

APRENDIZAJE EN PROFUNDIDAD DE RAZONES Y PROPORCIONES BASADO EN LA
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

García Ramírez Christian Julián

Romero González Sandra Patricia

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA

FACULTAD DE EDUCACION

MAESTRIA EN EDUCACIÓN

2014

TRABAJO PARA OPTAR AL TITULO DE MAGISTER EN EDUCACIÓN

Mg. Carlos Abraham Villalba Baza

APRENDIZAJE EN PROFUNDIDAD DE RAZONES Y PROPORCIONES BASADO EN LA
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

García Ramírez Christian Julián

Romero González Sandra Patricia

MAGISTER EN EDUCACIÓN

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA

FACULTAD DE EDUCACION

PEREIRA

2014

La disciplina es la parte más importante del éxito.

Truman Capote (1924 - 1984)

Las matemáticas son el alfabeto con el cual Dios ha
escrito el Universo.

Galileo Galilei (1564-1642)

Creo que las calificaciones, no son la única forma de
medir la capacidad de un estudiante y el maestro por andar
evaluando únicamente los conocimientos, no logra ver sus
habilidades.

Jorge Duque Linares

Agradecimientos

Queremos expresar nuestros más sinceros agradecimientos a:

- ◆ El Mg. Carlos Abraham Villalba Baza por su compromiso, paciencia y persistencia en el desarrollo de este proceso formativo; a los compañeros de la línea de investigación en Ciencias Naturales Paula Millán, Alejandro Bastidas y Niels Ramírez por su valiosa cooperación y apoyo durante los seminarios durante la maestría.

- ◆ Al rector Francisco Salazar y los coordinadores Carlos Pulgarín y Orlando Bueno de la institución educativa Ciudadela Cuba por toda su colaboración durante los espacios proporcionados para llevar a cabo este estudio.

- ◆ Al rector José Bedoya y la coordinadora académica Dora Salazar de la institución educativa Byron Gaviria por el respaldo brindado y los espacios requeridos para realizar la investigación.

- ◆ A los estudiantes y padres de familia del grado 9°B del colegio Ciudadela Cuba por brindar su autorización y su valiosísima colaboración durante todo el proceso

investigativo, ya que sin ellos nunca se hubiese podido llevar a cabo este estudio, en especial a Laura Escandón, Melany Restrepo, Jhonier Álzate y Luis Garcés.

- ◆ Sandra: A mi esposo Carlos Mario, a mis hijos José Manuel y Juan Miguel por toda su paciencia, comprensión y amor durante todo el estudio tanto presencial como el investigativo; a Dios por no dejarme caer en momentos difíciles; a mi familia por los espacios restringidos para ellos en muchísimas ocasiones.

- ◆ Christian: A mis padres Mercedes Ramírez y Julio Cesar García, mis hermanos Sebastián David y Cesar Augusto por su apoyo, comprensión y amor incondicional durante todos los procesos formativos por los que he pasado, por todas aquellas dificultades por las que he atravesado; a mi compañera de investigación por adoptarme en su núcleo familiar durante el proceso académico e investigativo.

Contenido

RESUMEN	¡Error! Marcador no definido.
ABSTRACT	¡Error! Marcador no definido.
INTRODUCCIÓN	¡Error! Marcador no definido.
1. ÁMBITO PROBLÉMICO	¡Error! Marcador no definido.
2. OBJETIVOS	¡Error! Marcador no definido.
2.1. Objetivo General.....	31
2.2. Objetivos Específicos.....	31
3. MARCO TEÓRICO	¡Error! Marcador no definido.
3.1. Acerca de la Didáctica.....	25
3.2. Sobre el Aprendizaje Profundo.....	29
3.3. Acerca de los Modelos y Modelización.....	35
3.4. Alcances de la Unidad Didáctica.....	37
4. DISEÑO METODOLÓGICO	¡Error! Marcador no definido.
5. INTERPRETACIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS ...	¡Error! Marcador no definido.

5.1. Resultados del Análisis Cuantitativo.....	53
5.2. Resultados del Análisis Cualitativo.....	75
5.3. Resultados del Análisis Mixto.....	140
6. CONCLUSIONES Y/O RECOMENDACIONES;	Error! Marcador no definido.
7. BIBLIOGRAFÍA.....	;
11. ANEXOS.....	;
11.1. Anexo A. Cuestionarios.....	177
11.2. Anexo B. Entrevistas semi-estructuradas.....	201
11.3. Anexo C. Guías de actividad.....	212
11.4. Anexo D. Guías motivacionales.....	229
11.5. Anexo E. Análisis de datos.....	CD
11.6. Anexo F. Audios, filmaciones y transcripciones.....	CD
11.7. Anexo G. Imágenes de cuestionarios y guías.....	CD

Lista de graficas

- Gráfica 1.** Gráfica de RESULTADOS PREVIOS SABER 2012, Grado 9°. Comparativo de los años 2009 y 2012. Las siglas I (Insuficiente), M (Mínimo), S (Sobresaliente), A (Avanzado). Tomado de los Resultados de la página web del ICFES, www.icfes.gov.co, Versión Preliminar 25 de febrero de 2013. Comparación del Porcentaje de Estudiantes en los Niveles de Desempeño Grados 5° Y 9° 2009 - 2012.3
- Gráfica 2.** Relación entre componentes del aprendizaje profundo. Fuente: Autores.20
- Gráfica 3.** Elementos de una unidad didáctica (García, 2004).26
- Gráfica 4.** Modelo tomado del texto la clase multimodal y la formación y evolución de conceptos científicos a través del uso de tecnologías de la información y la comunicación (Tamayo, Vasco, Suarez de la Torre, Quiceno, Castro y Giraldo, 2011) y ajustado a las necesidades de la presente investigación.28

Gráfica 5. Esquema cónico para la modelización del aprendizaje en profundidad de los estudiantes de grado noveno de la Institución Educativa Ciudadela Cuba de la ciudad de Pereira.

Fuente: Autores. Para identificar las relaciones de los componentes del aprendizaje en profundidad, remitirse a la gráfica 2.40

Gráfica 6. Resultados del cuestionario inicial aplicado a 29 estudiantes del grado 9°B de la Institución Educativa Ciudadela Cuba de Pereira.43

Gráfica 7. Histograma de niveles de valoración obtenidos en el cuestionario inicial por los estudiantes del grado 9°B de la Institución Educativa Ciudadela Cuba de Pereira. Fuente: Autores.47

Gráfica 8. Resultados del cuestionario final aplicado a 29 estudiantes del grado 9°B de la Institución Educativa Ciudadela Cuba de Pereira.49

Gráfica 9. Histograma comparativo entre medias obtenidas entre el cuestionario inicial y final por los estudiantes del grado 9°B de la Institución Educativa Ciudadela Cuba de Pereira.51

Gráfica 10. Comparativo entre resultados del cuestionario inicial y final de los estudiantes del grado 9°B de la Institución Educativa Ciudadela Cuba de Pereira.51

Gráfica 11. Convenciones de cada uno de los componentes del aprendizaje profundo analizados. Fuente: Autores.63

Gráfica 12. Relación entre los componentes del aprendizaje profundo y convenciones para indicar el nivel de desarrollo alcanzado por cada uno de los estudiantes, de acuerdo con las convenciones diseñadas para cada una de éstas.64

Gráfica 13. Esquema evolutivo en los componentes del aprendizaje profundo de la estudiante A.76

Gráfica 14. Esquema evolutivo en los componentes del aprendizaje profundo del estudiante B.92

Gráfica 15. Esquema evolutivo en los componentes del aprendizaje profundo del estudiante C.107

Gráfica 16. Esquema evolutivo en los componentes del aprendizaje profundo de la estudiante E.

.....123

Lista de tablas

- Tabla 1.** Rejilla de valoración para consignación de la información recogida en el cuestionario inicial y final. Fuente: Autores.34
- Tabla 2.** Cronograma de procedimientos con los instrumentos utilizados para la recolección de la información y tiempos de aplicación.37
- Tabla 3.** Características de valoración de los estudiantes respecto al aprendizaje profundo de las razones y proporciones en los niveles Alto, Medio y Bajo con su respectivo rango de puntuación. Fuente: Autores.44
- Tabla 4.** Distribución de los estudiantes del grado 9°B por niveles de acuerdo a su desempeño en el cuestionario inicial (Anexo E). Fuente: Autores.45
- Tabla 5.** Cuadro comparativo de los resultados obtenidos entre el cuestionario inicial y final a los 29 estudiantes del grado noveno de la institución educativa Ciudadela Cuba. Fuente: Autores.50

Tabla 6. Distribución de los estudiantes del grado 9°B por niveles de acuerdo a su desempeño en el cuestionario final (Anexo E).	52
Tabla 7. Tabla de frecuencias y porcentajes comparativos entre el cuestionario inicial y final realizado por los 29 estudiantes del grado 9°B.	60
Tabla 8. Resumen de la información recolectada a través de los diferentes instrumentos desarrollados durante la unidad didáctica para la estudiante A. Fuente: Autores.	77
Tabla 9. Resumen de la información recolectada a través de los diferentes instrumentos desarrollados durante la unidad didáctica del estudiante B. Fuente: Autores.	93
Tabla 10. Resumen de la información recolectada a través de los diferentes instrumentos desarrollados durante la unidad didáctica del estudiante C. Fuente: Autores.	108
Tabla 11. Resumen de la información recolectada a través de los diferentes instrumentos desarrollados durante la unidad didáctica para la estudiante E. Fuente: Autores.	124

Lista de ilustraciones

Ilustración 1. Imágenes de la pregunta 1 del cuestionario inicial y final de la estudiante N° 24.	54
Ilustración 2. Imágenes de la pregunta 4, 5 y 6 del cuestionario inicial y final de la estudiante N° 4.	56
Ilustración 3. Imágenes de la pregunta 3 del cuestionario inicial y final de la estudiante N° 6.	57
Ilustración 4. Imágenes de la pregunta 2 del cuestionario inicial y final de la estudiante N° 12.	59
Ilustración 5. Apartes de la entrevista inicial e imagen del cuestionario inicial a la estudiante A.	65

Ilustración 6. Apartes del cuestionario inicial de la estudiante A.	66
Ilustración 7. Apartes del cuestionario inicial de la estudiante A.	67
Ilustración 8. Segmento de la entrevista semi estructurada #2 (D: docente; A: estudiante 1).	68
Ilustración 9. Fragmento de la entrevista semi-estructurada #2 de la estudiante A (D: docente; A: estudiante 1).	68
Ilustración 10. Fragmento del cuestionario #3 de la estudiante A.	70
Ilustración 11. Apartado de la entrevista #3 (D: docente; A: estudiante 1).	71
Ilustración 12. Segmento del cuestionario final de la estudiante A.	72
Ilustración 13. Apartado de la entrevista #4 (D: docente; A: estudiante 1).	73

Ilustración 14. Segmento del cuestionario inicial del estudiante B.	79
Ilustración 15. Apartes del cuestionario inicial del estudiante B.	80
Ilustración 16. Fragmento de la entrevista semi estructurada inicial del estudiante B (D: docente; B: estudiante 2).	80
Ilustración 17. Segmento del cuestionario inicial del estudiante B.	81
Ilustración 18. Aparte del cuestionario inicial del estudiante B.	81
Ilustración 19. Apartes de la guía de actividad #1 del estudiante B.	82
Ilustración 20. Apartes de la entrevista semi-estructurada #2 del estudiante B.	83
Ilustración 21. Fragmento de la entrevista semi-estructurada #2 del estudiante B (D: docente; B: estudiante 2).	83

Ilustración 22. Fragmento del cuestionario #2 del estudiante B.	84
Ilustración 23. Aparte del cuestionario #3 y de la unidad didáctica, en la guía de actividad motivacional #2 del estudiante B	85
Ilustración 24. Segmentos del cuestionario y de la entrevista semi estructurada #3 (D: docente; B: estudiante 2).	86
Ilustración 25. Fragmento del cuestionario final y de la entrevista #4 del estudiante B (D: docente; B: estudiante 2).	88
Ilustración 26. Fragmento del cuestionario final del estudiante B.	89
Ilustración 27. Apartes del cuestionario y de la entrevista final, del estudiante B (D: docente; B: estudiante 2).	90
Ilustración 28. Aparte del cuestionario y de la entrevista semi-estructurada inicial del estudiante C (D: docente; C: estudiante 3).	95

Ilustración 29. Aparte del cuestionario inicial del estudiante C.	96
Ilustración 30. Aparte del cuestionario inicial del estudiante C.	97
Ilustración 31. Segmento de la unidad didáctica, en la guía de actividad motivacional #1 y de la entrevista semi-estructurada #2 del estudiante C (D: docente; C: estudiante 3).	98
Ilustración 32. Segmento del cuestionario y de la entrevista semi estructurada #2 del estudiante C (D: docente; C: estudiante 3).	99
Ilustración 33. Fragmentos de la entrevista semi-estructurada y del cuestionario #3 y de la unidad didáctica, en la guía de actividad motivacional #2 del estudiante C (D: docente; C: estudiante 3).	100
Ilustración 34. Segmentos del cuestionario y de la entrevista semi-estructurada #3, además de la unidad didáctica, en la guía de actividad motivacional #2 del estudiante C (D: docente; C: estudiante 3).	102

Ilustración 35. Aparte del cuestionario y entrevista semi-estructurada final del estudiante C (D: docente; C: estudiante 3).103

Ilustración 36. Fragmento del cuestionario y la entrevista semi-estructurada final del estudiante C (D: docente; C: estudiante 3).104

Ilustración 37. Segmentos del cuestionario y la entrevista inicial de la estudiante E (D: docente; E: estudiante 4).111

Ilustración 38. Fragmentos del cuestionario #2 y de la de la unidad didáctica, en la guía de actividad motivacional #1 de la estudiante E.112

Ilustración 39. Aparte del cuestionario #2 y de la de la unidad didáctica, en la guía de actividad motivacional #1 y de la entrevista semi-estructurada #2 de la estudiante E (D: docente; E: estudiante 4).113

Ilustración 40. Fragmentos del cuestionario #3 y de la de la unidad didáctica, en la guía de actividad motivacional #2 de la estudiante E.115

Ilustración 41. Apartados del cuestionario, de la entrevista semi-estructurada #3 y de la de la unidad didáctica, en la guía de actividad motivacional #2 de la estudiante E (D: docente; E: estudiante 4).117

Ilustración 42. Segmentos del cuestionario final de la estudiante E.120

Ilustración 43. Fragmentos del cuestionario y la entrevista semi-estructurada final de la estudiante E (D: docente; E: estudiante 4).121

Resumen

Este estudio de tipo mixto, busca comprender y analizar el aprendizaje en profundidad de razones y proporciones basado en la resolución de problemas, por medio de la implementación de una unidad didáctica con los estudiantes del grado noveno de la institución educativa Ciudadela Cuba.

Se emplearon como técnicas e instrumentos: el cuestionario, la entrevista semi-estructurada y la observación no participante (guías de actividades de clase, guías motivacionales, filmaciones).

Para que exista un aprendizaje en profundidad, es necesario realizar una modelización del aprendizaje de los estudiantes, para conocer cuáles son sus habilidades, dificultades y avances, que sirva de referencia para implementar nuevos procesos de enseñanza y mejorar el quehacer diario dentro del aula de clase. Por medio de la resolución de problemas a través de actividades contextualizadas, se genera motivación intrínseca y procesos de autorregulación en los estudiantes, así como una evolución conceptual y un mejor uso de las representaciones semióticas de las razones y proporciones.

Esta investigación es un referente para toda la comunidad que investiga en el campo de la didáctica de las ciencias naturales y las matemáticas.

Palabras claves: aprendizaje profundo, resolución de problemas, representaciones semióticas, razones y proporciones, unidad didáctica, modelización.

Abstract

This study of mixed type, it seeks to understand and to analyze the learning in depth of reasons and proportions based on the resolution of problems, by means of the implementation of a didactic unit with the students of the ninth degree of the educational institution Ciudadela Cuba.

They used as technologies and instruments: the questionnaire, the semi-structured interview and the not participant observation (guides of activities of class, motivational guides, filming).

Order for there to deep learning, it is necessary to realize a modeling of the learning of the students, it is necessary to perform a modeling of learning of students, to learn what their skills, difficulties and progress, to serve as reference for implementing new teaching processes and improve the daily work within the classroom. By means of the resolution of problems across activities contextualized, intrinsic motivation and processes are generated of selfcontrol in the students, as well as a conceptual evolution and a better use of the semiotics representations of the reasons and proportions.

This investigation is a modal for the whole community that investigates in the field of the didactics of the natural sciences and the mathematics.

Key words: Deep learning, resolution of problems, semiotics representations, reasons and proportions, didactic unit, modeling.

Introducción

Hoy día la amplia mayoría de los docentes de ciencias naturales y de matemáticas reconocen la importancia que tiene la didáctica en la enseñanza y el aprendizaje de estos saberes. Esto incide actualmente en buscar estrategias que ayuden a superar los obstáculos en los procesos de aprendizaje, pretendiendo implementar las rutas o caminos que conduzcan a mejorar las intervenciones en el aula. Para ello, se tienen en cuenta entre otros aspectos: la comprensión de los conceptos, el lenguaje y su uso, la motivación y los procesos de autorregulación, con el fin de lograr un aprendizaje profundo de las ciencias naturales y las matemáticas.

En este sentido, el presente estudio se enfoca en la necesidad de investigar cómo mejorar el aprendizaje en profundidad (Biggs, 1988; Entwistle, 1988) de las razones y proporciones, a través de la resolución de problemas (Schoenfeld, 1985, 1987), teniendo en cuenta las múltiples representaciones que tienen estas expresiones (Duval, 1999, 2004).

Inicialmente se abordan los aportes de diversos investigadores relacionados con los aspectos centrales del presente estudio.

En un segundo apartado, se desarrollan algunos aspectos teóricos relacionados con la didáctica de las matemáticas, el aprendizaje en profundidad y los modelos y modelización.

La tercera parte del estudio se centró en precisar los aspectos metodológicos propios de un diseño de enfoque mixto, así como el análisis, recolección y discusión de los resultados desde esta postura.

Al finalizar, se presentan las conclusiones y recomendaciones para la didáctica de las ciencias y las matemáticas, destacando las principales características que se dieron al interior del aula de clases, analizando las diversas dimensiones del aprendizaje en profundidad.

Se pudo determinar que en la enseñanza de un concepto matemático, es necesario construir y aprender a usar las múltiples representaciones semióticas de un mismo objeto matemático, ya que la variedad de éstas promueve el aprendizaje en profundidad. Esto busca fortalecer y desarrollar habilidades en los estudiantes cuando se plantean en el aula procedimientos y estrategias para la resolución de problemas, sin dejar de lado que la motivación intrínseca y la autorregulación son factores primordiales en el aprendizaje profundo de las razones y proporciones.

1. Ambito Problemico

Dentro de los desarrollos teóricos de la didáctica de las matemáticas, el aprendizaje de éstas ha constituido un campo fundamental para el análisis de actividades cognitivas esenciales como lo son la aprehensión del concepto, la resolución de problemas y el aprendizaje profundo por parte de los estudiantes. Para orientar el presente estudio es pertinente responder a ciertos cuestionamientos; uno de ellos es ¿Cómo se desarrolla el proceso de aprendizaje de las matemáticas en las aulas actualmente?

En la actualidad, los estudiantes actúan generalmente como entes pasivos en el proceso de aprendizaje de esta disciplina, porque la enseñanza en la mayoría de los casos se centra en ampliar procedimientos mecánicos que no contribuyen al razonamiento, lo que conlleva a dificultades en el análisis e interpretación de datos o situaciones hipotéticas del quehacer diario y en su capacidad para la resolución de problemas, lo que se refleja en las aulas de clases, donde principalmente se manifiesta la gran diferencia entre lo que desea transmitir el docente y lo que realmente percibe el estudiante, o lo que este último distingue del tema planteado en muchas ocasiones (Galagovsky y Adúriz-Bravo, 2001).

Además de lo anterior, los estudiantes muestran poca motivación y prejuicios para aprender matemáticas, lo que dificulta el aprendizaje; su preocupación no se centra en comprender lo que estudia sino en ser promovido, recurriendo a la memoria repetitiva como principal estrategia para

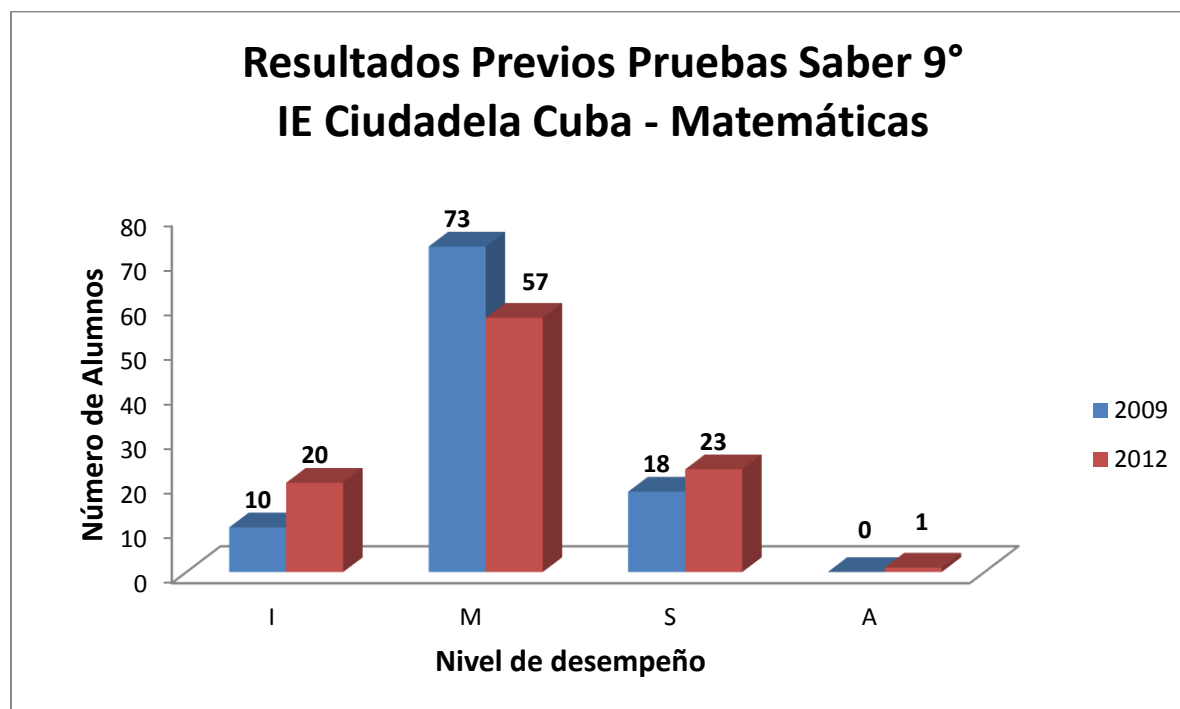
lograrlo. Por ello, existe poca comprensión del lenguaje matemático, un limitado uso de las diversas representaciones y, demasiada dependencia de lo que enseña y sabe el docente.

En consecuencia, los métodos de enseñanza tradicionales que se centran en el fomento de procesos automáticos y el aprendizaje memorístico no promueven que los estudiantes comprendan en profundidad lo que se les enseña, por ello, tienen poco desarrollo de su pensamiento crítico y de su capacidad para la resolución de problemas.

Como resultado general de esta problemática, se da un alto grado de fracaso escolar y bajos niveles de desempeño en el área, lo que se puede evidenciar en los resultados obtenidos por parte de los estudiantes de grado 9º de la Institución Educativa Ciudadela Cuba en las pruebas SABER, específicamente en el área de matemáticas, quienes tal como se muestra en la Gráfica 1, para el año 2009 ubicaron al 82% de los estudiantes en los niveles insuficiente y mínimo, porcentaje que sólo disminuyó en un 6% para el año 2012. Esto indica que las competencias de resolución de problemas, uso de representaciones, comunicación y razonamiento evaluados en estas pruebas censales, han sido poco desarrolladas por los estudiantes.

Gráfica 1. Gráfica de RESULTADOS PREVIOS SABER 2012, Grado 9º. Comparativo de los años 2009 y 2012. Las siglas I (Insuficiente), M (Mínimo), S (Sobresaliente), A (Avanzado). Tomado de los Resultados de la página

web del ICFES, www.icfes.gov.co, Versión Preliminar 25 de febrero de 2013. Comparación del Porcentaje de Estudiantes en los Niveles de Desempeño Grados 5° Y 9° 2009 - 2012.



Toda la problemática hasta aquí expuesta, hace necesario la búsqueda e implementación de alternativas didácticas que promuevan un aprendizaje en profundidad desde aspectos como lo epistemológico, el uso adecuado del lenguaje, la promoción de la autorregulación, la motivación hacia el área y la capacidad de resolución de problemas, abordando estos aspectos desde los modelos mentales de los estudiantes (Izquierdo, 1999), permitiendo así superar los diferentes obstáculos de aprendizaje.

Por ello, la presente investigación pretendió dar respuesta a interrogantes como: ¿Cómo se aprenden matemáticas a través de la resolución de problemas? ¿Cómo se evidencia el modelo

de aprendizaje de las matemáticas en profundidad? ¿Cómo diseñar una unidad didáctica que promueva el aprendizaje en profundidad basado en la resolución de problemas? ¿Cuál es el aporte de las diversas representaciones semióticas de las razones y proporciones a las matemáticas? ¿Qué se entiende por razones y proporciones?

Es así como surgió la pregunta principal del presente estudio: ¿Cómo interviene la resolución de problemas en el aprendizaje profundo de las razones y proporciones?

La presente investigación pretendió modelizar el aprendizaje en profundidad de las razones y proporciones basado en la resolución de problemas, partiendo inicialmente de la modelización del pensamiento de los estudiantes, lo que permitió identificar los obstáculos de aprendizaje, y a partir de la identificación de estos obstáculos diseñar e implementar una unidad didáctica centrada en la resolución de problemas, lo que permitió modelizar aspectos epistemológicos, ontológicos, autotélicos, cognitivos-lingüísticos y las diferentes representaciones, específicamente las relacionadas con las razones y proporciones.

Por tanto, se aporta para los investigadores de la didáctica de las matemáticas, la implementación de una unidad didáctica que parta de los modelos mentales de los estudiantes en cuanto a sus diferentes representaciones semióticas, su autorregulación, su motivación intrínseca hacia la asignatura, que permitirá comprender lo que aprende y cómo lo aprende en profundidad; qué uso hace del lenguaje matemático, de la epistemología y de la autorregulación, por lo que se

brindan elementos teóricos y metodológicos que puedan mejorar la enseñanza de las matemáticas.

Este trabajo plantea la posibilidad de establecer diferentes caminos o rutas que ayudan a los estudiantes a desarrollar su capacidad de resolución de problemas, autorregulación, un manejo adecuado del lenguaje y las múltiples representaciones semióticas en matemáticas, con el fin de mejorar su aprendizaje en profundidad y por tanto, sus niveles de desempeño.

Consecuentemente, se plantearon acciones en el aula desde el diseño e implementación de una unidad didáctica partiendo de las condiciones del entorno de los estudiantes, teniendo en cuenta aspectos sociales, culturales, económicos, entre otros, de modo que las situaciones a resolver durante el proceso investigativo fueron contextualizadas, logrando la aprehensión del conocimiento y acercándolo a los modelos conceptuales eruditos (Sanmartí e Izquierdo, 1997).

Finalmente, esta investigación es un elemento importante para los docentes de áreas relacionadas con las ciencias naturales y para la comunidad científica en general, ya que según el barrido realizado en los diferentes estudios a nivel local, nacional e internacional esta es una de las primeras investigaciones a nivel regional que explora el aprendizaje profundo de las razones y proporciones basada en la resolución de problemas y los múltiples problemas que se presentan en las aulas de clase con el fin de mejorar los procesos de aprendizaje.

A manera de contextualización, a continuación se mostrarán algunos referentes investigativos alrededor de los temas relacionados con esta investigación.

En primer lugar, se señala el estudio denominado “El razonamiento en el desarrollo del pensamiento lógico a través de una unidad didáctica basada en la resolución de problemas” de la Universidad Tecnológica de Pereira (Carmona y Jaramillo, 2010), desarrollado en el Instituto Kennedy en 2010, en el cual se plantea la necesidad de desarrollar una unidad didáctica con el enfoque en resolución de problemas para relacionar el concepto de fuerza e incentivar el concepto del pensamiento lógico, a través de un estudio de caso, donde la investigación fue de tipo mixta; en la recolección de información se empleó la prueba psicométrica BAD y G3. De ahí se concluyó que “el enfoque de resolución de problemas se convierte en una estrategia didáctica importante en el desarrollo del pensamiento lógico, ya que concibe el conocimiento como un proceso en el cual se desarrollan formas de pensamiento y como una actividad intelectual que permite desarrollar ciertas operaciones y procesos mentales a través de la asimilación y apropiación -en el caso de este estudio- de los procedimientos lógicos del razonamiento”. Se considera relevante este estudio por el análisis en el concepto de resolución de situaciones problema, ya que mejora la comprensión e interpretación de diversos procesos mentales.

En este mismo campus universitario se encontró otra publicación sobre didáctica y enseñanza de las matemáticas, titulada “La enseñanza del saber matemático en la Universidad: estudio epistemológico, didáctico y textual en tres programas académicos de la Universidad

Tecnológica de Pereira” por Gallego Cortés (2010), en el cual, se destaca la importancia de cómo se comprende el saber matemático, sus prácticas, limitaciones, problematización y los contratos didácticos. Se realizó un estudio de casos en una investigación de corte cualitativo, desarrollado mediante una metodología abierta y emergente; se recolectó la información a través del método de observación directa (rejillas). Este trabajo propone que la enseñanza de las matemáticas en la universidad es una interacción entre la transposición didáctica, el saber y su epistemología y que debe ser contextualizado desde una situación problema, para que el estudiante logre comunicarse, elabore conjeturas, lo discuta y luego valide su saber desde la transposición didáctica inicial hecha por el profesor. En este estudio se observa el complejo sistema de interacciones didácticas entre el docente, estudiante y el saber propio del área, con el fin de construir un conocimiento más estructurado.

Otra investigación relevante en este caso relacionado con las representaciones semióticas es la de Osorio Mansilla (2011), quien trabajó con una muestra de estudiantes, con edades que oscilan entre 11 y 13 años, que cursaban grado séptimo, en la Institución Educativa Santo Domingo Savio del municipio de Balboa departamento de Risaralda; este estudio tuvo como objetivo reconocer las actividades cognitivas (de tratamiento y conversión) que realizan los estudiantes sobre el concepto de teorema de Pitágoras; esta investigación fue de tipo cualitativa, con análisis en teoría fundamentada. El aporte de este antecedente se da al confirmar la teoría de Duval (2004), donde se plantea que “entre más representaciones semióticas se involucren alrededor de un objeto matemático y dentro de éstas se faciliten condiciones de congruencia, se logra mayor aprendizaje entre lo representante y lo representado, o representación semiótica y objeto matemático, reconocerlo en otros contextos de representación y establecer procesos de

modelización, ya que el reconocimiento de invariante en las diferentes representaciones es lo que permite el aprendizaje”. Es relevante para la presente investigación este estudio porque permite evidenciar que las representaciones semióticas afectan directamente la enseñanza y el aprendizaje, en este caso de las matemáticas.

Dentro de la misma línea de investigación en semiótica de las matemáticas, se encuentra el estudio de Ospina García (2012), realizado a los estudiantes de grado octavo, jornada de la mañana 2011 del Colegio Eugenio Pacelli, de Manizales, donde pretendió aportar elementos que promovieran las actividades cognitivas de tratamiento y conversión de representaciones semióticas del concepto matemático función lineal; la investigación de enfoque cualitativo interpretativo, utilizó técnicas de observación (audio y video) y dos cuestionarios escritos como instrumentos de recolección de información. El autor logra concluir que entre más representaciones semióticas se involucren en el aprendizaje de un concepto matemático (en este caso el concepto de función lineal) y al interior de estas representaciones, se faciliten condiciones de congruencia, se alcanza una mejor comprensión, logrando que el estudiante establezca la diferencia entre la representación semiótica del concepto matemático y el objeto matemático representado, discriminar sus unidades significantes y ponerlas en correspondencia en otros registros, ya que el reconocimiento de la invarianza entre estas unidades significantes es la que permite la aprehensión del concepto matemático (Duval, 2004).

Dando continuidad al desarrollo de los antecedentes, se encontró una investigación sobre razones, de autoría de Rendón Mesa (2009), que realizó con un grupo de estudiantes de grado

noveno de la Institución Educativa Pedro Luis Álvarez Correa del municipio de Caldas (Antioquia); con ellos se implementó una guía de actividades que vinculó las concepciones del cambio (cualitativo y cuantitativo) con situaciones reales; usó la metodología de investigación denominada “ingeniería didáctica”, empleando cuestionarios y entrevistas para la recolección de información. Concluyó Rendón Mesa, citando a Esteban (2004) que “al indagar por un concepto específico a través de los mapas conceptuales, el docente puede darse cuenta del tipo de relaciones construidas por los alumnos, con qué otros conceptos las relacionan, el lenguaje utilizado y el grado de integración entre ellos. Al evaluar esta información, la instrucción se puede orientar a ayudarle a los alumnos a ampliar la red de relaciones”. Este estudio es relevante ya que permite potenciar la comprensión de las razones y contextualiza los temas tratados en el aula.

Otro estudio de interés nacional es el que se evidenció en la investigación de Ceballos Espinosa (2012), desarrollada con 35 estudiantes que cursaban el grado octavo de básica secundaria en la Institución Educativa María Josefa Marulanda del municipio de La Ceja (Antioquia), donde se implementó una unidad didáctica para facilitar el aprendizaje significativo de la proporcionalidad basadas en la multiplicación, tema muy relacionado con las razones y proporciones. Los resultados obtenidos muestran la eficacia del uso de ésta estrategia didáctica basada en el aprendizaje significativo, evidenciados en las tareas resueltas, test aplicados y los registros hechos por el profesor.

Por otra parte, Rojas Durango (2006), examinó el problema de investigación en torno a la modelización didáctica, encontrándose que el conocimiento de las dificultades que presenta el futuro profesor de ciencias para hacer una adecuada modelización didáctica, deberá comprender cómo puede enriquecerse dicha articulación para la formación de profesores en el área, en la Universidad de Antioquia. La metodología empleada fue un estudio de caso con cuatro estudiantes, a lo que se concluyó que se detectan dificultades de formación científica, epistemológica y didáctica del profesor en formación inicial.

Asimismo, en el concepto de la resolución de problemas se encontró en la ciudad de La Habana (Cuba), la investigación de González Dosil (2006), donde el problema de investigación era cómo hacer que los estudiantes de carreras pedagógicas mejoren su capacidad de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. La investigadora aplicó tres pruebas pedagógicas y un instrumento con resolución de problemas para evaluar el desempeño en 39 estudiantes. Pudo concluir que la aplicación de la resolución de problemas favorece el carácter desarrollador del proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas en los futuros profesores.

También a nivel internacional, se encontró la tesis de Solar Bezmalinovic (2009), donde indaga acerca de las competencias que se desarrollan en el aula y tres de sus componentes como son tareas, procesos y niveles de complejidad en los estudiantes. Estas competencias hacen hincapié en dos grandes procesos como son la argumentación y la modelización, siendo esta última de interés en la presente investigación. Plantea que se debe caracterizar un modelo de enseñanza por competencias matemáticas en interpretación de gráficas funcionales por medio de

un estudio de caso, en el Grado Octavo de una institución en Santiago de Chile. Se llega a concluir que la modelización tiene un enfoque didáctico ya que se centra en estudiar la enseñanza de los modelos y las fases de la modelización.

Otra investigación es la de Rodríguez Quintana (2005), donde pretendió analizar las dificultades que tienen los alumnos en la resolución de las tareas de matemáticas y sus problemáticas, donde los participantes en la investigación fueron dos cursos de 1º de Bachillerato de un Instituto público de Enseñanza Secundaria de la Comunidad Autónoma de Madrid; donde se ha mostrado la eficacia de la propuesta de instrucción planteada para situar la resolución de problemas como eje integrador del proceso de enseñanza- aprendizaje de las matemáticas. Es importante para el presente estudio porque la resolución de problemas sirve como actividad estructuradora e instrumento de articulación curricular.

Por último, se señala la investigación de Corominas, Tesouro y Teixidó (2006) en aprendizaje profundo, que se fundamenta en el análisis de la enseñanza de los profesionales y el aprendizaje profundo de los estudiantes de diplomaturas y licenciaturas sobre educación de la Universidad de Girona. Los resultados permiten sugerir intervenciones de influencia indirecta en los enfoques de aprendizaje si se fortalecen las características de responsabilidad y apertura a la experiencia en los entornos de aprendizaje y, a la inversa, estas características de personalidad se refuerzan si se propician tareas escolares que requieran un aprendizaje profundo.

Con este ejercicio, se destacan algunas investigaciones en temas afines al presente estudio, y la importancia de modelizar el aprendizaje en profundidad de razones y proporciones a través de la enseñanza basada en la resolución de problemas.

2. Objetivos

2.1 Objetivo general

Modelizar el aprendizaje profundo de las razones y proporciones a partir de la resolución de problemas, en el grado noveno de la Institución Educativa Ciudadela Cuba de Pereira.

2.2 Objetivos específicos

- Modelizar el desarrollo del aprendizaje profundo sobre las razones y proporciones.
- Comprender cómo interactúan la enseñanza y el aprendizaje en profundidad sobre las razones y proporciones, a partir de la resolución de problemas y el uso de las representaciones semióticas.

3. Marco Teorico

Esta investigación se elaboró abordando algunos aspectos teóricos generales como preámbulo a los aportes conceptuales del presente estudio, realizando una aproximación desde tres razones fundantes: inicialmente se describen algunos aspectos sobre la didáctica de las matemáticas, específicamente sobre la resolución de problemas, y el uso de representaciones semióticas; en segundo lugar se aborda el aprendizaje profundo, y, por último los modelos y la modelización; todo esto enmarcado hacia la enseñanza y el aprendizaje de las razones y proporciones; estos ejes se describen a continuación en detalle.

3.1 Acerca de la didáctica

En la actualidad, es indispensable para todos los docentes de matemáticas, tener presente el concepto de didáctica al momento de desarrollar su labor, ya que es una ciencia emergente (Tamayo, 2009) que permite estudiar los procesos de interacción entre el docente, el estudiante y el conocimiento, buscando una transposición didáctica (docente-conocimiento), una interactividad (docente- estudiante) y unas ayudas ajustadas (conocimiento-estudiante) (Chevallard, 1985). En consecuencia, se hace un abordaje de la didáctica de las matemáticas a partir de la resolución de problemas, la cual, no consiste en hacer que los alumnos identifiquen las propiedades de los números o algoritmos, las propiedades de figuras geométricas, entre otros

objetos matemáticos, sino que sean capaces de relacionar el uso del lenguaje, sus representaciones, sus concepciones para resolver problemas en cualquier área del saber, “porque lo importante es utilizar actividades de resolución de problemas para desarrollar la creatividad y promover la toma de decisiones y las habilidades sociales, además de promover la autoestima de los estudiantes” (Macedo et al., 2006, p. 3).

