UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA
MAESTRIA EN ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

ALGUNAS PROPIEDADES DEL ESPECTRO PRIMO EN MV-ÁLGEBRAS

JORGE HELI LÓPEZ NÚÑEZ

PEREIRA, Junio 2012

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA
MAESTRIA EN ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

ALGUNAS PROPIEDADES DEL ESPECTO PRIMO DE LAS MV-ÁLGEBRAS

Trabajo presentado para optar el título de :
MAGISTER EN ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

JORGE HELI LÓPEZ NÚÑEZ

Director:
Dr. YURI ALEXANDER POVEDA QUIÑONES

PEREIRA, Junio 2012

Nota de aceptación:

Firma del jurado

Firma del jurado

Firma del director

Pereira, Junio 2012

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a mi esposa, a mi madre y a mi hermano por su apoyo incondicional, al profesor Leonardo Prieto Sanabria por mostrarme el camino a seguir, a la Ms.C. María del Carmen Beltrán Ibarra por su constante apoyo, consejos y enseñanzas en mi labor profesional.

Finalmente quiero dar un agradecimiento especial a mi asesor, el Ph.D. Yuri Alexander Poveda Quiñones, por sus conocimientos invaluables, sus consejos y constante motivación para llevar a cabo esta tesis, y sobre todo su gran paciencia para esperar a que este trabajo pudiera llegar a su fin.

RESUMEN

Los siguientes son los aportes del trabajo:

1. Se establecen condiciones para expresar algunas propiedades y resultados de la teoría anillos conmutativos con unidad en términos de MV- Álgebras, en particular se dan las condiciones necesarias para inducir epimorfismos entre espectros primos de MV-Álgebras.

2. Se realiza una nueva demostración de la caracterización de los ideales primos de la MV-álgebra libre $free_2$ desde una perspectiva geométrica más simple que la empleada en [2]

3. Se realiza una demostración conjuntista de la compacidad del espectro co-primo de las MV-álgebras que fue demostrada en [6] desde una perspectiva categórica.

4. En los anexos se estudian las propiedades y los conceptos básicos de las MV-álgebras, como el orden, los homomorfismos y los ideales mediante ejemplos que facilitan al lector que inicia en el estudio de esta teoría matemática, comprender de una forma clara y rápida los fundamentos de esta estructura algebraica.

Índice general

Índice de figuras

Introducción

Cada día el álgebra y la lógica desarrollan y amplían nuevas teorías en todos los campos del conocimiento y especialmente dentro de ellas mismas, en este aspecto han sido campos de acción muy importantes dentro de la matemática, durante el último siglo algunos de los grandes logros han sido desarrollados precisamente en estas áreas. En 1917 el matemático polaco Jan Lukasiewicsz estudió sistemas lógicos con múltiples valores de verdad, considerándolos desde el punto de vista semántico, así propuso un sistema deductivo sencillo y conjeturó que de él podrían deducirse todas las tautologías de su lógica. A lo largo del siglo XX se establecieron pruebas de esta conjetura, algunas de las cuales emplean MV-álgebras.

En la década del 60 Chen Chung Chang introdujo el concepto de MV-álgebra con el fin de proponer una prueba algebraica del teorema de completitud del cálculo infinito-valente propuesta en 1930 por Lukasiewicz y Tarsky, con valores de verdad en el intervalo [0,1] y vinculó las MV-álgebras totalmente ordenadas con los grupos abelianos totalmente ordenados [3] ; posteriormente Mundici extiende esta vinculación y define una equivalencia categorial entre la clase de los grupos reticulados o l-grupos con unidad y la de las MV-álgebras.

Una MV-álgebra es una estructura $A =< A; \oplus, \neg, 0 >$ donde A es un conjunto no vacío, $\oplus$ es una operación binaria, $\neg$ una operación unaria y 0 una constante, que además satisfacen los siguientes axiomas: $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$, $x \oplus y = y \oplus x$, $x \oplus 0 = x$, $\neg\neg x = x$, $x \oplus \neg 0 = \neg 0$, $\neg(\neg x \oplus y) \oplus y = \neg(\neg y \oplus x) \oplus x$

Las MV-álgebras son las álgebras de la lógica difusa; el álgebra de términos con n variables es la MV-álgebra libre con n generadores. McNaughton demostró que el álgebra de términos con n variables es isomorfa a la MV-álgebra de funciones (lineales a trozos) de McNaughton en n variables [3], resultado que conectó el álgebra de la lógica difusa con la geometría: cada fórmula corresponde a un conjunto de simplex dentro del n-cubo [0,1].

El Álgebra conmutativa es el campo de estudio de los anillos conmutativos, sus ideales, módulos y álgebras. Es una materia fundacional tanto para la geometría algebraica como para la teoría algebraica de números. Los resultados del álgebra juegan un papel cada vez más destacado en diferentes áreas del conocimiento. Además esta cumple una doble función dentro de la Matemática, la de de servir de vínculo entre ramas poco homogéneas de esta ciencia y la de un área de investigación con muchos campos dentro de sí misma, de esta manera la teoría de anillos debe servir como mecanismo para interactuar con otras estructuras algebraicas, así como otras ramas de las matemáticas.

Un anillo es una terna $(a, +, \bullet)$ tal que: $(A, +)$ es un grupo abeliano, $(A, \bullet)$ es un semigrupo y el producto es distributivo respecto de la suma. Si además existe elemento neutro 1 (o unidad) del producto, el anillo se dice unitario, y si el producto es conmutativo se trata de un anillo conmutativo (puede ser ambas cosas, que es el caso más corriente, y entonces se trata de un anillo conmutativo con unidad).

En los últimos 10 años se han venido adelantando trabajos que han establecido bases para relacionar las MV-álgebras con los Anillos Conmutativos con Unidad [7] . En el árticulo de Eduardo J. Dubuc y Yuri A. Poveda [6] , se estableció una teoría de representación, desde la teoría de topos clasificantes , para las MV-álgebras. Se demostró que toda MV-álgebra es isomorfa a las secciones globales del haz cadena de secciones locales sobre el espectro primo asociado a la topología Co-Zariski. Esta construcción se realizó siguiendo las mismas ideas de la geometría algebraica, aplicada a la teoría de anillos conmutativos con unidad. Los resultados obtenidos son completamente análogos; si en la teoría de anillos conmutativos se construyeron los espacios anillados, en las MV-álgebras se construyeron MV-espacios y se estableció un isomorfismo entre estos espacios y la categoría de MV-álgebras. Existen más propiedades de la teoría de anillos conmutativos con unidad que se pueden traducir a propiedades de las MV-álgebras.

El espectro primo de una MV-álgebra es el espacio topológico definido sobre sus ideales primos con la topología Co-Zariski, en la cual los abiertos son los cerrados correspondientes a la conocida topología de Zariski definida en el espectro primo de los anillos conmutativos con unidad. Esta construcción es importante porque permite transferir problemas y resultados obtenidos en anillos conmutativos con unidad a representarlos en el ámbito de las MV-álgebras y viceversa.

El espectro primo de una anillo conmutativo con unidad, así como el de las MV-álgebras son espacios topológicos compactos T_0; además ambos espectros son espacios T_2 si y solo si, cada ideal primo es maximal. En tal sentido este trabajo busca establecer una condición sobre los homomorfismos de MV-Álgebras con espectro T_2 para que los morfismos inducidos en la categoría de espacios compactos Hausdorff sean epimorfismo, de manera similar a las condiciones encontradas en el artículo *"Algunos Epimorfísmos entre Espectros Primos de Anillos Conmutativos"* y se establece un paralelo entre las demostraciones dadas para anillos y su posible analogía en el universo de las MV-Algebras. De igual manera busca profundizar en la estructura de los ideales primos no maximales de las álgebras libres de la teoría de las MV-álgebras.

