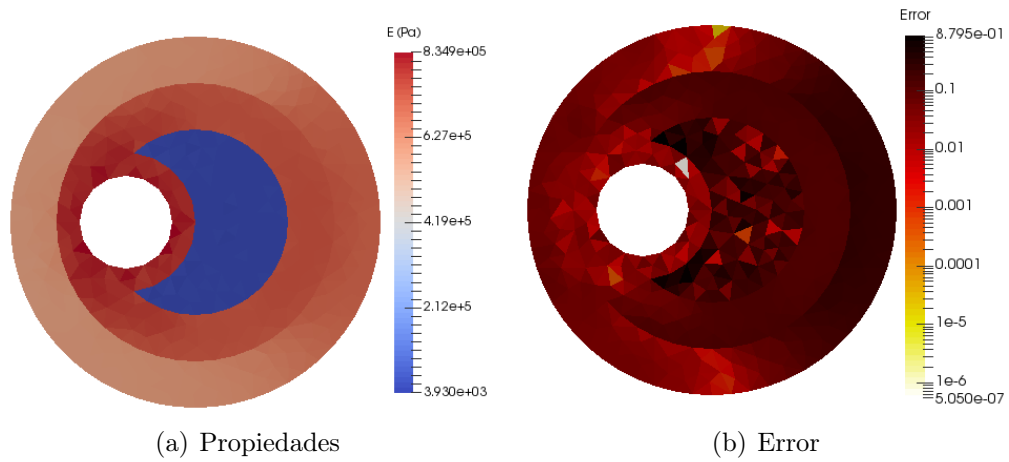


Figura 5.16: Resultados de Ejemplo 4, identificación con tres desplazamientos separados y error introducido en E .

concentrado como el caso de un desplazamiento.

En la Figura 5.17 vemos los gráficos obtenidos al identificar con el desplazamiento promedio. Los gráficos obtenidos son similares a los vistos al utilizar

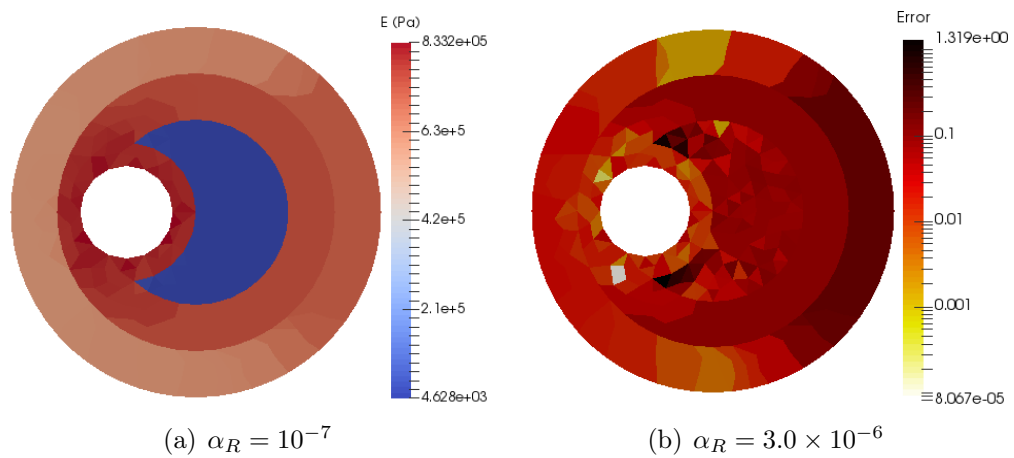


Figura 5.17: Resultados de Ejemplo 4, errores relativos, identificación con tres desplazamientos separados y error en E .

tres desplazamientos aunque la concentración de errores y la distribución de propiedades parece tener un comportamiento similar al de un campo de desplazamientos.

Conclusiones preliminares

Viendo los resultados concluimos que la utilización de más de un campo de desplazamientos mejora de forma notable los resultados, por lo que se aconseja su aplicación a la hora de procesar datos reales. Mayores estudios deben ser realizados para distinguir con mayor detalle diferencias de desempeño entre el uso del desplazamiento promedio o los desplazamientos de forma independiente. También se entiende necesario cuantificar las ventajas de identificar utilizando varios desplazamientos linealmente independientes, es decir generados por vectores de fuerzas nodales no proporcionales.

5.2.2. Ejemplo 5

En este ejemplo deseamos tener un primer acercamiento hacia la aplicación de estas formulaciones para la identificación de propiedades mecánicas en arterias utilizando imágenes médicas. En los problemas de identificación de propiedades en tejidos biológicos, los campos de desplazamientos son obtenidos a través de la aplicación de técnicas de procesamiento de imágenes. Estas imágenes son habitualmente obtenidas utilizando ultrasonido debido al relativo bajo costo del equipamiento y, por ejemplo en el caso de Cáncer de mama, por estar asociados a procedimientos menos invasivos (Goenezen et al., 2012).

En el caso particular de la identificación de propiedades de arterias, las imágenes de ultrasonido son obtenidas utilizando procedimientos invasivos como IVUS (*Intra Vascular Ultra Sound*) (Le Floc'h et al., 2010). El procedimiento de procesamiento de imágenes e identificación de propiedades es brevemente descrito junto a una revisión de la literatura en (Pérez Zerpa, 2012). Un grupo de técnicas utilizadas para el procesamiento de las imágenes es llamado *Optical Flow* (OF). El grupo HeMoLab del LNCC se encuentra desarrollando y aplicando técnicas de OF al tratamiento de imágenes obtenidas utilizando IVUS. En esta sección se presentan resultados preliminares de identificación utilizando datos procesados por integrantes de dicho grupo.

Sean dos imágenes de un mismo cuerpo obtenidas en dos instantes de tiempo diferentes, se desea obtener el vector de desplazamiento de cada punto de la imagen. Cada imagen es formada por una malla estructurada x - y de *pixels* y una función de intensidad $I_n(x, y, t)$. De forma sintética se puede decir que la técnica OF obtiene el desplazamiento de cada *pixel* de la imagen imponiendo que la intensidad I_n de cada punto del cuerpo no varíe en el movimiento.

Para realizar eso, cada método específico resuelve un problema que, de forma general, se puede escribir como:

$$\min_{\mathbf{u}} \mathcal{I}(\mathbf{u}) + \alpha_{OF} \|\nabla \mathbf{u}\|_{L_2(\Omega)}^2, \quad \mathcal{I}(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \left(\nabla I_n \cdot \mathbf{u} + \frac{\partial I_n}{\partial t} \right)^2 d\Omega, \quad (5.10)$$

donde \mathbf{u} es el campo de desplazamientos de todos los *pixels* y $\alpha_{OF} \|\nabla \mathbf{u}\|_{L_2(\Omega)}^2$ representa un término de regularización utilizado para penalizar soluciones de desplazamientos con fuertes discontinuidades. Omitiremos los detalles del método y su aplicación a las imágenes, el lector puede encontrar detalles y referencias en (Maso Talou et al., 2015).

Geometría rectangular

Consideremos el problema abordado en el Ejemplo 1. Utilizando el campo de desplazamientos obtenido por el método de elementos finitos, se produce una imagen del cuadrado luego de ser deformado por la carga aplicada. Utilizando las imágenes previa y posterior a la deformación se aplica la técnica OF, obteniendo los campos de desplazamientos que se muestran a la izquierda en la Figura 5.18. Los vectores de desplazamientos obtenidos por el MEF

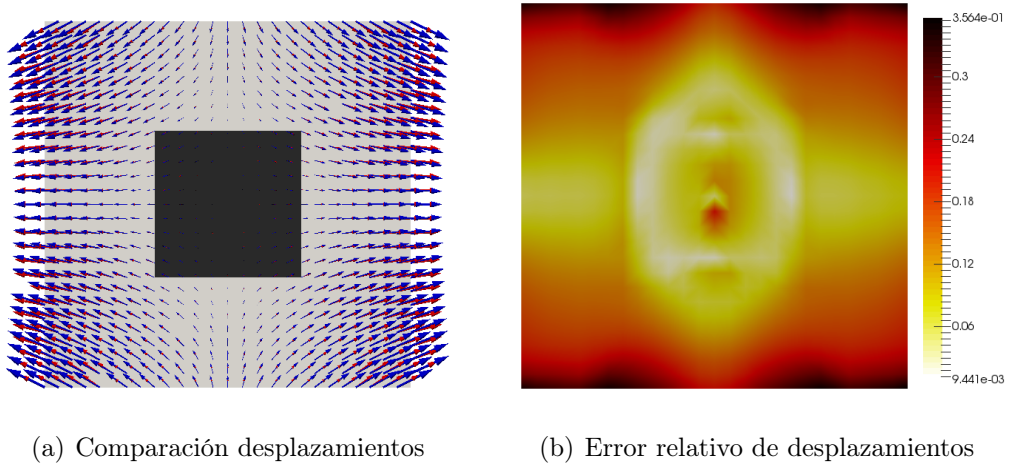


Figura 5.18: Resultados de Ejemplo 5, geometría considerada y comparación de desplazamientos.

son representados en azul mientras que los obtenidos con la técnica de OF son mostrados en rojo. A la derecha vemos un mapa de errores relativos del desplazamiento. Podemos ver que los desplazamientos en las interfaces de materiales

son identificadas con bajo error, mientras que en los contornos se observa un error superior a 30 %.

En la Figura 5.19 vemos los mapas de módulos de Young obtenidos para dos valores de α_R . Vemos que para un valor de α_R bajo, es posible identificar con

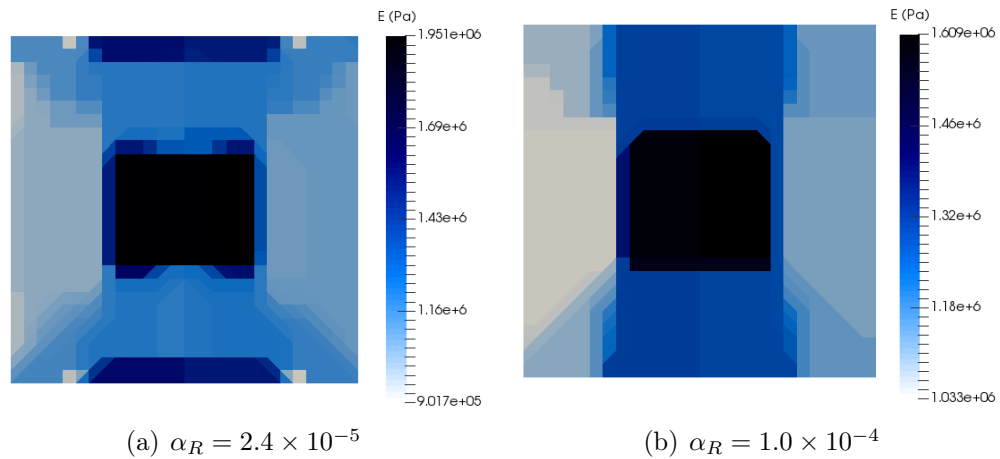


Figura 5.19: Resultados de Ejemplo 5, mapas de propiedades mecánicas obtenidas.

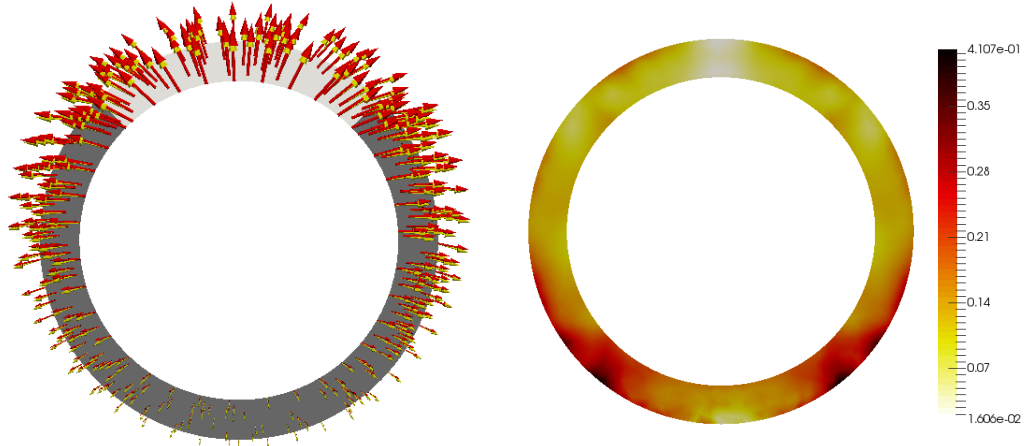
precisión aceptable los valores de módulo de Young de la región de la inclusión y el dominio que lo rodea. De todas formas, el error observado en los contornos superior e inferior afecta la solución produciendo un error considerable en dicha área. Cuando el valor de α_R elevado es considerado se obtiene una solución con menores discontinuidades aunque los valores se alejan de la solución como es de esperar.

Geometría anular

El problema que se resolverá a continuación consiste en un anillo formado por dos materiales sometido a presión interna uniforme. En el cuarto superior tiene un módulo de Young $E_1^r = 10^5$ Pa (indicado con tono claro en la imagen) y un material de $E_2^r = 6 \cdot 10^5$ Pa es considerado para el resto del dominio. Ambos materiales tiene un coeficiente de Poisson $\nu = 0.45$.

En la Figura 5.20 vemos los desplazamientos obtenidos aplicando el MEF comparados con los desplazamientos obtenidos por el método OF. A la derecha vemos el mapa de errores relativos.

Al realizar la identificación obtenemos resultados similares a los vistos en el caso anterior. El costo a pagar por identificar las interfaces claramente es la pérdida de precisión en los valores identificados.



(a) Vectores de desplazamientos MEF y OF.

(b) Mapa de error relativo.

Figura 5.20: Ejemplo 5, geometría anular, comparación de desplazamientos de MEF y *Optical Flow*.

Conclusiones preliminares y trabajos futuros

Concluimos que el error introducido al aplicar técnicas como OF para la obtención de los desplazamientos, dificultan al método de identificación la obtención de las distribuciones de material con precisión. A pesar de esto, las geometrías o interfaces entre materiales son identificadas correctamente para los ejemplos resueltos.

A pesar de obtener resultados que deben ser mejorados se debe destacar que, en algunas aplicaciones, el hecho de identificar la geometría de la inclusión y un orden del valor de Young correspondiente es un logro suficientemente importante. Más aún cuando esto es realizado con altos niveles de eficiencia computacional.

Considerando que el error introducido por el OF estará presente en datos reales de desplazamientos \mathbf{U}^m , se deberá mejorar los resultados utilizando más de un campo de desplazamientos, algo que es posible ya que las imágenes obtenidas con IVUS consisten de una serie de imágenes en varios instantes de tiempo.

Modificaciones en el funcional y el regularizador deberán ser consideradas buscando resolver problemas con importante variaciones de energía deformación. También se deberá investigar posibles modificaciones del abordaje del OF, por ejemplo modificando el término de regularización de la Ecuación (5.10).

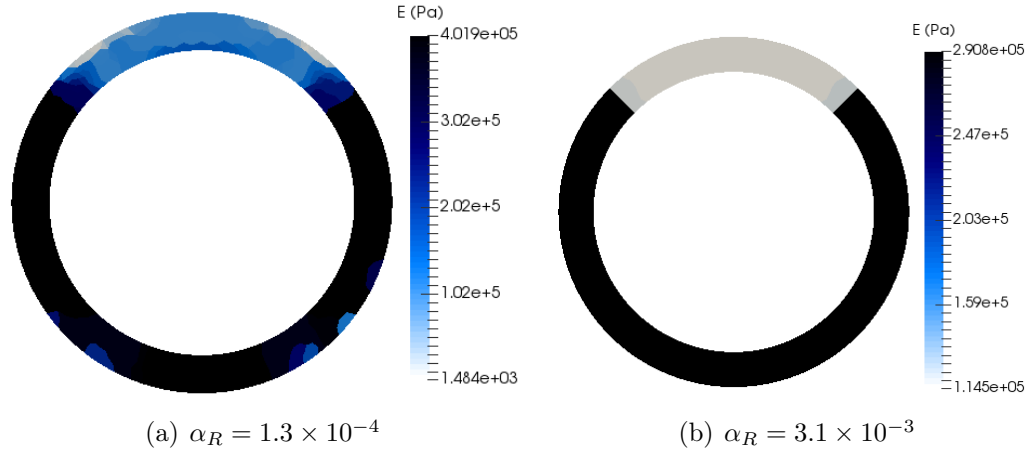


Figura 5.21: Resultados de Ejemplo 5 con geometría anular, propiedades mecánicas obtenidas.