Así mismo, la didáctica de las matemáticas desde el presente estudio tiene en cuenta las múltiples transformaciones que tiene un mismo saber sabio hasta un saber aprendido. Para ello, se ha de acostumbrarles a los estudiantes a un trabajo matemático, que no sólo incluya el aprendizaje de las matemáticas como proceso mecánico y repetitivo (algorítmico), sino que constituya un campo de estudio para el análisis de actividades cognitivas fundamentales, donde los estudiantes desarrollen un pensamiento crítico, que les permita expresar las diversas representaciones de un mismo objeto matemático, entendiendo que, “no puede haber comprensión en matemáticas si no se distingue un objeto de su representación, siendo estas últimas el medio del cual dispone un individuo para exteriorizar sus representaciones mentales, es decir, para hacerlas visibles o accesibles a los otros (representaciones semióticas)” (Duval, 1999, p. 14-15). Esto permite que los estudiantes puedan generar un concepto asertivo y aprendan a interpretar mejor los diversos algoritmos matemáticos de la temática investigada.

Del mismo modo, para el aprendizaje de las matemáticas se hace necesario el uso de varias formas de expresión y de representación diferentes a los del lenguaje verbal o escrito convencional, buscando un mejor desarrollo de la actividad matemática misma, fomentando la

autonomía del estudiante y su pensamiento crítico ya que “la pluralidad de los sistemas semióticos permite una diversificación tal de las representaciones de un mismo objeto, que aumenta las capacidades cognitivas de los sujetos y por tanto sus representaciones mentales” (Duval, 1999, p. 15), lo que permite desarrollar en los estudiantes un razonamiento crítico que conlleva a una mejor capacidad de resolución de problemas.

No obstante, se puede afirmar que las diversas representaciones mentales que tienen los estudiantes respecto a un objeto matemático contribuyen a “aprender a pensar matemáticamente, lo que significa, desarrollar un punto de vista matemático – que valore el proceso de matematización y abstracción y tener la predilección de aplicarlos, y desarrollar una competencia con las herramientas de trabajo, y usarlas en el servicio de la meta de aprender estructuras – desarrollo del sentido matemático” (Schoenfeld, 1994, p. 60), buscando así una interacción en el proceso educativo con diferentes estrategias en la enseñanza de las matemáticas, a través de las posibles rutas o caminos superando los obstáculos de aprendizaje, lo que permitirá a una transversalidad de ésta ciencia con las demás.

Para lograr esta transversalidad e integración con su entorno, se deben diseñar problemas que tengan un contexto de vida cotidiana y sean relevantes para los estudiantes, lo que se conocen como problemas auténticos, que se caracterizan por describir situaciones reales contextualizadas, donde sus respuestas no sean inmediatas ni obvias, que tengan múltiples caminos para llegar a la solución permitiéndoles trabajar competencias científicas. De acuerdo

con esta idea, la resolución de un problema, se producirá cuando incluya utilidad y originalidad en la misma proporción (Jiménez, 2010; Garret, 1988).

De ahí que, una de las estrategias para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas sea la utilización de problemas en sus contenidos, que lleven a la identificación de relaciones o modelos, en donde, tanto docentes como estudiantes, procuren representar o describir los objetos o símbolos matemáticos relacionados con la resolución de problemas. Para tal efecto, es conveniente tener en cuenta lo planteado por Schoenfeld (1992) donde presenta una caracterización de las dimensiones o categorías que explican el éxito o fracaso de los estudiantes en la resolución de problemas las cuales se enuncian a continuación. Este autor plantea que 1) inicialmente es importante generar estas estrategias que explican el fracaso o éxito de los estudiantes al resolver problemas, una de ellas son las estrategias cognitivas o heurísticas que ayuden a la representación y exploración de los problemas, con la intención de comprender los enunciados y plantear caminos de solución; 2) buscar e implementar las estrategias metacognitivas que involucren conocimiento acerca del funcionamiento cognitivo propio del individuo (¿Qué necesito? ¿Cómo utilizo ese conocimiento?); 3) estrategias de monitoreo y control del propio proceso cognitivo (¿Qué estoy haciendo? ¿Por qué lo hago? ¿A dónde voy?); y por último, 4) suscitar conductas que conlleven a una mejor motivación y tener en cuenta los componentes afectivos que caracterizan la conceptualización del individuo acerca de las matemáticas y la resolución de problemas, y su actitud y disposición al involucrarse en actividades matemáticas.

Con base en estas orientaciones dadas por Schoenfeld (1992) los docentes pueden identificar los modelos mentales que poseen sus alumnos acerca de un algoritmo y/o concepto fundamental, asociado con un dominio matemático particular o tema.

Además, del componente metacognitivo y de resolución de problemas, es importante implementar una estrategia curricular donde las decisiones y acuerdos se compartan entre alumnos y docentes; de ahí que en la actualidad, la didáctica de las ciencias propone desarrollar (diseñar e implementar) unidades didácticas que permitan que los modelos mentales de los estudiantes evolucionen en los componentes de aprendizaje en profundidad.

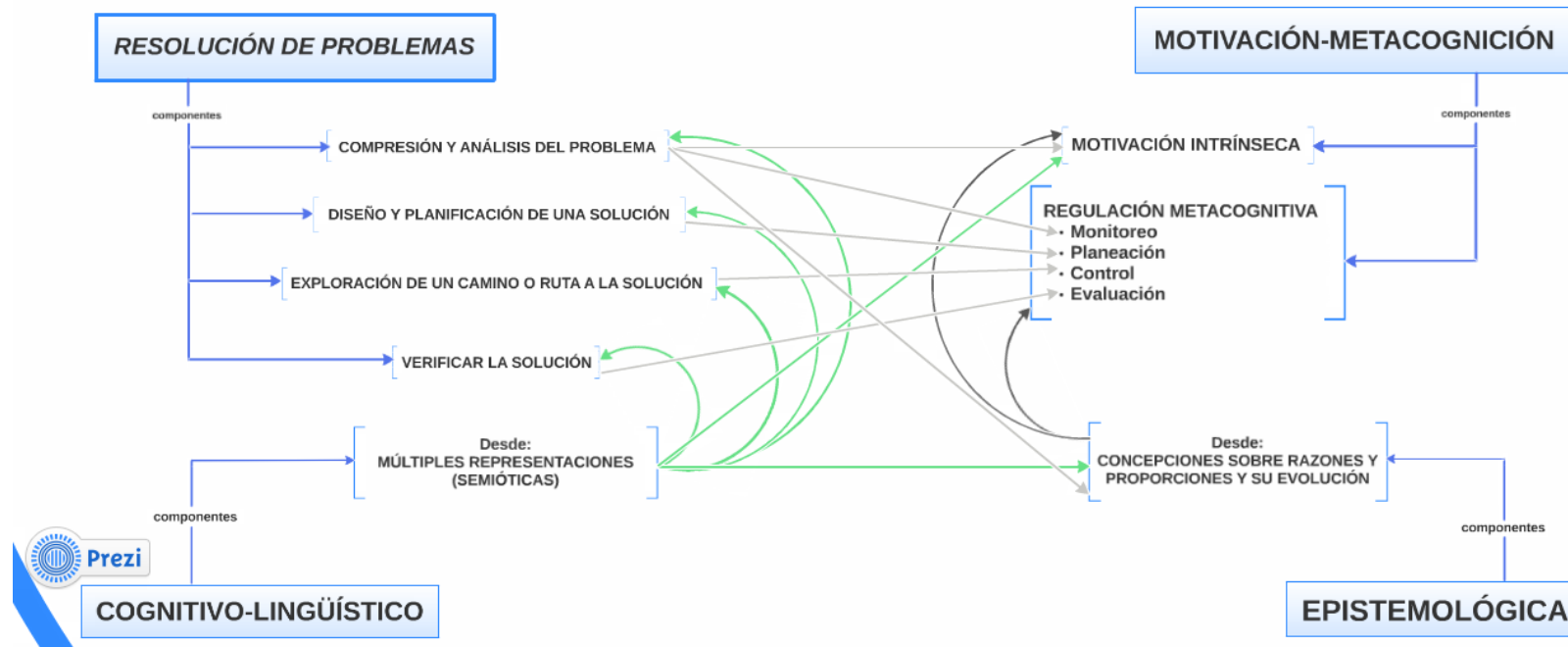
3.2 Sobre el aprendizaje en profundidad

Se entiende por aprendizaje en profundidad o aprendizaje de calidad en términos de Richard (1999, p. 4), aquel que “implica comprensión profunda y consistencia en las ideas. Cuando ha habido un esfuerzo para resolver las contradicciones, y éstas se han resuelto, entonces las ideas son consistentes. [...] La comprensión requiere algo más que consistencia. No debe haber contradicciones en el conocimiento de una persona, porque dicho conocimiento es limitado”. El aprendizaje en profundidad tiene por los menos las siguientes características o componentes (ver gráfica 2):

- Primera característica: *Es un aprendizaje donde el estudiante resuelve problemas auténticos*, el estudiante aprende a resolver problemas de su vida cotidiana y relevante para él donde sus respuestas no sean inmediatas ni obvias, tiene múltiples caminos para llegar a la solución permitiéndole trabajar competencias científicas. La postura es, desde lo planteado por Schoenfeld (1985) para su resolución: primera etapa, analizar y comprender un problema por medio de diagramas, dibujos, gráficos, semejanzas con otros problemas, esquemas y narraciones; la segunda etapa es el diseño y planificación de una solución teniendo en cuenta los procesos de regulación y conocimiento metacognitivo; la tercera es la exploración de diversas rutas o caminos a la solución del problema, considerando pequeñas y grandes modificaciones del problema de origen; y por último, la verificación de la solución del problema, donde se comparan la cantidad de datos iniciales y los usados finalmente, si se puede generalizar éste, si se podrían recorrer nuevos caminos para encontrar la solución, etc. Por tal motivo, el autor sostiene que “este proceso es más complejo e involucra más elementos, inclusive de carácter emocional-afectivo, psicológico, sociocultural, entre otros”.

Gráfica 2. Relación entre componentes del aprendizaje profundo. Fuente: Autores

RELACIÓN ENTRE COMPONENTES DEL APRENDIZAJE PROFUNDO



- Segunda característica: *Es un aprendizaje autotélico (que incluye procesos de motivación y autorregulación)*, de manera que, el estudiante al interiorizar el conocimiento, debe manifestar el desarrollo de habilidades cognitivas adicionales al ser consciente del uso que hace de los procesos; estas habilidades son la capacidad para “monitorear, evaluar y planificar nuestro propio aprendizaje” (Flavell, 1979, p. 906-911). Así mismo, el estudiante debe aprender por qué le gusta y le genera expectativas, ya que sin una motivación interior tampoco hay aprendizaje; y, es responsabilidad de los maestros y alumnos brindarle mayor atención al conocimiento y al esfuerzo que este requiere para una mejor aprehensión de los conceptos; en otras palabras, el estudiante y el maestro “pueden conocer, controlar y mejorar las propias estrategias cognitivas, motivacionales y metacognitivas” (García, 1991, p. 4).
- Tercera característica: *El estudiante tiene un uso adecuado del lenguaje de la disciplina, que refleja dominio epistemológico y desarrollo de sus procesos cognitivo-lingüísticos.* En este sentido las representaciones semióticas constituyen uno de los campos potentes para los procesos de enseñanza y aprendizaje en la construcción de significados en el aula, tales como los diagramas, dibujos, tablas de datos, diferentes sistemas de escritura, prácticas de laboratorio, esquemas y expresiones verbales, entre otros. Todas estas formas de representación surgen y son fundamentales en la interacción entre los alumnos y los profesores, en una construcción social conjunta dentro de la dinámica de clase, por tal motivo, una acción se hace significativa cuando se contextualiza (Lemke, 1997), de ahí que estas representaciones semióticas tengan sentido dentro de una comunidad, en la forma en cómo se comunican sus ideas y/o pensamientos utilizando el lenguaje verbal o escrito, haciendo uso de los gestos, dibujos, costumbres que son propias del entorno en cual se vive e

interactúa. De igual forma, el estudiante debe evidenciar conocimiento de la epistemología del concepto, en este caso desde las concepciones de las razones y proporciones y su evolución, donde la construcción del conocimiento científico implica también un proceso metacognitivo, en el que los docentes buscan que los estudiantes replanteen sus propias concepciones, sacando a flote sus propias teorías.

Vale la pena señalar que los estudiantes (incluyendo los profesores en formación), en general, no son conscientes de tener esas concepciones y que éstas no desaparecen con facilidad.

De forma general las concepciones:

1. se presentan asociadas a una metodología denominada de la superficialidad, caracterizada por respuestas rápidas, poco reflexivas y que transmiten mucha seguridad.
2. Se encuentran presentes en contextos muy diferentes y responden a situaciones muy variadas.
3. Se construyen a lo largo de la vida del individuo mediante la influencia de los diferentes contextos en los cuales él participa.
4. Son de origen tanto individual como social.
5. Éstas son permeables a la edad, la capacidad, el género y las fronteras culturales de los estudiantes.
6. Son resistentes al cambio mediante estrategias de enseñanza tradicionales.
7. Guardan semejanza con explicaciones de fenómenos naturales ofrecidas por generaciones previas de científicos y filósofos (Tamayo, 2009).

El logro de aprendizajes en profundidad promueve el desarrollo del pensamiento crítico de los estudiantes, lo que se evidencia entre otros aspectos en que el estudiante genera autonomía en sus procesos de aprendizaje, por lo que está en capacidad de regularse en todo lo que hace, piensa y actúa; está en capacidad de resolver problemas auténticos y se motiva a aprender, por lo que se dan procesos de evolución conceptual en este caso sobre el objeto matemático de estudio.

Para la presente investigación, se hizo necesario identificar cómo piensan y aprenden los estudiantes al momento de solucionar un problema auténtico a través de los componentes del aprendizaje en profundidad; por tanto, en el siguiente apartado se verá como algunas de las corrientes de investigación sobre los modelos mentales y la modelización permiten una comprensión más general del proceso de formación de conceptos científicos.

3.3 Acerca de los modelos y modelización

En los últimos 30 años se han realizado numerosas investigaciones que han pretendido indagar cómo los docentes y estudiantes representan mentalmente sus conocimientos acerca del mundo, cómo operan mentalmente con esas representaciones y cómo éstas pueden construirse, re-construirse y cambiar, tanto en ambientes de enseñanza como de aprendizaje en situaciones cotidianas. El ser humano emplea diversas representaciones simbólicas que traducen los eventos externos en modelos internos (Tamayo, 2009). El término general usado para llamar estos

modelos internos es el de representaciones mentales, las cuales Jhonson-Laird (1983), clasifica en tres tipos:

- Las representaciones proposicionales: representaciones que pueden ser expresadas verbalmente.
- Modelos mentales: análogos estructurales de una situación del mundo real o imaginario.
- Imágenes mentales: perspectiva particular de un modelo mental.

Esta investigación se centró en el estudio de los modelos mentales, entendidos como construcciones hipotéticas que tiene el sujeto para explicar o comprender un suceso, bien sea físico o social; dependen del interés y necesidad del individuo, de cómo los construyan y usen en su contexto. Se caracterizan por ser dinámicos, incompletos e inestables (Tamayo, 2009).

Los modelos mentales son contruidos por los individuos durante sus procesos cognitivos, por ello son representaciones dinámicas y generativas que pueden ser manipuladas mentalmente para hacer explicaciones causales y predicciones acerca de los fenómenos físicos y de los estados de ánimo de las personas (Vosniadou, 1994). La mayoría de estos modelos se generan para enfrentar demandas específicas en la resolución de problemas. Se puede suponer que, al menos parte de estos modelos mentales, se encuentran almacenados mientras no sean requeridos, pero cuando se necesitan, se puede hacer uso de ellos desde la memoria de largo plazo.

Es por esto, que se deben diseñar estrategias adecuadas y encaminadas a identificar los obstáculos de tipo epistemológico, ontológico, cognitivo-lingüísticos y motivacionales que pueden surgir cuando el individuo utiliza un modelo mental para resolver un problema de tipo matemático y/o socio-cultural. A este proceso se le llama modelización.

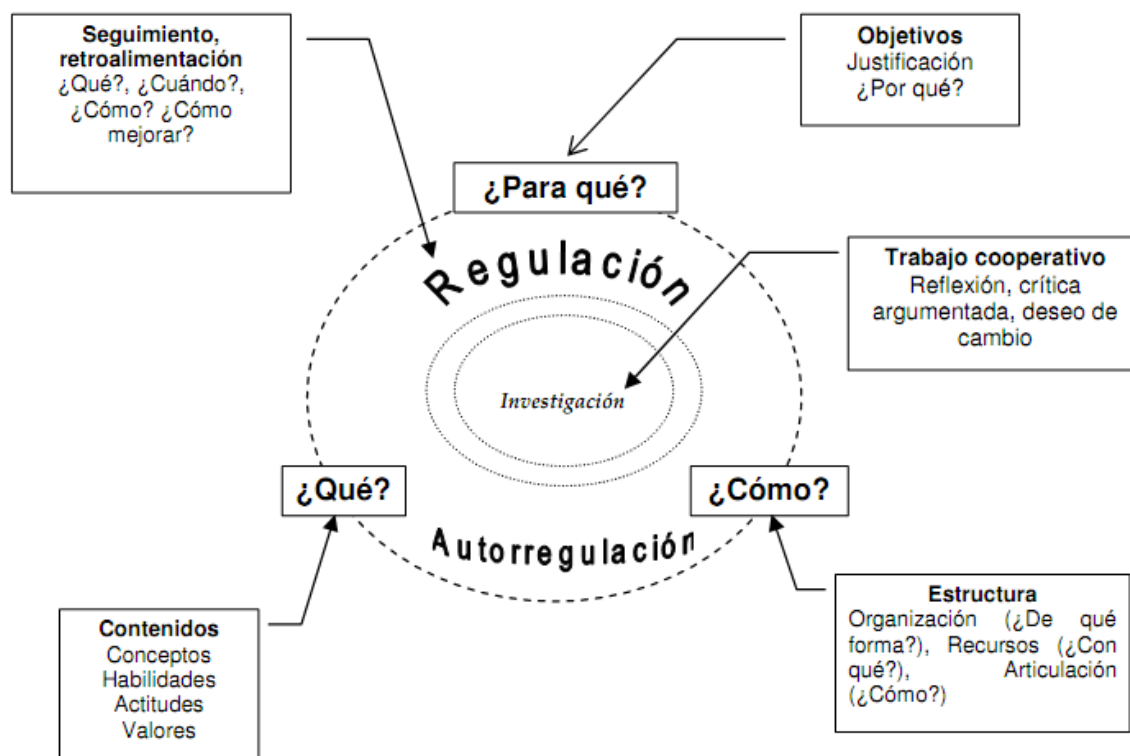
La presente investigación pretende modelizar el aprendizaje en profundidad de los estudiantes, buscando identificar los obstáculos de aprendizaje que puedan surgir en este proceso y, a partir de allí diseñar una unidad didáctica que potencie el aprendizaje profundo de las razones y proporciones.

3.4 Alcances de la unidad didáctica

El desarrollo de una unidad didáctica facilita los procesos de aprendizaje y enseñanza y las relaciones en el aula entre estudiante-profesor, y sirve como un elemento que direcciona un mejor desarrollo de las practicas docentes; se puede entender el término unidad didáctica como un “sistema que interrelaciona los elementos que intervienen en el proceso de enseñanza y aprendizaje, con una alta coherencia metodológica interna, empleándose como instrumento de programación y orientación de la práctica docente. Se estructura mediante un conjunto de actividades que se desarrollan en un espacio y tiempo determinado para promover el aprendizaje de los estudiantes” (García, 2004, p. 47). El desarrollo de ésta debe partir de los modelos

mentales de los estudiantes, los contratos didácticos del aula y los procesos para su implementación como la regulación y autorregulación mostrados en la gráfica 3, pretendiendo con esto que los estudiantes aprendan en profundidad.

Gráfica 3. Elementos de una unidad didáctica (García, 2004)



Se puede apreciar en la gráfica 3, que la unidad didáctica permite analizar en detalle los procesos tanto de enseñanza como de aprendizaje que se dan en el transcurso de una clase, permitiendo que se identifiquen los obstáculos y habilidades de los estudiantes en el aprendizaje en profundidad de las razones y proporciones a través de la resolución de problemas, tema a desarrollar en la presente investigación. A medida que se va desarrollando la unidad didáctica,

se adecuan las intervenciones en el aula para mejorar las estrategias que busquen superar los obstáculos en los procesos de modelización y conservar o fortalecer las habilidades en el proceso de aprendizaje de los alumnos.

Además, es importante resaltar el concepto de unidad didáctica visto desde Tamayo (2006, p. 37-49), el cual se entiende “como un proceso flexible de planificación de la enseñanza de los contenidos relacionados con un dominio de saber específico, en este caso, de los dominios de las matemáticas con el fin de construir procesos de aprendizaje en una comunidad determinada”, por lo tanto vale la pena resaltar que una unidad didáctica será exitosa cuando se tienen en cuenta en un inicio los modelos mentales de los estudiantes, respetando sus opiniones; luego, ir introduciendo gradualmente las temáticas de acuerdo al plan de estudios, sin dejar de lado, la contextualización de estos conocimientos en la vida diaria, tratando los contenidos de forma clara y ordenada. Por último, evaluar la experiencia de aprendizaje del estudiante y lograr que lo aplique a otras situaciones, problemas o ejemplos que regulen el qué y el cómo aprenden.

En consecuencia, es importante al momento de enseñar que el docente conozca los diferentes componentes que debe tener en cuenta al momento de diseñar e implementar una unidad didáctica: los modelos mentales, historia y epistemología del concepto, la metacognición y, la resolución de problemas como estrategia metodológica (ver gráfica 4).

Gráfica 4. Modelo tomado del texto la clase multimodal y la formación y evolución de conceptos científicos a través del uso de tecnologías de la información y la comunicación (Tamayo, Vasco, Suarez de la Torre, Quiceno, Castro y Giraldo, 2011) y ajustado a las necesidades de la presente investigación.



Para el desarrollo de la unidad didáctica se debe tener en cuenta por lo menos la siguiente lógica: Primero se debe explorar qué sabe el estudiante teniendo en cuenta sus concepciones, ya que es un punto de partida que sirve para reestructurarlas, modificándolas o esperando que el alumno se adapte; en este caso se partió de los modelos mentales de los estudiantes. En segunda instancia, se debe tener en cuenta que los conceptos en ciencia están en continua construcción y evolución, de ahí su historia y epistemología. Como tercer componente, se encuentran los procesos autorregulados que los monitorean, controlan, evalúan y planifican el desarrollo de una tarea. Y por último, la resolución de problemas como una estrategia que aporta al aprendizaje en profundidad de los estudiantes (Tamayo, Suárez, García y otros, 2011).

En síntesis, una unidad didáctica permite un acercamiento sobre los trabajos y prácticas de enseñanza y aprendizaje implementados en el aula y aplicados en el entorno biopsicosocial del estudiante.

4. Diseño metodológico

El tipo de investigación en el presente estudio fue de carácter mixto, ya que se realizaron análisis cualitativos y cuantitativos de la información recolectada, pretendiendo potenciar el desarrollo del conocimiento, la construcción de teoría y la resolución de problemas. Este abordaje se realizó teniendo en cuenta que ambos enfoques en conjunto enriquecieron la investigación, no se excluyen ni se sustituyen, asumiéndoles como enfoques complementarios. (Hernández et al., 2003).

De acuerdo con lo anterior, se realizó un análisis a la información recolectada, desde la perspectiva cualitativa de enfoque comprensivo, a partir de las experiencias vividas de los estudiantes con los que se profundizó en la investigación, de sus comportamientos, emociones y sentimientos. El propósito fue el de descubrir conceptos y relaciones en los datos brutos y luego organizarlos en un esquema comprensivo teórico (Strauss y Corbin, 2002).

En el caso del análisis cuantitativo se le dio un enfoque explicativo, pretendiendo a partir de los datos obtenidos describir y explicar los cambios logrados en el aprendizaje en profundidad de la totalidad de estudiantes con los que se trabajó en la investigación (Briones, 1996; Baptista, Fernández y Hernández, 2006).

Luego de estos análisis, se establecieron y construyeron las relaciones a partir de los hallazgos logrados con cada enfoque (ver etapa III, interpretación y análisis de los resultados, página 45).

La investigación se desarrolló con 29 estudiantes de grado noveno de la Institución Educativa Ciudadela Cuba, con edades que oscilan entre 14 y 16 años de edad. El estrato social y económico se sitúa entre 1 y 3, dentro del grupo hay 10 niñas y 19 niños, quienes fueron la unidad de trabajo. Al ser un diseño cuasiexperimental, la muestra fue intencional, no probabilística (Hernández et al, 2008).

Como unidad de análisis se tuvo el aprendizaje profundo de las razones y proporciones y su relación con la incidencia que tenía en él una unidad didáctica centrada en la resolución de problemas.

La presente investigación se dividió en tres etapas: la etapa de planificación, la etapa de trabajo de campo y recolección de información, y la etapa de análisis e interpretación de los datos, las cuales se describen a continuación:

I. Etapa de planificación:

Durante esta primera etapa se realizó una búsqueda de investigaciones relacionadas con la modelización del aprendizaje profundo a partir de la resolución de problemas sobre razones y proporciones, las cuales se presentan en los antecedentes investigativos internacionales, nacionales y regionales, utilizando fuentes y fichas bibliográficas. Posteriormente el trabajo se centró en la elaboración del ámbito problémico, los objetivos, el marco teórico, el diseño metodológico y los instrumentos de recolección de la información. Para la validación de los instrumentos se realizó una revisión de los instrumentos por parte del tutor del proyecto investigativo, seguido de una prueba piloto a un grupo de estudiantes diferentes a los de la investigación del grado noveno de la Institución Educativa Byron Gaviria; este pilotaje también se realizó con compañeros de la maestría en Educación de la línea de ciencias naturales, y al juicio de un experto en el área.

II. Etapa de trabajo de campo y recolección de información:

En la segunda etapa se aplicaron cada una de las técnicas e instrumentos para la recolección de la información con los estudiantes de noveno grado de la institución educativa Ciudadela Cuba de la ciudad de Pereira, como fueron:

- Un cuestionario de preguntas abiertas (ver anexo A) que se utilizó al inicio y al final del estudio. Las preguntas planteadas en este cuestionario, fueron tomadas de las pruebas PISA

2003 (2005), Pruebas SABER 5° y 9° (2012) y TIMSS 2007 (2011), ajustadas por los investigadores y validadas como se mencionó en el ítem anterior.

- Una entrevista semi - estructurada (ver anexo B), que se utilizó al final de cada una de los cuatro cuestionarios de la investigación, las cuales fueron transcritas, y aplicadas por un docente. Este instrumento busca plantear no sólo preguntas sobre los aspectos relacionados con el presente estudio, sino de comprender el lenguaje y el significado que los estudiantes le otorgan cuando desarrollan cualquier actividad.
- Una observación no participante de las clases, realizada por medio de una filmación en cada una de las sesiones de la unidad didáctica (ver anexos F).
- Las producciones textuales de los estudiantes realizadas durante el desarrollo de las actividades de la unidad didáctica (ver anexos G).
- Ayudas ajustadas por parte del docente, las cuales consistieron en realizar una retroalimentación de los cuestionarios y guías de actividad desarrolladas en cada una de las sesiones de la unidad didáctica.

III. Etapa de análisis e interpretación de datos

La etapa final abarcó la realización de tres tipos de análisis: el cuantitativo, el cualitativo y por último el mixto.

Para el primer tipo de análisis, la información se obtuvo de la aplicación de un cuestionario a los 29 estudiantes que hicieron parte del estudio. El cuestionario utilizado fue el mismo en el momento inicial y final luego de la intervención didáctica. Posteriormente, se transcribieron cada uno de los cuestionarios en la tabla 1, descrita a continuación, y se le dio una valoración a la información recogida de acuerdo con los criterios y características que enmarcan el aprendizaje profundo sobre las razones y proporciones basado en la resolución de problemas mostrados en la tabla 3 (Página 56). Los criterios para la escala de valoración que aparecen en esta tabla, se sustentan en lo planteado en las tabla de valoración de las preguntas de las pruebas PISA 2003 (2005), Pruebas SABER 5° y 9° (2012) y TIMSS 2007 (2011), además de su validación por expertos y en la línea de investigación en didáctica de las ciencias naturales de la Maestría en Educación de la Universidad Tecnológica de Pereira (2012).

Tabla 1. Rejilla de valoración para consignación de la información recogida en el cuestionario inicial y final.

Fuente: Autores.

<i>ESTUDIANTE</i>	<i>NOMBRES Y APELLIDOS</i>	<i>PREGUNTA</i>	<i>OPCIÓN ESCOGIDA</i>	<i>VALORACIÓN</i>	<i>DESCRIPCIÓN DE LA OPCIÓN ESCOGIDA</i>	<i>VALORACIÓN TOTAL</i>	<i>NIVEL</i>	<i>DESCRIPCIÓN DE LA VALORACIÓN</i>
		1						
		1.1						
		1.2						
		1.3						
		2						
		2.1						
		2.2						
		2.3						
		2.4						
		3						
		3.1						
		3.2						
		4						
		5						
		6						

Seguidamente se realizó el análisis de la información recolectada por medio de gráficos en Excel identificando el nivel inicial de cada estudiante de acuerdo con las descripciones de la tabla 3, obteniendo una modelización inicial del aprendizaje profundo del grupo; de igual modo se analizaron los resultados del cuestionario final. Finalmente, se compararon los resultados obtenidos entre el cuestionario inicial y final logrando determinar si hubo cambios o no en el aprendizaje en profundidad de los estudiantes acerca de las razones y proporciones basados en la resolución de problemas a través de la implementación de una unidad didáctica.

Para el segundo análisis, el cualitativo, se hizo una organización, reducción y triangulación de la información con el fin de modelizar el aprendizaje profundo a partir de la resolución de problemas sobre razones y proporciones, de cuatro estudiantes de la Institución Educativa Ciudadela Cuba de la ciudad de Pereira. Esta unidad de trabajo fue escogida teniendo en cuenta el desempeño en la evaluación inicial, de tal forma que hubiese un estudiante de desempeño alto, dos de desempeño medio y uno de desempeño bajo. La información fue recolectada por medio de entrevistas semi-estructuradas aplicadas en dos momentos, los cuestionarios iniciales y finales y se contrastaron con la observación no participante de las clases desarrolladas. Seguidamente se hizo el análisis y la interpretación de la información recolectada de los estudiantes buscando modelizar el aprendizaje profundo a partir de la resolución de problemas sobre razones y proporciones, y realizando un ajuste al referente teórico a medida que se analizó la información.

Este proceso se desarrolló para cuatro estudiantes buscando la modelización por medio de epítomes o “secuenciación en espiral” del aprendizaje propuesta por Reigeluth y Stein (1983). Para la presente investigación se entiende el concepto de epítome desde una primera visión panorámica de los contenidos más generales (epítome inicial) y gradualmente se observó cada momento de forma integral a medida que se va profundizando un poco más en los contenidos y sus relaciones hasta un nivel mayor de elaboración condensado en un epítome final.

Partir de este concepto, permitió modelizar el aprendizaje profundo del estudiante por medio de sus componentes como son la resolución de problemas, la epistemología desde las concepciones y su evolución, la regulación metacognitiva - motivacional, y lo cognitivo - lingüístico desde las representaciones semióticas de un mismo objeto matemático. En consecuencia, el epítome inicial posibilitó modelizar el aprendizaje en profundidad de los alumnos (cómo resuelven problemas, qué concepciones tienen sobre las razones y proporciones, qué usos del lenguaje muestran, qué motivación y procesos metacognitivos tienen frente a este tema); para tal fin, se tuvo en cuenta las relaciones entre los componentes del aprendizaje profundo ya mencionados (ver gráfica 2).

Y por último, se realizó un análisis mixto, el cual buscó contrastar los resultados obtenidos en los análisis anteriores, con la teoría recogida en el ámbito problémico, y generar elementos teóricos sobre cómo aprenden en profundidad las razones y proporciones los estudiantes teniendo para ello como eje fundamental la resolución de problemas.

5. Interpretación y análisis de resultados

A continuación se describe como se fue modelizando el epitome sobre el aprendizaje profundo de los estudiantes del grado noveno, a medida que se fue avanzando en el trabajo. Para realizar este análisis se llevó a cabo el siguiente procedimiento:

Tabla 2. Cronograma de procedimientos con los instrumentos utilizados para la recolección de la información y tiempos de aplicación.

FECHA DE APLICACIÓN	INSTRUMENTO	NÚMERO DE ESTUDIANTES EVALUADOS	TIEMPO DE DURACIÓN (minutos)	OBSERVACIÓN
Primera semana de octubre de 2013	Cuestionario inicial (ver anexo A)	29	60	Modelización inicial del aprendizaje en profundidad de todos los estudiantes
	Entrevista inicial (ver anexo B)	4	60	Para modelización epitome 1 de 4 estudiantes (análisis comprensivo).
Primera y segunda semana de noviembre de 2013	Cuestionario 2 (ver anexo A)	4	60	Para modelización epitome 2 de 4 estudiantes (análisis comprensivo).
	Entrevista No 2 (ver anexo B)	4	60	
	Observación no participante (filmación de clases, fragmentos, ver anexo F)	29	60	
Tercera semana de noviembre de 2013	Cuestionario 3 (ver anexo A)	4	60	Para modelización epitome 3 de 4 estudiantes (análisis comprensivo).
	Entrevista No 3 (ver anexo B)	4	60	

	Observación no participante (filmación de clases, fragmentos, ver anexo F)	29	40	
Última semana de enero de 2014	Cuestionario final (ver anexo A)	29	60	Modelización final del aprendizaje en profundidad de todos los estudiantes
	Entrevista No 4 (ver anexo B)	4	60	Para modelización epitome 4 de 4 estudiantes (análisis comprensivo).

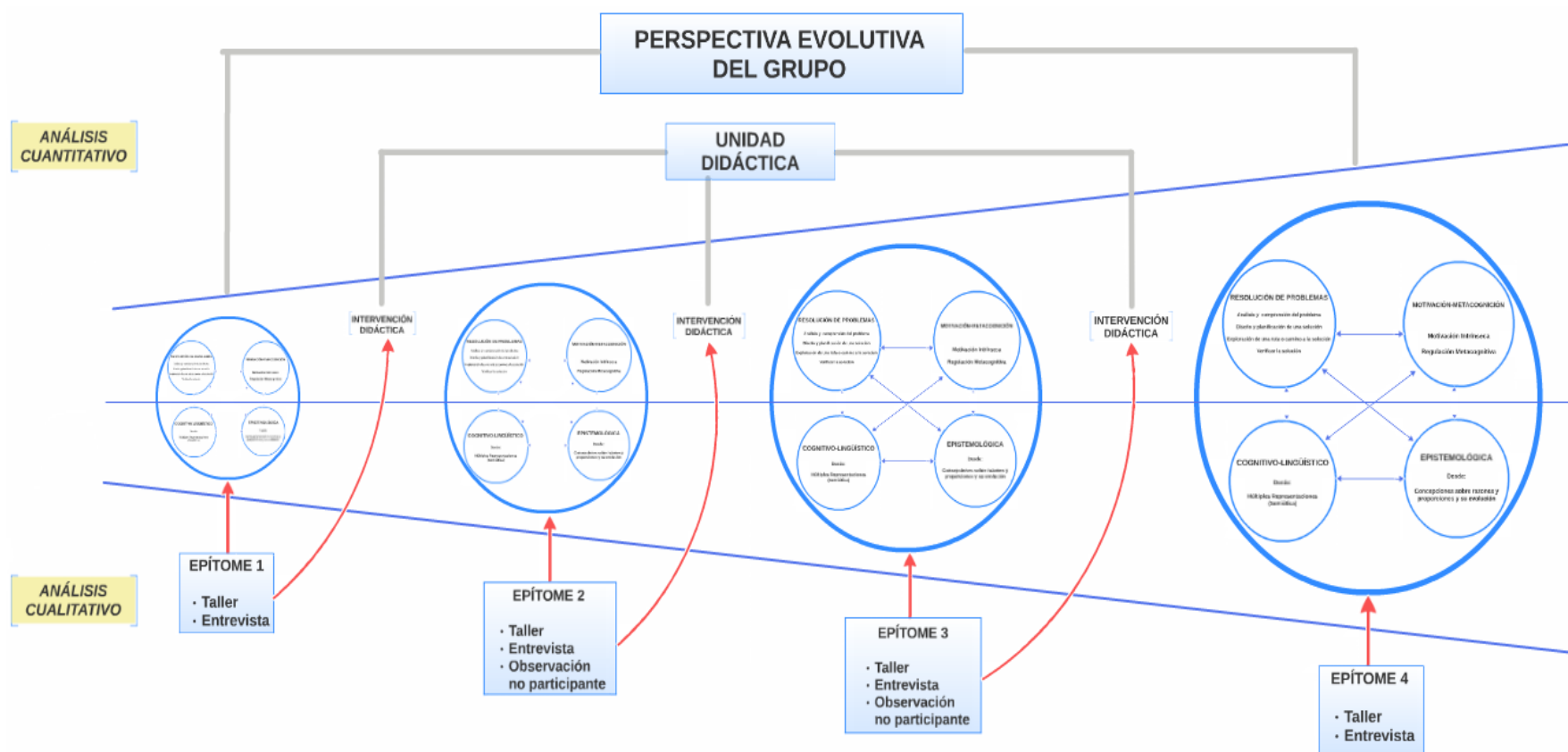
Se transcribió toda la información recopilada con cada una de las técnicas e instrumentos aplicados. En conformidad con todos los estudiantes, las respuestas verbales se grabaron en audio.

Luego de aplicarse el primer cuestionario y realizar la modelización inicial de todos los estudiantes, se diseñó una unidad didáctica a partir de esta indagación. La unidad didáctica incluyó dos guías de actividades (ver anexo C).

La docente investigadora que se encargó de la ejecución de la unidad didáctica, realizó una retroalimentación de las dificultades identificadas en el desarrollo de cada uno de los cuestionarios y guías de actividades. También se realizaron ajustes a las actividades planteadas en la unidad didáctica según se daba el desarrollo de las mismas. Se aplicaron unas preguntas abiertas después de finalizar cada actividad, para indagar los procesos de regulación metacognitiva y el nivel de motivación de los estudiantes frente a la aplicación de la unidad

didáctica (ver anexo D). La duración de la unidad didáctica comprendió 12 sesiones de aproximadamente una hora. Este procedimiento fue llevado a cabo según se ilustra con la gráfica 5.

