

Universidad Tecnológica de Pereira

PROGRAMA DE DOCTORADO EN INGENIERÍAS

TESIS DOCTORAL:
LOCALIZACIÓN Y RUTEO DE VEHÍCULOS CAPACITADO
MULTI-OBJETIVO CON CONSIDERACIONES DE
SOSTENIBILIDAD

AUTOR:
LUIS FERNANDO GALINDRES GUANCHA

PEREIRA-2020

LOCALIZACIÓN Y RUTEO DE VEHÍCULOS CAPACITADO
MULTI-OBJETIVO CON CONSIDERACIONES DE
SOSTENIBILIDAD

LUIS FERNANDO GALINDRES GUANCHA

Proyecto de grado presentado como requisito para optar por el título de
Doctor en Ingeniería

Director: Ph.D. Ramón Alfonso Gallego Rendón

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA
PROGRAMA DE DOCTORADO EN INGENIERÍAS
PEREIRA
2020

Año 2020

NOTA DE ACEPTACIÓN

Jurado

Jurado

Pereira, 30 de junio de 2020

DEDICATORIA

Dedicado a la razón de mi existir: mi hija, mi mamá, mi papá, mis hermanos.

Luis Fernando Galindres Guancha.

AGRADECIMIENTOS

Muchas personas a lo largo de este trabajo las cuales con sus oraciones, cariño y respaldo apoyaron y creyeron en mi y en mi trabajo mis agradecimientos sinceros. En particular, quiero agradecer con todo mi corazón a:

- Mi familia, especialmente a mi mamá Bernarda, a mi papá Teófilo por su amor incondicional y su ejemplo de vida fundamentales para superar los más grandes obstáculos y salir adelante. Mi hermano Diego por su apoyo en los momentos más críticos de este proceso. Mi hermano Ricardo por su espiritualidad. Mi hermano William por estar siempre presto a escucharme.
- Profesor Ramón Alfonso Gallego Rendón por aceptar ser mi tutor en este reto, además por su guía, visión, conocimiento, apoyo, comprensión y consejos valiosos durante e incluso antes de todo este proceso.
- Profesora Eliana Mirledy Toro Ocampo por sus consejos, amabilidad, disposición y ayuda a lo largo del desarrollo de este trabajo.
- Profesor Frederico Gadelha Guimarães por su guía, conocimiento y amistad que fueron fundamentales en la orientación y encauce de esta tesis. También agradezco su preocupación y disposición para que mi instancia en Brasil fuese una experiencia inolvidable.
- Profesores miembros del jurado por enriquecer este trabajo con sus sugerencias.
- Compañeros de sala Andrés Arias por su ayuda en CPLEX, Daniela Ospina por su ayuda en la implementación de los primeros algoritmos en C++, Luis Martínez por su ayuda en el modelamiento y linealización de los problemas de ruteo, Luis Cubides por su orientación en el manejo de LATEX.
- Profesores Mauricio Granada y Ricardo Hincapié por su amistad y compartir experiencias que enriquecen el proceso de formación.
- Compañeros del laboratorio MINDS en la UFMG por hacer de mi estadía en Brasil una experiencia única.
- Marisol Agudelo por su paciencia y don de servicio.

- Al doctorado en ingeniería de la Universidad Tecnológica por su disposición y flexibilidad en todo el proceso de formación doctoral.
- A COLCIENCIAS a través de la convocatoria 647 por el fomento y la oportunidad en la formación doctoral.

El Autor.

Resumen

En la actualidad las empresas, entidades gubernamentales, la comunidad académica y científica, enfocan su atención en el desarrollo sostenible. Uno de los sectores de mayor interés en este enfoque es la logística, específicamente el área de transporte. La inclusión de consideraciones de desarrollo sostenible implica cambiar la planeación, diseño y operación de sus procesos lo que impacta directamente en la eficiencia y competitividad.

En esta investigación se elige el problema de localización y ruteo de vehículos capacitado (*Capacitated Location Routing Problem CLRP*) ya que reúne elementos estratégicos y operacionales y sobre el cual es posible incluir elementos del desarrollo sostenible.

En su definición, el CLRP tiene como objetivo la selección de depósitos y el diseño de un conjunto de rutas de tal manera que se atienda la demanda de los clientes con el mínimo costo, teniendo en cuenta las siguientes restricciones:

Un cliente debe ser atendido por un único vehículo y debe ser asignado a un único depósito.

La suma de las demandas de los clientes no debe exceder la capacidad del vehículo ni la del depósito.

Si al modelo anterior se incluye factores de sostenibilidad, como el impacto ambiental y beneficio social, se convierte en un modelo Multi-objetivo. Los objetivos ambientales y sociales son tratados de la siguiente manera:

- Minimizar el impacto ambiental producto de la emisión de partículas CO_2 a la atmósfera que resultan del consumo de combustible de los vehículos que usan motores de combustión interna.
- Minimizar el impacto social agregando factores de equidad que se miden en el desbalance que existe entre las longitudes de las rutas.

El modelo Multi-objetivo CLRP que se propone, se convierte en un desafío, que además de exigir la formulación del modelo matemático, requiere de técnicas de solución exactas y aproximadas. La primera para dar validez al modelo y las segundas que permitan resolver instancias de tamaño significativo.

Para lograr lo anterior se define un plan de trabajo que tiene en cuenta los siguientes pasos:

- Revisión exhaustiva del estado del arte del CLRP con consideraciones de sostenibilidad, enfoque Multi-objetivo de algunos de los problemas de ruteo de vehículos

(VRP), formulación matemática y métodos de solución que permitan identificar el vacío del conocimiento.

- Formulación del problema Multi-Objetivo CLRP que considere los objetivos de sostenibilidad denominado S-CLRP, así como de los problemas antecesores: *Capacitated Vehicle Routing Problem* (CVRP) y *Multi Depot Capacitated Routing Problem* (MDVRP).
- Resolver el modelo matemático del S-CLRP usando una técnica exacta basada en descomposición.
- Resolver el modelo matemático usando Meta Heurísticas utilizadas para resolver problemas de optimización Multi-Objetivo: Búsqueda Local Iterada Multi-Objetivo (MO-ILS) y Algoritmos Evolutivos Multi-Objetivo usando Descomposición (MOEA/D).
- Implementación de una técnica propuesta para resolver el CLRP Multi-objetivo basada en la Meta Heurística Búsqueda Local Iterada (ILS) y descomposición llamada ILS/D.
- Finalmente, presentar resultados, definir el aporte, presentar conclusiones y trabajo futuro.

Abstract

Currently, companies, government entities and society in general, have focused their attention on sustainable development, which is inevitably redefining the way of conceiving the planning design and operation of their processes not only to be more efficient but also to be more competitive, integrating sustainable elements, that is, taking into account environmental and social economic considerations.

One of the sectors that has aroused the greatest interest in this new approach is logistics, specifically the transportation area, which together with the academic and scientific community have been making great efforts to define new processes and models to fulfill this purpose.

Particularly, one of the problems that requires to be taken into account inherent elements of its definition is the problem of location and routing of vehicles (CLRP) which brings together strategic and operational elements that need to be expanded and integrated with the elements of sustainable development.

In its initial definition, the CLRP solution is based on the optimal selection of deposits and the design of a set of routes in such a way as to meet customer demand and comply with the following restrictions:

A customer must be served by a single vehicle and by an open depot.

The sum of customer demand should not exceed both the capacity of the assigned vehicle and open depot.

In addition, taking into account the sustainable factors the problem should consider the following:

Minimize the environmental impact as a result of the emission of CO_2 particles as a result of the fuel consumption of vehicles that use internal combustion engines.

After of the review of the state of the art of the CLRP with sustainability concerns, very few publications on this topic are observed, particularly in the problem that considers simultaneously cost, environmental impact and social equilibrium..

The presented problem is a challenge that requires besides representing it in a mathematical model, also different exact and approximate techniques are implemented in an adequate time

To achieve this, several objectives are defined, such as the review of the CLRP's state of the art, the formulation and implementation of the Multi-Objective problem that considers the 3 mentioned objectives and present the results to make the analysis, define the respective contribution and give some guidelines about future work.

Índice general

| | |
|---|----------|
| 1. Introducción | 3 |
| 1.1. Planteamiento del Problema | 5 |
| 1.2. Justificación | 5 |
| 1.3. Objetivos | 7 |
| 1.3.1. Objetivo General | 7 |
| 1.3.2. Objetivos Específicos | 7 |
| 2. Marco Teórico | 8 |
| 2.1. Formulación de los Problemas de Ruteo de Vehículos | 8 |
| 2.1.1. CVRP | 8 |
| 2.1.2. MDVRP | 10 |
| 2.1.3. CLRP | 11 |
| 2.2. Metaheurística basada en Búsqueda Local | 15 |
| 2.2.1. Búsqueda Local Iterada (ILS) | 16 |
| 2.2.2. La Metaheurística ILS para resolver VRPs | 17 |
| 2.3. Optimización Multi-objetivo | 22 |
| 2.3.1. Definición general del problema de Optimización Multi-Objetivo | 22 |
| 2.3.2. Concepto Optimalidad de Pareto. | 23 |
| 2.3.3. Solución de Compromiso. | 24 |
| 2.3.4. Método Global Ponderado. | 25 |
| 2.3.5. Método Suma Ponderada. | 26 |
| 2.3.6. Método min-max. | 27 |
| 2.4. Técnicas de Descomposición en la Optimización Multi-objetivo | 28 |
| 2.5. Optimización Multi-objetivo en Problemas de Ruteo de Vehículos | 29 |
| 2.5.1. CVRP Multi-objetivo | 30 |

| | | |
|-----------|---|-----------|
| 2.5.2. | MDVRP Multi-objetivo | 34 |
| 2.5.3. | CLRP Multi-objetivo | 35 |
| 2.6. | Métricas de desempeño | 36 |
| 3. | Revisión Estado del Arte | 38 |
| 4. | Formulación de los Objetivos de Optimización | 44 |
| 4.1. | Consideraciones Ambientales | 44 |
| 4.2. | Consideraciones Sociales | 45 |
| 5. | Método de Solución | 48 |
| 5.1. | MDVRP Multi-objetivo | 48 |
| 5.1.1. | Método de Solución Aproximado (MO-ILS) | 50 |
| 5.2. | CLRP Multi-objetivo | 53 |
| 5.2.1. | Función objetivo económica | 53 |
| 5.2.2. | Función objetivo ambiental | 54 |
| 5.2.3. | Función objetivo social | 54 |
| 5.2.4. | Formulación Multi-objetivo para el S-CLRP | 56 |
| 5.2.5. | Método de solución | 56 |
| 5.3. | Desempeño del ILS/D | 60 |
| 5.3.1. | MOKP resuelto usando ILS/D y MOEA/D | 61 |
| 5.3.2. | bi-CVRP resuelto usando un método exacto, ILS/D y NSGA-II | 61 |
| 6. | Resultados Computacionales | 64 |
| 6.1. | Resultados MOKP usando ILS/D Y MOEA/D | 64 |
| 6.2. | Resultados MDVRP Multi-objetivo | 65 |
| 6.3. | Resultados bi-CVRP usando método exacto, ILS/D y NSGA-II | 70 |
| 6.4. | Resultados S-CLRP | 73 |
| 6.4.1. | Solución de instancias de baja complejidad matemática usando un método exacto | 74 |
| 6.4.2. | Comparación entre el método exacto y el ILS/D | 79 |

6.4.3. Instancias de gran complejidad matemática resueltas usando ILS/D 82

7. Conclusiones y trabajo futuro 87

Índice de figuras

| | |
|--|----|
| 1.1. Pilares de Sostenibilidad. Garetti and Taisch (2012) | 3 |
| 3.1. Cantidad de artículos publicados por año para el CLRP Multi-objetivo. | 38 |
| 6.1. Frente óptimo de Pareto para la instancia $A-n37-k5$ | 71 |
| 6.2. Métricas obtenidas para la instancia $A-n37-k5$ | 72 |
| 6.3. Métricas obtenidas para la instancia $A-n80-k10$ | 73 |
| 6.4. Soluciones del Frente de Pareto | 75 |
| 6.5. Métricas obtenidas para la instancia $20-5-1$ | 81 |
| 6.6. Frentes obtenidos para la instancia $20-5-1$ | 82 |

Índice de tablas

| | |
|--|----|
| 1.1. Objetivos específicos | 7 |
| 3.1. Clasificación por objetivos a optimizar en el CLRP | 39 |
| 3.2. Resumen de los objetivos y técnicas de solución empleadas para el CLRP | 43 |
| 5.1. Lista de vecindarios <i>Inter_Route</i> | 53 |
| 5.2. Lista de vecindarios <i>Intra_Route</i> | 53 |
| 6.1. Tiempos de ejecución para cada instancia | 64 |
| 6.2. Resultados para las métricas HV e IGD | 65 |
| 6.3. Frentes obtenidos en las instancias Cordeau et al. (1997). | 66 |
| 6.4. Variaciones con respecto a la solución del mínimo costo | 70 |
| 6.5. Punto utópico | 74 |
| 6.6. Soluciones del Frente de Pareto | 74 |
| 6.7. Variaciones de la solución 1 con respecto a la solución 2 | 75 |
| 6.8. Soluciones A y B. | 76 |
| 6.9. Soluciones C y D. | 77 |
| 6.10. Solutions E and G | 78 |
| 6.11. Soluciones de equilibrio para G-CLRP y S-CLRP de la instancia 20-5-1. | 80 |
| 6.12. Frentes ILS/D instancias Prins et al. (2007) | 82 |
| 6.13. Porcentaje de variación entre las soluciones iniciales y finales | 86 |

Glosario

- **bi-CVRP** *Capacitated Vehicle Routing Problem bi-objective*; Problema de ruteo de vehículos Capacitado bi-objetivo.
- **CARP** *Capacitated Arc Routing Problem*; Problema de ruteo de vehículos capacitado basado en arcos.
- **CFLP** *Capacitated Facility Location Problem*; Problema de Localización de depósitos capacitado.
- **CLRP** *Capacitated Location Routing Problem*; Problema de Localización y Ruteo de Vehículos Capacitado.
- **CVRP** *Capacitated Vehicle Routing Problem*; Problema de ruteo de vehículos Capacitado.
- **DMLS** *Dominance Multi-objective Local Search*; Búsqueda local Multi-objetivo basada en dominancia.
- **FSP** *Flow Shop Problem*; Problema secuenciamiento de tareas.
- **GA** *Genetic Algorithm*; Algoritmo Genético.
- **GD** *Generational Distance metric*; Métrica distancia generacional.
- **GP** *Goal Programming*; Programación por metas.
- **HV** *Hyper Volume metric*; Métrica hiper volumen.
- **IGD** *Inverted Generational Distance metric*; Métrica distancia generacional invertida.
- **ILS** *Iterated Local Search*; Búsqueda local iterada.
- **ILS/D** *ILS based on Decomposition*; Búsqueda local iterada basada en descomposición.
- **ILS-RVND** *Iterated Local Search and Random Variable Neighborhood Descent*; Búsqueda local iterada con vecindario variable aleatorio.
- **LP** *Lineal Programming*; Programación lineal.
- **LRP** *Location Routing Problem*; Problema de localización y ruteo.
- **MCGRP** *Mixed Capacitated General Routing Problem*; Problema de ruteo de vehículos capacitado mixto.

- **MDVRP** *Multi Depot Capacitated Vehicle Routing Problem*; Problema Multi depósitos y Ruteo de Vehículos Capacitado.
- **MICROGA** *Micro GA*; Algortimo genético micro.
- **MILP** *Mixed Integer Lineal Programming*; Programación lineal entera mixta.
- **MO-CLRP** *Multi-Objective CLRP*; CLRP Multi-Objetivo.
- **MOCO** *Multi-Objective Combinatorial Optimization*; Optimización combinatorial Multi-objetivo.
- **MOEA/D** *Decomposition-based Multi-Objective Evolutionary Algorithn*; Algoritmo Evolutivo Multi-objetivo basado en Descomposición.
- **MOILS** *Multi-objective ILS*; Búsqueda local iterada Multi-objetivo.
- **MO-ILS** *Multi-objective ILS*; Búsqueda local iterada Multi-objetivo.
- **MOKP** *Multi-objective Knapsack Problem*; Problema de la mochila Multi-objetivo.
- **MOMDVRP** *Multi-objective MDVRP*; MDVRP Multi-objetivo.
- **MOPSO** *Multi-Objective Particle Swarm Optimization*; Optimización Multi-objetivo usando Cúmulo de partículas.
- **NSGA-II** *Non-dominated Sorting Genetic Algorithm II*; Algoritmo Genético de Clasificación no dominado.
- **PMX** *Partially Mapped Crossover*; Operador genético cruzamiento mapeado parcialmente.
- **S-CLRP** *CLRP Sustainable*; CLRP con consideraciones de sostenibilidad.
- **SA** *Simulating Anealing*; Recocido Simulado.
- **SCM** *Supply Chain Managment*; Administración de la cadena de suministro.
- **SSCM** *Sustainable SCM*; Administración de la Cadena de Suministro Sostenible.
- **SPEA-II** *Strength Pareto Evolutionary Algorithm II*; Algoritmo Evolutivo de Pareto Fuerte.
- **SS** *Scatter Search*; Búsqueda por Dispersión.
- **TS** *Tabu Search*; Búsqueda Tabú.
- **TSP** *Travel Salesman Problem*; Problema del agente viajero.
- **VRP** *Vehicle Routing Problem*; Problema de ruteo de vehículos.
- **VRPRB** *Vehicle Routing Problem with Route Balance*; Problema de ruteo de vehículos con balance de rutas.

1 Introducción

Actualmente las empresas de transporte de carga comprenden que es necesario agregar valor a sus actividades misionales con el fin de no solo ser eficientes y productivas sino también sostenibles. En este contexto, deben reconocer la importancia de cómo su quehacer diario afecta el medio ambiente y la calidad de vida de las personas, que las lleva inevitablemente a involucrar elementos de desarrollo sostenible en su planeamiento y operación, convirtiéndose en un reto que apenas comienza.

El estudio del desarrollo sostenible comienza por su definición, integración en los procesos y la evaluación de desempeño [Ahi and Searcy \(2015\)](#). Además, se hace énfasis en el concepto de desarrollo sostenible y su evolución en la década de los 80s volviéndose popular en varios contextos, sin embargo, manejar la simultaneidad entre sostenibilidad y desarrollo sostenible ha creado varios dilemas sobre todo en aspectos prácticos. Como resultado, no hay un consenso colectivo entre los dos conceptos, por lo que son usados indistintamente en la literatura.

Más concretamente, en [Garetti and Taisch \(2012\)](#) se describe gráficamente el concepto de sostenibilidad basado en tres pilares: dimensión económica, ambiental y social, además sugiriendo una cuarta dimensión relacionada con la tecnología. La figura 1.1 muestra los tres pilares de la sostenibilidad.

En particular, la industria del transporte o distribución también ha venido alineándose de acuerdo al concepto *Sustainable Supply Chain Management* (SSCM) definiendo las “Triple Bottom Line” (TBL) funciones para la sostenibilidad, las cuales consideran integralmente las dimensiones económica, ambiental y social [Ahi and Searcy \(2015\)](#). Así mismo, en el proceso logístico, específicamente en el transporte de carga también se ha hecho especial énfasis en la sostenibilidad. En [Vega-Mejía et al. \(2017\)](#) se resume

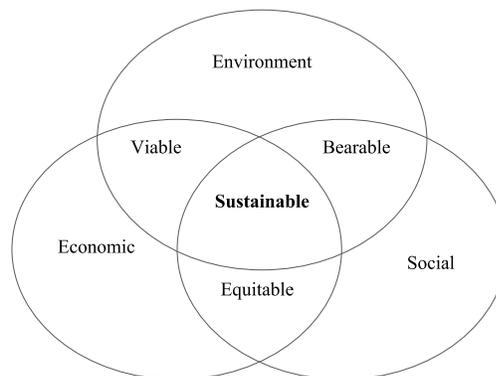


Figura 1.1: Pilares de Sostenibilidad. [Garetti and Taisch \(2012\)](#)

el concepto de sostenibilidad al proceso que tiene en cuenta la viabilidad económica, la administración ambiental y el bienestar social.

Para materializar el concepto de sostenibilidad bajo la premisa TBL en el transporte y más específicamente en el problema de ruteo de vehículos, se requieren grandes esfuerzos en la formulación y técnicas de solución del problema. Para afrontar este reto, la industria del transporte debe planear y administrar sus procesos teniendo en cuenta aspectos económicos ambientales y sociales, sin embargo, sólo se han tratado ampliamente los aspectos económicos, en algunos casos los ambientales y escasamente los sociales [Ramos et al. \(2014\)](#). En esta investigación se equilibran las tres dimensiones económica, ambiental y social buscando soluciones sostenibles que además permitan la toma de decisiones estratégicas y operativas. El problema de localización y ruteo de vehículos capacitado (*Capacitated Location Routing Problem*: CLRP) considera aspectos de planeación (ubicación de las instalaciones o depósitos) y operativos (ruteo de vehículos) [Escobar et al. \(2013\)](#) en el cual es posible integrar los aspectos ambiental y social.

En cuanto a la dimensión social, es necesario definir y establecer la función objetivo para el problema de ruteo de vehículos, teniendo en cuenta los trabajos hechos al respecto, por ejemplo en [Matl et al. \(2017\)](#), [Lee and Ueng \(1999\)](#) y [Schwarze and Voß \(2013\)](#), se presenta una revisión del estado del arte sobre consideraciones sociales en los VRPs, se define el concepto de equidad, modelos e indicadores para medirla y se proponen métodos de solución.

En cuanto a la dimensión ambiental igual que en el caso anterior, se estudian los trabajos que tienen en cuenta el impacto ambiental en los VRPs, particularmente en el CLRP. En [Toro et al. \(2017\)](#) por ejemplo, se plantea un modelo matemático para resolver el CLRP Multi-objetivo teniendo en cuenta la dimensión económica y ambiental medida en la emisión de gases efecto invernadero como función de la carga de los vehículos. El problema es resuelto usando un método exacto.

En esta investigación se propone el CLRP sostenible (S-CLRP) que tiene cuenta además de las consideraciones estratégicas (ubicación de las instalaciones o depósitos) y operativas (ruteo de vehículos), las dimensiones social (medida a través del desbalance de rutas) y ambiental (emisiones de CO_2) simultáneamente. El modelo se resuelve inicialmente mediante un método exacto basado en el concepto de descomposición con el que se obtiene un conjunto de soluciones óptimas en instancias de baja complejidad matemática que sirven de referencia para el método aproximado.

Para resolver el **S-CLRP** en instancias de mayor complejidad matemática, en este trabajo se propone un nuevo proceso Multi-objetivo basado en la Metaheurística Búsqueda Local Iterada (ILS) (propuesta por [Lourenço et al. \(2003\)](#) e implementada por [Subramanian et al. \(2008\)](#) en los problemas de ruteo de vehículos) y en el proceso de descomposición propuesto e implementado por [Zhang and Li \(2007\)](#). La propuesta se denominada Búsqueda Local Iterada basada en Descomposición **ILS/D**.

Finalmente, se proponen y analizan 3 escenarios para validar tanto el modelo matemáti-

co como el procedimiento propuestos, utilizando para ello varias instancias existentes en la literatura adaptadas a los problemas de ruteo de vehículos con un enfoque Multi-objetivo. El primer escenario consiste validar el modelo matemático usando instancias de pequeña complejidad, un solver lineal y el concepto de descomposición. El segundo consiste en validar el comportamiento del procedimiento propuesto comparando las soluciones obtenidas por éste con los frentes de referencia. Finalmente, con el tercer escenario se evalúa el desempeño del procedimiento en problemas de gran complejidad, por lo que se utiliza el procedimiento propuesto para resolver un problema combinatorial clásico y la plataforma PlatEMO Tian et al. (2017) creada para tales fines. En todos los casos, se obtienen muy buenos resultados con los que se justifica esta investigación y con los que los tomadores de decisión en la cadena de suministro pueden evaluar inequívocamente el impacto de sus decisiones en las dimensiones económica, ambiental y social de sus operaciones.

1.1 Planteamiento del Problema

Las empresas de transporte deben hacer grandes esfuerzos para enfocar sus planes y estrategias hacia procesos y desarrollos sostenibles, para alcanzar niveles aceptables de eficiencia y competitividad en el mercado, es decir que mitiguen su impacto ambiental a causa del consumo de combustibles fósiles y la consecuente emisión de CO_2 y además se tenga en cuenta su recurso humano como el mayor activo de la empresa.

Lo anterior sumado a las tareas operacionales y estratégicas inherentes que en sí ya son complejas y que además se haga en completo equilibrio, se convierte en el verdadero desafío que está ganando gran interés por parte de las compañías y de la comunidad académica.

Por lo tanto, es prioritario dar una solución integral a lo expuesto, basada en las investigaciones existentes en el contexto del transporte de carga que involucre los elementos mencionados: operación, impacto ambiental y social. El problema se plantea desde los siguientes aspectos: i) Estratégico y operacional en donde además del diseño de rutas se debe tener en cuenta la localización estratégica de los centros de distribución; ii) impacto ambiental que debe tener en cuenta la reducción del consumo de combustibles fósiles producto de su operación de transporte; iii) incluir a los empleados como el activo principal de las compañías y propender por su bienestar. Con lo expuesto anteriormente, se formula la pregunta de este trabajo:

¿Es posible formular un modelo matemático que represente y describa adecuadamente los diferentes aspectos del desarrollo sostenible en una empresa de transporte de carga? Pero además, ¿Es posible resolver el problema planteado usando una metodología exacta y/o metaheurística que permitan la toma acertada de decisiones en procura del bienestar global de la empresa, el medio ambiente y la sociedad?

1.2 Justificación

El transporte de suministros, bienes o en general de carga, es el elemento clave en la cadena logística y le corresponde una tercera parte de los costos logísticos tal como se menciona en [Tseng et al. \(2005\)](#). Además, según [Dekker et al. \(2012\)](#) la cantidad de emisiones de CO_2 por este concepto corresponde a cerca del 14 % del total de emisiones. El transporte también es la fuente principal de emisiones de Óxido de Nitrógeno (NO_x), Dióxido de Azufre (SO_2) y material particulado PM , que repercuten de manera directa en el calentamiento global. En [McKinnon \(2007\)](#) se estima usando los métodos más confiables que el transporte de carga doméstico en el Reino Unido generó 33.7 millones de toneladas de CO_2 en el 2004, que corresponden aproximadamente al 21 % de las emisiones en el sector del transporte y al 6 % del total de emisiones en todos los sectores. Además en [Ugarte et al. \(2016\)](#) se cita un estudio realizado por el Foro Económico Mundial (2009) en el cual se estima que 2800 mega toneladas de emisiones de CO_2 en el mundo podrían atribuirse al transporte y la logística y que representan el 5.5 % del total mundial. De esta cifra, aproximadamente la mitad tiene que ver con el transporte por carretera, un tercio al transporte ferroviario, aéreo y marítimo, y una sexta parte a otros procesos logísticos. También en [Ugarte et al. \(2016\)](#) se concluye que estos datos muestran una oportunidad general que tiene la industria para reducir las emisiones globales de gases de efecto invernadero a través de la logística ecológica.

Por otra parte, varias investigaciones han relacionado el factor social como un valor agregado a su misión dentro del proceso de transporte en la logística, por ejemplo en [Wilson \(2015\)](#) se menciona que aunque el concepto y la aplicación del desarrollo sostenible en las empresas es muy débil, se están haciendo esfuerzos encaminados a establecer políticas claras que se puedan implementar teniendo en cuenta la dimensión social y sus factores: prácticas laborales, trabajo formal, salud, seguridad ocupacional y responsabilidad social. No obstante, [Ahi and Searcy \(2015\)](#) define claramente los retos que tienen las empresas del sector para implementar la línea base triple (*Triple Bottom Line*: TBL), además, plantea un modelo que evalúa la sostenibilidad en una cadena de suministro y lo propone como una herramienta de integración y evaluación de los efectos económicos ambientales y sociales en la cadena de suministro.

No obstante, el problema de ruteo de vehículos (VRP) y específicamente el problema que tiene en cuenta factores estratégicos y operativos: localización y ruteo de vehículos (LRP), es el punto de partida para esta investigación porque condensa los factores del desarrollo sostenible. Por un lado, existe una extensa literatura dedicada a estudiar, formular, resolver y aplicar este problema en la vida real al rededor del mundo [Prodhon and Prins \(2014\)](#), por otro lado, se evidencia el constante interés en integrar los componentes ambiental y social de tal forma que se encuentre una solución de compromiso acorde con las empresas y la sociedad [Govindan et al. \(2014\)](#).

Por lo anterior es imperativo contribuir con una solución que esté acorde con los lineamientos y políticas de las empresas del transporte de carga para afrontar el reto del desarrollo sostenible, al mismo tiempo se fortalece la academia en la implementación de nuevas teorías y metodologías alrededor de la sostenibilidad que se puedan aplicar a

más sectores de la producción y o servicios. Con la investigación, formulación y solución de este problema se hace un aporte importante que beneficia e impacta no solo a las empresas del sector sino a la sociedad y al país.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo General

Formular y resolver el modelo matemático para el problema de ruteo de vehículos con decisiones estratégicas y operacionales en el que se incluyan aspectos económicos, ambientales y sociales.

1.3.2 Objetivos Específicos

Tabla 1.1: Objetivos específicos

| Objetivo Específico | Actividades conducentes para completar el objetivo | Entregables |
|--|--|---------------------------------|
| Implementar un método que resuelva el MDVRP Multi-objetivo | <ul style="list-style-type: none"> - Revisar las metodologías para resolver el MDVRP Multi-objetivo. - Integrar la función objetivo social en el MDVRP. - Implementar un método basado en el ILS para resolver el MDVRP Multi-objetivo. | Artículo |
| Implementar un método Multi-objetivo para el CVRP basado en descomposición | <ul style="list-style-type: none"> - Estudiar el ILS para resolver el problema de ruteo de vehículos. - Estudiar la metodología basada en descomposición para resolver problemas de optimización Multi-objetivo. - Resolver el CVRP bi-objetivo usando el método propuesto ILS/D - Comparar los resultados obtenidos con el ILS/D y los disponibles en la literatura. | Ponencia congreso internacional |
| Formular un modelo matemático para el CVRP Multi-objetivo | <ul style="list-style-type: none"> - Revisar los diferentes modelos matemáticos y técnicas de solución propuestos para el CVRP Multi-objetivo. - Implementar el modelo matemático para el CVRP Multi-objetivo considerando la función objetivo social. - Generar soluciones de referencia para comparar con las obtenidas en el método propuesto ILS/D. | Artículo |
| Resolver el CLRP con consideraciones de sostenibilidad usando el ILS/D | <ul style="list-style-type: none"> - Revisar el estado del arte sobre el CLRP con consideraciones de sostenibilidad. - Revisar los diferentes modelos matemáticos y técnicas de solución propuestos para el CLRP. - Implementar el modelo matemático para el CLRP considerando las funciones objetivo ambiental y social. - Generar soluciones de referencia para una posterior comparación. - Resolver el CLRP con consideraciones de sostenibilidad usando el método propuesto ILS/D. | Artículo |

Table 1.1 Objetivos específicos (continuación)

| Objetivo Específico | Actividades conducentes para completar el objetivo | Entregables |
|---------------------|---|-------------|
| | <ul style="list-style-type: none">- Validar el ILS/D comparando los resultados con los obtenidos en el método exacto.- Validar el ILS/D usando instancias de mayor tamaño. | |

2 Marco Teórico

En este trabajo, la formulación de un modelo sostenible para el problema de localización y ruteo de vehículos (*Sustainable Capacitated Location Routing Problem S-CLRP*) será planteado, para lo cual es llevado a cabo una revisión del CLRP en un marco Multi-objetivo que considera lo económico, ambiental y social, así como los métodos de solución exactos y aproximados usados en la solución de este problema. Del mismo modo es necesario revisar el marco teórico de los problemas antecesores: El problema de Ruteo de Vehículos con restricciones de Capacidad (CVRP) y el problema de Ruteo de Vehículos con Múltiples depósitos con restricciones de Capacidad (MDVRP).

2.1 Formulación de los Problemas de Ruteo de Vehículos

2.1.1 CVRP

El problema de ruteo de vehículos con restricciones de capacidad (CVRP) fue definido por [Dantzig and Ramser \(1959\)](#) y consiste en la distribución de bienes desde un depósito a un conjunto de clientes. Cada uno de los clientes necesita una cierta cantidad de bienes (demanda), para esto, se cuenta con una flota de vehículos y se debe diseñar un conjunto de rutas de tal forma que se pueda atender la demanda teniendo en cuenta las siguientes restricciones operativas: i) No exceder la capacidad del vehículo, ii) en cada solución propuesta un cliente debe ser atendido por un solo vehículo, iii) cada uno de los vehículos de la flota comienza en el depósito, entrega las demandas respectivas y vuelve al depósito. La función objetivo es minimizar la distancia total recorrida diseñando un conjunto de rutas teniendo en cuenta las restricciones. El CVRP es un problema combinatorial NP-duro [Irnich et al. \(2014\)](#).

De acuerdo con [Toth and Vigo \(2002\)](#) el CVRP puede ser descrito de la siguiente forma: Sea $G = (V, A)$ un grafo completo, donde $V = 0, \dots, n$ es el conjunto de vértices y A es el conjunto de arcos. Los vértices $i = 1, \dots, n$ corresponden a los clientes, mientras que el vértice 0 al depósito. Algunas veces, el depósito está asociado con el vértice $n + 1$. Un costo no negativo, c_{ij} , está asociado con cada arco $(i, j) \in A$ y representa el costo del recorrido entre el vértice i y el vértice j . Generalmente, el uso de los arcos (i, i) , no es permitido y esto se impone definiendo $c_{ii} = +\infty$ para todo $i \in V$. Si G es un grafo dirigido, la matriz de costos c es asimétrica, y el problema correspondiente se llama CVRP asimétrico (ACVRP), de lo contrario, se tiene que $c_{ij} = c_{ji}$ para todo $(i, j) \in A$, lo que corresponde a un CVRP simétrico (SCVRP), y el conjunto de arcos A generalmente se reemplaza por un conjunto de arcos no dirigidos, E .