5.2.3. Ejemplo 6

En aplicaciones de Biomecánica, la resolución del problema directo suele involucrar modelos no lineales, por ejemplo en Goenez et al. (2012) un modelo elástico no lineal es considerado para la identificación de propiedades mecánicas de tumores de mama.

En este ejemplo se presentan los resultados obtenidos al aplicar el método de identificación a datos obtenidos considerando las no linealidades de la Elasticidad Finita. Por otra parte, también se considera que al identificar no se cuenta con información sobre las interfaces o ubicación de las inclusiones, etc, por lo tanto, para el problema inverso se utiliza una malla estructurada.

En particular se resuelve un ejemplo donde las interfaces internas no pueden ser encontradas como bordes de elementos de la malla. En este ejemplo la formulación CPCEG es aplicada.

Generación de datos e identificación

El problema considerado consiste en un dominio cuadrado de lado $\ell = 1$ m, con una inclusión circular de radio 0.25 m y condiciones de contorno mostradas en la Figura 5.22. El comportamiento hiperelástico asumido para el material está dado por el modelo de Curnier descrito en la Sección 2.1.1, por lo tanto la densidad de energía de deformación está dada por:

$$\Psi(\mathbf{L}) = \lambda(J - \log(J) - 1) + \mu \text{Tr}(\mathbf{L}^2). \quad (5.11)$$

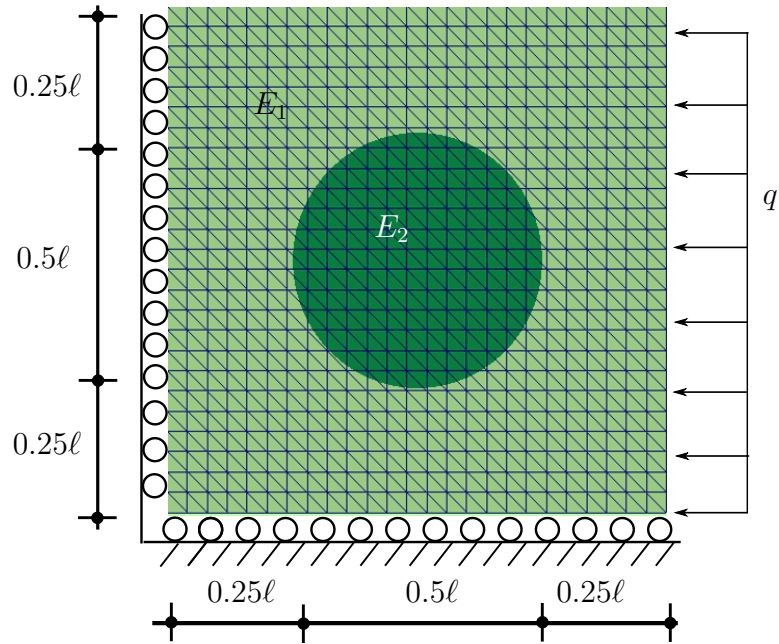


Figura 5.22: Esquema de Ejemplo 6: geometría, condiciones de contorno y malla de 1250 elementos.

Los parámetros λ y μ son parámetros positivos que, para el modelo linealizado, se corresponden con los parámetros de Lamé.

Los parámetros de referencia considerados son $\lambda = 20/3$ Pa y $\mu = 4$ Pa para la inclusión, mientras que para el resto de el dominio los parámetros son $\lambda = 2/3$ Pa y $\mu = 0.4$ Pa. Esto es equivalente a decir que, para pequeñas deformaciones, el modelo linealizado tiene parámetros $\nu = 0.25$ y $E = 1$ Pa para el cuadrado, y $\nu = 0.25$ y $E = 10$ Pa para la inclusión.

La carga aplicada $q = 0.12$ Pa produce sobre el sólido las deformaciones mostradas en la Figura 5.23. El problema directo es resuelto utilizando una malla no estructurada formada por 2254 elementos triangulares. Las mallas deformada e indeformada son presentadas en la figura, así como también la magnitud de los vectores del campo de desplazamientos. No hay factor de escala aplicado por lo que se puede apreciar que el material sufre grandes deformaciones.

Los desplazamientos son interpolados a una grilla regular de 26×26 nodos, obteniendo así los desplazamientos “medidos” del ejemplo \mathbf{U}^m . Los puntos de esta grilla definen una malla estructurada de 1250 elementos mostrada en la Figura 5.24. Esta malla será considerada para la resolución del problema inverso, por lo tanto, las interfaces de la inclusión no están representadas por

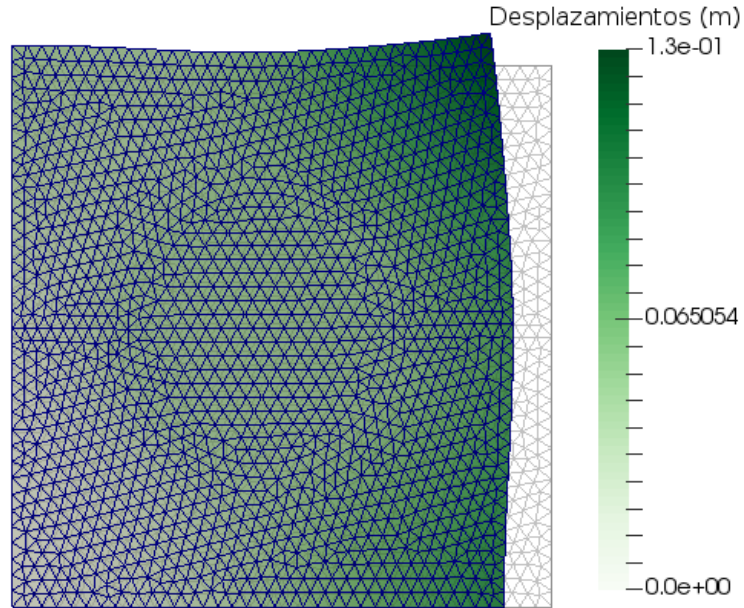


Figura 5.23: Ejemplo 6: Deformación y mapa de magnitudes de desplazamientos producidos para la carga aplicada $q = 0.12$ MPa y malla no estructurada de 2254 elementos.

bordes de los elementos de la malla.

El criterio de parada considerado para las ejecuciones del SeDuMi es el mismo que en los ejemplos anteriores. Para el proceso de bisección se utilizó $(\alpha_R)_{left} = 10^{-10}$ y $(\alpha_R)_{right} = 10^2$. Para el cálculo del parámetro δ_R se generó un vector de desplazamientos \mathbf{U}_L en los nodos de la malla estructurada, considerando un modelo lineal con los parámetros de referencia. Luego se consideró $\delta_R = 1.15 \|\mathbf{U}_L - \mathbf{U}^m\|_2$. Esta estimación del error introducido tiene, en cierto modo, en cuenta la no linealidad del problema y el error cometido al identificar con un modelo no lineal.

El método de identificación es aplicado obteniendo el parámetro de regularización óptimo $\alpha_R = 5.62 \times 10^{-4}$ y la distribución de parámetros materiales mostrados en la Figura 5.24. En la misma se muestra que la identificación es capaz de identificar adecuadamente las interfaces de la inclusión. Además, a pesar de que los desplazamientos medidos corresponden a un modelo no lineal, los parámetros mecánicos del modelo linealizado son correctamente estimados.

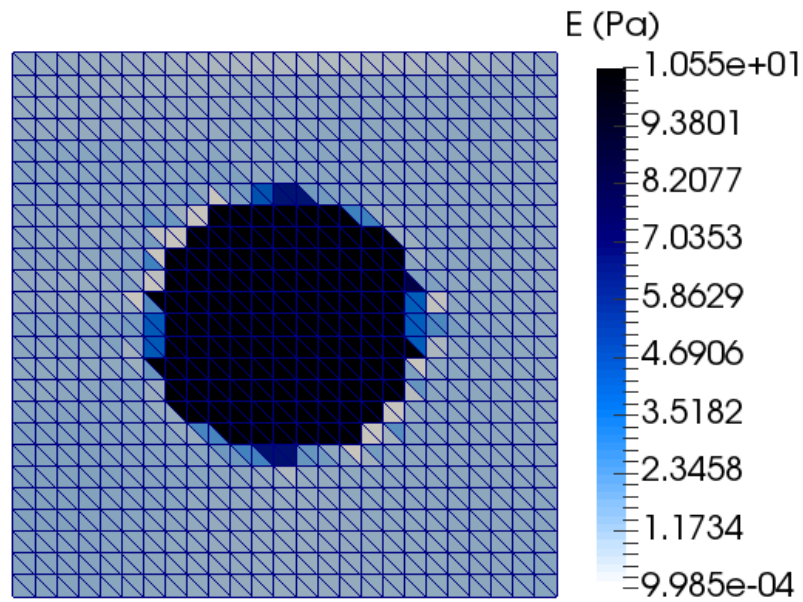


Figura 5.24: Resultados de Ejemplo 6, módulos de Young obtenidos.

Conclusiones preliminares

Los resultados obtenidos permiten concluir que la metodología propuesta es capaz de identificar información importante del material incluso cuando el sólido es sometido a grandes deformaciones, con un comportamiento no lineal y sin contar con información sobre la geometría de las inclusiones. A pesar de esto, una extensión formal del método para identificación de propiedades en modelos no lineales debe ser desarrollada en trabajos futuros.

Parte III

Modelado Viscoelástico

Fraccional

Capítulo 6

Herramientas para el modelado fraccional

Dado que los datos disponibles de mediciones no invasivas en humanos consisten en valores de presión y diámetro, los métodos utilizados para el modelado de su comportamiento son de naturaleza diferente a los de identificación no homogénea. El objetivo en esta área es aportar al mejoramiento del modelado del comportamiento constitutivo de los modelos simples que pueden ser aplicados con los datos disponibles en la actualidad o a corto plazo.

En este capítulo se presentan herramientas desarrolladas para la introducción de nuevos modelos viscoelásticos y la correcta estimación de sus parámetros mecánicos. En la Sección 6.1 se presenta un nuevo elemento reológico a ser utilizado como parte de los modelos viscoelásticos. Luego en la Sección 6.2 se describen tres enfoques diferentes para aplicar los modelos constitutivos viscoelásticos al problema de arterias sometidas a presión interna. Finalmente en la Sección 6.3 se introduce una formulación de un problema inverso para la identificación de los parámetros más adecuados a partir de los datos.

6.1. Un nuevo modelo fraccional

En la Sección 2.2.1 fueron descritos los modelos viscoelásticos más importantes utilizados para el modelado del comportamiento constitutivo de tejidos biológicos. Los resultados de la literatura muestran que los mismos pueden ser mejorados a través del aumento de la complejidad de los modelos. En (Wang et al., 2013) se incrementa el número de brazos de Maxwell obteniendo un me-

por ajuste a datos de tensión y deformación de tejidos porcinos. Una desventaja de este enfoque es el aumento de las constantes a determinar en el proceso de identificación.

En esta sección se describen los modelos viscoelásticos fraccionales, los cuales mejoran las capacidades de los modelos viscoelásticos clásicos, así como también se presenta un nuevo elemento reológico que permite mejorar aún más el ajuste de estos modelos a datos experimentales.

6.1.1. Modelado Viscoelástico Fraccional

Análisis fraccional

La teoría del Análisis Fraccional consiste en una generalización del Análisis Diferencial, donde el concepto de derivada de una función se generaliza para órdenes de derivación no enteros. En esta sección se presentarán los conceptos mínimos para la aplicación de esta herramienta al modelado constitutivo, el lector interesado puede continuar la lectura en (Podlubny, 1999).

Dado que consiste en una generalización, existen diferentes posibles definiciones para la derivada. A pesar de que la búsqueda de definiciones apropiadas sigue siendo tema de investigación (Khalil et al., 2014). En este trabajo se considera la definición de *Riemann-Louville* con límite inferior $-\infty$. La misma es descrita en (Podlubny, 1999) como una definición apropiada para procesos estacionarios, como sólidos sometidos a cargas periódicas.

La expresión matemática de esta definición para una función real $f(t)$ está dada por la siguiente expresión:

$$D^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_{-\infty}^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t - \tau)^{\alpha+1-n}} d\tau, \quad n - 1 \leq \alpha < n, \quad (6.1)$$

donde α representa el orden de derivación y Γ es la función gamma, la cual consiste en una generalización de la función factorial para números reales. Podemos ver que al considerar $n = 1$ y $\alpha = 0$ obtenemos la expresión de la propia función y en el caso $n = 2$ y $\alpha = 1$ obtenemos la derivada primera.

Una propiedad útil, que es verificada por la definición adoptada, es la siguiente:

$$D^\alpha e^{i\omega t} = (i\omega)^\alpha e^{i\omega t} \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad (6.2)$$

donde el valor i^α puede ser calculado utilizando la identidad $i^\alpha = \cos\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right) +$

$i \sin(\alpha \frac{\pi}{2})$. Este cálculo es el realizado por la herramienta numérica GNU-Octave, la cual utilizaremos para obtener los resultados numéricos.

Elemento *spring-pot*

El análisis fraccional cobró gran interés para los investigadores en modelado constitutivo de materiales a partir de la segunda mitad del siglo XX, cuando se comienza a formalizar el concepto de derivada fraccional para formular el elemento fraccional llamado *spring-pot* (Bagley and Torvik, 1983). Este elemento representa un comportamiento intermedio entre un resorte (*spring*) y un amortiguador (*dash-pot*). Este comportamiento complejo es representado de forma sencilla a través de la siguiente ecuación:

$$\sigma_F(t) = E^{(1-\alpha)} \eta^\alpha D^\alpha \varepsilon_F(t), \quad \alpha \in [0, 1], \quad (6.3)$$

donde α es el orden de derivación que relaciona tensión y deformación, $\sigma_F(t)$ y $\varepsilon_F(t)$ representan la tensión y la deformación en el instante t en el elemento fraccional respectivamente, mientras que E y η son parámetros mecánicos asociados a la rigidez (para $\alpha = 0$) y la viscosidad (para $\alpha = 1$).

Este elemento ha sido recientemente utilizado para mejorar la capacidad de modelos viscoelásticos de Kelvin para el ajuste del comportamiento mecánico de arterias (Zhang and Liu, 2015; Craiem et al., 2008). En dichos trabajos se destaca el potencial del parámetro α como constante asociable con una interpretación física o fisiológica del comportamiento del material.

6.1.2. Nuevo elemento viscoelástico fraccional

En esta sección se presenta una extensión del elemento fraccional descrito en la sección anterior, el cual será introducido en el modelo SLS en la próxima sección, obteniendo un modelo de pocos parámetros con una gran capacidad para modelar comportamientos complejos.

Presentación HOSP

Como vimos en el elemento *spring-pot* el parámetro α es considerado en el intervalo $[0, 1]$. Este intervalo para el valor α será denotado I_α . Consideremos ahora que se permite un mayor orden para la derivada extendiendo este intervalo a $I_\alpha = [0, 2]$. Este elemento es llamado *high-order spring-pot* (HOSP) y

no ha sido visto en la literatura de modelado de comportamiento constitutivo de materiales, por lo que representa una nueva herramienta para el modelado del comportamiento mecánico.

Como vimos el comportamiento del elemento *spring-pot* puede tener interpretaciones físicas con orden de derivación entre 0 y 1. En el caso del HOSP resulta desafiante encontrar una interpretación física asociada con el comportamiento constitutivo al considerar órdenes de derivación mayores a 1. La búsqueda de una interpretación física será parcialmente abordada más adelante, de todas formas es relevante demostrar que esta nueva relación de mayor orden entre tensión y deformación es admisible desde un punto de vista termodinámico.