Gráfica 5. Esquema cónico para la modelización del aprendizaje en profundidad de los estudiantes de grado noveno de la Institución Educativa Ciudadela Cuba de la ciudad de Pereira. Fuente: Autores. Para identificar las relaciones de los componentes del aprendizaje en profundidad, remitirse a la gráfica 2.



Posteriormente, se presenta el análisis cuantitativo de acuerdo a los resultados obtenidos en la aplicación del cuestionario inicial y final, y la incidencia de la unidad didáctica basada en la resolución de problemas en el aprendizaje en profundidad de las razones y proporciones. Entre la aplicación del cuestionario inicial y final transcurrió un tiempo aproximado de tres meses y veinte días, con el fin de evitar el efecto de la recordación en los estudiantes, ya que se utilizó el mismo cuestionario al inicio y finalización de la investigación y poder inferir de esta forma si se logró un aprendizaje en profundidad sobre las razones y proporciones basados en la resolución de problemas.

5.1. Resultados del análisis cuantitativo

Para este proceso se recogieron y analizaron los datos tomando como variables el aprendizaje profundo sobre las razones y proporciones y la incidencia de la unidad didáctica basada en la resolución de problemas.

Lo que se pretendió demostrar fue que la aplicación de una unidad didáctica basada en la resolución de problemas mejora el aprendizaje profundo sobre las razones y proporciones en los estudiantes del grado noveno de la Institución Educativa Ciudadela Cuba de Pereira.

Por tanto, la organización de la información y análisis de resultados comprendió los siguientes momentos:

- a. Resultados del cuestionario inicial: Se presentan los resultados y el análisis estadístico del cuestionario inicial, los cuales fueron el punto de partida del diseño de la unidad didáctica (ver anexo E).

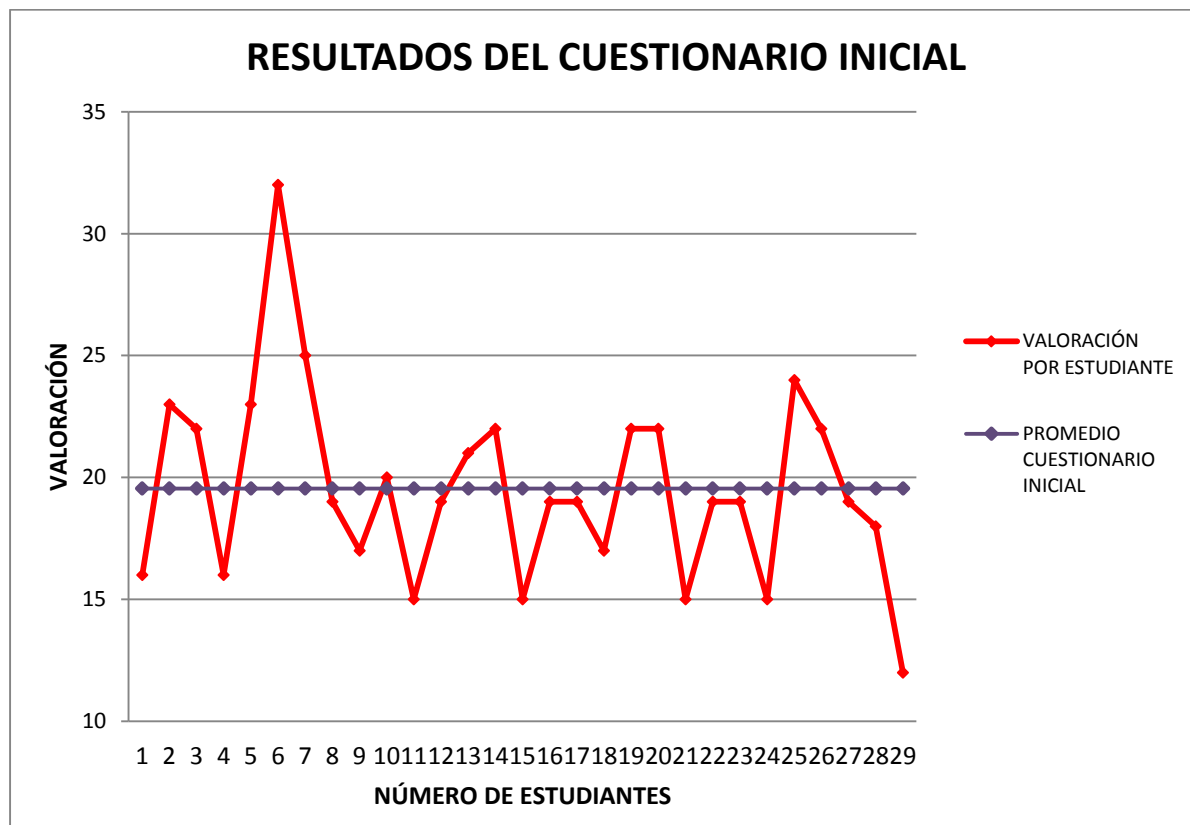
- b. Unidad didáctica: La cual se desarrolló durante 12 sesiones de 60 minutos cada una, realizadas entre el 2 de Octubre de 2013 al 23 de Enero de 2014. (ver anexos A al G).

- c. Resultados del cuestionario final: Se presenta el análisis comparativo con el cuestionario inicial, para determinar la incidencia de la unidad didáctica en el aprendizaje profundo de las razones y proporciones (Anexo E).

a. Resultados del cuestionario inicial

A continuación en la gráfica 6 se muestran los resultados del cuestionario inicial realizado a 29 estudiantes de grado noveno, donde se observó la puntuación obtenida por cada uno de ellos en este cuestionario.

Gráfica 6. Resultados del cuestionario inicial aplicado a 29 estudiantes del grado 9°B de la Institución Educativa Ciudadela Cuba de Pereira.



Comparando la puntuación lograda por cada estudiante con la media del grupo (19,55), se evidencia que la mayoría de éstos (17 alumnos que equivalen al 59%) se encuentran por debajo del promedio obtenido al aplicar el cuestionario inicial (ver anexo E). Del mismo modo, se pudo identificar que 12 estudiantes (41%) se ubican por encima de ésta media, destacando al estudiante número seis de dicha gráfica, quién sobresale notoriamente dentro del grupo. Cabe resaltar, que la media obtenida por el grupo (19,55) se ubicaría dentro del nivel medio de desempeño según la tabla 3 y muy cerca al nivel bajo según esta misma tabla.

Tabla 3. Características de valoración de los estudiantes respecto al aprendizaje profundo de las razones y proporciones en los niveles Alto, Medio y Bajo con su respectivo rango de puntuación. Fuente: Autores.

NIVEL	PUNTAJE O RANGO	CARACTERÍSTICAS
ALTO	31 – 39	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Analiza y comprende el problema, diseña y planifica una solución, explora caminos para la solución, verifica la solución. ✓ Utiliza múltiples representaciones para un mismo objeto matemático. ✓ Muestra una evolución conceptual sobre las razones y proporciones. ✓ Demuestra gran motivación hacia la asignatura, sus temáticas, y realiza procesos metacognitivos (conocimiento, conciencia y regulación).
MEDIO	18 – 30	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Presenta algunas ideas acerca de cómo resolver un problema, cómo diseñarlo o planificarlo tratando de buscar algún camino y no verifica la solución. ✓ Utiliza hasta dos representaciones para un objeto matemático. ✓ Describe con poca claridad concepciones sobre las razones y proporciones y su evolución. ✓ Demuestra poca motivación hacia la asignatura, sus temáticas, y realiza algunos procesos metacognitivos (conocimiento, conciencia y regulación).
BAJO	0 – 17	<ul style="list-style-type: none"> ✓ En la mayoría de los casos no analiza ni comprende el problema, no diseña ni planifica una solución, no explora caminos para la solución, ni verifica la solución. ✓ No utiliza múltiples representaciones para un mismo objeto matemático. ✓ No demuestra concepciones sobre las razones y proporciones y su evolución. ✓ No presenta motivación hacia la asignatura, sus temáticas, y no realiza procesos metacognitivos (conocimiento, conciencia y regulación).

De acuerdo con los niveles de valoración consignados en la tabla 3, y después de evaluar cada una de los cuestionarios iniciales (ver anexo E) se encontró que los 29 estudiantes se distribuyeron en tres niveles como lo muestra la tabla 4. Así mismo, se realiza una descripción consolidada de cada nivel en cada uno de los componentes del aprendizaje profundo investigados, basados en lo descrito por ellos en el cuestionario.

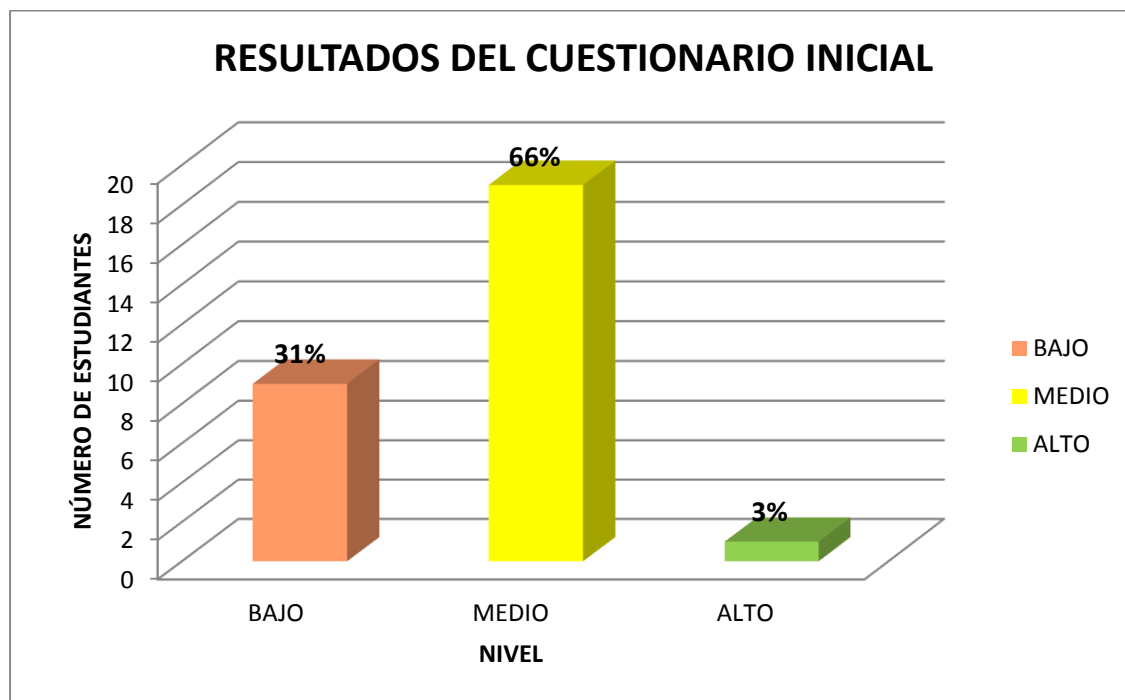
Tabla 4. Distribución de los estudiantes del grado 9°B por niveles de acuerdo a su desempeño en el cuestionario inicial (Anexo E). Fuente: Autores.

NIVEL	NÚMERO DE ESTUDIANTES	PORCENTAJE	DESCRIPCIÓN
BAJO	9	31	<p>Respecto a la resolución de problemas, los estudiantes no comprenden, ni analizan el problema, no diseñan ni planifican la solución, no exploran caminos o rutas a la solución, y mucho menos, verifican la solución.</p> <p>En cuanto al componente cognitivo – lingüístico, desde las representaciones semióticas de las razones y proporciones, no identifican alguna representación de las múltiples que hay para un mismo objeto matemático.</p> <p>Acerca de la epistemología desde las concepciones hacia las razones y proporciones, no manejan ni usan un lenguaje acorde a las razones y proporciones.</p> <p>Sobre el componente motivacional, los estudiantes reflejan poca motivación, debido a su indiferencia hacia la asignatura; y en cuanto a su regulación metacognitiva, estos estudiantes no monitorean, ni planifican, ni controlan el desarrollo de los objetivos de una tarea.</p>
MEDIO	19	66	<p>Respecto a la resolución de problemas, los estudiantes comprenden, pero no analizan el problema, no diseñan ni planifican la solución, exploran algún camino o ruta a la solución, y no verifican la solución.</p> <p>En cuanto al componente cognitivo – lingüístico, desde las representaciones semióticas de las razones y proporciones, hacen uso de al menos una representación de las múltiples que hay para un mismo objeto matemático.</p> <p>Acerca de la epistemología desde las concepciones hacia las razones y proporciones, manejan y usan un poco el lenguaje acorde a las razones y proporciones.</p> <p>Sobre el componente motivacional, los estudiantes muestran cierto grado de motivación hacia la asignatura; y en cuanto a su regulación metacognitiva, éstos estudiantes monitorean, pero no planifican, ni controlan el desarrollo de los</p>

			objetivos de una tarea.
ALTO	1	3	<p>Respecto a la resolución de problemas, el estudiante comprende y analiza el problema, diseña y planifica la solución, explora caminos o rutas a la solución, pero no verifican la solución.</p> <p>En cuanto al componente cognitivo – lingüístico, desde las representaciones semióticas de las razones y proporciones, hace uso de más de dos representaciones de las múltiples que hay para un mismo objeto matemático.</p> <p>Acerca de la epistemología desde las concepciones hacia las razones y proporciones, maneja y usa un lenguaje acorde a las razones y proporciones.</p> <p>Sobre el componente motivacional, el estudiante refleja buena motivación hacia la asignatura; y en cuanto a su regulación metacognitiva, el estudiante monitorea, planifica, pero no controla el desarrollo de los objetivos de una tarea.</p>

Teniendo en cuenta lo descrito en la tabla anterior y observando en la gráfica 7 que la mayoría de los estudiantes que realizaron el cuestionario inicial se encuentran ubicados en los niveles bajo y medio (28 alumnos), es decir, el 97% (66% en el nivel medio y 31% en el nivel bajo), así mismo, la gráfica muestra tan sólo un estudiante ubicado en el nivel alto (3%).

Gráfica 7. Histograma de niveles de valoración obtenidos en el cuestionario inicial por los estudiantes del grado 9ºB de la Institución Educativa Ciudadela Cuba de Pereira. Fuente: Autores.



Estos resultados obtenidos en el cuestionario inicial son similares a los alcanzados por los estudiantes en las pruebas Saber 2009 y 2012 de matemáticas (ver gráfico 1) de la Institución Educativa Ciudadela Cuba, donde se refleja que la mayoría de los estudiantes se encuentran en nivel insuficiente y mínimo (82% para el 2009 y 76% para el 2012), confrontándolos con el gráfico 7, donde se encuentra el 97% de los estudiantes en nivel bajo y medio para el presente estudio. También, se puede observar que la cantidad de estudiantes que se encuentran en nivel avanzado (0% y 4%, para el 2009 y 2012 respectivamente) es similar a los encontrados en esta investigación, donde sólo el 3% estuvo en nivel alto.

b. Implementación de la unidad didáctica

La unidad didáctica se diseñó teniendo en cuenta problemas cotidianos para trabajar el concepto de razón y proporción en cada una de las actividades de la unidad didáctica.

Luego de la modelización inicial se realizó una intervención didáctica empleando una guía de actividades (además de una ayuda ajustada por parte del docente buscando una retroalimentación de los objetivos de dicha actividad).

Culminada esta parte, se evaluaron las fortalezas y debilidades de los estudiantes en cada uno de los componentes del aprendizaje en profundidad por medio de un cuestionario.

Después, se trabajó una segunda intervención didáctica con una guía de actividades con similares características a la desarrollada en la intervención didáctica inicial. Seguidamente, se evaluaron las fortalezas y debilidades de los estudiantes en cada uno de los componentes del aprendizaje en profundidad por medio de un cuestionario.

c. Resultados del cuestionario final e incidencia de la unidad didáctica

En la gráfica 8 se muestran los resultados del cuestionario final presentado por los 29 estudiantes de grado noveno que hicieron parte del estudio.

Gráfica 8. Resultados del cuestionario final aplicado a 29 estudiantes del grado 9°B de la Institución Educativa Ciudadela Cuba de Pereira.



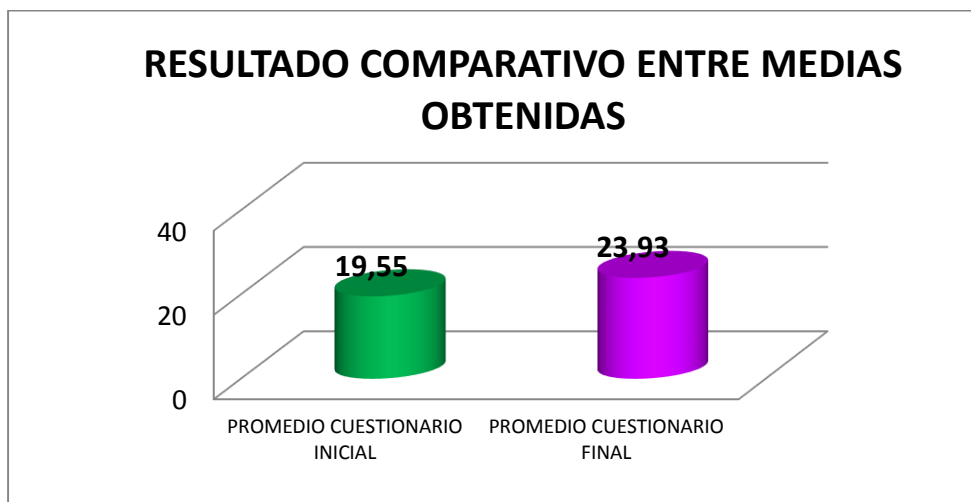
Comparando el puntaje alcanzado por cada estudiante respecto a la media del grupo (23,93), se evidenció que la mayoría de éstos (16 alumnos, 55%) se encuentran en un nivel igual o por encima del promedio obtenido al aplicar el cuestionario final (ver anexo E). Del mismo modo, se pudo observar que 13 estudiantes (45%) se ubican por debajo de esta media, mejorando los resultados obtenidos en el cuestionario inicial como se muestra en la tabla 5. Es importante resaltar en la gráfica 8, a tres estudiantes del grupo que lograron una valoración por encima de 30 puntos, lo que indica que alcanzaron el nivel alto.

Tabla 5. Cuadro comparativo de los resultados obtenidos entre el cuestionario inicial y final a los 29 estudiantes del grado noveno de la institución educativa Ciudadela Cuba. Fuente: Autores.

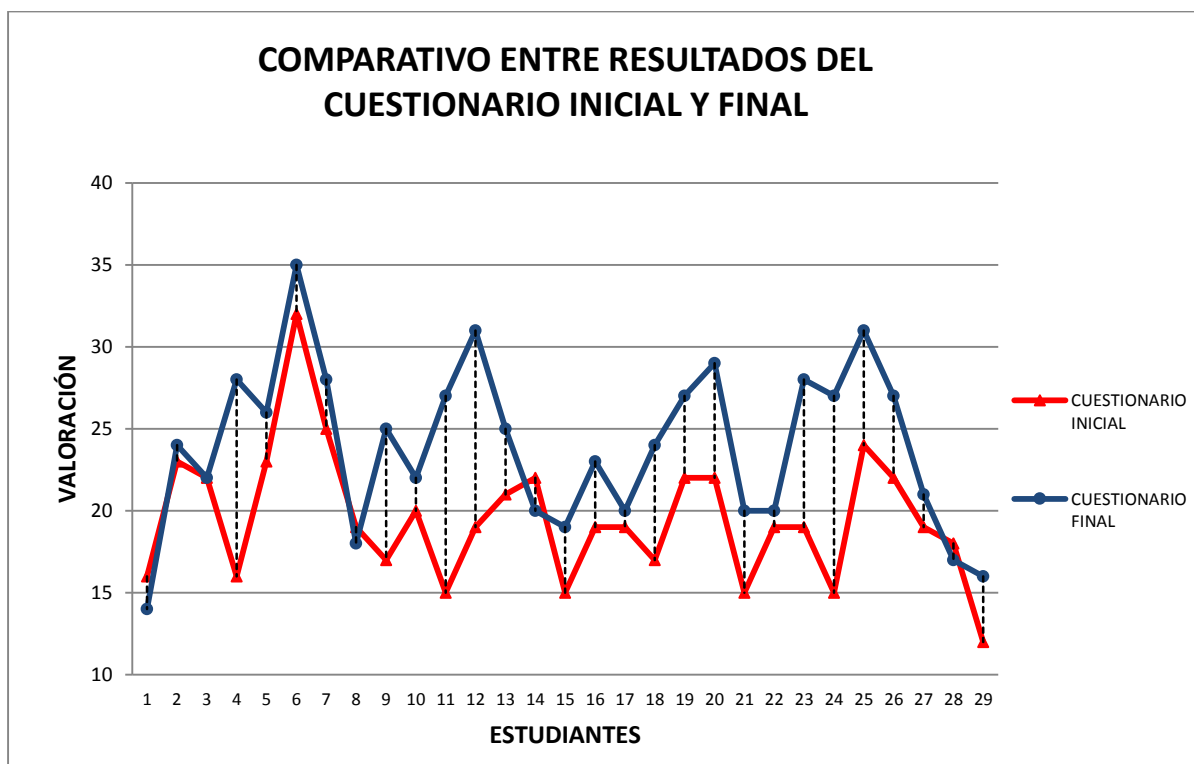
	CUESTIONARIO INICIAL	CUESTIONARIO FINAL	AVANCES
Media	19,55	23,93	4,38 Representa un crecimiento global en los componentes de aprendizaje profundo (ver gráfica 9).
Estudiantes por debajo de la media	17	13	-4 Refleja que el 24% de los estudiantes superaron ciertas dificultades durante la implementación de la unidad didáctica.
Estudiantes por encima de la media	12	16	4 Indica que aumentaron en un 33% la cantidad de estudiantes que se encuentran por encima de la media del grupo, afianzando las fortalezas encontradas en un inicio.
Estudiantes con desempeño alto	1	3	2 Indica que dos estudiantes más llegaron a nivel alto, indicando que alcanzaron un aprendizaje en profundidad superando muchas de sus dificultades iniciales o afianzando sus fortalezas.

Las gráficas 9 y 10 reflejan que los niveles de aprendizaje en profundidad aumentaron de forma general en todos los estudiantes, indicando que hubo una incidencia positiva de la unidad didáctica. Además, en la gráfica 9 se puede observar que el desempeño individual de los estudiantes se incrementó, ya que la media grupal aumentó 4,38 puntos respecto a la media obtenida en el cuestionario inicial, lo cual se refleja en la mayoría de los 29 estudiantes, como se muestra en la gráfica 10.

Gráfica 9. Histograma comparativo entre medias obtenidas entre el cuestionario inicial y final por los estudiantes del grado 9ºB de la Institución Educativa Ciudadela Cuba de Pereira.



Gráfica 10. Comparativo entre resultados del cuestionario inicial y final de los estudiantes del grado 9ºB de la Institución Educativa Ciudadela Cuba de Pereira.



Así mismo, se puede observar en la tabla 6 la descripción general de cada nivel, en cada uno de los componentes del aprendizaje profundo después de aplicada la unidad didáctica a través de los resultados del cuestionario final, basados en lo descrito por los alumnos investigados. Esto confirma una mejora significativa en los procesos de aprendizaje de las razones y proporciones en los 29 estudiantes del grado noveno.

Tabla 6. Distribución de los estudiantes del grado 9°B por niveles de acuerdo a su desempeño en el cuestionario final (Anexo E). Fuente: Autores.

NIVEL	NÚMERO DE ESTUDIANTES	PORCENTAJE	DESCRIPCIÓN
BAJO	3	10	<p>Respecto a la resolución de problemas, los estudiantes comprenden y analizan los problemas planteados, no diseñan ni planifican la solución, ni exploran caminos o rutas a la solución, y tampoco verifican la solución.</p> <p>En cuanto al componente cognitivo – lingüístico, desde las representaciones semióticas de las razones y proporciones, hacen uso de algunas representaciones de las múltiples que hay para un mismo objeto matemático.</p> <p>Acerca de la epistemología desde las concepciones hacia las razones y proporciones, se encuentra una resistencia al cambio en cuanto al manejo y uso de un lenguaje acorde a las razones y proporciones, ya que prima la lógica caracterizada por respuestas rápidas.</p> <p>Sobre el componente motivacional, los estudiantes muestran una actitud positiva hacia la asignatura y disposición por aprender. En cuanto a su regulación metacognitiva, el estudiante monitorea, pero no planifica, ni controla el desarrollo de los objetivos de una tarea.</p>
MEDIO	23	79	<p>Respecto a la resolución de problemas, los estudiantes comprenden y analizan los problemas planteados, diseñan y planifican la solución, exploran algunos caminos o rutas a la solución, pero no verifican la solución.</p> <p>En cuanto al componente cognitivo – lingüístico, desde las representaciones semióticas de las razones y proporciones, hacen uso de varias representaciones de las múltiples que</p>

			<p>hay para un mismo objeto matemático.</p> <p>Acerca de la epistemología desde las concepciones hacia las razones y proporciones, presentan una evolución conceptual en cuanto al manejo y uso de un lenguaje acorde a las razones y proporciones, permeado por el desarrollo de las actividades de la unidad didáctica.</p> <p>Sobre el componente motivacional, los estudiantes muestran una actitud muy positiva hacia la asignatura y buena disposición por aprender. En cuanto a su regulación metacognitiva, los estudiantes monitorean, planifican en algunas ocasiones, pero no controlan el desarrollo de los objetivos de una tarea.</p>
ALTO	3	11	<p>Respecto a la resolución de problemas, los estudiantes comprenden y analizan los problemas planteados, diseñan y planifican bien la solución, exploran caminos o rutas a la solución, y verifican la solución.</p> <p>En cuanto al componente cognitivo – lingüístico, desde las representaciones semióticas de las razones y proporciones, hacen uso de la mayoría de las representaciones de las múltiples que hay para un mismo objeto matemático.</p> <p>Acerca de la epistemología desde las concepciones hacia las razones y proporciones, se evidencia un cambio muy significativo en su evolución conceptual en cuanto al manejo y uso de un lenguaje acorde a las razones y proporciones, permeado por el desarrollo de las actividades de la unidad didáctica.</p> <p>Sobre el componente motivacional, los estudiantes muestran una actitud muy positiva hacia la asignatura y una alta disposición por aprender. En cuanto a su regulación metacognitiva, los estudiantes monitorean, planifican y controlan en la mayoría de los casos el desarrollo de los objetivos de una tarea.</p>

Teniendo en cuenta lo descrito en la tabla anterior, después del cuestionario final se pudo observar que se encuentran ubicados el 10% de los estudiantes en nivel bajo en comparación con el 31% ubicados con el cuestionario inicial, indicando que hay un 21% menos de estudiantes en nivel bajo, lo que evidencia avances en los procesos propios del aprendizaje en profundidad. Por ejemplo, en la ilustración 1 se puede observar el desempeño en el cuestionario inicial y final de

la estudiante N° 24, donde se evidencia que no reconocía la temática, no estaba en capacidad de plantear cómo resolver problemas, no evidencia control metacognitivo en sus procesos de aprendizaje, alcanzando en el cuestionario inicial una puntuación de 15 (nivel bajo) y en el final logró una valoración de 27 (nivel medio), tal como lo muestran los siguientes ejemplos.

Ilustración 1. Imágenes de la pregunta 1 del cuestionario inicial y final de la estudiante N° 24.

Con base en el problema anterior, responde las siguientes preguntas:

Apartes del cuestionario inicial

1.1. ¿Qué temas recordaste para resolver el problema? Escribe los.

Área del Cuadrado

¿Por qué crees que recordaste estos temas?

Porque los profesores han enseñado este tema desde sexto y considero que es así

1.2. Al momento de resolver el problema, ¿pensaste en un camino a seguir o tenías una ruta? SI NO

¿Por qué?

1.3. Describe paso a paso cómo resolviste el problema (Puedes usar dibujos, esquemas, narración, operaciones, procedimientos, diagramas):

Con base en el problema anterior, responda las siguientes preguntas:

Apartes del cuestionario final

1.1. ¿Qué temas recordaste para resolver el problema? Escríbelos.

Repeticiones, multiplicación, fracciones etc...

¿Por qué crees que recordaste estos temas?

Porque el enunciado de la Actividad fue similar a uno que nos pusieron en actividades pasadas.

1.2. Al momento de resolver el problema, ¿pensaste en un camino a seguir o tenías una ruta? SI ___ NO ___

¿Por qué?

Pense en un camino a seguir ya que la primera respuesta que tenía en mente no me dio un resultado exacto.

Describe paso a paso cómo resolviste el problema:

16		2
8		2
4		2
2		2
1		

De igual manera se ubicaron en el nivel medio el 79% de los estudiantes frente al 66% iniciales, el aumento del 13% de estudiante en este nivel señala que los estudiantes que estaban en nivel bajo, desarrollaron procesos de aprendizaje profundo que permitieron la mejora de sus desempeños. Estos cambios se pueden observar, por ejemplo, en la ilustración 2 de la estudiante N° 4, en su componente motivacional – metacognitivo donde se evidencia una mayor confianza y seguridad al desarrollar las diferentes actividades y al intentar recordar lo trabajado en la unidad didáctica, pasados dos meses y medio después de la última intervención didáctica. Además en los otros componentes del aprendizaje profundo incrementó su desempeño en 12 puntos más que la puntuación obtenida en el cuestionario inicial (16 puntos –nivel bajo al inicio), tal como se evidencia en el siguiente ejemplo.

Ilustración 2. Imágenes de la pregunta 4, 5 y 6 del cuestionario inicial y final de la estudiante N° 4.

Por favor responda las siguientes preguntas de la forma más sincera y honestamente posible:

Apartes del cuestionario inicial

4. Después de resolver los tres problemas anteriores, ¿Cómo consideras tu dominio en estas temáticas: Bueno o Malo?

Bueno.

Da 3 razones

Razón 1: entiendo fácil el tema

Razón 2: resuelvo lo más pronto posible

Razón 3: verifico bien las respuestas.

5. ¿Cuándo leiste por primera vez los problemas, ¿cómo te sentiste frente a ellos?

un poco asustada pero después pude entenderlos muy bien.

6. ¿Cuáles crees que fueron los propósitos de este taller?

Mirar si estábamos entendiendo bien los temas y como habíamos cada uno.

Por favor responda las siguientes preguntas de la forma más sincera y honestamente posible:

Apartes del cuestionario final

4. Después de resolver los tres problemas anteriores, ¿Cómo consideras tu dominio en estas temáticas: Bueno o Malo?

Bueno

Da 4 razones

Razón 1: entendi lo que debía hacer

Razón 2: recorde muy fácil de que se trataba el examen

Razón 3: son temas que se manejan fácilmente

Razón 4: considero que respondí bien la evaluación

5. ¿Cuándo leíste por primera vez los problemas, ¿cómo te sentiste frente a ellos?

Muy tranquila, claro que es un poco difícil recordar pero lo hice con la mayor tranquilidad posible.

6. ¿Cuáles crees que fueron los propósitos de este taller?

observar como estaba nuestro desempeño académico y mirar si recordábamos bien los temas vistos

Se ubican así mismo, tres estudiantes en el nivel alto correspondiendo a un 11%, frente al 3% del inicio, lo que refleja el potencial de la implementación de la unidad didáctica. Para esto, se puede ver en la ilustración 3, los apartes de la estudiante N° 6, que pasó de una valoración inicial de 32 a 35 puntos al final, logrando resolver muy bien los problemas planteados, reconociendo las múltiples formas de representar un mismo objeto matemático e identificando la temática expuesta.

Ilustración 3. Imágenes de la pregunta 3 del cuestionario inicial y final de la estudiante N° 6.

3. ¿Cómo podrías representar el área sombreada en el siguiente esquema?



A. $\frac{1}{4}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{6}{12}$

D. $\frac{2}{3}$

Apartes del cuestionario inicial

3.1. Cuando terminaste de leer el enunciado del problema, ¿ideaste un camino a seguir o tenías una ruta? SI NO

Escribe 3 razones

Razón 1: Por que tenía que hallar la fracción

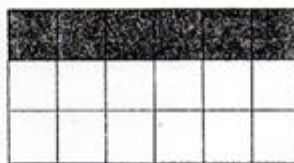
Razón 2: Porque tenía que reducir una fracción tan grande.

Razón 3: _____

3.2. En este esquema, ¿cómo hiciste para identificar el valor de área sombreada? Explica con tus propias palabras

Primero conte los cuadrillos negros y blancos y arme la fracción y después la simplifiqué hasta donde más se podía.

3. ¿Cómo podrías representar el área sombreada en el siguiente esquema?



$$\frac{5}{3} = \frac{10}{6}$$

A. $\frac{1}{4}$

B. $\frac{6}{12}$

C. $\frac{1}{3}$

D. $\frac{2}{3}$

Apartes del cuestionario final

¿Cuando terminaste de leer el enunciado del problema, ¿ideaste un camino a seguir o tenias una ruta? SI NO

Escribe los pasos:

Paso 1: conté el total de cuadrillos

Paso 2: conté los cuadrillos sombreados

Paso 3: di me la fraccion

Paso 4: y simplifique la fraccion

3.2. En este esquema, ¿cómo hiciste para identificar el valor de área sombreada? Explica con tus propias palabras

mié los cuadrillos que estaban de color negro y los mire

De igual modo, la estudiante N° 12 pasó de un nivel medio (19 puntos) a un nivel alto (31 puntos), reflejando un avance significativo en su aprendizaje profundo al identificar las múltiples representaciones de las razones y proporciones, además de una regulación metacognitiva y al reconocer la temática, como se muestra en la ilustración 4.

Ilustración 4. Imágenes de la pregunta 2 del cuestionario inicial y final de la estudiante N° 12.

2.1. Cuando resuelves el problema, ¿pensaste en un camino a seguir o tenías una ruta? SI NO

Apartes del cuestionario inicial

Da 3 razones

Razón 1: Porque al principio pense que eran los niños.

Razón 2: Porque son muy pocas: niños.

Razón 3: pense que eran los hombres por lo que es 1 de cada 6 personas.

2.2. Cuando se te presentan los datos del problema, ¿con qué otro(s) término(s) o nombre(s) conoces estas expresiones numéricas?
Por ejemplo: "con 1 de cada 5 mujeres adultas..."

2.3. Al abordar el problema, ¿qué entiendes por la expresión "es menos probable..."?
que tiene menor posibilidad de ganar.

2.4. ¿Cómo puedes verificar que la opción que escogiste es la correcta? ¿tienes algún procedimiento para demostrarlo? Escríbelo.
Pues, porque de 10 personas tan solo 3 son niños osea que el N° de los otras personas son 7 y esto hace que tengan menor posibilidad que ganen.

2.1. Al resolver el problema, ¿pensaste en un camino a seguir o tenías una ruta? SI NO

Apartes del cuestionario final

Escribe los pasos que seguiste

Paso 1: Leí el enunciado

Paso 2: vi las opciones de respuesta

Paso 3: relacione la pregunta con las respuesta

Paso 4: llegue a una conclusión y elegí una respuesta

2.2. Cuando se te presentan los datos del problema, ¿con qué otro(s) término(s) o nombre(s) conoces estas expresiones numéricas?
Fraciones, simplificar, multiplicar, adición, sustracción, razón equivalentes, gráfica, división.

2.3. Al abordar el problema, ¿qué entiendes por la expresión "menor opción de..."?
el que tiene menor porcentaje o probabilidades de sacar algo, de tener algo o de ganar algo.

2.4. ¿Cómo puedes verificar que la opción que escogiste es la correcta? ¿tienes algún procedimiento para demostrarlo? Escríbelo.
 Paso 1: leí el enunciado
 Paso 2: vi las opciones de respuesta
 Paso 3: Compare los datos que nos dieron (fracciones)
 Paso 4: llegue a una conclusión y elegí una de las opciones de respuesta.

En la siguiente tabla se pueden comparar los resultados obtenidos tanto en el cuestionario inicial como en el final, mostrando un crecimiento en el desempeño de cada uno de los 29 estudiantes al poder superar parte de sus dificultades, logrando adquirir habilidades en algunos o en todos los componentes del aprendizaje profundo estudiados en la presente investigación; esto se evidencia en la cantidad de estudiantes que se encontraron en el nivel medio y alto, respecto a la disminución de estudiantes en el nivel bajo en los cuestionarios inicial y final.

Tabla 7. Tabla de frecuencias y porcentajes comparativos entre el cuestionario inicial y final realizado por los 29 estudiantes del grado 9°B.

NIVEL	CUESTIONARIO INICIAL	PORCENTAJE	CUESTIONARIO FINAL	PORCENTAJE
Alto	1	3%	3	11%
Medio	19	66%	23	79%
Bajo	9	31%	3	10%
TOTAL	29	100%	29	100%

Con base en este apartado se reafirma la importancia de que en el desarrollo de las clases de matemáticas y específicamente de las unidades didácticas se deben mostrar las diversas formas de representar un mismo objeto matemático, ya que entre más representaciones semióticas se involucren en el aprendizaje de un concepto matemático, se alcanza una mejor resolución de problemas, facilitando identificar la temática y regulando sus procesos de aprendizaje, ya que el reconocimiento de la invarianza entre estas unidades significantes es la que permite la aprehensión del concepto matemático (Duval, 2004), tal como lo afirma el trabajo investigativo de Ospina (2012).

De igual manera se ratifica la importancia de implementar una unidad didáctica para la enseñanza de un concepto. Durante la implementación de la unidad didáctica, se evidenciaron las ventajas de esta estrategia, ya que los resultados obtenidos muestran un aprendizaje profundo en gran parte de los 29 estudiantes, superando las dificultades encontradas inicialmente en el tema de las razones y proporciones basado en la resolución de problemas, reflejando un avance en el nivel en cada uno de los componentes investigados, lo que coincide con el trabajo desarrollado por Ceballos (2012).

En síntesis, el análisis cuantitativo de corte explicativo muestra la evolución y avances en los niveles del aprendizaje profundo de los estudiantes del grado noveno sobre las razones y proporciones, y por tanto la incidencia positiva en estos de la unidad didáctica, lo que hace indispensable identificar cuáles fueron los procesos que hicieron que existiera un cambio favorable en los modelos mentales de los estudiantes hacia el aprendizaje en profundidad; en consecuencia, se hace necesario indagar en profundidad los cambios en las características de esos modelos mentales en cada uno de los componentes investigados del aprendizaje en profundidad. Por tal razón, a continuación se centrará la investigación en analizar a cuatro estudiantes del mismo grupo desde la perspectiva cualitativa de enfoque comprensivo.