En algunos casos, los vértices están asociados con coordenadas de puntos sobre el plano y el costo c_{ij} , para cada arco $(i, j) \in A$, se define como la distancia euclidiana entre los dos puntos correspondientes a los vértices i y j , sin embargo, en otros casos c_{ij} se

interpreta como costo de viaje o tiempo de viaje entre i y j [Laporte \(1992\)](#).

Cada cliente i ($i = 1, \dots, N$) está asociado con una demanda no negativa conocida d_i , para ser entregada, y el depósito tiene una demanda ficticia $d_0 = 0$. Dado un conjunto de vértices $S \subseteq V$, se define $d(S) = \sum_{i \in S} d_i$ denota la demanda total del conjunto S .

Un conjunto de K vehículos idénticos, cada uno con capacidad C , está disponible en el depósito. Para asegurar factibilidad se establece que $d_i \leq C$ para cada $i = 1, \dots, N$. Cada vehículo puede cubrir como máximo una ruta, y $K \geq K_{min}$, K_{min} es la mínima cantidad de vehículos necesarios para atender a todos los clientes. El valor de K_{min} puede determinarse trivialmente con la expresión $d(S)/C$, cabe destacar que $r(V \setminus \{0\}) = K_{min}$.

Aunque existen varias formulaciones para describir el CVRP, sólo recientemente se han utilizado modelos basados en el flujo de bienes para la solución exacta del CVRP [Toth and Vigo \(2002\)](#), [Baldacci et al. \(2004\)](#).

$$\text{minimize } \sum_{i,j \in V, i \neq j} c_{ij} x_{ij} \quad (2.1)$$

sujeto a:

$$\sum_{i \in V} x_{ij} = 1 \quad j \in V' \quad (2.2)$$

$$\sum_{j \in V} x_{ij} = 1 \quad i \in V' \quad (2.3)$$

$$\sum_{j \in V'} x_{0j} = K \quad (2.4)$$

$$\sum_{i \in V'} x_{j0} = K \quad (2.5)$$

$$u_i - u_j + Cx_{ij} \leq C - d_j \quad \forall i, j \in V', i \neq j, \text{ tal que } d_i + d_j \leq C \quad (2.6)$$

$$d_i \leq u_i \leq C \quad \forall i \in V' \quad (2.7)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j \in V, i \neq j \quad (2.8)$$

$$u_i \in \mathbb{R}, \quad i \in V' \quad (2.9)$$

Donde x_{ij} es una variable binaria igual a 1 si el arco (i, j) hace parte de la solución, $i, j \in V$ e $i \neq j$; V' es el conjunto de vértices excepto el 0 ($V \setminus \{0\}$). Las restricciones 2.2 y 2.3 aseguran que se visite a un cliente exactamente una vez. Las restricciones 2.4 y 2.5 imponen que un vehículo debe usarse exactamente una vez. Las restricciones 2.6 y 2.7 eliminan la formación de *subtours*, imponen los requerimientos de conectividad y capacidad y fueron propuestas para la formulación del CVRP por [Christofides et al. \(1981\)](#). Además, u_i , $i \in V'$ es una variable continua que representa la carga del vehículo después de visitar el cliente i .

las restricciones 2.8 y 2.9 muestran la naturaleza de las variables x_{ij} y u_i .

2.1.2 MDVRP

El problema de ruteo de vehículos con múltiples depósitos (MDVRP) es una variante del problema clásico de ruteo de vehículos (VRP), que consiste en diseñar un conjunto de rutas con un conjunto de clientes que requieren una demanda determinada. Una flota de vehículos atiende las demandas de cada cliente con una capacidad ya definida desde un depósito [Wren and Holliday \(1972\)](#).

En [Montoya-Torres et al. \(2015a\)](#) se hace una revisión de la literatura sobre el MDVRP y de acuerdo con [Renaud et al. \(1996\)](#) el MDVRP se describe formalmente de la siguiente manera. Sea $G = (V, E)$ un grafo donde V es el conjunto de vértices o nodos y E es el conjunto de arcos o aristas conectando cada par de nodos. El conjunto V se divide en dos subconjuntos: $V_c = \{v_1, v_2, \dots, v_N\}$, conjunto de clientes para ser atendidos y $V_d = \{v_{N+1}, v_{N+2}, \dots, v_M\}$, conjunto de depósitos. Cada cliente $v_i \in V_c$ tiene una demanda no negativa d_i . Cada arco que pertenece al conjunto E tiene asociado un costo, distancia o tiempo de viaje c_{ij} . También se cuenta con un total de K vehículos, cada uno con capacidad P_k . El problema consiste en determinar un conjunto de rutas de vehículos de tal manera que: (i) Cada ruta realizada por un vehículo comienza y termina en el mismo depósito. (ii) Cada cliente es atendido exactamente una vez por un vehículo. (iii) La demanda total de cada ruta no excede la capacidad del vehículo. (iv) Se minimiza el costo total de la distribución.

En [Kulkarni and Bhave \(1985a\)](#), se propone un modelo matemático para el MDVRP basado en 3 índices y define las variables de decisión binarias $x_{ijk} = 1$ si el par de nodos i y j hacen parte de la ruta del vehículo k , 0 de lo contrario y las variables auxiliares y_i necesarias para evitar la formación de *subtours*. En esta referencia se propone el siguiente modelo:

$$\text{minimize } \sum_{i=1}^{N+M} \sum_{j=1}^{N+M} \sum_{k=1}^K c_{ij} x_{ijk} \quad (2.10)$$

sujeto a:

$$\sum_{i=1}^{N+M} \sum_{k=1}^K x_{ijk} = 1 \quad j = 1, \dots, N \quad (2.11)$$

$$\sum_{i=1}^{N+M} \sum_{k=1}^K x_{ijk} = 1 \quad i = 1, \dots, N \quad (2.12)$$

$$\sum_{i=1}^{N+M} x_{ihk} - \sum_{j=1}^{N+M} x_{hjk} = 0 \quad \begin{matrix} k = 1, \dots, K \\ h = 1, \dots, N + M \end{matrix} \quad (2.13)$$

$$\sum_{i=1}^{N+M} Q_i \sum_{j=1}^{N+M} x_{ijk} \leq P_k \quad k = 1, \dots, K \quad (2.14)$$

$$\sum_{i=1}^{N+M} \sum_{j=1}^{N+M} c_{ij} x_{ijk} \leq T_k \quad k = 1, \dots, K \quad (2.15)$$

$$\sum_{i=N+1}^{N+M} \sum_{j=1}^N x_{ijk} \leq 1 \quad k = 1, \dots, K \quad (2.16)$$

$$\sum_{j=N+1}^{N+M} \sum_{i=1}^N x_{ijk} \leq 1 \quad k = 1, \dots, K \quad (2.17)$$

$$y_i - y_j + (M + N)x_{ijk} \leq N + M - 1 \quad \forall 1 \leq i \neq j \leq N, \quad 1 \leq k \leq K \quad (2.18)$$

$$x_{ijk} \in \{0, 1\} \quad \forall \quad i, j, k \quad (2.19)$$

Donde las restricciones 2.11 y 2.12 aseguran que cada cliente sea atendido por un solo vehículo. La continuidad de la ruta está representada por restricciones 2.13. Los conjuntos de restricciones 2.14 y 2.15 corresponden a la capacidad del vehículo y al costo total de la ruta. la disponibilidad del vehículo se verifica con las restricciones 2.16 y 2.17. Finalmente, la eliminación de los subtour se garantiza con las restricciones 2.18, las restricciones 2.19 indican la naturaleza de las variables.

2.1.3 CLRP

El CLRP es la combinación de dos problemas dentro de la administración de la cadena de suministros: la ubicación de instalaciones o depósitos y el ruteo de vehículos, los

cuales generalmente han sido estudiados independientemente debido a que el primero implica una decisión estratégica a largo plazo, mientras que el segundo implica un aspecto operacional que se puede modificar muchas veces en el corto plazo [Escobar et al. \(2013\)](#).

El problema de localización de instalaciones (depósitos) con restricciones de capacidad (CFLP) ha sido ampliamente estudiado para resolver la distribución de centros, almacenes, depósitos y redes de comunicaciones entre otros. El CFLP consiste en definir las instalaciones o depósitos que entran a operar en una red de transporte, así como la asignación de dichos depósitos a un conjunto de clientes. Además, cada cliente debe ser asignado a un depósito en particular de tal forma que satisfaga la demanda y a su vez, el total de las demandas de los clientes asignados a un depósito en particular, no debe exceder la capacidad del depósito. Cada depósito tiene asociado un costo de apertura y el objetivo consiste en minimizar el costo total de los depósitos usados para atender la demanda de todos los clientes. Más detalles se muestran en [Uhukan and Demircioglu \(2015\)](#).

El problema de ruteo de vehículos corresponde al CVRP (ver sección [2.1.1](#)) y al MDVRP en el que se consideran varios depósitos. El MDVRP fue formulado en 1972 por [Wren and Holliday \(1972\)](#) y tal como el VRP, es un problema combinatorio NP duro de difícil solución. La referencia teórica usada en este trabajo se explica en la sección [2.1.2](#).

El CLRP por tanto corresponde a un problema de ruteo de vehículos en el que existe un conjunto de depósitos candidatos y la elección de algunos de ellos corresponde a una operación estratégica, mientras que el diseño de rutas representa un problema táctico tal como se muestra en [Nagy and Salhi \(2006\)](#).

En la revisión realizada por [Prodhon and Prins \(2014\)](#) el CLRP se define como una red ponderada y no dirigida que contiene una flota homogénea de vehículos con capacidad limitada, utilizando las siguientes notaciones:

V Conjunto de nodos, $V = I \cup J$

I Conjunto de depósitos candidatos $I = \{1, 2, \dots, m\}$

J Conjunto de clientes a ser atendidos, $J = \{1, 2, \dots, n\}$

O_i Costo de apertura del depósito i .

W_i Capacidad del depósito i .

d_j demanda del cliente j .

K cantidad de vehículos disponibles (tamaño de la flota).

Q capacidad de cada vehículo.

F costo fijo por cada vehículo utilizado.

c_{ij} costo de viaje para entre los nodos i y j (i, j).

Se asume que los vehículos son compartidos por todos los depósitos (no hay depósitos con flota específica) y los c_{ij} satisfacen la desigualdad triangular. El tamaño de la flota K a menudo está limitado en modelos matemáticos, mientras que se convierte una variable de decisión en la mayoría de las heurísticas. Una solución al problema consiste en determinar qué depósitos deben abrirse, asignando cada cliente a un depósito abierto y diseñando rutas para cada depósito y sus clientes. Además, se deben satisfacer las siguientes restricciones: (i) la demanda total de los clientes asignados a un depósito no debe exceder su capacidad; (ii) cada ruta comienza y termina en el mismo depósito; (iii) cada vehículo debe realizar como máximo un viaje; (iv) cada cliente es atendido por un solo vehículo (no hay entregas parciales); y (v) la demanda total de clientes visitados por el vehículo no debe sobrepasar la capacidad del vehículo. Las variables binarias $y_i = 1$ cuando el depósito i está abierto y $x_{ij} = 1$ si el arco (i, j) es atravesado de i a j por un vehículo. La función objetivo a minimizar se formula como la suma de tres términos: costo de los depósitos abiertos ($\sum_{i \in I} O_i y_i$), costos fijos de los vehículos utilizados ($F \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} x_{ij}$) y costo de las rutas ($\sum_{i \in V} \sum_{j \in V} c_{ij} x_{ij}$).

Teniendo en cuenta la definición anterior, en [Toro Ocampo et al. \(2017\)](#) se plantea un modelo matemático para el CLRP con consideraciones de radialidad que permiten eliminar la formación de *subtours*. Los detalles del modelo mencionado se describen a continuación:

Definición de las variables usadas:

- x_{ij} : Variable binaria que indica si el arco (i, j) es usado, $i, j \in V$.
- y_i : Variable binaria que indica si el depósito i es abierto, $i \in I$.
- z_j : Variable binaria que indica si el cliente j es el último en la ruta, $j \in J$.
- f_{ij} : Variable binaria que indica si el cliente j es asignado al depósito i , $i \in I$, $j \in J$.
- a_{ij} : Variable binaria que indica si el vehículo está retornando desde el cliente j al depósito i , $i \in I$, $j \in J$.
- t_{ij} : Variable real que indica la carga transportada entre el arco (i, j) , $i, j \in V$.

Modelo matemático:

$$\min z = \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} a_{ij} + \sum_{i \in I} O_i y_i + F \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} x_{ij} \quad (2.20)$$

Sujeto a:

$$\sum_{i \in V} x_{ij} = 1 \quad \forall j \in J \quad (2.21)$$

$$\sum_{k \in J} x_{jk} + \sum_{i \in I} a_{ij} = \sum_{i \in V} x_{ij} \quad \forall j \in J \quad (2.22)$$

$$\sum_{j \in J} x_{ij} = \sum_{j \in J} a_{ij} \quad \forall i \in I \quad (2.23)$$

$$x_{ij} + x_{ji} \leq 1 \quad \forall i, j \in V \quad (2.24)$$

$$\sum_{i \in V, i \neq j} t_{ij} = \sum_{k \in V, k \neq j} t_{jk} + D_j \quad \forall j \in J \quad (2.25)$$

$$\sum_{i \in V} \sum_{j \in V} x_{ij} = |J| \quad (2.26)$$

$$\sum_{i \in I} f_{ij} \leq 1 \quad \forall j \in J \quad (2.27)$$

$$t_{ij} \leq Qx_{ij} \quad \forall i, j \in V \quad (2.28)$$

$$\sum_{j \in J} t_{ij} \leq W_i y_i \quad \forall i \in I \quad (2.29)$$

$$\sum_{k \in V} x_{jk} = 1 - z_j \quad \forall j \in J \quad (2.30)$$

$$1 + a_{ij} \geq f_{ij} + z_j \quad \forall i \in I, \forall j \in J \quad (2.31)$$

$$-(1 - x_{ju} - x_{uj}) \leq f_{ij} - f_{iu} \quad \forall i \in I, \forall j, u \in V \quad (2.32)$$

$$f_{ij} - f_{iu} \leq (1 - x_{ju} - x_{uj}) \quad \forall i \in I, \forall j, u \in V \quad (2.33)$$

$$f_{ij} \geq x_{ij} \quad \forall i \in I, \forall j \in J \quad (2.34)$$

$$\sum_{i \in I} y_i \geq \frac{\sum_{j \in J} D_j}{\sum_{i \in I} W_i} \quad (2.35)$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} x_{ij} \geq \frac{\sum_{j \in J} D_j}{Q} \quad (2.36)$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} a_{ij} \leq |K| \quad (2.37)$$

La función objetivo 2.20 considera los costos operacionales los cuales incluyen los costos de apertura de depósitos y rutas.

Todos los clientes $j \in J$ deben estar conectados a una ruta 2.21. Las restricciones 2.22 garantizan que el número de arcos que salen del nodo deben ser iguales al número de arcos que llegan al nodo. Las restricciones 2.23 garantizan que para un depósito $i \in I$ exista un arco que deja el depósito y uno que retorne a él. Para evitar la duplicación de arcos, las restricciones 2.24 definen la orientación de un arco y solo uno.

Las restricciones 2.25 representan el balance de flujo en las rutas. La restricción 2.26 identifica los arcos activos para generar topologías radiales. Las restricciones 2.27 garantizan que la demanda de una ruta esté conectada a un depósito. Las restricciones 2.28 y 2.29 garantizan que no se exceda la capacidad de los vehículos y depósitos respectivamente.

Las restricciones 2.30 identifican el nodo cliente final de cada ruta. Si j es un nodo final entonces las restricciones 2.31 garantizan que existe un arco de retorno hacia el depósito. Las restricciones 2.32 y 2.33 identifican los arcos activos y el nodo de inicio de cada ruta para activar el arco de retorno hacia el depósito. Si el arco entre el depósito i y el nodo j está activo, entonces el nodo j está conectado al depósito i tal como se muestra en las restricciones 2.34. La restricción 2.35 define el número mínimo de depósitos abiertos para satisfacer la demanda teniendo en cuenta la capacidad de los depósitos. En 2.36 y 2.37 se establecen el número mínimo de rutas para satisfacer la demanda y el número máximo de rutas posibles teniendo en cuenta una flota de vehículos disponible.

Los autores Toro Ocampo et al. (2017) hacen énfasis en las restricciones 2.25 y 2.26, las cuales garantizan la eliminación de *subtours* y aseguran que todos los clientes estén conectados a través de una red radial (árbol de expansión mínima).

Finalmente, en Prins et al. (2007) se establece que el LRP es un problema *NP-hard* porque se transforma en el VRP cuando $m = 1$ y sigue siendo combinatorio ya que además de asignar los clientes en las rutas y la secuencia de la mismas, debe escoger ciertos depósitos y asignar rutas a los mismos. Por lo tanto, sólo instancias muy pequeñas pueden ser resueltas por los *solvers* de programación lineal (LP), y relajaciones básicas como la lineal proporcionan restricciones débiles.

2.2 Metaheurística basada en Búsqueda Local

Una de las Metaheurísticas más usadas para resolver el problema de ruteo de vehículos se basa en la reducción del espacio de búsqueda mediante el diseño de vecindarios y en la búsqueda local en dicho espacio [Subramanian \(2012\)](#).

2.2.1 Búsqueda Local Iterada (ILS)

La metaheurística propuesta por [Lourenço et al. \(2003\)](#) se basa en la búsqueda por trayectoria y la conformación de estructuras "vecindario" para realizar la búsqueda local. En [Penna et al. \(2013\)](#) se describe en forma general la metaheurística que considera una solución óptima local que haya sido encontrada por un algoritmo de búsqueda local. En lugar de reiniciar el mismo procedimiento desde una solución completamente nueva, el ILS aplica una búsqueda local repetidamente a un conjunto de soluciones obtenidas al perturbar las soluciones óptimas locales visitadas previamente. La idea esencial del ILS reside en el hecho de que la búsqueda se centra en un subconjunto más pequeño, en lugar de considerar todo el espacio de soluciones.

Este subconjunto se define por el óptimo local de un procedimiento de optimización dado [Lourenço et al. \(2003\)](#). Para implementar un algoritmo ILS, se definen cuatro procedimientos:

- *GenerateInitialSolution*, donde se obtiene una solución inicial, puede ser aleatoria o generada a partir de un procedimiento constructivo.
- *LocalSearch*, que mejora la solución obtenida inicialmente basada en una estructura de vecindario.
- **Perturb**, donde se genera un nuevo punto de inicio a través de una perturbación de la solución entregada por *LocalSearch*.
- *AcceptanceCriterion*, que determina desde qué solución debe continuar la búsqueda.

El algoritmo [2.1](#) describe cómo se combinan estos componentes para la construcción del ILS.

```
1:  $s_0 \leftarrow \text{GenerateInitialSolution}$ 
2:  $s^* \leftarrow \text{LocalSearch}(s_0)$ 
3: while Stopping Criterion is not met do
4:    $s' \leftarrow \text{Perturb}(s^*, \text{history})$ 
5:    $s^* \leftarrow \text{LocalSearch}(s')$ 
6:    $s^* \leftarrow \text{AcceptanceCriterion}(s^*, s', \text{history})$ 
7: end while
```

Algorithm 2.1: ILS

El procedimiento de perturbación se usa para salir de la solución óptima local actual. Con frecuencia, el movimiento se elige al azar dentro de un vecindario más grande que el utilizado en la búsqueda local, o un movimiento que la búsqueda local no puede hacer en un solo paso. En principio, se puede utilizar cualquier método de búsqueda local. Sin embargo, el rendimiento del ILS, en términos de calidad de la solución y esfuerzo computacional, depende en gran medida del procedimiento elegido [Subramanian \(2012\)](#). El criterio de aceptación se utiliza para decidir la próxima solución que debe perturbarse. La elección de este criterio es importante porque controla el equilibrio entre intensificación y diversificación. El historial de búsqueda se utiliza para decidir si se debe elegir algún óptimo local previamente encontrado. El desempeño del procedimiento ILS depende en gran medida de la intensidad de los mecanismos de perturbación. Si es pequeño, no se explorarán soluciones nuevas, mientras que si es demasiado grande, adoptará puntos de partida casi al azar.

2.2.2 La Metaheurística ILS para resolver VRPs

Esta sección es tomada del trabajo realizado por [Subramanian \(2012\)](#) el cual describe la heurística llamada ILS-RVND, cuyos pasos principales se resumen en el algoritmo [2.2](#).

v es el número de vehículos (o rutas). La heurística ejecuta *MaxIter* iteraciones (líneas 4-20), donde en cada iteración se genera una solución mediante un procedimiento constructivo (línea 5). El ciclo principal del ILS (líneas 7-16) busca mejorar esta solución inicial utilizando el procedimiento RVND (línea 9) en la fase de búsqueda local combinada con un conjunto de mecanismos de perturbación (línea 14). Cabe anotar que la perturbación siempre se realiza en la mejor solución actual (s') de una iteración dada (criterio de aceptación). El parámetro *MaxIterILS* representa el número máximo de perturbaciones consecutivas permitidas sin que la solución mejore.

Las siguientes subsecciones proporcionan una explicación detallada de los componentes principales de la heurística ILS-RVND relacionadas en este trabajo.

2.2.2.1 Procedimiento constructivo

Una de los procedimientos más sencillos y utilizados para construir soluciones iniciales en los VRPs se llama Algoritmo de Ahorros propuesto por [Clarke and Wright \(1964\)](#) que se detalla a continuación:

1. Construir k rutas tales que cada ruta implique salir del depósito (vértice 0) ir hasta el cliente i y volver al depósito: $v_0 \rightarrow v_i \rightarrow v_0 \quad i \geq 1$.
2. Calcular los “ahorros” resultantes al unir los clientes i y j dados por: $s_{ij} = d_{i0} + d_{0j} - d_{ij} \quad \forall i, j \geq 1 \text{ e } i \neq j$.

3. Ordenar la lista de “ahorros” en forma descendente.
4. Comenzando en la parte superior de la lista de ahorros, incluir el enlace i, j en la ruta siempre que:
 - a) no se sobre pase la capacidad del vehículo.
 - b) que ni i ni j estén en la misma ruta, en cuyo caso una nueva ruta es creada incluyendo tanto a i como a j .
 - c) o uno de los dos puntos esté en el interior de la ruta, es decir que no esté conectado directamente con el depósito, en cuyo caso el enlace i, j se agrega a la ruta.
5. Repita el paso (3) hasta que no se puedan lograr ahorros adicionales.

```

1: Procedure ILS-RVND(MaxIter, MaxIterILS, v)
2: LoadData()
3:  $f^* \leftarrow \infty$ 
4: for  $i = 1, \dots, \text{MaxIter}$  do
5:    $s \leftarrow \text{GenerateInitialSolution}(v, \text{MaxIter}, \text{seed})$ 
6:    $s' \leftarrow s$ 
7:    $\text{iterILS} \leftarrow 0$ 
8:   while  $\text{iterILS} \leq \text{MaxIterILS}$  do
9:      $s \leftarrow \text{RVND}(s)$ 
10:    if  $f(s) < f(s')$  then
11:       $s' \leftarrow s$ 
12:       $\text{iterILS} \leftarrow 0$ 
13:    end if
14:     $s \leftarrow \text{Perturb}(s', \text{seed})$ 
15:     $\text{iterILS} \leftarrow \text{iterILS} + 1$ 
16:  end while
17:  if  $f(s') < f(s^*)$  then
18:     $s^* \leftarrow s'$ 
19:     $f^* \leftarrow f(s')$ 
20:  end if
21:  return  $s^*$ 
22: end for

```

Algorithm 2.2: ILS-RVND

2.2.2.2 Búsqueda Local

También tomando en cuenta el trabajo de [Subramanian \(2012\)](#), la búsqueda local se realiza mediante el procedimiento Vecindario Variable Descendiente (VND) que utiliza un ordenamiento de vecindad aleatorio (RVND).

Sea $N = \{N^{(1)}, N^{(2)}, N^{(3)}, \dots, N^{(r)}\}$ el conjunto de estructuras del vecindario. Cada vez que un vecindario dado del conjunto N no mejora la solución incumbente, el RVND elige aleatoriamente otro vecindario del mismo conjunto para continuar la búsqueda en todo el espacio de la solución. En este caso, N está compuesto solo por estructuras de vecindario inter-rutas.

El pseudocódigo del procedimiento RVND se presenta en el algoritmo 2.3. Primero, se inicializa una lista de vecindarios (NL) que contiene un número predefinido de movimientos *inter-rutas* (línea 2).

En el bucle principal (líneas 3-13), se elige un vecindario $N^{(n)} \in NL$ al azar (línea 4) y luego se determina el mejor movimiento permitido (líneas 5-6). En caso de mejora, se realiza una a una búsqueda local *intra-ruta*, la flota se actualiza (solo cuando la flota de vehículos es ilimitada) y el NL se completa con todos los vecindarios (líneas 7-9). De lo contrario, $N^{(n)}$ se elimina de la NL (línea 11). Finalmente, se retorna la mejor solución encontrada (línea 14).

```

1: Procedure RVND( $s$ )
2: Inicializar la lista de vecindarios inter-ruta (NL)
3: while  $NL \neq 0$  do
4:   Escoger un vecindario  $N^{(n)} \in NL$  aleatoriamente
5:   Encontrar el mejor vecino  $s'$  de  $s \in N^{(n)}$ 
6:   if  $f(s') < f(s)$  then
7:      $s \leftarrow s'$ 
8:      $s \leftarrow$  IntraRouteSearch( $s$ )
9:     Actualizar NL (con todas las estructuras inter-rutas)
10:  else
11:    Eliminar  $N^{(n)}$  de NL
12:  end if
13: end while
14: return  $s^*$ 

```

Algorithm 2.3: RVND

El algoritmo 2.4 describe cómo se implementa el procedimiento de búsqueda *intra-ruta*. En primer lugar, se inicializa una lista de vecindario NL' con todas las estructuras de vecindario *intra-ruta* (línea 2). Luego, mientras NL' no esté vacía, se selecciona aleatoriamente un vecindario $N^{(n)} \in NL'$ y se realiza una búsqueda local exhaustivamente

hasta que no se encuentren más mejoras (líneas 3-9).

```

1: Procedure IntraRouteSearch( $s$ )
2: Inicializar la lista de vecindarios intra-ruta ( $NL'$ )
3: while  $NL' \neq 0$  do
4:   Escoger un vecindario  $N'^{(n)} \in NL'$  aleatoriamente
5:   Encontrar el mejor vecino  $s'$  de  $s \in N'^{(n)}$ 
6:   if  $f(s') < f(s)$  then
7:      $s \leftarrow s'$ 
8:   else
9:     Eliminar  $N'^{(n)}$  de  $NL'$ 
10:  end if
11: end while
12: return  $s$ 

```

Algorithm 2.4: Procedimiento de búsqueda *intra-ruta*

2.2.2.3 Estructuras vecindario *Inter-ruta*

De acuerdo a [Subramanian \(2012\)](#) las estructuras se basan en *intercambios* – λ los cuales consisten en intercambiar λ clientes entre 2 rutas y entre 2 segmentos de rutas diferentes. Para el MDVRP y CLRP también se usan estructuras adicionales llamadas *ShiftDepot* y *SwapDepot*.

Las soluciones asociadas a las estructuras de vecindario son exploradas exhaustivamente y se escoge la estrategia de la mejor mejora implicando gran complejidad computacional.

Para acelerar la búsqueda local se tienen en cuenta varias condiciones que evitan examinar vecinos infactibles. Además, los movimientos tienen en cuenta dos rutas diferentes. En las condiciones también se tiene en cuenta consideraciones de capacidad de los vehículos y/o los depósitos en el caso del CLRP.

A continuación se resumen las estructuras utilizadas en la lista de vecindarios *inter-ruta*

- **Shift(1,0)** ($N^{(1)}$) Un cliente k es transferido desde la ruta r_1 a la ruta r_2 . Se debe tener en cuenta que $demand(r_2) + d_k \leq Q$ donde $demand()$ es la función que calcula la demanda del conjunto de clientes que hacen parte de una ruta, d_k es la demanda del cliente k y Q es la capacidad del vehículo.
- **Swap(1,1)** ($N^{(2)}$) Intercambio entre un cliente k de la ruta r_1 y un cliente l de la ruta r_2 . Se debe tener en cuenta que $demand(r_1) + d_l \leq Q$ y además que $demand(r_2) + d_k \leq Q$.
- **Shift(2,0)** ($N^{(3)}$) Dos cliente adyacentes k y l son transferidos desde la ruta r_1 a la ruta r_2 . Se deben tener en cuenta la transferencia de los segmentos (k, l) y (l, k) , así mismo no exceder la capacidad de la ruta r_2 : $demand(r_2) + d_k + d_l \leq Q$.

- **Swap(2,1)** ($N^{(4)}$) Intercambio de dos clientes k y l de la ruta r_1 con un cliente k' de la ruta r_2 . Se deben tener en cuenta la transferencia de los segmentos (k, l) y (l, k) , así como también la $demand(r_1) + d_{k'} \leq Q$ y además que $demand(r_2) + d_k + d_l \leq Q$.
- **Swap(2,2)** ($N^{(5)}$) Intercambio de dos clientes k y l de la ruta r_1 con dos clientes k' y l' de la ruta r_2 . Se deben tener en cuenta la transferencia de los segmentos (k, l) , (l, k) , (k', l') y (l', k') así como también la $demand(r_1) + d_{k'} + d_{l'} \leq Q$ y además que $demand(r_2) + d_k + d_l \leq Q$.
- **Cruzamiento** ($N^{(6)}$) El arco entre los clientes adyacentes k y l de la ruta r_1 y el arco entre los clientes adyacentes k' y l' de la ruta r_2 , son removidos. Luego, un arco formado por k y l' y otro formado por k' y l son insertados. Las nuevas rutas deben cumplir que $demand(r'_1) \leq Q$ y $demand(r'_2) \leq Q$.
- **InsertionB** ($N^{(7)}$) El vecindario es similar **Shift(1,0)**, sin embargo, el cliente a transferir se toma de la ruta con mayor longitud, insertándolo en otra ruta teniendo en cuenta no exceder la capacidad en la ruta destino. Este vecindario es propuesto por Wang et al. (2015), la elección del cliente a transferir se basa en el algoritmo de ahorros.

En los VRPs que implican varios depósitos como el caso del MDVRP y CLRP se tienen en cuenta 2 vecindarios adicionales:

- **ShiftDepot** ($N^{(7)}$) Una ruta r es transferida desde el depósito $depot_1$ al depósito $depot_2$. Se debe tener en cuenta la disponibilidad de vehículos en el depósito $depot_2$.
- **SwapDepot** ($N^{(8)}$) Intercambio entre la ruta r_1 del depósito $depot_1$ con la ruta r_2 del depósito $depot_2$. Como en el caso anterior, se debe tener en cuenta la capacidad de los depósitos $depot_1$ y $depot_2$.

2.2.2.4 Estructuras vecindario *Intra-ruta*

- **Swap** ($N^{(1)}$) Intercambio entre los clientes k y l de la ruta r_1 .
- **Insertion** ($N^{(2)}$) El cliente k es removido e insertado en otra posición de la ruta.
- **2-opt** ($N^{(3)}$) Dos arcos no adyacentes son borrados y otros dos son añadidos para generar una nueva ruta.
- **Shift(2,0)** ($N^{(4)}$) Un arco es borrado e insertado en otra posición de la ruta.
- **Shift(3,0)** ($N^{(5)}$) Dos arco adyacentes son borrados e insertados en otra posición de la ruta.

2.2.2.5 Mecanismos de perturbación

En [Subramanian \(2012\)](#) se adoptan varios mecanismos de perturbación. Sólo se aceptan movimientos de perturbación factibles. Por cada llamada a la función $Perturb()$, se selecciona aleatoriamente uno de los siguientes movimientos:

- **Multiple Swap (1,1)** $P^{(1)}$ Múltiples movimientos de $Swap(1,1)$ aleatorios se realizan en secuencia.
- **Multiple Shift (1,1)** $P^{(2)}$ Múltiples movimientos de $Shift(1,1)$ aleatorios se realizan en secuencia. $Shift(1,1)$ consiste en transferir el cliente k de la ruta r_1 a la ruta r_2 , mientras que el cliente l de la ruta r_2 es transferido a la ruta r_1 .

2.3 Optimización Multi-objetivo

Según [Collette and Siarry \(2004\)](#) un problema de optimización se define como la búsqueda de un mínimo o un máximo (el óptimo) de una función. Además, si las variables de decisión están restringidas sobre un espacio de búsqueda limitado, se tiene un tipo particular de optimización llamado problema de optimización restringida.

En términos matemáticos, y sin perder generalidad, un problema de optimización se formula así:

minimizar $f(\vec{x})$ sujeto a:

$$g_i(\vec{x}) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m$$

$$h_j(\vec{x}) = 0 \quad j = 1, \dots, p$$

donde \vec{x} representa las variables de decisión, g_i corresponde a las m restricciones de desigualdad y h_j son las p restricciones de igualdad que tiene el problema.

Este conjunto de restricciones delimita el subespacio de soluciones, de las cuales, la mejor se denomina óptimo global. En la optimización Multi-Objetivo, se contemplan dos o más funciones objetivo en conflicto, es decir, no existe una solución que optimice todos los objetivos, por el contrario, existe un conjunto de soluciones llamadas Soluciones óptimas de Pareto. Además de encontrar un conjunto representativo de estas soluciones, es necesario también establecer la solución de compromiso entre los diferentes objetivos.

