

PRESENTACIÓN ORAL

Testeo del *MEGNO*: indicador rápido de la dinámica

N.P. Maffione^{1,2}, C.M. Giordano^{1,2} y P.M. Cincotta^{1,3}

(1) Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas, Universidad Nacional de La Plata,

(2) Instituto de Astrofísica La Plata (CCT La Plata – CONICET)

(3) CCT La Plata – CONICET

Abstract. We extend a previous work (Maffione, Giordano & Cincotta, 2007) where the Lyapunov characteristic exponents and the Mean Exponential Growth factor of Nearby Orbits (*MEGNO*), introduced by Cincotta & Simó (2000), are compared. Some differences in their classifications appeared and one of the main possible causes of the discrepancy was discussed. Now, with the implementation of another technique closely related with the fast Lyapunov indicator (Froeschlé et al., 1997) and an analysis of the involved orbits' neighborhoods, we understood the reasons for the discrepancy, reaching a detailed evaluation of the *MEGNO* efficiency.

Resumen. Extendemos un trabajo previo (Maffione, Giordano & Cincotta, 2007) donde se comparan los exponentes característicos de Lyapunov y el *Mean Exponential Growth factor of Nearby Orbits (MEGNO)*, introducido por Cincotta & Simó (2000). Se observaron algunas diferencias en sus respectivas clasificaciones y se discutió una de las posibles causas de la discrepancia. Ahora, con la implementación de otra técnica estrechamente relacionada con el indicador rápido de Lyapunov (Froeschlé et al., 1997) y el análisis de los entornos de las órbitas involucradas, logramos entender el por qué de la discrepancia, obteniendo así una evaluación detallada del rendimiento del *MEGNO*.

1. Introducción

En el presente trabajo pretendemos extender el estudio sobre el rendimiento del *Mean Exponential Growth factor of Nearby Orbits (MEGNO)*, introducido por Cincotta & Simó (2000). Para ello, utilizaremos una muestra orbital extraída de un potencial estudiado por Muzzio et al. (2005), el cual modela una galaxia triaxial.

El objeto es poner a prueba el *MEGNO* de manera tal de remarcar no sólo los aspectos positivos del indicador, sino también sus puntos débiles. Por lo tanto, hemos llevado a cabo una comparación entre esta técnica y los exponentes de Lyapunov (los cuales constituyen la herramienta actualmente más difundida), como eventualmente con una ligera variante del indicador rápido de Lyapunov (*FLI*), desarrollado por Froeschlé et al. (1997).

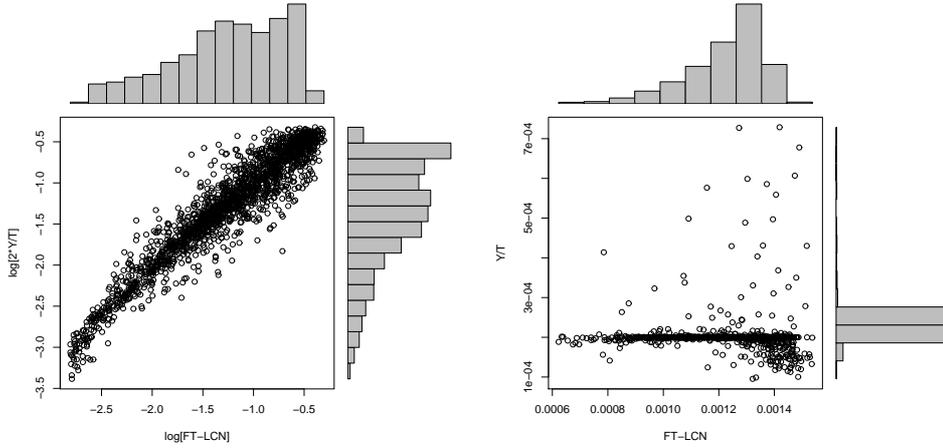


Figura 1. Correlaciones entre $2\bar{Y}/T$ y el LCN para **Oc** (panel de la izquierda) y entre \bar{Y}/T y el LCN para **Or** (panel de la derecha) para $T = 10000$ u.t. Incluimos las respectivas distribuciones.