5.2. Resultados del análisis cualitativo

A continuación aparecen los resultados del análisis cualitativo que se realizó a los datos obtenidos con los diferentes instrumentos y técnicas en cuatro estudiantes de grado noveno de la

Institución Educativa Ciudadela Cuba de Pereira, cuyas edades oscilan entre los 15 y 16 años, a quienes se les hizo una indagación comprensiva en los componentes del aprendizaje en profundidad. Estos componentes se trabajaron en cuatro epítomes para cada estudiante, analizando la evolución y las relaciones que se iban estableciendo entre cada uno de ellos en la medida que se iba aplicando la unidad didáctica.

Los estudiantes están referenciados bajo las letras A para el estudiante 1, B para el 2, C para el 3 y E para el estudiante 4, y el docente que realizó las entrevistas se referencia con la letra D.

Es necesario resaltar, que para llevar a cabo el análisis comprensivo de los componentes del aprendizaje profundo y establecer las relaciones entre éstos (ver gráficas 2, 11 y 12), se diseñaron las siguientes convenciones que facilitan la lectura e interpretación y, para indicar el nivel de desarrollo alcanzado por cada estudiante al final de cada una de las actividades diseñadas en cada epítome:

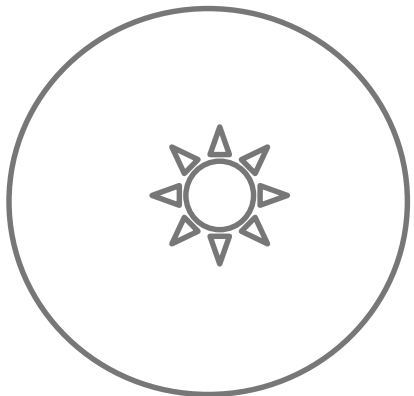
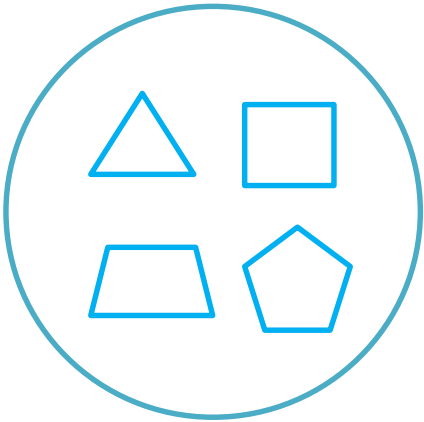
Gráfica 11. Convenciones de cada uno de los componentes del aprendizaje profundo analizados. Fuentes: Autores.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS





EPISTEMOLOGÍA

COGNITIVO - LINGÜÍSTICO


**MOTIVACIONAL –
METACOGNITIVA**




CONVENCIONES

- Comprende y analiza el problema 
- Diseña y planifica la solución 
- Explora caminos o rutas a la solución 
- Verifica la solución 

CONVENCIONES

- Desde las concepciones y su evolución 

CONVENCIONES

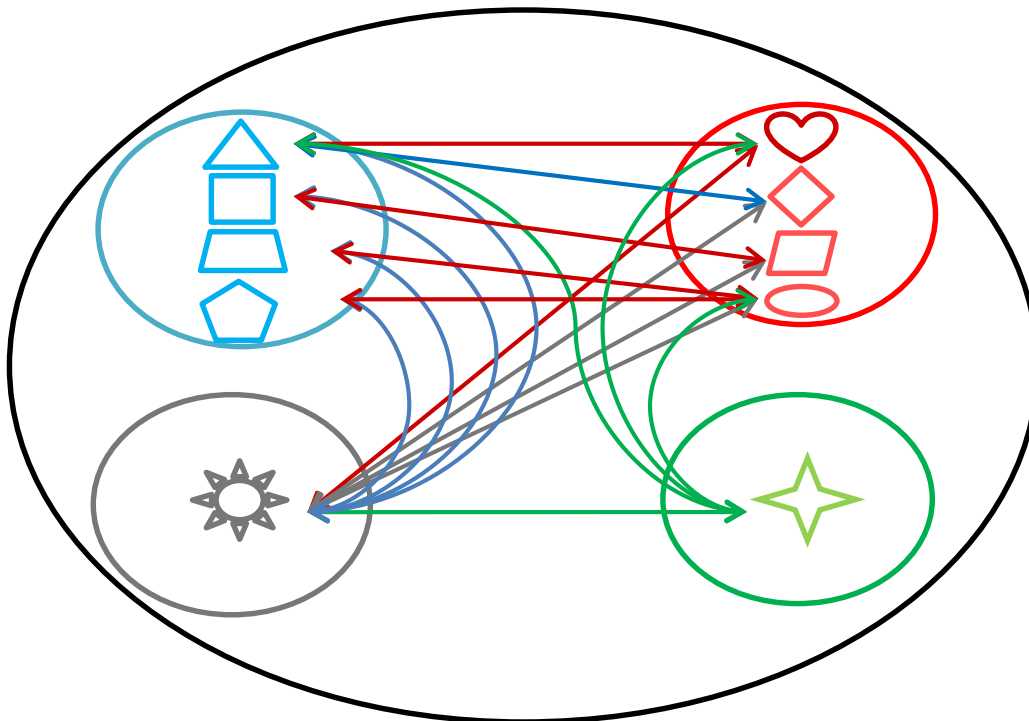
- Desde las múltiples representaciones semióticas 

CONVENCIONES

- Desde la regulación metacognitiva:
 - ✓ Monitoreo 
 - ✓ Planeación 
 - ✓ Control 
- Motivación intrínseca 

Gráfica 12. Relación entre los componentes del aprendizaje profundo y convenciones para indicar el nivel de desarrollo alcanzado por cada uno de los estudiantes, de acuerdo con las convenciones diseñadas para cada una de éstas.

Relación entre los componentes del aprendizaje profundo



CONVENCIONES PARA INDICAR EL NIVEL DE DESARROLLO

NIVEL BAJO (dotted line)

NIVEL MEDIO - - - - - (dashed line)

NIVEL ALTO _____ (solid line)

Estudiante A:**Epítome Inicial**

La estudiante A de 16 años de edad, en su epítome inicial reconoció la temática expuesta en el cuestionario inicial, ya que define el concepto de fracción (ver línea 34 de la entrevista 1). Muestra un buen nivel de regulación metacognitiva, desde el monitoreo, planeación y control de sus procesos de aprendizaje haciendo uso de un ejemplo práctico como el de la cartulina (ver ilustración 5).

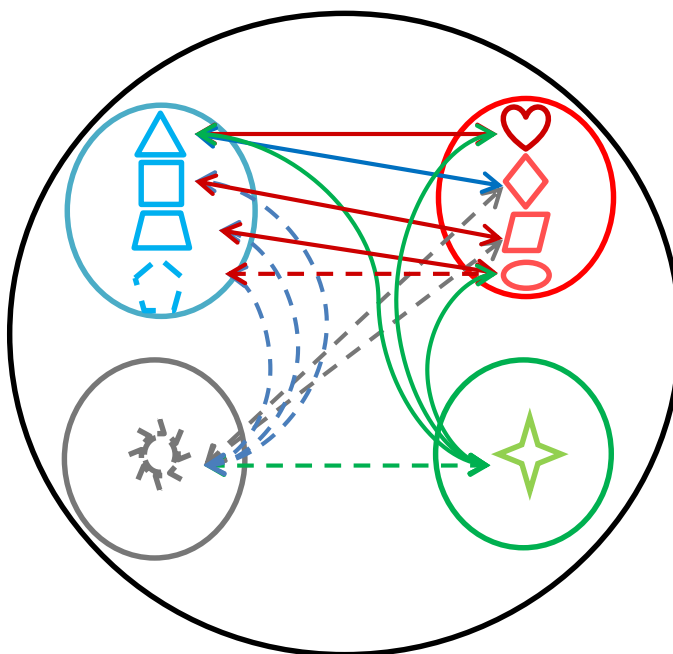


Ilustración 5. Apartes de la entrevista inicial e imagen del cuestionario inicial a la estudiante A.

33	D: eh, me podrías definir exactamente con tus propias palabras, ¿qué significa la fracción?
34	A: <u>Una fracción es comooo, es como la representación de algo de un todo</u>

Con base en el problema anterior, responde las siguientes preguntas:

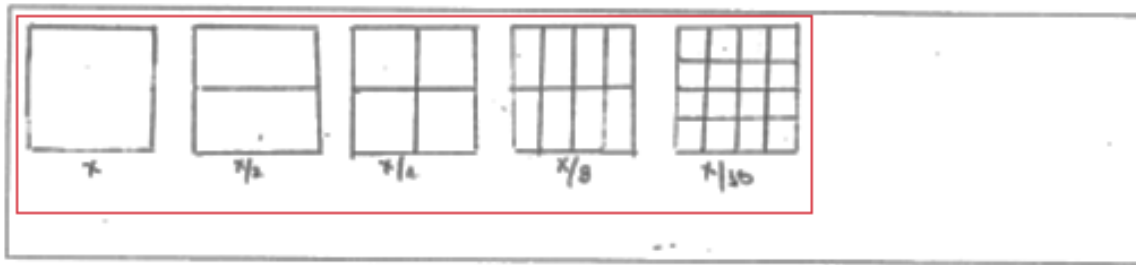
1.1. ¿Qué temas recordaste para resolver el problema? Escribe los.

tema de fracciones

¿Por qué crees que recordaste estos temas?

al ver las fracciones, me acordé cuando por ejemplo uno corta un
pliego de cartulina en partes iguales

1. Describe paso a paso cómo resolviste el problema (Puedes usar dibujos, esquemas, narración, operaciones, procedimientos, diagramas):



Esto le permitió diseñar, planificar y explorar caminos a una solución, haciendo comparaciones con problemas semejantes a los desarrollados en el cuestionario inicial como se observa en la forma que resolvió el planteamiento del numeral 2.4. La motivación expresada fue muy alta ya que plantea que entiende muy bien el tema y que le gustan las matemáticas, lo que le permite lograr un mejor desempeño al resolver problemas y al comprender la temática expuesta (ver ilustración 6).

Ilustración 6. Apartes del cuestionario inicial de la estudiante A.

2.4. ¿Cómo puedes verificar que la opción que escogiste es la correcta? ¿tienes algún procedimiento para demostrarlo? Escribe.

destruyo la fracción, la convierto en decimal y lo comparo

4. Después de resolver los tres problemas anteriores, ¿Cómo consideras tu dominio en estas temáticas: Bueno o Malo?

Bueno

Da 3 razones

Razón 1: al ver una fracción no me enredo

Razón 2: trato de buscar la mínima expresión para poder resolver más fácil

Razón 3: trato de hacer todos los ejercicios

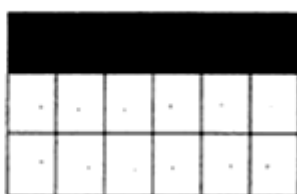
5. ¿Cuándo leíste por primera vez los problemas, ¿cómo te sentiste frente a ellos?

no me sentía confundida por que entiendo algo del problema de las fracciones

Por otra parte, la estudiante A mostró algunas dificultades al no poder identificar las diferentes representaciones semióticas de las razones y proporciones, ya que tal como se muestra en la ilustración 7 (resaltado en rojo), la estudiante solo utiliza algunas representaciones; por lo que al tratar de resolver un problema, no pudiese verificar la solución encontrada, ya que no emplea otros métodos para contrastar la solución, ni sabe si todos los datos presentados en el problema son pertinentes.

Ilustración 7. Apartes del cuestionario inicial de la estudiante A.

¿Cómo podrías representar el área sombreada en el siguiente esquema?



$$\frac{1}{3} = \frac{8}{24}$$

3.1. Cuando terminaste de leer el enunciado del problema, ¿ideaste un camino a seguir o tenías una ruta? SI NO

Escribe 3 razones

Razón 1: Por que tenia que hallar la fraccion

Razón 2: Porque tenia que reducir una fraccion tan grande.

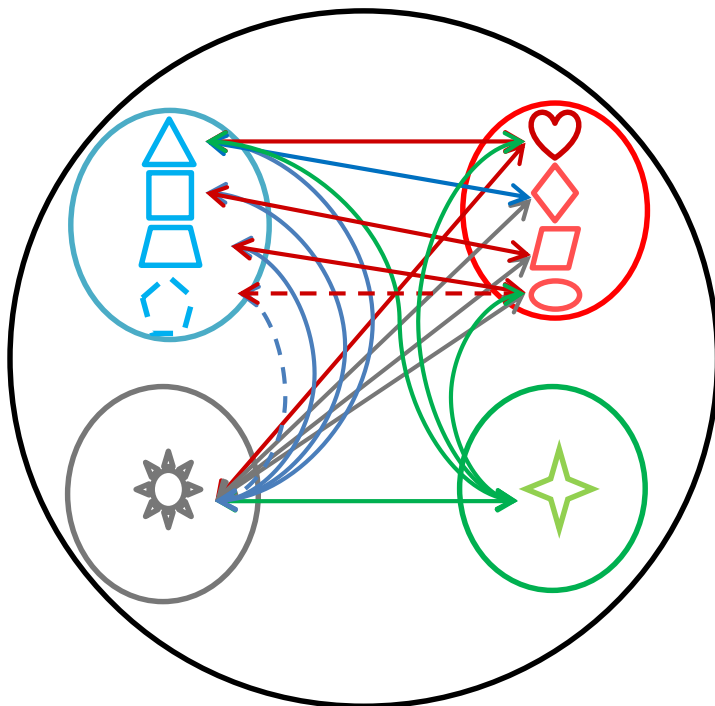
Razón 3:

3.2. En este esquema, ¿cómo hiciste para identificar el valor de área sombreada? Explica con tus propias palabras

Primero conte los cuadritos negros y blancos y arme la fraccion y despues la simplifique hasta donde mas se podia

Epítome 2

En la segunda epítome, el aspecto de los componentes del aprendizaje en profundidad en los cuales la estudiante mostró un avance en su desempeño después de realizada la intervención didáctica, fue específicamente en lo cognitivo-lingüístico desde las múltiples representaciones semióticas, donde se evidenció que la estudiante empieza a



reconocer otras formas de describir un mismo objeto matemático tal como se muestra en la línea 164 de la entrevista y el numeral 3 de la guía motivacional # 1, generando un mayor nivel conceptual sobre las razones y las proporciones.

Ilustración 8. Segmento de la entrevista semi-estructurada #2 (D: docente; A: estudiante 1).

161	D: ahh ya, bueno. Ehhh, te parece que de pronto, hay otro camino?, otra ruta planeada para solucionar el ejercicio? algo diferente, que tú puedas utilizar además de esto?
162	A: <u>para mí, no!</u>
163	D: por qué?
164	A: <u>porque yo solamente se sacar eso por, por porcentajes, puede que haya otras, sí, pero yo no, no creo conocerla</u>

2. ¿Cuál fue el concepto que te quedó de fracción?

Es la forma en que se puede partir algo en partes iguales

3. ¿Cuántas formas encontraste para representar una fracción?

Se puede representar en una división, representación gráfica, proporción o razón.

4. ¿Crees que con actividades de esta clase, puedes mejorar tu aprendizaje? Justifica tu respuesta.

Sí, por que me ayuda a ampliar mis conocimientos sobre el tema de fracciones

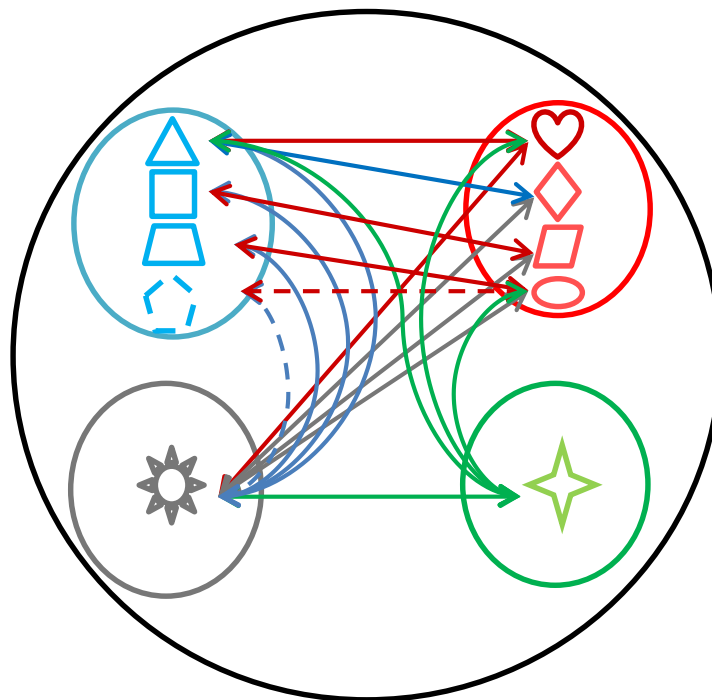
Así mismo, su regulación metacognitiva y su motivación fue mayor hacia nuevos aprendizaje como lo describe en los numerales 2 y 4 (Ver ilustración 9), aunque muestra dificultades al intentar verificar la solución encontrada, ya que no le es posible obtener la solución por otro método o utilizar esa solución para generar algo ya conocido (ver línea 136 a 138 de la entrevista); esto es reflejo de su excesiva confianza en sí misma en los procesos que realiza al resolver un problema.

Ilustración 9. Fragmento de la entrevista semi-estructurada #2 de la estudiante A (D: docente; A: estudiante 1) .

135	D: uhmm, bueno, entonces, eh, luego de terminar el problema, pues, tuviste alguna forma de verificar que los, qué los datos que habías escogido eran los correctos?
136	A: <u>no</u>
137	D: no?, no tenías alguna forma de plan, de verificarlo?
138	A: <u>no, solamente confío en lo que me dio</u>

Epítome 3

Para la epítome tres, la estudiante conservó su dificultad en el proceso de verificación de la solución de un problema, específicamente en la búsqueda de un procedimiento diferente al empleado inicialmente para la resolución del mismo, tal como se evidencia en el numeral 1.5. de la ilustración 10. La estudiante mostró una evolución conceptual importante en



cuanto al uso y manejo del lenguaje de la temática planteada, al observarse en los numerales 2.1. al 2.4. de la ilustración 10, en las cuales se expresa utilizando un lenguaje matemático propio de las fracciones y proporciones.

Ilustración 10. Fragmento del cuestionario #3 de la estudiante A.

1.3. Describe paso a paso el procedimiento que realizaste para resolver el problema:

PASO 1: tome a las 40 personas como el 100%
 PASO 2: de esas 40 personas tome a las 6 que consumen como el 60%
 PASO 3: tome las 2 mujeres como el 20%
 PASO 4: al 60% que consumen leche le reste el 20% de mujeres y ahí me dio el 40% que supone que son los hombres

1.4. ¿Cuáles son las dificultades que se te presentaron al resolver el problema?

DIFICULTAD 1: creo no haber tenido dificultades
 DIFICULTAD 2:
 DIFICULTAD 3:
 DIFICULTAD 4:

1.5. ¿Tienes alguna forma de comprobar la solución del problema? Justifica tu respuesta

no tengo ninguna forma, solo confío en lo que me dio

2.1. ¿Qué información consideras es la más importante del problema?

el saber armar una fracción, simplificarla y interpretar graficas

2.2. Al momento de leer y resolver el problema, ¿Pensaste en un camino o ruta seguir? SI NO
 Justifica tu respuesta.
 Pense en primero interpretar el grafico. y Armar un fraccion.

2.3. ¿Crees que podrias resolver el problema de otra forma? SI NO
 Muestra el paso a paso.
 PASO 1: Primero Interpretar el grafico
 PASO 2: Formar la expresion de coger el caramelo rojo
 PASO 3: Simplificarla hasta que ya no se pueda más
 PASO 4:

2.4. ¿Qué procedimiento es necesario para resolver el problema? Muestra a continuación los procesos utilizados.

$$6+5+3+3+2+4+2+5=30$$

Caramelo Rojo = 6 \leftarrow $\frac{6}{30} = \frac{1}{5}$

También conservó alta su motivación, su regulación metacognitiva e igual nivel en las demás categorías del componente resolución de problemas (comprensión y análisis del problema, diseño y planificación de una solución, y exploración de caminos a la solución), como se puede detallar en los numerales 1.3. a 1.5. de la ilustración anterior. Además la estudiante reconoce que aprender la temática de las razones y proporciones a través del trabajo cooperativo, usada durante el desarrollo de la unidad didáctica y las intervenciones didácticas por parte del docente (ayudas ajustadas y retroalimentación de los cuestionarios) permite un mayor aprendizaje de calidad en los estudiantes como lo manifestó en la línea 88 de la entrevista. Esto se puede observar en la siguiente ilustración:

Ilustración 11. Apartado de la entrevista #3 (D: docente; A: estudiante 1).

87	D: uhmmm, y ¿estabas contenta, de pronto, con la forma de ver las clases como las estaba manejando o cómo las estamos manejando ahora?
88	A: no, como las están manejando ahora, <u>porque se profundiza más sobre el tema, no es como uno ver el tema a la carrera y como, uno medio estudiar pa' la evaluación y ya, entonces a uno se le olvida después todo eso, en cambio aquí si uno aprende, y aprende más, y uno sabe cómo aplicarlas y pa' estudiar más</u>

Epítome final

En el epítome final, se observó que la estudiante logra un aprendizaje en profundidad de las razones y proporciones, debido a que reconoce las múltiples formas de representar un mismo objeto matemático como se observa en el recuadro en rojo en el problema 2 del cuestionario final (ver ilustración 12), así como en las líneas 84 a 86 y la 92 de la entrevista final (ver ilustración 13).

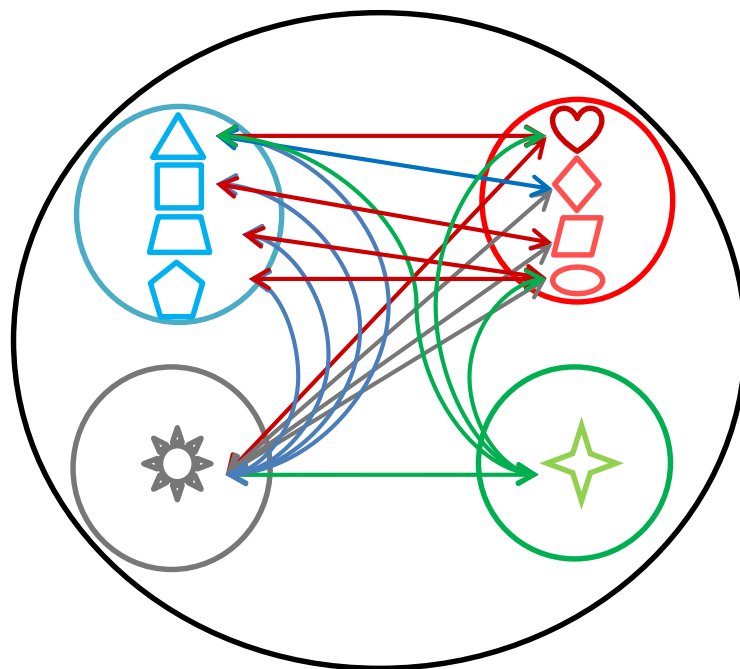


Ilustración 12. Segmento del cuestionario final de la estudiante A donde reconoce las múltiples representaciones de un mismo objeto matemático (Duval, 1994).

2. En una sala de cine se organiza una rifa entre los asistentes a una de las funciones. Cada asistente marca la boleta de la entrada con sus datos, y la introduce en una urna, al final de la función se extrae una boleta al azar. De los asistentes, $\frac{1}{6}$ son hombres adultos, $\frac{1}{5}$ son mujeres adultas, $\frac{1}{3}$ son niños y $\frac{3}{10}$ son niñas. ¿Cuál de los asistentes tiene menor opción de ganar la rifa?

- A. Una niña.
 B. Un hombre adulto.
 C. Un niño.
 D. Una mujer adulta.

$$\begin{array}{ll} \text{hombres } \frac{1}{6} = 0.1 & \text{niños } \frac{1}{3} = 0.3 \\ \text{mujeres } \frac{1}{5} = 0.2 & \\ \text{niñas } \frac{3}{10} = 0.3 & \end{array}$$

- 2.1. Al resolver el problema, ¿pensaste en un camino a seguir o tenías una ruta? SI NO

Escribe los pasos que seguiste

Paso 1: Convertí los fraccionarios en decimal
 Paso 2: los compare y mire cual era el menor

Presentó una evolución conceptual al distinguir con claridad el concepto de la temática expuesta en el cuestionario final, después de transcurridos casi dos meses y medio de la última intervención didáctica, lo que indica que se lograron altos niveles de aprendizaje en profundidad, ya que se podría descartar el nivel de recordación de la estudiante por la aplicación del cuestionario inicial.

De igual manera, en cuanto a la capacidad de resolución de problemas, la estudiante superó su dificultad de verificar la solución de un problema, ya que plantea diferentes formas de verificación y explica el porqué de esta respuesta, como se muestra en los numerales 24 al 28 de la ilustración 13. Así mismo, su regulación metacognitiva se consolidó, ya que monitorea el desarrollo de su actividad referenciando problemas desarrollados en la unidad didáctica, planeando y controlando sus procesos de aprendizaje de acuerdo al nivel de dificultad encontrado en cada problema, así como reflejó gran motivación hacia sus procesos de aprendizaje, queriendo superar las dificultades que tuvo durante el desarrollo de toda la unidad didáctica.

Ilustración 13. Apartado de la entrevista #4 (D: docente; A: estudiante 1).

23	D: uhmm bueno, entonces cuál fue la idea principal en el caso del primer problema, que era lo que nos preguntaban?
24	A: eh hh, <u>cuando leí el primer problema, pensé, pues me imaginé como, cuando uno parte una cartulina, así que la va partiendo en varias partes, y cómo uno la va llamando</u>
25	D: si
26	A: entonces <u>me imaginé eso, y pues con eso respondí, basándome en eso</u>
27	D: listo, y, cuando terminaste del problema, de leer el problema planteaste algún camino, alguna ruta que diga bueno, yo analicé el ejercicio, y puedo seguir los siguientes pasos

28	A: <u>sólamente eso, o la partición de la cartulina y ya</u>
37	D: por qué no verificas?
38	A: <u>no sé, nunca lo verifico, la verdad, y siempre cuando ust, termino la entrevista, digo la, el próximo, si lo voy a verificar y se me olvida</u>
83	D: y en la segunda?
84	A: <u>en la segunda, sii, utilicé la división, la comparación</u>
85	D: y en el tercero hiciste?
86	A: <u>la simplificación</u>
87	D: la simplificación, bueno. Luego de haber analizado como todos los procesos y todos los talleres que hemos hecho durante el año, cómo crees que ha sido tu desempeño en el área de matemáticas?
88	A: <u>creo que ha sido bueno, y me ha despejado como unas dudititas que, que tenía en las fracciones</u>
89	D: cuáles eran esas dudititas, de pronto, si te acuerdas de alguna, digamos?
90	A: eh, hay veces me enredaba, eh, que, en que iba en el numerador y en que iba en el denominador
91	D: si, qué más?
92	A: yyy, <u>siempre lo conocía como fracciones, fracciones, y nunca pensaba que también se podían llamar de otras maneras</u>
93	D: ah ya, listo, eh, ... bueno, eso son las razones, y cuáles crees que fueron, de pronto, los propósitos que hicimos durante, o cuál fue el propósito o el objetivo que tuvimos durante todo el año para analizar ese, ese, esas actividades?
94	A: como, si, eh, <u>desenredarnos a nosotros, en ese tema de las fracciones, como pa' que de ahora en adelante, cuando veamos una fracción no nos enredemos ni nos cerremos en que no somos capaz de hacerlo</u>

La estudiante A logró un alto nivel en su aprendizaje en profundidad de las razones y proporciones, gracias a las intervenciones didácticas del docente (ayudas ajustadas y retroalimentación de los cuestionarios) y a la aplicación de la unidad didáctica con problemas prácticos y cotidianos a través del trabajo cooperativo, desarrollando capacidades en todos los componentes estudiados durante la realización de esta investigación, enfocándose especialmente en identificar todas las múltiples representaciones semióticas de la temática, logrando así un gran manejo conceptual sobre las concepciones de las razones y proporciones. Se evidencia que en la medida que la estudiante aprendía sobre las diferentes representaciones semióticas relacionadas con la temática, profundizaba su conocimiento sobre la misma.

De igual forma, al aumentar sus niveles de regulación metacognitiva, la capacidad de la estudiante para verificar la solución de un problema también aumentó, manteniendo su alta motivación y facilitándole el uso adecuado del lenguaje matemático (ver línea 28 y 92 de la ilustración 13).

Para poder evidenciar la evolución del aprendizaje en profundidad de la estudiante A, a continuación se encuentran los diferentes epítomes de la misma, en las cuales se muestran los cambios que se dieron en cada uno de los componentes y las relaciones que se establecieron entre ellos:

Gráfica 13. Esquema evolutivo en los componentes del aprendizaje profundo de la estudiante A.

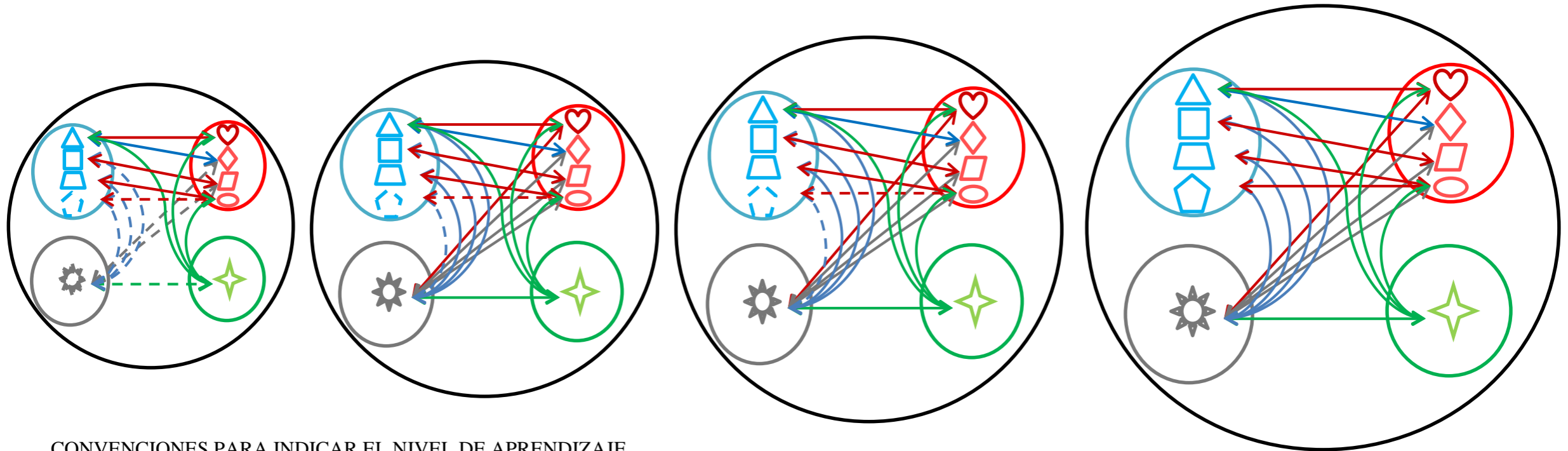
ESTUDIANTE A:

EPITOME INICIAL

EPITOME 2

EPITOME 3

EPITOME FINAL



CONVENCIONES PARA INDICAR EL NIVEL DE APRENDIZAJE

- NIVEL BAJO (dotted line)
- NIVEL MEDIO - - - - - (dashed line)
- NIVEL ALTO _____ (solid line)

A continuación en la tabla 8, se resume la información recolectada con los diferentes instrumentos utilizados en cada uno de los componentes del aprendizaje en profundidad para la estudiante A.

Tabla 8. Resumen de la información recolectada a través de los diferentes instrumentos desarrollados durante la unidad didáctica para la estudiante A. Fuente: Autores.

		EPITOME INICIAL	EPITOME 2	EPITOME 3	EPITOME FINAL
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS	<i>Análisis y comprensión el problema</i>	Interpreta el planteamiento del problema, tiene una buena comprensión y análisis	Comprende y analiza el problema	Comprende y analiza muy bien el problema	Comprende y analiza muy bien el enunciado del problema
	<i>Diseño y planificación de una solución</i>	Plantea estrategias para la solución	Diseña y planifica bien la solución replanteando sus ideas	Diseña y plantea muy bien la solución del problema	Plantea muy bien el diseño de una solución
	<i>Exploración de caminos o rutas a la solución</i>	Plantea rutas estratégicas a la solución	Explora caminos a la solución	Explora rutas o caminos a la solución del problema	Explora caminos a la solución
	<i>Verificar la solución</i>	Justifica la solución encontrada de forma indirecta	Evalúa su solución de forma indirecta	Realiza una validación de forma indirecta de su solución	Verifica su respuesta
MOTIVACIONAL-METACOGNITIVO	<i>Motivación intrínseca</i>	Muestra un buen interés hacia los procesos de aprendizaje	Muestra gran interés identificando sus dificultades	Muestra gran interés identificando sus dificultades para avanzar en sus procesos de aprendizaje	Muestra gran motivación por aprender la temática

	<i>Regulación metacognitiva</i>	Monitoreo	Monitorea y desarrolla adecuadamente sus procesos de aprendizaje, identificando las dificultades	Regulan sus actividades y hay un control en sus procesos de aprendizaje	Monitorea muy bien sus procesos de aprendizaje	Monitorea sus procesos de aprendizaje y las dificultades planteadas en el desarrollo de una tarea
		Planeación	Planea el desarrollo de una actividad de manera ordenada	Planea el desarrollo de una tarea de forma ordenada	Planea el desarrollo de su actividad de aprendizaje	Proyecta el desarrollo de su actividad de aprendizaje
		Control	Evalúa y compara sus procesos de aprendizaje de una actividad	Hay un control de sus procesos	Examina y evalúa su proceso	Examina el desarrollo de su proceso de aprendizaje
COGNITIVO-LINGÜÍSTICA	<i>Múltiples representaciones (semiótica)</i>	Identifica muchas formas de representar un mismo objeto matemático	Identifica múltiples formas de representación	Emplea múltiples formas de representación para un mismo objeto	Reconoce múltiples formas de representar un objeto matemático	
EPISTEMOLÓGICA	<i>Concepciones sobre razones y proporciones y su evolución</i>	Reconoce la temática planteada	Presenta una definición precisa de la temática y evolucionan sus concepciones	Identifica claramente la temática planteada y refleja una evolución conceptual en la temática	Reconoce y realiza comparaciones de la temática planteada	

Estudiante B:**Epítome Inicial**

El estudiante B, de 15 años de edad, en su epítome inicial mostró un alto nivel en la mayoría de los componentes de la resolución de problemas, ya que comprendió y analizó los problemas, diseño, planificó y exploró caminos a la solución como lo mostró en el numeral 2.1 del cuestionario inicial.

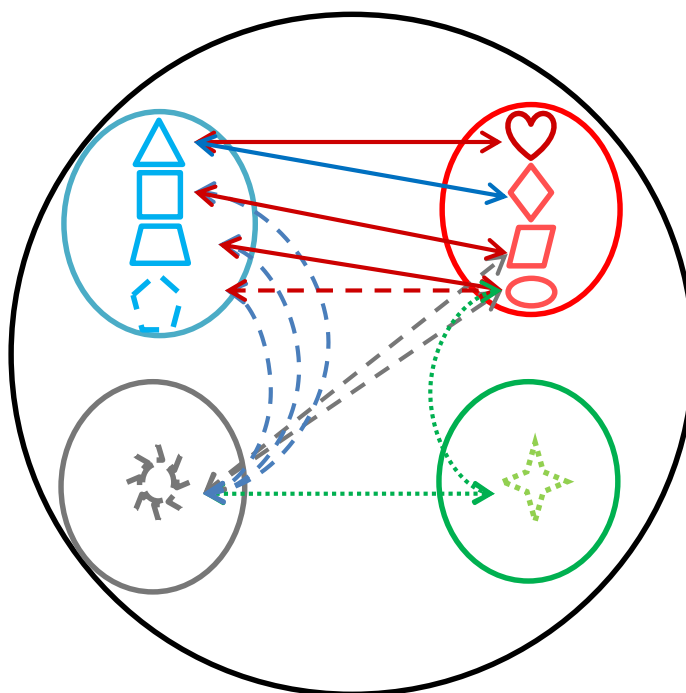


Ilustración 14. Segmento del cuestionario inicial del estudiante B.

2.1. Cuando resuelves el problema, ¿pensaste en un camino a seguir o tenías una ruta? SI NO

Da 3 razones

Razón 1: porque el hombre adulto asiste de 2 entences es menos probable que gane

Razón 2: El niño tiene la mejor ventaja de ganar porque es 3

Razón 3: La mujer adulta tiene una probabilidad de ganar que el hombre, porque asiste 3 mayor cifra que el hombre.

Así mismo, manifestó un alto nivel de motivación como se observó en el numeral 4 y 5 del cuestionario inicial (ver ilustración 15), y en las líneas 90 al 92 de la entrevista (ver ilustración 16).

Ilustración 15. Apartes del cuestionario inicial del estudiante B .

4. Después de resolver los tres problemas anteriores, ¿Cómo consideras tu dominio en estas temáticas: Bueno o Malo?
Bueno

Da 3 razones
 Razón 1: Porque la pregunta 1 y 3 eran fáciles
 Razón 2: Las preguntas 2 eran fáciles de hacer
 Razón 3: Era fácil responderlos

5. ¿Cuándo leíste por primera vez los problemas, ¿cómo te sentiste frente a ellos?
Pues me sentí aliviado porque no eran tan duros de resolver

Así mismo, se evidenció una buena regulación metacognitiva hacia sus procesos de aprendizaje, ya que en algunos puntos de la actividad explicó el por qué escoge la respuesta seleccionada, contemplado en las líneas 82 al 88 de la entrevista (ver ilustración 16).

Ilustración 16. Fragmento de la entrevista semi estructurada inicial del estudiante B (D: docente; B: estudiante 2).