2.3.1 Definición general del problema de Optimización Multi-Objetivo

En [Ngatchou et al. \(2005\)](#) el problema general de optimización Multi-Objetivo (MO) se formula como sigue:

$$\min \vec{y} = F(\vec{x}) = [f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \dots, f_N(\vec{x})] \quad (2.38)$$

Sujeto a

$$g_j(\vec{x}) \leq 0 \quad j = 1, \dots, M \quad (2.39)$$

Donde $\vec{x} = [x_1, x_2, \dots, x_p] \in \Omega$ es el vector de variables de decisión que hacen parte del espacio de soluciones Ω . \vec{y} es el vector de funciones objetivo y las ecuaciones 2.39 corresponden a las restricciones del problema MO. El espacio cubierto por los vectores objetivo se llama espacio objetivo, mientras que el subespacio de los vectores objetivo que satisface las restricciones corresponde al espacio factible.

La solución utópica es la solución óptima para todos objetivos.

$$\vec{x}_0^* \in \Omega : \quad \forall \vec{x} \in \Omega, \quad f_i(\vec{x}_0^*) \leq f_i(\vec{x}), \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, N\} \quad (2.40)$$

Para el caso más general donde $N > 1$ la solución utópica no existe ya que las funciones objetivo (f_i) están en conflicto, por el contrario, se presenta un conjunto de soluciones llamadas no dominadas (en las cuales un objetivo no puede ser mejorado sin empeorar al menos otro objetivo).

2.3.2 Concepto Optimalidad de Pareto.

Para comparar las soluciones en los problemas MO, los conceptos de dominancia y optimalidad de Pareto son comúnmente utilizados.

Una solución pertenece al conjunto de Pareto si no hay otra solución que puede mejorar al menos uno de los objetivos sin degradación de cualquier otro objetivo.

Formalmente, el vector de decisión $\vec{u} = [u_1, u_2, \dots, u_p]^T$ domina al vector $\vec{v} = [v_1, v_2, \dots, v_p]^T$ (en un contexto de minimización), si y sólo si:

$$f_i(\vec{u}) \leq f_i(\vec{v}) \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}, \quad f_j(\vec{u}) < f_j(\vec{v}) \quad \exists j \in \{1, \dots, N\} \quad (2.41)$$

En la optimización Multi-objetivo, la dominancia de Pareto es utilizada para comparar y clasificar vectores de decisión: \vec{u} domina a \vec{v} en el sentido de Pareto significa que $F(\vec{u})$ es mejor que $F(\vec{v})$ para todos los objetivos, y hay al menos una función objetivo para cuál $F(\vec{u})$ es estrictamente mejor que $F(\vec{v})$.

Una solución \vec{a} es óptima de Pareto si y sólo si no existe otra solución que la domine. El vector objetivo correspondiente $F(\vec{a})$ se llama vector no dominado de Pareto. El conjunto de todas las soluciones óptimas de Pareto se llama conjunto óptimo de Pareto.

De acuerdo con [Marler and Arora \(2004\)](#) en los problemas de optimización Multi-objetivo también es posible definir las condiciones necesarias y suficientes, es decir, es necesario definir si una solución de una formulación de optimización Multi-Objetivo en

particular sirve o no como una condición necesaria y/o suficiente en la optimalidad de Pareto. Si una formulación proporciona una condición necesaria, para que un punto sea óptimo de Pareto, debe ser una solución para esa formulación. En consecuencia, cada punto óptimo de Pareto se puede lograr con ajustes en los parámetros del método (exponentes, pesos, etc.).

Por otro lado, si una formulación proporciona una condición suficiente, entonces su solución siempre es óptima de Pareto, aunque ciertos puntos óptimos de Pareto pueden ser inalcanzables. Varios autores discuten las condiciones necesarias y suficientes teóricas como un medio para calificar la optimización de Pareto. Sin embargo, los autores enfatizan en que los términos necesarios y suficientes se utilizan en un sentido más práctico para describir la capacidad de una formulación del método para proporcionar puntos óptimos de Pareto.

Además [Marler and Arora \(2004\)](#) define el concepto de eficiencia y dominancia en la formulación de un problema de optimización Multi-objetivo:

Definición 1. Eficiencia e ineficiencia: un punto $x^* \in \omega$, es eficiente si no existe otro punto $x \in X$ tales que $F(x) \leq F(x^*)$ con al menos un $F_i(x) < F_i(x^*)$. De lo contrario, x^* es un punto ineficiente.

Definición 2. Frontera eficiente: Es el conjunto de todos los puntos eficientes.

Definición 3. Puntos dominados y no dominados: Un vector de funciones objetivo, $F(x^*) \in Z$, es no dominado si no existe otro vector, $F(x) \in Z$, tales que $F(x) \leq F(x^*)$ con al menos un $F_i(x) < F_i(x^*)$. De lo contrario, $F(x^*)$ es dominado.

Donde Z corresponde al espacio de objetivos y X al espacio de decisión.

Para efectos prácticos, las definiciones 1 y 3 son las mismas, sin embargo, eficiencia se refiere a un vector de variables de decisión en el espacio de decisión, mientras que dominancia se refiere a un vector de funciones en el espacio de función.

2.3.3 Solución de Compromiso.

Una idea alterna sobre la eficiencia y optimalidad de Pareto relaciona un punto único como solución de compromiso. Esto implica la minimización de la diferencia entre el punto óptimo potencial y el *punto utópico* (también llamado punto ideal), el cual es definido como sigue:

Definición 4. Punto utópico: un punto $F^o \in Z$, es un punto utópico si para cada $i = 1, 2, \dots, k$, $F_i^o = \min_x \{F_i(x) | x \in X\}$

En general, F^o es inalcanzable, por lo que se busca una solución lo más cercana posible al punto utópico. Dicha solución se llama solución de compromiso y es óptima de Pareto. El término *cercano* generalmente implica minimizar la distancia euclidiana $N(x)$, la cual se define de la siguiente manera:

$$N(x) = |F(x) - F^o| = \left\{ \sum_1^k (F_i(x) - F_i^o)^2 \right\}^{1/2} \quad (2.42)$$

Los autores enfatizan que no es necesario restringir la *cercanía* al caso de una norma euclidiana tal como se explica en [Vincent \(1983\)](#), además, si diferentes funciones objetivo tienen diferentes unidades, la norma euclidiana o una norma de cualquier grado se vuelve insuficiente para representar matemáticamente esta *cercanía*. En consecuencia, las funciones objetivo deben transformarse (normalizarse) de modo que no tengan dimensión.

El enfoque más sólido para normalizar las funciones objetivo, independientemente de su rango original según [Koski \(1981\)](#) y [Rao and Freiheit \(1991\)](#) se establece así:

$$F_i^{norm} = \frac{F_i(x) - F_i^o}{F_i^{max} - F_i^o} \quad (2.43)$$

En esta ecuación [2.43](#) generalmente tiene valores entre 0 y 1, y depende de la precisión de F_i^{max} y F_i^o .

2.3.4 Método Global Ponderado.

Uno de los métodos de escalarización general más comunes para la optimización Multi-objetivo es el método de objetivo global en el cual todas las funciones objetivo se combinan para formar una sola función. El término *objetivo global* técnicamente se refiere a cualquier función escalarizada [Marler and Arora \(2004\)](#). Una de las funciones de utilidad más generales se expresa en su forma más simple como la suma exponencial ponderada:

$$U = \sum_{i=1}^k w_i (F_i(x))^p, \quad F_i(x) > 0 \quad \forall i \quad (2.44)$$

A partir de [2.44](#) se define la siguiente extensión:

$$U = \left\{ \sum_{i=1}^k w_i (F_i(x) - F_i^o)^p \right\}^{1/p} \quad (2.45)$$

Donde, w es un vector de pesos típicamente establecido por el tomador de decisiones de tal manera que $\sum_{i=1}^k w_i = 1$, $w_i \geq 0$. Generalmente, el valor relativo de los pesos refleja la importancia relativa de los objetivos. En las ecuaciones [2.44](#) y [2.45](#) los componentes de la suma se pueden ver como componentes de una función de distancia que

minimiza la distancia entre el punto de solución y el punto utópico en el espacio objetivo. En consecuencia, los métodos de objetivo global a menudo se denominan *métodos de punto utópico* o *métodos de programación de compromiso*, ya que el tomador de decisiones generalmente tiene que comprometer entre la solución final y el punto utópico. Por eficiencia computacional o en casos donde el mínimo de una función sea inalcanzable, es posible aproximar el punto utópico por \mathbf{z} , lo que se denomina *punto de aspiración*, *punto de referencia* o *punto objetivo* [Marler and Arora \(2004\)](#).

U es la *función de logro* o *función de alcance*. Asumiendo que w es fijo, si $z \notin Z$, minimizar [2.45](#) es necesaria y suficiente para obtener la optimalidad de Pareto [Wierzbicki \(1986a\)](#), es decir, cada punto óptimo de Pareto puede capturarse utilizando un punto de aspiración diferente z , siempre que el punto de aspiración no esté en el espacio objetivo factible Z . Sin embargo, este no es un enfoque práctico para representar el conjunto óptimo de Pareto completo. A menudo, no es posible determinar si z está en el espacio de criterio factible ($z \in Z$) antes de resolver el problema [Marler and Arora \(2004\)](#).

La solución a estos enfoques depende del valor de p . En general, p es proporcional a la cantidad de énfasis que se pone en minimizar la función con la mayor diferencia entre $F_i(x)$ y F_i^o . Sin embargo, variar solo p (con todos los demás parámetros constantes) generalmente produce solo un número limitado de puntos de la solución óptima de Pareto en un vecindario relativamente pequeño. La literatura actual no aborda las repercusiones de aplicar el exponente p a los pesos w_i . De hecho, p y w típicamente no varían o se determinan al unísono, generalmente se selecciona un valor fijo para p . Luego, el usuario establece w para reflejar las preferencias a priori o altera sistemáticamente w para obtener un conjunto de puntos de Pareto. El uso de valores más altos para p aumenta la efectividad del método para proporcionar el conjunto óptimo completo de Pareto [Marler and Arora \(2004\)](#).

Lo anterior significa que para cada punto óptimo de Pareto x_p , existe un vector w y un escalar p tal que x_p es una solución para [2.44](#). Sin embargo, puede ser necesario un valor relativamente grande de p para capturar ciertos puntos óptimos de Pareto, especialmente con conjuntos óptimos de Pareto **no convexos**, a medida que p tiende al infinito, minimizar [2.45](#) ya no es suficiente para la optimización de Pareto; es suficiente sólo para optimización de Pareto *débil*. Por lo tanto, para un valor fijo de p [2.45](#) no es ni necesario ni suficiente para la optimización de Pareto. En este sentido, el valor de p determina la medida en que un método puede capturar todos los puntos óptimos de Pareto, incluso cuando el espacio objetivo factible sea no convexo. En general, aunque el uso de un valor más alto para p permite capturar mejor todos los puntos óptimos de Pareto (con variación en w), hacerlo también puede generar puntos óptimos que no sean de Pareto [Marler and Arora \(2004\)](#).

2.3.5 Método Suma Ponderada.

Según los autores [Marler and Arora \(2004\)](#), el método de suma ponderada es el enfoque más común para resolver problemas de optimización Multi-objetivo y se define en [2.46](#).

$$U = \sum_{i=1}^k w_i F_i(x) \quad (2.46)$$

La ecuación 2.46 es la ecuación 2.44 cuando $p = 1$. Si todos los pesos son positivos, el mínimo de 2.46 es óptimo de Pareto, es decir, minimizar 2.46 es condición suficiente para Pareto. Sin embargo, la formulación no proporciona una condición necesaria para la optimización de Pareto.

En [Das and Dennis \(1997\)](#) proporcionan una interpretación gráfica del método de suma ponderada para problemas de dos objetivos y explica algunas de sus deficiencias. Por su parte, [Koski and Silvennoinen \(1987\)](#) discute e ilustra el método de suma ponderada como un caso especial de métodos que implican *norma p*.

La mala interpretación del significado teórico y práctico de los pesos puede hacer que el proceso de selección intuitiva y arbitraria de pesos sea una tarea ineficiente. En consecuencia, varios autores han desarrollado enfoques sistemáticos para seleccionar pesos por ejemplo en [Yoon and Hwang \(1995\)](#), las diferentes funciones objetivo son ordenadas por importancia donde la función objetivo menos importante recibe un peso de uno, las demás funciones objetivo reciben el peso más un incremento entero.

Varios autores abordan las dificultades con el método de suma ponderada [Koski \(1985\)](#), [Das and Dennis \(1997\)](#) y [Messac et al. \(2000\)](#). Primero, a pesar de los métodos para determinar los pesos, una selección de pesos satisfactoria y a priori no garantiza necesariamente que la solución final sea aceptable. De hecho, los pesos deben ser funciones de los objetivos originales, no constantes, para que una suma ponderada imite con precisión una función de preferencia [Messac et al. \(2000\)](#). Segundo, es imposible obtener puntos en porciones no convexas del conjunto óptimo de Pareto en el espacio objetivo. [Das and Dennis \(1997\)](#) dan razones teóricas para esta deficiencia. Si bien los conjuntos óptimos de Pareto no convexos son relativamente poco frecuentes, se observan algunos ejemplos en la literatura [Koski \(1985\)](#). La dificultad final con el método de suma ponderada es que variar los pesos de manera constante y continua no necesariamente puede dar como resultado una distribución uniforme de los puntos óptimos de Pareto y una representación precisa y completa del conjunto óptimo de Pareto. [Das and Dennis \(1997\)](#) discuten esta deficiencia en detalle e ilustran las condiciones necesarias para una serie de iteraciones de suma ponderada para producir una distribución uniforme de puntos en la curva de Pareto (en el espacio objetivo).

2.3.6 Método min-max.

El enfoque *min-max* o método *Tchebycheff* se muestra en 2.47:

$$U = \max_i (w_i (F_i(x) - F_i^o)), \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (2.47)$$

Donde k es el número de funciones objetivo. La ecuación 2.47 es la ecuación 2.45 cuando $p \rightarrow \infty$. Por lo tanto, 2.47 puede proporcionar el conjunto óptimo completo de Pareto con variación en los pesos y proporciona una condición necesaria para la optimización de Pareto, además, es condición suficiente para la optimización de Pareto débil Koski and Silvennoinen (1987).

La siguiente modificación a 2.47 también provee una condición necesaria y suficiente para la optimalidad de Pareto Wierzbicki (1986b), donde ρ es un número positivo "pequeño" determinado por el tomador de decisiones. Esto implica la suficiencia para la optimización de Pareto. Por lo tanto, 2.47 y 2.48 siempre obtienen puntos óptimos de Pareto, pero pueden omitir Puntos óptimos impropios de Pareto. Sin embargo, estas formulaciones eliminan la posibilidad de tener óptimos de Pareto "débil" Miettinen (2012).

$$U = \max_i (w_i(F_i(x) - F_i^o)) - \rho \sum_{j=1}^k w_j(F_j(x) - F_j^o) \quad (2.48)$$

2.4 Técnicas de Descomposición en la Optimización Multi-objetivo

En Santiago et al. (2014) presentan una revisión sobre los métodos de optimización Multi-objetivo los cuales se basan tradicionalmente en el dominio de Pareto que buscan lograr una representación del frente de Pareto. Sin embargo, el rendimiento de los métodos de optimización tradicionales disminuye para aquellos problemas con más de tres objetivos para optimizar.

La descomposición de un problema Múltiple-objetivo es un enfoque que transforma un problema Múlti-objetivo en muchos problemas de optimización de un solo objetivo, evitando la necesidad de cualquier forma de dominancia Zhang and Li (2007).

Las funciones de agregación utilizan el concepto de valor agregado para representar un conjunto de valores individuales en uno solo. Los usos de las funciones de agregación se encuentran en: probabilidad, estadística, informática, economía, investigación de operaciones. En la optimización Multi-objetivo, la Función Objetivo de agregación (AOF) transforma las funciones en una única función objetivo. La función objetivo de agregación más simple usada en la optimización Multi-objetivo es la siguiente suma objetivo global.

$$U = \sum_{i=1}^k f_i(\vec{x}) \quad (2.49)$$

En 2.49 k es el número de objetivos y \vec{x} es el vector de variables de decisión.

Con 2.49 sólo se obtiene una solución al problema de optimización. Sin embargo, en un problema de optimización Multi-objetivo, existen muchas soluciones óptimas, por lo tanto, para obtener diferentes soluciones óptimas, es necesario encontrar los puntos en las diferentes regiones del frente de Pareto. Para alcanzar este objetivo se utiliza la ecuación 2.50 que muestra una AOF ponderada [Santiago et al. \(2014\)](#).

$$U = \sum_{i=1}^k w_i f_i(\vec{x}) \quad (2.50)$$

La optimización original con funciones de agregación (AOF), inicialmente se desarrolló utilizando programación matemática y se propusieron diferentes AOF para superar diversas dificultades. En problemas de programación lineal con espacios de solución convexa, el uso del método de suma ponderada garantiza una solución óptima, sin embargo, para otros problemas con espacios no convexos, no es posible obtener puntos en las porciones no convexas del conjunto óptimo de Pareto. En la sección 2.3 se explican algunos de los AOF ponderados más utilizados en la Optimización Multi-objetivo.

Para descomponer el problema original de optimización Multi-objetivo en múltiples problemas de un solo objetivo y obtener una buena representación del Frente de Pareto se define lo siguiente:

Sea $W = \{\vec{w}^1, \vec{w}^2, \dots, \vec{w}^n\}$, donde $\vec{w}^i \leftarrow [w_1^i, w_2^i, \dots, w_m^i]$ es un vector de pesos, n es la cantidad de problemas de un solo objetivo y m es la cantidad de funciones objetivo. Aunque varios autores sugieren $\sum_{j=1}^m w_j^i = 1 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$, no hay una razón real para esto, pero para lograr la uniformidad entre las soluciones encontradas es necesario que la suma sea la misma para todos los vectores de pesos definidos.

La selección de vectores de peso no es trivial, pesos similares sesgan la búsqueda hacia una misma región en el espacio objetivo y pesos muy diversos no producen uniformidad. Según los autores, actualmente, el estado del arte muestra tres ideas principales para generar los vectores de pesos: generadores de vectores aleatorios, generadores de vectores sistemáticos y generadores de vectores de optimización [Santiago et al. \(2014\)](#).

Los generadores de vectores aleatorios son el enfoque más común. En el trabajo de [Zhang et al. \(2009\)](#) se utiliza un generador de vectores de este tipo. El procedimiento usado es el siguiente:

1. Generar aleatoriamente de forma uniforme 5000 vectores de pesos para formar el conjunto W_1 . W se inicializa como el conjunto que contiene todos los vectores de pesos correspondientes a los puntos extremos del frente $(1, 0, \dots, 0, 0), (0, 1, \dots, 0, 0), \dots, (0, 0, \dots, 0, 1)$.
2. Encuentre el vector de pesos en W_1 con la mayor distancia a W , agréguelo a W y elimínelo de W_1 .
3. Si el tamaño de W es N , parar, el resultado es W . De lo contrario, ir al paso 2.

Los generadores sistemáticos de vectores usan patrones para generar los vectores de pesos, por ejemplo en [Tan et al. \(2013\)](#), utiliza el principio de diseño de *simplex-lattice*, donde los componentes se forman con la ecuación $x_i = \frac{0}{n}, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n}$, las permutaciones formadas con los componentes se usan como vectores de pesos para lograr un frente de Pareto uniforme.

2.5 Optimización Multi-objetivo en Problemas de Ruteo de Vehículos

Los problemas de ruteo de vehículos (VRPs) generalmente se han estudiado con una única función objetivo, el cual se define mediante las distancias asociadas con el ruteo de vehículos. El problema es diseñar un conjunto de rutas para satisfacer las demandas de los clientes a un costo mínimo. Sin embargo, en la vida real, es necesario tener en cuenta otras funciones objetivo, como las funciones sociales, que consideran, por ejemplo, el equilibrio de la carga de trabajo de los conductores. Esto ha llevado al crecimiento tanto en la formulación de modelos Multi-objetivo como en las técnicas de solución exactas y aproximadas [Matl et al. \(2017\)](#).

2.5.1 CVRP Multi-objetivo

En [Labadie and Prodhon \(2014\)](#) se presenta una revisión del estado del arte en los problemas de ruteo de vehículos considerando varias funciones objetivo en conflicto, las cuales han atraído la atención estas últimas décadas tanto en aspectos teóricos como prácticos.

En [Labadie and Prodhon \(2014\)](#) se define el concepto optimización combinatorial Multi-objetivo (MOCO) y se enfatiza en el hecho de tratar con variables discretas y la dificultad para encontrar su solución. Aunque los objetivos suelen ser funciones lineales, encontrar el conjunto de soluciones eficientes constituye esencialmente la dificultad en los problemas MOCO. Los autores mencionan que es posible aplicar un método exacto para encontrar el conjunto de soluciones utilizando alguna técnica de escalarización y resolviendo problemas de un solo objetivo. Otro enfoque es la adaptación de técnicas metaheurísticas. Un primer tipo consiste en definir direcciones de búsqueda mediante una agregación local de los objetivos, a menudo basada en una suma ponderada, es decir, que a partir de una solución inicial y una dirección dada, se puede encontrar una aproximación de una parte del frente óptimo de Pareto. El principio se repite en varias direcciones para recuperar completamente la frontera no dominada. Un segundo tipo se basa tanto en una población de soluciones como en la noción de dominancia para aproximarse a la frontera no dominada. Finalmente existen también procedimientos específicos y métodos híbridos. En [Deb et al. \(2002\)](#) y [Angus and Woodward \(2009\)](#) se explica con más detalle el desarrollo y el uso de metodologías Metaheurísticas eficaces para MOCO.

En [Labadie and Prodhon \(2014\)](#) presentan el estudio de [Park and Koelling \(1986\)](#) como uno de los primeros en tratar el CVRP con un enfoque Multi-objetivo. En este trabajo, el CVRP clásico se considera con tres objetivos en conflicto: minimización de la distancia total recorrida; minimización del deterioro total de los bienes durante el transporte y maximización del cumplimiento de servicios emergentes y condiciones de los clientes. Este tercer objetivo es relevante para los casos en que algunos clientes deben ser atendidos con urgencia o dependen de otros. Se dice que dos clientes son contingentes cuando existe una dependencia condicional entre ellos, estas dependencias se deben a razones operativas, funcionales o económicas. El problema se resuelve utilizando heurísticas que tienen en cuenta las preferencias de los tomadores de decisiones.

[Jozefowicz et al. \(2009\)](#) consideran un CVRP con dos funciones objetivo: la longitud total de la ruta y el imbalance de las rutas, las cuales se minimizan simultáneamente. En este estudio se considera minimizar la diferencia entre la ruta más larga y la más corta. Se utiliza un algoritmo evolutivo Multi-objetivo con un mecanismo llamado **diversificación elitista**, en cooperación con un método de intercambio y técnicas de paralelización para resolver el problema. En [Chand et al. \(2010\)](#) estudian el CVRP teniendo en cuenta dos funciones objetivo: minimizar el número de vehículos y el costo total (distancia). Para resolver el problema se utiliza una Metaheurística basada en algoritmos genéticos, sin embargo, en este estudio los autores no buscan un frente de Pareto sino una solución única. El enfoque se prueba utilizando instancias de problemas reportadas en la literatura, derivadas de los datos de referencia de Solomon disponibles públicamente para los VRPs. Según los autores, los resultados muestran que este método es capaz de encontrar soluciones de alta calidad, sin embargo, no proporcionan comparaciones con estudios previos.

En general, varios autores abordan el CVRP bi-objetivo, teniendo en cuenta los objetivos económicos y sociales, por ejemplo, en [Matl et al. \(2017\)](#) plantea dos objetivos en conflicto: el objetivo económico consiste en minimizar el costo asociado con el diseño de las rutas del CVRP y el objetivo social consiste en encontrar un equilibrio en la carga de trabajo de cada uno de los conductores. La formulación del objetivo social debe satisfacer varias restricciones establecidas por los contratos sindicales y las regulaciones de la compañía (por ejemplo, períodos de trabajo durante el día, número y duración de los descansos durante el servicio, duración máxima de los períodos de conducción, horas extra). La asignación debe ser equitativa entre los conductores, por lo que debe tener en cuenta factores como las condiciones del tráfico y el número de clientes asignados a cada vehículo [Lee and Ueng \(1999\)](#). Además, en algunos casos, dependiendo de las características de los bienes y servicios, el concepto de equidad es esencial [Schwarze and Voß \(2013\)](#).

Se destacan varios trabajos que introducen el concepto de equidad en el VRP. En [Matl et al. \(2017\)](#), se realiza una revisión exhaustiva y una categorización de la literatura relacionada con los VRP y la equidad, teniendo en cuenta las funciones objetivo clasificadas en cinco grupos:

1. CVRP con balance de ruta (CVRPRB).

2. CVRP con ventanas de tiempo.
3. "min-max VRP".
4. Extensiones sobre el CVRP como CVRP periódico.
5. Muestra amplia selección de aplicaciones basadas en el VRP.

Además, [Matl et al. \(2017\)](#) presentan un análisis teórico que muestra para el caso del VRPRB, no hay una discusión sustancial sobre los méritos o limitaciones relativas del modelo; sin embargo, la decisión de utilizar la duración del viaje como medida de equidad parece estar justificada en la práctica.

[Halvorsen-Weare and Savelsbergh \(2016b\)](#) presentan el único estudio hasta ahora para examinar los efectos de las diferentes funciones de equidad en las soluciones de VRP en un entorno bi-objetivo. Específicamente, los autores consideran el Problema de ruteo general capacitado mixto (MCGRP) como una variante del CVRP y el Problema de ruteo por arco capacitado (CARP). El MCGRP bi-objetivo minimiza el costo y un objetivo de equidad basado en cuatro medidas: **range**, **recorrido máximo**, **desviación absoluta** con respecto a la longitud promedio de la ruta y **desviación absoluta** con respecto a la longitud total de la ruta. Algunos de los experimentos computacionales sugieren que la adopción de la medida de balance en términos de la diferencia entre la ruta más larga y la más corta tiene un buen rendimiento en varios casos. Del mismo modo, el número de soluciones del frente de Pareto puede variar sustancialmente dependiendo de la función de equidad elegida.

[Schwarze and Voß \(2013\)](#) formulan el modelo para el *Skill* VRP teniendo en cuenta el balance de carga y la reutilización de recursos para obtener una carga de trabajo distribuida adecuadamente para los vehículos.

[Matl et al. \(2017\)](#) y [Schwarze and Voß \(2013\)](#) revisan diferentes enfoques existentes en la literatura que miden el balance de carga en los VRPs. Básicamente hay seis tipos diferentes:

1. **min-max** es la medida más simple de la desigualdad existente pero tiene varias desventajas, por ejemplo, no distingue entre distribuciones con peores casos idénticos.
2. **Lexicographic min-max** es una extensión del primer caso en el que no solo se minimiza el peor de los casos, sino también el segundo (sujeto a la minimización del primero) y así sucesivamente. Aunque resuelve el problema del caso anterior, no cuantifica las diferencias restantes.
3. **Range**: Es la diferencia entre el peor y el mejor de los casos y proporciona más información.

4. **La desviación absoluta media** (MAD) se ve afectada por todos los valores de la solución y no solo por los valores extremos, por lo que es "más fuerte" que el rango.
5. **Desviación estándar:** como se menciona en [Matl et al. \(2017\)](#), es posiblemente la medida estadística de dispersión más conocida y satisface el principio de transferencias de *Pigou-Dalton* (PD). Sin embargo, su mayor desventaja es la complejidad computacional.
6. **Coefficiente de Gini** (GC) se utiliza en economía y en estudios de desigualdad en general. El GC asume valores entre 0 y 1, con valores cercanos a 0 correspondientes a baja desigualdad. Sin embargo, su mayor desventaja es su complejidad computacional.

Finalmente, se han presentado varias aplicaciones del VRP, incluida la dimensión social. Por ejemplo, en [Li et al. \(2008\)](#), se incluyen varios beneficios sociales en el modelo de programación para la recolección de residuos sólidos en la ciudad de Porto Alegre (Brasil). Se formula un modelo de ubicación (instalaciones de reciclaje) y ruteo de vehículos resuelto con una heurística el cual ofrece una mejor programación en términos sociales del programa de recolección de residuos sólidos. En [Lee and Ueng \(1999\)](#), la investigación se centra en los trabajadores, más precisamente en los conductores. Dado que los empleados son el recurso más valioso de una empresa exitosa, se tiene en cuenta un factor de balance de carga que indica su bienestar y mejora la competitividad de la empresa. Para lo anterior, se suponen varias consideraciones: el tamaño de la flota de vehículos, una relación lineal entre el tiempo y la distancia recorrida, la demanda de cada consumidor y el tiempo de servicio en los puntos de demanda.

Con respecto a la formulación simultánea de las dimensiones mencionadas anteriormente para el VRP, se han tenido en cuenta varios enfoques, haciendo hincapié en el método de solución. Por ejemplo, en [Oyola and Løkketangen \(2014\)](#), el CVRP se resuelve teniendo en cuenta los costos y el balance de rutas simultáneamente. Se utiliza una heurística basada en GRASP para obtener el frente de Pareto aproximado. [Sarpoung et al. \(2013\)](#), por otro lado, presentan un modelo matemático exacto que resuelve el CVRP con un enfoque Multi-objetivo basado en la generación de columnas donde uno de los objetivos es una función linealizada *min-max* que es calculada mediante la generación de columnas. Finalmente, [Bertazzi et al. \(2014\)](#) presentan un análisis que valida el uso de la función objetivo *min-max* para resolver el problema CVRP multiobjetivo, diferenciándolo de otras funciones objetivo aproximadas que miden el balance de rutas como *min-sum*. El análisis muestra el estudio del peor de los casos, identificando el balance artificial que puede ocurrir en algunas rutas de la solución. Además de lo anterior, establece que la generación del frente de Pareto aproximado usando *min-sum* y *min-max* es un área de investigación prometedora.

El método propuesto resuelve el CVRP Multi-objetivo teniendo en cuenta los costos y el balance de carga de trabajo simultáneamente (bi-CVRP), donde la metaheurística utilizada se basa en una búsqueda por trayectoria llamada Búsqueda Local Iterada

(ILS), que incluye la Búsqueda de Vecindario Variable (VNS). El ILS se compone de dos etapas que mantienen la diversificación e intensificación en el espacio de búsqueda. La etapa de diversificación se realiza a través de un mecanismo de perturbación que permite explorar regiones prometedoras en el espacio de la solución. Por otro lado, la etapa de intensificación se implementa con el VNS, que consiste en operadores especializados responsables de reducir el espacio de la solución realizando la búsqueda en los alrededores cercanos (vecindarios) de la solución actual. En el presente trabajo, el VNS se implementa utilizando dos tipos de operadores: operadores entre rutas, que buscan una mejor solución entre dos rutas, y operadores intra rutas, que buscan una mejor solución en una sola ruta. Ambos operadores se basan en las estrategias *shift*, *swap* y *2-opt*.

Esta metodología fue presentada en [Galindres-Guancha et al. \(2018\)](#), sin embargo aquí se propone la metaheurística ILS con el enfoque de descomposición.

El proceso de descomposición se utiliza para resolver problemas de optimización Multi-objetivo descomponiéndolos en una serie de subproblemas de mono objetivo, además los optimiza simultáneamente [Trivedi et al. \(2017\)](#). En [Zhang and Li \(2007\)](#), la estrategia de descomposición se utiliza dentro de los Algoritmos Evolutivos, lo que significa que este procedimiento tiene una complejidad computacional más baja en cada generación que en el algoritmo Genético con Búsqueda Local Multi-Objetivo (MOGLS) y que el Algoritmo Genético ordenado por no dominancia (NSGA-II). Los resultados experimentales muestran que el Algoritmo Evolutivo Multi-Objetivo basado en Descomposición (MOEA/D) con métodos simples de descomposición supera a MOGLS y NSGA-II en el problema de la mochila (0-1) Multi-objetivo y en problemas de optimización continua Multi-objetivo. Se ha demostrado que MOEA/D utilizando la normalización de objetivos puede tratar objetivos con diferentes escalas dimensionales, y MOEA/D con un método avanzado de descomposición puede generar un conjunto de soluciones distribuidas de manera uniforme para instancias de prueba de tres objetivos.

2.5.2 MDVRP Multi-objetivo

Para resolver el MDVRP, se han sugerido varias técnicas exactas y aproximadas. En el caso del enfoque de técnica exacta, el MDVRP se formula como un problema de Programación Lineal de Entero Mixto (MILP), como se describe en [Kulkarni and Bhawe \(1985b\)](#) y [Montoya-Torres et al. \(2015b\)](#). Sin embargo, estas técnicas convergen en soluciones óptimas para problemas de pequeño tamaño (menos de 50 clientes). Por otro lado, las técnicas metaheurísticas se han utilizado ampliamente para resolver de manera eficiente tanto el MDVRP monoobjetivo como el Problema de ruteo de vehículos con múltiples objetivos y múltiples depósitos (MOMDVRP).

Con respecto al MOMDVRP, se ha investigado muy poco, ya que aproximadamente el 12% de los artículos revisados abordan el MOMDVRP, y sólo el 4% tienen en cuenta el equilibrio en la carga de trabajo como se muestra en [Montoya-Torres et al. \(2015b\)](#).

Por otra parte, en [Lau et al. \(2009\)](#) se estudia el problema MDVRP Multi-objetivo en el que se trata de minimizar tanto la longitud de la distancia de viaje como el tiempo total de viaje requerido por los vehículos. Proponen un algoritmo NSGA-II guiado por lógica difusa (FL-NSGA-II). Con la lógica difusa, dinámicamente ajustan las tasas de cruzamiento y mutación después de generaciones consecutivas. Comparan también, su método con el NSGA-II clásico, con el algoritmo evolutivo de Pareto versión 2 (SPEA2) y con el algoritmo micro-genético (MICROGA). Los resultados muestran que el FL-NSGA-II supera a los otros métodos en los escenarios de prueba.

[Geiger \(2008\)](#), propone un concepto denominado Búsqueda Local Iterada de Pareto (PILS), que combina la intensificación y la diversificación en un algoritmo para generar un conjunto de soluciones tradicionalmente llamadas población, que parte de una solución inicial x_1 , de la cual un conjunto aproximado de Pareto se obtiene aplicando búsquedas iterativas usando la búsqueda de vecindario variable (VNS). A partir de este conjunto, se calculan las soluciones no dominadas (frente de Pareto), de las cuales se selecciona una solución única x_2 y de la cual se aplica la diversificación utilizando un operador de perturbación que obtiene x_3 como una solución perturbada. Este procedimiento se realiza para resolver el problema *Flow Shop Scheduling* Multi-objetivo.