En 2005, Busaniche y Mundici [2] caracterizarón los ideales primos no maximales de las MV-álgebras libres $free_n$, desde un enfoque algebraico y combinatorio, en 2011, Osorio [9] estableció que todo ideal primo no maximal de $free_1$ es de la forma $I_{x_0^+} = \{f \in free : f(x) = 0 \; \forall x \in [x_0, x_0 + \epsilon]\}$, donde $x_0, x_0 + \epsilon \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ y $\epsilon > 0$ y

$I_{x_0^-} = \{f \in free : f(x) = 0 \; \forall x \in [x_0 - \epsilon, x_0]\}$, donde $x_0, x_0 - \epsilon \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$ y $\epsilon > 0$. En el presente trabajo se busca hacer la misma representación para el caso $free_2$ con un enfoque geométrico, teniendo en cuenta que de esta forma se pueden establecer notaciones y ejemplos accequibles a un mayor público, y poder generalizar en un trabajo posterior el caso $free_n$.

En síntesis el trabajo esta divido en 4 capítulos: en el primero se estudian conceptos básicos y algunas propiedades de las MV-álgebras, el cual se complementa con los apéndices donde se ven aspectos como el orden, los homomorfismos , los ideales y se establecen ejemplos que permiten comprender de una forma clara y rápida los fundamentos de esta estructura algebraica. En el segundo se establecen condiciones necesarias y suficientes para expresar algunas propiedades y resultados ya demostrados en anillos conmutativos con unidad en términos de MV-álgebras, así como las condiciones necesarias para inducir epimorfísmos en espectros primos de MV-álgebras. En el tercero se realiza una nueva demostración de la caracterización de los ideales primos de la MV-álgebra libre $free_2$ desde una perspectiva geométrica más simple que la empleada en el artículo Geometry of Robinson consistency in Lukasiewicsz logic de Manuela Busaniche y Daniele Mundici para las MV-álgebras libres $free_n$ a través de los k-simplex, de esta manera se pretende dar una caracterización y una introducción al estudio de las MV-álgebras libres en un lenguaje mas sencillo y gráfico que facilite la introducción a este tema a personas con conocimientos básicos de álgebra. Finalmente en el cuarto se demuestra la compacidad del espectro primo de las MV-álgebras de manera conjuntista sin emplear la teoría de categorías como se hizo en [6]. Esto con el objeto de que los no especialistas en teoría de categorías puedan ver su demostración.

A lo largo del trabajo se presentan algunas analogías y diferencias de resultados clásicos en anillos conmutativos y sus correspondientes versiones en el universo de las MV-álgebras, este conjunto de analogías y diferencias muestran que es posible encontrar un gran número de resultados similares con otras estructuras algebraicas, al realizar un trabajo más profundo sobre el espectro primo de las MV-álgebras, que el propuesto hasta ahora en la literatura para obtener dentro de las MV-álgebras más propiedades correspondientes a la geometría algebraica clásica y además al poder trasladar resultados conocidos en anillos a las MV-álgebras dar inicio a lo que podríamos llamar geometría algebraica multivaluada.

Capítulo 1

Nociones Básicas

En la década del 60 C.C. Chang introdujo el concepto de MV-álgebra con el fin de proporcionar una prueba algebraica del teorema de completitud del cálculo infinitovalente propuesto en 1930 por Lukasiewicz y Tarsky, con valores de verdad en el intervalo de números reales [0,1] y vinculó las MV-álgebras totalmente ordenadas con los grupos abelianos totalmente ordenados. Una referencia estándar para MV-álgebras es Cignoli, D'ottaviano, Mundici [3] y para anillos conmutativos es M. Atiyah, I.G. Macdonald [1]

Las siguientes definiciones son equivalentes a las definiciones originales de Chang y hacen parte del Folklore de la teoría de MV-álgebras, las recordamos en esta sección porque son necesarias para este trabajo. De manera análoga en el desarrollo de los apéndices se realizan ejemplos que permiten clarificar los conceptos y que son tan escasos en la bibliografía existente.

1.1. MV-álgebras

Definición 1.1. *Una MV-álgebra es un álgebra* $(A, \oplus, \neg, 0)$ *,donde* A *es un conjunto no vacio,*$\oplus$ *es una operación binaria en* A*,* $\neg$ *una operación unaria y 0 una constante, que satisface los siguientes axiomas, para todo* x, y, z *en* A *:*

MV1) $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$

MV2) $x \oplus y = y \oplus x$ *La operación binaria es conmutativa*

MV3) $x \oplus 0 = x$ *La operación binaria tiene elemento neutro*

MV4) $\neg\neg x = x$ *La doble negación es la función idéntica*

MV5) $x \oplus \neg 0 = \neg 0$

MV6) $\neg(\neg x \oplus y) \oplus y = \neg(\neg y \oplus x) \oplus x$

En particular los tres primeros axiomas establecen que toda MV-álgebra es un monoide conmutativo $(A, \oplus, 0)$, de hecho una MV-álgebra podría definirse como un monoide conmutativo enriquecido con la operación unaria $\neg$. Nosotros denotaremos una MV-álgebra A como $(A, \oplus, \neg, 0)$.

En cada MV-álgebra A definimos la constante 1 y las operaciones $\odot$ y $\ominus$ como sigue:

- $1 = \neg 0$
- $x \odot y = \neg(\neg x \oplus \neg y)$
- $x \ominus y = x \odot \neg y$

Una MV-álgebra es no trivial si y solo si $0 \neq 1$. Las siguientes identidades son consecuencia inmediata de MV4).

MV7) $\neg 1 = 0$

MV8) $x \oplus y = \neg(\neg x \odot \neg y)$

Así los Axiomas MV5) y MV6) se pueden escribir así:

MV5') $x \oplus 1 = 1$

MV6')$(x \ominus y) \oplus y = (y \ominus x) \oplus x$

Ahora fijando $y = \neg 0$ en MV6) tenemos :

MV9) $x \oplus \neg x = 1$

Otras características y propiedades de las MV-álgebras son las siguientes:

MV10) Existe una relación de orden parcial definida por $x \leq y \Leftrightarrow\ \exists\, z,\ x \oplus z = y$, se sigue que $x \leq y \Leftrightarrow x \ominus y = 0$

MV11) El orden parcial es un retículo, con supremo denotado $\vee$ e infimo denotado $\wedge$. Las operaciones del retículo están definidas por las formulas:

$$x \vee y = (x \odot \neg y) \oplus y$$

$$x \wedge y = x \odot (\neg x \oplus y)$$

MV12) $x \wedge y = \neg(\neg x \vee \neg y)$ y $x = \neg(\neg x \wedge \neg y)$.

MV13) $x \wedge y \leq x \oplus y$ y $x \odot y \leq x \wedge y$.

MV14) $(x \ominus y) \wedge (y \ominus x) = 0$.

MV15) Para cada MV-álgebra A, $x, y \in A$ y n un entero, se tiene $n(x \wedge y) = nx \wedge ny$. Se sigue que si $x \wedge y = 0$ entonces $nx \wedge ny = 0$.

MV16) Una MV-álgebra es una MV-cadena si su relación de orden es total. Las MV-cadenas se caracterizan por los siguientes axiomas:

$C1$) $1 \neq 0$

$C2$) $x \ominus y = 0$ ó $y \ominus x = 0$

De MV14) se sigue que una MV-álgebra A es una MV-cadena si y solo si se cumple:

$C1'$) $A \neq \{0\}$

$C2'$) $x \wedge y = 0$ entonces $x = 0$ ó $y = 0$.

1.1.1. MV-Ideales

MVI-1)[1] Un MV-ideal de una MV-álgebra es un subconjunto I de A que satisface las siguientes condiciones:

[1]En el apéndice C se profundiza en las propiedades y los conceptos básicos de los homomorfismos y los ideales de las MV-álgebras

I.1) $0 \in I$

I.2) Si $x \in I, y \in A$, $y \leq x$, entonces $y \in I$

I.3) Si $x \in I, y \in I$, entonces $x \oplus y \in I$ Un ideal es propio si $1 \notin I$

MVI-2) Dado un numero finito de elementos en una MV-álgebra. Se escribe $< x, y...z >$ para el ideal generado por $x, y...z$. Se tiene:

$< x \wedge y >=< x > \cap < y >, \qquad < x \vee y >=< x \oplus y >=< x, y >$

En consecuencia, todos los ideales finitamente generados son principales.