2. Comparación de rendimientos a tiempos intermedios de integración

Comenzamos mostrando una comparación entre las clasificaciones del *MEGNO* - redefinido para conservar la misma escala entre los dos indicadores, i.e., $2\bar{Y}/T$ para la componente caótica y \bar{Y}/T para la componente regular, donde \bar{Y} y T son los valores del *MEGNO* y del tiempo final de integración (ver Cincotta & Simó 2000) - y del exponente máximo de Lyapunov (LCN) a 10000 u.t. De la Fig. 1 observamos un acuerdo muy bueno entre ambas técnicas. Por un lado, existe una correlación lineal ($r \approx 0.95$) para la componente caótica (**Oc**). Por otro lado, en el panel de la derecha para la componente regular (**Or**), tenemos un valor medio de \bar{Y}/T cercano a 0.0002 (el valor de corte tomado para el *MEGNO* = \bar{Y} es de 2.01, Cincotta & Simó 2000), con una desviación estándar $\lesssim 10^{-5}$. En cambio, para el LCN estimamos un valor medio de 0.0013, con una desviación estándar de $\approx 10^{-4}$. Resaltamos aquí el orden de magnitud de diferencia entre ambas desviaciones. A diferencia del conjunto **Oc**, para **Or** existe una discrepancia en las clasificaciones: 7.97% de las órbitas clasificadas por el LCN como regulares, el *MEGNO* las ubica dentro del intervalo adyacente al valor de corte [2.01; 10) (en el gráfico [0.000201; 0.001)), revelando un posible comportamiento caótico.

Es en este grupo particular de órbitas (**Or_d**) sobre el cual se realizará un estudio exhaustivo para determinar sus comportamientos y así establecer los puntos fuertes y débiles del indicador bajo análisis.

3. Sobre las órbitas del conjunto **Or_d**

Primero, debemos tener presente que las órbitas pertenecen a diferentes superficies de energía, es decir, poseen diferentes escalas de tiempo $T_c(E)$. Entonces, para asegurar valores confiables de los indicadores, se debería tomar que el tiempo de integración T cumpliera una condición del tipo $T \geq 10^3 T_c(E)$ (donde en

nuestro caso el $T_c(E)$ es el período de la órbita axial de eje mayor, el cual estima muy bien el tiempo característico de la familia de órbitas caja y aproxima satisfactoriamente el correspondiente a las órbitas tubo). Esto sugiere que sólo aquellas órbitas con $T_c(E) \leq 10$ (o energías $E \lesssim -0.58$) tendrían al *LCN* y al *MEGNO* fuera del transitorio, para el tiempo final de integración considerado: 10000 u.t.. Consecuentemente, una muestra escogida entre dicho conjunto de órbitas caja cumpliendo la condición detallada, será la utilizada para el análisis de rendimiento del *MEGNO*.

Hemos recalculado para las órbitas en \mathbf{Or}_d el *MEGNO* a 100000 u.t.. Encontramos que 52 órbitas (con valores de *MEGNO* inferiores a 3.5 a $T = 10000$), se aproximan al valor de regularidad ~ 2 a $T = 100000$, mientras que las restantes 79 observan valores por encima, a este nuevo tiempo final de integración. En lo que sigue, identificaremos al primer grupo como \mathbf{Or}_d^s y al segundo, \mathbf{Or}_d^u .

Para determinar el carácter real de estas órbitas, apelamos a una pequeña variación del llamado *FLI* (Froeschlé et al. 1997). El valor medio del *FLI* lo definimos como:

$$\langle \delta(t) \rangle = \frac{1}{t} \int_0^t \delta(t) dt,$$

donde $\delta = \|\vec{\delta}\|$ y $\vec{\delta}$ es la solución de las ecuaciones variacionales, tomando como condición inicial el valor $\delta_0 = 10^{-4}$.

Tomamos las siguientes órbitas representativas de \mathbf{Or}_d : A, B y C $\in \mathbf{Or}_d^u$, y D $\in \mathbf{Or}_d^s$.

En la Fig. 2 mostramos la evolución temporal de los tres indicadores para los tiempos de integración $T = 10000$ y $T = 100000$ u.t., correspondiente a la muestra representativa antes mencionada. Puede observarse con claridad que, a $T = 10000$ u.t., casi todas ellas exhiben un comportamiento estable, aunque el *MEGNO* y la media del *FLI* evidencian un incipiente crecimiento para las órbitas “B” y “C”, lo cual no se observa para el *LCN*. Cuando el tiempo de integración se incrementa, estas órbitas se separan del resto, revelando su comportamiento caótico.