El concepto de Búsqueda Local Multi-Objetivo basado en el concepto de dominancia (DMLS) se explica en [Liefvooghe et al. \(2012\)](#); además, se describen en detalle las siguientes estrategias: relación de dominancia, selección del conjunto actual de soluciones, exploración de vecindarios y criterios de parada. La estrategia se prueba en dos problemas de optimización combinatorial con varios objetivos: el *Flow Shop Problem* (FSP) y el problema del agente viajero (TSP), a partir del cual se propone un modelo DMLS y un estudio comparativo de diferentes estrategias para que el DMLS resuelva variantes del FSP y TSP.

Por otro lado, en [Duarte et al. \(2015\)](#), se explora la adaptación metaheurística VNS junto con sus extensiones para resolver problemas combinatoriales Multi-objetivo. Para lograrlo, el concepto de solución se redefine y se adapta al contexto de Multi-objetivo, donde se toma un conjunto de soluciones llamado *conjunto aproximado de soluciones eficientes*. Esta nueva definición también permite redefinir el significado de mejora, es decir, se da una mejora cuando se agrega una nueva solución al conjunto aproximado de soluciones eficientes. Bajo estas consideraciones, se desarrolla un procedimiento para resolver problemas de optimización combinatorial Multi-objetivo, aunque este enfoque puede requerir un alto esfuerzo computacional.

Para resolver el MOMDVRP se propone una nueva metodología Multi-objetivo para resolver el balance de carga de trabajo y el costo en el MDVRP denominada Búsqueda Local Iterada Multi-objetivo (MOILS), que se basa en la búsqueda por trayectoria llamada Búsqueda Local Iterada (ILS) que incluye la Búsqueda de vecindario variable (VNS). El ILS se compone de dos etapas que mantienen la **diversificación** e **intensificación** en el espacio de búsqueda. La etapa de diversificación se realiza a través de un mecanismo de perturbación que permite explorar regiones promisorias en el espacio de la solución. Por otro lado, la etapa de intensificación se implementa con el VNS, que

consiste en operadores especializados responsables de hacer la búsqueda en los alrededores cercanos (vecindarios) a la solución actual. El VNS se implementa utilizando dos tipos de operadores: los operadores entre rutas que buscan una mejor solución entre dos rutas y los operadores dentro de la ruta que buscan una mejor solución en una sola ruta. Ambos operadores se basan en estrategias de *swap*, *shift* y *2-opt*.

2.5.3 CLRP Multi-objetivo

Otro caso en los VRPs con múltiples depósitos se da cuando los depósitos tienen una capacidad determinada y/o cuando la ubicación de esos es una variable de decisión.

La ubicación de los depósitos junto con el ruteo de vehículos comprende un problema de ubicación y ruteo de vehículos (LRP). Aunque en el pasado los LRPs Multi-objetivo a menudo fueron ignorados como se muestra en [Labadie and Prodhon \(2014\)](#), en [Lin and Kwok \(2006\)](#) abordan el caso en que los objetivos son minimizar el costo total y el balance de la carga de trabajo. Además, en este estudio fue posible una versión teniendo en cuenta múltiples rutas durante el procedimiento de ruteo. Los autores aplicaron dos metaheurísticas: Búsqueda Tabú (TS) y Recocido Simulado (SA) con datos reales y simulados y compararon los resultados de dos versiones: asignación de rutas simultánea o secuencial. Se publicaron otros documentos sobre transporte peligroso, en los que, además del costo, la ubicación y/o el riesgo de transporte deben minimizarse para garantizar un perímetro de seguridad para la población ([Li et al. \(2008\)](#), [Alumur and Kara \(2007\)](#)).

Actualmente, los objetivos para optimizar, además del costo total, están más relacionados con la demanda a ser atendida. [Tavakkoli-Moghaddam et al. \(2010\)](#) presentan un nuevo modelo matemático integrado para una versión con dos objetivos donde el costo total (costo de instalación del depósito, costos fijos y variables de los depósitos y costo del ruteo) debe minimizarse, mientras que la demanda total a atender debe maximizarse. Los autores proponen un algoritmo de búsqueda de dispersión Multi-objetivo (MOSS) y validan tanto la calidad de la solución como la diversidad en varios problemas de prueba a través de algunas métricas de comparación con la Búsqueda Tabú Elite (ETS).

Del mismo modo, una aplicación interesante para el LRP Multi-objetivo se refiere a la logística de atención de desastres. [Rath and Gutjahr \(2014\)](#) consideran el problema logístico después de la ocurrencia de un desastre natural. Se debe establecer un sistema de suministro con almacenes intermedios para proporcionar a las personas afectadas bienes de auxilio. Puede suceder que la oferta total sea menor que la demanda total. Por lo tanto, se propone un modelo de optimización de tres objetivos. El primer objetivo minimiza los costos fijos para depósitos y vehículos. El segundo objetivo minimiza el costo operativo (ruteo y almacenamiento). El tercer objetivo maximiza la demanda cubierta. Aplican el método de ϵ - *constraint* para determinar el frente de Pareto y resuelven el problema con un único objetivo mediante una técnica Metaheurística basada en una formulación MILP con un algoritmo VNS para agregar iterativamente

restricciones generadas. Los resultados usando datos de instancias generadas y un caso real se comparan con los obtenidos usando la metaheurística NSGA-II.

Coutinho-Rodrigues et al. (2012) también estudian respuestas a catástrofes con un enfoque Multi-objetivo para la evacuación urbana y el diseño de rutas y ubicación de refugios. Se consideran seis objetivos en un modelo MILP, incluida la minimización de la distancia total de viaje para toda la población a los refugios, la minimización del riesgo en las rutas y en los refugios, y la minimización del tiempo total requerido para transferir personas de un refugio a un hospital. El enfoque propuesto se prueba para una situación de incendio simulado en el centro histórico de la ciudad de Coimbra, Portugal. Las soluciones se comparan usando varias técnicas gráficas.

2.6 Métricas de desempeño

Para medir la calidad de los frentes, se utilizan las métricas más comunes en la optimización Multi-objetivo que tienen en cuenta los indicadores de *convergencia* y *diversidad* Li et al. (2018), Riquelme et al. (2015).

- **Convergencia** La medida de convergencia es el grado de proximidad basado en la distancia entre las soluciones de S (frente aproximado) con aquellas del frente óptimo de Pareto.
 - **Diversidad** La medida de diversidad indica la distribución y dispersión de las soluciones de un conjunto de Pareto.
1. **Distancia Generacional Invertida (IGD)** Muestra la desviación de las distancias más pequeñas entre los puntos del frente óptimo con respecto al frente aproximado Jiang et al. (2014).

$$IGD(P, S) = \frac{\left(\sum_{i=1}^{|P|} d_i^q\right)^{1/q}}{|P|} \quad (2.51)$$

Donde $d_i = \min_{\vec{s} \in S} \left\| F(\vec{p}_i) - F(\vec{s}) \right\|$, $\vec{p}_i \in P$, $q = 2$, y d_i es la distancia más pequeña entre $\vec{p} \in P$ a las soluciones más cercanas en S .

2. **Hyper Volumen (HV)** clasificado en Jiang et al. (2014) como una medida de *convergencia* y *diversidad* simultáneamente, fue propuesta por Zitzler and Thiele (1998) y se muestra en 2.52. En particular, cuanto más cerca estén las soluciones de S con respecto a las soluciones del frente óptimo, mayor es el valor de HV . Al mismo tiempo, un HV más alto también indica que las soluciones de S están dispersas más uniformemente en el espacio objetivo. Sin embargo, la desventaja de HV radica en la alta complejidad computacional.

$$HV(S, R) = \text{volume} \left(\bigcup_{i=1}^{|S|} v_i \right) \quad (2.52)$$

Donde v_i es el *hiper-cubo* formado por cada punto i de S y un punto de referencia R (punto antiutópico)

3. **Distancia Generacional (GD)** Es el indicador más usado para medir *convergencia*. Muestra la desviación de las distancias más pequeñas entre los puntos del frente aproximado S con respecto al frente óptimo P Jiang et al. (2014).

$$GD(S, P) = \frac{\left(\sum_{i=1}^{|S|} d_i^q \right)^{1/q}}{|S|} \quad (2.53)$$

Donde $d_i = \min_{\vec{p} \in P} \left\| F(\vec{s}_i) - F(\vec{p}) \right\|$, $\vec{s}_i \in S$, $q = 2$, y d_i es la distancia más pequeña entre $\vec{s} \in S$ a las soluciones más cercanas en P .

4. **Dispersión (Spread)** Cuantifica la dispersión de un conjunto de soluciones sobre el espacio objetivo, es decir cuántas soluciones alcanzan los puntos extremos del frente. La ecuación 2.54 describe la métrica.

$$OS(s, p_G, p_B) = \prod_{k=1}^m \frac{\left| \max_{\vec{s} \in S} f_k(\vec{s}) - \min_{\vec{s} \in S} f_k(\vec{s}) \right|}{|f_k(p_B) - f_k(p_G)|} \quad (2.54)$$

Donde $\max_{\vec{s} \in S} f_k(\vec{s})$ y $\min_{\vec{s} \in S} f_k(\vec{s})$ son los valores máximo y mínimo en el objetivo k en el frente S , p_G y p_B son los valores utópico y antiutópico respectivamente.

3 Revisión Estado del Arte

Con el fin de revisar el estudio sobre el CLRP Multi-Objetivo teniendo en cuenta los objetivos económico, ambiental y social, se lleva a cabo una búsqueda bibliográfica. Para esto se escogió la base de datos Scopus debido a que reúne la literatura relacionada con el tema de investigación y la posibilidad de análisis de la información obtenida. Inicialmente se usaron las palabras clave "sustainable" y "location routing problem". Se obtuvieron 15 resultados entre el 2011 y el 2019, mostrando un crecimiento importante en cuanto a la cantidad de trabajos publicados a partir del 2017. De estos resultados se destaca el trabajo de [Govindan et al. \(2014\)](#) el cual propone un modelo de optimización Multi-objetivo integrando factores de sostenibilidad en la toma de decisiones, así mismo, se modela la distribución de alimentos perecederos usando una variante del problema de localización y ruteo de vehículos teniendo como objetivos determinar la ubicación de las instalaciones, optimizar la cantidad de productos entregados y reducir los costos causados por la huella de carbono. La anterior consulta evidencia una escasa literatura en cuanto al concepto de sostenibilidad en el problema de localización y ruteo de vehículos.

Lo anterior muestra que en las consultas realizadas no aparecen claramente los elementos que hacen parte del desarrollo sostenible por lo que se realizó una nueva consulta teniendo en cuenta la naturaleza multi-objetivo del problema, las palabras clave usadas fueron: "Multi-objective", "bi-objective" y "location routing problem". De la consulta anterior, se obtuvieron 98 resultados desde el 2003 con un crecimiento importante a partir del año 2010. La cantidad de trabajos publicados se muestran en la figura 3.1

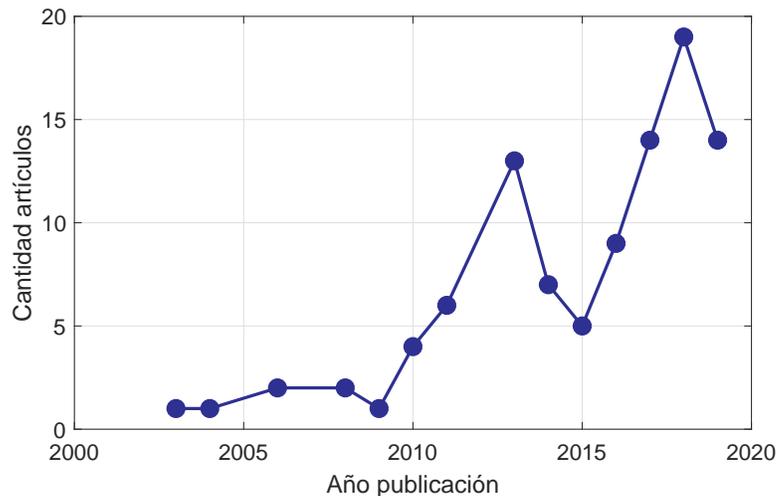


Figura 3.1: Cantidad de artículos publicados por año para el CLRP Multi-objetivo.

De la consulta anterior se hace una clasificación teniendo en cuenta los objetivos a ser optimizados, los resultados se muestran en la tabla 3.1

| Objetivos | Cantidad de artículos |
|---------------------------------|-----------------------|
| Costos-Residuos peligrosos | 21 |
| Costos-Desastres | 16 |
| Costos-Medio ambiente | 13 |
| Costos-Localización | 6 |
| Otros | 9 |
| Costos-Demanda | 5 |
| Costos-Balance | 5 |
| Revisión | 5 |
| Costos-Recolección de basura | 4 |
| Costos-Satisfacción del cliente | 3 |
| Costos-Ambiente-Social (TLRP) | 3 |
| Costos-Remanufactura | 3 |
| Costos-Tiempo | 2 |
| Costos-Colaboracion | 1 |
| Costos-Recolección de sangre | 1 |
| Costos difusos | 1 |

Tabla 3.1: Clasificación por objetivos a optimizar en el CLRP

En la Tabla 3.1 se evidencia la escasa producción de publicaciones sobre el problema Multi-objetivo que optimice costos, impacto ambiental e impacto social para el CLRP de manera simultánea. No obstante, se observa una gran cantidad de trabajos que optimizan 2 objetivos simultáneamente. En esta clasificación el más estudiado considera los objetivos costo-residuos peligrosos con 21 publicaciones, seguido por los problemas costos-desastres y costos-medio ambiente con 16 y 13 publicaciones respectivamente; costos-localización de depósitos con 6, costos-satisfacción de la demanda y costos balance con 5 publicaciones, costos-recolección de basura con 4, costos-satisfacción del cliente 3. Siguiendo el orden aparecen 3 trabajos que optimizan costos, impacto ambiental y factor social simultáneamente, sin embargo para este caso, el modelo corresponde a una extensión del problema de localización y ruteo de vehículos (LRP) llamado problema de transporte localización y ruteo de vehículos (TLRP) destacando el trabajo de [Rabbani et al. \(2018\)](#) el cual aborda el problema teniendo en cuenta el transporte con vehículos de capacidad limitada y la restricción de tiempo impuesta por los clientes, además, el modelo matemático minimiza los costos de distribución, el consumo de combustible y busca un equilibrio en las cargas de trabajo de los conductores. Para resolver el problema utilizan varias técnicas metaheurísticas.

Para finalizar, sigue en este orden los problemas que optimizan los objetivos costos-remanufactura con 3 publicaciones, costos-tiempos con 2 publicaciones y costo-recolección de sangre con una publicación. Cabe destacar el trabajo de [Pekel and Kara \(2019\)](#) el cual plantea el CLRP difuso que tiene en cuenta 3 objetivos: costo de transporte, costo de espera del vehículo y costo de retraso. Se plantea un modelo de programación restringido de probabilidad difusa utilizando la teoría de credibilidad. El problema es resuelto en 4 etapas, en la primera las soluciones iniciales son obtenidas usando un procedimiento goloso, en la segunda la soluciones son mejoradas usando la

metaheurística VNS, en la tercera se aplica un mecanismo de perturbación y en la etapa final se aplica nuevamente el VNS.

De la consulta anterior se destacan los trabajos más referenciados y son presentados en orden cronológico. En [Rabbani et al. \(2019\)](#) se formula un modelo matemático el cual resuelve el problema del manejo de residuos peligrosos industriales. El trabajo tiene en cuenta los siguientes aspectos: (1) Enfoque estocástico; (2) considera un horizonte de planeación para múltiples períodos; (3) incorpora las decisiones de inventario al problema. El problema se formula como un modelo de programación no lineal mixta estocástica Multi-objetivo (MINLP), que se puede convertir fácilmente en un MILP. Para resolver el problema se desarrolla un nuevo procedimiento que es una integración del NSGA-II con la simulación de Monte Carlo. Los resultados verifican la eficiencia del enfoque propuesto, ya que es capaz de encontrar una solución de alta calidad dentro de un tiempo computacional razonable.

En [Zhang et al. \(2018a\)](#) se formula un modelo Multi-Objetivo para la localización de centros de emergencia y ruteo de vehículos teniendo en cuenta incertidumbre. Para resolverlo, se reconstruye un modelo de optimización mono-objetivo robusto y se utiliza un algoritmo híbrido que usa simulación y algoritmos genéticos (GA). La solución del problema consiste en (1) determinar el subconjunto de depósitos y (2) planear las rutas desde los depósitos a los ciudadanos afectados por desastres. Los objetivos son: (1) minimizar el máximo tiempo de viaje de los vehículos, (2) minimizar el costo de recuperación y (3) minimizar las emisiones de CO_2 .

En [Mahmoudsoltani et al. \(2018\)](#) se formula un modelo matemático el cual resuelve el transporte de materiales peligrosos hacia sitios adecuados. Para cuantificar el riesgo se clasifica en: (1) riesgo de accidente, (2) en la población y (3) ambiental. Para resolver el problema se utilizan 3 algoritmos Multi-objetivos evolutivos (MOEAs) clásicos: (1) Algoritmo genético de clasificación no dominado (NSGA-II), (2) Algoritmo Evolutivo de Pareto Fuerte II (SPEA-II) y (3) Algoritmo Evolutivo Multi-Objetivo basado en descomposición (MOEA/D). Los objetivos son: (1) Minimizar el costo total de transporte y (2) minimizar el riesgo total como una agregación del riesgo de accidentes tanto en la población como en el medio ambiente.

El modelo presentado en [Rabbani et al. \(2017\)](#) corresponde al manejo de residuos peligrosos. Para resolverlo se utilizan 2 MOEAs: (1) NSGA -II y (2) Optimización Multi-objetivo usando Cúmulo de partículas (MOPSO). Los objetivos son: (1) Minimizar el costo total, (2) Minimizar el riesgo en el transporte y (3) Minimizar el riesgo en el sitio de disposición de los desechos.

Para encontrar la relación de equilibrio entre la inversión estratégica en depósitos y el impacto ambiental en un largo plazo debido a las operaciones logísticas rutinarias, en [Tricoire and Parragh \(2017\)](#) se plantea un modelo bi-objetivo formulado como un problema entero mixto resuelto usando descomposición para construir las rutas que luego se integran en un modelo de conjuntos para generar la solución. Los objetivos son: (1) Minimizar los costos de la inversión estratégica (depósitos y vehículos) y (2) minimizar la emisión de CO_2 .

En [Toro et al. \(2017\)](#) Se plantea un modelo bi-objetivo para resolver el problema de localización y ruteo de vehículos capacitado (CLRP) teniendo en cuenta el impacto ambiental medido por la cantidad de emisiones de CO_2 . El modelo se representa como un problema de optimización lineal entero mixto y es resuelto usando la técnica exacta $\epsilon - constraint$. Los objetivos son: (1) Minimizar los costos y (2) Minimizar la emisión de CO_2 medida en función del peso de la carga y del vehículo.

En [Farrokhi-Asl et al. \(2017\)](#) se presenta un modelo matemático bi-objetivo para el manejo de la recolección de basuras desde el consumidor hasta los sitios de disposición final, teniendo en cuenta varias características en los vehículos como compartimientos separados, capacidad, tiempos de viaje, limitaciones de distancia y diferenciación de costos. El modelo se resuelve usando dos metaheurísticas conocidas: (1) NSGA-II y (2) MOPSO.

Un nuevo modelo matemático bi-objetivo es utilizado para ubicar depósitos, instalaciones de tratamiento y diseño de rutas desde los depósitos hasta los consumidores en [Rabbani et al. \(2017\)](#). Para resolverlo se emplea la metaheurística NSGA-II y 3 métodos de descomposición para validar los resultados. Los objetivos son: (1) Minimizar los costos y (2) minimizar el impacto negativo que producen las instalaciones de tratamiento en los ciudadanos.

En [Yu and Solvang \(2016\)](#) se formula un modelo de programación lineal entero mixto Multi-objetivo para tratar el problema de localización de residuos peligrosos que se resuelve usando la técnica exacta $\epsilon - constraint$. Los dos objetivos a optimizar son: (1) minimizar costos y (2) minimizar el riesgo.

Por su parte, [Khalili-Damghani et al. \(2015\)](#) proponen un nuevo modelo matemático de programación entera mixta bi-objetivo para resolver el problema de la entrega de productos perecederos. Se utilizan dos técnicas: (1) La metaheurística NSGA-II proponiendo configuraciones especiales en la estructura del cromosoma y en los operadores genéticos y (2) la técnica exacta $\epsilon - constraint$. Los objetivos son: (1) minimizar el total de costos y (2) balancear la carga de trabajo de los centros de distribución.

En [Zhao and Verter \(2015\)](#) presentan un modelo bi-objetivo para el problema de localización y ruteo de vehículos en el que se busca minimizar el riesgo ambiental debido a la emisión de sustancias peligrosas. El modelo propuesto se basa en el flujo de bienes usado ampliamente en el VRP y se utiliza la técnica programación por metas (GP). Los objetivos son: (1) minimizar los costos y (2) minimizar el riesgo ambiental.

En [Rath and Gutjahr \(2014\)](#) Se formula un modelo matemático para establecer un sistema de suministro con instalaciones intermedias para proporcionar auxilios a las personas afectadas en una tragedia. Se utiliza la técnica exacta $\epsilon - constraint$ combinada con una metaheurística y una metaheurística. Los objetivos son: (1) minimizar costos a corto plazo, (2) minimizar costos a mediano plazo y (3) optimizar objetivo humanitario basado en las demandas no atendidas.

En [Samanlioglu \(2013\)](#) Se presenta un modelo Multi-objetivo para la recolección, transporte, reciclaje y disposición final de desechos peligrosos. Para resolverlo se usa la

técnica de agregación ponderada lexicográfica de Tchebycheff (TW). En el modelo matemático se tienen en cuenta 3 objetivos: (1) minimizar el costo total, (2) minimizar el riesgo total de exposición que se presenta en el transporte y (3) minimizar el riesgo total para la población cercana a las instalaciones de tratamiento y disposición de los residuos.

En [Nasab et al. \(2013\)](#) Se presenta un modelo matemático para resolver el problema de localización y ruteo capacitado Multi-objetivo. Para resolverlo se usa la metaheurística Recocido Simulado(SA). los objetivos son: (1) minimizar los costos y (2) minimizar el tiempo máximo de entrega a los consumidores.

En [Zhao \(2010\)](#) se formula un modelo de programación entero mixto 0-1 Multi-objetivo para resolver el problema de recolección, transporte y disposición de residuos peligrosos considerando además, diferentes tipos de residuos y tecnologías para su tratamiento. Para resolverlo, se implementa un algoritmo de programación por metas (GP). Los objetivos son (1) minimizar costos y (2) minimizar el riesgo de exposición.

En [Tavakkoli-Moghaddam et al. \(2010\)](#) se presenta un modelo matemático bi-objetivo para resolver el problema de localización y ruteo de vehículos teniendo en cuenta la demanda entregada. Para resolverlo se utiliza la técnica de búsqueda por dispersión (SS). Los objetivos son (1) minimizar los costos y (2) maximizar el total de la demanda servida.

Un modelo Multi-objetivo para resolver la localización de plantas de disposición final y ruteamiento de desechos sólidos se presenta en [Caballero et al. \(2007\)](#). Para esto se implementa una metaheurística basada en Búsqueda Tabú (TS). Los objetivos son (1) minimizar los costos de instalación, transporte y mantenimiento y (2) minimizar el impacto social medido en términos del rechazo, riesgo máximo e implicaciones negativas por la ubicación de las plantas.

Un modelo integrado para resolver el problema de localización y ruteo es presentado en [Lin and Kwok \(2006\)](#). Se implementa las metaheurísticas búsqueda Tabú (TS) y recocido simulado (SA). Los objetivos son: (1) Minimizar los costos y (2) balancear la carga de trabajo.

En la tabla 3.2 se sintetiza los objetivos que son optimizados y las técnicas de solución utilizadas. Cabe destacar que todos los trabajos buscan minimizar los costos y en la mayor parte de ellos se busca optimizar la disposición de residuos peligrosos cuantificando la función en términos del riesgo que presenta la operación para la sociedad. Por otra parte, también se muestra que es preponderante minimizar el impacto ambiental medido en términos de emisiones de CO_2 y un sólo trabajo lo resuelve usando una técnica exacta. Es interesante notar que en los trabajos que plantean una función objetivo en términos del balance de las rutas, éste es modelado usando la estrategia de linealización min-max.

Se observa también que desde hace poco se utilizan técnicas exactas como ϵ -constraint (para problemas bi-objetivo) y aproximadas basadas en algoritmos evolutivos como MOEA/D.

| | Objetivos | | | | | | Técnicas de Solución | | |
|-----------------------------------|-----------|-----------|---------|--------|---------|---------|-------------------------|------------------------------|----------|
| | Costos | Emisiones | Tiempo | Riesgo | Balance | Demanda | Exacta | Metaheurística | Mat-Heur |
| Rabbani et al. (2019) | X | | | X | | | | NSGA-II Simulación | |
| Zhang et al. (2018a) | X | X | min-max | | | | | Simulación GA | |
| Mahmoudsoltani et al. (2018) | X | | | X | | | | NSGA-II SPEA-II MOEA/D | |
| Rabbani et al. (2018) | X | | | X | | | | NSGA-II MOPSO | |
| Tricoire and Parragh (2017) | X | X | | | | | | | X |
| Toro et al. (2017) | X | X | | | | | $\epsilon - constraint$ | | |
| Farrokhi-Asl et al. (2017) | X | | | X | | | | NSGA-II MOPSO | |
| Rabbani et al. (2017) | X | | | X | | | | NSGA-II | |
| Yu and Solvang (2016) | X | | | X | | | $\epsilon - constraint$ | | |
| Khalili-Damghani et al. (2015) | X | | | | X | | $\epsilon - constraint$ | NSGA-II | |
| Zhao and Verter (2015) | X | | | X | | | GP | | |
| Rath and Gutjahr (2014) | X | | | | | X | | | X |
| Samanlioglu (2013) | X | | | X | | | TW | | |
| Nasab et al. (2013) | X | | min-max | | | | | SA | |
| Zhao (2010) | X | | | X | | | GP | | |
| Tavakkoli-Moghaddam et al. (2010) | X | | | | | X | | SS | |
| Caballero et al. (2007) | X | | | X | | | | TS | |
| Lin and Kwok (2006) | X | | | | X | | | TS SA | |

Tabla 3.2: Resumen de los objetivos y técnicas de solución empleadas para el CLRP

Finalmente, no hay evidencia de trabajos que optimicen más de dos objetivos simultáneamente, excepto por el trabajo de Zhang et al. (2018a), para el problema de localización y ruteo de vehículos multi-objetivo, además, aunque en la mayoría de ellos se menciona sostenibilidad, no se maneja el concepto de acuerdo a la definición formal, es decir, los objetivos costo, impacto ambiental y equidad social han sido poco tratados en la literatura.

Para llenar el vacío identificado, esta investigación pretende aportar tanto en la formulación del modelo que considere los factores de sostenibilidad (S-CLRP) como en la implementación de métodos exacto y aproximado que no han sido abordadas hasta el momento. Las soluciones obtenidas con el método exacto, sirven además de referencia para el análisis que se hace con las soluciones obtenidas con el método aproximado. El método aproximado propuesto se denomina Búsqueda Local Iterada Multi-objetivo usando descomposición (ILS/D)

4 Formulación de los Objetivos de Optimización

Los objetivos a tener en cuenta son los propuestos en la TBL [Garetti and Taisch \(2012\)](#).

Sin embargo, han sido muy pocos los trabajos que formulan objetivos diferentes a minimizar costos en los problemas de ruteo de vehículos considerando múltiples depósitos. En [Lopes et al. \(2013\)](#) hasta ese momento no presenta trabajos con planteamiento Multi-objetivo para el problema de localización y ruteo de vehículos. Lo anterior, se corrobora en la revisión propuesta por [Prodhon and Prins \(2014\)](#) sobre el problema de localización y ruteo de vehículos, presentando sólo 7 trabajos con objetivos especiales o múltiples de un total de 72.

4.1 Consideraciones Ambientales

En [Toro et al. \(2017\)](#) proponen un nuevo modelo matemático para el CLRP considerando la minimización del consumo de combustible que se relaciona directamente con la emisión de gases de efecto invernadero, denominado *Green CLRP* (G-CLRP). El modelo es un problema de programación entera mixta el cual incorpora un conjunto de nuevas restricciones que mantienen los requerimientos de conectividad del problema. El modelo formulado es un problema bi-objetivo que considera la minimización de los costos operacionales y la minimización del consumo de combustible. Los autores muestran también el modelo matemático para calcular el consumo de combustible de un vehículo entre dos nodos, el cual se basa en las fuerzas que actúan sobre un vehículo en movimiento. Para resolver el G-CLRP se utiliza una técnica exacta. Luego se usa una metodología a posteriori con la cual se obtienen algunas soluciones del frente óptimo de Pareto, dejando a decisión de un experto el proceso de postoptimización.

Varios trabajos muestran la relación entre el peso, la carga y la distancia recorrida por el vehículo con el consumo de combustible. Uno de los primeros trabajos fue presentado por [Kara et al. \(2007\)](#). Los autores definen el (*Energy Minimizing Vehicle Routing Problem* (EMVRP) en el cual uno de los objetivos es el producto del total de la carga (incluyendo el peso del vehículo) por la longitud del arco. Así mismo, en [Figliozzi \(2010\)](#) compararon diferentes niveles de congestión de tráfico y velocidades de los vehículos para formular y resolver el problema denominado EVRP (*Emissions Vehicle Routing Problem*).

Por su parte, [Xiao et al. \(2012\)](#) presentan la relación existente entre el peso en bruto del vehículo y la distancia recorrida usando una cantidad establecida de combustible.

En [Bektas and Laporte \(2011\)](#), se establece que la carga, y la velocidad del viaje son factores que pueden controlarse. Desarrollaron cuatro formulaciones matemáticas para el problema de ruteo y contaminación (PRP) considerando ventanas de tiempo, velocidad

y carga.

[Demir et al. \(2014\)](#) propuso el problema bi-objetivo de contaminación (PRU), que consiste en diseñar una serie de vehículos para servir un conjunto de clientes, determinando su velocidad en cada segmento de ruta. Se proponen dos funciones objetivo: minimizar los costos operacionales y el consumo de combustible teniendo en cuenta el tiempo de conducción.

[Erdoğan and Miller-Hooks \(2012\)](#) presentaron el modelo de optimización para el *Green-CVRP* (G-CVRP) el cual calcula el consumo de combustible teniendo en cuenta las especificaciones técnicas, la carga y la distancia recorrida del vehículo. La ecuación de consumo de combustible está integrada al modelo a través de una ecuación de regresión proporcional a la distancia y carga del vehículo. [Lin et al. \(2014\)](#) presentaron una extensa revisión de la literatura sobre *Green Vehicle Routing Problems*.

4.2 Consideraciones Sociales

Se destacan varios trabajos que introducen el concepto de equidad en el problema de ruteo de vehículos. En [Matl et al. \(2017\)](#) se hace una revisión exhaustiva y categorización de la literatura relacionada con VRPs y equidad. Además, clasifican la literatura relacionada teniendo en cuenta las funciones objetivo empleadas en 5 grupos: el primero está basado en el CVRP con balance de rutas CVRPRB, el segundo adiciona ventanas de tiempo a este modelo básico, el tercero se denomina "min-max VRP", el cuarto incluye variantes complejas al VRP como periodic VRP o *arc routing problems* y el quinto muestra una selección amplia de aplicaciones basadas en el VRP. Este artículo presenta un análisis teórico en el que para el caso de los VRPRB no hay una discusión sustancial sobre los méritos o limitaciones relativos del modelo, sin embargo, la decisión de utilizar la duración del viaje como la métrica de equidad parece justificarse en la práctica.

En [Halvorsen-Weare and Savelsbergh \(2016b\)](#) presentan hasta el momento el único estudio que examina los efectos de diferentes funciones de equidad en las soluciones del VRP en un entorno bi-objetivo. Específicamente, los autores ponen en consideración el problema general de ruteo de vehículos capacitado mixto (*Mixed Capacitated General Routing Problem MCGRP*) como una variante del CVRP y el problema de ruteo de arcos capacitado (*Capacitated Arc Routing Problem CARP*). El MCGRP bi-objetivo minimiza el costo y un objetivo de equidad basado en 4 medidas: rango, recorrido máximo, desviación absoluta con respecto a la longitud media del recorrido y desviación absoluta con respecto al total del recorrido. Algunos de los experimentos computacionales sugieren que la adopción de la medida de balance en términos de la diferencia entre la ruta más larga y la más corta tiene un buen desempeño en varias instancias. De la misma forma, la cantidad de soluciones del frente de Pareto puede variar sustancialmente dependiendo de la función de equidad escogida.

Por su parte en [Schwarze and Voß \(2013\)](#) formulan el modelo para el *skill* VRP teniendo

en cuenta el balance de carga y la reutilización de recursos para obtener una carga de trabajo adecuadamente distribuida para los vehículos.

Tanto en [Matl et al. \(2017\)](#) como en [Schwarze and Voß \(2013\)](#) se revisan diferentes enfoques existentes en literatura que miden el balance de carga en los VRPs. Básicamente existen seis diferentes tipos de funciones objetivo:

En todos los casos, l_r , l_t y l_u son las longitudes de las rutas r , t y u que pertenece al conjunto de rutas T , $|T|$ es la cantidad de rutas de la solución y \bar{l} es el promedio de la longitud de las rutas.