81	D: bueno, listo, en los ejercicios habían algunos que tenían unos dibujos o esquemas, ¿entendiste que era lo que quería decir cada uno de ellos?
82	B: sí
83	D: por qué? en el caso del tercer ejemplo
84	B: <u>pues decía que, que... que representaba mejor al esquema, entonces pillé que como era antes tres filas y solamente una estaba pintada, entonces vote por la "B"</u>
85	D: ¿por qué no votaste por la "D"?
86	B: porque...
87	D: ¿qué te llevó a eso? ¿Qué te llevó a votar por esta "B"?
88	B: porque era la más... <u>la que más representaba, porque son tres filas, y había una sombreada, entonces es esa.</u>
89	D: ahhh, listo, ehhh... aquí tengo una pequeña duda en una de las preguntas, en la número 5, dice, cuando leíste por primera vez los problemas, ¿cómo te sentiste frente a ellos? aquí respondes, " pues me sentí aliviado porque no era tan duro de resolver", <u>me podrías explicar que sería esa palabra "aliviado"?</u>
90	B: bueno, que estaaa, <u>que estaba seguro que podía responder las preguntas</u>
91	D: ¿qué más, qué otros sentimientos, ehh, ante ella, ante los problemas, además de sentirte aliviado?
92	B: <u>pues seguro</u>

Por otra parte, en la ilustración 17 se puede observar cómo el estudiante B no identificó la temática planteada demostrada en el numeral 1.1, lo que directamente dificulta que identifique y utilice algunas de las representaciones semióticas sobre razones y proporciones.

Ilustración 17. Segmento del cuestionario inicial del estudiante B.

1.1. ¿Qué temas recordaste para resolver el problema? Escribe los.

Ninguna solo se me vino a la mente

¿Por qué crees que recordaste estos temas?

None

1.2. Al momento de resolver el problema, ¿pensaste en un camino a seguir o tenías una ruta? SI NO

¿Por qué?

El cuadrado 4 tenía una dimensión de $\frac{x}{8}$, entonces es el doble de la dimensión y la respuesta es $\frac{x}{16}$

En el componente de verificación de la solución de los problemas, el estudiante no verifica si la solución encontrada es la correcta, ya que no expresa esa respuesta con otros procedimientos reflejado en el numeral 2.4.

Ilustración 18. Aparte del cuestionario inicial del estudiante B.

2.4. ¿Cómo puedes verificar que la opción que escogiste es la correcta? ¿tienes algún procedimiento para demostrarlo? Escribe lo.

Pues yo creo que es así en la primera que se me vino a la cabeza

Epítome 2

En la segunda epítome, el estudiante mostró una gran disposición hacia nuevos procesos de aprendizaje, evidenciándose gran seguridad y confianza en lo que hacía como se observa en el numeral 1 y 5 de la guía de actividad #2.

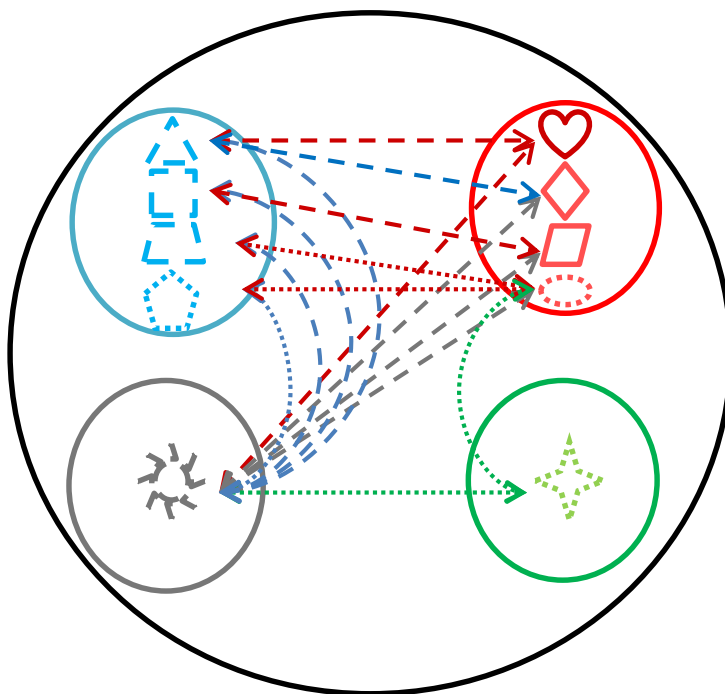


Ilustración 19. Apartes de la guía de actividad #1 del estudiante B, donde refleja su buena motivación (García, 1991).

1. ¿Cómo se sintieron frente a esta actividad?
 Pues relajado porque era interesante la actividad
5. ¿Te gustó la actividad? Justifica tu respuesta.
 Sí, era muy interesante

Sus procesos de monitoreo y planeación metacognitivo los realizó de manera espontánea y planteaba soluciones equivocadas a los problemas, aunque sus explicaciones eran acordes con el proceso desarrollado (ver ilustración 20).

Ilustración 20. Apartes de la entrevista semi estructurada #2 del estudiante B (D: docente; B: estudiante 2).

151	D: uhmm, bueno, sientes que has mejorado tu aprendizaje con respecto a estas temáticas?
152	B: <u>pues si</u>
153	D: por qué?
154	B: porque gracias a la, <u>a estos ejercicios le ayuda más en la vida a uno</u>
155	D: cómo en qué?
156	B: <u>en las matemáticas</u>
157	D: en qué aspectos?
158	B: o por, más o menos cuando, <u>más o menos cuan, cuando usted es cajero tiene que contar la plata, el por, el porcentaje que gana y ya</u>

Por otra parte, el estudiante sigue mostrando dificultades al no poder identificar y utilizar la temática planteada (ver línea 26, ilustración 21), aún después de haberse realizado una intervención didáctica, lo que afectó notoriamente su control metacognitivo, el cual evidenció un nivel muy bajo al examinar los objetivos de una actividad. Además, no estuvo en capacidad de verificar la solución de los problemas (ver líneas 19 a 24), ya que no hizo uso de otros procesos como la comparación con otros problemas o identificando si todos los datos son pertinentes o no para la solución. Todo esto influyó en que reconociera tan sólo algunas de las múltiples representaciones semióticas de las razones y proporciones.

Ilustración 21. Fragmento de la entrevista semi-estructurada #2 del estudiante B (D: docente; B: estudiante 2).

13	D: y qué entendiste de él?
14	B: del problema?
15	D: si, del problema
16	B: que tenía que ver cuál era <u>el vaso que tenía mayor concentración</u>
17	D: y cómo hiciste eso?
18	B: <u>no pues, pillé lo, pillé la tabla y pillé el vaso 3, y pillé que tenía más volumen de agua que los demás, y más masa de, más masa de "x" de, adi, adicionada, así que esa fue la primera que se me vino a la mente</u>
19	D: ehh, tenías alguna o, forma de verificar que esa fue la solución o
20	B: <u>ninguna</u>
21	D: la respuesta correcta?

22	B: <u>ninguna</u>
23	D: tienes alguna otra forma de plantear una solución al ejercicio?
24	B: <u>no</u>
25	D: si ves esa tabla de datos, que nos observa acá, con qué otro tema la puedes relacionar?
26	B: <u>pues con, estadística</u>
27	D: por qué?
28	B: <u>pues porque en estadística resolvemos problemas asíí, frecuentes, ahhh!, no sé</u>
29	D: ehh bueno, eh, qué te llevó a escoger ese sol, esa, esa respuesta?
30	B: no, pues, <u>porque era la que más cantidad de agua tenía, y la de mayor número</u>
31	D: bueno, y por qué no planteaste otra solución?
32	B: <u>no pues, no sé</u>
33	D: tenías algún otro camino? una ruta?
34	B: <u>no</u>
35	D: algo planeado para?
36	B: <u>no</u>

De igual modo, presentó algunos inconvenientes al tratar de comprender y analizar el problema, al igual que para diseñar, planificar y explorar otros caminos o rutas a la solución del problema como se muestra en las líneas 14 a 18 y el numeral 2.3 del cuestionario #2.

Ilustración 22. Fragmento del cuestionario #2 del estudiante B.

2.3. ¿Qué procedimiento es necesario para resolver el problema? Muestra a continuación los procesos utilizados.

$1200 = 12$ $30\% = 3$	$\begin{array}{r} 12 \overline{) 36} \\ \underline{04} \\ 0 \end{array}$	Pille el resultado y lo compare con la cantidad de productos vendidos y 480 era el más parecido al resultado de la división
---------------------------	--	---

Epítome 3

Para la epítome tres, el estudiante conservó su dificultad al no estar en capacidad de verificar la solución encontrada en un problema, ya que no realiza la búsqueda de un procedimiento diferente al empleado inicialmente para la resolución del mismo, como se muestra en el numeral 1.5 del cuestionario #3 (Ver ilustración 23).

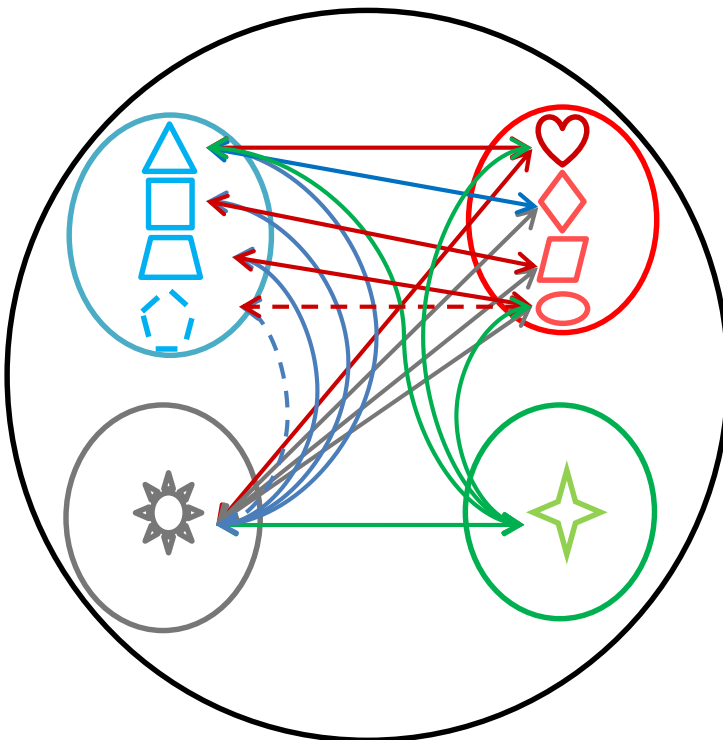


Ilustración 23. Aparte del cuestionario #3 y de la unidad didáctica, en la guía de actividad motivacional #2.

1. Luego de realizar una encuesta se concluyó que de cada 10 personas, 6 consumen leche, y que, de las personas que consumen leche, 2 son mujeres. De acuerdo a los resultados de la encuesta, ¿cuál es el porcentaje de encontrar en un grupo de 10 personas a un hombre que consuma leche?

- A. 20%
 B. 30%
 X 40%
 D. 80%

10	100%	100	$10 \cdot \frac{40}{100}$
6	60%		
2	20%	40%	

Con base en el problema anterior, responda las siguientes preguntas:

1.1. ¿Qué entendiste del problema anterior?

De encontrar de un grupo de 10 personas, el porcentaje de que un hombre consuma leche

1.2. ¿Cuál(es) crees que es (son) la(s) estrategia(s) que debes utilizar para plantear una solución al problema? Justifica tu respuesta.

Puedo tomar el 10 y convertir en un 100% así se resuelve el problema más fácil

1.5. ¿Tienes alguna forma de comprobar la solución del problema? Justifica tu respuesta.

No, ninguna forma de comprobar

1. ¿Cómo se sintieron nuevamente frente a esta actividad?

Delusados en esta actividad y con interés por aprender

2. ¿Sabes si una fracción es mayor o menor que otra? ¿Por qué?

Se porque entre mayor la particion menor es la cantidad

Por otra parte, el aprendiz mostró evolución conceptual al reconocer la temática planteada, lo que le permitió ampliar la comprensión y análisis del problema planteado, el diseño y planificación de una solución, y la exploración de caminos a la solución como se resalta en los recuadros rojos en los numeral 2.2. y 2.4. y la línea 14 de la entrevista #3.

Ilustración 24. Segmentos del cuestionario y de la entrevista semi estructurada #3 (D: docente; B: estudiante 2).

2.2. Al momento de leer y resolver el problema, ¿Pensaste en un camino o ruta seguir? SI NO

Justifica tu respuesta.

Res y suma la cantidad de dulces y simplifique la respuesta ©

2.4. ¿Qué procedimiento es necesario para resolver el problema? Muestra a continuación los procesos utilizados.

$\frac{1}{28}$ $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{8}$

$\frac{1}{7} \rightarrow$ posibilidad del color rojo
 $\frac{1}{8} \rightarrow$ colores

3. Según la temática trabajada hasta el momento, ¿Cuáles han sido los nombres de las expresiones que se han trabajado en la clase y en los talleres? Define cada uno de ellos o representalos.

EXPRESION 1: Fraccion
 EXPRESION 2: Division
 EXPRESION 3: Simplificacion
 EXPRESION 4: Multiplicacion

13	D: y ¿qué planteaste para llegar a esa solución?
14	B: ah, pues fácil, cogí el 10 y lo puse igual de, que 100%, entonces el, el 6 al 60%, y cómo eran dos mujeres, entonces era el 20%, entonces de lo que me quedaba del 60 era 40, entonces de ahí sale la respuesta

Esto a su vez le permitió aumentar el nivel de su regulación metacognitiva en todos sus componentes (monitoreo, planeación y control del desarrollo de una actividad), llegando así a reconocer la mayoría de las múltiples representaciones semióticas de un mismo objeto matemático (Ver numeral 3). Así mismo, conservó muy alta su motivación, debido a que superó muchas de sus dificultades encontradas en actividades anteriores, cuando se realizó una retroalimentación de la unidad didáctica desarrollada, en conjunto con una intervención didáctica desarrollada por el docente (Ver ilustración 24).

Epítome Final

En el epítome final, después de transcurridos casi dos meses y medio de la última intervención didáctica, se observó que el estudiante presentó una muy buen nivel al momento de plantear la resolución de problemas, se resalta el gran avance en la verificación de la solución, ya que el estudiante supo utilizar los datos necesarios para llegar a la solución y obteniendo la solución por otro método, y explicando el por qué, según se observa en los numerales 3.1. y 3.2. del cuestionario final (ver ilustración 25).

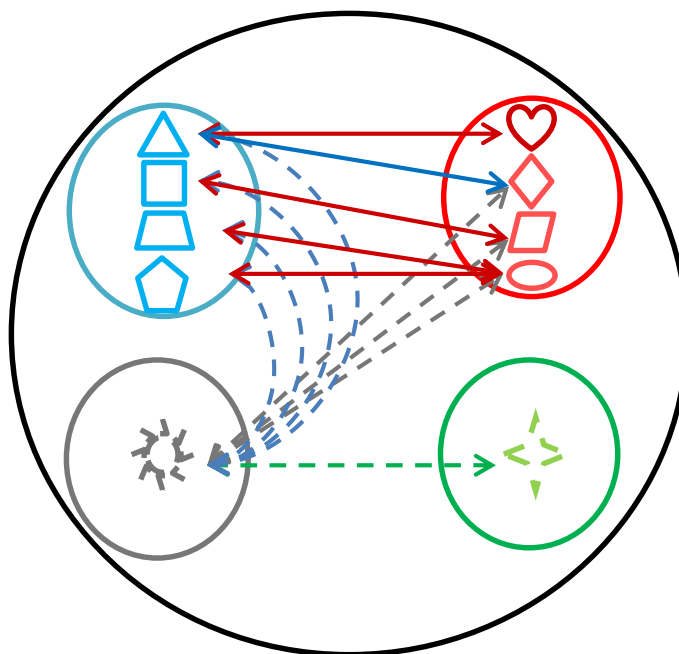


Ilustración 25. Fragmento del cuestionario final y de la entrevista #4 del estudiante B (D: docente; B: estudiante 2).

¿cuando terminaste de leer el enunciado del problema, ¿ideaste un camino a seguir o tenias una ruta? SI NO

Escribe los pasos:

Paso 1: Mire el cuadro cuidadosamente

Paso 2: Mire la cantidad de filas y pille que una estaba sombreada

Paso 3: y mire la respuesta C que era $\frac{1}{3}$ y el uno era

Paso 4: la sombreada de las 3

3.2. En este esquema, ¿cómo hice para identificar el valor de área sombreada? Explica con tus propias palabras

que mire el cuadro y la cantidad de fila y la fila sombreada y mire que concuerda con la respuesta C que era $\frac{1}{3}$

161	D: listo, bueno, eh, uhmm, después de ver, de verificar todos los problemas que hay, crees que has mejorado tu desempeño en las matemáticas, en el caso de las fracciones y las razones?
162	B: si

163	D: ¿en qué has mejorado?
164	B: <u>pues ayudan a comprender más fácil los problemas parecidos a estos</u>
165	D: y ¿qué otra cosa crees que has mejorado el, esta clase de actividades, de fracciones?
166	B: <u>no, pues aprender cómo se resuelven los problemas también, ayudan a recordar los problemas que le ponían antes a uno, y ya</u>
167	D: bueno, eh, cuando leíste por primera vez los problemas, ¿cómo te sentiste frente a ellos?
168	B: no pues, tranquilo
169	D: pero ese tranquilo como lo, cómo lo puedes?
170	B: pues normal, como siempre tomo los problemas
171	D: y cómo siempre los tomas?
172	B: <u>pues relajado yyy, interesado a ver si soy capaz de resol, resolverlos</u>
173	D: interesado, listo y cuál crees, de pronto que fueron todos los, los propósitos, los objetivos al realizar todas las actividades que hicimos durante el año pasado y este año?
174	B: <u>pues mirar las capacidades de pensar de cada uno, de nosotros</u>
175	D: alguna otra que tengas?
176	B: <u>no, a también si somos capaz de resolver esos problemas, que cómo los resolvemos, y eso.</u>

Su motivación y regulación metacognitiva se conservaron en el mismo nivel de desarrollo durante esta actividad como se reflejan en las líneas 164 a 176 de la entrevista #4 de la ilustración anterior, y el numeral 4 y 5 del cuestionario final (ver ilustración 26).

Ilustración 26. Fragmento del cuestionario final del estudiante B .

4. Después de resolver los tres problemas anteriores, ¿Cómo consideras tu dominio en estas temáticas: Bueno o Malo?
 Buena bueno

Da 4 razones

Razón 1: los ejercicios no eran tan duros

Razón 2: las respuestas ya estaban y solo era escogerlas

Razón 3: solo había que identificar cuál es la correcta

Razón 4: y ya

5. ¿Cuándo leíste por primera vez los problemas, ¿cómo te sentiste frente a ellos?
Me sentí como interesado por los problemas

Además, se pudo observar que el estudiante no logró identificar las diferentes formas de representar un mismo objeto matemático, reconociendo sólo tres de las múltiples posibles formas de denominar las razones y proporciones como muestran los numerales 1.1. y 2.2., y las líneas 62 – 64 y 114 de la entrevista #4. De igual modo, su concepto sobre la temática planteada fue sencilla (ver líneas 66 y 104), sin una construcción profunda de ésta, como se muestra en la siguiente ilustración:

Ilustración 27. Apartes del cuestionario y de la entrevista final del estudiante B (D: docente; B: estudiante 2).

1.1. ¿Qué temas recordaste para resolver el problema? Escríbelos.
No ninguno

¿Por qué crees que recordaste estos temas?
No recuerdo

2.2. Cuando se le presentan los datos del problema, ¿con qué otro(s) término(s) o nombre(s) conoces estas expresiones numéricas?
fracciones o divisiones

61	D: bueno, y cómo llamamos a estos números?
62	B: <u>fracciones</u>
63	D: pues conoces de pronto, conoces con otro término diferente a fracciones?
64	B: uhmmm <u>divisiones</u> o radical, no radicales no, <u>no, no sé</u>
65	D: de pronto, me podrías dar una, definición de lo que es una fracción?
66	B: <u>es como una división</u>
67	D: qué más?
68	B: <u>pues ya (risas)</u>
101	D: eh, aprendiste a diferenciar si una fracción es mayor o menor que otra?
102	B: <u>si</u>
103	D: cómo lo harías?
104	B: <u>pues que entre más pequeño sea el objeto mayor es la cantidad de, de la medida</u>
105	D: pero, cuál sería la medida que yo colocaría, o cuál es la que diferenciaría que dices que es mayor
106	B: que es mayor?
107	D: si, cuál es el dato que dices que es mayor? que entre más pequeño más grande
108	B: más grande el número
109	D: pero, cuál número?
110	B: pues el del cuadro
111	D: pero por ejemplo aquí hay dos números, hay uno arriba y uno en la parte de

	abajo, cuál sería de los 2 el que crece?
112	B: pues el de abajo
113	D: y ese cómo se llama?
114	B: <u>denominador</u>

El estudiante B logró un aprendizaje profundo en algunos de los componentes tratados durante esta investigación, como fue en su capacidad de resolución de problemas, su nivel de motivación y la regulación metacognitiva, debido a que siempre mostró seguridad en el desarrollo de las actividades de la unidad didáctica, así como generalmente trató de explicar el por qué seleccionaba una respuesta y realizaba cierto proceso para hallar la solución. Gran parte de estos logros, se debe gracias a las intervenciones didácticas del docente (ayudas ajustadas y retroalimentación de los cuestionarios) y a la aplicación de la unidad didáctica con problemas prácticos y cotidianos a través del trabajo cooperativo, donde el estudiante adquirió habilidades en algunos de los componentes estudiados durante el desarrollo de esta investigación.

El estudiante aunque mostró avances en identificar y usar múltiples representaciones del objeto matemático estudiado, presentó ciertas limitaciones en la comprensión del concepto de razones y proporciones.

Para poder evidenciar la evolución del aprendizaje en profundidad del estudiante B, a continuación se encuentran los diferentes epítomes del mismo, en las cuales se muestran los cambios que se dieron en cada uno de los componentes y las relaciones que se establecieron entre ellos:

Gráfica 14. Esquema evolutivo en los componentes del aprendizaje profundo del estudiante B.

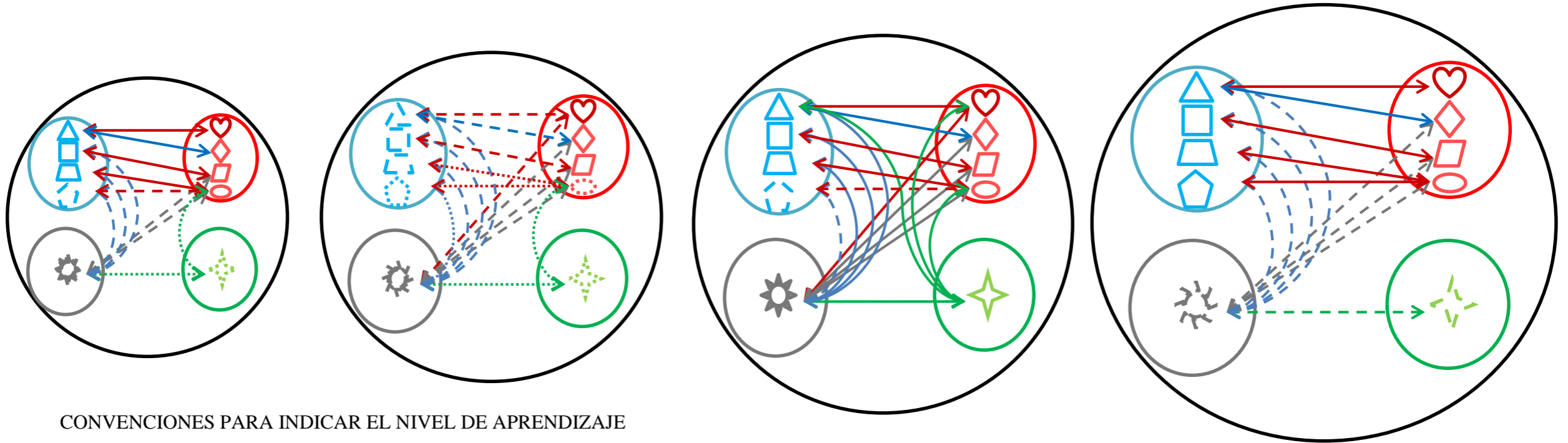
ESTUDIANTE B:

EPITOME INICIAL

EPITOME 2

EPITOME 3

EPITOME FINAL



CONVENCIONES PARA INDICAR EL NIVEL DE APRENDIZAJE

- NIVEL BAJO (dotted line)
- NIVEL MEDIO - - - - - (dashed line)
- NIVEL ALTO _____ (solid line)

A continuación en la tabla 9, se resume la información recolectada con los diferentes instrumentos utilizados en cada uno de los componentes del aprendizaje en profundidad.

Tabla 9. Resumen de la información recolectada a través de los diferentes instrumentos desarrollados durante la unidad didáctica del estudiante B. Fuente: Autores.

		EPITOME INICIAL	EPITOME 2	EPITOME 3	EPITOME FINAL
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS	<i>Análisis y comprensión el problema</i>	Comprende y analiza el problema	Trata de comprender y analizar el problema	Comprende y analiza bien el problema	Comprende y analiza muy bien el problema
	<i>Diseño y planificación de una solución</i>	Diseña y planifica una solución	Trata de diseñar y planificar una solución con base en sus conocimientos	Diseña y planifica la solución	Diseña y planifica muy bien una solución
	<i>Exploración de caminos o rutas a la solución</i>	Plantea una ruta a la solución	Trata de explorar un camino a la solución	Explora caminos a la solución	Explora caminos a la solución
	<i>Verificar la solución</i>	Trata de verificar la solución encontrada	No evalúa la solución encontrada	Trata de verificar su solución	Verifica la solución encontrada
MOTIVACIONAL-METACOGNITIVO	<i>Motivación intrínseca</i>	Refleja interés al mostrar seguridad y confianza	Muestra gran interés	Se observa una buena motivación por aprender	Muestra gran motivación por aprender

	<i>Regulación metacognitiva</i>	Monitoreo	Monitorea el desarrollo de sus actividades	Monitorea su aprendizaje	Monitorea bien sus procesos de desarrollo de una actividad	Monitorea sus procesos de aprendizaje
		Planeación	Planifica caminos para el desarrollo de sus actividades	Hace una planeación desde el desarrollo de la tarea	Planea el desarrollo de su actividad de aprendizaje	Planea el desarrollo de la actividad
		Control	Controla su aprendizaje al desarrollar sus actividades	No hay un control sobre sus procesos de aprendizaje	Realiza un control de sus procesos de aprendizaje	Examina el desarrollo de su aprendizaje
COGNITIVO-LIGÜÍSTICA	<i>Múltiples representaciones (semiótica)</i>	Distingue algunas representaciones de un mismo objeto matemático	Identifica alguna forma de representación	Emplea muchas formas de representación de un mismo objeto matemático	Reconoce varias formas de representar un objeto matemático	
EPISTEMOLÓGICA	<i>Concepciones sobre razones y proporciones y su evolución</i>	No identifica la temática planteada	No reconoce la temática	Refleja una evolución conceptual en la temática	Reconoce la temática planteada	

Estudiante C:

Epítome Inicial

El estudiante C de 16 años de edad, en su epítome inicial reflejó un alto nivel en el monitoreo metacognitivo de sus procesos de aprendizaje, ya que hizo buen uso de las múltiples representaciones semióticas que empleó en el desarrollo de la solución de un problema, como se muestra en los numerales 1.1. y 1.3. del cuestionario inicial y como aparecen mencionado en la línea 46 de la entrevista en la siguiente ilustración:

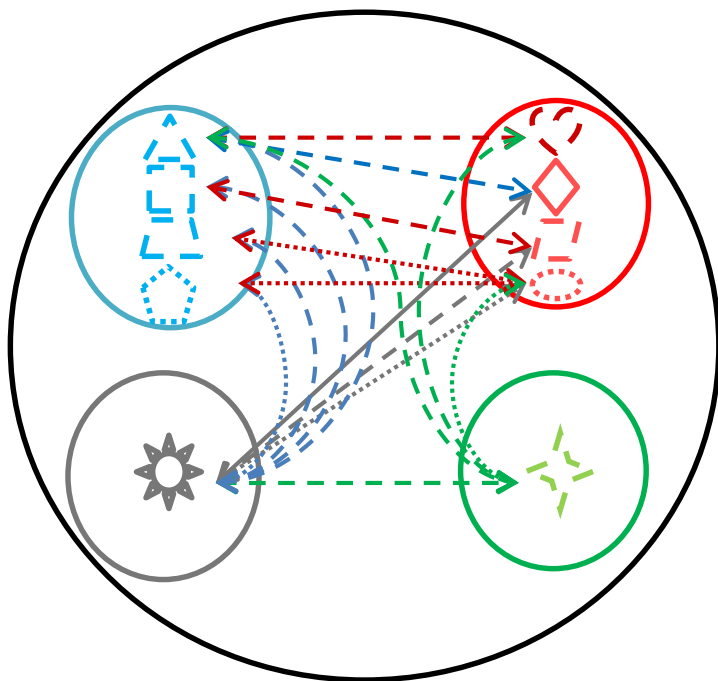


Ilustración 28. Aparte del cuestionario y de la entrevista semi-estructurada inicial (D: docente; C: estudiante 3).

1.1. ¿Qué temas recordaste para resolver el problema? Escríbelos.

el tema de sucesión

¿Por qué crees que recordaste estos temas?

por que estos cuadrados van como en una sucesión
y por eso recuerdo este tema

1.3. Describe paso a paso cómo resolviste el problema (Puedes usar dibujos, esquemas, narración, operaciones, procedimientos, diagramas):

En el primer cuadro como comenzaba con x yo suponía que era $\frac{x}{2}$ entonces yo el resto seguía así $\frac{x}{2}, \frac{x}{4}, \frac{x}{8}$ y supuse que se multiplicaba por dos así $2 \cdot 1 = 2, 2 \cdot 2 = 4, 4 \cdot 2 = 8$ y el último pienso que es así $8 \cdot 2 = 16$ o sea $\frac{x}{16}$

41	D: me podrías indicar por ejemplo, para alguno de ellos, ¿cuáles serían los pasos que tú tenías planeados?
42	C: ah, no, pues... uhmm, ¿para uno de ellos?
43	D: por ejemplo, ¿para este tercero?
44	C: pa 'este (risas)
45	D: para alguno, para cualquiera, cualquier, qué pasos tenías para solucionar alguno de los 3 problemas? escoge cualquiera
46	C: ... no pues, por ejemplo aquí en el segundo, <u>aquí me mostraban fraccionarios</u> , no? entonces yo, <u>cogí cada uno y los dividí</u>

Además, el estudiante logró identificar parcialmente la temática trabajada en la unidad didáctica (ver numerales 2.1. y 2.2. de la ilustración 29), lo que generó obstáculos en lo referente a la capacidad de resolución de problemas (comprensión y análisis del problema, diseño y planificación de la solución, y la exploración de rutas a la solución).

Ilustración 29. Aparte del cuestionario inicial del estudiante C.

21. Cuando resuelves el problema, ¿pensaste en un camino a seguir o tenías una ruta? SI NO

Da 3 razones:

Razón 1: Por que cuando el denominador es mas grande su valor es pequeño

Razón 2: Por que cuando hice las divisiones el que tenia el denominador grande es un

Razón 3: su resultado es menor que las demas valor
pequeño

22. Cuando se te presentan los datos del problema, ¿con qué otro(s) término(s) o nombre(s) conoces estas expresiones numéricas?

los conosco como fraccionarios

No realizó verificación de los procesos realizados para examinar la solución encontrada, ya que no identifica si todos los datos son pertinentes y no aplica otros métodos para encontrar la solución. Por otro lado, el estudiante se sentía inseguro y confuso al abordar un problema, lo que afectó su motivación, tal como lo refleja en los numerales 4. y 5. Su forma de planear el desarrollo de una tarea no fue el pertinente, debido a que no desarrolla su planeación hasta el

final; además no realizó un control metacognitivo sobre el desarrollo de las actividades planteadas, tal como se puede observar en la siguiente ilustración:

Ilustración 30. Aparte del cuestionario inicial del estudiante C.

4. Después de resolver los tres problemas anteriores, ¿Cómo consideras tu dominio en estas temáticas: Bueno o Malo?
Bueno
- Da 3 razones
 Razón 1: **Uso todo mi conocimiento**
 Razón 2: **Porque trate de hacer lo posible**
 Razón 3: **de lo mejor de mí**
5. ¿Cuándo leíste por primera vez los problemas, ¿cómo te sentiste frente a ellos?
Pues me senti un poco confundido por que no sabia como resolverlos pero luego ya pude hacerlo

Epítome 2

En la segunda epítome, el estudiante logra un avance conceptual evidente sobre las razones y proporciones, ya que considera importante conocer el uso del lenguaje y la comprensión del mismo, para poder solucionar adecuadamente un problema matemático, tal como lo describe en los numerales 2 y 3 de la guía de actividad motivacional #1 y en la línea 142 de la entrevista #2 (ver ilustración 31).

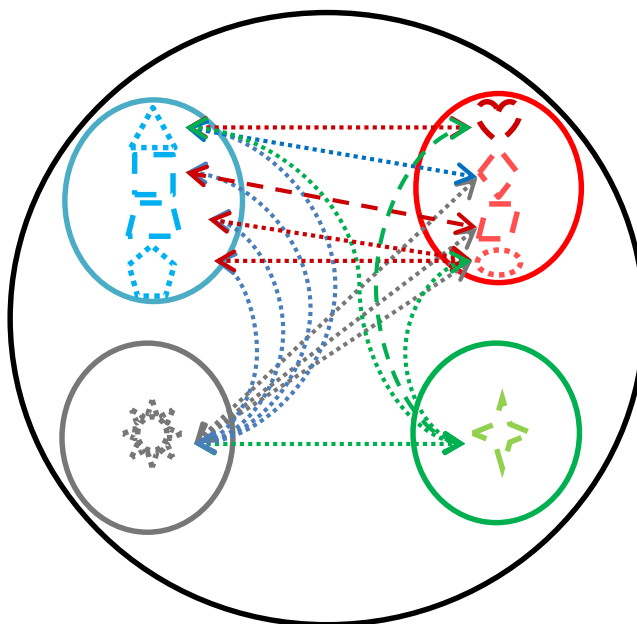


Ilustración 31. Segmento de la unidad didáctica, en la guía de actividad motivacional #1 y de la entrevista semi-estructurada #2 del estudiante C (D: docente; C: estudiante 3).

1. ¿Cómo se sintieron frente a esta actividad?
Pues nos sentimos nerviosos y un poco confundidos
2. ¿Cuál fue el concepto que te quedó de fracción?
El concepto que entendí por fracción fue que hay diversas formas de representarlos y es una división de un objeto en formas iguales
3. ¿Cuántas formas encontraste para representar una fracción?
Pues muchas pero la más importante para mí es que es una división de un objeto en partes iguales
4. ¿Crees que con actividades de esta clase, puedes mejorar tu aprendizaje? Justifica tu respuesta.
Sí, por que así entendería más el tema y sabría como hacerlo mejor en un futuro

139	D: confundido, bueno, eh, te parece mejor la estrategia que planteamos para la solución del problema?
140	C: sí
141	D: por qué?
142	C: ... porque, <u>es mucho más fácil, y así uno entiende mejor el, el concepto que le ponen acá</u>
143	D: y cuál es el concepto que nos están dando ahí?
144	C: por ejemplo, a lo que me da aquí, <u>pues los 4 vasos</u> y todo eso, y lo del volumen, si me entiende?

Esto reflejó un mayor nivel de interés por aprender, pese a que presentó inconvenientes de carácter motivacional, ya que seguía mostrando inseguridad y un poco de confusión (ver numeral 1). Así mismo, su monitoreo y planeación fue ocasional al desarrollar los objetivos de una actividad de la ilustración anterior.

El estudiante siguió mostrando dificultades al no poder identificar y usar las múltiples representaciones semióticas sobre las razones y proporciones, después de haberse realizado la primera intervención didáctica. Estas dificultades afectan notoriamente su control metacognitivo tal como se evidencia en el numeral 1.4. del cuestionario #2. Esto limitó la comprensión y el análisis de un problema, tratar de diseñar y planificar una solución y explorar caminos a la solución (ver líneas 114 a 116). No estuvo en capacidad de verificar la solución de los problemas, es decir, no cuenta con las herramientas suficientes para encontrar otro proceso para confirmar su solución, o identificar si todos los datos son pertinentes o no para la solución, tal como se muestra en la siguiente ilustración:

Ilustración 32. Segmento del cuestionario y de la entrevista semi estructurada #2 del estudiante C (D: docente; C: estudiante 3).

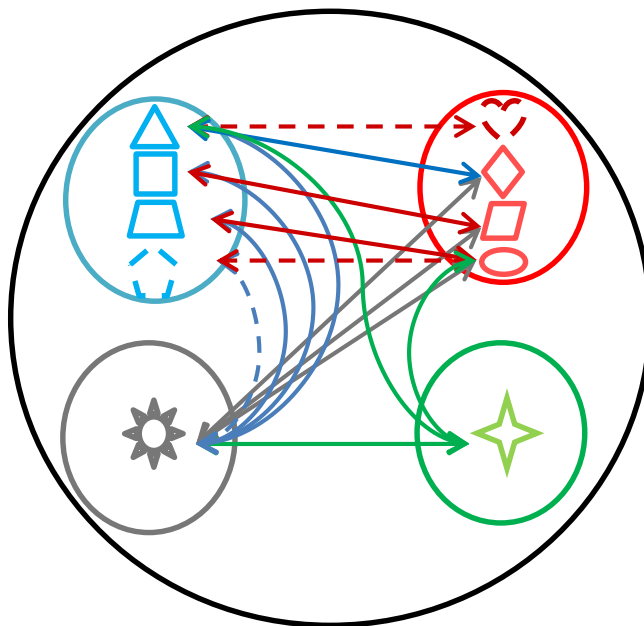
1.4. ¿Cuáles son las dificultades que se te presentaron al resolver el problema?

DIFICULTAD 1	tenia la mente en blanco
DIFICULTAD 2	no me acordaba de lo que tenia que hacer
DIFICULTAD 3	no sabia como hacerlo
DIFICULTAD 4	me demore demasiado en poder entender

113	D: se cogen todos los números, bueno, y qué, qué otra diferencia encontraste con, con ese planteamiento de las medidas, a lo de plantearlo en forma de fracciones?
114	C: ... no, pues, como, mejor dicho, <u>aquí estaba más confundido</u>
115	D: no tenías?
116	C: <u>no tenía idea de lo que estaba haciendo</u>

Epítome 3

Para la epítome tres, el estudiante continuó mostrando evolución conceptual al reconocer la temática planteada y comprenderla, debido a un proceso de retroalimentación de las actividades de la unidad didáctica y una intervención didáctica por parte del docente realizadas hasta el momento, superando muchas de



sus dificultades. Amplió la comprensión y análisis del problema, el diseño y planificación, y la exploración de caminos a la solución, como se muestra en los numerales 1.4., 1.5. y 2.3. del cuestionario #3 y de la línea 142 de la entrevista #3.

Ilustración 33. Fragmentos de la entrevista semi-estructurada y del cuestionario #3 y de la unidad didáctica, en la guía de actividad motivacional #2 del estudiante C (D: docente; C: estudiante 3).

1.4. ¿Cuáles son las dificultades que se te presentaron al resolver el problema?