Factibilidad física del HOSP

A continuación se muestra que el elemento HOSP presentado anteriormente es físicamente admisible. Se mostrará que la restricción $\alpha \leq 2$ puede ser considerada en lugar de $\alpha \leq 1$ sin violar las restricciones termodinámicas, permitiendo así su utilización en modelos viscoelásticos. Las restricciones termodinámicas son impuestas a través de la condición de disipación positiva en un ciclo termodinámico. A partir de la imposición de las restricciones se obtiene una relación entre los parámetros de forma similar a como es realizado en (Bagley and Torvik, 1986; Friedrich, 1991).

Consideremos que las funciones de deformación y tensión pueden ser descompuestas utilizando series de Fourier,

$$\varepsilon(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n e^{i\lambda_n t}, \quad \sigma(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n e^{i\lambda_n t}, \quad (6.4)$$

donde i es la unidad imaginaria. Los coeficientes complejos ε_n y σ_n deben generar funciones $\varepsilon(t)$ y $\sigma(t)$ reales.

Se considera la ecuación constitutiva del elemento HOSP con parámetros mecánicos E_1 y τ'_σ en la que la derivada de la deformación puede ser sustituida por la derivada de la expresión de la Ecuación (6.4). Utilizando la identidad dada por la Ecuación (6.2) se obtiene:

$$\sigma(t) = E_1 \tau'_\sigma D^\alpha \varepsilon(t), \quad \Rightarrow \quad \sigma_n = E_1 \tau'_\sigma (i\lambda_n)^\alpha \varepsilon_n, \quad (6.5)$$

identidad que permite obtener los coeficientes de la tensión respuesta σ_n generada por el elemento HOSP para una deformación dada.

De la misma forma se obtiene la descomposición de la función de la primer derivada de la deformación:

$$\dot{\varepsilon}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} i \lambda_n \varepsilon_n e^{i \lambda_n t}, \quad \Rightarrow \quad \dot{\varepsilon}_n = i \lambda_n \varepsilon_n. \quad (6.6)$$

Para validar el modelo constitutivo, debemos verificar que las leyes termodinámicas son satisfechas. En particular se consideran procesos termodinámicos cerrados, en los cuales la disipación debe ser no negativa (Silhavý, 1997; Gurtin et al., 2009).

Consideremos un proceso termodinámico cerrado en el cual las influencias térmicas pueden ser despreciadas y la conductividad del sólido es suficientemente alta como para considerar que el gradiente de temperaturas es nulo. La tasa de variación del trabajo interno \dot{w} es igual a la tasa de variación de la energía libre de Helmholtz $\dot{\psi}$ más la disipación ϑ , es decir:

$$\dot{w} = \dot{\psi} + \vartheta. \quad (6.7)$$

Dado que la energía libre ψ es una variable de estado, la integral de $\dot{\psi}$ en cualquier proceso cerrado es nula. Considerando un período T , obtenemos la siguiente desigualdad

$$\int_0^T \dot{w} dt = \int_0^T \vartheta dt \geq 0. \quad (6.8)$$

La integral asociada al trabajo interno puede ser calculada de la siguiente forma:

$$\int_0^T \dot{w} dt = \int_0^T \langle \sigma, \dot{\varepsilon} \rangle dt, \quad (6.9)$$

donde $\langle a, b \rangle = a \cdot \bar{b}$, siendo \bar{b} el conjugado de b . Sustituyendo las expresiones de las Ecuaciones (6.5) y (6.6) se obtiene:

$$\int_0^T \dot{w} dt = \int_0^T \left(\sum_{n=0}^{\infty} E_1 \tau'_\sigma (i \lambda_n)^\alpha \varepsilon_n e^{i \lambda_n t} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} i \lambda_n \varepsilon_n e^{i \lambda_n t} \right) dt. \quad (6.10)$$

Las funciones exponenciales consideradas forman una base ortogonal para el producto interno usual en espacios de funciones continuas complejas.

Utilizando la condición de disipación positiva para todo proceso, se puede

ver que todos los términos de la sumatoria deben ser positivos, por lo tanto obtenemos las siguiente desigualdades equivalentes a la restricción termodinámica:

$$\Re(E_1 \tau'_\sigma \lambda_n^\alpha i^\alpha \varepsilon_n (-i \lambda_n \bar{\varepsilon}_n)) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Im(|\varepsilon_n|^2 E_1 \tau'_\sigma \lambda_n^\alpha i^\alpha \lambda_n) \geq 0, \quad (6.11)$$

donde \Re e \Im representan la parte real e imaginaria respectivamente. Sustituyendo la expresión de i^α en la segunda desigualdad se obtiene la siguiente restricción para el parámetro α :

$$E_1 \tau'_\sigma \sin\left(\alpha \frac{\pi}{2}\right) \geq 0. \quad (6.12)$$

Dado que E_1 y τ_σ son constantes positivas, se concluye que α debe pertenecer al intervalo real $[0, 2]$ para obtener un elemento fraccional consistente con la teoría termodinámica.

Este resultado permite concluir que el elemento HOSP es apropiado para su uso en modelos de comportamiento constitutivo.

Adicionalmente se puede demostrar que la factibilidad termodinámica está asociada a una simple condición geométrica del gráfico de la histéresis. En un ciclo cerrado físicamente admisible, la curva paramétrica descrita por $(\varepsilon(t), \sigma(t))$ orientada según t creciente, debe definir una curva cerrada orientada de forma horaria. La demostración de esto junto con lo descrito anteriormente fue presentado en (Pérez Zerpa et al., 2015).

6.1.3. Nuevo modelo viscoelástico fraccional

Modelo FSLs

Consideremos el modelo SLS descrito en la Sección 2.2.1, donde la tensión es la correspondiente a una configuración de dos resortes y un amortiguador. Si sustituimos el amortiguador por un elemento fraccional pasamos a obtener el modelo *Fractional Standard Linear Solid* (FSLs) representado en la Figura 6.1. Todas las constantes de material son positivas. El caso en el que el elemento fraccional es el *spring-pot* ha sido utilizado previamente, sin embargo el modelo con el HOSP representa un nuevo modelo viscoelástico fraccional.

Partiendo de la ecuación constitutiva del modelo SLS dada por la Ecuación (2.39) se puede mostrar que la ecuación constitutiva del FSLs está dada

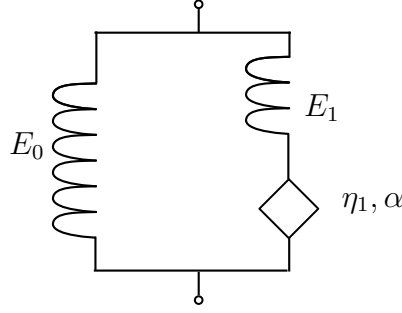


Figura 6.1: Esquema de modelo reológico Sólido Estandar Lineal Fraccional

por:

$$\sigma + \tau_\sigma D^\alpha \sigma = E_0 ((\varepsilon - \varepsilon_0) + \tau_\varepsilon D^\alpha \varepsilon) \quad (6.13)$$

donde los llamados tiempos de relajación y fluencia son definidos por:

$$\tau'_\sigma = \left(\frac{\eta_1}{E_1} \right)^\alpha, \quad \tau'_\varepsilon = \frac{E_1 + E_0}{E_0} \tau_\sigma, \quad (6.14)$$

y ε_0 es una deformación de referencia correspondiente a una configuración estática libre de tensión. Podemos destacar que los parámetros τ tienen dimensión [Tiempo^α], un análisis dimensional sería una componente importante en un eventual análisis completo de la interpretación física de los parámetros.

Repitiendo el procedimiento de la demostración de factibilidad termodinámica para la ecuación constitutiva del modelo FSLs se obtiene la relación:

$$E(\tau'_\varepsilon - \tau'_\sigma) \sin\left(\alpha \frac{\pi}{2}\right) \geq 0, \quad (6.15)$$

donde, de las definiciones de τ'_ε y τ'_σ en la Ecuación (6.14), podemos ver que $\tau'_\varepsilon - \tau'_\sigma \geq 0$. Finalmente, se obtiene el mismo intervalo factible para el parámetro α , resultado que era esperable.

6.2. Modelado de comportamiento de arterias

En esta sección presentaremos distintos abordajes para el análisis del comportamiento mecánico de vasos arteriales. Una hipótesis que se encuentra presente en los tres modelos es que la geometría corresponde a un tubo de pared delgada sometido a presión interna y se considera que no hay deformación en la dirección axial del tubo. Estas hipótesis son usuales para modelar el com-

portamiento de arterias (Fung, 1997; Valdez-Jasso et al., 2009; Nichols et al., 2011).

6.2.1. Modelo FSLs con r_0 conocido

Consideremos un cilindro de pared delgada sometido a una presión interna variable en el tiempo p , espesor h y radio r . También asumamos que existe una configuración de radio r_0 en la cual la presión aplicada es nula. Esta configuración será la configuración de referencia (no necesariamente la configuración natural) y las expresiones de la tensión y deformación unitaria tangencial están dadas por:

$$\sigma_\theta = \frac{pr}{h}, \quad \text{y} \quad \varepsilon_\theta = \frac{r - r_0}{r_0}, \quad (6.16)$$

respectivamente.

La relación constitutiva elástica entre estas dos magnitudes es llevada a su expresión equivalente del modelo FSLs descrito anteriormente, es decir:

$$\sigma_\theta = E(\varepsilon_\theta - \varepsilon_0) \quad \Rightarrow \quad \sigma + \tau'_\sigma D^\alpha \sigma = E_0 ((\varepsilon - \varepsilon_0) + \tau'_\varepsilon D^\alpha \varepsilon), \quad (6.17)$$

donde ε_0 es un parámetro a determinar proporcional a la tensión tangencial en la pared cuando no hay presión interna aplicada.

Con este modelo podemos obtener una estimación de la tensión y deformación en la pared arterial a partir de datos de presión y diámetro arterial en función del tiempo. La ecuación constitutiva nos permite obtener parámetros mecánicos que caracterizan el comportamiento mecánico de acuerdo con el modelo. Los parámetros pueden ser agrupados en un vector \mathbf{x} de cuatro entradas y así escribir la siguiente ecuación general del modelo

$$\sigma + x_4 D^\alpha \sigma = -x_1 + x_2 \varepsilon + x_3 D^\alpha \varepsilon. \quad (6.18)$$

6.2.2. Modelo FSLs con r_0 desconocido

El modelo anterior parte de la hipótesis de que es conocido el radio de la arteria para presión nula r_0 . Esto es posible cuando se trabaja con datos obtenidos *in-vitro*, o si en algún momento del procedimiento de medición es posible generar las condiciones para medir dicho valor. Es de interés desarrollar técnicas de identificación que no requieran conocer el parámetro r_0 para poder ser aplicadas. Por ello aquí se presenta un procedimiento para llegar a una

ecuación constitutiva donde dicho parámetro es identificable junto con los otros parámetros constitutivos a partir de datos presión-diámetro obtenidos de forma no invasiva.

Nuevamente partimos de la relación elástica lineal entre tensión y deformación unitaria:

$$\frac{pr}{h} = E \frac{r - r_0}{r_0}. \quad (6.19)$$

Introducimos un cambio de variable $r_I(t) = 1/r(t)$ obteniendo la siguiente expresión:

$$p(t) = \frac{Eh}{r_0} - Ehr_I(t). \quad (6.20)$$

Consideremos ahora que el espesor tiene una variación despreciable y definamos un parámetro $\beta_h = h/r_0$ que asumiremos conocido. Esta hipótesis es usual al trabajar con arterias de geometría ampliamente estudiada en la literatura, como en (Valdez-Jasso et al., 2009) donde se miden valores de $\beta_h \approx 0.1$. Obtenemos así una nueva relación elástica entre presión e inverso del radio, dada por:

$$p(t) = E\beta_h - E\beta_h r_0 r_I(t), \quad (6.21)$$

donde el parámetro material a determinar es E , mientras que r_0 y β_h son parámetros geométricos.

Obtengamos ahora la ecuación viscoelástica correspondiente al modelo FSLs

$$p(t) + \tau_p' D^\alpha p(t) = E\beta_h - E\beta_h r_0 r_I(t) - E\beta_h r_0 \tau_{r_I}' D^\alpha r_I(t). \quad (6.22)$$

Esta ecuación se puede escribir nuevamente de forma genérica agrupando los parámetros en un vector \mathbf{x} :

$$p(t) + x_4 D^\alpha p(t) = -x_1 + x_2 r_I(t) + x_3 D^\alpha r_I(t) \quad (6.23)$$

donde los parámetros son

$$\begin{cases} x_1 = -E\beta_h \\ x_2 = -E\beta_h r_0 \\ x_3 = -E\beta_h r_0 \tau_{r_I}' \\ x_4 = \tau_p' \end{cases} \quad (6.24)$$

si β_h es considerado como conocido, es sencillo obtener el valor de los cuatro parámetros E , r_0 , τ'_{r_I} y τ'_p a partir de \mathbf{x} . Los parámetros \mathbf{x} pueden ser obtenidos utilizando un método de caracterización que será desarrollado más adelante.

6.2.3. Modelo SLS con r_0 conocido y dinámica

Dado que el proceso de deformación de las arterias es dinámico, es de interés analizar qué efecto puede tener sobre los resultados dejar de lado la contribución inercial en las ecuaciones de los modelos de caracterización. En esta sección se presentan las ecuaciones que gobiernan el movimiento de un cilindro de pared delgada, como el considerado anteriormente, considerando la contribución dinámica en el equilibrio. El modelo constitutivo considerado en este caso es el SLS mientras que la contribución inercial es incluida en las ecuaciones de equilibrio.

Las ecuaciones de balance mecánico de un sólido de densidad ρ están dadas por:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \rho \ddot{\mathbf{u}}, \quad (6.25)$$

donde \mathbf{b} es el campo vectorial de fuerzas de volumen, $\boldsymbol{\sigma}$ es el tensor simétrico de tensiones de Cauchy y \mathbf{u} el campo de desplazamientos.

Consideremos ahora que el sólido consiste en un cilindro de pared delgada sometido a una presión p bajo un estado plano de deformaciones con tensión axial despreciable. Considerando la presión como una fuerza de volumen distribuida en el espesor h obtenemos una expresión para la tensión tangencial σ_θ :

$$\frac{-\sigma_\theta}{r} + \frac{p}{h} = \rho \ddot{u}_r. \quad (6.26)$$

Dado que $\varepsilon_\theta = u_r/r_0$ podemos obtener la siguiente expresión para la tensión:

$$\sigma_\theta = \frac{pr}{h} - \rho r_0 r \ddot{\varepsilon}_\theta. \quad (6.27)$$

Finalmente obtenemos una expresión para la presión interna en función de la tensión, deformación y los parámetros geométricos

$$p = h \frac{\sigma_\theta}{r} + \rho h r_0 r \ddot{\varepsilon}_\theta. \quad (6.28)$$

6.3. Método de Caracterización

Hasta ahora hemos visto diferentes modelos matemáticos desarrollados para describir la mecánica de cilindros de pared delgada bajo distintas hipótesis. Un aspecto igualmente importante es el desarrollo de métodos para la obtención de los parámetros de estos modelos a partir de medidas de las magnitudes involucradas. En esta sección se formula un problema inverso para la caracterización de los parámetros de un modelo general, así como también se describe una implementación numérica del método.

Consideremos un modelo constitutivo general de la forma:

$$\sigma + x_4 D^\alpha \sigma = -x_1 + x_2 \varepsilon + x_3 D^\alpha \varepsilon. \quad (6.29)$$

Si se dispone de datos medidos experimentalmente de tensión y deformación, el problema del modelado consiste en determinar los parámetros mecánicos del modelo que mejor ajusten los datos. Se considera el parámetro fraccional α separado de los otros cuatro parámetros mecánicos que son representados por el vector \mathbf{x} .