- **min-max** es la medida más simple de inequidad existente teniendo varias desventajas, por ejemplo, no es posible distinguir longitudes con idénticos peores casos. En la ecuación (4.1) se minimiza la máxima longitud de las rutas.

$$\min_{u \in T} \max l_u \quad (4.1)$$

- **Lexicographic Min-Max** es una extensión del primer caso en el que no solo se minimiza el peor caso si no que también el segundo caso (sujeto a la minimización del primero) y así sucesivamente. Aunque resuelve el problema del anterior caso no cuantifica las diferencias restantes.
- **Range** $\max(x_i) - \min(x_i)$ es la diferencia entre el peor y el mejor caso suministrando mayor información. En la ecuación (4.2) se minimiza la diferencia entre la longitud máxima y mínima de las rutas

$$\min(\max_{u \in T} l_u - \min_{u \in T} l_u) \quad (4.2)$$

- **Mean Absolute Deviation(MAD)** La desviación media absoluta (MAD) se define como la diferencia absoluta media entre cada longitud de ruta y la longitud de ruta media. Es afectada por todas las longitudes de rutas en la solución y no solo por las longitudes extremas siendo más "fuerte" que el rango. La ecuación 4.3 muestra la MAD

$$\frac{\sum_{r \in T} |l_r - \mu|}{|n|} \quad (4.3)$$

- **Standard Deviation.** Como se menciona en [Matl et al. \(2017\)](#), la desviación estándar es posiblemente la medida estadística de dispersión más conocida y satisface el *Pigou-Dalton principle of transfers* (PD). Sin embargo, su mayor desventaja es la complejidad computacional (ecuación 4.4).

$$\sqrt{\frac{\sum_{r \in T} (l_r - \mu)^2}{|T|}} \quad (4.4)$$

- El Coeficiente de Gini (**Gini Coefficient** GC) es uno de los más usados en economía y en estudios de inequidad en general. El GC asume valores entre 0 y 1, los valores cercanos a 0 corresponden a una baja inequidad. Sin embargo, su mayor desventaja es la complejidad computacional.

Finalmente, se han presentado varias aplicaciones del problema de ruteo de vehículos con inclusión de la dimensión social, por ejemplo en [Li et al. \(2008\)](#) varios beneficios sociales son incluidos en el modelo de programación de recolección de residuos sólidos en la ciudad de Porto Alegre (Brasil). Se formuló un modelo de localización (*recycling facilities*) y ruteo de vehículos resuelto con una heurística entregando mejores programaciones en términos de los aspectos sociales del programa de recolección desperdicios sólidos. En [Lee and Ueng \(1999\)](#) la investigación se enfoca en los trabajadores, más precisamente en los conductores. Teniendo en cuenta que los empleados son el recurso más valioso de un negocio exitoso, se tiene en cuenta un factor de balance de carga que indica el bienestar de los mismos mejorando la competitividad de la compañía. El modelo tiene en cuenta varias consideraciones: tamaño de la flota de vehículos, relación lineal entre el tiempo y distancia recorrida, demanda de cada consumidor y tiempo de atención en los puntos de demanda.

En cuanto a la formulación simultánea de las dimensiones mencionadas anteriormente para el problema de ruteo de vehículos y concretamente para el CLRP, se han presentado pocos trabajos en la literatura, destacando la revisión de [Prodhon and Prins \(2014\)](#) y el análisis taxonómico realizado en [Lopes et al. \(2013\)](#). Sin embargo, los únicos trabajos que involucran el término de sostenibilidad para el CLRP son [Ramos et al. \(2014\)](#) y [Zhang et al. \(2018b\)](#). En [Ramos et al. \(2014\)](#) considera los tres objetivos y fue motivado por el desafío de apoyar a los tomadores de decisiones cuando se maneja un caso real de un sistema de recolección de residuos reciclables, aunque las decisiones estratégicas sobre el número y ubicación de depósitos, vehículos y contenedores se toman de antemano. En [Zhang et al. \(2018b\)](#) se estudia el problema de ruteo y ubicación de las instalaciones de emergencia con múltiples depósitos considerando las emisiones de dióxido de carbono (CO_2) con información incierta. Los autores construyen un modelo que incluye (i) la minimización del tiempo máximo de viaje, (ii) la minimización del costo de atención de la emergencia y (iii) la minimización de las emisiones de CO_2 . Sin embargo, el modelo se reconstruye como un modelo de objetivo único que agrega el costo de atención de la emergencia y las emisiones de CO_2 como una restricción. En [Rabbani et al. \(2018\)](#) presentan una formulación matemática que incluye los objetivos económico, verde y social, que es resuelto en 2 etapas, en la primera se tiene en cuenta el problema de transporte y la capacidad de los vehículos, en la segunda, se tiene en cuenta un intervalo de tiempo de los clientes para ajustarse más a los casos reales.

5 Método de Solución

El estudio de esta tesis está enfocado al planteamiento del modelo matemático, método de solución y análisis de resultados del S-CLRP. Para lograr lo anterior, el estudio fue dividido en varias etapas, en la primera se planteó el modelo matemático siendo necesario la formulación e integración de las funciones objetivo consideradas en el modelo sostenible: económica, ambiental y social. La primera función objetivo que hace referencia a la parte económica es ampliamente conocida en la literatura en el problema de ruteo de vehículos, la segunda, la ambiental usa el modelo estudiado y propuesto en [Toro et al. \(2017\)](#) el cual calcula la emisión de CO_2 por el vehículo en el tramo i, j , en función del peso del vehículo y de la carga, asumiendo velocidad y pendiente del tramo constantes. Para la tercera función objetivo fue necesario estudiar y seleccionar entre los modelos propuestos en la literatura y que además sean compatibles con el CLRP. Dado que el MDVRP es similar al CLRP, además existe conocimiento y literatura relacionada en la solución del MDVRP y con el fin de adquirir experiencia en el tratamiento de este tipo de problema Multi-objetivo, se optó por estudiar dicha función objetivo usando este problema. Como método de solución se usó el MO-ILS, el cual cuenta con referencias en la literatura. Del anterior estudio se logra un amplio conocimiento para la inclusión de la función objetivo social en el S-CLRP.

En la segunda etapa de la investigación y dada la necesidad de contar con métodos de solución exacta y aproximada que resuelven modelos matemáticos con 2 o más objetivos, se hizo un estudio para la selección de los métodos más apropiados. Finalmente, es formulado un método exacto que logra resolver instancias de baja y mediana complejidad matemática y se propone un nuevo método aproximado que resuelve instancias de baja, mediana y gran complejidad matemática. Los dos métodos tanto el exacto como el aproximado se basan en el concepto de descomposición, el primero resuelve n sub-problemas mono objetivo con un solver comercial, el segundo utiliza la metaheurística ILS y se denominó ILS/D.

Finalmente, con el fin de verificar el desempeño del método exacto y del método propuesto ILS/D, los resultados fueron contrastados con los obtenidos en la literatura para el bi-CVRP y con los resultados disponibles por la metaheurística MOEA/D para el problema de la mochila Multi-objetivo (usando la plataforma disponible PlatEMO), confirmando la capacidad del método en la solución de problemas combinatoriales con más de 2 objetivos.

5.1 MDVRP Multi-objetivo

La formulación del MDVRP Multi-objetivo tiene en cuenta dos objetivos simultáneamente: (i) la función objetivo costos tratada en la sección [2.1.2](#) y la función objetivo

social medida como el balance entre las longitudes de ruta como se muestra en la sección 4.2.

Las funciones objetivo a minimizar se describen a continuación:

- **Costos.** La función objetivo se toma de la sección 2.1.2 y se muestra en la ecuación 5.1.

$$\varphi_1 = \min \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} \sum_{k \in D} c_{ij} x_{ijk} \quad (5.1)$$

La función 5.1 minimiza el total de la distancia recorrida por los vehículos desde k depósitos

- **Balance de ruta.** Uno de los desafíos para resolver problemas de ruteo de vehículos teniendo en cuenta el balance de rutas como una de las funciones objetivo es elegir el modelo apropiado que represente dicho balance. Teniendo en cuenta lo sugerido en Halvorsen-Weare and Savelsbergh (2016a) existen dos opciones naturales: $\min \sum_{r \in \Omega} (t_r - \mu)^2$ y $\min t^L - t^S$ donde μ es la distancia promedio de las rutas en la solución, y t^L y t^S son la distancia la ruta más larga y más corta en la solución respectivamente. La primera opción es equivalente a minimizar la varianza de la longitud de las rutas en la solución, es decir una solución con un óptimo balance entre rutas tendrá un valor 0 para esta función objetivo, además, es la medida más adecuada para medir el balance de rutas ya que la medida tiene en cuenta todas las longitudes de las rutas, sin embargo el uso de esta función objetivo puede ser más exigente desde el punto de vista computacional debido a que la longitud promedio de las rutas en una solución no se conoce de antemano y además, la varianza es una función no lineal, por lo que la implementación de esta función objetivo está restringida a métodos de solución aproximados.

La segunda opción equivale a garantizar que todas las longitudes de las rutas están entre la longitud de ruta más larga y la más corta, lo que es deseable en algunos problemas de la vida real como en la entrega de diarios en las que todas las entregas deben ser completadas en un cierto tiempo por lo que las longitudes de las rutas deben ser similares. En lugar de tratar de hacer cumplir el balance de rutas directamente, es posible cumplir el balance de rutas indirectamente, por ejemplo con las funciones objetivo: $\max t^S$ y $\min t^L$, donde t^S y t^L son las longitudes de las rutas más corta y más larga respectivamente. Con estos enfoques en un ambiente real con flota limitada y con vehículos capacitados es posible obtener rutas balanceadas adecuadamente Halvorsen-Weare and Savelsbergh (2016a), además la función objetivo es lineal por lo que es posible formular un modelo matemático para ser resuelto usando un método exacto.

Teniendo en cuenta el conocimiento sobre el método de solución del MDVRP y la precisión de la varianza como medida del balance de ruta, se decidió iniciar la investigación con estos dos objetivos usando un método aproximado denominado MO-ILS para resolver el MDVRP Multi-objetivo. La función objetivo para medir

el balance de ruta se plantea en 5.2, donde $|T|$ es la cantidad de rutas de la solución actual.

$$\varphi_2 = \min \frac{\sum_{r \in T} (l_r - \mu)^2}{|T|} \quad (5.2)$$

5.1.1 Método de Solución Aproximado (MO-ILS)

Generalmente, los problemas Multi-objetivo se han resuelto utilizando metaheurísticas basadas en conjuntos de soluciones llamadas población y algoritmos evolutivos como el NSGA-II, el cual utiliza un algoritmo genético para generar una población ordenada por no-dominancia. Sin embargo, existen otros enfoques basados en búsqueda por trayectoria, por ejemplo Geiger (2008) explican una metaheurística para resolver problemas de optimización Multi-objetivo denominada Búsqueda Local Iterada de Pareto (PILS). PILS combina características adecuadas de cómo funcionan los algoritmos metaheurísticos, cuyo desarrollo se basa en dos etapas: intensificación y diversificación. La intensificación se realiza aplicando el VNS explicado en Mladenović and Hansen (1997). Por otro lado, la diversificación se realiza mediante la aplicación de una perturbación que utiliza operadores para evitar quedarse atascado en óptimos locales.

Para esta etapa del estudio se presenta una adaptación del método explicado anteriormente denominado MO-ILS el cual se describe a continuación:

El procedimiento comienza con una solución inicial s_0 obtenida utilizando el algoritmo planteado en (Paessens, 1988) (paso 1 del Algoritmo 5.1). A partir de esta solución, se realiza una búsqueda en la vecindad de la solución inicial s_0 utilizando operadores entre rutas *Inter_Route*. Inicialmente, se usa la lista de operadores durante el proceso iterativo (pasos 5 y 7). Mientras haya vecindarios sin explorar, se selecciona aleatoriamente un vecindario v (pasos 8 al 10). Luego, desde el vecindario v , se busca el conjunto de soluciones no dominadas para cada solución s del frente F . El nuevo conjunto de soluciones no dominadas se almacena en F' (pasos 11 al 14). Los conjuntos F y F' se combinan y el frente se actualiza (paso 15). Si durante el proceso anterior, hubo al menos una solución no dominada que se convirtió en parte del frente F , la búsqueda se realiza en un conjunto de vecindarios que tienen en cuenta las rutas modificadas. Estos

operadores se denominan *Intra – Route* (pasos 16 a 23).

```

1:  $S_0$  initialSolution()
2:  $F = \{s_0\}$ 
3:  $iter \leftarrow 1$ 
4: while  $iter \leq MaxIter$  do
5:   for  $v \in Inter\_route$  do
6:      $v.used \leftarrow false$ 
7:   end for
8:   while  $\exists v \in Inter\_route | v.used = false$  do
9:      $improveInter \leftarrow 0$ 
10:     $v = random(Inter\_route)$ 
11:    for  $s \in F$  do
12:       $improveInter \leftarrow v(s)$ 
13:    end for
14:    if  $improveInter$  then
15:       $F \leftarrow F \cup F'$ 
16:      for  $s \in F$  do
17:        if  $s.modified$  then
18:           $improveIntra \leftarrow 0$ 
19:          for  $w \in Intra\_route$  do
20:             $improveIntra \leftarrow w(s)$ 
21:          end for
22:        end if
23:      end for
24:       $F \leftarrow F \cup F'$ 
25:    else
26:       $v.used \leftarrow true$ 
27:    end if
28:  end while
29:  for  $s \in F$  do
30:     $s' = Perturbation(s)$ 
31:     $F'.add(s')$ 
32:  end for
33:   $F \leftarrow F \cup F'$ 
34:   $iter = iter + 1$ 
35: end while

```

Algorithm 5.1: MO-ILS

Las soluciones no dominadas obtenidas durante este proceso se almacenan en F' , luego se actualiza F (paso 24). En el caso de no encontrar una solución no dominada en el vecindario v , se excluye de la lista (paso 26). En el frente actual F , se realiza un procedimiento de perturbación en cada una de las soluciones del frente, las nuevas soluciones se almacenan en F' (pasos 29 al 32). Finalmente, el frente se actualiza y comienza una nueva iteración (pasos 33 y 34).

Cada una de las estructuras vecindario $v \in Inter_route$ y $w \in Intra_route$ operan forma similar tal como se describe en el Algoritmo 5.2.

```

1: Procedure V(S)
2: for  $r_x \in S$  do
3:   for  $r_y \in S$  do
4:     if  $r_i \neq r_j$  then
5:       for  $i \in r_x$  do
6:         for  $j \in r_y$  do
7:            $S' \leftarrow set(S, i, j)$ 
8:            $dominada \leftarrow false$ 
9:           for  $S \in F$  do
10:            if  $dominada(S', S)$  then
11:               $dominada \leftarrow true$ 
12:              break
13:            end if
14:          end for
15:          if  $\neg dominada$  then
16:             $F' \leftarrow F' \cup S'$ 
17:          end if
18:        end for
19:      end for
20:    end if
21:  end for
22: end for

```

Algorithm 5.2: V

La búsqueda en el vecindario de S se realiza de forma exhaustiva (pasos 2 a 8). Para cada ruta r_x y r_y , se realizan diferentes movimientos de los clientes i y j . De acuerdo con el vecindario seleccionado, se evalúan las funciones objetivo y se crea una nueva solución s' (paso 7). Si la solución s' no está dominada por el frente actual F , se agrega al frente F' (pasos 11 al 16).

En las Tablas 5.1 y 5.2 se muestran las listas de vecindarios $Inter_route$ e $Intra_route$ usadas en el algoritmo propuesto.

| i | $V(S)$ |
|---|----------------------------|
| 1 | <i>swap</i> (1, 1) |
| 2 | <i>swap</i> (2, 1) |
| 3 | <i>swap</i> (2, 2) |
| 4 | <i>insertion</i> () |
| 5 | <i>shift</i> (2, 0) |
| 6 | <i>shift</i> (3, 0) |
| 7 | <i>dos_opt_paralelo</i> () |
| 8 | <i>dos_opt_cruzado</i> () |

Tabla 5.1: Lista de vecindarios *Inter_Route*.

| i | $V(S)$ |
|---|---------------------|
| 1 | <i>swap</i> (1, 1) |
| 2 | <i>insertion</i> () |
| 3 | <i>shift</i> (2, 0) |
| 4 | <i>shift</i> (3, 0) |
| 5 | <i>dos_opt</i> () |

Tabla 5.2: Lista de vecindarios *Intra_Route*.

La perturbación es el mecanismo que permite salir de óptimos locales. En este trabajo se aplica el mecanismo de perturbación sobre las soluciones del frente actual F el cual consiste en aplicar un operador de vecindad de forma aleatoria teniendo en cuenta la función objetivo de costos. Para definir el tamaño de soluciones que hacen parte del frente F se utiliza la distancia de apilamiento que se explica en [Deb et al. \(2000\)](#).

5.2 CLRP Multi-objetivo

En esta etapa se resuelve el CLRP Multi-objetivo, teniendo en cuenta las consideraciones de sostenibilidad (S-CLRP): costos, impacto ambiental e impacto social simultáneamente.

Las funciones objetivo a minimizar se resumen a continuación:

5.2.1 Función objetivo económica

Para el cálculo de la función objetivo económica se tiene en cuenta la formulación para el CLRP propuesta en [2.1.3](#), en la que se suman los costos estratégicos (apertura de

depósitos) y operacionales (ruteo de vehículos). Además, la longitud de la rutas se evalúa como una proporción de los costos de la misma. La función objetivo económica está dada por la ecuación 5.3.

$$F_1 = \sum_{i,j \in V} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i \in I, j \in J} c_{ij} a_{ij} + \sum_{i \in I} O_i y_i + \sum_{i \in I, j \in J} F a_{ij} \quad (5.3)$$

5.2.2 Función objetivo ambiental

Para el cálculo de la función ambiental se tiene en cuenta lo propuesto 4.1. Las emisiones se calculan tomando en cuenta el combustible que se consume entre dos nodos i y j , el peso del vehículo y la carga del mismo asumiendo una velocidad constante. La función objetivo ambiental está dada por la ecuación 5.4.

$$F_2 = \alpha \left(\sum_{i,j \in V} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i \in I, j \in J} c_{ij} a_{ij} \right) + \gamma \sum_{i,j \in V} c_{ij} t_{ij} \quad (5.4)$$

5.2.3 Función objetivo social

Esta función objetivo se mide a través del balance de ruta tal como se hizo en la primera etapa de esta investigación (sección 5.1), sin embargo, debido a la necesidad de contar con métodos de solución exacta y aproximada que solucionen modelos matemáticos con 2 o más objetivos, se utilizó la segunda opción para medir el balance de rutas. Con la función objetivo *min-max* es posible obtener un adecuado balance entre rutas, además, debido a su naturaleza lineal es posible encontrar una solución exacta en instancias de baja complejidad computacional. La función objetivo escogida minimiza la ruta con la mayor longitud tal como se muestra en 5.5.

$$F_3 = \max_{r \in T} l_r \quad (5.5)$$

Donde T corresponde al conjunto de rutas de la solución actual.

5.2.3.1 Tratamiento de la función objetivo social para el S-CLRP

Suponiendo una flota de vehículos constante, la distancia proporcional al costo entre los nodos i y j , y sin tener el índice que muestre el número de vehículos (rutas) utilizados en una solución particular, es necesario formular la ecuación (5.6).

$$R \geq s_j \quad \forall j \in J \quad (5.6)$$

Donde R es la distancia de la ruta con mayor longitud. s_j es la longitud de la ruta en el nodo j , la cual se formula en la ecuación 5.7.

$$s_j = r_j + c_{ij}a_{ij} \quad \forall i \in I, \quad \forall j \in J \quad (5.7)$$

Donde, r_j es la longitud acumulada en el nodo j de la ruta y $c_{ij}a_{ij}$ es la longitud de la última sección del circuito, entre el nodo j y el depósito i .

Además, en cualquier nodo $j \in J$, se cumple la ecuación (5.8), donde r_i es la longitud acumulada en el nodo i y c_{ij} es la longitud entre los nodos i y j .

$$r_j = r_i + c_{ij} \quad (5.8)$$

La ecuación 5.8 es válida dentro de la ruta si existe el arco entre i y j . Para garantizar lo anterior, se formula la restricción de igualdad 5.9.

$$(r_i + c_{ij} - r_j)x_{ij} = 0 \quad (5.9)$$

Claramente, la ecuación 5.9 es no lineal. Es posible linealizarla, reemplazándola por las restricciones 5.10 y 5.11. Se usó el mismo método de linealización propuesto en Doppstadt et al. (2016).

$$r_i + c_{ij} - r_j \leq (1 - x_{ij})M \quad \forall i \in V, j \in J, i \neq j \quad (5.10)$$

$$r_i + c_{ij} - r_j \geq -(1 - x_{ij})M \quad \forall i \in V, j \in J, i \neq j \quad (5.11)$$

donde M es una constante grande (*big-M*).

Del mismo modo, es posible linealizar la ecuación 5.7, obteniendo las restricciones 5.12 y 5.13.

$$r_j + c_{ij} - s_j \leq (1 - a_{ij})M \quad \forall i \in I, j \in J, i \neq j \quad (5.12)$$

$$r_j + c_{ij} - s_j \geq -(1 - a_{ij})M \quad \forall i \in I, j \in J, i \neq j \quad (5.13)$$

Con las restricciones 5.10 - 5.13, el modelo MILP se resuelve con el solver CPLEX, sin embargo, no es posible obtener un *gap* cercano a 0. Debido a lo anterior, fue necesario agregar una nueva restricción que permite al solver encontrar una solución inicial en el proceso de optimización.

$$s_j \geq r_j \quad j \in J \quad (5.14)$$

Con la ecuación 5.14, el solver inicia el proceso de optimización para la función objetivo F_3 .

5.2.4 Formulación Multi-objetivo para el S-CLRP

$$\text{minimize } (F_1, F_2, F_3) \quad (5.15)$$

en el cual,

$$F_1 = \sum_{i,j \in V} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i \in I, j \in J} c_{ij} a_{ij} + \sum_{i \in I} O_i y_i + \sum_{i \in I, j \in J} F a_{ij} \quad (5.16)$$

$$F_2 = \alpha \left(\sum_{i,j \in V} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i \in I, j \in J} c_{ij} a_{ij} \right) + \gamma \sum_{i,j \in V} c_{ij} t_{ij} \quad (5.17)$$

$$F_3 = R \quad (5.18)$$

Sujeto a las restricciones del G-CLRP propuestas y explicadas en la sección 2.1.3 (Toro et al. (2017)).

Para completar la formulación del modelo CLRP sostenible, se agregan las restricciones correspondientes al balance de rutas (5.10)-(5.14) con r_j y s_j definidas como variables continuas.

5.2.5 Método de solución

Para resolver el CLRP Sostenible Multi-objetivo formulado previamente, se propone inicialmente un método exacto Multi-objetivo que servirá como referencia para llevar a cabo una comparación con los resultados obtenidos utilizando el método propuesto, luego se plantea un procedimiento aproximado ILS/D y se obtienen resultados en instancias de gran complejidad. Finalmente se hace el análisis respectivo con las métricas de desempeño.

5.2.5.1 Método exacto

En esta sección se usa el método ponderado de Tchebycheff, sin embargo, a diferencia de Samanlioglu (2013), los vectores λ se generan espaciados equitativamente usando el método implementado en Nasab et al. (2011). Según Marler and Arora (2004), esta formulación proporciona una condición necesaria para la optimización de Pareto.

El modelo completo que incluye la agregación ponderada de Tchebycheff se muestra en (5.19):

$$\text{minimize } \Psi \quad (5.19)$$

sujeto a:

$$\Psi \geq \lambda_i(F_i - Z_i) \quad \forall 1 \leq i \leq m \quad (5.20)$$

y (5.10)-(5.14) y (5.16)-(5.18).

Para determinar Z_i se generan los vectores $\lambda^1 = [1, 0, 0]$, $\lambda^2 = [0, 1, 0]$, $\lambda^3 = [0, 0, 1]$ y la ecuación (5.20) se modifica por $\Psi \geq \lambda_i F_i \quad \forall 1 \leq i \leq m$ con el que se resuelve el problema planteado en (5.19), obteniendo así los valores mínimos de cada función objetivo.

5.2.5.2 Método aproximado

Para resolver el S-CLRP con un método aproximado, se propone un procedimiento basado en el ILS y en el concepto de descomposición denominado ILS/D para generar el frente aproximado de Pareto. El ILS es una adaptación de la metaheurística explicada en la sección 2.2.2, mientras que el concepto de descomposición se explica en 2.4.

El ILS/D consiste en descomponer el problema original Multi-objetivo en N subproblemas mono objetivo tal como se muestra en el MOEA/D propuesto por Zhang and Li (2007). A diferencia del MOEA/D, en esta investigación se optimiza cada subproblema usando el ILS. Además, se utiliza la función de agregación de Tchebycheff, se establece un conjunto de vectores igualmente espaciados de ponderación $\lambda^1, \dots, \lambda^N$ y se define un punto de referencia z^* . La función objetivo para cada subproblema i se muestra en la ecuación 5.21.

$$g(x|\lambda^i, z^*) = \max_{j=1, \dots, m} \{ \lambda_j^i |f_j(x) - z_j^*| \} \quad (5.21)$$

donde $\lambda^i = (\lambda_1^i, \dots, \lambda_N^i)$. Además igual que en el MOEA/D, se define un vecindario de λ^i como un conjunto de los vectores más cercanos a él. Cada vecino del subproblema i será sujeto de ser reemplazado por el subproblema actual.

Además, se tuvieron en cuenta dos modificaciones al *framework* anterior para aumentar su eficiencia: i) **MOEA/D-GR** (Reemplazo global) se utiliza para mantener convergencia y diversidad realizando una actualización más adecuada en los subproblemas vecinos. En este esquema, primero se encuentra el vecindario más apropiado para ser reemplazado por la solución candidata. Los detalles se muestran en Wang et al. (2014). ii) **MOEA/D-GRA** (Asignación generalizada de recursos) se utiliza para dedicar más

recursos a los subproblemas que tienen más probabilidades de mejorar. En cada iteración, los recursos computacionales se asignan a algunos subproblemas de acuerdo con el vector **PoI**. Específicamente, la estrategia de asignación de recursos en línea se utiliza para definir una función de utilidad basada en el mejoramiento relativo en las últimas Δ iteraciones. Los detalles se muestran en [Zhou and Zhang \(2015\)](#).

Los detalles del algoritmo ILS/D propuesto se muestran en [5.3](#).

```

1:  $\lambda \leftarrow (\lambda^1, \dots, \lambda^N)$ 
2:  $T \leftarrow \alpha N$ 
3:  $EP \leftarrow \emptyset$ 
4:  $total\_demand = \mathbf{getTotalDemand}()$ 
5:  $x_i = \mathbf{getInitialSols}(N, total\_demand), i = 1, \dots, N$ 
6:  $FV_i = F(x_i), i = 1, \dots, N$ 
7:  $B(i) \leftarrow (i_1, \dots, i_T)$ 
8:  $z \leftarrow (z_1, \dots, z_m)$ 
9:  $g_i \leftarrow 0, u_i \leftarrow 0, p_i \leftarrow 0,5 \quad \forall i = 1, 2, \dots, N$ 
10:  $iter \leftarrow 1$ 
11: while  $iter \leq MaxIter$  do
12:   for  $i = 1, 2, \dots, N$  do
13:     if  $rand() \leq p_i$  then
14:        $x'_i = \mathbf{ILS}(x_i, \lambda_i, z_i)$ 
15:       actualizar  $z_i$ 
16:       Encontrar el mejor subproblema para  $x'_i$  (MOEA/D-GR)
17:       Actualizar  $B(i)$  y  $FV$ 
18:       Actualizar  $EP$ 
19:     end if
20:   end for
21:   Actualizar  $u_i$  y  $p_i$  (MOEA/D-GRA)
22:    $iter = iter + 1$ 
23: end while

```

Algorithm 5.3: ILS/D

La línea 1 del algoritmo [5.3](#), se establece un vector de N elementos ponderados e igualmente espaciados donde N es la cantidad de subproblemas. En la línea 2 se define el tamaño del vecindario para cada subproblema, por lo general T es una fracción del total de subproblemas ($0 < \alpha < 1$). En la línea 3 se define el conjunto de soluciones no dominadas. La línea 4 del algoritmo [5.3](#) calcula la demanda total del problema como un parámetro para obtener N soluciones iniciales que corresponden a N subproblemas, para lo cual se implementa el procedimiento *getInitialSol* (línea 5). Los detalles de este procedimiento se muestran en el algoritmo [5.4](#). La línea 6 establece los valores de la función objetivo para cada subproblema. En la línea 7 se establece $B(i)$ con los T índices que corresponden a los vectores más cercanos a λ^i , es decir $\lambda^{i_1}, \dots, \lambda^{i_T}$ son los T vectores ponderados más cercanos a λ^i , Para medir la cercanía entre dos vectores ponderados se usa la distancia euclidiana, es decir i también pertenece a $B(i)$. Si $j \in B(i)$ el subproblema j puede considerarse como un vecino del subproblema i .

La línea 8 establece el punto de referencia o punto utópico, donde z_i es el mejor valor para la función objetivo f_i .

La línea 9 del algoritmo 5.3 muestra la inicialización de los parámetros g_i , u_i y p_i tal como se hace en Zhou and Zhang (2015), donde g_i es la función objetivo en la iteración i , u_i es la función que mide el mejoramiento relativo en las últimas ΔT generaciones y p_i es el vector de mejoramiento (*PoI*), destacando el valor inicial del vector de probabilidad $p_i \leftarrow 0,5$. En las líneas 10 y 11 se define el criterio de parada del algoritmo al alcanzar un número máximo de iteraciones. En las líneas 12 a 20, el algoritmo ILS se ejecuta para cada subproblema i teniendo en cuenta que se optimiza el subproblema con mayor probabilidad de mejorar (línea 13). En la línea 14, se obtiene la solución mejorada x'_i para el problema i usando el algoritmo ILS (2.2). En la línea 15, el punto de referencia z_i se actualiza para cada uno de los objetivos ($j = 1, \dots, m$) teniendo en cuenta que si $z_j > f_j(x'_i)$ entonces $z_j = f_j(x'_i)$. En las líneas 16 y 17, se encuentra el vecindario más apropiado para llevar a cabo el reemplazo de x'_i tal como se muestra en la estrategia propuesta por Wang et al. (2014) para mantener el balance entre convergencia y diversidad en el proceso de optimización. Para encontrar el subproblema j más apropiado para x'_i , se utiliza la siguiente expresión:

$$j = \arg \min_{k=1, \dots, N} \{g(x'_i | \lambda^k, z^*)\}$$

Luego, los T subproblemas más cercanos a los subproblemas j son seleccionados para formar el vecindario de reemplazo, es decir las soluciones de los subproblemas $B(j)$ serán reemplazadas por x'_i . De la misma forma se actualiza $FV_j = F(x'_i)$. El rango de reemplazo es controlado por T .

En la línea 18 se actualiza el conjunto de soluciones no dominadas EP con el siguiente procedimiento: Remover de EP todos los vectores dominados por $F(x'_i)$ y adicionar $F(x'_i)$ a EP si no existen vectores en EP que dominen a $F(x'_i)$.

Finalmente, en la línea 21, se actualiza u_i y p_i con las siguientes expresiones:

$$u_i = \frac{g^i(x_{t-\Delta T}^i) - g^i(x_t^i)}{g^i(x_{t-\Delta T}^i)}$$

$$p_i = \frac{u_i + \varepsilon}{\max_{j=1, \dots, N} \{u_j\} + \varepsilon}$$

donde $i = 1, \dots, N$, $\varepsilon = 1,0X10^{-10}$ es un valor pequeño para evitar la división por cero.

Si un subproblema i ha mejorado en las últimas ΔT generaciones, debería tener una alta probabilidad de mejorar en las próximas generaciones Zhou and Zhang (2015). Al usar el vector PoI anterior, cada subproblema tiene una probabilidad de ser elegido, el de mayor probabilidad, tiene una mayor probabilidad de ser elegido nuevamente.

También, se debe tener en cuenta que cuando no se puede mejorar ningún subproblema en las últimas ΔT generaciones, es decir, $\max_{j=1,\dots,N} \{u_j\} = 0$, los vectores PoI se restablecen: $p_i = 1$ para $i = 1, \dots, N$ y todos los subproblemas serán tenidos en cuenta para la optimización [Zhou and Zhang \(2015\)](#).

```

1: Procedure getInitialSols( $N, total\_demand$ )
2:  $initialSols \leftarrow \{\}$ 
3:  $allocation\_list = setAllocationList()$ 
4:  $combinatorial\_list = setDepotsCombinatorialList(depots, total\_demand)$ 
5: while  $initialSols.size() \leq N$  do
6:    $a = random(allocation\_list)$ 
7:    $depots = random(combinatorial\_list)$ 
8:    $cd = \mathbf{clients\_to\_depots}(depots, a)$ 
9:    $s = \mathbf{savings}(cd)$ 
10:   $initialSols.add(s)$ 
11: end while
12: return  $initialSols$ 

```

Algorithm 5.4: Obtener soluciones iniciales

El algoritmo 5.4 genera N soluciones iniciales teniendo en cuenta la combinación mínima de depósitos con los que sea posible suplir la demanda total de los clientes $total_demand$. El proceso se basa en la creación de clústers conformados por clientes que tienen en cuenta la capacidad tanto de los vehículos como de los depósitos. Inicialmente se inicializa la lista que contendrá las soluciones iniciales (línea 2). Para la creación de clusters y asignación de los clientes a los depósitos, el procedimiento crea un listado con varios algoritmos de clusterización $allocation_list$: aleatorio, centroide, promedio ponderado (average linkage), vecino más próximo (single linkage), vecino más lejano (complete linkage), método de la mediana (basado en centroide) y método de Ward. Para más detalles de estos algoritmos se sugiere revisar [Klose \(1996\)](#) y [Barreto et al. \(2007\)](#) (línea 3). Así mismo, se crea una lista con las posibles combinaciones de depósitos disponibles $combinatorial_list$ de tal forma que se cumpla con la demanda total $total_demand$ (línea 4).