DIFICULTAD 1: Pues que estaba haciendo los cuentas mal, creo yo
 DIFICULTAD 2: al comienzo me senti un poco confuso solo un poco
 DIFICULTAD 3: _____
 DIFICULTAD 4: _____

1.5. ¿Tienes alguna forma de comprobar la solución del problema? Justifica tu respuesta

Si, porque se supone que son 10 personas que seria un 100% y que de esas 10 hay 6 que toman leche un 60% y 2 son mujeres 20% entonces faltaria en esas 6 personas que toman leche un 40% que serian hombres esos 4 y por eso la probabilidad que un hombre entre esas 10 personas tome leche es de 40%

2.3. ¿Crees que podrías resolver el problema de otra forma? SI_ NO_

Muestra el paso a paso.

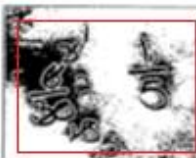
PASO 1: tome los caramelos y los sume

PASO 2: luego como son 6 caramelos los puse como en

PASO 3: ~~dejes~~ simplifíque

PASO 4: y así me dio el resultado

2.4. ¿Qué procedimiento es necesario para resolver el problema? Muestra a continuación los procesos utilizados.



2. ¿Sabes si una fracción es mayor o menor que otra? ¿Por qué?

Si, por que por ejemplo $\frac{7}{10}$ es menor que $\frac{1}{5}$ entonces por eso

137	D: crees que las clases deberían cambiar? o deberían de ser iguales?
138	C: las clases?
139	D: si, las clases? con, con respecto a años anteriores, deberían de cambiar, a trabajar de esta forma o seguir?
140	C: no pues ... pienso que también podría seguir normal, pero de vez en cuando también poner, un, cosas así, talleres así
141	D: y qué te, qué te in, qué te interesa de estas actividades? o qué crees que es importante en estas actividades? por qué se hacen?
142	C: ... pues, creo que, <u>la comprensión de lectura, porque si uno no entiende el, la pregunta, pues, entonces, lo va a hacer todo mal, y, o, pues también al resolver el problema</u>

Esto a su vez le permitió una mejor regulación metacognitiva en todos sus componentes, llegando así a reconocer la mayoría de las múltiples representaciones semióticas de un mismo objeto matemático como se refleja en el numeral 2.4. del cuestionario #3 y el numeral 2. de la guía de actividad motivacional #2 como lo muestra la anterior ilustración.

Su motivación se conservó en un nivel estable, debido a que no logró superar su inseguridad y confianza en sí mismo sobre las decisiones tomadas al plantear la solución de un

problema. Además, conservó su dificultad al no estar en capacidad de verificar la solución encontrada a un problema buscando un procedimiento diferente al empleado inicialmente para la resolución del mismo, como lo muestran los apartes subrayados en rojo en la entrevista como en el literal 4. del cuestionario #3 y el numeral 1. de la guía de actividad motivacional #2 (Ver ilustración 34).

Ilustración 34. Segmentos del cuestionario y de la entrevista semi-estructurada #3, además de la unidad didáctica, en la guía de actividad motivacional #2 del estudiante C (D: docente; C: estudiante 3).

37	D: ¿tendrías alguna otra forma de resolver esta clase de problemas?
38	C: <u>... no!</u>
39	D: bueno, eh, tienes alguna forma de comprobar lo que escribiste demasiado en esta pregunta? cómo sabes si comprobar o no comprobar el ejercicio? o tienes de pronto, algún camino, alguna ruta, algo, para saber si es correcta o incorrecta la forma, o la respuesta que escogiste?
40	C: que la respuesta es correcta?
41	D: uhmm
42	C: <u>no, no sé si es correcta, pero ... pero creo yo pues, que, pues para mí esa es</u>

4. En las actividades, talleres y prácticas desarrolladas en clase, ¿Cómo te sentías frente a ellos?
Justifica tu respuesta.

Pues en algunos un poco confuso pero después que no lo explicaban ya era más fácil

133	D: y te sientes mucho más motivado a aprender?
134	C: ... (asienta con la cabeza)
135	D: por qué crees que te sientes motivado?
136	C: <u>porque así aprendería más y, y ya no me, ya no me sentiría tan confundido, pues con estos talleres así</u>

1. ¿Cómo se sintieron nuevamente frente a esta actividad?

Pues esta vez nos sentimos más seguros frente a la actividad

Epítome Final

En el epítome final, se observó que el estudiante avanzó significativamente en la identificación y uso de la mayoría de las múltiples representaciones semióticas de las razones y proporciones como se muestra en los numerales 3. y 4. de la ilustración 21 y las líneas 84 a 94 de la ilustración 35.

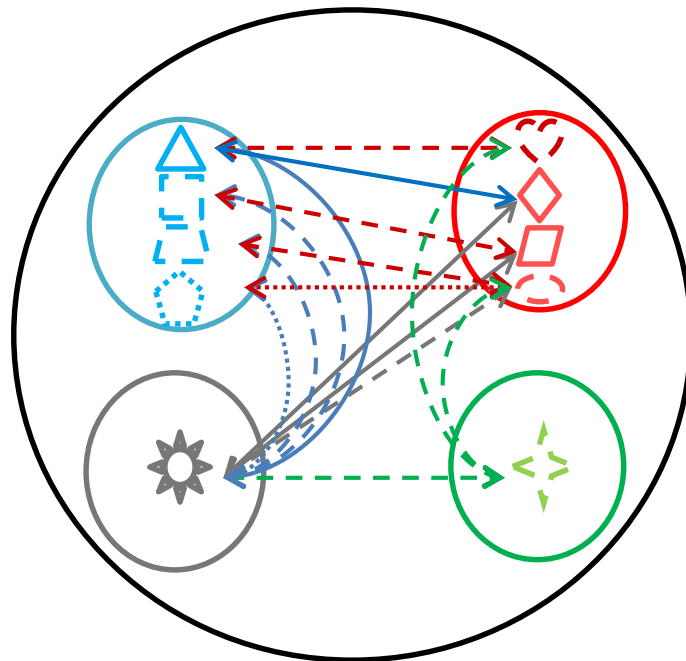


Ilustración 35. Aparte del cuestionario y entrevista semi-estructurada final del estudiante C (D: docente; C: estudiante 3).

3. Describe paso a paso cómo resolviste el problema:

$\frac{x}{x} \quad \frac{x}{2} \quad \frac{x}{4} \quad \frac{x}{8} \quad \frac{x}{?}$
 entonces es $\frac{x}{16}$ por que si simplificamos se sacaron los resultados pasados.

4. Después de resolver los tres problemas anteriores, ¿cómo consideras tu dominio en estas temáticas: Bueno o Malo?
Bueno ya lo considero bueno

Da 4 razones

Razón 1: Por que todo esto se trata de fracciones
 Razón 2: maneja un poco bien el tema
 Razón 3: _____

23	D: listo, entonces, crees que las matemáticas han mejorado algunas de tus habilidades?
24	C: pues, si, pues, <u>como pensar un poco más rápido</u> , que a veces uno necesita pensar rápido

En esta epítome muestra que se encuentra en capacidad de comprender y analizar con mayor facilidad el problema planteado, permitiendo que el monitoreo y planeación metacognitiva, regulando sus procesos de aprendizaje al desarrollar una tarea, tal como se observa en las líneas 111 y 112 de la anterior ilustración.

Se encontró que el estudiante avanzó hasta reconocer y comprender la temática de la unidad didáctica; describe cierto interés por aprender a comprender, manejar y usar adecuadamente el lenguaje de la temática planteada. Un obstáculo que no logró superar durante todo el estudio, fue la verificación de la solución, debido a que no supo cómo utilizar los datos necesarios para encontrar la solución o llegar a la solución por otro método (ver ilustración 36).

Ilustración 36. Fragmento del cuestionario y la entrevista semi-estructurada final del estudiante C (D: docente; C: estudiante 3).

1.1. ¿Qué temas recordaste para resolver el problema? Escribe los.

Fracciones

¿Por qué crees que recordaste estos temas?

Por que ese es el tema inicial de todo lo que hemos hecho

74	C: como se repres, como se representaba la, parte sombreada del, cuadrado ahí
75	D: y cómo lo hiciste?
76	C: pues ... pues conté cuantos cuadritos había aquí, y los que quedaban ahí, pues, <u>yo creía que era 6 sobre 12</u>
77	D: 6/12, crees que hay otra solución posible para el problema?

78	C: si
79	D: por qué?
80	C: <u>porque, porque aquí se cuenta son todo, y 12 no es el todo de esto</u>
81	D: no es el todo de eso, entonces, cuál sería la fracción correcta que debemos escoger?
82	C: la C
83	D: por qué?
84	C: <u>porque si uno, coge ésto, y lo pone en una fracción sería 6 sobre 18</u>
85	D: si
86	C: <u>y si la simplificara daría, la sss, la respuesta es C</u>
87	D: la C, que sería?
88	C: <u>1 sobre 3</u>
89	D: y ese 1/3, de qué otra forma se puede leer en este diagrama?
90	C: <u>6 sobre 18</u>
91	D: además de esa? o qué otro significado tiene esta fracción 1/3? ... o qué significa el 1 y qué significa el 3? en este diagrama?
92	C: a queee, <u>por ejemplo el numerador que es el 1, pues este, es este que esta sombreado</u>
93	D: si
94	C: <u>y aquí el 3, pues estas, estos espacios que faltan</u>
111	D: pero, cuál fueron o cuáles crees que fueron tus dificultades al analizar cada uno de los problemas?
112	C: que, puede que, que uno, no le haya puesto lógica o <u>no haya entendido bien lo que estaba leyendo, ps</u>

Se puede afirmar que el estudiante C desarrollo un mayor nivel de aprendizaje profundo en algunos de sus componentes, como lo fue en el aspecto epistemológico, ya que siempre se mostró preocupado por hacer un buen uso y manejo del lenguaje, comprender el concepto, lo que le permitió ampliar la forma de resolver los problemas planteados identificando las múltiples representaciones de la temática expuesta, así como monitorear y planear el desarrollo de una actividad. Gran parte de estos avances, se generaron por las intervenciones didácticas del docente (ayudas ajustadas y retroalimentación de los cuestionarios) y a la aplicación de la unidad didáctica con problemas prácticos y cotidianos a través del trabajo cooperativo, donde el estudiante adquirió habilidades en algunos de los componentes estudiados durante el desarrollo de esta investigación. Por el contrario, su motivación no alcanzó un nivel alto, debido a la

inseguridad y poca confianza en sí mismo, reflejada durante toda la aplicación de la unidad didáctica.

Para poder evidenciar la evolución del aprendizaje en profundidad del estudiante C, a continuación se encuentran los diferentes epítomes de la misma, en las cuales se muestran los cambios que se dieron en cada uno de los componentes y las relaciones que se establecieron entre ellos:

Gráfica 15. Esquema evolutivo en los componentes del aprendizaje profundo del estudiante C.

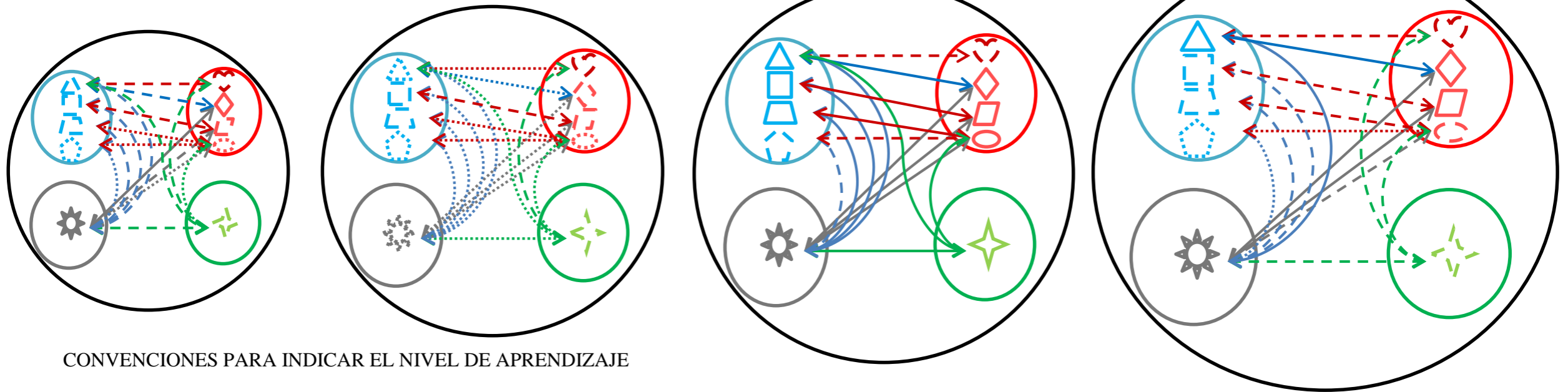
ESTUDIANTE C:

EPITOME INICIAL

EPITOME 2

EPITOME 3

EPITOME FINAL



CONVENCIONES PARA INDICAR EL NIVEL DE APRENDIZAJE

NIVEL BAJO (dotted line)

NIVEL MEDIO - - - - - (dashed line)

NIVEL ALTO _____ (solid line)

A continuación en la tabla 10, se resume la información recolectada con los diferentes instrumentos utilizados en cada uno de los componentes del aprendizaje en profundidad.

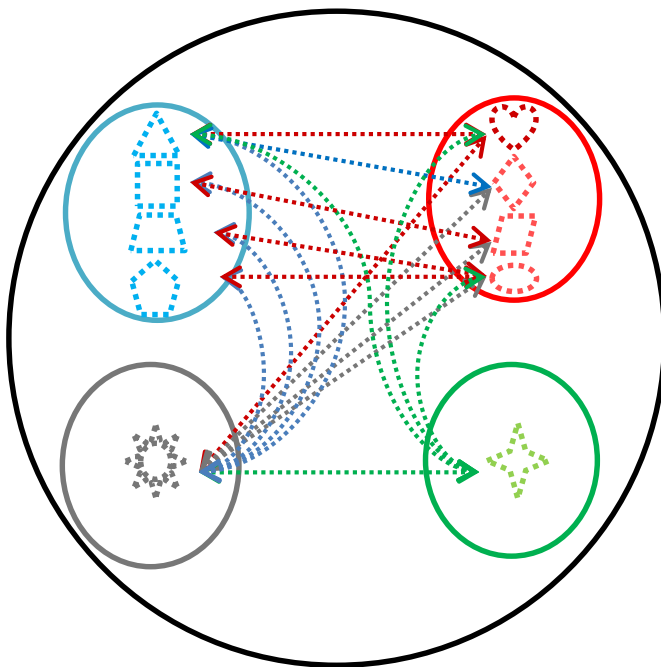
Tabla 10. Resumen de la información recolectada a través de los diferentes instrumentos desarrollados durante la unidad didáctica del estudiante C. Fuente: Autores.

		EPITOME INICIAL	EPITOME 2	EPITOME 3	EPITOME FINAL
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS	<i>Análisis y comprensión el problema</i>	Trata de comprender y analizar los enunciados de un problema	No comprende ni analiza el enunciado del problema	Comprende y analiza bien el problema	Comprende y analiza el enunciado del problema
	<i>Diseño y planificación de una solución</i>	Trata de diseñar y planificar una solución	Trata de diseñar y planificar una solución	Diseña y planifica la solución del problema	Trata de diseñar y planificar una solución
	<i>Exploración de caminos o rutas a la solución</i>	Trata de crear una ruta a la solución	Trata de explorar caminos a la solución	Explora una ruta a la solución	Explora un camino a la solución
	<i>Verificar la solución</i>	No examina su solución	No verifica su respuesta	Trata de verificar la solución encontrada	No verifica la solución encontrada
MOTIVACIONAL-METACOGNITIVO	<i>Motivación intrínseca</i>	Muestra interés por aprender	Muestra interés hacia los procesos de aprendizaje	Muestra una motivación por aprender	Muestra interés por aprender la temática

	<i>Regulación metacognitiva</i>	Monitoreo	Monitorea el desarrollo de una tarea	Trata de monitorear identificando dificultades	Se refleja un monitoreo de las actividades realizadas.	Monitorea sus procesos de aprendizaje
		Planeación	Trata de planear el desarrollo de la tarea	Trata de planear el desarrollo de la tarea	Planea el desarrollo de su actividad de aprendizaje	Planea el desarrollo de la actividad
		Control	No evalúa sus procesos de aprendizaje	No controla el desarrollo de una actividad	Realiza un control de sus procesos de aprendizaje	Trata de hacer un control sobre el desarrollo de una actividad
COGNITIVO-LIGÜÍSTICA	<i>Múltiples representaciones (semiótica)</i>		Reconoce algunas representaciones de un mismo objeto matemático	Identifica alguna forma de representación	Emplea la mayoría de las formas de representación	Identifica algunas formas de representación
EPISTEMOLÓGICA	<i>Concepciones sobre razones y proporciones y su evolución</i>		Identifica la temática planteada	No identifica la temática planteada	Identifica la temática planteada y reconoce la importancia del lenguaje en la matemática	Reconoce la temática planteada e identifica la importancia del lenguaje en la matemática

Estudiante E:**Epítome Inicial**

La estudiante E de 15 años de edad, en su epítome inicial evidenció un gran vacío en cada uno de los componentes del aprendizaje en profundidad planteados para el presente estudio (Ver ilustración 37), ya que no identificó la temática planteada, ni plantea el uso de múltiples representaciones semióticas de las razones y proporciones. También, en la resolución de problemas, la estudiante no comprendió ni analizó el



problema, por tanto no diseñó ni planificó una solución, ni exploró caminos o rutas a la solución, ni verificó la solución escogida. Esto implicó que su regulación metacognitiva no fuera la más apropiada para hacer un seguimiento a sus procesos de aprendizaje al desarrollar una tarea. De igual modo, su motivación fue influenciada por su desagrado hacia las matemáticas, ya que no mostró un interés por aprender y por superar sus dificultades en el área. Lo descrito anteriormente se puede observar en los recuadros y subrayados en rojo de la ilustración 37.

Epítome 2

Para la epítome dos, la estudiante mostró un avance en lo epistemológico desde las concepciones sobre las razones y proporciones (Ver numeral 2. de la ilustración 38), ya que su motivación se vio influenciada por el desarrollo de la actividad de la unidad didáctica permitiendo un mayor interés por la temática. Reconoció algunas de las múltiples representaciones semióticas de un mismo objeto matemático como se observa en el numeral 2.2., 2.3. y 3. de la ilustración 38, por lo que pudo comprender y analizar algunos problemas; esto condujo a que planeara mejor algunas de las actividades de la unidad didáctica y sus procesos de aprendizaje.

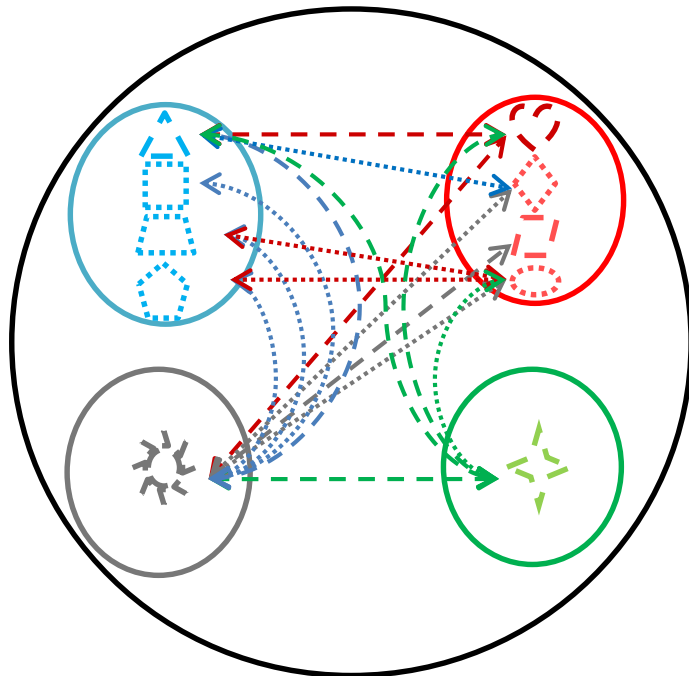


Ilustración 38. Fragmentos del cuestionario #2 y de la de la unidad didáctica, en la guía de actividad motivacional #1 de la estudiante E.

2.2. ¿Cómo puedes verificar que la opción que escogiste es la correcta? Muestra el paso a paso.

PASO 1: que el producto 2 de la ciudad E es mayor al de la ciudad F
 PASO 2: Realizando una operación se encuentra un resultado.
 PASO 3: que al mirar los porcentajes se afirma que se vendió más en la C.
 PASO 4: Los productos en cada ciudad

2.3. ¿Qué procedimiento es necesario para resolver el problema? Muestra a continuación los procesos utilizados.

$$1200 - \text{el } 30\% = 360.$$

2. ¿Cuál fue el concepto que te quedó de fracción?
Es la forma de partir un objeto en partes iguales.
3. ¿Cuántas formas encontraste para representar una fracción?
La División, Representación gráfica, Proporción etc...
5. ¿Te gustó la actividad? Justifica tu respuesta.
Sí, ya que puedo aprender más del tema

La estudiante siguió con ciertos vacíos en los demás aspectos de los componentes del aprendizaje profundo, como lo son la resolución de problemas en su diseño y planificación, en la exploración de rutas a la solución en los numerales 4. y .5 del cuestionario #2 y en la verificación de la solución encontrada. No llevó a cabo el monitoreo ni el control del desarrollo de los objetivos de una actividad, como puede observarse en la siguiente ilustración:

Ilustración 39. Aparte del cuestionario #2 y de la de la unidad didáctica, en la guía de actividad motivacional #1 y de la entrevista semi-estructurada #2 de la estudiante E (D: docente; E: estudiante 4).

4. ¿Sientes que has mejorado tu aprendizaje sobre estas temáticas con las actividades propuestas? Justifica tu respuesta.
No mucho, porque me da mucha dificultad explicar y comprender de qué se tratan cada uno de los ejercicios.
5. Las actividades desarrolladas en clase con la temática de fracciones, ¿Te parecen muy apropiadas para mejorar tus conceptos acerca de este tema? Sí No
Justifica tu respuesta.
Ya que he aprendido más sobre el tema de los fraccionarios.
4. ¿Crees que con actividades de esta clase, puedes mejorar tu aprendizaje? Justifica tu respuesta.
Sí, ya que no tenía un concepto claro de fracciones, pero con esta actividad ya tengo más claro que es una fracción.

141	D: entonces, cómo lo solucionaste?
142	E: <u>sólo pensé en restarlo, o sea, por la , cómo, cómo le digo? ... uhmm no</u>
143	D: por qué?
144	E: <u>es que no entendí casi el ejercicio, no lo entendí bien</u>
145	D: qué no entendiste del ejercicio?
146	E: <u>como qué había que hacer, por eso hice una resta, porque no sabía, no más</u>
147	D: no sabías que identificar. Bueno, entonces, qué dificultades presentas en ese caso? o cuáles crees que son tus dificultades?
148	E: ... <u>no, pues, identificar los, los, o sea, las res, los proble, identificar los enunciados de los problemas</u>
149	D: qué más?
150	E: <u>... no saber cuál operación realizar</u>
151	D: qué más encuentras?
152	E: ... uhmmm, no más, no sé
153	D: y por qué crees que no eres capaz de hacer eso?
154	E: <u>no sé</u>
155	D: a qué se debe esas dificultades?
156	E: ...
157	D: o cómo podrías solucionar una de ellas?
158	E: no, no ...
159	D: tienes alguna forma?
160	E: ... no
161	D: por qué?
162	E: <u>no sé</u>

Epítome 3

En la epítome tres, se observó que la estudiante continuó avanzando en el nivel de su aprendizaje profundo, superando en gran medida la mayoría de las dificultades detectadas en las epítomes anteriores, aunque muestra cierta dificultad al verificar la solución encontrada, ya que no emplea otros métodos para confirmar la solución, o no distingue si todos los datos son pertinentes, tal como se refleja en lo resaltado con rojo en la siguiente ilustración:

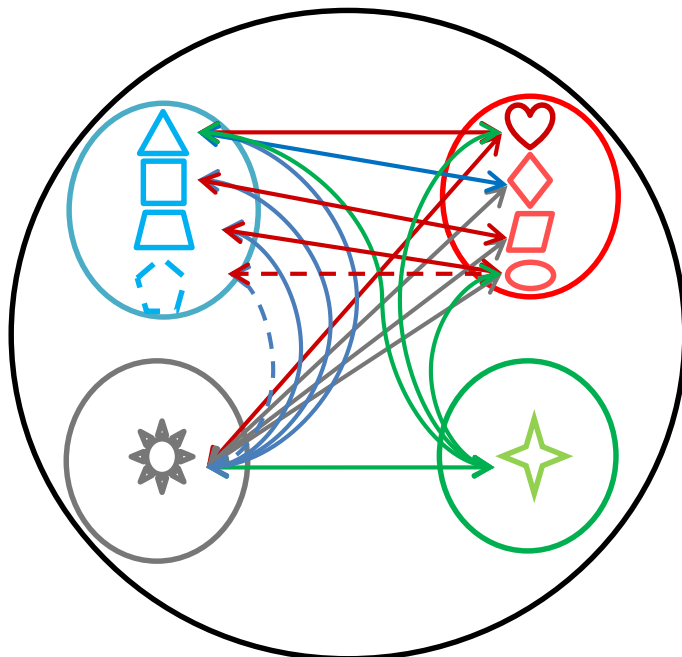


Ilustración 40. Fragmentos del cuestionario #3 y de la de la unidad didáctica, en la guía de actividad motivacional #2 de la estudiante E.

1.1. ¿Qué entendiste del problema anterior?

Que este proceso se trabaja con casos de estadística, y pensar en buscar... soluciones para resolver este procedimiento.

1.2. ¿Cuál(es) crees que es (son) la(s) estrategia(s) que debes utilizar para plantear una solución al problema? Justifica tu respuesta.

Mirar de que se trata el enunciado, con base a esto derivar algunas soluciones, las cuales podríamos plantear haciendo sumas, restas, multiplicaciones, hasta divisiones y fraccionarios etc....

1.5. ¿Tienes alguna forma de comprobar la solución del problema? Justifica tu respuesta.

Si se dice que hay 10 personas sob 6 de ellas consumen leche y 2 son mujeres osea que 4 serian hombres y pues el porcentaje más aproximado es 40% ya que 4 pueden ser hombres.

¿Cómo se sintieron nuevamente frente a esta actividad?

Muy bien ya que aprendimos más sobre fracciones y las diferentes formas de representallas

2. ¿Sabes si una fracción es mayor o menor que otra? ¿Por qué?

Porque si el denominador es más grande va ser menor la respuesta

Entre los obstáculos que superó se encuentra el reconocer el concepto de la temática planteada y una evolución conceptual en cuanto al uso y manejo de las razones y proporciones, ayudándole a identificar la mayoría de las representaciones semióticas, permitiéndole así comprender y analizar bien los problemas, diseñando y planificando la solución, y explorando caminos a ésta, lo que implicó una mejor regulación metacognitiva (ver numerales 4. y 5.) en el monitoreo, planeación y control de los objetivos específicos de una actividad como se evidencia en los numerales 2.4. y 3. del cuestionario #3 y en las líneas 162, 164, 170, 172 y 200 de la entrevista #3 de la ilustración 41.

Esta evolución tan notoria en todos los aspectos del aprendizaje en profundidad se debió en gran parte a que su interés por la temática desarrollada aumentó, como consecuencia de una apropiación y motivación intrínseca adquirida durante el desarrollo de la segunda intervención didáctica, a su vez, permeada por la interacción grupal con la estudiante que obtuvo el mejor desempeño en cada una de las actividades planteadas.

Ilustración 41. Apartados del cuestionario, de la entrevista semi-estructurada #3 y de la de la unidad didáctica, en la guía de actividad motivacional #2 de la estudiante E (D: docente; E: estudiante 4).

2.4. ¿Qué procedimiento es necesario para resolver el problema? Muestra a continuación los procesos utilizados.

Dividir $30 \overline{) 16}$
 $\begin{array}{r} 0:5 \\ \underline{0:5} \\ 11 \\ \underline{10} \\ 1 \end{array}$

y 5 es el denominador y el 1. es el numerador o sea el caramelo, entonces coji todos los valores de la tabla. Los sume y lleque a la respuesta.

3. Según la temática trabajada hasta el momento, ¿Cuáles han sido los nombres de las expresiones que se han trabajado en la clase y en los talleres? Define cada uno de ellos o represéntalos.

EXPRESION 1:	Los Graficos
EXPRESION 2:	fracciones y divisiones
EXPRESION 3:	decimales.
EXPRESION 4:	Proporciones, la Razon Etc....

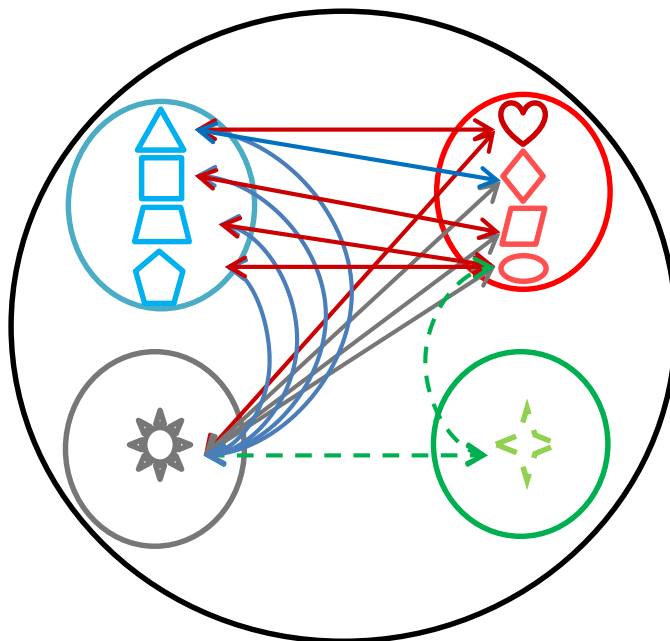
161	D: ehhh, como ya de pronto, ehhh, cuáles crees que han sido todos los temas que se han trabajado hasta el momento en todas las actividades que hemos hecho?, tanto en los talleres como las actividades o las prácticas en clase?
162	E: <u>fraccionarios, proporciones, divisiones, multiplicaciones, razones</u>
163	D: alguna otra?
164	E: <u>representaciones gráficas</u>
167	D: representación gráfica, podrías darme de pronto, una definición que tengas en el momento? de qué significa eso? o por qué se llaman así?
168	E: ... uhmmm no
169	D: no tienes alguna def, por ejemplo, cuando he querido definir la fracción es
170	E: la fracción es, uhmm uhmm, que la fracción es ... o sea, mientras más gran, más grande sea la, la fracción como menos, como menos que
171	D: menos qué?
172	E: <u>como en el problema de las chokolatinas, que mientras más grande era la fracción menos pedazos se podían comer</u>
173	D: menos pedazos se podían comer
193	D: ahhh bueno, y cuando los vas a resolver, cómo te sientes? o cuando lo estas resolviendo, cómo te sientes haciendo eso, esos pasos, esos procedimientos, esos procesos?
194	E: ehhh, <u>pues, bien, o sea, si, bien</u>
195	D: crees que has mejorado con respecto al principio?
196	E: <u>si (risas)</u>
197	D: mucho, poquito o nada?
198	E: <u>pues mucho</u>
199	D: y
200	E: <u>porque, porque no, no, no sabía bien como eran las fracciones, entonces, ya entendí más sobre las fracciones, todo esto</u>
211	D: te motivaron a aprender más este tipo de, de prácticas?
212	E: <u>si</u>

213	D: por qué crees que te
214	E: no sé, me ... o sea, <u>me, me gustó el tema de los fraccionarios</u>
215	D: si, y por, y qué más?
216	E: no, pues ...
217	D: por qué?
218	E: <u>pues porque ya los entendí (risas)</u>
219	D: y crees que de pronto, con estas actividades, es mucho más interesante de aprender o no es?
220	E: <u>si!, claro</u>
221	D: por qué?
222	E: <u>pues porque, van, cada vez van mejorando más</u>
223	D: y qué es mejorando más, de pronto?
224	E: o sea, másss ... pues más, más, o sea, se va ... pues <u>llegando a fondo sobre los temas</u>

4. ¿Crees que con actividades de esta clase, puedes mejorar tu aprendizaje? Justifica tu respuesta.
- Si, ya que no tenía muy claro las fracciones, pero al paso de nuevas actividades se va viendo más claro que es un fraccionario y como se pueden representar.
5. ¿Te gustó la actividad? Justifica tu respuesta.
- Si, ya que me quedaban más claros los temas con que tenía dificultad.

Epítome Final

Para el epítome final, se analizó que la estudiante logró un aprendizaje profundo de las razones y proporciones (Ver ilustración 42), consecuencia del avance obtenido en el componente cognitivo-lingüístico desde las representaciones semióticas, donde identificó la mayoría de las múltiples formas de representar un mismo objeto



matemático como se muestra en los numerales 1.1., 1.3. y 2.2., permitiendo que su habilidad en la resolución de problemas fuera más amplia en cada uno de los aspectos de este componente (comprensión y análisis del problema, diseño y planificación de una solución, exploración de rutas o caminos a la solución y verificación de la solución, ver numerales 1.2., 1.3. y 2.3.).

Además su regulación metacognitiva se consolidó, ya que monitorea el desarrollo de su actividad referenciando problemas desarrollados en la unidad didáctica, planeando y controlando sus procesos de aprendizaje como se observa en la línea 122 a 128 de la entrevista #4, en la ilustración 43, de acuerdo al nivel de dificultad encontrado en cada problema.

Ilustración 42. Segmentos del cuestionario final de la estudiante E.

1.1. ¿Qué temas recordaste para resolver el problema? ¿Escribelos

Razonamiento, multiplicación, fracciones etc...

¿Por qué crees que recordaste estos temas?

Porque el enunciado de la Actividad fue similar a uno que nos pusieron en Actividades pasadas

1.2. Al momento de resolver el problema, ¿pensaste en un camino a seguir o tenías una ruta? SI ___ NO ___

¿Por qué?

Pense en un camino a seguir ya que la primera respuesta que tenía en mente no me dio un resultado exacto.

Describe paso a paso cómo resolviste el problema:

16		2
8		2
4		2
2		2
1		2

2.2. Cuando se le presentan los datos del problema, ¿con qué otro(s) término(s) o nombre(s) conoces estas expresiones numéricas?

Fracciones, Simplificar, multiplicar, ración, adición, Sustitución etc...

2.3. Al abordar el problema, ¿qué entiendes por la expresión "menor opción de...?"

que entre más grande sea el denominador menos posibilidades tiene de ganar.

Por último, su motivación intrínseca constituyó un factor primordial para lograr un aprendizaje profundo en el tema de las razones y proporciones, brindándole la seguridad y confianza necesaria para desenvolverse óptimamente en esta temática como se evidencia en los recuadros en rojo de los numerales 4. y 5. de la ilustración 43; es de notar, que el componente epistemológico desde las concepciones y su evolución presentó algunas dificultades, ya que la estudiante reconocía el tema pero fue complejo para ella expresar un concepto claro y preciso (ver subrayado de las líneas 146 a 148 de la entrevista #4). Vale la pena señalar, que estas dificultades, pudieron ser causadas, en parte, a que la actividad final de la unidad didáctica se realizó después de transcurridos casi dos meses y medio de la última intervención didáctica, afectando posiblemente el nivel de recordación en la parte conceptual.

Ilustración 43. Fragmentos del cuestionario y la entrevista semi-estructurada final de la estudiante E (D: docente; E: estudiante 4).

4. Después de resolver los tres problemas anteriores, ¿Cómo consideras tu dominio en estas temáticas: Bueno o Malo?

Bueno

Da razones

Razón 1: Ya que Aprendí a Resolver más problemas de Rotación

Razón 2: en cada ejercicio hice un esbozo para mejorar

Razón 3: estuve pendiente de las dificultades para mejorarla

Razón 4: en cada clase ponía más atención para resolver más dificultades.

5. Cuando teiste por primera vez los problemas, ¿cómo te sentiste frente a ellos?

Bien, tenía idea de como eran y no tuve tantas dificultades como en actividades anteriores.

	D: y por ejemplo en este tercer problema, qué fue lo que entendiste del problema?
120	E: ehh, pues me puse, <u>yo creí que la respuesta era la B</u>
121	D: por qué?
122	E: <u>seis doceavos, eh, porque pues, uhmm contando los cuadros, pues así contándolos uno por uno, pero pues me di cuenta que no porque acá hay 12 ... pues acá hay 12, y que enton, o sea, sobrarían como éstos, entonces no</u>
123	D: y por qué escogiste
124	E: tendría que ser
125	D: este caso?
126	E: eh, eh
127	D: un tercio
128	E: <u>por lo, o sea, 3 filas y uno sólo coloreado</u>
145	D: no recuerdas, qué es una fracción?
146	E: <u>no pues, no, no sabría como, no, explicar</u>
147	D: dilo con tus propias palabras no importa
148	E: no pues que, que una fracción es, no <u>yo se, ...</u>
149	D: qué es una fracción?
150	E: no pues, yo no se
151	D: no te acuerdas?
152	E: <u>no</u>
169	D: ah, ya, y cuáles crees que de pronto, fueron los propósitos de este taller? o de lo, todos los talleres y actividades que hicimos en el año pasado y este año?
170	E: <u>pues haber aprendido más, mejorar las dificultades y entender mejor cada psss, cada ejercicio, cada actividad, taller, uhmm</u>
171	D: cuando dices mejorar cada dificultad, por ejemplo, cuáles fueron las dificultades que encontraste durante toodo este año, pues de las actividades, de todo, que hicimos el año pasado y este año? cuáles fueron tus dificultades?
172	E: ... como, cómo le digo?, pues <u>mis dificultades fueron como saber, como ... o sea, como relacionar el, el enunciado con, o sea, la, la pregunta con las, con las respuestas</u>
173	D: si
174	E: <u>y pues, a veces yo estudiaba bien la respuesta que era, pero ya, ya más o menos entiendo</u>

La estudiante E logró un aprendizaje en profundidad de las razones y proporciones, gracias a las intervenciones didácticas del docente (ayudas ajustadas y retroalimentación de los cuestionarios) y a la aplicación de la unidad didáctica con problemas prácticos y cotidianos a través del trabajo cooperativo, adquiriendo habilidades en algunos de los componentes estudiados durante el desarrollo de esta investigación, especialmente al reconocer todas las múltiples representaciones semióticas de las razones y proporciones. Se destaca el papel de su fuerte motivación intrínseca por aprender, mejorar y superar cada uno de los obstáculos identificados por ella misma durante el proceso investigativo.