Consideremos ahora que las funciones σ y ε que verifican la ecuación del modelo son evaluadas en N instantes de tiempo definidos por una frecuencia de muestreo f_s . Aplicando la Transformada Discreta de Fourier (ver Sección 2.2.2) a ambos lados de la igualdad y utilizando la propiedad dada por la Ecuación (6.2) obtenemos la siguiente expresión:

$$(\mathbf{I} + x_4 \mathbf{\Lambda}_\alpha) \hat{\boldsymbol{\sigma}} + x_1 \hat{\mathbf{1}} - (x_2 \mathbf{I} + x_3 \mathbf{\Lambda}_\alpha) \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{0}, \quad (6.30)$$

donde $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ y $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ representan los vectores correspondientes a las transformadas de los valores de tensiones y deformaciones respectivamente, $\mathbf{\Lambda}_\alpha$ es una matriz diagonal con coeficientes $(\mathbf{\Lambda}_\alpha)_{nn} = (i\omega_n)^\alpha$ y $\hat{\mathbf{1}}$ es un vector con $\hat{\mathbf{1}}_i = \delta_{i0} N$, siendo δ_{ij} el delta de Kronecker y la frecuencia ω_n dada por $\omega_n = 2\pi n \frac{f_s}{N}$.

Consideremos que la tensión y deformación medidas son obtenidas experimentalmente en N instantes de tiempo y son representadas por $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ y $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ respectivamente. Los vectores correspondientes a sus transformadas discretas de Fourier serán $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ y $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$.

Para formular el problema inverso consideremos ahora que una de las magnitudes es medida sin error, por ejemplo las tensiones, por lo que sustituyendo

en la Ecuación (6.30) y despejando obtenemos el vector correspondiente a la deformación dada por el modelo:

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_n(\mathbf{x}, \alpha) = \frac{(1 + x_4(i\omega_n)^\alpha)\hat{\boldsymbol{\sigma}}_n + x_1 N \delta_{n0}}{x_2 + x_3(i\omega_n)^\alpha} \quad n = 0, \dots, N - 1. \quad (6.31)$$

donde $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_n$ representa la n -ésima entrada del vector de transformada de Fourier de las deformaciones correspondientes al modelo.

Establecido el modelo y los datos experimentales con que se cuenta, el problema de caracterización de parámetros consiste en obtener los parámetros que producen un mínimo error entre la deformación obtenida por el modelo y las medidas experimentales. El problema puede ser formulado como un problema de optimización de forma similar a como fue visto anteriormente para el PIM de la Ecuación (2.69). En este caso el problema es llamado de Caracterización de Material Fraccional y tiene la expresión:

$$(CMF) \begin{cases} \text{mín}_{\mathbf{x}, \alpha} f(\mathbf{x}, \alpha) \\ \text{sujeto a} \\ \mathbf{x} \in D_{\mathbf{x}} \quad \alpha \in I_{\alpha} \end{cases} \quad \text{con} \quad f(\mathbf{x}, \alpha) = \frac{\|\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}, \alpha) - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}\|^2}{\|\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}\|^2}, \quad (6.32)$$

donde f es la función objetivo que mide el error relativo entre los coeficientes TDF de la deformación del modelo y la medida obtenida experimentalmente, I_{α} es el intervalo real al que pertenece α y $D_{\mathbf{x}}$ es el conjunto factible de \mathbf{x} . En el caso del modelo presentado en la Sección 6.2.1 el conjunto factible es $D_{\mathbf{x}} = \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^+)^3$. Este problema inverso puede ser resuelto utilizando un método numérico iterativo descrito a continuación.

El problema (CMF) consiste en determinar dos tipos diferentes de parámetros: por una parte \mathbf{x} y por otro lado el parámetro fraccional α . Dada las particularidades del parámetro fraccional (como el hecho de pertenecer a un intervalo acotado), se decide resolver el problema CMF para un conjunto discreto y finito de valores α , dado por $S_{\alpha} = \{\alpha_s + k\Delta\alpha \mid k = 1, \dots, N_{\alpha}\}$.

Para cada valor $\alpha_k \in S_{\alpha}$ el problema CMF es resuelto, para luego obtener el parámetro fraccional óptimo α^* , como el que produce un valor mínimo de la función objetivo f . Esto puede ser expresado de la siguiente forma:

$$\alpha^* = \arg \min_{\alpha \in S_{\alpha}} (\min_{\mathbf{x} \in D_{\mathbf{x}}} f(\mathbf{x}, \alpha)), \quad \mathbf{x}^* = \arg \min_{\mathbf{x} \in D_{\mathbf{x}}} (f(\mathbf{x}, \alpha^*)). \quad (6.33)$$

El problema de optimización en este caso consiste en un problema de op-

timización no lineal. Dado que el funcional es continuo en la región factible es posible utilizar algoritmos basados en gradientes. También es posible proveer un punto inicial apropiado para el algoritmo dado por:

$$\mathbf{x}^0 = \min_{\mathbf{x} \in D_{\mathbf{x}}} \|\mathbf{M}_{\alpha} \mathbf{x} - \hat{\boldsymbol{\sigma}}\|^2, \quad \text{con} \quad \mathbf{M}_{\alpha} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{1}} & -\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} & -\Lambda_{\alpha} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} & \Lambda_{\alpha} \hat{\boldsymbol{\sigma}} \end{bmatrix}. \quad (6.34)$$

Se ha visto que el uso de este punto inicial produce una mejora considerable del desempeño de los algoritmos de optimización aplicados.

A pesar de que la TDF provee un vector de coeficientes con N entradas, para la evaluación de la función objetivo f , se utilizará un determinado número de coeficientes correspondiente a los primeros armónicos de la frecuencia fundamental de la señal.

El método propuesto puede ser aplicado a la identificación de parámetros viscoelásticos de arterias a partir de medidas de presión-diámetro con el parámetro geométrico r_0 conocido. En el capítulo siguiente veremos resultados sobre la aplicación del método a diferentes tipos de datos.

Finalmente se destaca que también es posible su aplicación aunque no sea conocido r_0 considerando la Ecuación (6.23) y modificando el conjunto factible $D_{\mathbf{x}}$. Contar con una metodología que permita obtener el parámetro r_0 representa un avance vital para poder utilizar datos de presión-diámetro obtenidos de forma no invasiva como los que está obteniendo actualmente el grupo CUiiDARTE.

Capítulo 7

Resultados de modelado fraccional

En este capítulo se valida y aplica el método de caracterización de parámetros viscoelásticos presentado en el capítulo anterior. También se obtienen resultados sobre su aplicación al modelado del comportamiento constitutivo de tejido arterial. En la Sección 7.1 se resuelven diferentes ejemplos utilizando datos sintéticos con el objetivo de validar el método de identificación, así como también buscar una relación entre los modelos utilizados para generación de los datos y el parámetro fraccional α . Luego en la Sección 7.2 se realiza la caracterización usando datos obtenidos experimentalmente utilizando tejido arterial de ovejas.

Sobre los códigos y computadora usada Para la resolución de los problemas de optimización se aplica la función `sqp` del paquete de optimización de la herramienta numérica libre GNU-Octave (Eaton et al., 2015). También se utiliza la función `lsqnonneg` para la obtención del punto inicial como solución del problema de mínimos cuadrados descrito en el capítulo anterior. Los códigos fueron implementados por el autor y los problemas fueron resueltos utilizando un computador con un procesador Intel i7 y 8GB de memoria RAM.

Medidas de error Para medir la diferencia entre la función de deformación dada por el modelo luego de la caracterización ε y la deformación medida $\bar{\varepsilon}$, se define un error relativo utilizando la norma L_2 en el espacio de funciones $\varepsilon(t)$ definidas en el intervalo $[0, T_m]$, denotado por $L_2([0, T_m])$. La expresión del

error está dada por:

$$\text{Error}_\varepsilon = \frac{\|\varepsilon - \tilde{\varepsilon}\|_{L_2([0, T_m])}}{\|\tilde{\varepsilon}\|_{L_2([0, T_m])}} = \frac{\sqrt{\int_0^{T_m} |\varepsilon(t) - \tilde{\varepsilon}(t)|^2 dt}}{\sqrt{\int_0^{T_m} |\tilde{\varepsilon}(t)|^2 dt}}. \quad (7.1)$$

donde T_m es un instante de tiempo positivo.

7.1. Ejemplos utilizando datos Artificiales

En esta sección se resuelven tres ejemplos utilizando datos generados de forma sintética con un objetivo diferente en cada uno. En el Ejemplo 1 se verifica que el método de caracterización funciona correctamente incluso al utilizar datos con errores. Luego en el Ejemplo 2 se aplica el modelo fraccional propuesto al modelado de datos generados utilizando un modelo constitutivo de mayor complejidad que el FSLs. En el Ejemplo 3 el método de caracterización es aplicado a datos generados utilizando un modelo SLS considerando los términos inerciales en las ecuaciones de balance mecánico.

7.1.1. Ejemplo 1 - Datos FSLs

En este ejemplo se aplica el método de caracterización a datos de tensión y deformación generados artificialmente utilizando el modelo FSLs descrito en la Sección 6.1.3 considerando tres niveles de error diferentes. Se desea saber si la implementación del método de caracterización obtiene los parámetros utilizados para generar los datos incluso en presencia de error de bajo nivel.

Los valores de deformación que consideraremos como valores de referencia se producen utilizando la siguiente ecuación:

$$\varepsilon^r(t) = \varepsilon_{0c} + \sum_{k=1}^2 \varepsilon_{kc} \cos(\lambda_k t) + \varepsilon_{ks} \sin(\lambda_k t), \quad (7.2)$$

donde las frecuencias son $\lambda_k = 2\pi \frac{6}{5} k$ rad/seg, y las amplitudes son $\varepsilon_{0c} = 0.15$, $\varepsilon_{1c} = 0.075$, $\varepsilon_{1s} = 0.025$, $\varepsilon_{2c} = 0.3\varepsilon_{1c}$ y $\varepsilon_{2s} = 0.3\varepsilon_{1s}$. Los valores de tensión σ^r se calculan utilizando el modelo FSLs, con los siguientes parámetros mecánicos: $E = 1000$ Pa, $\tau_\varepsilon = 0.1$ s $^\alpha$, $\tau_\sigma = 0.01$ s $^\alpha$ y $\alpha = 0.64$ ($\varepsilon_0 = 0$). La adición de ruido a los datos se realiza utilizando un procedimiento similar al usado en (Lewandowski and Chorążyczewski, 2010) a través de la siguiente

expresión:

$$\bar{\varepsilon}(t) = \varepsilon^r(t) + v(t)\xi\sqrt{\text{var}(\varepsilon^r)}, \quad \bar{\sigma}(t) = \sigma^r(t) + w(t)\xi\sqrt{\text{var}(\sigma^r)}, \quad (7.3)$$

donde $v(t)$ y $w(t)$ son valores aleatorios con una distribución normal estándar y ξ es el nivel de ruido. Tres conjuntos de datos son generados, el primero sin error introducido mientras que para el segundo y tercer conjunto se utiliza $\xi = 1\%$ y $\xi = 2\%$ respectivamente. De esta forma se obtiene lo que se utilizará como valores “medidos” de tensión y deformación.

El método de caracterización se aplica para cada valor α en el conjunto S_α asociado al intervalo $I_\alpha = [0.2, 1]$ con un paso $\Delta\alpha = 0.005$. Para valores inferiores a 0.2 el problema pasa a estar mal condicionado, llevando a errores numéricos. El mal condicionamiento se puede observar en el caso $\alpha \approx 0$, en el cual el modelo es puramente elástico y deja de existir una solución única del problema, obteniendo así un problema mal puesto según la definición presentada en la Sección 2.4.1.

Para apreciar de forma gráfica los datos medidos y los generados con los parámetros provistos por la identificación, en la Figura 7.1 a la izquierda se muestra la histéresis obtenida utilizando la deformación dada por el modelo con los parámetros mecánicos óptimos (cruces) y la histéresis producida con la primer serie de datos (círculos). En la misma figura a la derecha se puede ver las

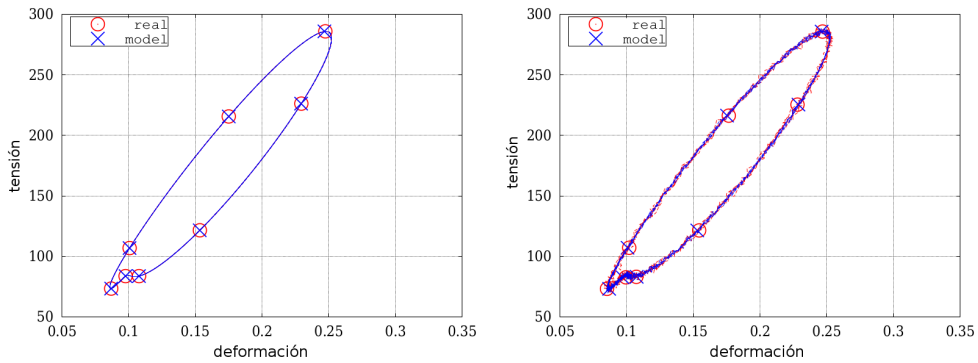


Figura 7.1: Resultados de Ejemplo 1: histéresis obtenida usando datos sin error (izquierda) y con error (derecha).

histéresis respectivas obtenidas al utilizar los datos con ruido correspondientes a $\xi = 2\%$. Vemos que la histéresis es correctamente reproducida aún ante datos con error.

Se presentan a continuación los resultados numéricos de la identificación. Dado que el error introducido en los datos es de naturaleza aleatoria, se generan datos y se resuelve cinco veces. En la Tabla 7.1 se presenta el intervalo que incluye a los valores obtenidos para cada parámetro del modelo. Para todos

Parámetro	Solución	Datos 1	Datos 2	Datos 3
ε_0 (10^{-4})	0	0.1613	$[-20.71, 7.67]$	$[-17.83, 1.6]$
E (kPa)	1.0	1.00003	$[0.9863, 1.0049]$	$[0.9880, 1.0008]$
τ_ε (s^α)	0.1	0.0998	$[0.0985, 0.1047]$	$[0.0992, 0.1049]$
τ_σ (s^α)	0.01	0.0099	$[0.0067, 0.0114]$	$[0.005, 0.013]$
α	0.64	0.64	$[0.615, 0.65]$	$[0.62, 0.65]$
Objetivo (10^{-9})		1.208	$[65.28, 149.5]$	$[208.69, 433.51]$
Error (10^{-4})		2.804	$[37.87, 38.91]$	$[74.79, 76.07]$

Tabla 7.1: Resultados de Ejemplo 1, valores promedio de cinco conjuntos de datos generados para cada error.

los parámetros, exceptuando el τ_σ , el error es del orden del ruido introducido. El error del parámetro fraccional en los datos sin ruido está asociado a la precisión utilizado en la búsqueda, en este caso es 0.005 lo cual representa un error por debajo de 0.7%. Es importante señalar también que la deformación de referencia ε_0 obtenida por el método se puede despreciar respecto a los valores de deformación de la señal $\bar{\varepsilon}$.

En la Figura 7.2 se muestra el gráfico de los valores de la función objetivo (*fitness*) obtenidos al realizar la caracterización para cada valor $\alpha \in S_\alpha$ para las tres series de datos. El gráfico en escala logarítmica muestra que, para el ejemplo resuelto, el parámetro α puede ser identificado claramente por el método de caracterización aún en presencia de error y que no existen otros mínimos locales respecto a α .

Conclusiones preliminares

Se concluye que la implementación del método funciona correctamente ya que los valores obtenidos al utilizar los datos sin ruido, tienen una precisión adecuada. Por otra parte, vemos que al adicionar error a los datos el método sigue siendo capaz de caracterizar de forma adecuada el parámetro fraccional. En los siguientes ejemplos someteremos el método a otros tipos de datos.