MVI-3) Un ideal P es primo si se satisfacen las siguientes condiciones:

P.1) $1 \notin P$

P.2) Para cada $x, y \in A$, $(x \ominus y) \in P$ ó $(y \ominus x) \in P$

De MV14) se sigue que un ideal P es primo si y solo si se satisface:

P.1´) $P \neq A$

y alguna de las siguientes equivalencias

P.2´) $x \wedge y \in P$ entonces $x \in P$ ó $y \in P$

P.2') $x \wedge y = 0$ entonces $x \in P$ ó $y \in P$

MVI-4) Los ideales maximales son primos.Un MV-ideal I de una MV-álgebra A es llamado maximal si y solo si $I \neq A$, y para cada MV-ideal $J \neq I$, si $I \subseteq J$, entonces $J = A$

1.1.2. Ejemplos de MV-álgebras

Ejemplo 1.1. *El singleton* $\{0\}$ *es la MV-álgebra trivial con las operaciones* $\oplus, \neg$*.* $0 \oplus 0 = 0$ *y* $\neg 0 = 0$

Una MV-álgebra se llama no trivial, si tiene mas de un elemento. La MV-álgebra de dos elementos es el álgebra de Boole $\{0, 1\}$,en la que $\oplus$ coincide con la disyunción booleana y $\neg$ con la negación de Boole.

Ejemplo 1.2. *La MV-álgebra* $[0,1] = ([0,1], \oplus, \neg, 0)$ *con* $[0,1] = \{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x \leq 1\}$ *,* $x \oplus y = min\ (1, x+y)$*,* $\neg x = 1 - x$*.*

En particular todo subconjunto del segmento real [0,1] cerrado para las funciones $x \mapsto (1-x)$ y $x, y \mapsto min\,\{1, x+y\}$, es una MV-álgebra con las operaciones $x \oplus y = min\,\{1, x+y\}$, $\neg x = 1 - x$ y la constante 0.

Note que en la MV-álgebra [0,1] tenemos:

$x \odot y = max(0, x+y-1)$

$x \ominus y = max(0, x-y)$

Además , para todo $n = 0, 1, 2,...$ y $x \in A$, las MV-operaciones $n \cdot x$ y x^n, son definidas inductivamente por:

$$0 \cdot x = 0,\ (n+1) \cdot x = x \oplus (n \cdot x)$$

y

$$x^0 = 1,\ x^{n+1} = x \odot (x^n).$$

Siguiendo la tradición asumimos que la operación x^n tiene prioridad sobre cualquier operación, también $\neg$ tiene prioridad sobre $\odot$, y a su vez $\odot$ tiene prioridad sobre $\oplus$

Álgebras Booleanas

De igual manera se puede ver que toda algebra booleana $(A, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ es una MV-álgebra, si se define $x \oplus y = x \vee y, \neg x = x', 0 = \perp$, $\vee$ y ´ representan respectivamente la unión y el complemento; en particular se tiene $\neg(\neg x \oplus y) \oplus y = x \oplus y$.

Ya Chang había observado que las álgebras booleanas son MV-álgebras que satisfacen la ecuación de idempotencia $x \oplus x = x$

Observación: Las MV-álgebras son las álgebras de la lógica difusa, así como las álgebras booleanas son las álgebras de la lógica clásica.

MV-álgebras Hiperarquimedianas

Un elemento a de una MV-álgebra A es llamado arquimediano si y solo si existe un número natural n tal que $n \cdot a = (n+1) \cdot a$

Una MV-álgebra A es llamada hiperarquimediana si y solo si todos sus elementos son arquimedianos.

Son ejemplos de MV-álgebras hiperarquimedianas las Álgebras Booleanas.

A continuación profundizaremos en las MV-álgebras libres ya que son las que permiten desarrollar el presente trabajo.

1.1.3. MV-álgebras libres

Las MV-álgebras libres son objetos universales; toda MV-álgebra A con n-generadores es una imagen homomorfica de la MV-álgebra libre $free_n$ para algún n; si una ecuación se satisface por $free_n$ para todo n, entonces la ecuación se satisface en todas las MV-álgebras. Como una consecuencia del teorema de representación[2], $free_n$ se puede describir como una MV-álgebra de un conjunto de funciones lineales continuas evaluadas en $[0,1]$, definidas sobre el cubo $[0,1]^n$, conocidas como funciones de McNaughton. En este trabajo nos enfocaremos en $free_2$ definiéndola como un conjunto de funciones de McNaughton lo cual facilita su comprensión y el desarrollo de ejemplos puntuales.

MV-Terminos

Definición 1.2. *Un MV-term o término en k-variables $x_1, x_2, ..., x_k$, es una cadena finita de símbolos sobre el alfabeto*

$$\{0, \neg, \oplus, x_1, \ldots, x_k\}$$

obtenida inductivamente, con las siguientes reglas (Ver [3]*, definición 1.4.1.)*

T1. 0 y x_i, para $i = 1, \ldots, k$ son MV-terms.

T2. τ es un MV-term, entonces también lo es $\neg\tau$.

[2]Theorem 2.5.3 Algebraic Foundations of Many-valued Reasoning.

T3. Si τ y σ son MV-term, entonces también lo es $(\tau \oplus \sigma)$.

Para cada MV-álgebra A y k un cardinal los elementos de A^k tienen la forma:

$$x = (x_0, x_1, ...x_\alpha, ...)_{\alpha<k},$$

donde $x_\alpha \in A$, para cada $\alpha < k$. La $\alpha - esima$ proyección $\pi_\alpha = A^k \to A$ es la función $\pi_\alpha(x) = x_\alpha$.

Denotamos $Proj_A^k = \{\pi_\alpha \, | \alpha < k\}$ al conjunto de proyecciones de A^k

Veamos algunos ejemplos de MV-term.

$$\tau(x, y) = x \oplus y \quad \text{y} \quad \sigma(x, y) = (\neg x \oplus y) \odot y$$

La MV-álgebra $Term_k^A$

Dada A una MV-álgebra, la MV-álgebra $Term_k^A$ es el conjunto de funciones término $\tau^A : A^k \longrightarrow A$ dadas por (Ver [3], definición 3.1.1.):

1. $$\begin{array}{rccc} x_\alpha^A = \pi_\alpha : & A^k & \to & A \\ & (x_1, x_2, ..., x_k) & \longmapsto & x_\alpha \end{array}$$

2. 0^A es la función constante 0 de $Term_k^A$

3. Dadas ρ^A, σ^A funciones termino, definimos por inducción,

   3.1.$(\neg\rho)^A =_{def} \neg(\rho^A)$ es una función término

   3.2. $(\rho \oplus \sigma)^A =_{def} (\rho^A \oplus \sigma^A)$ es una función termino.

Ejemplos:

$$\begin{array}{rcl}(x \oplus y)^A : A^2 & \rightarrow & A \\ (a_1, a_2) & \longmapsto & a_1 \oplus a_2\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}x_1^A : A^2 & \rightarrow & A \\ (a_1, a_2) & \longmapsto & a_1\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}x_2^A : A^2 & \rightarrow & A \\ (a_1, a_2) & \longmapsto & a_2\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}(\neg(x \oplus y))^A : A^2 & \rightarrow & A \\ (a_1, a_2) & \longmapsto & \neg(a_1 \oplus a_2)\end{array}$$

Proposición 1.3. *(Ver* [3], *Proposición 3.1.4) Para cada cardinal* $k \geq 1, Term_k^{[0,1]}$ *es la MV-álgebra libre* $free_k$*, es decir:*

$$free_k = Term_k^{[0,1]}$$

Funciones de McNaughton

Definición 1.4. *una función* $f : [0,1]^n \rightarrow [0,1]$ *es de McNaughton en n variables* (M_{c_n}) *sobre* $[0,1]^n$ *si y solo si* f *es continua con respecto a la topología usual de* $[0,1]^n$*, y existen polinomios lineales* $p_1, ...p_k$ *con coeficientes enteros,*

$$p_i(x_0, ..., x_{n-1}) = b_i + m_{i0x_0} + ...m_{i(n-1)}x_{n-1}, (b_i, m_{it} \in \mathbb{Z})$$

tal que para cada punto $y = (y_0, ..., y_{n-1}) \in [0,1]^n$ *existe un indice* $j \in \{1, ...k\}$ *con* $f(y) = p_j(y)$.