Para poder evidenciar la evolución del aprendizaje en profundidad de la estudiante E, a continuación se encuentran los diferentes epítomes de la misma, en las cuales se muestran los cambios que se dieron en cada uno de los componentes y las relaciones que se establecieron entre ellos:

Gráfica 16. Esquema evolutivo en los componentes del aprendizaje profundo de la estudiante E.

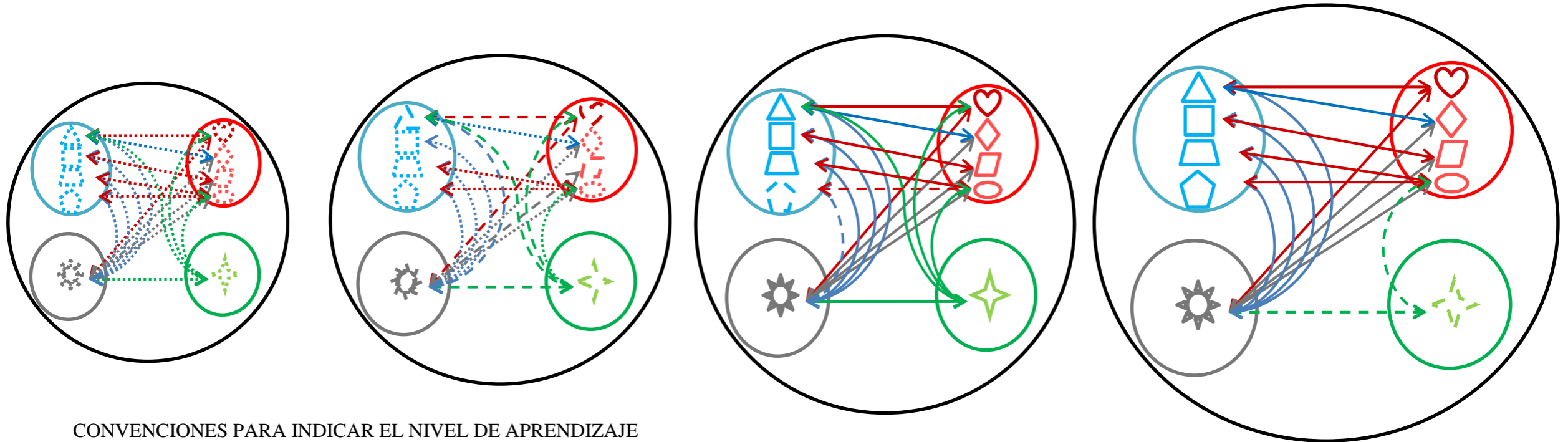
ESTUDIANTE E:

EPITOME INICIAL

EPITOME 2

EPITOME 3

EPITOME FINAL



CONVENCIONES PARA INDICAR EL NIVEL DE APRENDIZAJE

NIVEL BAJO (dotted line)

NIVEL MEDIO - - - - - (dashed line)

NIVEL ALTO _____ (solid line)

A continuación en la tabla 11, se resume la información recolectada y analizada en los diferentes instrumentos utilizados para la estudiante E en cada una de los epítomes mostradas en la siguiente gráfica:

Tabla 11. Resumen de la información recolectada a través de los diferentes instrumentos desarrollados durante la unidad didáctica para la estudiante E. Fuente: Autores.

		EPITOME INICIAL	EPITOME 2	EPITOME 3	EPITOME FINAL
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS	<i>Análisis y comprensión el problema</i>	No hay comprensión ni análisis del problema	Trata de analizar y comprender el problema	Comprende y analiza el problema	Comprende y analiza el enunciado del problema
	<i>Diseño y planificación de una solución</i>	No diseña ni planifica una solución	No diseña ni planifica la solución	Diseña y planifica la solución	Diseña y planifica una solución
	<i>Exploración de caminos o rutas a la solución</i>	No plantea caminos o rutas a la solución	No explora caminos o rutas a la solución	Explora caminos o rutas a la solución	Explora caminos o rutas a la solución
	<i>Verificar la solución</i>	No hay un proceso de verificación de los problemas	No verifica la solución	Trata de verificar la solución	Verifica la solución encontrada
MOTIVACIONAL-METACOGNITIVO	<i>Motivación intrínseca</i>	No muestra interés se siente confundida	Muestra algún interés en su proceso de aprendizaje	Está mucho más motivada por aprender	Tiene una gran motivación por aprender
	<i>Regulación metacognitiva</i>	Monitoreo	No monitorea el desarrollo de sus actividades y reconoce dificultades	Monitorea el desarrollo de una tarea	Monitorea sus procesos de aprendizaje

		Planeación	No planea el desarrollo de actividad	Intenta realizar una planificación para el desarrollo de una actividad	Planea el desarrollo de la actividad de acuerdo con los objetivos	Planea el desarrollo de una actividad
		Control	No evalúa los objetivos de una actividad	No existe un control sobre los objetivos de una actividad	Realiza un control de su proceso de aprendizaje y de los objetivos de una actividad	Evalúa y examina el desarrollo de los objetivos de una actividad
COGNITIVO-LIGÜÍSTICA	<i>Múltiples representaciones (semiótica)</i>		No hace uso ni distingue las diferentes representaciones	Identifica algunas formas de representación de un mismo objeto matemático	Reconoce la mayoría de las formas de representar un mismo objeto matemático	Reconoce varias de las formas de representar un mismo objeto matemático
EPISTEMOLÓGICA	<i>Concepciones sobre razones y proporciones y su evolución</i>		No reconoce ni identifica la temática planteada	Reconoce el concepto de la temática, pero no identifica cómo trabajar con ella	Evolucionan sus modelos conceptuales referenciando problemas vistos en la unidad didáctica	Muestra un concepto definido de la temática planteada

Para el presente apartado es válido reafirmar lo planteado en el trabajo desarrollado por Carmona y Jaramillo (2010) donde se plantea la eficacia de trabajar una unidad didáctica basada en la resolución de problemas, tal como se encontró en la presente investigación desde la teoría de Schoenfeld (1985), donde los estudiantes avanzaron en la comprensión y análisis de un problema, en su diseño, planificación y exploración de rutas o caminos a la solución, y la verificación de la solución encontrada, permitiendo una autonomía al momento de abordar un problema.

De igual forma es coherente con lo planteado en la investigación de Osorio Mansilla (2011) ya que es válido afirmar que el identificar las múltiples representaciones de un mismo objeto matemático, facilitan el aprendizaje de una temática y la aprehensión de un concepto, reconociéndolo en diversos contextos de representación y estableciendo procesos de modelización (Duval, 2004).

Se manifiesta de igual forma la importancia de la transposición didáctica, el saber y su epistemología, para poder contextualizarlo desde una situación problema, lo que facilita la evolución conceptual y el reconocer una temática, el hacer uso y manejo de un lenguaje, y en la comprensión y análisis de un problema (Gallego Cortés, 2010).

5.3. Resultados del análisis mixto

Para este análisis, es necesario resaltar la importancia de la implementación de la unidad didáctica basada en la resolución de problemas, originada fundamentalmente en la modelización de los resultados obtenidos en la modelización inicial de los estudiantes del grado 9°B de la Institución Educativa Ciudadela Cuba, estableciendo la relación que debe haber entre lo que sabe el estudiante y lo que necesita saber antes de aplicar la unidad didáctica sobre las razones y proporciones.

Estos avances se dieron principalmente por el trabajo cooperativo, donde cada estudiante tenía definido su rol, el cual fue rotativo dentro de las actividades grupales en la unidad didáctica. Aquí se observó que la cooperación entre pares favorece el aprendizaje, como se percibió en el trabajo grupal entre la estudiante E con la estudiante A, donde se presentó un gran avance en la estudiante E en cada uno de los componentes del aprendizaje profundo al tener una interacción permanente con un par de mejor nivel académico en la temática planteada. Estos avances se pueden observar en la gráfica 16 de la página 138 y en la filmación del anexo F (Vigotsky, 1989; Ausubel, Novak y Hanesian, 1978).

De igual modo, estos avances se dieron debido a que las actividades proporcionadas fueron guías muy claras con procedimientos secuenciales que describían paso a paso lo que el estudiante debía realizar para aprender a resolver problemas, que se supiera autorregular, que

conociera la temática e identificara las diversas formas de representar las razones y proporciones, así como la interacción grupal generó procesos positivos motivacionales hacia las tareas desarrolladas (véase anexo C). Las actividades propuestas fueron diseñadas por los autores de la presente investigación, en donde las preguntas planteadas por los docentes dentro de cada uno de los cuestionarios y entrevistas, como las planteadas por los estudiantes cumplieron un papel fundamental dentro de los procesos de aprendizaje profundo.

Es necesario resaltar, que las preguntas realizadas por los docentes en las actividades y cuestionarios de la unidad didáctica fueron preguntas abiertas que llevaron al estudiante a buscar y reordenar sus ideas, en donde éste utilizó sus conocimientos y los que se están planteando en cada actividad. También para la formulación de las preguntas, fue necesario tener en cuenta, lo dicho por Roca (2001), donde para plantear buenos interrogantes, se deben tener en cuenta tres aspectos: la necesidad de un contexto, la necesidad de dar indicios del modelo, teoría o conceptos implicados y la necesidad de plantear una demanda clara o coherente.

Un gran avance logrado fue en el desarrollo de las actividades partiendo de problemas cotidianos con el uso de materiales comunes como lo fueron las chocolatinas o las probetas (vasos) con cantidades diferentes de agua, elementos con los que se relacionan de forma permanente, con los cuales se pudo trabajar la temática estudiada. Esto implica que no se puede comprender al hombre sin su relación con el mundo ni al mundo sin su relación con el hombre (Husserl, 1893).

Otro aspecto relevante de la unidad didáctica fue las retroalimentaciones de los docentes (ayudas ajustadas), las cuales consistieron en apoyar y crear autonomía durante la aplicación de la unidad didáctica, delimitando dicha ayuda a medida que avanzaban las diversas etapas de esta unidad (ver filmaciones, anexo F). La condición básica para que la ayuda educativa sea eficaz y pueda realmente actuar como tal es, por tanto, la de que esa ayuda se ajuste a la situación y las características que, en cada momento, presente la actividad mental constructiva del alumno (Coll, 1990,1991).

Algo semejante ocurre con los avances logrados en términos del aprendizaje profundo en cada uno de los componentes del mismo. Desde la resolución de problemas, los estudiantes pasaron de comprender y analizar un problema siguiendo unos pasos propuestos por el docente, a proponer planteamientos heurísticos que permitieran no sólo comprender y analizar un problema, sino diseñar, planear, explorar caminos a la solución, y en ocasiones llegar a verificar la solución encontrada (ver ilustraciones 1, 4, 13, 26, 33, 40, 42) (Schoenfeld, 1985; Polya, 1965).

En el componente cognitivo-lingüístico desde las múltiples representaciones semióticas, los estudiantes en un inicio creían conocer una sola forma de representar un objeto matemático, y cuando se le mencionaban otras formas, suponían que se hablaba de otra temática. Al final, se logró que los estudiantes reconocieran varias formas de identificar las razones y proporciones, generando una mejor comprensión y análisis del problema planteado (ver ilustraciones 12, 24, 33, 41) (Duval, 1999; Godino, 2003).

En cuanto al elemento epistemológico desde las concepciones y su evolución, se evidenció que en un comienzo, muy pocos estudiantes reconocían la temática planteada y mucho menos tenían un concepto claro y cercano de lo que eran las razones y proporciones. Al culminar el proceso investigativo, los estudiantes lograron reconocer la temática y una evolución conceptual que le permitiera tener una definición clara, concisa y cercana al concepto científico (ver ilustraciones 23, 33, 40, 41, 42) (Vosniadou, 1994; Tamayo, 2009).

En el último componente de esta investigación, inicialmente la motivación se evidenció con actitudes de apatía, desinterés y falta de compromiso hacia el aprendizaje de las matemáticas por parte de los estudiantes, además era mínima la regulación metacognitiva de éstos hacia sus procesos de aprendizaje (García, 1991; Pozo y Gómez, 1998). Al concluir las actividades de la unidad didáctica, los estudiantes reflejaron gusto por las actividades desarrolladas, interés por aprender de forma profunda en muchas ocasiones el concepto de razón y proporción y sus múltiples representaciones, así como regularon sus procesos de aprendizaje logrando en parte un monitoreo, control y planeación de sus actividades que conllevan al aprendizaje de cierta temática (Flavell, 1979; Pozo, 2009). (Ver ilustraciones 11, 19, 26, 34, 41, 43).

Adicional a lo descrito en los hallazgos relacionados con el aprendizaje en profundidad, emergieron las siguientes categorías:

La primera categoría emergente fue la argumentación, ya que los estudiantes tuvieron la capacidad de relacionar datos y conclusiones, como se puede observar en la estudiante A cuando analiza y comprende los datos del problema y los relaciona diseñando una ruta para la solución haciendo uso de ejemplos cotidianos, permitiéndole llegar a una conclusión o verificación de la solución encontrada (ver análisis cualitativo de estudiante A en páginas 78 - 92). (Jiménez y Díaz, 2003).

La segunda categoría emergente fue la conciencia metacognitiva, y es considerada de ésta naturaleza porque no fue tomada en cuenta en la planeación de las actividades diseñadas, ya que se plantearon pensando tan solo en la regulación metacognitiva. Por ejemplo, en la estudiante E se puede observar que hace uso de sus propios recursos cognitivos, de acuerdo a los objetivos de la actividad, retomando el conocimiento adquirido en actividades pasadas de la unidad didáctica (el caso de la chokolatina) que le ayudaron a diseñar estrategias para solucionar un problema cognitivo efectivamente; este es el componente declarativo relativo al “saber qué” (ver análisis cualitativo de estudiante E, en las páginas 125 - 140 y en las ilustraciones 35, 41, 43) (Flavell, 1979).

En síntesis, se pudo corroborar la hipótesis planteada en el análisis cuantitativo, en el cual se demostró que la aplicación de una unidad didáctica basada en la resolución de problemas mejoró el aprendizaje profundo sobre las razones y proporciones en los estudiantes del grado noveno de la institución educativa Ciudadela Cuba de Pereira. Esto se puede evidenciar en los resultados obtenidos en la tabla 4 y en las gráficas 9 y 10, en donde se comprueba los avances

obtenidos por los estudiantes en términos del aprendizaje profundo de las razones y proporciones.

6. Conclusiones y recomendaciones

Del presente estudio se puede concluir que:

1. Realizar procesos de modelización iniciales permiten identificar las fortalezas y obstáculos de aprendizaje de los estudiantes, comprendiendo cómo y qué aprenden, para después con base en este análisis realizar intervenciones didácticas, las cuales irán disminuyendo a medida que el estudiante va ganando autonomía y una motivación intrínseca por aprender.
2. El papel de la unidad didáctica fue fundamental para el aprendizaje profundo de las razones y proporciones, ya que la enseñanza se llevó a cabo haciendo uso de problemas cotidianos y se llevaron a cabo actividades en clase con materiales de uso común. Este proceso se centro en brindar herramientas para el trabajo cooperativo y actividades que generaran autonomía y control sobre sus procesos de aprendizaje.
3. El trabajo cooperativo facilita los procesos de aprendizaje, ya que permite una mejor comprensión de la temática, por medio de la construcción colectiva de conocimiento entre pares, debido a que el trabajo en equipo con estudiantes de variadas características, aumenta el nivel de motivación y promueve el desarrollo de destrezas al resolver problemas.

4. Aprender por medio de resolución de problemas permite a los estudiantes desarrollar habilidades metacognitivas procedimentales y estratégicas que mejoran la comprensión y análisis de un enunciado, además de que los estudiantes pueden diseñar, planificar y explorar varias rutas para la solución de un problema, llegando a realizar procesos de verificación. Este componente podría adaptarse al trabajo de forma transversal en otros campos disciplinares como la biología, la química y la física (Tamayo, 2009, 2014).

5. En la resolución de problemas es importante que un estudiante logre verificar la solución de un problema, debido a que se requiere que pueda hacer uso de los conocimientos adquiridos y reconozca que al emplear diferentes caminos a la solución, logra llegar al mismo resultado encontrado en el proceso inicial; además, de que pueda identificar si todos los datos suministrados en un problema son pertinentes o adecuados para la solución del mismo. Este es un proceso de alta complejidad a nivel cognitivo y que requiere muchas intervenciones por parte del docente para que los estudiantes logren alcanzarlo.

6. El aprendizaje profundo busca el desarrollo de habilidades que le permiten la aprehensión del conocimiento en diferentes contextos. Se adquiere después de que el estudiante supera muchos de sus obstáculos durante el proceso de aprendizaje. Esto implica que el aprendizaje no es espontáneo o automático, sino que es un proceso lento que requiere del desarrollo de muchas actividades planeadas con este propósito y el uso de diferentes técnicas o instrumentos de enseñanza.

7. Se puede lograr un aprendizaje en profundidad en matemáticas, cuando el estudiante reconoce la importancia de un adecuado uso y manejo del lenguaje matemático estudiado, generándole inquietudes que cambian su modelo mental inicial, haciendo que evolucione su concepción acerca de la temática, alcanzando a identificar las múltiples transformaciones de las representaciones semióticas de un mismo objeto matemático.

8. Para que haya un aprendizaje en profundidad, el docente debe referenciar el error que comete el estudiante como un punto de partida y no como un castigo, ya que esto permite elaborar un diálogo interactivo entre el docente y el estudiante, identificando sus dificultades. Esto le permite al estudiante replantear sus concepciones por un lado, promoviendo una regulación entre lo que enseña el docente y lo que aprende el estudiante.

9. La motivación intrínseca en los estudiantes facilita el aprendizaje profundo de una temática, debido a que éstos se muestran interesados para llevar a cabo las actividades propuestas por el docente, permitiendo que el estudiante pueda identificar los obstáculos durante su proceso de aprendizaje y persistir en superarlos.

10. Cuando el estudiante distingue múltiples formas de representar un mismo objeto matemático, logra generar un concepto cercano al de la ciencia escolar. Esta pluralidad en un mismo término favorece sus procesos de regulación metacognitiva en el cómo desarrollar

determinada actividad, tarea o proceso, haciendo que su motivación hacia nuevos procesos de aprendizaje sea cada vez mayor, generándole confianza y seguridad en lo que hace; así como también se fortalece su capacidad de comprensión y análisis al momento de resolver un problema.

11. En esta investigación se pudo encontrar que los estudiantes, no solo lograron avanzar en los componentes del aprendizaje profundo propuestos inicialmente, sino que surgen otros componentes que potencian sus habilidades como la conciencia metacognitiva (saber qué) y la argumentación (relacionar datos-conclusiones).

De igual forma, se pueden plantear las siguientes recomendaciones:

12. Entre más actividades contextualizadas de trabajo cooperativo se realicen al manejar determinada temática, mayores serán los resultados positivos en el aprendizaje profundo de sus estudiantes, logrando que la mayoría de éstos aumenten su nivel de aprendizaje y su motivación bajo este trabajo cooperativo; todo esto enmarcado dentro de una unidad didáctica que fortalece los procesos de enseñanza y aprendizaje.
13. Los docentes de ciencias naturales deben enseñar no sólo mediante ejercicios repetitivos, que generan un proceso de aprendizaje memorístico y mecánico, sino haciendo uso de problemas

cotidianos que impliquen múltiples representaciones del objeto a estudiar y, procesos de autorregulación que generen una evolución conceptual del mismo.

14. Se recomienda trabajar en clases, haciendo uso de múltiples representaciones semióticas de una misma temática y el empleo de la resolución de problemas, ya que estas categorías son el eje central de las pruebas SABER, PISA Y TIMMS, lo que podría mejorar los resultados obtenidos en éstas pruebas.

15. Es fundamental que los docentes de cualquier área del saber, realicen procesos de retroalimentación durante sus intervenciones didácticas, ya que esto le permite a los estudiantes, reducir las dificultades encontradas durante el transcurso de la misma y logren superar muchos de los obstáculos de aprendizaje, afianzando así sus habilidades y motivación durante las actividades planteadas.

7. Bibliografía

Ausubel, David P.; Novak Joseph D. y Hanesian, Helen (1978). Educational Psychology. A cognitive view, 2º ed. New York: Holt, Rinehart y Winston (Trad. Cast. de M. Sandoval: Psicología educative, México: Trillas 1983).

Baptista L., Pilar. Fernández C., Carlos. y Hernández S., Roberto. (2006). Metodología de la Investigación. México: McGraw Hill.

Biggs, Jhon B. (1988). Assessing study approaches to learning. Australian Psychologist, 23, 197-206.

Briones, Guillermo (1996). Metodología de la investigación cuantitativa en las ciencias sociales. Programa de especialización en teoría, Métodos y técnicas de investigación social. ARFO Editores e Impresores Ltda.

Carmona D., Nidia L. y Jaramillo G., Dora C. (2010). El Razonamiento en el Desarrollo Del Pensamiento Lógico a través de una Unidad Didáctica Basada en el enfoque de Resolución de

Problemas. Universidad Tecnológica De Pereira. Trabajo de grado para optar al título de Magister en Educación.

Ceballos E., Edgar (2012). Una propuesta didáctica para la enseñanza de la proporcionalidad en el grado octavo de la Institución Educativa María Josefa Marulanda del municipio de La Ceja. Universidad Nacional de Colombia (Seccional Medellín). Trabajo de grado para optar al título de Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales.

Chevallard, Yves (1985). La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Coll, César (1990). Un marco de referencia psicológico para la educación escolar: la concepción constructivista del aprendizaje escolar y de la enseñanza. En C. Coll, J. Palacios y A. Marchesi (comps.): Desarrollo psicológico y educación, II. Psicología de la Educación. Madrid. Alianza.

Coll, César (1991). Constructivismo e intervención educativa: ¿Cómo enseñarlo que se ha de construir? Congreso Internacional de Psicología y Educación. Intervención Educativa». Madrid.

Corominas R. Enric., Tesouro C. Montse y otro. (2006). Vinculación de los enfoques de Aprendizaje con los intereses profesionales y los rasgos de personalidad. Aportaciones a la Innovación del proceso de Enseñanza y Aprendizaje en la Educación Superior. Revista de Investigación Educativa, 2006, Vol. 24, N° 2, págs. 443-473.

Duval, Raymond. (1999). Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. (Traducción de Miryam Vega). Cali: Universidad del Valle. Grupo de Educación matemática. p. 14-15.

Duval, Raymond. (2004). Semiosis y pensamiento humano. Cali, Colombia: Universidad del Valle, Instituto de educación y pedagogía. Grupo de Educación matemática.

Entwistle, Noel J. (1988). La comprensión del aprendizaje en el aula. Barcelona: Paidós/M.E.C. (Edic. orig.: 1987).

Esteban, P. Duarte, Vasco, E. y Bedoya, J. (2004). Los mapas conceptuales como herramienta de exploración del lenguaje en el modelo de van Hiele. The First International Conference on Concept Mapping.

Flavell, Jhon (1979). Metacognitive and cognition monitoring. *American Psychologist* (34), 906-911.

Galagovsky, Lidia y Adúriz-Bravo, Agustín (2001). Modelos y analogías en la enseñanza de las ciencias naturales: El concepto de modelo didáctico analógico. *Enseñanza de las Ciencias*, 19(2), 231-242.

Gallego C. Geoffrin N. (2010). La enseñanza del saber matemático en la universidad: estudio epistemológico, didáctico y textual en tres programas académicos de la Universidad Tecnológica de Pereira. Universidad Tecnológica de Pereira. Trabajo de grado para optar al título de Magister en Educación.

García, Emilio. (1991). “El programa de Filosofía para niños y el desarrollo de la meta cognición”, *Aprender a Pensar. Revista Internacional*, 4, 44-65.

García, Martínez Álvarez. (2004). Las actividades problémicas de aula, ACPA, como unidades didácticas que vinculan la historia de las ciencias en el trabajo de aula. VI Congreso Latinoamericano de Historia de las Ciencias. Buenos Aires (Argentina).

Garret, R. M. (1988). Resolución de problemas y creatividad: Implicaciones para el currículum de ciencias. *Enseñanza de las Ciencias*, 6, 224-230.

Godino, Juan D. (2003). *Teoría de las Funciones Semióticas. Un enfoque ontológico semiótico de la cognición e instrucción matemática*. Departamento de Didáctica de la Matemática Facultad de Ciencias de la Educación Universidad de Granada.

González D., María C. (2006). *Propuesta Didáctica para la Aplicación de la Enseñanza Basada en Problemas a la Formación Semi-presencial en la Disciplina de Geometría*. Instituto Superior Pedagógico “Enrique José Varona”. Ciudad de la Habana. Tesis presentada en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas.

Hernández S. Roberto, Fernández C. Carlos y Baptista L. Pilar. (2003). *Metodología de la Investigación*. Tercera Edición. México: Editorial Mc Graw Hill.

Husserl, Edmund. (1893). *Die Krisis der europäischen Wissenschaften und die transzendentale Phänomenologie*. Den Haag: M. Nijhoff, 1984 - *Zur Phänomenologie des inneren Zeitbewusstseins (1893-1917)*. Den Haag: M. Nijhoff, 1966.

ICFES. SABER 5° y 9° 2012. Cuadernillo de prueba, matemáticas. 9° grado calendario A. Ministerio de Educación Nacional. Bogotá, 2012.

ICFES. SABER 5° y 9° 2012. Cuadernillo de prueba, matemáticas. 9° grado calendario B. Ministerio de Educación Nacional. Bogotá, 2012.

Izquierdo, Mercé. (1999). Aportación de un modelo cognitivo de ciencia a la enseñanza de las ciencias. Ed. Enseñanza de las Ciencias, núm. extra.

Jhonson-Laird, Philip N. (1983). *Mental Models*. Cambridge, England: Cambridge University Press.

Jiménez Aleixandre, María P. y Díaz de Bustamante, Joaquín (2003). Discurso de aula y argumentación en la clase de ciencias: Cuestiones teóricas y metodológicas. Enseñanza de las ciencias. Investigación Didáctica. Pág. 359 – 370.

Jiménez Aleixandre, María P. (2010). *10 Ideas Clave. Competencias en argumentación y uso de pruebas*. Barcelona: Graó.

Lemke, Jay L. (1997). Aprender a hablar ciencia. Lenguaje, aprendizaje y valores. Barcelona: Temas de Educación Paidós.

Macedo, Beatriz., Katzkowicz, Raquel y Quintanilla, Mario (2006), “La educación de los derechos humanos desde una visión naturalizada de la ciencia y su ciudadanía a través de la educación científica, Unesco. P. 3.

Ospina G., Delma. (2012). Las representaciones semióticas en el aprendizaje del concepto de función lineal. Universidad Autónoma de Manizales. Trabajo de grado para obtener título de Magister en Educación.

Osorio M., Luz E. (2011). Representaciones semióticas en aprendizaje del teorema de Pitágoras. Universidad Autónoma de Manizales. Trabajo de grado para obtener título de Magister en Educación.

PISA 2003, Prueba de Matemáticas y de solución de problemas. Ministerio de Educación y Ciencias de España. Editorial INECSE. Madrid, 2005.

Polya, George (1965). Cómo plantear y resolver problemas. Serie de matemáticas. Ed. Trillas. México.

Pozo, Juan I. (2009). *Psicología del aprendizaje universitario: La formación en competencias*. Madrid. Ed. Morata.

Pozo, Juan I. y Gómez C., Miguel A. (1998). *Aprender y enseñar ciencias. Del conocimiento cotidiano al conocimiento científico*. Madrid. Ed. Morata.

Reigeluth, Charles. M. y Stein, Faith.S. (1983). *The Elaboration Theory of Instruction. Instructional design: theories and models: an overview of their current status*. Ed. C. M. Reigeluth. Hillsdale, New Jersey: L. Erlbaum. 335-381.

Rendón M., Paula A. (2009). *Conceptualización de la razón de cambio en el marco de la Enseñanza para la Comprensión*. Universidad de Antioquia. Trabajo de grado para obtener título de Magister en Educación.

Richard T., White. (1999). *Condiciones para un aprendizaje de calidad en la enseñanza de las ciencias. Reflexiones a partir del proyecto PEEL*. *Revista Investigación Didáctica, enseñanza de las ciencias*, 1999, 17 (1), 3-15.

Roca, Montserrat (2005). *Las preguntas en el proceso de enseñanza- aprendizaje de las ciencias*. *Revista Educar*: Abril- Junio 2005.

Rodríguez Q., Esther. (2005). Meta cognición, Resolución de problemas y Enseñanza de las Matemáticas. Una Propuesta Integradora desde el Enfoque Antropológico. Universidad Complutense de Madrid. Memoria presentada para optar al Grado de Doctor en Educación.

Rojas D., Yesenia A. (2006). Dificultades en la modelización didáctica del modelo biológico de flor. Un estudio de caso en la licenciatura de la educación básica, y énfasis en ciencias naturales y educación ambiental de la Universidad de Antioquia. Universidad de Antioquia. Trabajo de grado para optar al título de Magister en Educación.

Sanmartí, Neus e Izquierdo, Mercé. (1997). Reflexiones en torno a un modelo de ciencia escolar. *Investigación en la Escuela*, 32, pp. 51-62.

Schoenfeld, Allan H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. New York: Academic Press. Pág. XII.

Schoenfeld, Allan H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. A. Grows (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-370). NY: Macmillan.

Schoenfeld, Allan H. (1994). Reflections on doing and teaching mathematics. In A. H. Schoenfeld (Ed.), *Mathematical thinking and problem solving*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates. Pág. 60.

Solar B., Horacio. (2009). *Competencias de modelización y argumentación en interpretación de gráficas funcionales: propuesta de un modelo de competencia aplicado a un estudio de caso*. Universidad Autónoma de Barcelona. Trabajo de grado para optar al título de Doctor en didáctica de las Ciencia Experimentales.

Strauss, Anselm y Corbin, Juliet. (2002). *Bases de la investigación cualitativa. Técnicas y procedimientos para desarrollar la teoría fundamentada*. Editorial Universidad de Antioquia, diciembre de 2002. Pág. 12.

Tamayo A., Oscar E. (2006). *Representaciones semióticas y evolución conceptual en la enseñanza de las ciencias y las matemáticas*. Educación y pedagogía. Pág. 37-49.

Tamayo A., Oscar E. (2009). *Didáctica de las Ciencias: La evolución conceptual en la enseñanza y el aprendizaje de las ciencias*. Editorial Universidad de Caldas. Manizales.

Tamayo A., Oscar E., Suárez de la Torre, Mercedes, & García C., Ligia I. (2011). El aula Multimodal y la formación y evolución de conceptos científicos. Manizales: Blanecolor.

Tamayo A., Oscar.E.; Vasco U., Carlos E.; Suarez de la Torre, Mercedes; Quiceno V., Herminia; García C., Ligia I. y Giraldo O., Adriana M. (2011). La clase multimodal y la formación y evolución de conceptos científicos a través del uso de tecnologías de la información y la comunicación. Manizales: Universidad Autónoma de Manizales.



TIMSS 2007. Preguntas de Ciencias y Matemáticas. 4º Curso de Educación Primaria. Editorial TIMSS & PIRLS. Ministerio de Educación Gobierno de España. Madrid, 2011.

Vigotsky, Lev S. (1989). Pensamiento y lenguaje. Buenos Aires: La Pléyade. Pág. 133.

Vosniadou, Stella. (1994). Captura y modelación del proceso de cambio conceptual. Learning and instruction, 4, Pág. 45–69.

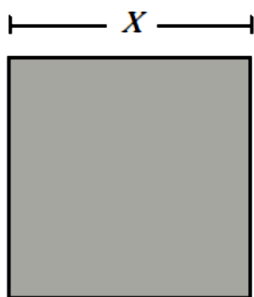
8. Anexos

ANEXO A.
CUESTIONARIOS

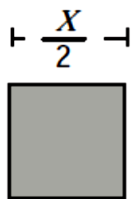
	UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA	
MACROPROYECTO: DIDÁCTICA DE LAS CIENCIAS	MAESTRÍA EN EDUCACIÓN	
MODELIZACIÓN DEL APRENDIZAJE EN PROFUNDIDAD DE RAZONES Y PROPORCIONES A TRAVÉS DE LA ENSEÑANZA BASADA EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS		
	LÍNEA: CIENCIAS NATURALES	FECHA: ____ / ____ / ____
TALLER N° 1		
ESTUDIANTE: _____	GRADO: 9°	CURSO: _____

INDICACIONES: *Apreciado Estudiante, a continuación usted encontrará una serie de preguntas que consta de **un** enunciado y **cuatro** opciones de respuesta, de las cuales **sólo una** es la correcta, la cual deberá marcar con una “X”. Luego de cada interrogante habrá una serie de cuestionamientos de cómo resolvió cada problema. Le agradecemos responder de la forma más **sincera** y **honesta** posible.*

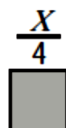
1. La siguiente es una secuencia formada por cuadrados. Las dimensiones de los lados se indican en cada figura.



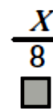
Cuadrado 1



Cuadrado 2



Cuadrado 3



Cuadrado 4



Cuadrado 5

¿Cuál es la medida del lado del cuadrado 5?

A. $\frac{x}{16}$

B. $\frac{x}{12}$

C. $\frac{x}{11}$

D. $\frac{x}{10}$

Con base en el problema anterior, responde las siguientes preguntas:

1.1. ¿Qué temas recordaste para resolver el problema? Escríbelos.

¿Por qué crees que recordaste estos temas?

1.2. Al momento de resolver el problema, ¿pensaste en un camino a seguir o tenías una ruta?

SI_____ NO_____

¿Por qué?

1.3. Describe paso a paso cómo resolviste el problema (Puedes usar dibujos, esquemas, narración, operaciones, procedimientos, diagramas):

2. En una sala de cine se organiza una rifa entre los asistentes a una de las funciones. Cada asistente marca la boleta de la entrada con sus datos y la introduce en una urna, al final de la función se extrae una boleta al azar. De los asistentes, $\frac{1}{6}$ son hombres adultos, $\frac{1}{5}$ son mujeres adultas, $\frac{1}{3}$ son niños y $\frac{3}{10}$ son niñas. Es menos probable que la rifa la gane

A. Una niña.

- B. Un niño.
- C. Una mujer adulta.
- D. Un hombre adulto

2.1. Cuando resuelves el problema, ¿pensaste en un camino a seguir o tenías una ruta? SI_____

NO_____

Da 3 pasos

Pasos 1: _____

Razón 2: _____

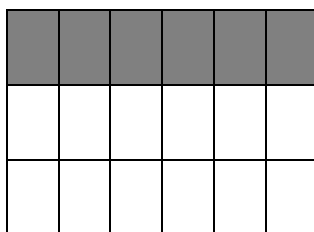
Razón 3: _____

2.2. Cuando se te presentan los datos del problema, ¿con qué otro(s) término(s) o nombre(s) conoces estas expresiones numéricas?

2.3. Al abordar el problema, ¿qué entiendes por la expresión “es menos probable...”?

2.4.¿Cómo puedes verificar que la opción que escogiste es la correcta? ¿tienes algún procedimiento para demostrarlo? Escríbelo.

3. ¿Cómo podrías representar el área sombreada en el siguiente esquema?



A. $\frac{1}{4}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{6}{12}$

D. $\frac{2}{3}$

3.1.Cuando terminaste de leer el enunciado del problema, ¿ideaste un camino a seguir o tenías una ruta? SI_____ NO_____

Escribe los pasos:

Paso 1: _____

Paso 2: _____

Paso 3: _____

3.2. En este esquema, ¿cómo hiciste para identificar el valor de área sombreada? Explica con tus propias palabras

*Por favor responda las siguientes preguntas de la forma más **sincera** y **honestamente** posible:*

4. Después de resolver los tres problemas anteriores, ¿Cómo consideras tu dominio en estas temáticas: Bueno o Malo?

Da 3 razones

Razón 1: _____

Razón 2: _____

Razón 3: _____

5. ¿Cuándo leíste por primera vez los problemas, ¿cómo te sentiste frente a ellos?

6. ¿Cuáles crees que fueron los propósitos de este taller?

**¡MUCHAS GRACIAS POR TU VALIOSA
COLABORACIÓN!**

	UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA	
MACROPROYECTO: DIDÁCTICA DE LAS CIENCIAS	MAESTRÍA EN EDUCACIÓN	
MODELIZACIÓN DEL APRENDIZAJE EN PROFUNDIDAD DE RAZONES Y PROPORCIONES A TRAVÉS DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS		
	LÍNEA: CIENCIAS NATURALES	FECHA: ____ / ____ / ____
TALLER N° 2		
ESTUDIANTE: _____	GRADO: 9°	CURSO: _____

INDICACIONES: *Apreciado Estudiante, a continuación usted encontrará una serie de preguntas que consta de **un** enunciado y **cuatro** opciones de respuesta, de las cuales **sólo una** es la correcta, la cual deberá marcar con una “X”. Luego de cada interrogante habrá una serie de cuestionamientos de cómo resolvió cada problema. Le agradecemos responder de la forma más **sincera** y **honesta** posible.*

1. A cuatro vasos que contienen volúmenes diferentes de agua se agrega una cantidad distinta de masa X de acuerdo con la siguiente tabla:

Vaso	Volumen de agua (ml)	Masa de X Adicionada (g)
1	20	5
2	60	15
3	80	20
4	40	10

En cada vaso se forman mezclas homogéneas. De acuerdo con la situación anterior, es válido afirmar que la concentración es:

- A. Mayor en el vaso 3

- B. Igual en los cuatro vasos
- C. Menor en el vaso 1
- D. Mayor en el vaso 2

Con base en el problema anterior, responde las siguientes preguntas:

1.1.¿Qué estrategia has planeado para la resolución el problema? Justifica tu repuesta.

1.2.¿Por qué esta estrategia es apropiada para resolver el problema? Justifica tu respuesta.

1.3.Describe paso a paso el procedimiento que realizaste para resolver el problema:

PASO 1: _____

PASO 2: _____

PASO 3: _____

PASO 4: _____

1.4.¿Cuáles son las dificultades que se te presentaron al resolver el problema?

DIFICULTAD 1: _____

DIFICULTAD 2: _____

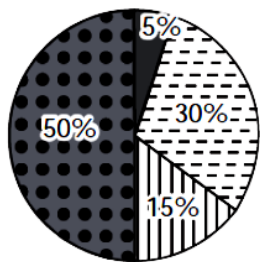
DIFICULTAD 3: _____

DIFICULTAD 4: _____

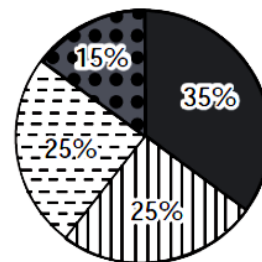
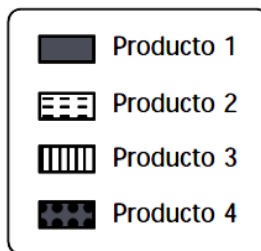
1.5.¿Tienes alguna forma de verificar la solución del problema? Justifica tu respuesta.