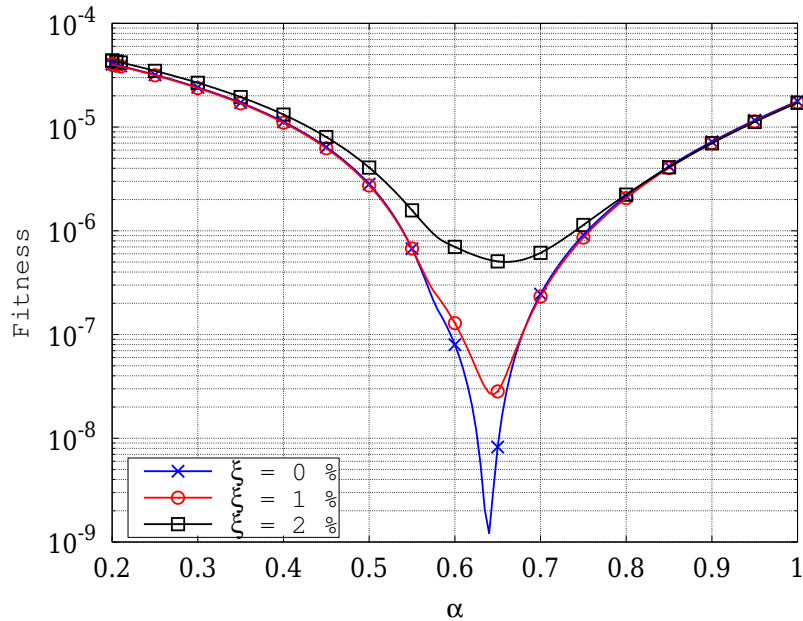


Figura 7.2: Gráfico de función objetivo (*Fitness*) del óptimo para cada valor $\alpha \in S_\alpha$ para Ejemplo 1.

7.1.2. Ejemplo 2 - Datos DMW

En este ejemplo se desea valorar la capacidad del modelo FSLs de representar el comportamiento de modelos viscoelásticos complejos compuestos por varios resortes y amortiguadores. Para esto, el método de caracterización es aplicado utilizando datos de tensión y deformación generados artificialmente con el modelo DMW descrito en la Sección 2.2.1. El modelo DMW es escogido dado que es uno de los modelos complejos utilizados en la literatura reciente para modelar el comportamiento de tejidos biológicos. En particular en (Wang et al., 2013) se utiliza dicho modelo para reproducir el comportamiento constitutivo de hígado y bazo porcino.

Para la generación de datos se utilizan parámetros mecánicos obtenidos en el trabajo mencionado anteriormente. El primer conjunto de datos se genera utilizando los parámetros obtenidos para modelar el comportamiento de la muestra de bazo porcino, los valores son $E_0 = 1.22$ kPa, $E_1 = 1.03$ kPa, $\eta_1 = 2.44$ kPa s, $E_2 = 0.66$ kPa y $\eta_2 = 38.22$ kPa s. El segundo conjunto de datos corresponde a hígado porcino y los parámetros son $E_0 = 3,53$ kPa, $E_1 = 7,74$ kPa, $\eta_1 = 21.81$ kPa s, $E_2 = 5.62$ kPa y $\eta_2 = 410.81$ kPa s. En ambos casos se considera $\varepsilon_0 = 0$.

La deformación solución se genera utilizando el mismo procedimiento que en el Ejemplo 1 y en este caso se considera una tercera frecuencia, para la cual los parámetros son $\varepsilon_{3c} = 0.1\varepsilon_{1c}$ y $\varepsilon_{3s} = 0.1\varepsilon_{1s}$, con $\lambda_3 = 1.8 \times 2\pi \times 3$. Además, vamos a considerar un factor de 10^{-3} para las amplitudes de tensión, así como para las frecuencias y la frecuencia de muestreo. Estos datos de deformación y el modelo DMW proporcionan valores de tensión en el mismo orden de los obtenidos en los procedimientos experimentales realizados en (Wang et al., 2013). En este ejemplo los datos no son contaminados con error, ya que se centra el análisis en la diferencia de los modelos viscoelásticos.

Con el fin de comparar los resultados obtenidos al identificar usando el modelo FSLs con el *spring-pot* y con el elemento de HOSP, llevamos a cabo la caracterización teniendo en cuenta el parámetro fraccional en los intervalos $I_\alpha^1 = [0, 1]$ e $I_\alpha^2 = [0, 2]$. Los resultados obtenidos se presentan en la Tabla 7.2.

Parámetro	Datos 1 (bazo)		Datos 2 (hígado)	
	I_α^1	I_α^2	I_α^1	I_α^2
$\varepsilon_0 (10^{-6})$	2.18	6.66	9.97	24.48
E (Pa)	1,238	1,277	3,780	4,218
$\tau_\varepsilon (s^\alpha)$	90.73	121.53	183.71	229.15
$\tau_\sigma (s^\alpha)$	57.25	80.58	70.99	101.63
α	1	1.0775	1	1.0865
Objetivo (10^{-7})	14.96	2.48	44.78	8.61
Error (10^{-4})	17.061	7.62	29.91	14.64

Tabla 7.2: Resultados de Ejemplo 2

Podemos ver que para ambos conjuntos de datos, el uso del elemento de HOSP reduce el error en un 50%. Nos concentraremos en el análisis del parámetro α obtenido y remarcamos que no se buscará relacionar los parámetros mecánicos obtenidos con los parámetros mecánicos usados para generar los valores de tensión artificiales.

En la Figura 7.3 se muestran los valores óptimos de la función objetivo obtenidos para los valores de α en el intervalo $[0.3, 1.6]$ con $\Delta = 0.0025$ para ambas series de datos, donde los valores rojos (círculos) representan la función objetivo obtenida para los datos utilizando los parámetros correspondientes a hígado porcino, y el azul (cruces) los parámetros de bazo porcino.

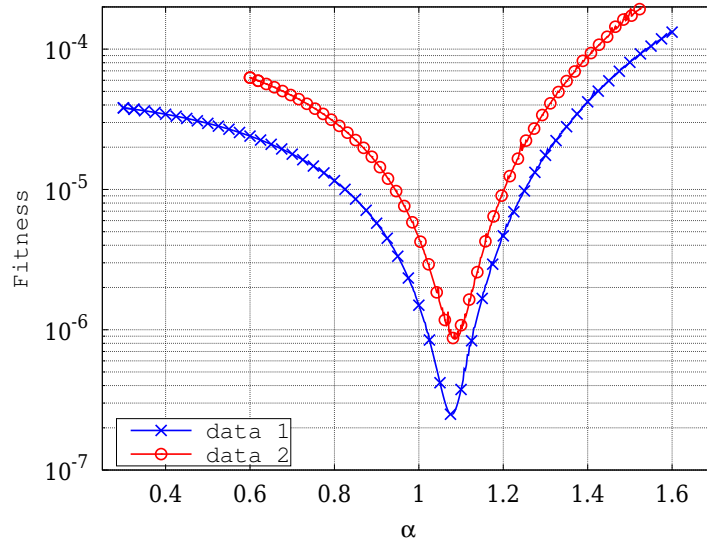


Figura 7.3: Resultados de Ejemplo 2, gráfica de valores óptimos de función objetivo (*Fitness*) con $\alpha \in [0.3, 1.6]$.

Se puede apreciar que el uso del elemento HOSP, proporciona un mejor ajuste, es decir, un menor valor de la función objetivo para ambas series de datos DMW. En ambos casos el α óptimo es mayor a 1, por lo que el elemento HOSP representa una mejora.

Conclusiones preliminares

Como conclusión preliminar se puede decir que el uso del elemento HOSP mejora la capacidad del modelo FSLS de reproducir el comportamiento de un material asociado al modelo DMW. Dado que en (Wang et al., 2013) se concluye que los modelos DMW son apropiados para el modelado del comportamiento de los tejidos de órganos de porcinos, a partir de los resultados se concluye, de forma indirecta, que la utilización del elemento HOSP permite mejorar el ajuste provisto por modelos simples al ajuste de datos de tejidos biológicos.

7.1.3. Ejemplo 3 - Datos SLS dinámico

En este ejemplo se busca investigar el efecto de la aproximación usualmente considerada de cargas quasi-estáticas sobre los parámetros obtenidos al identificar, en particular el valor del parámetro fraccional identificado. Para realizar

esto se generan datos de presión y diámetro correspondiente a un cilindro de pared delgada formado por un material SLS sometido a presión interna considerando los términos inerciales en las ecuaciones de balance. Las ecuaciones correspondientes a dicho modelo fueron descritas en la Sección 6.2.3. Luego se realiza la caracterización con el modelo FSLS quasi-estático. Se analiza particularmente el efecto producido en el parámetro α , buscando una posible relación entre un elevado valor de α y la densidad del sólido ρ .

La función de deformación es generada usando el mismo procedimiento del Ejemplo 2, para luego generar valores de tensión usando el modelo SLS con parámetros $E = 580 \text{ kPa}$, $\tau_\varepsilon = 0.06 \text{ s}$, $\tau_\sigma = 0.01 \text{ s}$ y $\varepsilon_0 = 0$. Las amplitudes y frecuencias son multiplicadas por un factor de 10^3 para obtener magnitudes en el orden de los datos experimentales que utilizaremos en el siguiente ejemplo.

A partir de los datos de deformación y tensión, obtenemos valores de presión y diámetro correspondiente utilizando la Ecuación (6.28) considerando $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$. De esta forma obtenemos valores de presión y diámetro similares a los que se producirían en arterias durante el ciclo cardíaco. Se generan tres conjuntos de datos con diferentes valores de densidad $\rho = \beta \times 1000 \text{ kg/m}^3$ con β : 1, 5000 y 10000. La geometría del cilindro es determinada por $r_0 = 9.3 \text{ mm}$ y espesor $h = 0.1 r_0$.

Para aplicar el método de caracterización los valores de presión y diámetro son convertidos a tensión deformación despreciando los términos inerciales de las ecuaciones, es decir, utilizando las siguientes expresiones:

$$\sigma_\theta = \frac{p r}{h}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{r - r_0}{r_0}. \quad (7.4)$$

Para la caracterización se considera el S_α dado por el intervalo $[0.6, 1.9]$ y paso $\Delta\alpha = 0.005$.

Los parámetros obtenidos al realizar la caracterización con cada conjunto de datos son presentados en la Tabla 7.3. Vemos que cuando $\beta = 1$ el ajuste de la función de deformación es muy bueno, y los parámetros mecánicos son identificados con un error relativamente bajo, por lo que podemos afirmar que para la densidad considerada es razonable despreciar los términos inerciales. Al aumentar el valor de β el error aumenta hasta llegar a 2 %, de todas formas para lograr este ajuste se modifica el valor de α al igual que los otros parámetros.

El gráfico de los valores óptimos de la función objetivo para los $\alpha \in S_\alpha$ es mostrado en la Figura 7.4. Podemos ver que el valor de densidad ρ tiene un

Parámetro	Solución	$\beta = 1$	$\beta = 5000$	$\beta = 10000$
$\varepsilon_0 (10^{-4})$	0	0.0371	46.98	161.17
E (kPa)	580	579.97	597.01	646.11
$\tau'_\varepsilon (s^\alpha)$	0.06	0.0599	0.0372	0.0224
$\tau'_\sigma (s^\alpha)$	0.01	0.00996	0	0
α	1	1	1.1	1.315
Fitness (10^{-9})	-	3.042	68459	329440
Error (10^{-4})	-	4.814	113.11	248.07

Tabla 7.3: Resultados de Ejemplo 3.

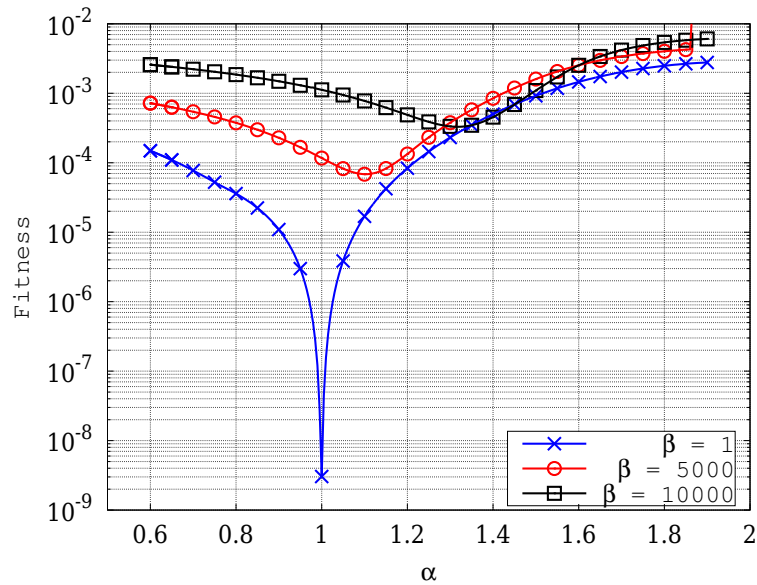


Figura 7.4: Resultados de Ejemplo 3, gráfico de valores de la función objetivo (*Fitness*).

efecto sobre el valor de α únicamente para valores elevados de β . Esto también permite establecer que, para el ejemplo considerado, es razonable despreciar los términos inerciales de las ecuaciones de balance. Esto es coherente con los resultados presentados en (Formaggia et al., 2003).

Por último se muestran los gráficos de las histéresis obtenidas al utilizar el modelo con el elemento *spring-pot* y el HOSP para identificar los datos de $\beta = 10000$. En la Figura 7.5 a la izquierda se muestra la histéresis obtenida con los parámetros correspondientes a la caracterización con el *spring-pot* ($\alpha = 1$) y a la derecha se ve la histéresis para $\alpha = 1.315$ (solución obtenida con el

HOSP). Se observa que el uso del HOSP mejora el ajuste de los datos.

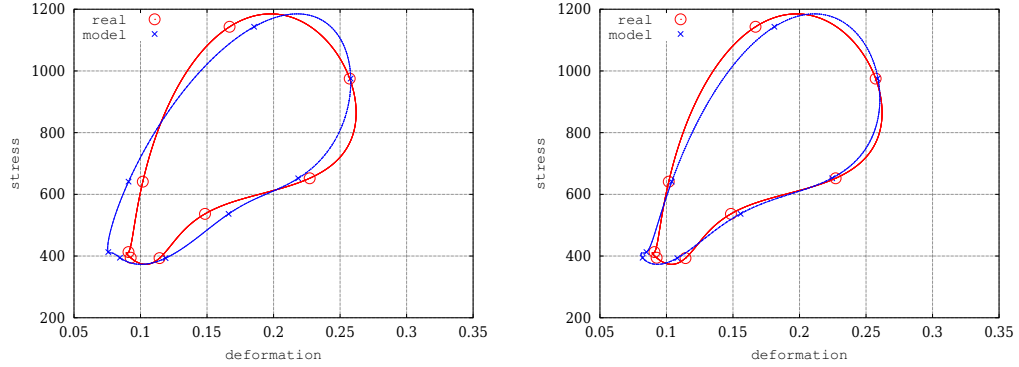


Figura 7.5: Resultados de Ejemplo 3 histéresis obtenidas usando datos correspondientes a $\beta = 10000$, identificación usando modelo con *spring-pot* (izquierda) y usando elemento HOSP (derecha).

Conclusiones preliminares

La primer conclusión importante que se obtiene es que los términos inerciales pueden ser despreciados cuando los parámetros del problema están en el orden de los considerados en este ejemplo, los cuales en algunos casos son similares a los asociados a problemas de arterias durante el ciclo cardíaco. También se puede asegurar que para los modelos considerados, el valor de ρ debe ser varios órdenes superior al valor de referencia para modificar el valor de α identificado de forma sustancial. Los resultados de este ejemplo serán tenidos en cuenta al resolver el siguiente problema.

Otro comportamiento complejo que no fue considerado en la caracterización es la interacción de la pared con el fluido. Dado que este efecto de interacción fluido estructura existe en el fenómeno de circulación sanguínea y la deformación arterial, se debe estudiar cómo el hecho de no considerar este fenómeno en la caracterización, puede afectar tanto el parámetro fraccional como los parámetros mecánicos del modelo. Este tema será abordado en trabajos futuros.

7.2. Ejemplo 4 - Modelado comportamiento pared arterial

Dado que nuestro interés se centra en el modelado del comportamiento de la pared arterial, en este ejemplo vamos a realizar la caracterización utilizando datos obtenidos a partir de procedimientos experimentales aplicados a arterias.