En otro caso, las órbitas “D” $\in \mathbf{Or}_d^s$ y “A” $\in \mathbf{Or}_d^u$ parecen evolucionar de manera parecida, aunque pertenecen a distintos conjuntos. Cabe aclarar que el valor final del *MEGNO* está apenas por encima de ~ 2 para la órbita “A”. Para investigar el comportamiento de esta última órbita, se ha estudiado un entorno de 10^{-7} donde se calcularon los valores de los indicadores para 125 órbitas cercanas, tanto para $T = 10000$ como para $T = 100000$ u.t. Los resultados mostraron que los valores del *MEGNO* caen en el rango $1.95 \lesssim \bar{Y} \lesssim 3$ para $T = 10000$, y en (1.98, 2.27) para $T = 100000$ u.t. Luego, aunque el valor del *MEGNO* para la órbita “A” haya dado por encima del valor 2.01 (~ 2.014 a $T = 100000$), tomado para evaluar la muestra estadística de órbitas, este análisis particular de la misma asegura que debiera considerarse como una órbita a todo efecto, regular. Resultados análogos se encuentran con los otros dos indicadores.

Es necesario tener en cuenta que, en general, una órbita particular se encuentra dominada por la dinámica de sus alrededores y, por lo tanto, si es necesaria la determinación estricta de su carácter individual (como el caso de la órbita “A”), otro posible valor de corte para órbitas regulares debiera conside-

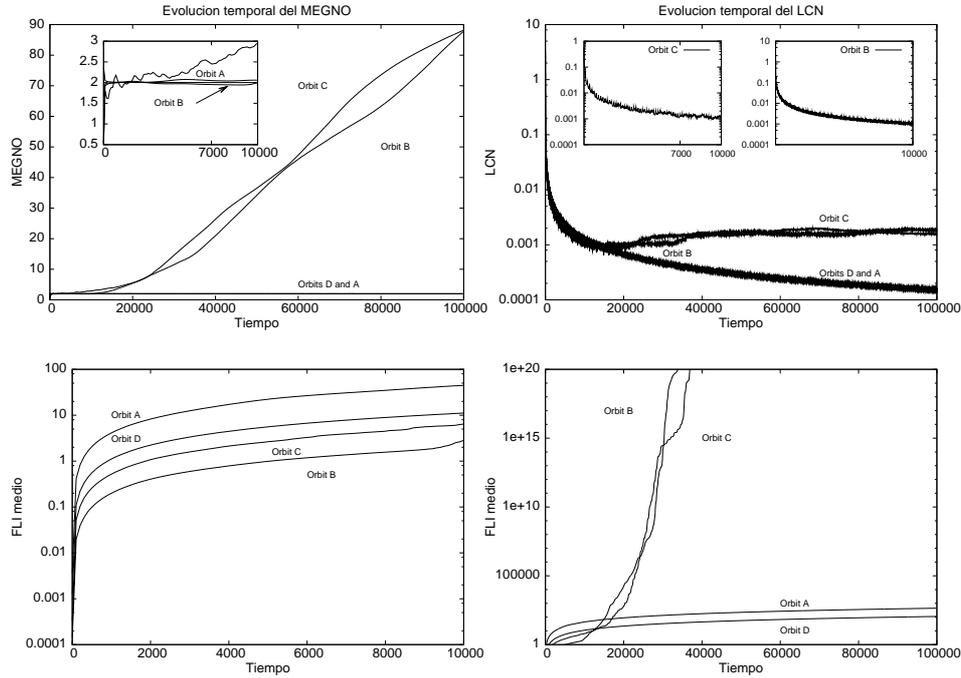


Figura 2. Evolución temporal del *MEGNO*, *LCN* y del valor medio del *FLI* para $T = 10000$ y $T = 100000$ u.t.

rarse como $\overline{Y} \sim d$, donde d pueda ser tomado como el valor medio de \overline{Y} sobre un dominio pequeño alrededor de la misma.

4. Conclusiones

El *MEGNO* es una técnica apropiada para la separación entre movimiento caótico y regular, debido a que ha mostrado una correlación muy buena con el *LCN* y en forma particular con el *FLI* (el valor de corte 2.01 resultó muy eficiente para cantidades estadísticas de órbitas). Provee además mejores resultados en caso de movimiento regular que el *LCN*, dando distribuciones más deltiformes, ya que \overline{Y}/T converge más rápidamente al valor nulo que el *LCN* (Cincotta & Simó 2000) dado por el algoritmo clásico (Benettin et al. 1976).

Si se requiere del análisis particular de una órbita, debe considerarse un valor de corte pesado con el entorno inmediato a la misma.

Referencias

- Benettin, G., Galgani L., & Strelcyn, J. M., 1976, Phys. Rev. A, 14(6), 2338
 Cincotta, P.M. & Simó, C., 2000, A&AS, 147, 205
 Froeschlé, Cl., Gonczi, R. & Lega, E., 1997, P&SS, 45, 881
 Maffione, N.P., Giordano, C.M. & Cincotta, P.M., 2007, BAAA, 50,47
 Muzzio, J.C., Carpintero, D.D. & Wachlin, F.C., 2005, CeMDA, 91(1-2), 173