Observemos que toda fórmula $a \in free_n$ determina una función de $f : [0,1]^n \to [0,1]$ que denotaremos por abuso de notación con la misma letra a. Dados $(x_1, ..., x_n) \in [0,1]^n$, $a(x_1, ..., x_n)$ es la evaluación de la fórmula en la MV-álgebra $[0,1]$(Ver [11], pg 85).

Consideremos los siguientes resultados ya conocidos en [3]

1. Toda formula $a \in free_n$ es de McNaughton.(Ver [3], Proposición 3.1.8.)
2. Dado un polinomio $p \in \mathbb{Z}[x_1, .., x_n]$ la función $p^{\#}$ definida por $p^{\#} = (p \vee 0) \wedge 1$, pertenece a $free_n$.(Ver [3], Proposición 3.1.9.)

Consecuentemente toda función de McNaughton que puede describirse con un solo polinomio lineal es una fórmula.

Proposición 1.5. *(Ver* [3]*, proposición 3.3.1)Dada f una función de McNaughton en n-variables con componentes lineales $p_1, ..., p_k$ existe un conjunto S de simplex unidimensionales compactos con vértices racionales tales que:*

1. La unión de los simplex en S coincide con el cubo $[0,1]^n$.
2. Dos simplex cualquiera en S son disjuntos o se intersectan en una cara común.
3. Para cada simplex $W \in S$ existe $j \in \{1, ..., k\}$ tal que f restringido a W coincide con p_j

Teorema 1.6. *Teorema de McNaughton. (Ver* [11]*, Teorema 7.1.1.)*

$$free_n \underset{iso}{\approx} M_{c_n}$$

Una demostración de este teorema la podemos ver en $[Ver(5)]$

MV-álgebra libre $Free_1$

Por el isomorfismo anterior la MV-álgebra libre con un generador $free_1$ se puede ver como el conjunto de funciones $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ tales que:(Ver [3], Corolario 3.2.8.)

$$f(x) = \begin{cases} m_1 x + b_1 & \text{si} \quad 0 \le x < a_1 \\ & \vdots \\ m_i x + b_i & \text{si} \quad a_{i-1} \le x < a_i \\ & \vdots \\ m_k x + b_k & \text{si} \quad a_{k-1} \le x \le 1 \end{cases}$$

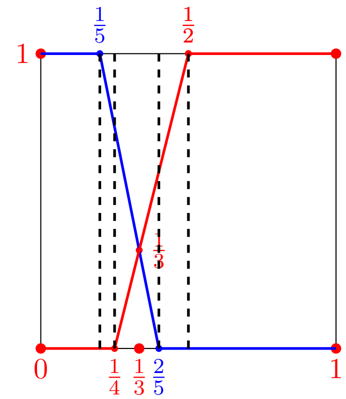
con $b_i, m_i \in \mathbb{Z}, a_i \in \mathbb{Q}$, $f(x)$ continua respecto a la topología usual de $[0,1]$; y las operaciones $\oplus$, $\ominus$, $\odot$ y $\neg$ definidas de la siguiente forma para toda $f, g \in free_1$:

$$\begin{aligned} f(x) \oplus g(x) &= min(1, f(x) + g(x)) \\ f(x) \ominus g(x) &= max(0, f(x) - g(x)) \\ f(x) \odot g(x) &= max(0, f(x) + g(x) - 1) \\ \neg f(x) &= 1 - f(x). \end{aligned}$$

A continuación veremos como se representa gráficamente la suma de dos funciones específicas en $free_1$, con el fin de familiarizarnos con la operaciones de esta MV-álgebra.(En el anexo B se desarrollaran más ejemplos que permitan visualizar las operaciones de las MV-álgebras libres)

Ejemplo 1.3. *Dadas $f(x), g(x) \in free_1$ tales que:*

$$\text{Para } f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \le x < \frac{1}{5} \\ -5x + 2 & \text{si} \quad \frac{1}{5} \le x < \frac{2}{5} \\ 0 & \text{si} \quad \frac{4}{5} \le x \le 1 \end{cases} \text{ y } g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \le x < \frac{1}{4} \\ 4x - 1 & \text{si} \quad \frac{1}{4} \le x < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si} \quad \frac{3}{4} \le x \le 1 \end{cases}$$



entonces

$f(x) \oplus g(x) = min(1, 1+0) = min(1,1) = 1,\ \forall x \in \left[0, \frac{1}{5}\right]$

$f(x) \oplus g(x) = min(1, -5x+2-0) = min(1, -5x+2) = -5x+2 = f(x),\ \forall x \in \left[\frac{1}{5}, \frac{1}{4}\right]$

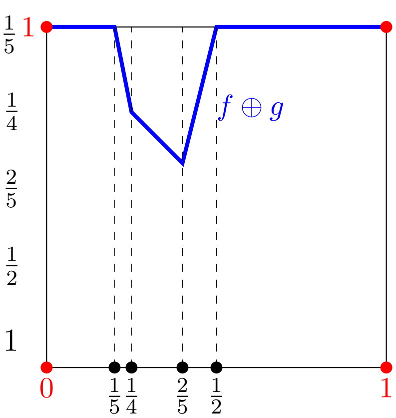
$f(x) \oplus g(x) = min(1, -5x+2+4x-1) = min(1, -x+1) = -x+1,\ \forall x \in \left[\frac{1}{4} \leq x < \frac{2}{5}\right]$

$f(x) \oplus g(x) = min(1, 4x-1-0) = min(1, 4x-1) = 4x-1,\ \forall x \in \left[\frac{2}{5}, \frac{1}{2}\right]$

$f(x) \oplus g(x) = min(1, 1+0) = min(1,1) = 1,\ \forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$

Obtenemos:

$$f(x) \oplus g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \leq x < \frac{1}{5} \\ -5x+2 & \text{si} \quad \frac{1}{5} \leq x \leq \frac{1}{4} \\ -x+1 & \text{si} \quad \frac{1}{4} \leq x < \frac{2}{5} \\ 4x-1 & \text{si} \quad \frac{2}{5} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si} \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$



MV-álgebra $Free_2$

La MV-álgebra libre $free_2$ con dos generadores es isomorfa al conjunto de funciones $f : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ (Teorema 1.6) tales que :

$$f(x) = \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 & \text{si} \quad (x,y) \in A_1 \\ & \vdots \\ a_ix + b_iy + c_i & \text{si} \quad (x,y) \in A_i \\ & \vdots \\ a_nx + b_ny + c_n & \text{si} \quad (x,y) \in A_n \end{cases}$$

donde $A_1, A_2, ...A_n$ son regiones de $[0,1]^2$ con vértices racionales, tales que $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = [0,1]^2$ y $f(x,y)$ continua respecto a la topología de $[0,1]^2$; y las operaciones $\oplus$, $\ominus$, $\odot$ y $\neg$ definidas de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} f(x,y) \oplus g(x,y) &= min(1, f(x,y) + g(x,y)) \\ f(x,y) \ominus g(x,y) &= max(0, f(x,y) - g(x,y)) \\ f(x,y) \odot g(x,y) &= max(0, f(x,y) + g(x,y) - 1) \\ \neg f(x,y) &= 1 - f(x,y). \end{aligned}$$

con $f(x,y), g(x,y) \in free_2$

En el apéndice B, se presentan mas ejemplos de operaciones con MV-álgebras (suma,resta, multiplicación y negación) y en el capítulo 3 se profundiza en el caso $free_2$ donde se caracterizarán sus ideales primos.