2. Una comercializadora vende cuatro clases de productos en dos ciudades. Durante una semana vendió 1.200 unidades de estos productos en la ciudad E y 800 unidades en la ciudad F. Las siguientes gráficas muestran los porcentajes de ventas en las dos ciudades.

Porcentaje de ventas ciudad E



Porcentaje de ventas ciudad F



¿Cuántas unidades del producto 2 fueron vendidas, en total, en la ciudad E?

- A. 100
- B. 240
- C. 360
- D. 480

2.1. ¿Qué información consideras es la más importante del problema?

Justifica tu respuesta:

2.2. ¿Cómo puedes verificar que la opción que escogiste es la correcta? Muestra el paso a paso.

PASO 1: _____

PASO 2: _____

PASO 3: _____

PASO 4: _____

2.3.¿Qué procedimiento es necesario para resolver el problema? Muestra a continuación los procesos utilizados.

3. ¿Cuáles crees que son los propósitos de esta actividad?

4. ¿Sientes que has mejorado tú aprendizaje sobre estas temáticas con las actividades propuestas? Justifica tu respuesta.

5. Las actividades desarrolladas en clase con la temática de fracciones, ¿Te parecen muy apropiadas para mejorar tus conceptos acerca de este tema? Sí. ____ No. ____

Justifica tu respuesta.

	UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA	
MACROPROYECTO: DIDÁCTICA DE LAS CIENCIAS	MAESTRÍA EN EDUCACIÓN	
MODELIZACIÓN DEL APRENDIZAJE EN PROFUNDIDAD DE RAZONES Y PROPORCIONES A TRAVÉS DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS		
LÍNEA: CIENCIAS NATURALES		FECHA: ____ / ____ / ____
TALLER N° 3		
ESTUDIANTE: _____	GRADO: 9°	CURSO: _____

*INDICACIONES: Apreciado Estudiante, a continuación usted encontrará una serie de preguntas que consta de **un** enunciado y **cuatro** opciones de respuesta, de las cuales **sólo una** es la correcta, la cual deberá marcar con una “X”. Luego de cada interrogante habrá una serie de cuestionamientos de cómo resolvió cada problema. Le agradecemos responder de la forma más **sincera** y **honesto** posible.*

1. Luego de realizar una encuesta se concluyó que de cada 10 personas, 6 consumen leche, y que, de las personas que consumen leche, 2 son mujeres. De acuerdo a los resultados de la encuesta, ¿cuál es el porcentaje de encontrar en un grupo de 10 personas a un hombre que consuma leche?

- A. 20%
- B. 30%
- C. 40%
- D. 80%

Con base en el problema anterior, responde las siguientes preguntas:

1.1. ¿Qué entendiste del problema anterior?

1.2. ¿Cuál(es) crees que es (son) la(s) estrategia(s) que debes utilizar para plantear una solución al problema? Justifica tu respuesta.

1.3. Describe paso a paso el procedimiento que realizaste para resolver el problema:

PASO 1: _____

PASO 2: _____

PASO 3: _____

PASO 4: _____

1.4. ¿Cuáles son las dificultades que se te presentaron al resolver el problema?

DIFICULTAD 1: _____

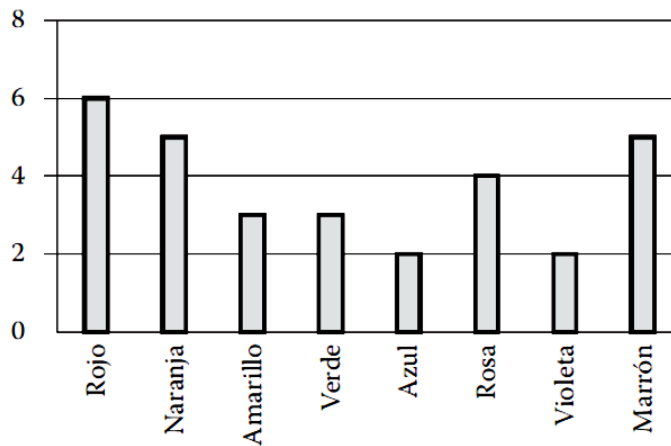
DIFICULTAD 2: _____

DIFICULTAD 3: _____

DIFICULTAD 4: _____

1.5. ¿Tienes alguna forma de comprobar la solución del problema? Justifica tu respuesta.

2. La madre de Valentina le deja escoger un caramelo de una bolsa. Ella no puede ver los caramelos. El número de caramelos de cada color que hay en la bolsa se muestra en el siguiente gráfico.



¿Cuál es la expresión numérica que mejor representa el que Valentina escoja un caramelo rojo?

A. $\frac{3}{30}$

B. $\frac{1}{5}$

C. $\frac{4}{28}$

D. $\frac{1}{15}$

2.1. ¿Qué información consideras es la más importante del problema?

2.2. Al momento de leer y resolver el problema, ¿Pensaste en un camino o ruta seguir?

SI____ NO____

Justifica tu respuesta.

2.3. ¿Crees que podrías resolver el problema de otra forma? SI____ NO____

Muestra el paso a paso.

PASO 1: _____

PASO 2: _____

PASO 3: _____

PASO 4: _____

2.4. ¿Qué procedimiento es necesario para resolver el problema? Muestra a continuación los procesos utilizados.

3. Según la temática trabajada hasta el momento, ¿Cuáles han sido los nombres de las expresiones que se han trabajado en la clase y en los talleres? Define cada uno de ellos o represéntalos.

EXPRESION 1: _____

EXPRESION 2: _____

EXPRESION 3: _____

EXPRESION 4: _____

4. En las actividades, talleres y prácticas desarrolladas en clase, ¿Cómo te sentías frente a ellos?

Justifica tu respuesta.

5. ¿Cómo calificarías tu rendimiento al trabajar con esta temática?

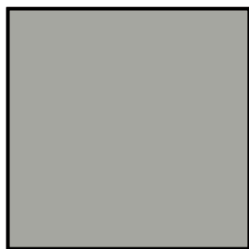
Justifica tu respuesta.

	UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA	
MACROPROYECTO: DIDÁCTICA DE LAS CIENCIAS	MAESTRÍA EN EDUCACIÓN	
MODELIZACION DEL APRENDIZAJE EN PROFUNDIDAD DE RAZONES Y PROPORCIONES A TRAVÉS DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS		
LÍNEA: CIENCIAS NATURALES		FECHA: ____ / ____ / ____
TALLER N° 4		
ESTUDIANTE: _____	GRADO: 10°	CURSO: _____

*INDICACIONES: Apreciado Estudiante, a continuación usted encontrará una serie de preguntas que consta de **un** enunciado y **cuatro** opciones de respuesta, de las cuales **sólo una** es la correcta, la cual deberá marcar con una “X”. Luego de cada interrogante habrá una serie de cuestionamientos de cómo resolvió cada problema. Le agradecemos responder de la forma más **sincera** y **honesto** posible.*

- ✓ La siguiente es una secuencia formada por cuadrados. Las dimensiones de los lados se indican en cada figura.

— X —



Cuadrado 1

— $\frac{X}{2}$ —



Cuadrado 2

— $\frac{X}{4}$ —



Cuadrado 3

— $\frac{X}{8}$ —



Cuadrado 4

— ? —



Cuadrado 5

¿Cuál es la medida del lado del cuadrado 5?

E. $\frac{x}{12}$

F. $\frac{x}{11}$

G. $\frac{x}{10}$

H. $\frac{x}{16}$

Con base en el problema anterior, responde las siguientes preguntas:

1.1. ¿Qué temas recordaste para resolver el problema? Escríbelos.

¿Por qué crees que recordaste estos temas?

1.2. Al momento de resolver el problema, ¿pensaste en un camino a seguir o tenías una ruta?

SI____NO____

¿Por qué?

1.3. Describe paso a paso cómo resolviste el problema:

2. En una sala de cine se organiza una rifa entre los asistentes a una de las funciones. Cada asistente marca la boleta de la entrada con sus datos y la introduce en una urna, al final de la función se extrae una boleta al azar. De los asistentes, $\frac{1}{6}$ son hombres adultos, $\frac{1}{5}$ son mujeres adultas, $\frac{1}{3}$ son niños y $\frac{3}{10}$ son niñas. ¿Cuál de los asistentes tiene *menor* opción de ganar la rifa?

E. Una niña.

F. Un hombre adulto

G. Un niño.

H. Una mujer adulta.

2.1. Al resolver el problema, ¿pensaste en un camino a seguir o tenías una ruta? SI_____

NO_____

Escribe los pasos que seguiste

Paso 1: _____

Paso 2: _____

Paso 3: _____

Paso 4: _____

- 2.2. Cuándo se te presentan los datos del problema, ¿con qué otro(s) término(s) o nombre(s) conoces estas expresiones numéricas?

- 2.3. Al abordar el problema, ¿qué entiendes por la expresión “menor opción de...”?

- 2.4. ¿Cómo puedes verificar que la opción que escogiste es la correcta? ¿tienes algún procedimiento para demostrarlo? Escríbelo.

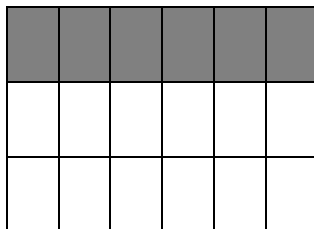
Paso 1: _____

Paso 2: _____

Paso 3: _____

Paso 4: _____

3. ¿Cómo podrías representar el área sombreada en el siguiente esquema?



E. $\frac{1}{4}$

F. $\frac{6}{12}$

G. $\frac{1}{3}$

H. $\frac{2}{3}$

3.1. Cuando terminaste de leer el enunciado del problema, ¿ideaste un camino a seguir o tenías una ruta? SI_____ NO_____

Escribe los pasos:

Paso 1: _____

Paso 2: _____

Paso 3: _____

Paso 4: _____

3.2. En este esquema, ¿cómo hiciste para identificar el valor de área sombreada? Explica con tus propias palabras

*Por favor responde las siguientes preguntas de la forma más **sincera** y **honestamente** posible:*

4. Después de resolver los tres problemas anteriores, ¿Cómo consideras tu dominio en estas temáticas: Bueno o Malo?

Da 4 razones

Razón 1: _____

Razón 2: _____

Razón 3: _____

Razón 4: _____

5. ¿Cuándo leíste por primera vez los problemas, ¿cómo te sentiste frente a ellos?

6. ¿Cuáles crees que fueron los propósitos de este taller?

**¡MUCHAS GRACIAS POR TU VALIOSA
COLABORACIÓN!**

ANEXO B.

ENTREVISTAS SEMI-ESTRUCTURADAS

	UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA	
MACROPROYECTO: DIDÁCTICA DE LAS CIENCIAS	MAESTRÍA EN EDUCACIÓN	
MODELIZACIÓN DEL APRENDIZAJE EN PROFUNDIDAD DE RAZONES Y PROPORCIONES A TRAVÉS DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS		
	LÍNEA: CIENCIAS NATURALES	FECHA: 31/ 01 / 2014
TRANSCRIPCIÓN DE LA ENTREVISTA SEMIESTRUCTURADA N° 1		
ESTUDIANTE: _____	GRADO: 10°	CURSO: _____

Motivación-Metacognición

1. ¿Te gustan las matemáticas?

a. En caso afirmativo:

- ✓ ¿Por qué? Da dos razones
- ✓ ¿Qué te llama la atención de las matemáticas? ¿por qué?
- ✓ ¿crees que las matemáticas han mejorado tus habilidades? Si o no ¿por qué?
- ✓ Si se siguen trabajando las clases utilizando procesos similares a los realizados durante la investigación (Talleres, practicas grupales, actividades grupales, exposiciones), ¿crees que mejorarían los procesos de enseñanza y aprendizaje?
¿Porque?

b. En caso negativo:

- ✓ ¿Por qué? Da dos razones
- ✓ ¿Cómo te sientes cuando tienes clase de matemáticas?
- ✓ ¿Estas predispuesto a 1) escuchar qué?, a 2) aprender, a 3) participar cuando es hora de la clase de matemáticas? Dame dos razones.
- ✓ Si las clases de matemáticas estuvieran relacionadas con la vida cotidiana, crees que te motivarías más a aprender ¿Por qué?

Resolución de problemas. Estas preguntas se les pueden realizar a los niños después de que resuelvan el taller, para profundizar en las respuestas que den al mismo.

2. ¿Comprendiste el enunciado del problema?

- ✓ Cuando terminaste de leer el enunciado del problema, ¿Planeaste algún camino o ruta para la solución? Cuál, cómo. Descríbela más profundamente.
- ✓ ¿Supiste que datos utilizar?
- ✓ Luego de terminar el problema, ¿Tienes alguna forma de verificar si tu solución fue la indicada? ¿Cómo?
- ✓ La solución que llevaste a cabo, ¿Siguió los pasos planeados al principio de la actividad?

Epistemológica también preguntarles después de realizar el taller.

3. ¿Sabes si los valores, esquemas, dibujos, datos que se presentan en el enunciado del problema, tienen alguna relación con temas que has visto anteriormente? (Se pregunta por varios conceptos al tiempo .Preguntarle caso por cada concepto frente a los datos dados en cada problema).

a. En caso afirmativo:

- ✓ ¿Cuéntame cuáles?
- ✓ Identificas que existen diferentes formas de expresar un mismo dato, esquema, dibujo. Cómo, cuáles.
- ✓ (Si el alumno llega a nombrar la palabra “fracción” o sus similares) ¿Conoces el significado de este término? Descríbalo, defínalo.
- ✓ ¿Aprendiste cómo diferenciar si una fracción es mayor o menor que otra? Describe como lo harías.

b. En caso negativo:

- ✓ ¿Por qué crees que no los entiendes?
- ✓ ¿Sabes la diferencia entre un valor, un esquema, un dibujo, un dato?
- ✓ ¿Puedes relacionar varios de ellos con un mismo valor?
- ✓ Volver a las preguntas orientadoras del caso afirmativo.

Cognitivo-Lingüístico también preguntarles después de realizar el taller.

4. ¿Distingues que operación(es) debe(s) realizar en el problema. Cuáles son?

a. En caso negativo:

- ✓ Sientes la necesidad de buscar ayuda. ¿Por qué?
- ✓ Volver a las preguntas orientadoras del caso afirmativo.

Muchas gracias por tu colaboración, es de gran importancia para nuestra investigación, en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

	UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA	
MACROPROYECTO: DIDÁCTICA DE LAS CIENCIAS	MAESTRÍA EN EDUCACIÓN	
MODELIZACION DEL APRENDIZAJE EN PROFUNDIDAD DE RAZONES Y PROPORCIONES A TRAVÉS DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS		
	LÍNEA: CIENCIAS NATURALES	FECHA: ____ / ____ / ____
ENTREVISTA SEMIESTRUCTURADA N° 2		
ESTUDIANTE: _____	GRADO: 9°	CURSO: _____

Resolución de problemas. Estas preguntas se les pueden realizar a los niños después de que resuelvan el taller, para profundizar en las respuestas que den al mismo.

1. ¿Comprendiste el enunciado del problema?

- ✓ Cuando terminaste de leer el enunciado del problema, ¿Planeaste algún camino o ruta para la solución? Cuál, cómo. Descríbela más profundamente.
- ✓ ¿Supiste que datos utilizar?

- ✓ Luego de terminar el problema, ¿Tienes alguna forma de verificar si tu solución fue la indicada? ¿Cómo?
- ✓ La solución que llevaste a cabo, ¿Siguió los pasos planeados al principio de la actividad?

Epistemológica también preguntarles después de realizar el taller.

2. ¿Sabes si la tabla datos que se presentan en el enunciado del problema, tienen alguna relación con temas que has visto anteriormente?

a. En caso afirmativo:

- 3. ¿Cuéntame cuáles?
- 4. ¿Crees que esta es la única forma de llegar a la solución? ¿Cuáles? Justifica tu respuesta.
- 5. ¿Cómo utilizarías las fracciones, razones o proporciones para relacionar el volumen y la masa de la tabla de datos? Justifica tu respuesta.

Cognitivo-Lingüístico también preguntarles después de realizar el taller.

3. ¿Distingues que operación(es) debe(s) realizar en el problema. ¿Cuáles son?

En caso negativo:

- ✓ Sientes la necesidad de buscar ayuda. ¿Por qué?
- ✓ Volver a las preguntas orientadoras del caso afirmativo.

Metacognición-Regulación.

4. ¿Te parece mejor esta estrategia para la solución del problema?

✓ ¿Qué dificultades fueron superadas al cambiar de estrategia?

En caso negativo:

✓ Sientes la necesidad de buscar ayuda. ¿Por qué?

✓ Volver a las preguntas orientadoras del caso afirmativo.

Muchas gracias por tu colaboración, es de gran importancia para nuestra investigación, en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

	UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA	
MACROPROYECTO: DIDÁCTICA DE LAS CIENCIAS	MAESTRÍA EN EDUCACIÓN	
MODELIZACION DEL APRENDIZAJE EN PROFUNDIDAD DE RAZONES Y PROPORCIONES A TRAVÉS DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS		
	LÍNEA: CIENCIAS NATURALES	FECHA: ____ / ____ / ____
ENTREVISTA SEMIESTRUCTURADA N° 3		
ESTUDIANTE: _____	GRADO: 9°	CURSO: _____

Resolución de problemas. Estas preguntas se les pueden realizar a los niños después de que resuelvan el taller, para profundizar en las respuestas que den al mismo.

1. ¿Comprendiste el enunciado del problema?

- ✓ Cuando terminaste de leer el enunciado del problema, ¿Planeaste algún camino o ruta para la solución?
- ✓ Cuál, cómo. Descríbela más profundamente.
- ✓ ¿Qué puedes analizar de él?
- ✓ ¿Qué pasos utilizaste para plantear esta solución?
- ✓ Luego de terminar el problema, ¿Sabes cómo plantear un camino o ruta para verificar que las respuestas a los problemas son las indicadas?

Epistemológica también preguntarles después de realizar el taller.

2. ¿Cuáles consideras que fueron las temáticas trabajadas hasta el momento?

b. En caso afirmativo:

- ✓ ¿Cuéntame cuáles?
- ✓ ¿Podrías identificarlas con otros nombres o formas? ¿Cuáles?
- ✓ ¿Qué conceptos tienes acerca de ellas? Justifica tu respuesta.

Cognitivo-Lingüístico también preguntarles después de realizar el taller.

3. ¿Distingues que operación(es) debe(s) realizar en el problema. ¿Cuáles son?

En caso negativo:

- ✓ Sientes la necesidad de buscar ayuda. ¿Por qué?
- ✓ Volver a las preguntas orientadoras del caso afirmativo.

Metacognición-Regulación.

4. ¿Cómo te sientes al leer cada uno de los enunciados? Justifica tu respuesta


- ✓ ¿Cómo te sientes al resolver los problemas? Explica
- ✓ ¿Crees que has mejorado alguna habilidad cuando se te plantean problemas como éstos?
¿Cuáles?
- ✓ ¿Qué dificultades fueron superadas al cambiar de estrategia?
- ✓ Las actividades que se plantearon en clase, ¿Te motivaron a aprender más con este tipo de prácticas? Justifica tu respuesta

En caso negativo:

- ✓ Sientes la necesidad de buscar ayuda. ¿Por qué?

- ✓ Volver a las preguntas orientadoras del caso afirmativo.

Muchas gracias por tu colaboración, es de gran importancia para nuestra investigación, en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

	UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA	
MACROPROYECTO: DIDÁCTICA DE LAS CIENCIAS	MAESTRÍA EN EDUCACIÓN	
MODELIZACION DEL APRENDIZAJE EN PROFUNDIDAD DE RAZONES Y PROPORCIONES A TRAVÉS DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS		
	LÍNEA: CIENCIAS NATURALES	FECHA: ____ / ____ / ____
ENTREVISTA SEMIESTRUCTURADA N° 4		
ESTUDIANTE: _____	GRADO: 10°	CURSO: _____

Motivación-Metacognición

1. ¿Te gustan las matemáticas?

En caso afirmativo:

- ✓ ¿Por qué? Da dos razones
- ✓ ¿Qué te llama la atención de las matemáticas? ¿por qué?
- ✓ ¿Crees que las matemáticas han mejorado tus habilidades? Si o no ¿por qué?
- ✓ Si se siguen trabajando las clases utilizando procesos similares a los realizados durante la investigación (Talleres, practicas grupales, actividades grupales, exposiciones), ¿crees que mejorarían los procesos de enseñanza y aprendizaje? ¿Por qué?

En caso negativo:

- ✓ ¿Por qué? Da dos razones
- ✓ ¿Cómo te sientes cuando tienes clase de matemáticas?
- ✓ ¿Estas predispuesto a 1) escuchar qué?, a 2) aprender, a 3) participar cuando es hora de la clase de matemáticas? Dame dos razones.
- ✓ Si las clases de matemáticas estuvieran relacionadas con la vida cotidiana, crees que te motivarías más a aprender ¿Por qué?

Resolución de problemas. Estas preguntas se les pueden realizar a los niños después de que resuelvan el taller, para profundizar en las respuestas que den al mismo.

2. ¿Comprendiste el enunciado del problema?

- ✓ Cuando terminaste de leer el enunciado del problema, ¿Planeaste algún camino o ruta para la solución?Cuál, cómo. Descríbela más profundamente.
- ✓ ¿Supiste que datos utilizar?
- ✓ Luego de terminar el problema, ¿Tienes alguna forma de verificar si tu solución fue la indicada? ¿Cómo?
- ✓ La solución que llevaste a cabo, ¿Siguió los pasos planeados al principio de la actividad?

Epistemológica también preguntarles después de realizar el taller.

3. ¿Sabes si los valores, esquemas, dibujos, datos que se presentan en el enunciado del problema, tienen alguna relación con temas que has visto anteriormente? (Se pregunta por

varios conceptos al tiempo .Preguntarle caso por cada concepto frente a los datos dados en cada problema).

En caso afirmativo:

- ✓ ¿Cuéntame cuáles?
- ✓ Identificas que existen diferentes formas de expresar un mismo dato, esquema, dibujo. Cómo, cuáles.
- ✓ (Si el alumno llega a nombrar la palabra “fracción” o sus similares) ¿Conoces el significado de este término? Descríbalo, defínalo.
- ✓ ¿Aprendiste cómo diferenciar si una fracción es mayor o menor que otra? Describe como lo harías.

En caso negativo:

- ✓ ¿Por qué crees que no los entiendes?
- ✓ ¿Sabes la diferencia entre un valor, un esquema, un dibujo, un dato?
- ✓ ¿Puedes relacionar varios de ellos con un mismo valor?
- ✓ Volver a las preguntas orientadoras del caso afirmativo.

Cognitivo-Lingüístico también preguntarles después de realizar el taller.

4. ¿Distingues que operación(es) debe(s) realizar en el problema. Cuáles son?

En caso negativo:

- ✓ Sientes la necesidad de buscar ayuda. ¿Por qué?
- ✓ Volver a las preguntas orientadoras del caso afirmativo.

Muchas gracias por tu colaboración, es de gran importancia para nuestra investigación, en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

ANEXO C.

GUIAS DE ACTIVIDAD

ASPECTOS DEL APRENDIZAJE PROFUNDO	ACTIVIDAD
<ul style="list-style-type: none"> • Epistemología. • Resolución de problemas. • Cognitivo-Lingüístico. • Motivación-Metacognitivo (Regulación). 	<p>Se saluda a los estudiantes y se hace una breve introducción de cómo se va a trabajar:</p> <ul style="list-style-type: none"> ➤ Los estudiantes se organizarán en grupos de 4 estudiantes, de acuerdo a los resultados obtenidos en el taller 1, donde cada alumno integrante del grupo tendrá un rol diferente, los cuales irán rotando su papel dentro del grupo de acuerdo al número de actividades. <p>Los roles y funciones para los integrantes de cada grupo serán:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Coordinador: quien dirija el orden de las actividades, su labor es importante para regular la realización de las actividades y la participación de cada uno de los integrantes para que el grupo funcione mejor. 2. Almacenista: destinado para el desarrollo de cada una de las actividades para el manejo y el cuidado del material que se le suministra y regulación del tiempo entre las actividades, su labor es importante para que haya un orden y una secuencia de las mismas. 3. Secretario: Quien lleve los registros; su labor es importante para recoger los datos, resultados y puestas en común que se lleven a cabo

dentro del grupo de trabajo.

4. **Expositor:** Encargado de contar las conclusiones que emiten con cada una de las actividades realizadas dentro del grupo de trabajo.

- El docente explica los diferentes roles dentro del equipo y pide que elijan su rol, y lo relacionen en el documento de la actividad a entregar.
- Se entregan los materiales a cada grupo: una chocolatina de 12 o 15 pastillas, una servilleta y la guía de actividad 1. Son cuatro guías diferentes, para que dos grupos trabajen la misma guía, para un total de ocho equipos. Al final se discutirán por cada dos grupos los resultados obtenidos en la guía de trabajo.
- Cada grupo resolverá los procesos indicados en la guía de trabajo 1, durante un tiempo de 45 minutos, cada uno desempeñando su rol dentro de su grupo, siendo el docente el que realizará las ayudas ajustadas pertinentes.
- Después los estudiantes que tengan el rol de expositor de los grupos que tengan la misma guía socializarán los resultados obtenidos a los dos grupos correspondientes, para observar si hay diferencias o similitudes en los aspectos más importantes desarrollados en su guía y determinar el porqué de las diferencias.
- Al final en conjunto los estudiantes retroalimentarán en el tablero la actividad realizada con el fin de llegar a un consenso del

concepto de fracción, razón, proporción, y el docente realizará las ayudas ajustadas pertinentes.

- Por último se realizarán preguntas para indagar el grado de motivación y regulación metacognitiva, las cuales responderán en una hoja que les entregará el docente (las preguntas ya están en la hoja y con espacio para que el estudiante la marque con su nombre, tales como: ¿Cómo se sintieron frente a esta actividad?, ¿Cuál fue el concepto que te quedó de fracción?, ¿Cuántas formas encontraste para representar una fracción?, ¿Crees que con actividades de esta clase, puedes mejorar tu aprendizaje?, ¿Te gustó la actividad? Justifica tu respuesta.

	UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA	
MACROPROYECTO: DIDÁCTICA DE LAS CIENCIAS	MAESTRÍA EN EDUCACIÓN	
MODELIZACION DEL APRENDIZAJE EN PROFUNDIDAD DE RAZONES Y PROPORCIONES A TRAVÉS DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS		
LÍNEA: CIENCIAS NATURALES		FECHA: ____ / ____ / ____
GUIA DE ACTIVIDAD N° 1		
COORDINADOR: _____	GRADO: 9°	CURSO: _____
ALMACENISTA: _____		
EXPOSITOR: _____		
SECRETARIO: _____		

Apreciados estudiantes, después de que cada uno escogió su rol dentro del grupo de trabajo, teniendo en cuenta la descripción de las funciones que cada uno debe cumplir, por favor, lean detenidamente las siguientes instrucciones para el desarrollo de la siguiente actividad:

1. Verifiquen que tengan los siguientes materiales: Hoja, chocolatina, servilleta, lápiz y borrador.
2. Tomen la chocolatina sin destaparla, ¿Cómo piensan ustedes que se podría representar la chocolatina que tienen?

3. 3. Destapen la chocolatina y obsérvenla, teniendo cuidado de NO partirla. ¿Creen ahora que la representación sería diferente a la anterior? SI___ NO__ Justifiquen sus respuestas.

4. Si tuvieran que partir la chocolatina en dos partes iguales, y tomar una de ellas, escriban como realizarían este procedimiento:

5. Escriban cómo podrían ilustrar numéricamente esta partición:

6. Por qué creen que esta es la manera correcta de mostrar esta expresión. Justifiquen sus respuestas.

7. Con mucho cuidado, tomen la chocolatina, y pártanla en dos partes iguales. Si toman una de las partes de la chocolatina, describan paso a paso el procedimiento que ilustre como resolvieron el problema:

8. Ahora tomen los DOS trozos de chocolatina y pártanlos a la mitad otra vez. Describan paso a paso como realizaron este nuevo proceso tomando sólo una de las partes respecto al total de los trozos de chocolatina:

Paso 1: _____

Paso 2: _____

Paso 3: _____

Paso 4: _____

9. Escriban cómo podrían ilustrar numéricamente esta partición:

10. Por qué creen que esta es la manera correcta de mostrar esta expresión. Justifiquen sus respuestas.

11. Nuevamente tomen todos los CUATRO trozos de chocolatina y pártanlos utilizando las divisiones que nos ofrece la chocolatina, hasta obtener sólo de a una pastilla. Si toman una sola pastilla de la chocolatina, describan paso a paso como realizaron este nuevo proceso:

Paso 1: _____

Paso 2: _____

Paso 3: _____

Paso 4: _____

12. Escriban cómo podrían ilustrar numéricamente esta partición:

13. Por qué creen que esta es la manera correcta de mostrar esta expresión. Justifiquen sus respuestas.

14. Representen las siguientes expresiones numéricas utilizando las pastillas de chocolatina para formar estas expresiones, y escriban lo observado en el papel:

$\frac{1}{2} =$
$\frac{2}{4} =$
$\frac{6}{12} =$
Al compararlas, ¿Qué pueden observar?

15. A las representaciones realizadas en los puntos anteriores, ¿Con qué temáticas las relacionan? Enúncielas y descríbelas brevemente

¡Muchas gracias por tu colaboración!

Ahora, si pueden disfrutar la chocolatina...

ASPECTOS DEL APRENDIZAJE PROFUNDO	ACTIVIDAD
<ul style="list-style-type: none"> • Epistemología. • Resolución de problemas. • Cognitivo-Lingüístico. • Motivación-Metacognitivo (Regulación). 	<p>Se saluda a los estudiantes y se hace una breve introducción de cómo se va a trabajar:</p> <ul style="list-style-type: none"> ➤ Los estudiantes se organizarán en los mismos grupos de 4 estudiantes que trabajaron en la guía de actividad 1, donde cada alumno integrante del grupo tendrá un rol diferente al que tuvo en la actividad anterior, rotando su papel dentro del grupo. <p>Los roles y funciones para los integrantes de cada grupo serán:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Coordinador: quien dirija el orden de las actividades, su labor es importante para regular la realización de las actividades y la participación de cada uno de los integrantes para que el grupo funcione mejor. 2. Almacenista: destinado para el desarrollo de cada una de las actividades para el manejo y el cuidado del material que se le suministra y regulación del tiempo entre las actividades, su labor es importante para que haya un orden y una secuencia de las mismas. 3. Secretario: Quien lleve los registros; su labor es importante

para recoger los datos, resultados y puestas en común que se lleven a cabo dentro del grupo de trabajo.

4. **Expositor:** Encargado de contar las conclusiones que emiten con cada una de las actividades realizadas dentro del grupo de trabajo.

- El docente recuerda los diferentes roles dentro del equipo y pide que elijan su rol diferente al de la actividad anterior, y lo relacionen en el documento de la actividad a entregar.
- Se entregan los materiales a cada grupo: una probeta de plástico (vaso), agua con tinta verde o roja, un marcador, algodón humedecido de alcohol, una regla, y la guía de actividad 2. Son dos guías diferentes, para que los grupos 1, 3, 5 y 7 trabajen la misma guía, así mismo los grupos 2, 4, 6 y 8 trabajen la otra guía. Luego compararán el grupo 1 con el 2, el 3 con el grupo 4, el 5 con el 6, el 7 con el 8, ya que serán ocho equipos y al final se discute con algunos grupos la guía de trabajo con los resultados alcanzados.
- Cada grupo resolverá los procesos indicados en la guía de trabajo 2, durante un tiempo de 45 minutos, cada uno desempeñando su rol dentro de su grupo, siendo el docente el que realizará las ayudas ajustadas pertinentes.
- Después algunos de los estudiantes expositores que tengan

	<p>la misma guía socializarán entre ellos mismos a todo el grupo, para observar si hay diferencias o similitudes en los aspectos más importantes desarrollados en su guía.</p> <ul style="list-style-type: none">➤ Al final en conjunto los estudiantes retroalimentarán la actividad realizada con el fin de llegar a un consenso del concepto de fracción, razón, proporción, y el docente realizará las ayudas ajustadas pertinentes.➤ Por último se realizarán preguntas para indagar el grado de motivación y regulación metacognitiva, las cuales responderán en una hoja, tales como: ¿Cómo se sintieron nuevamente frente a esta actividad?, ¿Sabes si una fracción es mayor o menor que otra? ¿Por qué?, ¿Mejoraste tus conocimientos acerca de cómo se representa una fracción?, ¿Te gustó la actividad? Justifica tu respuesta.
--	---

	UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA	
MACROPROYECTO: DIDÁCTICA DE LAS CIENCIAS	MAESTRÍA EN EDUCACIÓN	
MODELIZACION DEL APRENDIZAJE EN PROFUNDIDAD DE RAZONES Y PROPORCIONES A TRAVÉS DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS		
LÍNEA: CIENCIAS NATURALES		FECHA: ____ / ____ / ____
GUIA DE ACTIVIDAD N° 2		
COORDINADOR: _____	GRADO: 9°	CURSO: _____
ALMACENISTA: _____		
EXPOSITOR: _____		
SECRETARIO: _____		

Apreciado estudiante, después de que cada uno escogió su nuevo rol, teniendo en cuenta la descripción de las funciones que cada uno debe cumplir dentro del grupo, por favor, lea detenidamente las siguientes instrucciones para el desarrollo de la siguiente actividad:

1. Verifiquen que tengan los siguientes materiales: Hoja, probeta de plástico (vaso), agua ROJA, algodón humedecido con alcohol, un marcador, una regla, lápiz y borrador.
2. Tomen la probeta de plástico (vaso), y ¿Cómo piensan ustedes que se podría representar la probeta que tienen? Planteen varias formas o procesos.

3. Usando la regla, tomen la distancia de altura que tiene la probeta. Ahora hagan pequeños guiones (líneas) sobre la probeta con el marcador dividiendo esta altura en TRES partes iguales. ¿Creen ahora que la representación sería diferente a la anterior? SI___ NO___ Justifiquen sus respuestas.

4. Ahora llenen con el agua de tinta ROJA hasta la primera línea la probeta, y escriban como realizarían este procedimiento:

5. Escriban cómo podrían ilustrar NUMÉRICAMENTE el llenado de la probeta que tienen:

6. Por qué creen que esta es la manera correcta de mostrar esta expresión. Justifica tu respuesta.

7. Con mucho cuidado, van a tomar su probeta y van a compararla con el grupo con el que van a realizar esta comprobación. ¿Qué pueden observar en cada llenado de la probeta?

8. Ahora, revisen su EXPRESIÓN NUMÉRICA y compárenla con la del grupo que les correspondió contrastar. Comparando estas expresiones, ¿Cuál creen que es mayor entre estas expresiones: la de ustedes o la de los otros? _____

Danos cuatro razones:

RAZÓN 1: _____

RAZÓN 2: _____

RAZÓN 3: _____

RAZÓN 4: _____

9. De acuerdo a lo visto en las probetas y en las expresiones numéricas que escribieron cada uno de los dos grupos en los puntos 7 y 8, ¿Qué pueden concluir?

10. Ahora vuelvan nuevamente a los grupos iniciales de cuatro integrantes, y tomen la probeta y con el algodón mojado en alcohol borren los guiones (líneas) iniciales. Ahora hagan de nuevo pequeños guiones (líneas) sobre la probeta con el marcador dividiéndola en SEIS partes iguales. Después, llenen con el agua de tinta ROJA hasta la segunda línea la probeta, y describan paso a paso como realizaron este nuevo procedimiento hasta el llenado solicitado:

Paso 1: _____

Paso 2: _____

Paso 3: _____

Paso 4: _____

11. Escriban cómo podrían ilustrar NUMÉRICAMENTE el llenado de la probeta que tienen:

12. Por qué creen que esta es la manera correcta de mostrar esta expresión. Justifica tu respuesta.

13. ¿Qué piensan del nuevo nivel de agua en la probeta (vaso) con respecto al que les correspondió realizar en el punto número 4?

14. Escriban cómo podrían ilustrar NUMÉRICAMENTE esta comparación:



15. ¿Por qué creen que esta es la manera correcta de mostrar esta expresión? Justifica tu respuesta.

16. A las representaciones realizadas en los puntos anteriores, ¿Con qué temáticas las relacionan? Enúncienlas y descríbanlas brevemente

¡Muchas gracias por tu colaboración!

ANEXO D.

GUIAS MOTIVACIONALES

	UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA	
MACROPROYECTO: DIDÁCTICA DE LAS CIENCIAS	MAESTRÍA EN EDUCACIÓN	
MODELIZACIÓN DEL APRENDIZAJE EN PROFUNDIDAD DE RAZONES Y PROPORCIONES A TRAVÉS DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS		
	LÍNEA: CIENCIAS NATURALES	FECHA: ____ / ____ / ____
GUIA DE ACTIVIDAD N° 1		
ESTUDIANTE: _____	GRADO: 9°	CURSO: ____

INDICACIONES: Apreciados estudiantes, respondan de la manera más **honesta y sincera** posible las siguientes preguntas.


1. ¿Cómo se sintieron frente a esta actividad?

2. ¿Cuál fue el concepto que te quedó de fracción?

3. ¿Cuántas formas encontraste para representar una fracción?

4. ¿Crees que con actividades de esta clase, puedes mejorar tu aprendizaje? Justifica tu respuesta.

5. ¿Te gustó la actividad? Justifica tu respuesta.

	UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA	
MACROPROYECTO: DIDÁCTICA DE LAS CIENCIAS	MAESTRÍA EN EDUCACIÓN	
MODELIZACION DEL APRENDIZAJE EN PROFUNDIDAD DE RAZONES Y PROPORCIONES A TRAVÉS DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS		
LÍNEA: CIENCIAS NATURALES		FECHA: ____ / ____ / ____
GUIA DE ACTIVIDAD N° 2		
ESTUDIANTE: _____	GRADO: 9°	CURSO: _____

INDICACIONES: Apreciados estudiantes, respondan de la manera más honesta y sincera posible las siguientes preguntas.

1. ¿Cómo se sintieron nuevamente frente a esta actividad?

2. ¿Sabes si una fracción es mayor o menor que otra? ¿Por qué?

3. ¿Mejoraste tus conocimientos acerca de cómo se representa una fracción?

4. ¿Crees que con actividades de esta clase, puedes mejorar tu aprendizaje? Justifica tu respuesta.

5. ¿Te gustó la actividad? Justifica tu respuesta.

ANEXO E.

ANÁLISIS DE DATOS

(Ver CD)

ANEXO F.

AUDIOS, FILMACIONES, TRANSCRIPCIONES

(Ver CD)

ANEXO G.

IMÁGENES DE CUESTIONARIOS Y GUÍAS

(Ver CD)