Los datos utilizados en este ejemplo fueron obtenidos por integrantes de CUiiDARTE y forman parte de los datos presentados en (Valdez-Jasso et al., 2009). En el citado artículo se presentan datos de presión y diámetro de distintos segmentos de arterias del sistema arterial de 11 ovejas saludables. En este trabajo utilizaremos datos correspondientes a un segmento de Aorta Ascendente y otro segmento de Aorta Torácica. En la Figura 7.6 se muestra un esquema del sistema arterial ovino, útil para identificar los distintos segmentos utilizados. A la izquierda se ubica la cabeza, mientras que a la derecha se ob-

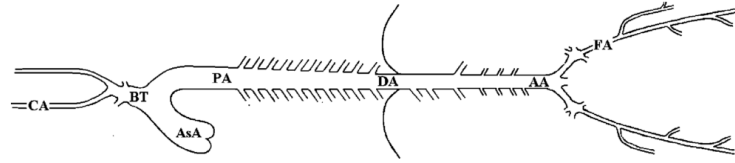


Figura 7.6: Esquema de sistema arterial ovino (Valdez-Jasso et al., 2009).

servan las ramificaciones correspondientes a las extremidades inferiores. En la figura, los segmentos que utilizaremos corresponden a AsA (Aorta Ascendente) y al intervalo ubicado entre PA y DA. Comenzaremos con el segmento AsA.

Teniendo en cuenta que para el vaso estudiado aquí se puede suponer $h/r \approx 0.1$, donde h es el espesor y el r es el radio medio de la arteria, se puede utilizar un modelo similar al usado en (Valdez-Jasso et al., 2009) y calcular la tensión y deformación tangencial según las expresiones para tubos de paredes delgadas

$$\sigma_{\theta} = \frac{p r}{h}, \quad \varepsilon_{\theta} = \frac{r - r_0}{r_0}, \quad (7.5)$$

donde p es la presión interna y r el radio medio. Las componentes radial y axial de la tensión se desprecian según Fung (1981); Armentano et al. (1995). Los datos presión-diámetro fueron obtenidos con una frecuencia de muestreo de 200 Hz, y son convertidos a valores de deformación y tensión teniendo en

cuenta el radio de referencia $r_0 = 9.7$ mm . La presión se expresa en milímetros de mercurio.

Dado que el procedimiento *in-vitro* lo permite, en este caso el radio r_0 fue medido. De todas formas en aplicaciones del método a datos obtenidos utilizando procedimientos no invasivos este parámetro debe ser identificado. Es por esto que también aplicaremos un método de identificación apropiado para este fin.

La caracterización se realizó utilizando los dos intervalos $I_\alpha^1 = [0, 1]$ y $I_\alpha^2 = [0, 2]$, y el paso para α se consideró $\Delta\alpha = 0.001$. También se aplica un método de caracterización para identificar parámetros del modelo descrito en la Sección 6.2.2 del cual r_0 es un parámetro. Los resultados se presentan en la Tabla 7.4. En la columna $I_2 - r_0$ se muestran los parámetros obtenidos al

Variable	$I_\alpha^1 = [0, 1]$	$I_\alpha^2 = [0, 2]$	$I_2 - r_0$
E (kPa)	773.3	1037.9	1056.7
$\varepsilon_0(10^{-2})$	-2.32	2.98	-
$\tau'_\varepsilon(10^{-3}s^\alpha)$	3.3	7.6	7.74
$\tau'_\sigma(10^{-3}s^\alpha)$	6.97	2.85	1.91
α	1.0	1.644	1.651
r_0 (mm)	-	-	9.66
Error (10^{-2})	4.55	2.31	0.42
Objetivo (10^{-4})	9.33	1.06	0.034

Tabla 7.4: Resultados de Ejemplo 4, usando datos de Aorta Ascendente.

utilizar el modelo fraccional con el elemento HOSP y r_0 no conocido.

Podemos observar que, al igual que en el ejemplo anterior, el uso del elemento HOSP ($I_\alpha = [0, 2]$) reduce el error en un 50 %. También se destaca que el método de caracterización con r_0 desconocido obtiene satisfactoriamente el valor de r_0 considerando los errores presentes en los datos.

Se debe mencionar que estos parámetros mecánicos fueron obtenidos al utilizar datos producidos al someter la arteria a una presión periódica con una frecuencia fundamental marcada. Esta frecuencia depende del ciclo cardíaco, por lo que en distintos pacientes se podrían tener datos con diferente frecuencia fundamental. Se deberá estudiar cómo los parámetros viscoelásticos pueden variar respecto al cambio de frecuencia cardíaca en una misma arteria.

En la Figura 7.7 a la izquierda podemos ver la histéresis obtenida en el óptimo con I_α^1 , en donde los datos experimentales son mostrados con color

rojo (círculos) y los datos del modelo con color azul (cruces). A la derecha se muestran los resultados para $I_\alpha^2 = [0, 2]$, donde se demuestra la mejora en el ajuste.

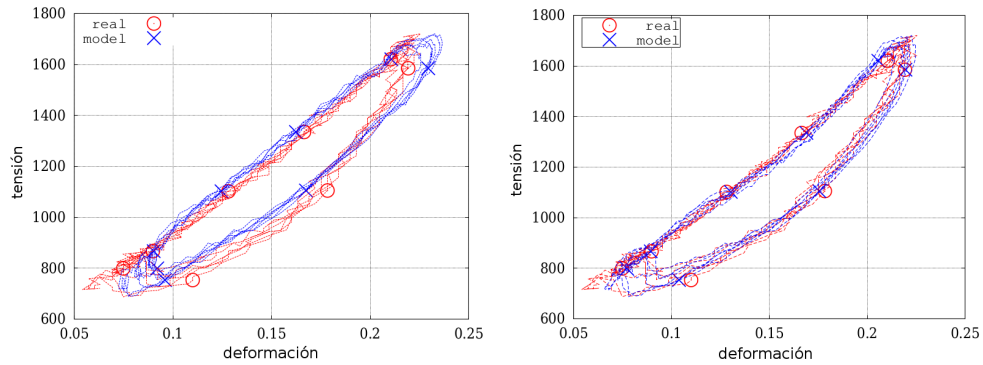


Figura 7.7: Resultados de Ejemplo 4, histéresis obtenidas experimental y de modelo usando I_α^1 (izquierda) y I_α^2 (derecha).

En la Figura 7.8 podemos ver la gráfica de valores óptimos de la función objetivo para todo α en el intervalo $[0.5, 1.9]$. Apreciamos que el valor de α más

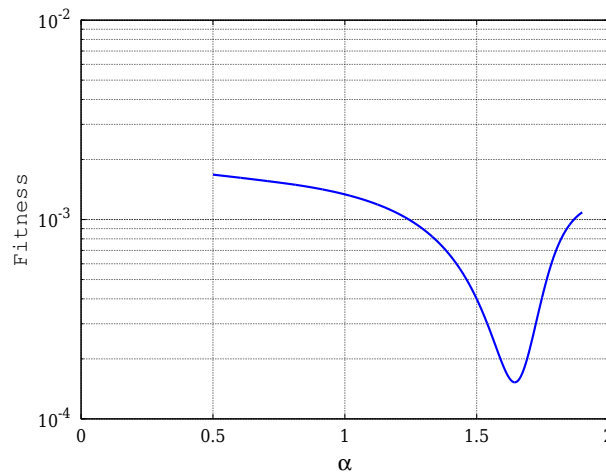


Figura 7.8: Resultados de Ejemplo 4, gráfico de valores óptimos de función objetivo.

adecuado para modelar el comportamiento es indudablemente el valor provisto por el método ya que el gráfico de la función objetivo tiene un único mínimo local en el intervalo S_α .

El comportamiento visto para la Aorta Ascendente es repetido también para un segmento de Aorta Torácica, para el cual se obtienen las histéresis que se muestran en la Figura 7.9. La histéresis del modelo se representa con trazo

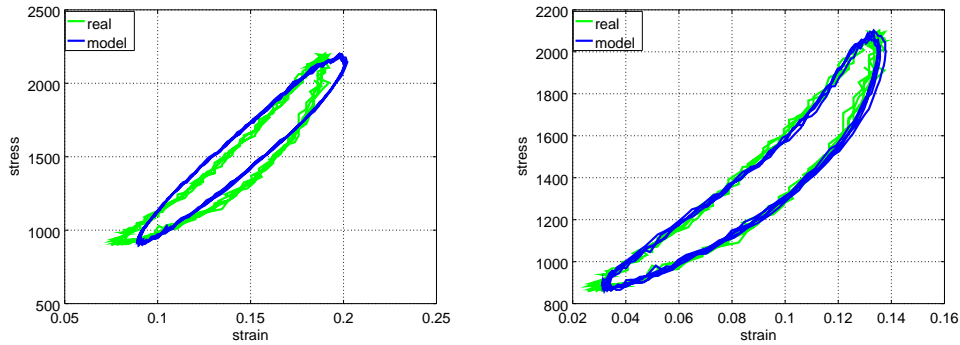


Figura 7.9: Resultados de Ejemplo 4, histéresis experimental y de modelo obtenidas para Aorta Torácica para I_α^1 (izquierda) y para I_α^2 (derecha).

azul y los datos experimentales en verde. A la izquierda se ve las histéresis obtenidas usando el elemento *spring-pot* y a la derecha utilizando el HOSP. Se utilizó el modelo de ajuste con r_0 desconocido y en cada caso se obtiene un valor r_0 diferente por lo que las deformaciones asociadas al movimiento son claramente diferentes. Se ve que el ajuste en este caso es mejorado notoriamente al usar el HOSP.

Conclusiones preliminares

Observando los resultados se confirma que el uso del elemento HOSP permite modelar con menor error el comportamiento mecánico del tejido arterial ovino. También se concluye que el método de caracterización obtiene de forma precisa el valor r_0 , lo cual representa un resultado vital para continuar la aplicación a datos obtenidos de forma no invasiva en humanos.

Considerando el método propuesto se destaca que para poder utilizar datos obtenidos en humanos se deberá contar con datos de presión y diámetro medidos de forma simultanea, por lo que esto establece una recomendación concreta para modificar los procedimientos aplicados actualmente.

Estudios más completos deben ser realizados para encontrar correlaciones entre el valor de α y las características fisiológicas de las arterias. Entre los trabajos futuros asociados a α se destaca el estudio de la hipótesis de pequeñas deformaciones considerada al realizar el ajuste.

Parte IV

Conclusión

Capítulo 8

Conclusiones

En este capítulo se desarrollan las conclusiones obtenidas a partir de los resultados presentados a lo largo del texto. Se comienza enumerando conclusiones asociadas al problema de identificación no homogénea, para luego pasar a la discusión y exposición de las conclusiones correspondientes al modelado viscoelástico fraccional. Finalmente se describen diversas líneas de trabajo a continuar, en algunos casos detallando pasos a seguir a corto plazo o siendo ejecutados actualmente.

Identificación no homogénea

Fueron presentadas tres nuevas formulaciones para el Problema de Identificación de Material a partir de datos de campo completo de desplazamientos. Las primeras dos formulaciones, llamadas CPCEG y CDCEG consisten en problemas de optimización cónica de segundo orden, mientras que la tercera, llamada QPCEG consta de un problema de optimización cuadrática. Las tres están basadas en problemas de optimización convexa, lo cual, como fue mostrado, permite el uso de algoritmos muy eficientes para su resolución. Utilizando estas nuevas formulaciones se obtuvo una considerable reducción del tiempo de resolución respecto a implementaciones de las formulaciones utilizadas en la actualidad.

Fue mostrado que todas las formulaciones propuestas son compatibles con la utilización de regularización del tipo Variación Total. Una metodología para la aplicación de dicha técnica de regularización fue descrita e implementada, junto con una estrategia para la selección automática del coeficiente de regularización α_R .

La formulación CPCEG fue desarrollada a partir del destacado método de la literatura CEGM, heredando sus propiedades teóricas positivas. Esto fue confirmado al resolver el Ejemplo 1, donde se observó que la CPCEG obtiene los mismos errores que la NPCEG en tiempos considerablemente menores que la NPCEG y la NPQED. La formulación QPCEG fue obtenida a través de una modificación en el CEGM, de todas formas, a pesar de no haber resultados teóricos respaldando su utilización, se observa que produce resultados de calidad similar a los de la CPCEG en tiempos aún menores.

Fue observado también que las formulaciones CPCEG y QPCEG permiten resolver el PIM al considerar errores aleatorios y errores debido a interpolación en los campos de desplazamientos. Analizando los resultados del Ejemplo 2 se concluye que la formulación QPCEG logra resolver problemas de mayor tamaño que la CPCEG aunque con un error en la solución ligeramente superior que la CPCEG. Esto coloca a la QPCEG como una buena alternativa aunque deben ser obtenidos resultados teóricos en trabajos futuros previo a su eventual aplicación en problemas reales.

La formulación CDCEG es equivalente a la CPCEG, tal como es observado viendo los resultados del Ejemplo 3. De todas formas existen diferencias en los resultados numéricos al resolver utilizando Sedumi: la CDCEG requiere un tiempo 20% menor cuando logra resolver el problema, aunque para un caso no fue posible para la formulación CDCEG obtener una distribución con error aceptable. Esto es explicado por diferencias de precisión en variables primales y duales, de todas formas se deberá estudiar estos aspectos en profundidad antes de continuar la aplicación de esta formulación. A pesar de esto los resultados son prometedores por lo que debe ser una formulación a tener en cuenta a futuro.

Los resultados del Ejemplo 4 muestran que la geometría de la sección arterial con alto porcentaje de estenosis representa un problema desafiante para los mejores métodos de identificación. Se comprueba que cuando los elementos son agrupados la identificación obtenida es satisfactoria incluso sin utilizar regularización. Por otra parte, cuando no se utiliza dicho agrupamiento resulta dificultoso obtener una solución aceptable en todo el dominio para un único valor del coeficiente de regularización α_R . Finalmente, aplicando la formulación para tres campos de desplazamientos se muestra que es posible disminuir de forma considerable el error en la solución con un aumento del costo computacional despreciable.

Al utilizar campos de desplazamientos obtenidos a través del procesamiento de imágenes se observó que es posible identificar geometrías e inclusiones en los problemas considerados aunque el error en los campos de desplazamientos, afecta el valor de las propiedades mecánicas de dichas inclusiones.

Tomando en cuenta los resultados del Ejemplo 4 y 5 se obtiene como recomendación que el abordaje adecuado para la resolución de problemas de identificación con datos obtenidos procesando imágenes de secciones transversales de arterias (IVUS), debería contemplar el uso de varios campos de desplazamientos. Esto lograría reducir el efecto negativo del error en los datos y aplacar la dificultad asociada a una geometría arterial.

Finalmente en el Ejemplo 6 se mostró que la formulación CPCEG permite identificar información importante de la solución incluso cuando el material es sometido a grandes deformaciones y no se cuenta con información sobre la geometría de la inclusión a identificar.

Modelado fraccional

Respecto al problema del modelado del comportamiento viscoelástico, en este trabajo fue presentado un nuevo elemento viscoelástico fraccional llamado HOSP, el cual permitió la definición de un nuevo modelo viscoelástico fraccional. Un método para la caracterización de parámetros mecánicos de los modelos viscoelásticos fraccionales fue desarrollado e implementado. El método consiste en la resolución de un problema de optimización a partir de datos de deformación y tensión (o presión y diámetro para el caso de arterias).

En esta parte de la tesis cuatro ejemplos numéricos fueron resueltos, de los cuales en tres se utilizaron datos generados de forma sintética y en el ejemplo final se utilizaron datos obtenidos a través de procedimientos experimentales. Los resultados obtenidos en el primer ejemplo permiten concluir que el método de caracterización propuesto es adecuado para la determinación precisa de parámetros constitutivos de modelos viscoelásticos fraccionales, incluido el parámetro fraccional α , incluso si los datos tienen un error de nivel moderado.