Capítulo 2

Anillos conmutativos con unidad y MV-álgebras

En este capítulo se presentaran en paralelo algunas nociones y hechos básicos del espectro primo de MV-álgebras dados en [11] y del espectro primo de anillos conmutativos con unidad dados en [7] y [1], en particular se dará una condición necesaria para que un homomorfismo de MV-álgebras induzca un epimorfismo en la categoría de espacios compactos Hausdorff.

Las proposiciones de anillos conmutativos con unidad se identificaran con recuadros y subíndice a. (las cuales corresponden a resultados demostrados en [7]). Las de MV-álgebras con subíndice b..

Definición 2.1.a: *(Ver* [7]*, pg 2)* Dado A un anillo conmutativo con unidad, se denota por $Spec(A)$ al conjunto de ideales primos de A, y para cada $a \in A$, definimos:

$$\hat{a} = \{I \in Spec(A) \,|a \notin I\}$$

Recordemos que un ideal $I \subset A$ es primo si $I \neq A$ y se verifica la siguiente condición:

$$x, y \in A,\ xy \in I \Rightarrow x \in I \text{ ó } y \in I.$$

Definición 2.1.b: Dada una MV-álgebra A, se denota $\mathfrak{Z}(A)$, al conjunto de los ideales primos de A y para cada $a \in A$ definimos:

$$W_a = \{P \in \mathfrak{Z}(A), a \in P\}$$

W_a es el conjunto de ideales primos que contienen al elemento a.

Proposición 2.2.a : *(Ver* [7], *Lema 1)* La colección $\{\hat{a}\}_{a\in A}$ es una base de un espacio topológico.
i) Si $a, b \in A, \widehat{ab} = \hat{a} \cap \hat{b}$

ii) $\hat{0} = \phi$

iii) $\hat{1} = Spec(A)$

Esta proposición permite definir una topología τ (la topología Zariski) sobre el $Spec(A)$ cuya base de abiertos esta determinada por los conjuntos $\hat{a}$. Se llama espectro primo de A al espacio topológico $(Spec(A), \tau)$ que denotaremos con abuso de notación $Spec(A)$.

Observación: Las razones categóricas que obligan la topología Zariski en la teoría de anillos son las siguientes *(Ver* [6], *pg 3)*:

1) La localización de un anillo en un ideal primo es una construcción covariante en el sentido que si se tienen dos ideales primos $I \subset J$, se tiene un morfismo de anillos locales $A_I \rightarrow A_J$

2) Dado un elemento $a \in A$ y un ideal primo I, existe una factorización $A[a^{-1}] \rightarrow A_I$ si y solo si $a \notin I$. Para un elemento fijo a, el conjunto $\{I | \exists\ A[a^{-1}] \rightarrow A_I\}$ es el conjunto de los abiertos de Zariski $\hat{a} = \{I\, | a \notin I\}$.

3) La asignación $a \mapsto A[a^{-1}]$ es contravariante para los abiertos de Zariski en el sentido que $\hat{a} \subset \hat{b}$ entonces $A[b^{-1}] \rightarrow A[a^{-1}]$.

Proposición 2.2.b: La colección $\{W_a\}_{a\in A}$ es una base de un espacio topológico.

*i)*Si $a, b \in A, W_{a\oplus b} = W_a \cap W_b$

ii)$W_0 = \mathfrak{Z}(A)$

iii)$W_1 = \phi$

Demostración:

i) Si $a, b \in P$, P un ideal de A, entonces $a \oplus b \in P$. Si $a \oplus b \in P$ como $a, b \leq a \oplus b$ y P es ideal , entonces $a, b \in P$.

$ii)$ Se obtiene por que $0 \in P$, $\forall P$

$iii)$ Se obtiene por que $1 \notin P$.

El espectro primo de una MV-álgebra A es el espacio topológico $\mathfrak{Z}(A) = (\mathfrak{Z}(A), \tau)$,cuya base de abiertos esta determinada por los conjuntos W_a. A esta topología se le llama Co-Zariski, porque los W_a son los cerrados de Zariski. (Ver [11], pág 6)

Observación: Las razones categóricas que obligan la topología Co-Zariski en la teoría de MV-álgebras son las siguientes:

1) El cociente de una MV-álgebra por un ideal primo es una construcción contravariante, en el sentido que si se tienen dos ideales primos $P \subset Q$, se tiene un morfismo de MV-cadenas en la otra dirección $A/Q \to A/P$.

2) Dado un elemento $a \in A$ y un ideal primo P, existe una factorización $A/ < a > \longrightarrow A/P$ si y solo si $a \in P$. Para un elemento fijo a, el conjunto $\{P | \exists\ A/ < a > \to A/P\}$ es el conjunto de los abiertos de Co-Zariski $W_a = \{P\, | a \in P\}$ (Ver anexo C.3)

3) La asignación $a \mapsto A/ < a >$ es contravariante para los abiertos de Co-Zariski en el sentido que $W_a \subset W_b$ entonces $A/ < b > \to A/ < a >$.

Proposición 2.3.a : *(Ver* [7], *Proposición 3)* Spec (A) es un espacio topológico T_0

Proposición 2.3.b: $\mathfrak{Z}(A)$ es un espacio topológico T_0

Demostración: Dados $I, J \in \mathfrak{Z}(A)$,con $I \neq J$, por ser diferentes existe $a \in A$, diferente de cero, tal que $a \in I$ y $a \notin J$ ó $a \notin I$ y $a \in J$, consecuentemente $I \in W_a$, $J \notin W_a$ ó $J \in W_a$ e $I \notin W_a$

Observación: Sin embargo $\mathfrak{Z}(A)$ no es T_2 ya que si $I \subset J$(por ejemplo J ideal maximal e I un ideal primo no maximal), $W_a \cap W_b \neq \phi$, puesto que todo abierto que contenga a I , contiene a J, es decir, no es posible separarlos con dos conjuntos abiertos disjuntos.

Definición 2.4: Dada una función $f : A \to B$, definimos $f^! : \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A)$, como sigue para todo $P \in \mathcal{P}(B)$:

$$f^!(P) = f^{-1}(P) = \{x \in A : f(x) \in P\}$$

$f^!$ denota la función imagen reciproca de f.

Proposición 2.5.a: *(Ver* [7], *Proposición 4)* Dado $f : A \to B$ un morfismo de anillos conmutativos que preservan la unidad, entonces $f^! : Spec(B) \to Spec(A)$ es una funcíon continua.

Proposición 2.5.b: Dado $f : A \to B$ un MV-homomorfismo , $f^! : \mathfrak{Z}(B) \to \mathfrak{Z}(A)$ es una función continua.

Demostración: Dado $J \in \mathfrak{Z}(B)$, $f^!(J) = \{x \in A, f(x) \in J\} \in \mathfrak{Z}(A)$.

$I)f^!(J)$ es ideal.

$i)0 \in f^!(J)$, debido a que $f(0) = 0 \in J$.

$ii)$Sea $a, b \in f^!(J)$,es decir $f(a), f(b) \in J$, como J es ideal $f(a) \oplus f(b) \in J$, además f es homomorfismo luego $f(a \oplus b) \in J$, así $a \oplus b \in f^!(J)$.

$iii)$Dado $a \in f^!(J)$ y $b \leq a$ como f es MV-homomorfismo, $f(b) \leq f(a)$ y $f(a) \in J$, además J es ideal , así $f(b) \in J$ es decir $b \in f^!(J)$.

$II)f^!(J)$ es primo.

Dados $a_1, a_2 \in A$, queremos ver que $(a_1 \ominus a_2) \in f^!(J)$ o $(a_2 \ominus a_1) \in f^!(J)$. Lo anterior es equivalente a ver que $f(a_1 \ominus a_2) \in J$ o $f(a_2 \ominus a_1) \in J$.