El procedimiento continúa hasta completar N soluciones iniciales (línea 5), en cada iteración se escoge aleatoriamente un algoritmo de asignación y una combinación de depósitos (líneas 6 y 7) con los cuales, el procedimiento **clients_to_depots** asigna los clientes a los depósitos (línea 8). El procedimiento **savings** hace el ruteo de los vehículos basado en el algoritmo de ahorros (línea 9). La nueva solución es adicionada a la lista de soluciones iniciales. Finalmente, se retornan las soluciones iniciales (línea 12).

5.3 Desempeño del ILS/D

Para medir el desempeño del método propuesto ILS/D, inicialmente, resolvió el problema combinatorial de la mochila Multi-objetivo llamado MOKP usando el método

propuesto ILS/D y el MOEA/D. Luego se resolvió el CVRP bi-objetivo usando un método exacto, el ILS/D y el NSGA-II.

5.3.1 MOKP resuelto usando ILS/D y MOEA/D

Para resolver el MOKP usando el ILS/D y el MOEA/D, está disponible la plataforma desarrollada en MATLAB llamada PlatEMO [Tian et al. \(2017\)](#) en la cual se implementó el ILS/D. En PlatEMO están disponibles algoritmos Multi-objetivo como el MOEA/D, problemas combinatoriales como el MOKP y un conjunto de métricas que miden y comparan el rendimiento de los algoritmos.

Se seleccionó el MOKP por ser un problema combinatorial con características semejantes al problema de ruteo de vehículos. La función objetivo de cada mochila (usando la propuesta en PlatEMO) minimiza la diferencia entre el máximo y el beneficio actual de acuerdo a la ecuación 5.22.

$$\text{minimizar } f_i = \sum_{k=1}^N p_k^i - \sum_{k=1}^N p_k^i x_k \quad \forall 1 \leq i \leq m \quad (5.22)$$

sujeto a:

$$\sum_{k=1}^N w_k^i x_k \leq C_i \quad \forall 1 \leq i \leq m \quad (5.23)$$

Donde N es el número de items de cada mochila i , m el número de objetivos y C_i es la capacidad de cada una de las mochilas, p^i es el vector de beneficios y w^i es el vector de pesos para cada mochila. Para los procedimientos ILS/D y MOEA/D se utilizó la función de agregación Tchebycheff.

5.3.2 bi-CVRP resuelto usando un método exacto, ILS/D y NSGA-II

La formulación bi-CVRP tiene en cuenta 2 objetivos simultáneamente: (i) la función objetivo costos basada en la ecuación 5.16 y (ii) la función objetivo social medida usando el balance de rutas tal como se muestra en la ecuación 5.18.

Para realizar un análisis objetivo, además de solucionar el bi-CVRP usando el método propuesto en esta investigación ILS/D, se implementó un método exacto basado en descomposición cuyos resultados servirán como referencia para medir el desempeño del ILS/D y el NSGA-II, la metaheurística NSGA-II es propuesta por [Deb et al. \(2002\)](#) comúnmente usada para resolver los problemas de ruteo de vehículos Multi-objetivo.

- Método exacto.

El modelo propuesto para el bi-CVRP consiste en minimizar las dos funciones objetivo tal como se muestra en 5.24 donde F_1 y F_2 corresponden a las función objetivo costos y balance de rutas respectivamente.

$$\text{minimizar}(F_1, F_2) \quad (5.24)$$

Siendo

$$F_1 = \sum_{i,j \in V} c_{ij}x_{ij} + \sum_{i \in I, j \in J} c_{ij}a_{ij} \quad (5.25)$$

y

$$F_2 = R \quad (5.26)$$

Donde, F_1 corresponde a la ecuación 5.16 cuando $O_i = 0$, $F = 0$ e $|I| = 1$.

En esta parte, se usa el método ponderado de Tchebycheff y se generan vectores igualmente espaciados usando el método implementado en Nasab et al. (2011). La formulación que incluye la función de agregación Tchebycheff se muestra en 5.27

$$\text{minimizar}(\varphi) \quad (5.27)$$

sujeto a

$$\varphi \geq \lambda_i(F_i - Z_i) \quad \forall 1 \leq i \leq m \quad (5.28)$$

Los parámetros $\lambda_i > 0$ son los pesos y $\sum_i \lambda_i = 1$, Z_i es el punto utópico. Para determinar Z_i se generan los vectores $\lambda^1 = [1, 0]$ y $\lambda^2 = [0, 1]$ y se modifica la ecuación 5.28 por $\varphi \geq \lambda_i(F_i)$, con lo cual se resuelve 5.27 obteniendo los puntos extremos del frente.

- Solución del bi-CVRP usando el ILS/D.

Para resolver el bi-CVRP usando el ILS/D, se usan los vectores λ_i usados en el método exacto, además la lista `combinatorial_list` en la línea 4 del algoritmo 5.4 tiene un solo depósito.

- Solución del bi-CVRP usando el NSGA-II.

Finalmente, se resuelve el bi-CVRP usando el NSGA-II el cual es un algoritmo genético que busca obtener un conjunto aproximado de Pareto de un problema de optimización Multi-objetivo. En cada iteración, el algoritmo obtiene una nueva población a partir de la actual mediante el uso de tres componentes: (i) clasificación rápida de soluciones no dominadas, el cual es un algoritmo eficiente para dividir un conjunto de soluciones en los denominados frentes no dominados (el

primero no dominado es el conjunto de soluciones no dominadas, el segundo frente no dominado es el conjunto de soluciones no dominadas después de la eliminación del primer frente no dominado, etc.), (ii) un método de asignación de rango que evalúa la distribución de un conjunto de puntos del frente aproximado de Pareto, y (iii) los operadores genéticos: selección, cruzamiento y mutación.

El NSGA-II se ha utilizado para resolver el CVRP con un enfoque Multi-objetivo, por ejemplo en [Jozefowicz et al. \(2007\)](#) abordan un VRP bi-objetivo el cual minimiza la longitud total de las rutas y el balance de las rutas. El balance se mide usando la diferencia entre la longitud máxima y mínima de las rutas. Además, para mejorar la eficiencia del NSGA-II, se han agregado estrategias de paralelización y diversificación elitista, lo que indica una mejora estricta del conjunto de Pareto generado. Finalmente, en [Sun et al. \(2017\)](#) se utiliza un algoritmo memético basado en NSGA-II para resolver el problema de ruteo de vehículos bi-objetivo con balance de ruta (VRPB) que considera la longitud total de las rutas y el problema de equilibrio entre diferentes rutas, minimizando la longitud máxima de la ruta.

Básicamente, el NSGA-II funciona de la siguiente manera: en la fase de inicialización, se genera una población P_0 con M soluciones. Todas las soluciones se evalúan con respecto a las funciones objetivo. Luego, se aplica una clasificación rápida no-dominada en P_0 , y los operadores genéticos de cruzamiento y mutación se utilizan para generar la población de descendientes Q_0 de tamaño M . En cada iteración $\mu = 1, 2, \dots$, se aplican los operadores hasta cumplir con un criterio de parada. Las dos subpoblaciones $P_{\mu-1}$ y $Q_{\mu-1}$ se unen para formar una población R_μ de tamaño $2M$. La nueva población de padres P_μ se crea realizando primero una clasificación no-dominada sobre R_μ y luego copiando sucesivamente las soluciones a P_μ en el orden dado por los frentes no dominados obtenidos, hasta que P_μ contenga M elementos. Para el último frente no dominado tenido en cuenta antes de que P_μ esté lleno, la elección de las soluciones se basa en la distancia de dispersión. Finalmente, el cruzamiento y la mutación se aplican a la población de padres actual P_μ para generar la población descendiente Q_μ .

Para el NSGA-II, se utilizan los siguientes parámetros obtenidos mediante experimentos computacionales en instancias de prueba seleccionadas. Se utilizó el mecanismo de selección por torneo con dos competidores, para el cruzamiento se utiliza el procedimiento PMX, se aplica una probabilidad de cruce de 1 y una probabilidad de mutación de 0.1, sin embargo, para los operadores de mutación, la probabilidad de selección de cada cliente se establece en 0.02, lo que lleva a un intercambio de clientes pequeño, se utiliza un número fijo de 2000 iteraciones como criterio de parada. El tamaño de la población se calcula igual que [Reiter and Gutjahr \(2012\)](#) en función del número de clientes: $N = (100 * \text{clientes}/20)$.

6 Resultados Computacionales

En este capítulo se muestran los resultados y se analiza el desempeño del ILS/D para resolver problemas Multi-objetivo. Inicialmente se muestran los resultados y se comparan con el MOEA/D, usando para esto el problema de la mochila Multi-objetivo (MOKP), posteriormente es analizado el MDVRP Multi-objetivo cuyo fin es el estudio de la función objetivo social y se resuelve usando una Metaheurística basada en el ILS, en el siguiente análisis se usa el ILS/D para resolver el CVRP Multi-objetivo con el fin de estudiar de la función objetivo social, los resultados se comparan con un método exacto y la metaheurística NSGA-II. Finalmente se analizan los resultados obtenidos para el CLRP sostenible usando un método exacto basado en descomposición usando instancias de baja complejidad y los obtenidos con el ILS/D para instancias de gran complejidad.

6.1 Resultados MOKP usando ILS/D Y MOEA/D

Se implementó el ILS/D para resolver el MOKP en instancias con $m = 3$ objetivos con 250, 500 y 750 items, los resultados se compararon con los disponibles en la plataforma PlatEMO [Tian et al. \(2017\)](#). En los dos casos para cada instancia se realizaron 30 corridas independientes y se utilizó la función de agregación Tchebycheff. Los cálculos de las métricas de desempeño se tomaron de dicha plataforma.

Las pruebas se corrieron en un equipo Intel®Core™ i7 con 3.4 GHz y 16 GB de RAM en un sistema operativo Windows 7 pro 64 bits.

Para cada instancia se tuvo en cuenta como criterio de parada el tiempo de ejecución de acuerdo a la tabla [6.1](#).

Tabla 6.1: Tiempos de ejecución para cada instancia

| Tamaño (items) | Tiempo de ejecución (s) |
|----------------|-------------------------|
| 250 | 1800 |
| 500 | 3600 |
| 750 | 5400 |

Las métricas usadas fueron HV e IGD dado que miden convergencia y diversidad simultáneamente. En el caso del HV, un mayor valor indica un mayor Hiper volumen, en contraste, para el IGD, un menor valor indica mayor convergencia. Los valores promedio obtenidos para los indicadores HV e IGD, se muestran en la tabla [6.2](#).

La tabla [6.2](#) muestra que el ILS/D es ligeramente superior al MOEA/D en las instancias pequeña y mediana 250 y 500 items respectivamente, para la instancia grande de 750

Tabla 6.2: Resultados para las métricas HV e IGD

| Tamaño (items) | Tiempo de ejecución (s) | ILS/D | | MOEA/D | |
|----------------|-------------------------|-------------|-------------|--------|------|
| | | HV | IGD | HV | IGD |
| 250 | 1800 | 0.41 | 1.45 | 0.40 | 1.52 |
| 500 | 3600 | 0.40 | 2.84 | 0.39 | 3.07 |
| 750 | 5400 | 0.38 | 4.17 | 0.38 | 4.44 |

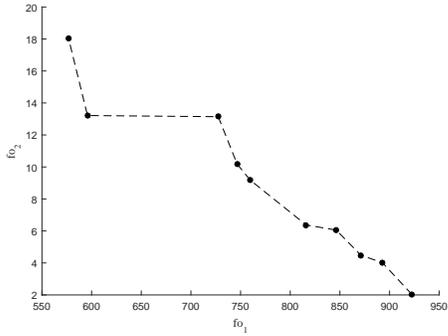
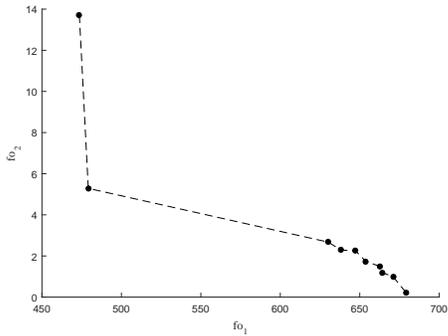
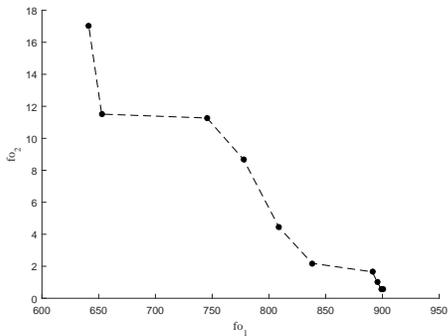
items el ILS/D tiene el mismo rendimiento del MOEA/D. Para el caso del IGD se observa que el ILS/D es superior al MOEA/D en las 3 instancias.

6.2 Resultados MDVRP Multi-objetivo

El MO-ILS se codificó en C++ y las pruebas se corrieron en un equipo Intel®Core™ i7 con 3.4 GHz y 16 GB de RAM en un sistema operativo Windows 7 pro 64 bits.

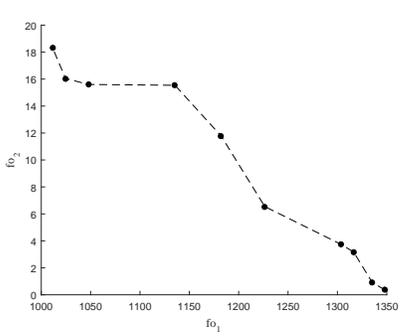
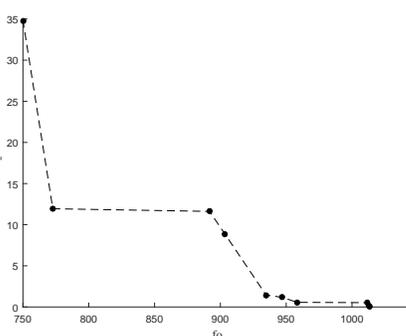
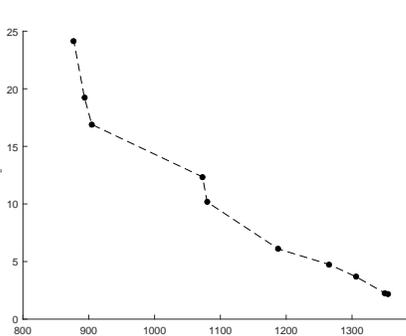
En la tabla 6.3, se muestran los resultados obtenidos con el MO-ILS usando las instancias propuestas por Cordeau en [Cordeau et al. \(1997\)](#), excluyendo aquellas que tienen restricción de longitud. La primera columna muestra la instancia resuelta, la segunda muestra el número de rutas para cada punto del frente, las columnas f_{o_1} y f_{o_2} muestran los valores para cada punto del frente en la instancia respectiva. En la columna longitud se muestra la longitud mínima y máxima de las rutas para los puntos extremos del frente, así como también para el punto de equilibrio calculado con el método *min – max*. Más detalles del cálculo del punto de equilibrio se encuentran en el trabajo parcial de esta investigación en [Galindres-Guancha et al. \(2018\)](#). El tiempo corresponde al promedio de 10 corridas independientes. En la última columna se muestran los frentes obtenidos para cada instancia. Cabe destacar que en algunas instancias el MO-ILS obtiene la solución óptima del costo de operación y en todos los casos de prueba analizados, se observó conflicto entre las funciones objetivo.

Tabla 6.3: Frentes obtenidos en las instancias [Cordeau et al. \(1997\)](#).

| Inst | N de rutas | f_{o_1} | f_{o_2} | longitud | | tiempo (s) | Frente de Pareto |
|------|----------------|----------------|-----------|----------|-------|---------------|---|
| | | | | min | max | | |
| p01 | 14 | 922.577 | 2.02595 | 64.6 | 72.7 | 20.9 |  |
| | 14 | 892.817 | 4.01729 | | | | |
| | 14 | 871.067 | 4.48472 | | | | |
| | 14 | 846.301 | 6.05546 | | | | |
| | 14 | 816.088 | 6.37164 | | | | |
| | 14 | 759.654 | 9.18066 | | | | |
| | 14 | 746.594 | 10.1763 | 38.4 | 81.8 | | |
| | 14 | 727.509 | 13.1408 | | | | |
| | 11 | 595.89 | 13.2128 | | | | |
| 11 | 576.866 | 18.0128 | 23.5 | 81.4 | | | |
| p02 | 7 | 679.093 | 0.22556 | 96.7 | 97.4 | 20.0 |  |
| | 7 | 671.008 | 0.98959 | | | | |
| | 7 | 664.298 | 1.18972 | | | | |
| | 7 | 662.8 | 1.48891 | | | | |
| | 7 | 653.841 | 1.73567 | | | | |
| | 7 | 647.207 | 2.2578 | | | | |
| | 7 | 638.214 | 2.28202 | | | | |
| | 7 | 630.14 | 2.67438 | | | | |
| | 5 | 479.161 | 5.28649 | 87.0 | 101.9 | | |
| | 5 | 473.533 | 13.719 | 74.2 | 115.0 | | |
| p03 | 13 | 900.248 | 0.547121 | 68.6 | 70.5 | 54.4 |  |
| | 13 | 899.061 | 0.583972 | | | | |
| | 13 | 895.291 | 1.02138 | | | | |
| | 13 | 891.116 | 1.65167 | | | | |
| | 13 | 838.114 | 2.18347 | | | | |
| | 13 | 808.936 | 4.42969 | | | | |
| | 13 | 777.556 | 8.68057 | 42.9 | 80.4 | | |
| | 13 | 745.386 | 11.2673 | | | | |
| | 11 | 652.649 | 11.5113 | | | | |
| | 11 | 641.186 | 17.0489 | 27.8 | 87.8 | | |

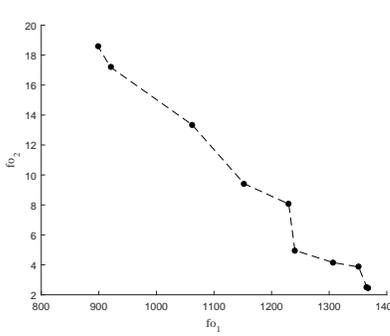
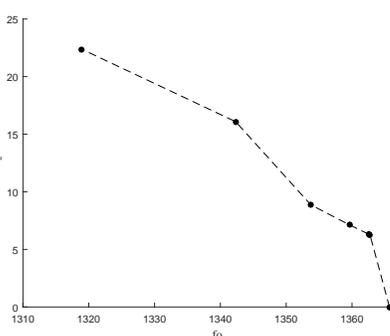
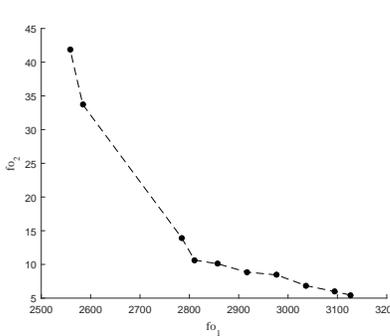
Continúa en la siguiente página

Tabla 6.3 Frentes obtenidos en las instancias [Cordeau et al. \(1997\)](#). (continuación)

| Inst | N de rutas | f_{o_1} | f_{o_2} | longitud | | tiempo (s) | Frente de pareto |
|------|------------|----------------|----------------|----------|-------|---------------|---|
| | | | | min | max | | |
| p04 | 16 | 1347.88 | 0.367265 | 83.89 | 84.81 | 71.9 |  |
| | 16 | 1335.14 | 0.93156 | | | | |
| | 16 | 1316.44 | 3.17538 | | | | |
| | 16 | 1303.93 | 3.7323 | | | | |
| | 16 | 1226.44 | 6.54645 | | | | |
| | 16 | 1182.22 | 11.7783 | 47.9 | 92.8 | | |
| | 16 | 1135.46 | 15.5395 | | | | |
| | 16 | 1047.78 | 15.6012 | | | | |
| | 16 | 1024.62 | 16.0456 | | | | |
| | 16 | 1011.42 | 18.3273 | 34.6 | 98.1 | | |
| p05 | 8 | 1013.12 | 0.08315 | 126.5 | 126.8 | 73.0 |  |
| | 8 | 1012.66 | 0.106175 | | | | |
| | 8 | 1011.37 | 0.525041 | | | | |
| | 8 | 958.453 | 0.561682 | | | | |
| | 8 | 946.976 | 1.17268 | | | | |
| | 8 | 934.755 | 1.44528 | | | | |
| | 8 | 903.416 | 8.87127 | | | | |
| | 8 | 891.792 | 11.6163 | | | | |
| | 8 | 772.686 | 11.9385 | 80.6 | 114.3 | | |
| | 8 | 750.029 | 34.7853 | 27.9 | 138.9 | | |
| p06 | 17 | 1355.02 | 2.15879 | 76.4 | 87.3 | 85.9 |  |
| | 17 | 1350.37 | 2.24798 | | | | |
| | 17 | 1306.05 | 3.68383 | | | | |
| | 17 | 1265.44 | 4.74563 | | | | |
| | 17 | 1187.99 | 6.09463 | | | | |
| | 17 | 1079.87 | 10.1689 | 47.7 | 88.6 | | |
| | 17 | 1072.93 | 12.3476 | | | | |
| | 16 | 904.582 | 16.8998 | | | | |
| | 16 | 893.432 | 19.2495 | | | | |
| | 16 | 877.339 | 24.1354 | 4.5 | 106.5 | | |

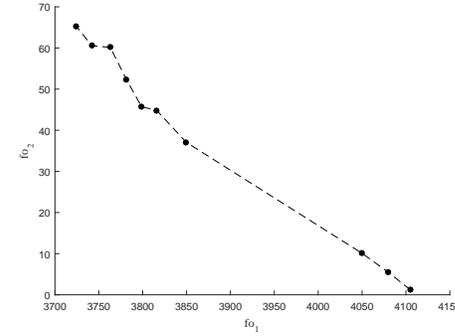
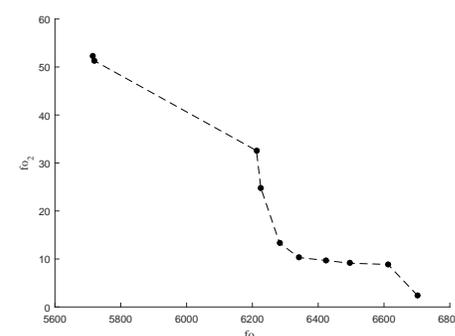
Continúa en la siguiente página

Tabla 6.3 Frentes obtenidos en las instancias [Cordeau et al. \(1997\)](#). (continuación)

| Inst | N de rutas | f_{o_1} | f_{o_2} | longitud | | tiempo (s) | Frente de pareto |
|------|------------|----------------|----------------|----------|-------|---------------|---|
| | | | | min | max | | |
| p07 | 18 | 1368.13 | 2.46672 | 71.9 | 82.3 | 101.9 |  |
| | 18 | 1365.3 | 2.52425 | | | | |
| | 18 | 1351.03 | 3.86859 | | | | |
| | 18 | 1306.91 | 4.15166 | | | | |
| | 18 | 1240.45 | 4.96447 | | | | |
| | 18 | 1229.75 | 8.061 | | | | |
| | 18 | 1152.27 | 9.41772 | 42.1 | 81.1 | | |
| | 17 | 1061.83 | 13.3558 | | | | |
| | 16 | 920.47 | 17.1919 | | | | |
| 16 | 898.77 | 18.5724 | 28.0 | 86.9 | | | |
| p12 | 8 | 1365.69 | 0.00 | 170.7 | 170.7 | 36.1 |  |
| | 8 | 1362.73 | 6.2664 | | | | |
| | 8 | 1362.53 | 6.32003 | | | | |
| | 8 | 1359.62 | 7.13268 | | | | |
| | 8 | 1353.76 | 8.85959 | | | | |
| | 8 | 1342.32 | 16.089 | 128.5 | 189.6 | | |
| | 8 | 1318.95 | 22.3753 | 128.5 | 189.6 | | |
| p15 | 16 | 3125.85 | 5.45829 | 190.0 | 214.3 | 271.1 |  |
| | 16 | 3093.58 | 5.99647 | | | | |
| | 16 | 3036.33 | 6.85244 | | | | |
| | 16 | 2977.16 | 8.44057 | | | | |
| | 16 | 2916.44 | 8.86239 | | | | |
| | 16 | 2857.29 | 10.0966 | | | | |
| | 16 | 2810.63 | 10.6393 | | | | |
| | 16 | 2784.37 | 13.9541 | 147.8 | 214.3 | | |
| | 16 | 2584.2 | 33.7146 | | | | |
| | 16 | 2558.61 | 41.8434 | 80.6 | 205.1 | | |

Continúa en la siguiente página

Tabla 6.3 Frentes obtenidos en las instancias [Cordeau et al. \(1997\)](#). (continuación)

| Inst | N de rutas | f_{o_1} | f_{o_2} | longitud | | tiempo (s) | Frente de pareto |
|------|------------|-----------|-----------|----------|-------|---------------|--|
| | | | | min | max | | |
| p18 | 24 | 4104.98 | 1.22443 | 170.7 | 176.6 | 1274.6 |  |
| | 24 | 4079.57 | 5.53979 | | | | |
| | 24 | 4049.37 | 10.1818 | | | | |
| | 24 | 3849.52 | 37.0899 | 102.4 | 209.6 | | |
| | 24 | 3816.09 | 44.8138 | | | | |
| | 23 | 3798.72 | 45.7234 | | | | |
| | 24 | 3781.47 | 52.3456 | | | | |
| | 24 | 3763.02 | 60.1596 | | | | |
| | 24 | 3741.95 | 60.5524 | | | | |
| | 24 | 3724.42 | 65.2649 | 48.3 | 233.1 | | |
| p21 | 36 | 6702.61 | 2.32945 | 183.1 | 204.4 | 6982.8 |  |
| | 36 | 6612.01 | 8.86635 | | | | |
| | 36 | 6496.67 | 9.11763 | | | | |
| | 36 | 6424.84 | 9.68818 | | | | |
| | 36 | 6340.65 | 10.3036 | | | | |
| | 36 | 6282.4 | 13.3801 | | | | |
| | 36 | 6225.61 | 24.8171 | 71.6 | 238.5 | | |
| | 36 | 6212.38 | 32.5914 | | | | |
| | 36 | 5718.64 | 51.3325 | | | | |
| | 36 | 5714.56 | 52.2805 | 34.1 | 239.2 | | |

En la tabla 6.3 se observa que valores bajos para f_{o_2} , indican adecuados balances de rutas que tendrían longitudes similares, sin embargo esta condición en la f_{o_1} expresa elevados costos de operación que harían la implementación inviable. Por tal motivo se debe seleccionar un punto de equilibrio, tal como se muestra en [Galindres-Guancha et al. \(2018\)](#), sin embargo esta decisión puede ser considerada de acuerdo al criterio del tomador de decisiones. Se puede notar que en el punto de mínimo costo se presenta una gran diferencia en la longitud de la ruta mínima y máxima. Por el contrario en el punto extremo de balance, se tienen costos altos y una diferencia de longitud entre la ruta mínima y máxima relativamente baja.

Finalmente, dados los conflictos de intereses identificados anteriormente, es posible analizar el punto de equilibrio teniendo en cuenta la variación con respecto al punto extremo de menor costo.

Tabla 6.4: Variaciones con respecto a la solución del mínimo costo

| Inst | Variación | Variación | f_{o_1} | f_{o_2} |
|------|---------------|---------------|-------------|-------------|
| | f_{o_1} (%) | f_{o_2} (%) | $min - max$ | $min - max$ |
| p01 | 29 | 77 | 746.594 | 10.1763 |
| p02 | 1 | 160 | 479.161 | 5.28649 |
| p03 | 21 | 96 | 777.556 | 8.68057 |
| p04 | 17 | 55 | 1182.22 | 11.77 |
| p05 | 3 | 191 | 772.686 | 11.9385 |
| p06 | 23 | 137 | 1079.87 | 10.1689 |
| p07 | 28 | 97 | 1152.27 | 9.41772 |
| p12 | 2 | 39 | 1342.32 | 16.089 |
| p15 | 8 | 199 | 2784.37 | 13.9541 |
| p18 | 3 | 76 | 3849.52 | 37.0899 |
| p21 | 9 | 111 | 6225.61 | 24.8171 |

La tabla 6.4 muestra la variación en términos de porcentaje con respecto a la obtenida con el criterio $min - max$ mostradas en las columnas f_{o_1} y f_{o_2} . En la tabla 6.4 se puede establecer que con pequeños empeoramientos en el costo de operación se obtienen grandes mejoras sociales.

6.3 Resultados bi-CVRP usando método exacto, ILS/D y NSGA-II

Se utilizó un conjunto de instancias CVRP disponibles en la literatura para verificar el comportamiento del ILS/D. El conjunto de instancias corresponde a las del grupo **A** propuestas por Augerat et al. (1995) y van desde 31 hasta 79 clientes.

Las instancias fueron estudiadas con un método exacto y el ILS/D, además fue implementada la Metaheurística NSGA-II, con el fin de comparar los resultados obtenidos con el ILS/D, en instancias de gran complejidad matemática.

El método exacto se implementó utilizando el optimizador lineal CPLEX y el lenguaje AMPL.

Los algoritmos ILS/D y NSGA-II propuestos se codificaron en C++ y se ejecutaron casos de complejidad matemática media y alta para 36 y 79 clientes respectivamente.

Las pruebas se corrieron en un equipo Intel®Core™ i7 con 3.4 GHz y 16 GB de RAM en un sistema operativo Windows 7 pro 64 bits.

Para analizar los resultados obtenidos, se construyeron tres escenarios. El primero se utiliza para comparar los resultados del método exacto con uno similar disponible en la literatura. El segundo utiliza una instancia de tamaño mediano para comparar los resultados del procedimiento ILS/D y NSGA-II con los producidos por el método exacto.

El tercero utiliza una instancia de gran complejidad matemática para comparar el rendimiento del ILS/D con el del NSGA-II.

En primer lugar, debido al alto esfuerzo computacional en instancias más grandes, solo se usó con la instancia de complejidad media $A-n37-k5$. Los resultados obtenidos en esta instancia se usaron para comparar con los obtenidos por el ILS/D y la metaheurística NSGA-II. Esta instancia también se analiza en [Reiter and Gutjahr \(2012\)](#), en la que el problema CVRP bi-objetivo se resuelve utilizando una técnica híbrida basada en el método ϵ - *constraint* y el algoritmo NSGA-II. Aquí, se utiliza un modelo similar y las mismas funciones objetivo: minimización de los costos totales y minimización de la longitud máxima de la ruta (*min - max*). Cabe destacar que las soluciones extremas para la instancia $A-n37-k5$ del frente de Pareto obtenidas utilizando el método exacto y mostradas en la figura 6.1 son las mismas que las obtenidas en [Reiter and Gutjahr \(2012\)](#).

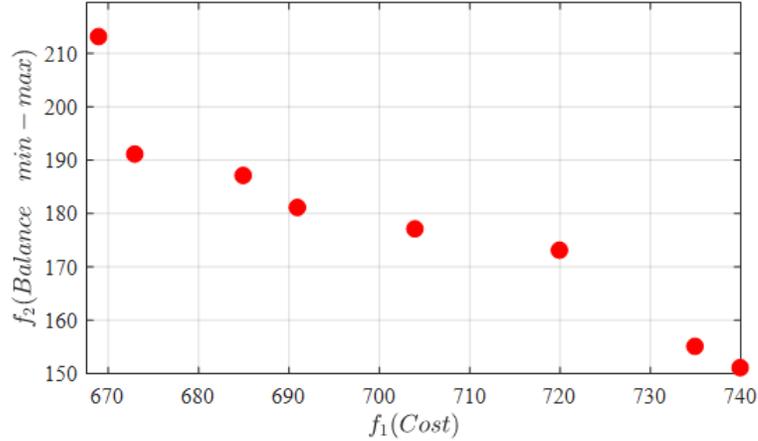


Figura 6.1: Frente óptimo de Pareto para la instancia $A-n37-k5$

En segundo lugar, para validar el desempeño de los algoritmos ILS/D y NSGA-II se hicieron 20 corridas independientes para cada uno de los algoritmos, los resultados se compararon con los obtenidos por el método exacto para la instancia $A-n37-k5$.

Los frentes presentados en la figura 6.2.(a) marcados con colores rojo, azul y verde corresponden a los frentes obtenidos por los métodos exacto, ILS/D y NSGA-II respectivamente para el mayor valor de la métrica HV . Como se puede observar en la figura 6.2.(a), los frentes obtenidos por el ILS/D y el NSGA-II presentan una convergencia y distribución adecuadas.

Los cálculos de las métricas se realizaron utilizando la plataforma MATLAB para la optimización evolutiva Multi-objetivo PlatEMO [Tian et al. \(2017\)](#). Además, para cada uno de los frentes, se calculan los indicadores HV , IGD y GD . Para el cálculo de la métrica HV se tiene en cuenta el punto antiutópico calculado con la siguiente ecuación: $fmax_i = \max_k(\max_x(frentes_{k,x})) \quad \forall 1 \leq i \leq m, \quad \forall 1 \leq k \leq 21$. Donde x es la solución

del frente k , m es el número de objetivos, también se incluye el frente óptimo. La información estadística se muestra en la figura 6.2.