En el segundo ejemplo el método fue aplicado a datos generados usando un modelo DMW, pudiendo observar que la utilización del elemento HOSP provee, a los modelos viscoelásticos, la capacidad de simular comportamientos constitutivos complejos con mayor precisión respecto a modelos existentes. Los parámetros constitutivos utilizados para generar los datos en este ejemplo

fueron obtenidos de la literatura reciente, siendo apropiados para modelar el comportamiento de tejido de bazo e hígado porcino. Esto permite concluir, de forma indirecta, que el elemento HOSP permite reproducir con menor error el comportamiento de tejidos biológicos.

En el Ejemplo 3 se utilizaron datos correspondientes a un cilindro sometido a presión interna. Los resultados muestran que, para geometrías y valores de densidad en el orden de los de arterias, se puede obtener un modelado aceptable aún sin considerar el término inercial. También se observó que al variar el valor ρ utilizado para generar los datos, el valor de α obtenido es incrementado notoriamente únicamente para valores muy elevados de ρ , descartando una correlación directa entre éstos parámetros. El resultado obtenido en este ejemplo habilita la aplicación del modelo viscoelástico fraccional quasi-estático propuesto al ajuste de datos obtenidos utilizando arterias.

Finalmente en el Ejemplo 4 se aplicaron dos métodos de caracterización a los datos de presión y diámetro obtenidos experimentalmente utilizando un procedimiento *in-vitro* a un segmento arterial ovino. Se observó que al utilizar el elemento HOSP en el modelo viscoelástico se mejoró significativamente la precisión del ajuste del modelo a los datos. También se aplicó el procedimiento de caracterización para determinar el radio r_0 , confirmando que dicho parámetro geométrico puede ser identificado a partir de datos obtenidos de forma no invasiva. Esto representa un resultado vital para la aplicación a datos en humanos.

Los resultados presentados permiten concluir que los modelos fraccionales viscoelásticos que incluyen el elemento HOSP permiten modelar comportamientos complejos con menor error que otros modelos viscoelásticos. También se concluye que la metodología de identificación propuesta e implementada permite identificar parámetros viscoelásticos y modelar el comportamiento de tejido arterial a partir de medidas de presión y diámetro obtenidos mediante procedimiento no invasivos.

Sugerencias sobre procedimientos no invasivos

Las conclusiones obtenidas permiten generar sugerencias sobre eventuales modificaciones de los procedimientos de obtención de datos de presión y diámetro, en caso de que se desee aplicar el método propuesto. Para poder identificar los parámetros de los modelos considerados se deben utilizar datos de presión

y diámetro medidos en puntos cercanos de forma tal que la presión registrada en el transductor pueda ser considerada igual a la presión donde se mide el diámetro para un mismo instante de tiempo. Por otra parte para cada valor de diámetro obtenido se debe conocer el valor de presión correspondiente, es decir que los valores deben ser medidos respecto a un instante de tiempo de referencia conocido.

Publicaciones realizadas

Las siguientes publicaciones fueron realizadas utilizando contenidos de la presente tesis.

Artículos en revistas

- J.M. Pérez Zerpa, A. Canelas, B. Sensale, D. Bia Santana, R.L. Armentano, Modeling the arterial wall mechanics using a novel high-order viscoelastic fractional element, *Applied Mathematical Modelling*, Volume 39, Issue 16, 15 August 2015, Pages 4767–4780.
- J.M. Pérez Zerpa, A. Canelas, Efficient formulations of the material identification problem using full-field measurements, *Computational Mechanics* (Aceptado doi:10.1007/s00466-016-1291-1).

Artículos en congresos

- J.M. Pérez Zerpa, A. Canelas, B. Sensale, D. Bia Santana, R.L. Armentano, A high-order viscoelastic fractional element applied to modeling ovine arterial wall behavior, *11th World Congress on Computational Mechanics (WCCM XI)*, Barcelona, 2014.
- G.D. Maso Talour, J.M. Pérez Zerpa, P.J. Blanco, A. Canelas, R.A. Feijóo, IVUS Image Conditioning for In-Vivo Characterization of Arterial Tissue, *VI International Conference on Computational Bioengineering*, Barcelona, 2015.
- J.M. Pérez Zerpa, A. Canelas, B. Sensale, D. Bia Santana, R. L. Armentano, Modelado de tejido arterial utilizando un elemento fraccional viscoelástico de orden superior , *XXI Congreso sobre Métodos Numéricos y sus Aplicaciones*, Bariloche, Argentina, 2014.

Presentaciones en otros eventos

- **Poster:** Caracterización de propiedades mecánicas en modelos arteriales, Segundas Jornadas de Biofísica, Facultad de Ciencias, Universidad de la República, 2013.
- **Poster:** Modelamiento computacional y caracterización de tejido arterial, Ingeniería de Muestra 2012.

Trabajos futuros

Existen diversas líneas de trabajo que pueden ser continuadas a futuro. Se comienza describiendo las resultantes del trabajo realizado en Identificación no homogénea.

Se debe extender y aplicar las formulaciones propuestas a la identificación en materiales con un comportamiento constitutivo más general, considerando diferentes propiedades del comportamiento de tejidos, como viscoelasticidad o elasticidad no lineal.

Tanto la extensión para modelos viscoelásticos como la de elasticidad no lineal, demandarán mayores recursos computacionales por lo que será necesario proponer nuevas formulaciones e implementar herramientas de alto desempeño utilizando los recursos con los que cuenta la Facultad de Ingeniería. También se buscará acoplar las herramientas de análisis y/o caracterización, con otros códigos de resolución de problemas en mecánica computacional, por ejemplo de mecánica de fluidos, permitiendo recorrer el camino que otros grupos han realizado y simular también la interacción fluido-estructura.

Aspectos teóricos de la formulación QPCEG deben ser abordados en trabajos futuros con el objetivo de obtener resultados que confirmen si los buenos resultados obtenidos pueden ser repetidos en otros problemas. Esta formulación también permite una alternativa interesante, que podría mejorar los resultados de la identificación. La misma consiste en ir realizando sucesivas identificaciones utilizando como distribución $\mathbf{E}^{(k)}$ la obtenida en la identificación anterior. En los ejemplos resueltos en esta tesis no se percibió una mejora notoria al utilizar esta formulación alternativa aunque sería necesario realizar estudios teóricos para analizar la convergencia y unicidad de solución desde un punto de vista formal.

Se trabajará en la mejora de los resultados obtenidos al utilizar desplaza-

mientos brindados por la técnica *Optical Flow*. Esto podría ser logrado utilizando varios campos de desplazamientos, así como también analizando posibles modificaciones a los términos de regularización del PIM y del OF. El buen desempeño del término CEG permite sugerir su utilización para obtener una formulación modificada del Optical Flow, siendo incluido como regularizador en dicha técnica. Utilizando el abordaje sugerido se podría resolver los problemas de OF y PIM de forma simultánea, lo que significaría un nuevo paradigma en la identificación no homogénea de propiedades.

Respecto al nuevo modelo fraccional propuesto se debe continuar con el análisis de los aspectos físicos, buscando relaciones entre distintos comportamientos complejos y el valor del parámetro fraccional identificado. Esto permitirá un mejor entendimiento del comportamiento de los tejidos a través del uso de modelos simples.

Finalmente se destaca que tanto el nuevo modelo fraccional como los métodos de identificación están comenzando a ser aplicados por otros integrantes del grupo MecSolCom en etapas formativas. Se buscará continuar en el estudio de los modelos fraccionales, en particular buscando modelar comportamientos viscoelásticos no lineales, fenómeno que el autor considera podría estar relacionado directamente con elevados valores de α en el HOSP.

También se buscará obtener una correlación entre los parámetros viscoelásticos provistos por los métodos de caracterización y los distintos indicadores mecánicos arteriales considerados a nivel clínico. Esto se realizará a través de la ejecución de un plan de trabajo de maestría aplicando los métodos presentados en esta tesis. Este posible resultado a corto plazo representaría la obtención de nuevas herramientas de diagnóstico, que permitirían aportar a la detección temprana de enfermedades cardiovasculares tanto en adultos como en niños.

Referencias bibliográficas

- Alizadeh, F. and Goldfarb, D. (2003). Second-order cone programming. *Mathematical Programming*, 95(1):3–51.
- Allam, M. and Zenkour, A. (2003). Bending response of a fiber-reinforced viscoelastic arched bridge model. *Applied Mathematical Modelling*, 27(3):233–248.
- Ambrosio, L., Fusco, N., and Pallara, D. (2000). *Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problem*. Oxford University Press, 1 edition.
- Anssari-Benam, A., Bucchi, A., and Bader, D. L. (2015). Unified viscoelasticity: Applying discrete element models to soft tissues with two characteristic times. *Journal of Biomechanics*, 48(12):3128–3134.
- Armentano, R. L., Barra, J., and Levenson, J. (1995). Arterial Wall Mechanics in Conscious Dogs Assessment of Viscous, Inertial, and Elastic Moduli to Characterize Aortic Wall Behavior. *Circulation Research*, 76(3):468–478.
- Auger, A., Hansen, N., Perez Zerpa, J. M., Ros, R., and Schoenauer, M. (2009). Experimental Comparisons of Derivative Free Optimization Algorithms. In *Lecture Notes in Computer Science*, volume 5526 LNCS, pages 3–15. Springer.
- Avolio, A. (2013). Arterial Stiffness. *Pulse*, 1(1):14–28.
- Avril, S., Badel, P., and Duprey, A. (2010). Anisotropic and hyperelastic identification of in vitro human arteries from full-field optical measurements. *Journal of Biomechanics*, 43(15):2978–2985.
- Avril, S., Bonnet, M., Bretelle, A.-S., Grédiac, M., Hild, F., Ienny, P., Latourte, F., Lemosse, D., Pagano, S., Pagnacco, E., and Pierron, F. (2008). Over-

- view of Identification Methods of Mechanical Parameters Based on Full-field Measurements. *Experimental Mechanics*, 48(4):381–402.
- Ayachit, U. (2015). *The ParaView Guide: A Parallel Visualization Application*. Kitware, Incorporated.
- Bagley, R. L. and Torvik, P. J. (1983). A Theoretical Basis for the Application of Fractional Calculus to Viscoelasticity.
- Bagley, R. L. and Torvik, P. J. (1986). On the Fractional Calculus Model of Viscoelastic Behavior. *Journal of Rheology*, 30(1):133.
- Banerjee, B., Walsh, T. F., Aquino, W., and Bonnet, M. (2013). Large scale parameter estimation problems in frequency-domain elastodynamics using an error in constitutive equation functional. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 253:60–72.
- Barbone, P. E. and Gokhale, N. H. (2004). Elastic modulus imaging: on the uniqueness and nonuniqueness of the elastography inverse problem in two dimensions. *Inverse Problems*, 20(1):283–296.
- Beck, A., Ben-Tal, A., and Tetrushvili, L. (2009). A sequential parametric convex approximation method with applications to nonconvex truss topology design problems. *Journal of Global Optimization*, 47(1):29–51.
- Belytschko, T., Liu, W. K., and Moran, B. (2000). *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*. Wiley.
- Ben Azzouna, M., Feissel, P., and Villon, P. (2015). Robust identification of elastic properties using the Modified Constitutive Relation Error. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 295:196–218.
- Ben-Tal, a. and Nemirovski, A. (1997). Robust Truss Topology Design via Semidefinite Programming. *SIAM Journal on Optimization*, 7(4):991–1016.
- Ben-Tal, A. and Nemirovski, A. (2001). *Lectures on modern convex optimization: analysis, algorithms, and engineering applications*. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Bia, D., Aguirre, I., Zócalo, Y., Devera, L., Cabrera Fischer, E., and Armentano, R. (2005). Regional differences in viscosity, elasticity, and wall

- buffering function in systemic arteries: pulse wave analysis of the arterial pressure-diameter relationship. *Revista española de cardiología (English ed.)*, 58(2):167–74.
- Bia, D. and Zócalo, Y. (2014). Rigidez arterial : evaluación no invasiva en la práctica clínica. *Revista Uruguaya de Cardiología*, 29(1):39–59.
- Bia, D., Zócalo, Y., Farro, I., Torrado, J., Farro, F., Florio, L., Olascoaga, A., Brum, J., Alallón, W., Negreira, C., Lluberas, R., and Armentano, R. L. (2011). Integrated Evaluation of Age-Related Changes in Structural and Functional Vascular Parameters Used to Assess Arterial Aging, Subclinical Atherosclerosis, and Cardiovascular Risk in Uruguayan Adults: CUiDARTE Project. *International journal of hypertension*, 2011:587303.
- Blanco, P. J., Ares, G. D., Urquiza, S. A., and Feijóo, R. A. (2015a). On the effect of preload and pre-stretch on hemodynamic simulations: an integrative approach. *Biomechanics and Modeling in Mechanobiology*.
- Blanco, P. J., Watanabe, S. M., Passos, M. A. R. F., Lemos, P. A., and Feijoo, R. A. (2015b). An Anatomically Detailed Arterial Network Model for One-Dimensional Computational Hemodynamics. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 62(2):736–753.
- Bonnet, M. and Constantinescu, A. (2005). Inverse problems in elasticity. *Inverse Problems*, 21(2):R1–R50.
- Bosetti, C., Bravi, F., Turati, F., Edefonti, V., Polesel, J., Decarli, A., Negri, E., Talamini, R., Franceschi, S., La Vecchia, C., and Zeegers, M. P. (2013). Nutrient-based dietary patterns and pancreatic cancer risk. *Annals of Epidemiology*, 23(3):124–128.
- Canelas, A., Laurain, A., and Novotny, A. A. (2014). A new reconstruction method for the inverse potential problem. *Journal of Computational Physics*, 268:417–431.
- Chandran, K., Mun, J., Choi, K., Chen, J., Hamilton, A., Nagaraj, A., and McPherson, D. (2003). A method for in-vivo analysis for regional arterial wall material property alterations with atherosclerosis: preliminary results. *Medical Engineering & Physics*, 25(4):289–298.

- Cito, S., Geers, a. J., Arroyo, M. P., Palero, V. R., Pallarés, J., Vernet, a., Blasco, J., San Román, L., Fu, W., Qiao, a., Janiga, G., Miura, Y., Ohta, M., Mendina, M., Usera, G., and Frangi, a. F. (2014). Accuracy and Reproducibility of Patient-Specific Hemodynamic Models of Stented Intracranial Aneurysms: Report on the Virtual Intracranial Stenting Challenge 2011. *Annals of Biomedical Engineering*, 43(1):154–167.
- Collin, F., Caillerie, D., and Chambon, R. (2009). Analytical solutions for the thick-walled cylinder problem modeled with an isotropic elastic second gradient constitutive equation. *International Journal of Solids and Structures*, 46(22-23):3927–3937.
- Cordain, L., Eaton, S. B., Sebastian, A., Mann, N., Lindeberg, S., Watkins, B. a., O’Keefe, J. H., and Brand-Miller, J. (2005). Origins and evolution of the Western diet: health implications for the 21st century. *The American journal of clinical nutrition*, 81(2):341–54.
- Cottin, N., Felgenhauer, H.-P., and Natke, H. G. (1984). On the parameter identification of elastomechanical systems using input and output residuals. *Ingenieur-Archiv*, 54(5):378–387.
- Craiem, D., Rojo, F. J., Atienza, J. M., Armentano, R. L., and Guinea, G. V. (2008). Fractional-order viscoelasticity applied to describe uniaxial stress relaxation of human arteries. *Physics in medicine and biology*, 53(17):4543–54.
- Curnier, A. (1994). *Computational Methods in Solid Mechanics*. Springer.
- De Korte, C. L., Pasterkamp, G., van der Steen, A. F. W., Woutman, H. A., and Bom, N. (2000). Characterization of Plaque Components With Intravascular Ultrasound Elastography in Human Femoral and Coronary Arteries In Vitro. *Circulation*, 102(6):617–623.
- Delfino, A., Stergiopoulos, N., Moore, J. E., and Meister, J. J. (1997). Residual strain effects on the stress field in a thick wall finite element model of the human carotid bifurcation. *Journal of biomechanics*, 30(8):777–786.
- Diaz, M. I., Aquino, W., and Bonnet, M. (2015). A modified error in constitutive equation approach for frequency-domain viscoelasticity imaging using

- interior data. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 296:129–149.
- Doyley, M. M. (2012). Model-based elastography: a survey of approaches to the inverse elasticity problem. *Physics in Medicine and Biology*, 57(3):R35–R73.
- Doyley, M. M., Meaney, P. M., and Bamber, J. C. (2000). Evaluation of an iterative reconstruction method for quantitative elastography. *Physics in Medicine and Biology*, 45(6):1521–1540.
- Eaton, J. W., Bateman, D., Hauberg, S., and Wehbring, R. (2015). *GNU Octave: a high-level interactive language for numerical computations*. CreateSpace Independent Publishing Platform, 4 edition.
- Ferrara, A. and Pandolfi, A. (2008). Numerical modelling of fracture in human arteries. *Computer methods in biomechanics and biomedical engineering*, 11(5):553–567.
- Florentin, E. and Lubineau, G. (2010). Identification of the parameters of an elastic material model using the constitutive equation gap method. *Computational Mechanics*, 46(4):521–531.
- Florentin, E. and Lubineau, G. (2011). Using constitutive equation gap method for identification of elastic material parameters: technical insights and illustrations. *International Journal on Interactive Design and Manufacturing (IJIDeM)*, 5(4):227–234.
- Formaggia, L., Lamponi, D., and Quarteroni, A. (2003). One-dimensional models for blood flow in arteries. *Journal of Engineering Mathematics*, 47(3/4):251–276.
- Franquet, A., Avril, S., Le Riche, R., and Badel, P. (2012). Identification of heterogeneous elastic properties in stenosed arteries: a numerical plane strain study. *Computer methods in biomechanics and biomedical engineering*, 15(1):49–58.
- Franquet, A., Avril, S., Le Riche, R., Badel, P., Schneider, F. C., Li, Z. Y., Boissier, C., and Favre, J. P. (2013). A new method for the in vivo identification of mechanical properties in arteries from cine MRI images: Theoretical framework and validation. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 32(8):1448–1461.