Como f es homomorfismo $f(a_1) \ominus f(a_2) = f(a_1 \ominus a_2)$ y $f(a_2) \ominus f(a_1) = f(a_2 \ominus a_1)$, además como J es ideal primo de B y $f(a_1), f(a_2) \in B$, entonces $f(a_1 \ominus a_2) = f(a_1) \ominus f(a_2) \in J$ o $f(a_2 \ominus a_1) = f(a_2) \ominus f(a_1) \in J$, luego $(a_1 \ominus a_2) \in f^!(J)$ o $(a_2 \ominus a_1) \in f^!(J)$.

$III)$ $f^! : \mathfrak{Z}(B) \to \mathfrak{Z}(A)$ es continua.

Dado $W_a \in \mathfrak{Z}(A)$, demostraremos que $(f^!)^{-1}(W_a)$ es un abierto de $\mathfrak{Z}(B)$.

$$\begin{aligned}
(f^!)^{-1}(W_a) &= \left\{P \in \mathfrak{Z}(B) \mid f^!(P) \in W_a\right\} \\
&= \left\{P \in \mathfrak{Z}(B) \mid a \in f^!(P)\right\} \\
&= \{P \in \mathfrak{Z}(B) \mid f(a) \in P\} \\
&= W_{f(a)} \in \mathfrak{Z}(B) \square
\end{aligned}$$

Proposición 2.6.a: *(Ver* [1], *pg 14 ejercicio 18 numeral iv y ejercicio 17 numeral v)* $Spec(A)$ es un espacio topológico compacto.
Demostración: Ver capitulo 3.

Proposición 2.6.b: $\mathfrak{Z}(A)$ es un espacio topológico compacto.

Esta demostración le dedicaremos especial interés, por lo que se desarrollará en el capítulo 4 de esta tesis debido a su complejidad y ya que es objetivo de este trabajo establecer una demostración mas sencilla a la desarrollada en [11] empleando teorías conjuntistas y no categoricas.

Definición 2.7.a: *(Ver* [7], *Definición 5)* El radical primo de un anillo A esta definido por:

$$rad(A) = \bigcap_{P \in Spec(A)} P$$

Definición 2.7.b: Para cada MV-álgebra A, llamaremos el radical de A, la intersección de todos los ideales maximales de A, el radical de A, lo denotaremos por $Rad(A)$

Un elemento a en una MV-álgebra A es llamado infinitesimal si y solo si $a \neq 0$ y $n.a \leq \neg a$, para cada entero $n \geq 0$. El conjunto de todos los infinitesimales en A lo denotamos por $Infinit(A)$

Para cada MV-álgebra A, $Rad(A) = Infinit(A) \cup \{0\}$(Ver [3])

Notación: Denotaremos con $\mathfrak{M}_A$ al espacio topológico cuyos puntos son los ideales maximales de A y cuya base de abiertos esta dada por los conjuntos:

$$W_a\,|_{\mathfrak{M}_A} = \{P \in \mathfrak{M}_A : a \in P\}$$

a este espacio $\mathfrak{M}_A$ lo llamaremos el espectro maximal.

Proposición 2.8.a: *(Ver* [7], *Proposición 7)*Dado A un anillo conmutativo con unidad las siguientes condiciones son equivalentes:

$i)$ Todo ideal primo de A es maximal.

$ii)$ $Spec(A)$ es T_2

Proposición 2.8.b: (Ver [11], Teorema 2.2) Dada una MV-álgebra, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. A es una MV-álgebra hiper-arquimediana
2. Todo ideal primo es maximal ($\mathfrak{Z}(A) = \mathfrak{M}_A$)
3. $\mathfrak{Z}(A)$ es T_2

Demostración:

$(1) \Rightarrow (2)$

Es una consecuencia directa del teorema (6.3.2) del libro [3]

$(2) \Rightarrow (3)$

Dados P,Q dos ideales maximales de $\mathfrak{Z}(A)$. Por ser diferentes, existe $a \in A$, diferente de cero, tal que $a \in P$ y $a \notin Q$, consecuentemente $P \in W_a$, como Q es maximal existe $n \in N$ tal que $\neg n.a \in Q^1$. Por lo cual $Q \in W_{\neg n \cdot a}$ y $W_a \cap W_{\neg n \cdot a} = \phi$.

(3) $\Rightarrow$ (1)

Si A no es Hiperarquimediana, entonces existe P un ideal primo no maximal, $P \subseteq Q$ maximal, así cualquier abierto que contenga a P contiene a Q y no es posible separarlos con dos conjuntos abiertos disjuntos; esto implica que $\mathfrak{Z}(A)$ no seria T_2.

Proposición 2.9.a: *(Ver* [7], *Proposición 8)* Dado $f : A \to B$ es un morfismo de anillos conmutativos con unidad, entonces :

$$\overline{f^!(Spec)(B)} = \{\bigcup \{\hat{a}\,|a \in ker(f)\}\}^c$$

Demostración:[ver 7] Observemos que:

$$\begin{aligned} I \in \left\{\bigcup \left\{\hat{a}\,\middle|a \in ker(f)\right\}\right\}^c \quad &\Leftrightarrow \quad a \in Ker(f) \Rightarrow a \in I \\ &\Leftrightarrow \quad Ker(f) \subseteq I \end{aligned}$$

Si $I \in f^!(Spec)(B)$, entonces existe $J \in (Spec)(B)$ tal que $f^!(J) = I$,como $0 \in J, f^!(0) = Ker(f) \subseteq I$, es decir

$$I \in \{\bigcup \{\hat{a}\,|a \in ker(f)\}\}^c.$$

Consecuentemente se tiene que,

$$\overline{f^!(Spec(B))} \subseteq \{\bigcup \{\hat{a}\,|a \in ker(f)\}\}^c$$

Debido a que $\{\bigcup \{\hat{a}\,|a \in ker(f)\}\}^c$ es cerrado.
Recíprocamente, dado $I \in Spec(A)$ tal que $Ker(f) \subseteq I$ debemos probar que si $I \in \hat{a}$, entonces

$$\hat{a} \cap f^!(Spec(B)) \neq \phi$$

Supongamos que $\hat{a} \cap f^!(Spec)(B) = \phi$ entonces para todo $J \in (Spec)(B), a \in f^!(J)$, luego $f(a) \in J$, es decir $f(a) \in rad(B)$, por lo tanto existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f(a^n) = (f(a))^n = 0$, luego $a^n \in Ker(f)$ y por lo tanto $a^n \in I$, como I es primo entonces $a \in I$ contradiciendo el hecho que $I \in \hat{a}$

[1] Lemma 1.2.2, pag 14. Algebraic Foundations of Many-Valued Reasoning

Proposición 2.9.b: Dado $f : A \to B$ un morfismo de MV-álgebras entonces:

$$\overline{f^!\mathfrak{Z}(B)} = \overline{\bigcap_{a \in Ker(f)} W_a}$$

Demostración:

($\subseteq$) Dado $f^!(P) \in f^{-1}\mathfrak{Z}(B)$, $f^!(P) = f^{-1}(P)$, como $0 \in P$, entonces $f^{-1}(0) \subseteq f^{-1}(P)$, así $Ker(f) \subseteq f^!(P)$, luego $f^!(P) \in \bigcap_{a \in Ker(f)} W_a$, consecuentemente $f^!\mathfrak{Z}(B) \subseteq \bigcap_{a \in Ker(f)} W_a$, y , $\overline{f^!\mathfrak{Z}(B)} \subseteq \overline{\bigcap_{a \in Ker(f)} W_a}$