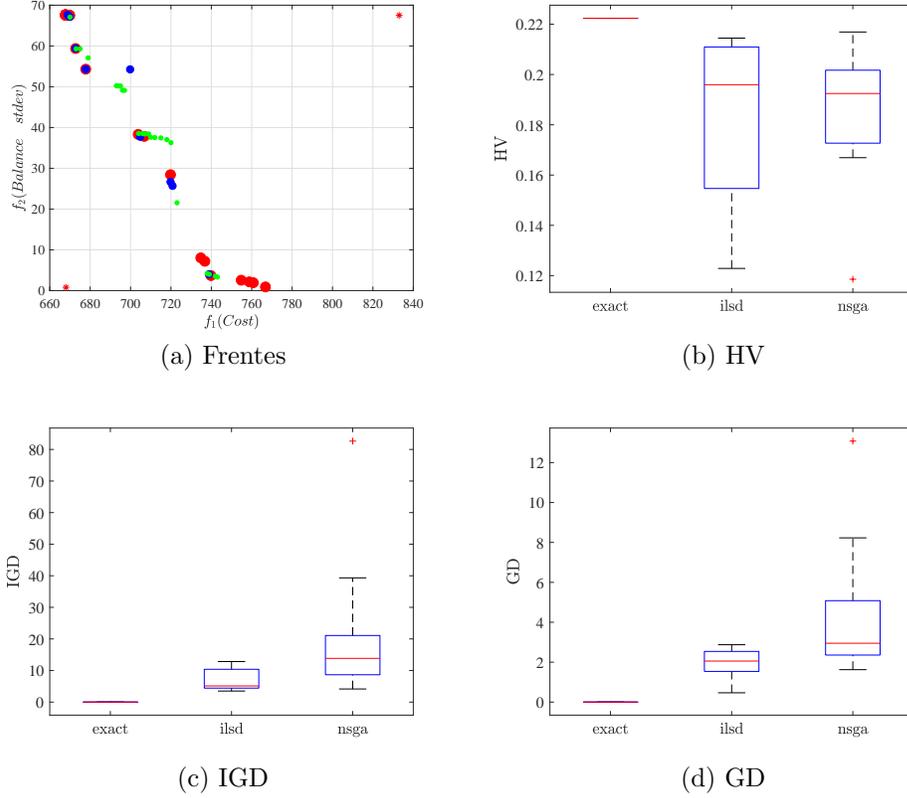


Figura 6.2: Métricas obtenidas para la instancia $A-n37-k5$

Como se muestra en la figura 6.2.(b), para el indicador HV , se puede ver que ambos algoritmos generan soluciones con medianas similares, el ILS/D tiene más variabilidad que el NSGA-II, sin embargo, después del percentil 75, las soluciones ILS/D son mejores que las soluciones NSGA-II en promedio. Para los indicadores IGD y GD , mostrados en las figuras 6.2.(c) y 6.2.(d) respectivamente, es evidente que las soluciones generadas por el ILS/D son más convenientes en magnitud y variabilidad. Por lo tanto, ILS/D tiene mayor confiabilidad y robustez para ambos indicadores.

En tercer lugar se validó el rendimiento de los algoritmos ILS/D y NSGA-II en la instancia más grande del grupo presentado en Augerat et al. (1995). Del mismo modo se hicieron 20 corridas independientes para cada algoritmo. Los frentes con los valores más altos de HV obtenidos para la instancia más grande $A-n80-k10$ se muestran en la figura 6.3.(a). El frente resaltado en color rojo corresponde al obtenido con el algoritmo ILS/D. El frente resaltado en color azul corresponde al obtenido con el algoritmo NSGA-II.

Además, para cada uno de los frentes, se calcula el indicador HV siguiendo el mismo procedimiento de la segunda parte.

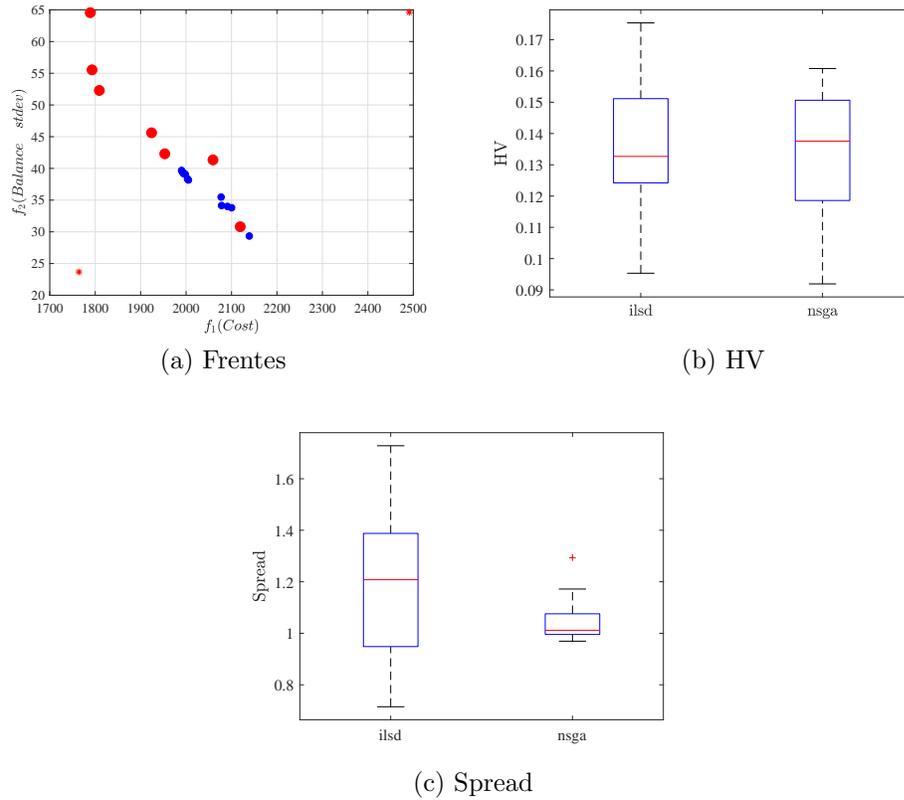


Figura 6.3: Métricas obtenidas para la instancia *A-n80-k10*

Como se puede observar en la figura 6.3.(b) tanto el ILS/D como el NSGA-II presentan un desempeño similar de acuerdo al valor del indicador *HV*. No obstante, la figura 6.3.(c) muestra una mayor dispersión del frente para el ILS/D, además el 50% de las soluciones obtenidas por el ILS/D son superiores a cualquier solución obtenidas por el NSGA-II.

El cálculo de los indicadores *IGD* e *GD* no suministra información adicional sobre el rendimiento de los algoritmos ya que se necesita un gran número de puntos de referencia para que la evaluación del desempeño usando estos indicadores sea confiable [Ishibuchi et al. \(2014\)](#).

6.4 Resultados S-CLRP

Con el fin de llevar a cabo un análisis comparativo de los resultados, se crearon los siguientes escenarios:

- Solución de instancias de baja complejidad matemática usando un método exacto.
- Solución de instancias de baja complejidad matemática usando el ILS/D y com-

paración con las obtenidas con el método exacto.

- Solución de instancias de gran complejidad matemática usando el ILS/D.

6.4.1 Solución de instancias de baja complejidad matemática usando un método exacto

El método de solución exacto se implementó en AMPL y se resolvió usando el solver CPLEX en una CPU Intel®Core™ i7 con 3.4 GHz y 16 GB de RAM en un sistema operativo Windows 7 pro 64 bits.

El método usa N vectores λ^n igualmente espaciados donde $n = 1 \dots N$. Los vectores λ^n se generaron teniendo en cuenta el método de *Lattice* mencionado en [Trivedi et al. \(2017\)](#) e implementado en [Zhang and Li \(2007\)](#), donde la configuración de N y $\lambda^1, \dots, \lambda^N$ son controlados por el parámetro H , es decir, $\lambda^1, \dots, \lambda^N$, son los vectores de peso en los que cada vector toma los siguientes valores $\{\frac{0}{H}, \frac{1}{H}, \dots, \frac{H}{H}\}$. El número de vectores λ es $N = C_{m-1}^{H+m-1}$. En este trabajo se utilizó $H = 16$, $m = 3$ y $N = 153$.

Para validar el modelo, se utilizó una pequeña instancia con 15 clientes y 5 depósitos con los siguientes supuestos: capacidad y costo fijo para los depósitos y tamaño de la flota hasta $|J|$ vehículos.

Tabla 6.5: Punto utópico

| i | λ_1 | λ_2 | λ_3 | $Fmin_i$ | Z_i | gap | tiempo(s) |
|-----|-------------|-------------|-------------|----------|-------|-----|-----------|
| 1 | 1 | 0 | 0 | 40666 | 36600 | 0.0 | 19 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 13859 | 12473 | 0.0 | 43 |
| 3 | 0 | 0 | 1 | 4162 | 3746 | 0.0 | 400 |

Del frente de Pareto que se muestra en la Figura 6.4 y en la Tabla 6.6, se observa lo siguiente:

Tabla 6.6: Soluciones del Frente de Pareto

| Sol | Depósitos | Rutas | F_1 | F_2 | F_3 | gap | tiempo(s) |
|-----|-----------|-------|-------|-------|-------|-----|-----------|
| A | 2 | 4 | 40666 | 15231 | 1906 | 0.0 | 9 |
| B | 2 | 4 | 44143 | 17980 | 229 | 0.0 | 1518 |
| C | 3 | 4 | 47874 | 14051 | 1509 | 0.0 | 19 |
| D | 3 | 5 | 52222 | 16698 | 244 | 0.0 | 165 |
| E | 4 | 5 | 57331 | 13859 | 1459 | 0.0 | 18 |
| F | 4 | 5 | 60516 | 16377 | 207 | 0.0 | 162 |
| G | 4 | 6 | 65280 | 19353 | 133 | 0.0 | 156 |

Existen tres grupos de soluciones establecidas de acuerdo con la cantidad de depósitos utilizados, 2, 3 y 4 respectivamente. De cada grupo se eligen las soluciones correspondientes a los extremos. En el primer grupo, la solución **A** tiene el mejor valor por F_1

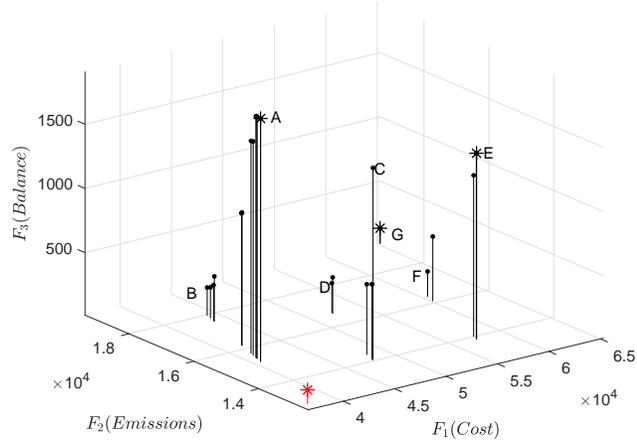


Figura 6.4: Soluciones del Frente de Pareto

Tabla 6.7: Variaciones de la solución 1 con respecto a la solución 2

| Sol 1 | Sol 2 | F_1 (%) | F_2 (%) | F_3 (%)(MaxL) | F_3 (%)(stddev) |
|-------|-------|-----------|-----------|-----------------|-------------------|
| B | A | 8.6 | 18.0 | -21.0 | -88.0 |
| D | C | 9.1 | 18.8 | -29.7 | -83.8 |
| F | E | 5.6 | 18.2 | -13.3 | -85.8 |
| G | F | 7.9 | 18.2 | -5.2 | -35.8 |
| G | E | 13.9 | 39.6 | -17.8 | -90.9 |

(costos operativos) y el peor valor para F_3 (balance de carga de trabajo). Sin embargo, la solución **B** tiene un valor bajo para F_2 (emisiones) en contraste con F_1 y F_3 . Las variaciones entre estas soluciones se muestran en la tabla 6.7, los detalles para cada caso se muestran en la tabla 6.8.

En el segundo grupo, si se compara la solución **D** con respecto a **C**, las variaciones son similares a las obtenidas en el primer grupo, es decir, la solución **D** empeora en 8.6 % y 18 % para F_1 y F_2 respectivamente y mejora considerablemente F_3 (reduce 21 % en la longitud de la ruta máxima, 88 % en la desviación estándar). Las variaciones entre estas soluciones se muestran en la tabla 6.7, los detalles para cada caso se muestran en la tabla 6.9.

En el tercer grupo se observa un comportamiento similar a los dos grupos anteriores, sin embargo, la solución con el valor más bajo para F_2 (**E**) y la solución con el mejor balance (**G**) son contrastados. Las variaciones entre estas soluciones se muestran en la tabla 6.7, los detalles para cada caso se muestran en la tabla 6.10.

Del análisis anterior es posible decir lo siguiente: El uso de más vehículos no implica una mayor emisión de CO_2 , esto se observa en las soluciones **A** (4 vehículos) y **G** (5 vehículos). El uso de más vehículos que no están completamente cargados puede traducirse en una reducción en los costos de consumo de combustible y en la reducción de emisiones. Por otro lado, se observa que las soluciones con el mejor balance son

Tabla 6.8: Soluciones A y B.

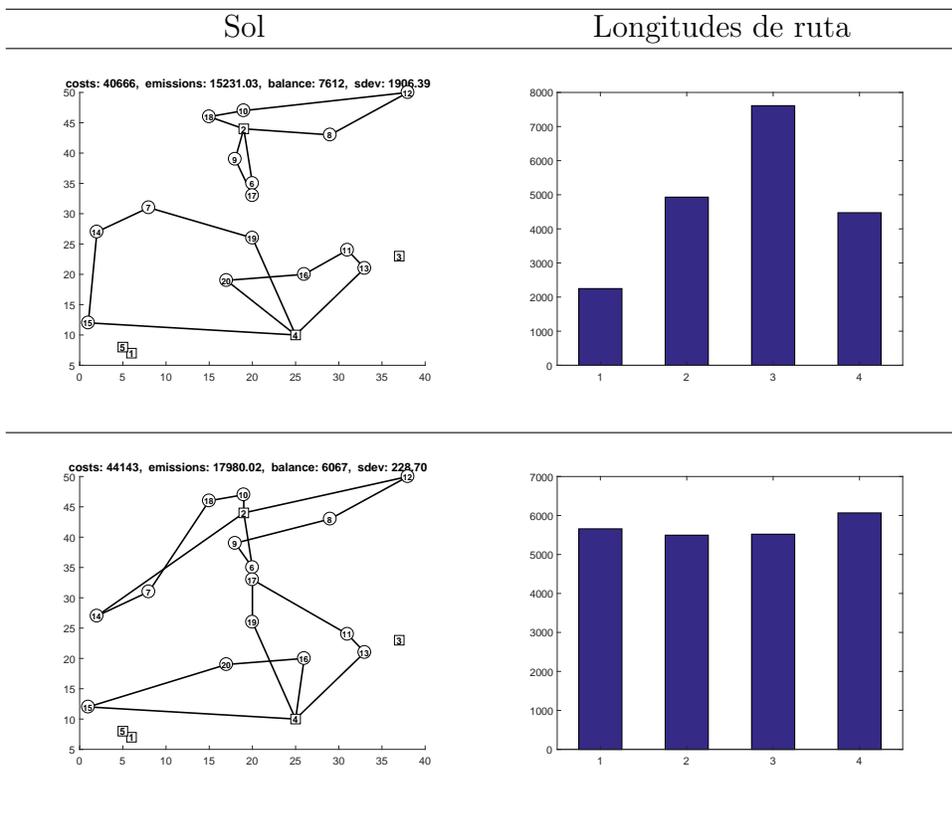


Tabla 6.9: Soluciones C y D.

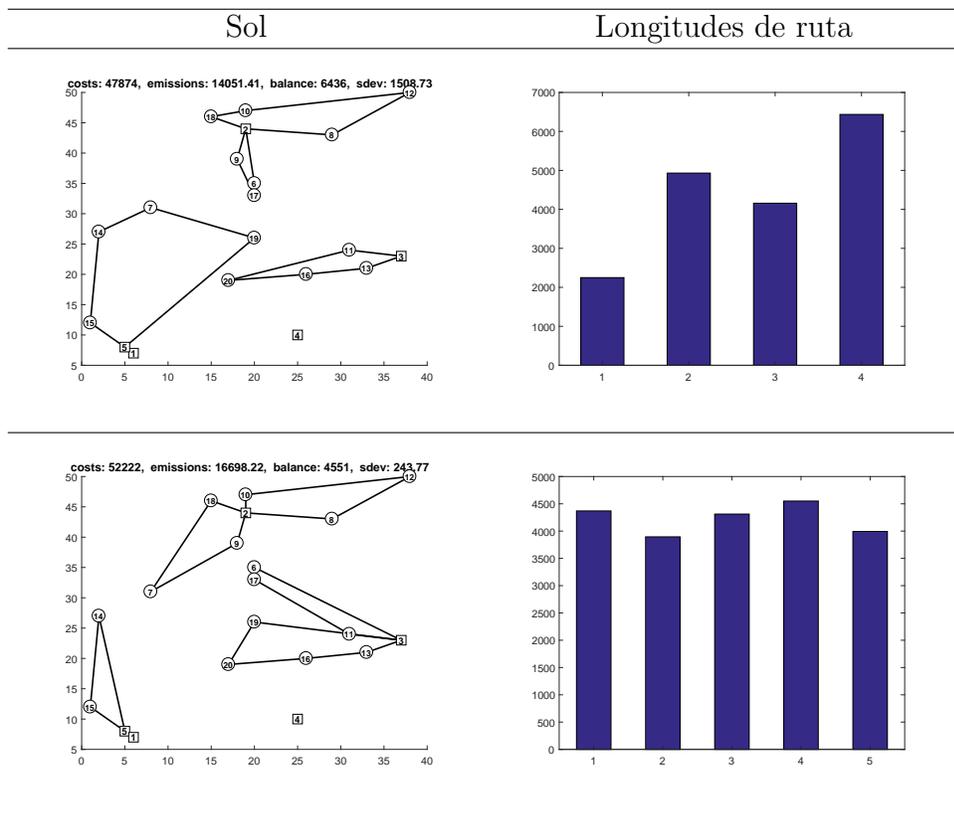
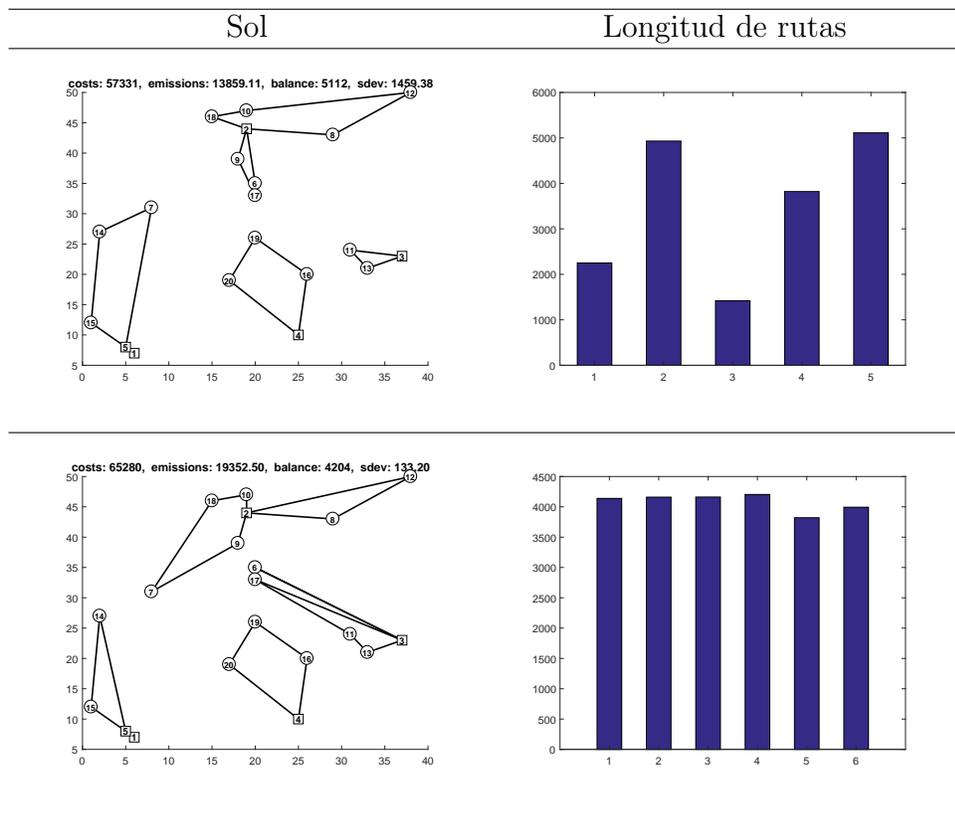


Tabla 6.10: Solutions E and G



las que usan más vehículos, esto se muestra en las soluciones **D** (5 vehículos) y **G** (6 vehículos). Un comportamiento similar ocurre en [Toro et al. \(2017\)](#) y [Ramos et al. \(2014\)](#), confirmando así estos estudios previos.

Para encontrar una solución de equilibrio entre los objetivos formulados para el CLRSP Sostenible, con la información obtenida hasta el momento, el tomador de decisiones puede escoger la más adecuada, sin embargo, en este trabajo se aplica el método de solución de compromiso: Primero, normalice las funciones objetivo con la amplitud entre los puntos utópico y antiutópico de acuerdo con la expresión $Fnorm_i^j = (ZN_i - F_i^j)/(ZN_i - ZI_i)$, donde ZI (punto utópico) y ZN (punto antiutópico) son iguales al mínimo y máximo de cada objetivo, $1 \leq i \leq m$ objetivos y $1 \leq j \leq N$. Después de eso, la solución de compromiso se obtiene al minimizar la distancia de Tchebycheff al punto ideal. La solución obtenida es **D**.

En la solución de equilibrio, el objetivo económico empeora 22 %, las emisiones 17 % y el social 45 % con respecto al punto ideal ($ZI = \{40666, 13859, 11, 133, 2\}$). Cabe señalar que esta solución contiene una cantidad intermedia de depósitos y rutas utilizadas, además, las rutas corresponden a circuitos óptimos (TSP-óptimo).

Finalmente, se obtuvo el Frente de Pareto para una instancia clásica de CLRSP, que se comparó con la obtenida en [Toro et al. \(2017\)](#). Los resultados se muestran en la tabla 6.11.

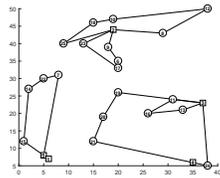
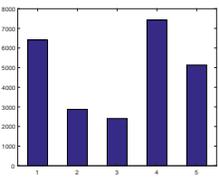
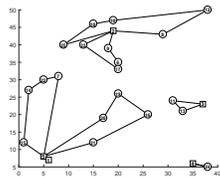
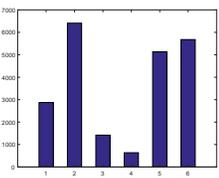
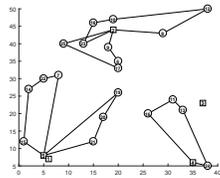
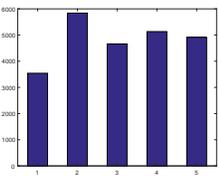
La primera fila de la tabla 6.11 muestra la solución que minimiza los costos totales. La segunda, muestra la solución de equilibrio para el G-CLRSP. Aquí el objetivo social no se tenía en cuenta, sin embargo, esta solución pertenece a las soluciones del frente S-CLRSP. La tercera fila contiene la solución de equilibrio para el S-CLRSP. Cabe señalar que en el frente obtenido para el S-CLRSP (tres funciones objetivo), el tomador de decisiones tiene soluciones más prometedoras que le permiten elegir la más adecuada ya que la solución de equilibrio seleccionada del frente S-CLRSP no es parte del obtenido en el G-CLRSP (dos funciones objetivo). Además, las soluciones de equilibrio obtenidas tanto para el S-CLRSP como para el G-CLRSP son diferentes: la función económica de S-CLRSP mejora 8 %, las emisiones empeoran 9 % y el social mejora 65 % con respecto a la Solución G-CLRSP. Lo anterior muestra la importancia de las funciones objetivo para tomar decisiones correctamente.

6.4.2 Comparación entre el método exacto y el ILS/D

El ILS/D se implementó en C++ y los experimentos computacionales se corrieron en una CPU Intel®Core™ i7 con 3.4 GHz y 16 GB de RAM en un sistema operativo Windows 7 pro 64 bits.

Para realizar la primera validación del ILS/D, se compara el frente obtenido en el método exacto con el obtenido por el ILS/D, usando las métricas HV, IGD y GD sobre la instancia de menor complejidad (20-5-1) del conjunto de datos propuesto por [Prins et al. \(2007\)](#).

Tabla 6.11: Soluciones de equilibrio para G-CLRP y S-CLRP de la instancia 20-5-1.

| 20-5-1 | $F_1(\text{Costo})$ | $F_2(\text{Emisiones})$ | $F_3(\text{Stdev})$ | Sol | Longitudes de ruta |
|--------------|---------------------|-------------------------|---------------------|--|---|
| Minimum Cost | 54793 | 19166 | 1952 |  |  |
| G-CLRP | 61261 | 17505 | 2183 |  |  |
| S-CLRP | 56112 | 19040 | 749 |  |  |

El conjunto de datos propuesto por [Prins et al. \(2007\)](#) está formado por 30 instancias con restricciones de capacidad en los depósitos y vehículos. Además, $m = 5, 10$ es la cantidad de depósitos y $n = \{20, 50, 100, 200\}$ la cantidad de clientes. Los depósitos y clientes corresponden a puntos aleatorios en el plano cartesiano. Los costos c_{ij} entre los puntos i y j son calculados usando la distancia euclidiana, multiplicados por 100 y redondeando al siguiente entero. $Q = \{70, 150\}$ es la capacidad del vehículo y las demandas de cada cliente corresponden a valores aleatorios uniformes en el intervalo $[11, 20]$.

Para esta comparación el algoritmo ILS/D se corrió 30 veces de forma independiente, en cada una se calcularon las métricas de desempeño HV, IGD y GD respectivamente.

Para la definición adecuada de los valores de los parámetros del ILS/D se hicieron varias pruebas computacionales obteniendo el mejor rendimiento del ILS/D con los siguientes parámetros: subproblemas $N = 153$, iteraciones del ILS/D $MaxIter = 20$, porcentaje

del vecindario ILS/D $\alpha = 0,1$.

La información estadística correspondiente a esta comparación se muestran en la figura 6.5.

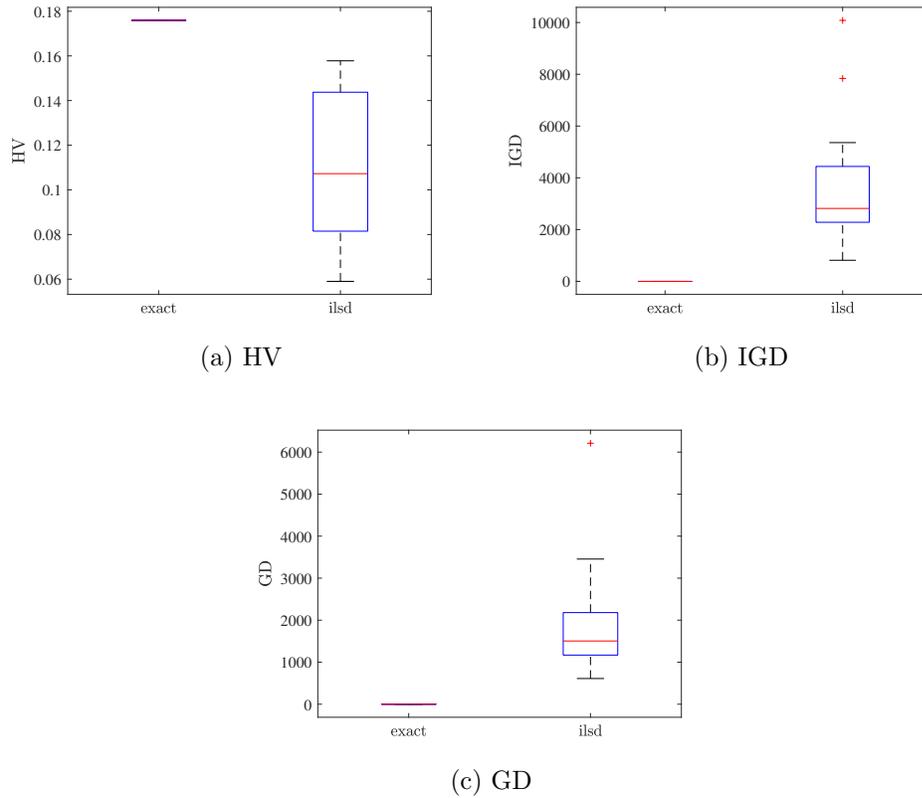
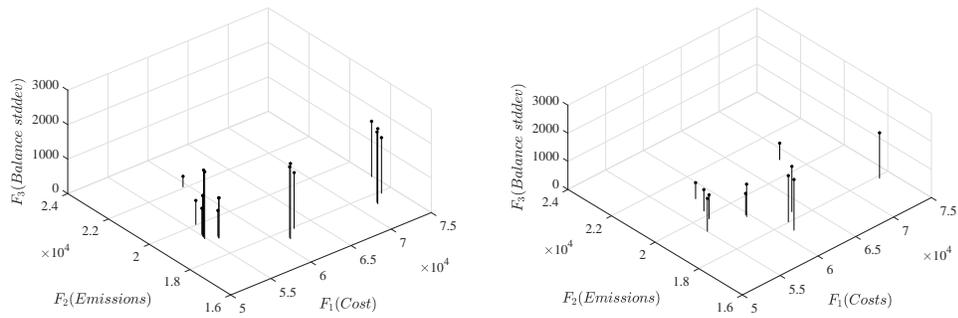


Figura 6.5: Métricas obtenidas para la instancia 20-5-1

Como se muestra en la figura 6.5.(a), para el indicador HV , se puede ver que el ILS/D genera frentes con una mediana similar al frente exacto, además de acuerdo a la baja variabilidad y la no presencia de datos atípicos presentados por el ILS/D, se puede concluir que el ILS/D es estable. Para los indicadores IGD y GD , que se muestran en las figuras 6.5.(b) y 6.5.(c) respectivamente, el comportamiento es similar, mostrando adecuados valores de diversidad y convergencia.

En la figura 6.6 se muestran los frentes obtenidos por el método exacto (6.6.(a)) con $HV = 0,176$ y por el ILS/D (6.6.(b)). El frente mostrado en la figura 6.6.(b) corresponde al que tiene el mayor valor para el indicador HV ($HV = 0,158$).



(a) Frente obtenido con el método exacto (b) Frente obtenido con el ILS/D

Figura 6.6: Frentes obtenidos para la instancia 20-5-1

6.4.3 Instancias de gran complejidad matemática resueltas usando ILS/D

En la tabla 6.12 se muestran los frentes obtenidos con el ILS/D para las instancias de 50, 100 y 200 clientes del conjunto de datos propuesto por Prins et al. (2007).

En este caso se hicieron 122 corridas distribuidas de la siguiente forma: para cada una de las instancias $m = 5$ y $n = 50$ 8 corridas, para $m = 5$ y $n = 100$ 4 corridas, para $m = 10$ y $n = 100$ 4 corridas y finalmente para el conjunto $m = 10$ y $n = 200$ 30 corridas.

La tabla 6.12 muestra la instancia, coeficiente de variación (CV), frente obtenido con el mayor valor para HV y el boxplot con la información sobre la estabilidad del algoritmo. El CV calculado como la desviación estandar dividida por el promedio, muestra una baja variación en los resultados obtenidos con las diferentes corridas del ILS/D Watanabe and Sakakibara (2007).

Tabla 6.12: Frentes ILS/D instancias Prins et al. (2007)

| Instancia | CV (%) | Frente (mejor HV) | Boxplot |
|-----------|--------|-------------------|---------|
| 50-5-1b | 19 | | |

Continúa en la siguiente página

Tabla 6.12 Frentes ILS/D instancias Prins et al. (2007)(continuación)

| Instancia | CV (%) | Frente (mejor HV) | Boxplot |
|-----------|--------|-------------------|---------|
| 50-5-2 | 15 | | |
| 50-5-2b | 10 | | |
| 50-5-3 | 22 | | |
| 100-5-1 | 8 | | |

Continúa en la siguiente página

Tabla 6.12 Frentes ILS/D instancias Prins et al. (2007)(continuación)

| Instancia | CV (%) | Frente (mejor HV) | Boxplot |
|-----------|--------|-------------------|---------|
| 100-5-2b | 11 | | |
| 100-10-1 | 13 | | |
| 100-10-1b | 4 | | |
| 200-10-1 | 11 | | |

Continúa en la siguiente página

Tabla 6.12 Frentes ILS/D instancias Prins et al. (2007)(continuación)

| Instancia | CV (%) | Frente (mejor HV) | Boxplot |
|-----------|--------|-------------------|---------|
| 200-10-1b | 5 | | |
| 200-10-3b | 8 | | |

En la tabla 6.13 se muestra la instancia, los valores inicial, final y el porcentaje de variación (var) para los objetivos y para el HV obtenido en las instancias del conjunto de datos propuesto por Prins et al. (2007).

En la tabla 6.13 los valores iniciales corresponden a los obtenidos por el procedimiento 5.4, mientras que los valores finales corresponden a los obtenidos por el ILS/D. El var está calculado como $var_i = (initial_i - final_i) / initial_i \quad \forall \quad i = 1, 2, 3$. La misma fórmula se utiliza para calcular la variación en el HV. Las columnas var muestran el porcentaje de optimización para cada uno de los objetivos. Cabe anotar que en las instancias de menor complejidad computacional ($m = 5$ y $n = 20$) para la función objetivo de costos (f_{o_1}) el ILS/D obtuvo la solución óptima ($gap = 0$) con un porcentaje promedio de optimización del 28,27%. Este valor es similar al porcentaje de optimización promedio global para la f_{o_1} (26,79%). Para la función objetivo 2 (f_{o_2}) el ILS/D llegó a una solución próxima a la óptima ($gap = 0,05\%$) en la instancia 20-5-1 con un porcentaje de optimización del 40,15%. Este valor es similar al porcentaje de optimización promedio global para la f_{o_2} (47,42%). Para la función objetivo 3 (f_{o_3}) el ILS/D llegó a una solución con un $gap = 0,04\%$ en la instancia 20-5-1 con un porcentaje de optimización del 82,66%. Para este objetivo el ILS/D tiene un rendimiento menor en el porcentaje de optimización global (57,86%).

Finalmente, analizando el comportamiento del ILS/D en forma global usando la métrica HV, en la tabla 6.13 en las instancias de menor complejidad computacional, el incremento del valor del HV es en promedio 5 veces más (520,13%) con respecto al valor inicial.