- Friedrich, C. (1991). Relaxation functions of rheological constitutive equations with fractional derivatives: Thermodynamical constraints. In Casas-Vázquez, J. and Jou, D., editors, *Rheological Modelling: Thermodynamical and Statistical Approaches*, pages 321–330. Springer Berlin Heidelberg.
- Fung, Y. C. (1981). *Biomechanics, Mechanical Properties of Living Tissues*. Springer New York, New York, NY.
- Fung, Y. C. (1997). *Biomechanics, Circulation*. Springer, 2 edition.
- Geuzaine, C. and Remacle, J.-F. (2009). Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 79(11):1309–1331.
- Geymonat, G. and Pagano, S. (2003). Identification of Mechanical Properties by Displacement Field Measurement: A Variational Approach. *Meccanica*, 38(5):535–545.
- Gockenbach, M. S. and Khan, a. a. (2005). An Abstract Framework for Elliptic Inverse Problems: Part 1. An Output Least-Squares Approach. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 12:259–276.
- Goenezen, S., Barbone, P., and Oberai, A. A. (2011). Solution of the nonlinear elasticity imaging inverse problem: The incompressible case. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 200(13-16):1406–1420.
- Goenezen, S., Dord, J.-F., Sink, Z., Barbone, P. E., Jiang, J., Hall, T. J., and Oberai, A. A. (2012). Linear and Nonlinear Elastic Modulus Imaging: An Application to Breast Cancer Diagnosis. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 31(8):1628–1637.
- Gurtin, M. E., Fried, E., and Anand, L. (2009). *The Mechanics and Thermodynamics of Continua*. Cambridge University Press.
- Herrero, M., Havlik, P., Valin, H., Notenbaert, A., Rufino, M. C., Thornton, P. K., Blummel, M., Weiss, F., Grace, D., and Obersteiner, M. (2013). Biomass use, production, feed efficiencies, and greenhouse gas emissions from global livestock systems. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 110(52):20888–20893.

- Holzapfel, G. (2000). *Nonlinear solid mechanics: a continuum approach for engineering*. Wiley.
- Holzapfel, G. A., Gasser, T. C., and Ogden, R. W. (2000). A new constitutive framework for arterial wall mechanics and a comparative study of material models. *Journal of Elasticity*, 61(1-3):1–48.
- Holzapfel, G. a. and Ogden, R. W. (2010). Constitutive modelling of arteries. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 466(2118):1551–1597.
- Hughes, T. J. R. (1987). *The Finite Element Method*. Prentice-Hall, 1 edition.
- Hunter, S. (1979). Some exact solutions in the theory of finite elasticity for incompressible neo-Hookean materials. *International Journal of Mechanical Sciences*, 21(1):203–211.
- Imre, P. (2011). Conic Optimization Software. In *Wiley Encyclopedia of Operations Research and Management Science*, pages 1–19. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, USA.
- Kallel, F. and Bertrand, M. (1996). Tissue elasticity reconstruction using linear perturbation method. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 15(3):299–313.
- Kavanagh, K. T. and Clough, R. W. (1971). Finite element applications in the characterization of elastic solids. *International Journal of Solids and Structures*, 7(1):11–23.
- Khalil, R., Al Horani, M., Yousef, A., and Sababheh, M. (2014). A new definition of fractional derivative. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 264:65–70.
- Kiran, R. and Khandelwal, K. (2014). Complex step derivative approximation for numerical evaluation of tangent moduli. *Computers and Structures*, 140:1–13.
- Kirsch, A. (2011). *An introduction to the mathematical theory of inverse problems*. Springer.

- Ladeveze, P. and Leguillon, D. (1983). Error Estimate Procedure in the Finite Element Method and Applications.
- Lakes, R. (2009). *Viscoelastic Materials*. Cambridge University Press, 1 edition.
- Le Floc’h, S., Cloutier, G., Finet, G., Tracqui, P., Pettigrew, R. I., and Ohayon, J. (2010). On the potential of a new IVUS elasticity modulus imaging approach for detecting vulnerable atherosclerotic coronary plaques: in vitro vessel phantom study. *Physics in medicine and biology*, 55:5701–5721.
- Lee, S.-Y., Rus, G., and Park, T. (2007). Detection of stiffness degradation in laminated composite plates by filtered noisy impact testing. *Computational Mechanics*, 41(1):1–15.
- Lewandowski, R. and Chorążyczewski, B. (2010). Identification of the parameters of the Kelvin–Voigt and the Maxwell fractional models, used to modeling of viscoelastic dampers. *Computers & Structures*, 88(1-2):1–17.
- Li, Z.-Y., Tang, T., U-King-Im, J., Graves, M., Sutcliffe, M., and Gillard, J. H. (2008). Assessment of carotid plaque vulnerability using structural and geometrical determinants. *Circulation journal : official journal of the Japanese Circulation Society*, 72(7):1092–1099.
- Lobo, M. S., Vandenberghe, L., Boyd, S., and Lebret, H. (1998). Applications of second-order cone programming.
- Lubineau, G. and Florentin, E. (2011). The global equilibrium method and its hybrid implementation for identifying heterogeneous elastic material parameters. *Computers & Structures*, 89(7-8):656–667.
- Luenberger, D. G. and Ye, Y. (2008). *Linear and Nonlinear Programming*. Springer, 3 edition.
- Marques, S. P. C. and Creus, G. J. (2012). *Computational viscoelasticity*. Springer Heidelberg.
- Maso Talou, G. D., Pérez Zerpa, J. M., Blanco, P. J., Canelas, A., and Feijóo, R. A. (2015). IVUS image conditioning for in-vivo characterization of arterial tissue. In *ICCB*.

- McLaughlin, J. R. and Yoon, J.-R. (2004). Unique identifiability of elastic parameters from time-dependent interior displacement measurement. *Inverse Problems*, 20(1):25–45.
- Moireau, P., Xiao, N., Astorino, M., Figueroa, C. a., Chapelle, D., Taylor, C. a., and Gerbeau, J.-F. (2012). External tissue support and fluid-structure simulation in blood flows. *Biomechanics and modeling in mechanobiology*, 11(1-2):1–18.
- Moussawi, A., Lubineau, G., Florentin, E., and Blaysat, B. (2013). The constitutive compatibility method for identification of material parameters based on full-field measurements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 265:1–14.
- Naghavi, M., Libby, P., Falk, E., Casscells, S. W., Litovsky, S., Rumberger, J., Badimon, J. J., Stefanadis, C., Moreno, P., Pasterkamp, G., Fayad, Z., Stone, P. H., Waxman, S., Raggi, P., Madjid, M., Zarrabi, A., Burke, A., Yuan, C., Fitzgerald, P. J., Siscovick, D. S., de Korte, C. L., Aikawa, M., Juhani Airaksinen, K. E., Assmann, G., Becker, C. R., Chesebro, J. H., Farb, A., Galis, Z. S., Jackson, C., Jang, I.-K., Koenig, W., Lodder, R. a., March, K., Demirovic, J., Navab, M., Priori, S. G., Rekhter, M. D., Bahr, R., Grundy, S. M., Mehran, R., Colombo, A., Boerwinkle, E., Ballantyne, C., Insull, W., Schwartz, R. S., Vogel, R., Serruys, P. W., Hansson, G. K., Faxon, D. P., Kaul, S., Drexler, H., Greenland, P., Muller, J. E., Virmani, R., Ridker, P. M., Zipes, D. P., Shah, P. K., and Willerson, J. T. (2003). From vulnerable plaque to vulnerable patient: a call for new definitions and risk assessment strategies: Part I. *Circulation*, 108(14):1664–72.
- Nichols, W., O’Rourke, M., and Vlachopoulos, C. (2011). *McDonald’s Blood Flow in Arteries*. Hodder Arnold, 6 edition.
- Oberai, A. a., Gokhale, N. H., Doyley, M. M., and Bamber, J. C. (2004). Evaluation of the adjoint equation based algorithm for elasticity imaging. *Physics in Medicine and Biology*, 49(13):2955–2974.
- Ophir, J., Céspedes, I., Ponnekanti, H., Yazdi, Y., and Li, X. (1991). Elastography: a quantitative method for imaging the elasticity of biological tissues. *Ultrasonic imaging*, 13(2):111–34.

- Pagano, S. and Bonnet, M. (2012). Constitutive Equation Gap. In Grédiac, M., Hild, F., and Pineau, A., editors, *Full-Field Measurements and Identification in Solid Mechanics*, chapter 10, pages 275–300. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ USA.
- Pagnacco, E., Moreau, A., and Lemosse, D. (2007). Inverse strategies for the identification of elastic and viscoelastic material parameters using full-field measurements. *Materials Science and Engineering: A*, 452-453:737–745.
- Pérez Zerpa, J. M. (2012). *Caracterização de propriedades mecânicas em modelos de artérias usando um algoritmo de ponto interior*. Msc. dissertation, Universidade Federal do Rio de Janeiro.
- Pérez Zerpa, J. M., Canelas, A., Sensale, B., Bia Santana, D., and Armentano, R. (2015). Modeling the arterial wall mechanics using a novel high-order viscoelastic fractional element. *Applied Mathematical Modelling*, 39(16):4767–4780.
- Podlubny, I. (1999). *Fractional Differential Equations*. Academic Press, 1 edition.
- Rohrmann, S., Overvad, K., Bueno-de Mesquita, H., Jakobsen, M. U., Egeberg, R., Tjønneland, A., Nailler, L., Boutron-Ruault, M.-C., Clavel-Chapelon, F., Krogh, V., Palli, D., Panico, S., Tumino, R., Ricceri, F., Bergmann, M. M., Boeing, H., Li, K., Kaaks, R., Khaw, K.-T., Wareham, N. J., Crowe, F. L., Key, T. J., Naska, A., Trichopoulou, A., Trichopoulos, D., Leenders, M., Peeters, P. H., Engeset, D., Parr, C. L., Skeie, G., Jakszyn, P., Sánchez, M.-J., Huerta, J. M., Redondo, M., Barricarte, A., Amiano, P., Drake, I., Sonestedt, E., Hallmans, G., Johansson, I., Fedirko, V., Romieux, I., Ferrari, P., Norat, T., Vergnaud, A. C., Riboli, E., and Linseisen, A. (2013). Meat consumption and mortality - results from the European Prospective Investigation into Cancer and Nutrition. *BMC Medicine*, 11(1):63.
- Rus, G. and Gallego, R. (2002). Optimization algorithms for identification inverse problems with the boundary element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 26(4):315–327.
- Schulze-Bauer, C. a. J. and Holzapfel, G. a. (2003). Determination of constitutive equations for human arteries from clinical data. *Journal of biomechanics*, 36(2):165–9.

- Scott Blair, G. W. (1947). The role of psychophysics in rheology. *Journal of colloid science*, 2(1):21–32.
- Silhavý, M. (1997). *The Mechanics and Thermodynamics of Continuous Media*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York.
- Stiassnie, M. (1979). On the application of fractional calculus for the formulation of viscoelastic models. *Applied Mathematical Modelling*, 3(4):300–302.
- Stull, C. J., Earls, C. J., and Koutsourelakis, P.-S. (2011). Model-based structural health monitoring of naval ship hulls. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200(9-12):1137–1149.
- Sturm, J. F. (1999). Using SeDuMi 1.02, A Matlab toolbox for optimization over symmetric cones.
- Sturm, J. F. (2002). Implementation of interior point methods for mixed semidefinite and second order cone optimization problems. *Optimization Methods and Software*, 17(6):1105–1154.
- Sturm, J. F. and Zhang, S. (1997). On a Wide Region of Centers and Primal-Dual Interior Point Algorithms for Linear Programming. *Mathematics of Operations Research*, 22(2):408–431.
- Then, C., Vogl, T. J., and Silber, G. (2012). Method for characterizing viscoelasticity of human gluteal tissue. *Journal of Biomechanics*, 45(7):1252–8.
- Valdez-Jasso, D., Bia, D., Zócalo, Y., Armentano, R. L., Haider, M. a., and Olufsen, M. S. (2011). Linear and nonlinear viscoelastic modeling of aorta and carotid pressure-area dynamics under in vivo and ex vivo conditions. *Annals of biomedical engineering*, 39(5):1438–56.
- Valdez-Jasso, D., Haider, M. A., Banks, H. T., Bia Santana, D., Zócalo Germán, Y., Armentano, R. L., and Olufsen, M. S. (2009). Analysis of viscoelastic wall properties in ovine arteries. *IEEE transactions on bio-medical engineering*, 56(2):210–9.
- Veronda, D. and Westmann, R. (1970). Mechanical characterization of skin—Finite deformations. *Journal of Biomechanics*, 3(1):111–124.

- Vogel, C. R. (2002). *Computational methods for inverse problems*. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Wang, M. and Brigham, J. C. (2014). Assessment of multi-objective optimization for nondestructive evaluation of damage in structural components. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 25(9):1082–1096.
- Wang, X., Schoen, J. A., and Rentschler, M. E. (2013). A quantitative comparison of soft tissue compressive viscoelastic model accuracy. *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, 20:126–36.
- Warner, J. E., Diaz, M. I., Aquino, W., and Bonnet, M. (2014). Inverse material identification in coupled acoustic-structure interaction using a modified error in constitutive equation functional. *Computational Mechanics*, 54(3):645–659.
- Witzenburg, C., Dhume, R., Lake, S., and Barocas, V. (2015). Automatic Segmentation of Mechanically Inhomogeneous Tissues Based on Deformation Gradient Jump. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 0062(c):1–1.
- Zhang, B. and Liu, X. (2014). Topology optimization study of arterial bypass configurations using the level set method. *Structural and Multidisciplinary Optimization*.
- Zhang, B. and Liu, X. (2015). Topology optimization study of arterial bypass configurations using the level set method. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 51(3):773–798.
- Zhang, M., Nigwekar, P., Castaneda, B., Hoyt, K., Joseph, J. V., di Sant’Agnese, A., Messing, E. M., Strang, J. G., Rubens, D. J., and Parker, K. J. (2008). Quantitative characterization of viscoelastic properties of human prostate correlated with histology. *Ultrasound in medicine & biology*, 34(7):1033–1042.