($\supseteq$) Dado $q \in \overline{\bigcap_{a \in Ker(f)} W_a}$ y W_x abierto de $\mathfrak{Z}(A)$ con $q \in W_x$, como $f : A \to B$,se tiene que $f(x) \in B$; sea $J =< f(x) >$ el MV-ideal de B, por el lema de Zorn J esta contenido en un ideal maximal P, asi $f(x) \in P$, como $f^!(P) \in \mathfrak{Z}(A)$ y $x \in f^!(P)$, entonces $f^!(P) \in W_x \cap f^!\mathfrak{Z}(B)$, luego $W_x \cap f^!\mathfrak{Z}(B) \neq \phi$, así

$$\overline{\bigcap_{a \in Ker(f)} W_a} \subseteq \overline{f^!\mathfrak{Z}(B)} \ \square$$

Proposición 2.10.a: *(Ver* [7], *Proposición 9)* Si $f : A \to B$ es un morfismo de anillos, entonces :

$$\overline{f^!(Spec)(B)} = Spec(A), \text{ si y solo si, } Ker(f) \subseteq rad(A)$$

Proposición 2.10.b.: Dado $f : A \to B$, un morfismo de MV-álgebras se tiene la igualdad:

$$\overline{f^!\mathfrak{Z}(B)} = \mathfrak{Z}(A)$$

Demostración:

($\subseteq$) Por definición $\overline{f^!\mathfrak{Z}(B)} \subseteq \mathfrak{Z}(A)$

($\supseteq$)Dado $q \in \mathfrak{Z}(A)$, tomamos $x \in q$, por lo que $q \in W_x$, W_x abierto de $\mathfrak{Z}(A)$ como $f : A \to B$,se tiene que $f(x) \in B$; sea $J =< f(x) >$ el MV-ideal de B, por el lema de Zorn J esta contenido en un ideal maximal P, asi $f(x) \in P$, como $f^!(P) \in \mathfrak{Z}(A)$ y $x \in f^!(P)$, entonces $f^!(P) \in W_x \cap f^!\mathfrak{Z}(B)$, luego $W_x \cap f^!\mathfrak{Z}(B) \neq \phi$, así

$$\mathfrak{Z}(A) \subseteq \overline{f^!\mathfrak{Z}(B)} \ \Box$$

De la siguiente proposición se sigue directamente el corolario a partir del cual se deduce que cada morfismo de MV-álgebras cuyo espectro es T_2, induce un epimorfismo en la categoría de espacios compactos Hausdorff.

Proposición 2.11:*(Ver* [7], *Proposición 10)* Si $f : X \to Y$ es una función continua entre espacios topológicos tal que $\overline{f(X)} = Y$ y $g, h : Y \to Z$ son funciones continuas con Z espacio topológico T_2, entonces $h \circ f = g \circ f$ implica $h = g$

Demostración: Supongamos que existe $t \in Y/f(X)$, tal que $g(t) \neq h(t)$,como Z es T_2 existen abiertos V y W en Z tal que $g(t) \in V, h(t) \in W$ y $V \cap W = \phi$,entonces $t \in g^{-1}(V) \cap h^{-1}(W) = K$, con K abierto de Y, como $f(X)$ es denso en Y, existe $y \in f(X) \cap K$, de donde $g(y) \in V, h(y) \in W$, por hipótesis $g(y) = h(y)$, contradiciendo $V \cap W = \phi$. $\Box$

Definición 2.12: Supóngamos que dados $g : Y \to Z$ y $h : Y \to Z$ y toda vez que $g \circ f = h \circ f$, se sigue que $g = h$. Entonces f es un epimorfismo.

Corolario 2.13.a: *(Ver* [7], *Corolario 11)*Dados $A, B \in \mathfrak{M}$, y $f : A \to B$ un morfismo de anillos que respeta la unidad. Si $ker(f) \subseteq rad(A)$ entonces $f^! : Spec(B) \to Spec(A)$ es un epimorfismo en la categoría de espacios compactos Hausdorff.

Observación: Si $f : A \to B \in \mathfrak{M}$, es inyectiva entonces se tiene directamente que $f^! : Spec(B) \to Spec(A)$ es un epimorfismo en la categoría de espacios compactos Hausdorff.

Notación: Denotamos por $\mathfrak{M}$ la categoría de anillos conmutativos con unidad para los cuales todo ideal primo es maximal. En esta categoría los morfismos son homomorfismos de anillos que preservan la unidad

Corolario 2.13.b: Dadas A, B MV-álgebras Hiperarquimedianas y $f : A \to B$ un morfismo de MV-álgebras. Entonces $f^! : \mathfrak{Z}(B) \longrightarrow \mathfrak{Z}(A)$ es un epimorfismo en la categoría de espacios compactos Hausdorff.

Así se establecen las condiciones sobre un homomorfismo de MV-álgebras , cuyos espectros primos son espacios Hausdorff, para que este induzca un epimorfismo en la categoria de espacios compactos Hausdorff. (Ver Conclusiones)

De igual manera podemos observar que en las MV-álgebras hiperarquimedianas, donde cada ideal primo es maximal la topología Zariski y Co-Zarisky coinciden y el espectro primo es un espacio de Hausdorff.

Capítulo 3

Ideales Primos de $free_2$

El primer estudio conocido sobre los ideales primos de las MV-álgebras libres es muy reciente (2005) y se encuentra en el artículo "Geometry of Robinson consistency in lukasiewicz logic." [2]. En este trabajo haremos un estudio de la MV-álgebra $free_2$ desde la óptica del trabajo "Introducción a las MV-álgebras y sus ideales primos" de F. C. Osorio (ver [9]) donde se caracterizaron los ideales primos no maximales de $free_1$.

3.1. Ideales primos de $free_2$

Un MV-ideal I de una MV-álgebra A es primo si y solo si para todo a y b en A, $a \ominus b \in I$ o $b \ominus a \in I$. A continuación desarrollaremos algunos ejemplos con el fin de identificar las condiciones necesarias y suficientes que debe tener un ideal de la MV-álgebra libre $free_2$ de modo que para todo $f, g \in free_2$, $f \ominus g \in free_2$ ó $g \ominus f \in free_2$.

En primer lugar consideraremos los ideales que se anulan en un punto.

Ejemplo 3.1. *El ideal de $free_2$*

$$I_{\left\{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\right\}} = \left\{ f(x,y) \in free_2; f(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) = 0 \right\}$$

es un ideal primo maximal.

Si comparamos cualquier par de funciones h y g de $free_2$ en $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}$ obtenemos tres posibilidades que $h(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = g(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $h(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) < g(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ó $g(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) < h(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, estos tres casos garantizan que $g \ominus h \in I_{\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}}$ o $h \ominus g \in I_{\left\{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\right\}}$ es decir que el ideal $I_{\left\{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\right\}}$ es primo. Por razones analógas $I_{\{(x_0, y_0)\}}$ es primo para todo $(x_0, y_0) \in [0,1]^2$, es decir el ideal de funciones de McNaughton que se anulan en un único punto es primo.

Mas adelante en el lema 3.9 se demostrará que todo ideal $I_{(x_0, y_0)}$ es maximal.

Notación: Dada una formula $a \in free_2$ denotaremos con Z_a al conjunto de ceros de la función a, $Z_a \subseteq [0,1]^2$

$$Z_a = \left\{(x,y) \in [0,1]^2 \,|a(x,y) = 0\right\}$$

Ahora analizaremos los ideales que se anulan en dos puntos fijos.

Ejemplo 3.2. *El ideal de* $free_2$

$$I_{\left\{(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}), (\frac{2}{3}, \frac{2}{3})\right\}} = \left\{f(x,y) \in free_2 \,\middle|\, f(\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}) = 0, \wedge, f(\tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3}) = 0\right\}$$

no es un ideal primo.