Tabla 6.13: Porcentaje de variación entre las soluciones iniciales y finales

| instance | f_{o_1} | | | f_{o_2} | | | f_{o_3} | | | HV* | | |
|------------|-----------|--------|---------|-----------|----------|---------|-----------|---------|---------|---------|-------|---------|
| | initial | final | var (%) | initial | final | var (%) | initial | final | var (%) | initial | final | var (%) |
| 20-5-1 | 79808 | 54793 | -31.34 | 29170.1 | 17457.80 | -40.15 | 1694.18 | 293.85 | -82.66 | 3.30 | 25.12 | 661.21 |
| 20-5-1b | 63551 | 39104 | -38.47 | 26941.3 | 15291 | -43.24 | 4455.84 | 153.99 | -96.54 | 4.2 | 32.5 | 673.81 |
| 20-5-2 | 59286 | 48908 | -17.50 | 19764.30 | 14654.30 | -25.85 | 1171.99 | 343.77 | -70.67 | 5.36 | 18.07 | 237.13 |
| 20-5-2b | 50574 | 37542 | -25.77 | 22926.9 | 13965.2 | -39.09 | 1811.31 | 66.78 | -96.31 | 4.9 | 29.81 | 508.37 |
| avg | | | -28.27 | | | -37.08 | | | -86.55 | | | 520.13 |
| 50-5-1 | 137720 | 90447 | -34.33 | 71403.70 | 40950.70 | -42.65 | 2014.83 | 1749.29 | -13.18 | 1.45 | 14.29 | 885.52 |
| 50-5-1b | 123957 | 63773 | -48.55 | 68780.90 | 29575.80 | -57.00 | 3414.15 | 1128.07 | -66.96 | 0.82 | 28.58 | 3385.37 |
| 50-5-2 | 122414 | 90341 | -26.20 | 49445.20 | 31964.80 | -35.35 | 1287.04 | 843.14 | -34.49 | 2.84 | 14.69 | 417.25 |
| 50-5-2b | 105291 | 68155 | -35.27 | 46746.90 | 22251.20 | -52.40 | 1933.22 | 404.20 | -79.09 | 2.92 | 28.63 | 880.48 |
| 50-5-3 | 116655 | 91621 | -21.46 | 52696.60 | 34241.50 | -35.02 | 1705.53 | 918.20 | -46.16 | 1.46 | 12.38 | 747.95 |
| 50-5-3b | 99517 | 67947 | -31.72 | 48001.00 | 25149.90 | -47.61 | 2961.70 | 345.97 | -88.32 | 3.13 | 26.41 | 743.77 |
| 100-5-1 | 378350 | 279533 | -26.12 | 162913.00 | 90223.80 | -44.62 | 2577.18 | 1975.81 | -23.33 | 1.12 | 10.96 | 878.57 |
| 100-5-1b | 383068 | 281052 | -26.63 | 82497.00 | 39002.70 | -52.72 | 2182.02 | 480.66 | -77.97 | 12.61 | 42.48 | 236.88 |
| 100-5-2 | 288058 | 196932 | -31.63 | 81841.80 | 49693.30 | -39.28 | 829.87 | 748.75 | -9.78 | 2.31 | 11.48 | 396.97 |
| 100-5-2b | 237718 | 172093 | -27.61 | 70380.80 | 32357.90 | -54.02 | 1517.50 | 644.17 | -57.55 | 7.28 | 28.99 | 298.21 |
| 100-5-3 | 287839 | 231067 | -19.72 | 100687.00 | 51224.70 | -49.12 | 1479.14 | 637.89 | -56.87 | 4.79 | 23.63 | 393.32 |
| 100-5-3b | 250272 | 189470 | -24.29 | 94682.6 | 34375.4 | -63.69 | 2535.96 | 405.88 | -84.00 | 3.05 | 31.58 | 935.41 |
| 100-10-1 | 409755 | 329134 | -19.68 | 92891.9 | 56493.9 | -39.18 | 1229.78 | 595 | -51.62 | 10.28 | 28.27 | 175.00 |
| 100-10-1b | 383068 | 281052 | -26.63 | 82497 | 39002.7 | -52.72 | 2182.02 | 480.66 | -77.97 | 12.61 | 42.48 | 236.88 |
| 100-10-2 | 338037 | 262455 | -22.36 | 89138.3 | 51313 | -42.43 | 1440.41 | 700.34 | -51.38 | 11.8 | 30.59 | 159.24 |
| 100-10-2b | 300291 | 221191 | -26.34 | 80214.9 | 32809 | -59.10 | 1615.21 | 419.46 | -74.03 | 12.11 | 45.04 | 271.92 |
| 100-10-3 | 318044 | 271824 | -14.53 | 78313.7 | 50322.6 | -35.74 | 1154.57 | 863.26 | -25.23 | 14.29 | 26.96 | 88.66 |
| 200-10-1 | 710461 | 522429 | -26.47 | 171849 | 92646.3 | -46.09 | 1338.29 | 677.03 | -49.41 | 13.07 | 32.87 | 151.49 |
| 200-10-1b | 638416 | 399127 | -37.48 | 164651 | 59890 | -63.63 | 2035.03 | 576.25 | -71.68 | 15.69 | 49.97 | 218.48 |
| 200-10-2b | 568136 | 454488 | -20.00 | 161165 | 52196.3 | -67.61 | 1819.34 | 995.26 | -45.30 | 10.55 | 37.43 | 254.79 |
| 200-10-3 | 648658 | 544359 | -16.08 | 202741 | 115183 | -43.19 | 1357.61 | 1190.51 | -12.31 | 10.47 | 24.2 | 131.14 |
| 200-10-3b | 556574 | 443310 | -20.35 | 173804 | 67057 | -61.42 | 2167.79 | 828.33 | -61.79 | 9.69 | 41.53 | 328.59 |
| avg | | | -26.79 | | | -47.42 | | | -57.87 | | | 549.86 |

Un similar incremento del valor del HV se observa en todas las instancias (549,86%).

7 Conclusiones y trabajo futuro

Se llevó a cabo el estudio del CLRP teniendo en cuenta los tres factores de sostenibilidad S-CLRP: económico, ambiental y social. Para este problema fue formulado un modelo matemático de programación lineal entera mixta Multi-objetivo, para su solución fue propuesto un método exacto y uno aproximado basados en el concepto de descomposición. La metodología fue verificada usando instancias de la literatura de baja, media y alta complejidad matemática, las cuales fueron adaptadas, ya que no se encuentran en las bases de datos casos de prueba para este problema. Los resultados obtenidos son de buena calidad, obteniendo óptimos globales en instancias de baja complejidad matemática y de excelente calidad en instancias de mediana y alta complejidad matemática, según se observa en las métricas usadas.

Se planteó un modelo matemático para el problema S-CLRP del cual no se cuenta con evidencias en las bases de datos de la literatura especializada. El modelo matemático surge de incluir en el modelo G-CLRP, un tercer objetivo social, que minimiza el desbalance en la longitud de las rutas y que representa la equidad laboral entre los trabajadores, lográndose así un modelo con consideraciones de sostenibilidad. Fueron propuestos métodos de solución exacto y aproximado. Tanto el exacto como el aproximado fueron planteados con base en el concepto de descomposición, la formulación usa la función de agregación de Tchebycheff que permite generar soluciones no dominadas. El método exacto logra resolver instancias de baja complejidad matemática, usadas como referencia para los métodos aproximados. El método aproximado implementado, como en el caso anterior también usa descomposición y se denominó ILS/D. Este método fue comparado con el método MOEA/D, para lo cual se usa el problema MOKP. Su desempeño también fue comparado con el método NSGA-II en el problema bi-CVRP. En todas las comparaciones se observaron respuesta de mejor o igual calidad.

La metodología implementada del S-CLRP presentó gran eficiencia en la generación de frentes para todos los casos analizados y cuyas características fundamentales son diversidad entre las soluciones y adecuada convergencia, es decir, las métricas de desempeño utilizadas como son HV, IGD y GD muestran una distribución y convergencia adecuadas en los frentes. Dado lo anterior, se confirma un comportamiento adecuado del algoritmo propuesto en la solución del S-CLRP.

Se propuso un modelo matemático multiobjetivo del MDVRP, que incluye costo de la operación y desbalance de las rutas, en la que se busca minimizar la desviación estándar entre las rutas. Se observó conflicto entre los dos objetivos. El modelo fue resuelto usando un método multi-objetivo basado en ILS. Se usaron instancias de mediana y gran complejidad matemática, tomadas de la literatura existente para el MDVRP, las cuales fueron adaptadas, para verificar el desempeño del modelo propuesto. En todas las instancias se observa un adecuado balance entre los objetivos. Los resultados obtenidos son consistentes y de buena calidad.

Como trabajo futuro se propone implementar métodos exactos y aproximados que den solución al S-CLRP. En los métodos aproximados comparar el desempeño entre éstos, también comparar resultados entre los de trayectoria y de población. En éstos se estudia la capacidad de convergencia, así como calidad de solución.

Proponer nuevos modelos matemáticos que den solución al S-CLRP y que consideren tres o más objetivos.

Dado que la estrategia de descomposición descompone el problema Multi-objetivo en N subproblemas independientes, se recomienda el uso de procesamiento paralelo en la solución del problema planteado.

Respecto a la metodología de solución planteada, se recomienda estudiar parámetros utilizados con el fin de mejorar el desempeño, así: (i) el tamaño del frente, (ii) formulación y cálculo eficiente de las funciones objetivo, (iii) operadores especializados Multi-objetivo.

Analizar variantes en las funciones objetivo como son efecto de la velocidad y características de la ruta en la función ambiental, así como funciones objetivo variantes para el estudio de la función social.

La principal contribución de este trabajo es formular un modelo matemático lineal entero mixto para el S-CLRP, que tiene en cuenta los factores de sostenibilidad simultáneamente y que se resuelve de manera exacta y aproximada, permitiendo obtener soluciones de compromiso que son analizadas por el tomador de decisión. Las respuestas obtenidas en esta investigación, servirán de referencia para futuras investigaciones, que usen métodos de solución alternativos, ya sea exactos o aproximados.

Bibliografía

- Ahi, P. and Searcy, C. (2015). Assessing sustainability in the supply chain: A triple bottom line approach. *Applied Mathematical Modelling*, 39(10-11):2882–2896.
- Alumur, S. and Kara, B. Y. (2007). A new model for the hazardous waste location-routing problem. *Computers & Operations Research*, 34(5):1406–1423.
- Angus, D. and Woodward, C. (2009). Multiple objective ant colony optimisation. *Swarm intelligence*, 3(1):69–85.
- Augerat, P., Belenguer, J. M., Benavent, E., Corberán, A., Naddef, D., and Rinaldi, G. (1995). *Computational results with a branch and cut code for the capacitated vehicle routing problem*. IMAG.
- Baldacci, R., Hadjiconstantinou, E., and Mingozzi, A. (2004). An exact algorithm for the capacitated vehicle routing problem based on a two-commodity network flow formulation. *Operations research*, 52(5):723–738.
- Barreto, S., Ferreira, C., Paixao, J., and Santos, B. S. (2007). Using clustering analysis in a capacitated location-routing problem. *European Journal of Operational Research*, 179(3):968–977.
- Bektas, T. and Laporte, G. (2011). The pollution-routing problem. *Transportation Research Part B: Methodological*, 45(8):1232–1250.
- Bertazzi, L., Golden, B., Wang, X., and Max, M. (2014). Min – Max vs . Min – Sum Vehicle Routing : A worst-case analysis. 240:372–381.
- Caballero, R., González, M., Guerrero, F. M., Molina, J., and Parolera, C. (2007). Solving a multiobjective location routing problem with a metaheuristic based on tabu search. Application to a real case in Andalusia. *European Journal of Operational Research*, 177(3):1751–1763.
- Chand, P., Mishra, B. S. P., and Dehuri, S. (2010). A multi objective genetic algorithm for solving vehicle routing problem. *International Journal of Information Technology and Knowledge Management*, 2(2):503–506.
- Christofides, N., Mingozzi, A., and Toth, P. (1981). Exact algorithms for the vehicle routing problem, based on spanning tree and shortest path relaxations. *Mathematical programming*, 20(1):255–282.
- Clarke, G. and Wright, J. W. (1964). Scheduling of vehicles from a central depot to a number of delivery points. *Operations research*, 12(4):568–581.

- Collette, Y. and Siarry, P. (2004). *Introduction: multiobjective optimization and domination*, pages 15–43. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg.
- Cordeau, J.-F., Gendreau, M., and Laporte, G. (1997). A tabu search heuristic for periodic and multi-depot vehicle routing problems. *Networks*, 30(2):105–119.
- Coutinho-Rodrigues, J., Tralhão, L., and Alçada-Almeida, L. (2012). Solving a location-routing problem with a multiobjective approach: the design of urban evacuation plans. *Journal of Transport Geography*, 22:206–218.
- Dantzig, G. B. and Ramser, J. H. (1959). The truck dispatching problem. *Management science*, 6(1):80–91.
- Das, I. and Dennis, J. E. (1997). A closer look at drawbacks of minimizing weighted sums of objectives for pareto set generation in multicriteria optimization problems. *Structural optimization*, 14(1):63–69.
- Deb, K., Agrawal, S., Pratap, A., and Meyarivan, T. (2000). A fast elitist non-dominated sorting genetic algorithm for multi-objective optimization: Nsga-ii. In *International Conference on Parallel Problem Solving From Nature*, pages 849–858. Springer.
- Deb, K., Pratap, A., Agarwal, S., and Meyarivan, T. (2002). A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: Nsga-ii. *IEEE transactions on evolutionary computation*, 6(2):182–197.
- Dekker, R., Bloemhof, J., and Mallidis, I. (2012). Operations Research for green logistics - An overview of aspects, issues, contributions and challenges.
- Demir, E., Bektaş, T., and Laporte, G. (2014). The bi-objective Pollution-Routing Problem. *European Journal of Operational Research*, 232(3):464–478.
- Doppstadt, C., Koberstein, A., and Vigo, D. (2016). The Hybrid Electric Vehicle - Traveling Salesman Problem. *European Journal of Operational Research*, 253(3):825–842.
- Duarte, A., Pantrigo, J. J., Pardo, E. G., and Mladenovic, N. (2015). Multi-objective variable neighborhood search: an application to combinatorial optimization problems. *Journal of Global Optimization*, 63(3):515–536.
- Erdoğan, S. and Miller-Hooks, E. (2012). A Green Vehicle Routing Problem. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, 48(1):100–114.
- Escobar, J. W., Linfati, R., and Toth, P. (2013). A two-phase hybrid heuristic algorithm for the capacitated location-routing problem. *Computers & Operations Research*, 40(1):70–79.
- Farrokhi-Asl, H., Tavakkoli-Moghaddam, R., Asgarian, B., and Sangari, E. (2017). Metaheuristics for a bi-objective location-routing-problem in waste collection management. *Journal of Industrial and Production Engineering*, 34(4):239–252.

- Figliozzi, M. (2010). Vehicle Routing Problem for Emissions Minimization. *Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board*, 2197(1):1–7.
- Galindres-Guanca, L. F., Toro-Ocampo, E. M., and Gallego-Rendón, R. A. (2018). Multi-objective MDVRP solution considering route balance and cost using the ILS metaheuristic. *International Journal of Industrial Engineering Computations*, 9(1):33–46.
- Garetti, M. and Taisch, M. (2012). Sustainable manufacturing: Trends and research challenges. *Production Planning and Control*, 23(2-3):83–104.
- Geiger, M. J. (2008). Foundations of the pareto iterated local search metaheuristic. *arXiv preprint arXiv:0809.0406*.
- Govindan, K., Jafarian, A., Khodaverdi, R., and Devika, K. (2014). Two-echelon multiple-vehicle location-routing problem with time windows for optimization of sustainable supply chain network of perishable food. *International Journal of Production Economics*, 152:9–28.
- Halvorsen-Weare, E. E. and Savelsbergh, M. W. (2016a). The bi-objective mixed capacitated general routing problem with different route balance criteria. *European Journal of Operational Research*, 251(2):451–465.
- Halvorsen-Weare, E. E. and Savelsbergh, M. W. (2016b). The bi-objective mixed capacitated general routing problem with different route balance criteria. *European Journal of Operational Research*, 251(2):451–465.
- Irnich, S., Toth, P., and Vigo, D. (2014). Chapter 1: The Family of Vehicle Routing Problems. In *Vehicle Routing*, pages 1–33. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA.
- Ishibuchi, H., Masuda, H., Tanigaki, Y., and Nojima, Y. (2014). Difficulties in specifying reference points to calculate the inverted generational distance for many-objective optimization problems. In *2014 IEEE Symposium on Computational Intelligence in Multi-Criteria Decision-Making (MCDM)*, pages 170–177. IEEE.
- Jiang, S., Ong, Y.-S., Zhang, J., and Feng, L. (2014). Consistencies and contradictions of performance metrics in multiobjective optimization. *IEEE transactions on cybernetics*, 44(12):2391–2404.
- Jozefowicz, N., Semet, F., and Talbi, E. G. (2007). Target aiming Pareto search and its application to the vehicle routing problem with route balancing. *Journal of Heuristics*, 13(5):455–469.
- Jozefowicz, N., Semet, F., and Talbi, E.-G. (2009). An evolutionary algorithm for the vehicle routing problem with route balancing. *European Journal of Operational Research*, 195(3):761–769.

- Kara, m., Kara, B. Y., and Yetis, M. K. (2007). Energy Minimizing Vehicle Routing Problem. In *Combinatorial Optimization and Applications*, pages 62–71. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg.
- Khalili-Damghani, K., Abtahi, A. R., and Ghasemi, A. (2015). A New Bi-objective Location-routing Problem for Distribution of Perishable Products: Evolutionary Computation Approach. *Journal of Mathematical Modelling and Algorithms in Operations Research*, 14(3):287–312.
- Klose, A. (1996). Using clustering methods in problems of combined location and routing. In *Operations Research Proceedings 1995*, pages 411–416. Springer.
- Koski, J. (1981). Multicriterion optimization in structural design. Technical report, TAMPERE UNIV OF TECHNOLOGY (FINLAND).
- Koski, J. (1985). Defectiveness of weighting method in multicriterion optimization of structures. *Communications in applied numerical methods*, 1(6):333–337.
- Koski, J. and Silvennoinen, R. (1987). Norm methods and partial weighting in multicriterion optimization of structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24(6):1101–1121.
- Kulkarni, R. and Bhave, P. R. (1985a). Integer programming formulations of vehicle routing problems. *European Journal of Operational Research*, 20(1):58–67.
- Kulkarni, R. V. and Bhave, P. R. (1985b). Integer programming formulations of vehicle routing problems. *European Journal of Operational Research*, 20(1):58–67.
- Labadie, N. and Prodhon, C. (2014). A survey on multi-criteria analysis in logistics: Focus on vehicle routing problems. In *Applications of Multi-Criteria and Game Theory Approaches*, pages 3–29. Springer.
- Laporte, G. (1992). The vehicle routing problem: An overview of exact and approximate algorithms. *European journal of operational research*, 59(3):345–358.
- Lau, H. C., Chan, T., Tsui, W., Chan, F. T., Ho, G. T., and Choy, K. L. (2009). A fuzzy guided multi-objective evolutionary algorithm model for solving transportation problem. *Expert Systems with Applications*, 36(4):8255–8268.
- Lee, T.-R. and Ueng, J.-H. (1999). A study of vehicle routing problems with load-balancing. *International Journal of Physical Distribution & Logistics Management*, 29(10):646–657.
- Li, J. Q., Borenstein, D., and Mirchandani, P. B. (2008). Truck scheduling for solid waste collection in the City of Porto Alegre, Brazil. *Omega*, 36(6):1133–1149.
- Li, K., Wang, R., Zhang, T., and Ishibuchi, H. (2018). Evolutionary many-objective optimization: A comparative study of the state-of-the-art. *IEEE Access*, 6:26194–26214.

- Liefooghe, A., Humeau, J., Mesmoudi, S., Jourdan, L., and Talbi, E.-G. (2012). On dominance-based multiobjective local search: design, implementation and experimental analysis on scheduling and traveling salesman problems. *Journal of Heuristics*, 18(2):317–352.
- Lin, C., Choy, K. L., Ho, G. T., Chung, S. H., and Lam, H. Y. (2014). Survey of Green Vehicle Routing Problem: Past and future trends. *Expert Systems with Applications*, 41(4 PART 1):1118–1138.
- Lin, C. K. and Kwok, R. C. (2006). Multi-objective metaheuristics for a location-routing problem with multiple use of vehicles on real data and simulated data. *European Journal of Operational Research*, 175(3):1833–1849.
- Lopes, R. B., Ferreira, C., Santos, B. S., and Barreto, S. (2013). A taxonomical analysis, current methods and objectives on location-routing problems. *International Transactions in Operational Research*, 20(6):795–822.
- Lourenço, H. R., Martin, O. C., and Stützle, T. (2003). Iterated Local Search. *Handbook of Metaheuristics*, pages 320–353.
- Mahmoudsoltani, F., Shahbandarzadeh, H., and Moghdani, R. (2018). Using Pareto-based multi-objective Evolution algorithms in decision structure to transfer the hazardous materials to safety storage centre. *Journal of Cleaner Production*, 184:893–911.
- Marler, R. T. and Arora, J. S. (2004). Survey of multi-objective optimization methods for engineering.
- Matl, P., Hartl, R. F., and Vidal, T. (2017). Workload Equity in Vehicle Routing Problems: A Survey and Analysis. *Transportation Science*, page trsc.2017.0744.
- McKinnon, A. (2007). CO2 Emissions from Freight Transport in the UK. *Report prepared for the Climate Change Working Group of the Commission for Integrated Transport*, (iii):57.
- Messac, A., Sundararaj, G. J., Tappeta, R. V., and Renaud, J. E. (2000). Ability of objective functions to generate points on nonconvex pareto frontiers. *AIAA journal*, 38(6):1084–1091.
- Miettinen, K. (2012). *Nonlinear multiobjective optimization*, volume 12. Springer Science & Business Media.
- Mladenović, N. and Hansen, P. (1997). Variable neighborhood search. *Computers & Operations Research*, 24(11):1097–1100.
- Montoya-Torres, J. R., Franco, J. L., Isaza, S. N., Jiménez, H. F., and Herazo-Padilla, N. (2015a). A literature review on the vehicle routing problem with multiple depots. *Computers & Industrial Engineering*, 79:115–129.

- Montoya-Torres, J. R., López Franco, J., Nieto Isaza, S., Felizzola Jiménez, H., and Herazo-Padilla, N. (2015b). A literature review on the vehicle routing problem with multiple depots.
- Nagy, G. and Salhi, S. (2006). Location-routing: Issues, models and methods. *European Journal of Operational Research*, 177(2):649–672.
- Nasab, N. G., Jabalameli, M. S., and Saboury, A. (2013). Multi-objective capacitated location-routing problem: modelling and a simulated annealing heuristic. *International Journal of Services and Operations Management*, 15(2):140.
- Nasab, N. G., Jabalameli, M. S., Saboury, A., Durillo, J. J., Zhang, Q., Nebro, A. J., Alba, E., Vrp, M.-o., Survey, A., Mei, Y., Tang, K., Yao, X., Zhang, Q., and Li, H. (2011). MOEA/D: A multiobjective evolutionary algorithm based on decomposition. *Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics)*, 6683 LNCS(6):140.
- Ngatchou, P., Zarei, A., and El-Sharkawi, A. (2005). Pareto multi objective optimization. In *Proceedings of the 13th International Conference on, Intelligent Systems Application to Power Systems*, pages 84–91.
- Oyola, J. and Løkketangen, A. (2014). GRASP-ASP: An algorithm for the CVRP with route balancing. *Journal of Heuristics*, 20(4):361–382.
- Park, Y. B. and Koelling, C. P. (1986). A solution of vehicle routing problems in a multiple objective environment. *Engineering Costs and Production Economics*, 10(1):121–132.
- Pekel, E. and Kara, S. S. (2019). Solving fuzzy capacitated location routing problem using hybrid variable neighborhood search and evolutionary local search. *Applied Soft Computing*, 83:105665.
- Penna, P. H. V., Subramanian, A., and Ochi, L. S. (2013). An iterated local search heuristic for the heterogeneous fleet vehicle routing problem. *Journal of Heuristics*, 19(2):201–232.
- Prins, C., Prodhon, C., Ruiz, A., Soriano, P., and Wolfler Calvo, R. (2007). Solving the Capacitated Location-Routing Problem by a Cooperative Lagrangean Relaxation-Granular Tabu Search Heuristic. *Transportation Science*, 41(4):470–483.
- Prodhon, C. and Prins, C. (2014). A survey of recent research on location-routing problems.
- Rabbani, M., Farrokhi-Asl, H., and Asgarian, B. (2017). Solving a bi-objective location routing problem by a NSGA-II combined with clustering approach: application in waste collection problem. *Journal of Industrial Engineering International*, 13(1):13–27.

- Rabbani, M., Heidari, R., and Yazdanparast, R. (2019). A stochastic multi-period industrial hazardous waste location-routing problem: Integrating nsga-ii and monte carlo simulation. *European Journal of Operational Research*, 272(3):945–961.
- Rabbani, M., Navazi, F., Farrokhi-Asl, H., and Balali, M. H. (2018). A sustainable transportation-location-routing problem with soft time windows for distribution systems. *Uncertain Supply Chain Management*, 6:229–254.
- Ramos, T. R. P., Gomes, M. I., and Barbosa-Póvoa, A. P. (2014). Planning a sustainable reverse logistics system: Balancing costs with environmental and social concerns. *Omega (United Kingdom)*, 48:60–74.
- Rao, S. S. and Freiheit, T. (1991). A modified game theory approach to multiobjective optimization.
- Rath, S. and Gutjahr, W. J. (2014). A math-heuristic for the warehouse location-routing problem in disaster relief. *Computers and Operations Research*, 42:25–39.
- Reiter, P. and Gutjahr, W. J. (2012). Exact hybrid algorithms for solving a bi-objective vehicle routing problem. *Central European Journal of Operations Research*, 20(1):19–43.
- Renaud, J., Boctor, F. F., and Laporte, G. (1996). An improved petal heuristic for the vehicle routing problem. *Journal of the Operational Research Society*, 47(2):329–336.
- Riquelme, N., Von Lüken, C., and Baran, B. (2015). Performance metrics in multi-objective optimization. In *2015 Latin American Computing Conference (CLEI)*, pages 1–11. IEEE.
- Samanlioglu, F. (2013). A multi-objective mathematical model for the industrial hazardous waste location-routing problem. *European Journal of Operational Research*, 226(2):332–340.
- Santiago, A., Huacuja, H. J. F., Dorronsoro, B., Pecero, J. E., Santillan, C. G., Barbosa, J. J. G., and Monterrubio, J. C. S. (2014). A survey of decomposition methods for multi-objective optimization. In *Recent Advances on Hybrid Approaches for Designing Intelligent Systems*, pages 453–465. Springer.
- Sarpong, B. M., Artigues, C., and Jozefowicz, N. (2013). Column Generation for Bi-Objective Vehicle Routing Problems with a Min-Max Objective. *13th Workshop on Algorithmic Approaches for Transportation Modelling, Optimization, and Systems, {ATMOS} 2013, September 5, 2013, Sophia Antipolis, France*, pages 137–149.
- Schwarze, S. and Voß, S. (2013). Improved load balancing and resource utilization for the Skill Vehicle Routing Problem. *Optimization Letters*, 7(8):1805–1823.
- Subramanian, A. (2012). Heuristic, exact and hybrid approaches for vehicle routing problems. *Universidade Federal Fluminense. Tesis Doctoral. Niteroi*, 13.

- Subramanian, A., Cabral, L., and Ochi, L. (2008). An efficient ils heuristic for the vehicle routing problem with simultaneous pickup and delivery. *Relatório Técnico, Universidade Federal Fluminense, disponível em [http://www. ic. uff. br/~ satoru/index.php](http://www.ic.uff.br/~satoru/index.php).*
- Sun, Y., Liang, Y., Zhang, Z., and Wang, J. (2017). M-nsga-ii: A memetic algorithm for vehicle routing problem with route balancing. In *International Conference on Industrial, Engineering and Other Applications of Applied Intelligent Systems*, pages 61–71. Springer.
- Tan, Y.-Y., Jiao, Y.-C., Li, H., and Wang, X.-K. (2013). Moea/d+ uniform design: A new version of moea/d for optimization problems with many objectives. *Computers & Operations Research*, 40(6):1648–1660.
- Tavakkoli-Moghaddam, R., Makui, A., and Mazloomi, Z. (2010). A new integrated mathematical model for a bi-objective multi-depot location-routing problem solved by a multi-objective scatter search algorithm. *Journal of Manufacturing Systems*, 29(2-3):111–119.
- Tian, Y., Cheng, R., Zhang, X., and Jin, Y. (2017). Platemo: A matlab platform for evolutionary multi-objective optimization [educational forum]. *IEEE Computational Intelligence Magazine*, 12(4):73–87.
- Toro, E. M., Franco, J. F., Echeverri, M. G., and Guimarães, F. G. (2017). A multi-objective model for the green capacitated location-routing problem considering environmental impact. *Computers and Industrial Engineering*, 110:114–125.
- Toro Ocampo, E. M., Guimarães, F. G., and Rendón, R. A. G. (2017). Introducing radiality constraints in capacitated location-routing problems. *International Journal of Industrial Engineering Computations*, 8(4):441–452.
- Toth, P. and Vigo, D. (2002). An overview of vehicle routing problems. In *The vehicle routing problem*, pages 1–26. SIAM.
- Tricoire, F. and Parragh, S. N. (2017). Investing in logistics facilities today to reduce routing emissions tomorrow. *Transportation Research Part B: Methodological*, 103:56–67.
- Trivedi, A., Srinivasan, D., Sanyal, K., and Ghosh, A. (2017). A survey of multiobjective evolutionary algorithms based on decomposition. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 21(3):440–462.
- Tseng, Y.-y., Yue, W. L., and Taylor, M. A. P. (2005). The role of transportation in logistics chain. *Eastern Asia Society for Transportation Studies*.
- Ugarte, G. M., Golden, J. S., and Dooley, K. J. (2016). Lean versus green: The impact of lean logistics on greenhouse gas emissions in consumer goods supply chains. *Journal of Purchasing and Supply Management*, 22(2):98 – 109.

- Ulukan, Z. and Demircioglu, E. (2015). A survey of discrete facility location problems. *Word Academy of Science, Engineering and Technology International Journal of Industrial and Manufacturing Engineering*, 9(7).
- Vega-Mejía, C. A., Montoya-Torres, J. R., and Islam, S. M. (2017). *Consideration of triple bottom line objectives for sustainability in the optimization of vehicle routing and loading operations: a systematic literature review*. Springer US.
- Vincent, T. L. (1983). Game theory as a design tool.
- Wang, X., Golden, B., and Wasil, E. (2015). The min-max multi-depot vehicle routing problem: Heuristics and computational results. *Journal of the Operational Research Society*, 66(9):1430–1441.
- Wang, Z., Zhang, Q., Gong, M., and Zhou, A. (2014). A replacement strategy for balancing convergence and diversity in moea/d. In *2014 IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC)*, pages 2132–2139. IEEE.
- Watanabe, S. and Sakakibara, K. (2007). A multiobjectivization approach for vehicle routing problems. In *International Conference on Evolutionary Multi-Criterion Optimization*, pages 660–672. Springer.
- Wierzbicki, A. P. (1986a). A methodological approach to comparing parametric characterizations of efficient solutions. In *Large-scale modelling and interactive decision analysis*, pages 27–45. Springer.
- Wierzbicki, A. P. (1986b). A methodological approach to comparing parametric characterizations of efficient solutions. In *Large-scale modelling and interactive decision analysis*, pages 27–45. Springer.
- Wilson, J. P. (2015). The triple bottom line: Undertaking an economic, social, and environmental retail sustainability strategy. *International Journal of Retail and Distribution Management*, 43(4-5):432–447.
- Wren, A. and Holliday, A. (1972). COMPUTER SCHEDULING OF VEHICLES FROM ONE OR MORE DEPOTS TO A NUMBER OF DELIVERY POINTS. *Operational Research Quarterly*, 23(3):333–344.
- Xiao, Y., Zhao, Q., Kaku, I., and Xu, Y. (2012). Development of a fuel consumption optimization model for the capacitated vehicle routing problem. *Computers and Operations Research*, 39(7):1419–1431.
- Yoon, K. P. and Hwang, C.-L. (1995). *Multiple attribute decision making: an introduction*, volume 104. Sage publications.
- Yu, H. and Solvang, W. D. (2016). An improved multi-objective programming with augmented ϵ -constraint method for hazardous waste location-routing problems. *International Journal of Environmental Research and Public Health*, 13(6):548.

- Zhang, B., Li, H., Li, S., and Peng, J. (2018a). Sustainable multi-depot emergency facilities location-routing problem with uncertain information. *Applied Mathematics and Computation*, 333:506–520.
- Zhang, B., Li, H., Li, S., and Peng, J. (2018b). Sustainable multi-depot emergency facilities location-routing problem with uncertain information. *Applied Mathematics and Computation*, 333:506–520.
- Zhang, Q. and Li, H. (2007). MOEA/D: A Multiobjective Evolutionary Algorithm Based on Decomposition. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 11(6):712–731.
- Zhang, Q., Liu, W., and Li, H. (2009). The performance of a new version of moea/d on cec09 unconstrained mop test instances. In *2009 IEEE congress on evolutionary computation*, pages 203–208. IEEE.
- Zhao, J. (2010). Model and algorithm for hazardous waste location-routing problem. In *ICLEM 2010: Logistics for Sustained Economic Development - Infrastructure, Information, Integration - Proceedings of the 2010 International Conference of Logistics Engineering and Management*, volume 387, pages 2846–2852, Reston, VA. American Society of Civil Engineers.
- Zhao, J. and Verter, V. (2015). A bi-objective model for the used oil location-routing problem. *Computers and Operations Research*, 62:157–168.
- Zhou, A. and Zhang, Q. (2015). Are all the subproblems equally important? resource allocation in decomposition-based multiobjective evolutionary algorithms. *IEEE Transactions on Evolutionary computation*, 20(1):52–64.
- Zitzler, E. and Thiele, L. (1998). Multiobjective optimization using evolutionary algorithms—a comparative case study. In *International conference on parallel problem solving from nature*, pages 292–301. Springer.