Dadas $f(x,y)$,$g(x,y) \in free_2$

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad (x,y) \in [0, \frac{2}{5}] \times [0,1] \\ 3 - 5x & \text{si} \quad (x,y) \in [\frac{2}{5}, \frac{3}{5}] \times [0,1] \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) \in [\frac{3}{5}, 1] \times [0,1] \end{cases}$$

$$g(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad (x,y) \in [0, \frac{1}{2}] \times [0,1] \\ 4x - 2 & \text{si} \quad (x,y) \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \times [0,1] \\ 1 & \text{si} \quad (x,y) \in [\frac{3}{4}, 1] \times [0,1] \end{cases}$$

se tiene que

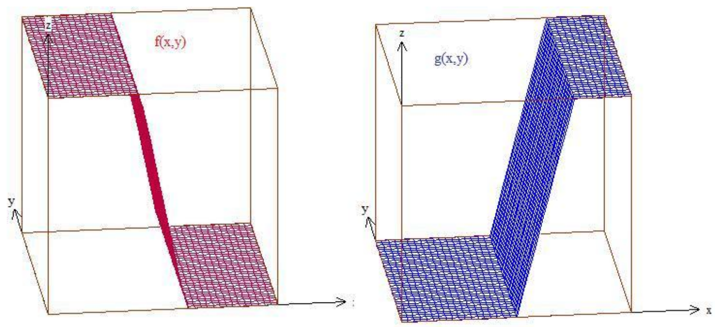
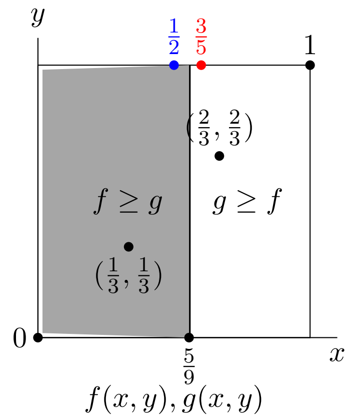


Figura 3.1: Ejemplo 3.2 $f(x,y), g(x,y)$



En el gráfico podemos observar que los dos planos se intersectan en la recta $x = \frac{5}{9}$. Por lo tanto $f > g$ en la región $[0, \frac{5}{9}) \times [0,1]$ y $g > f$ en la región $(\frac{5}{9}, 1] \times [0,1]$, así:

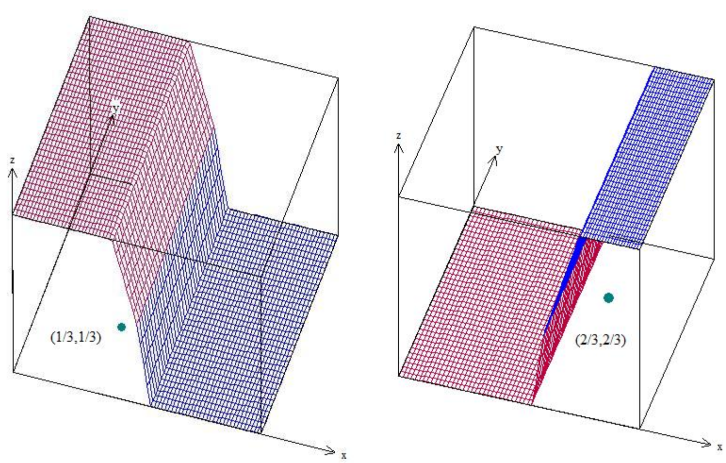


Figura 3.2: Ejemplo 3.2: $f \ominus g(izquierda), g \ominus f(derecha)$

Así el punto $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \notin Z_{f \ominus g}$ y el punto $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}) \notin Z_{g \ominus f}$, por lo tanto $I_{\{(\frac{1}{3},\frac{1}{3}),(\frac{2}{3},\frac{2}{3})\}}$ no es un ideal primo.

En general y por razones análogas al ejemplo anterior, los MV-ideales de la forma I_A cuyas funciones se anulan en un conjunto fijo A con más de un punto, no son primos.

Caracterización de Ideales Primos de $free_2$.

A continuación enunciaremos y desarrollaremos algunos lemas y proposiciones que nos permitirán construir funciones de McNaughton y realizar las demostraciones necesarias para caracterizar los ideales primos de $free_2$ en la siguiente sección.

Lema 3.1. *Dados $f, g \in free_n$ entonces $Z_{f \oplus g} = Z_f \cap Z_g$ (Ver* [2], *proposición 2.3)*

Demostración: *Si $x \in Z_{f \oplus g}$ entonces $f(x) \oplus g(x) = 0$, y como $f(x) \geq 0$ y $g(x) \geq 0$ se tiene que $x \in Z_f \cap Z_g$, de forma que $Z_{f \oplus g} \subset Z_f \cap Z_g$. Si $x \in Z_f \cap Z_g$ obtenemos que $f(x) \oplus g(x) = 0$, entonces $x \in Z_{f \oplus g}$, por lo tanto $Z_{f \oplus g} = Z_f \cap Z_g$.*

Veamoslo gráficamente:

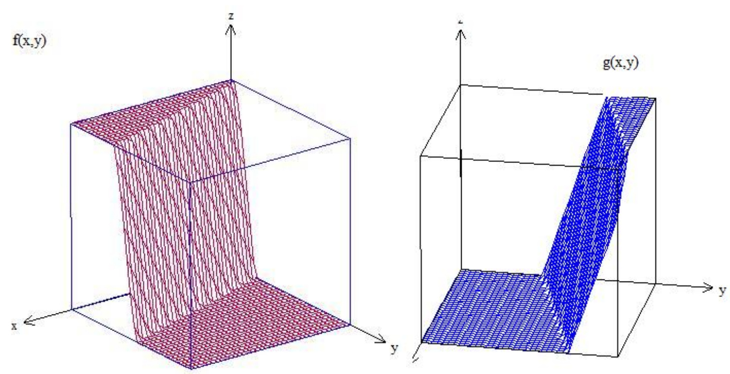


Figura 3.3: Lema 3.1: $f(x, y)$ y $g(x, y)$

donde $Z_{f \oplus g} = Z_f \cap Z_g$

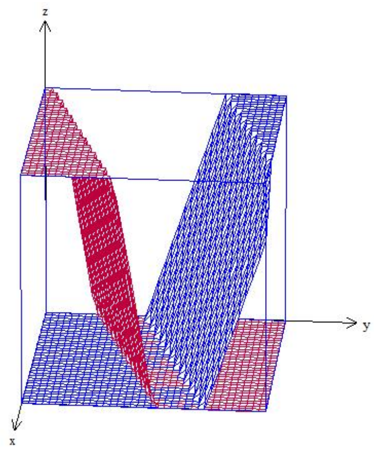
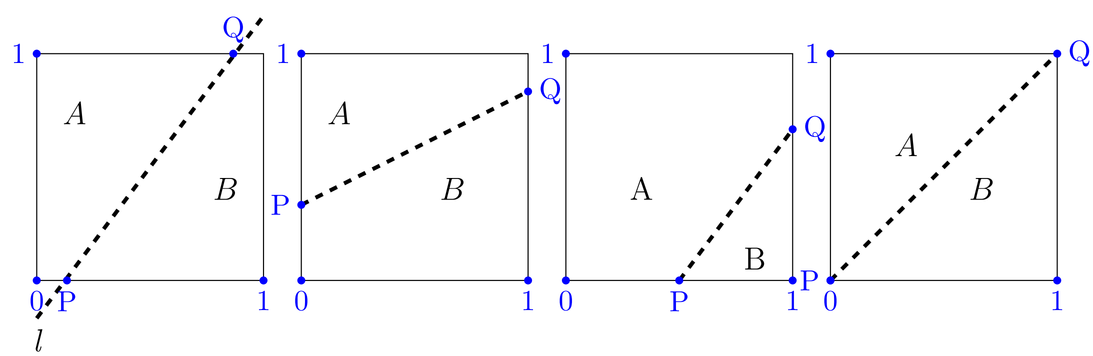


Figura 3.4: Lema 3.1: $Z_{f\oplus g} = Z_f \cap Z_g$

Construcción de funciones de McNaughton

Dado un simplex fijo daremos un método para construir funciones de McNaugthon que se anulan en él.

Lema 3.2. *Dados* $P, Q, \in \mathbb{Q}^2$ *en dos bordes del cuadrado* $[0,1]^2$ *como se muestra en las figuras.*



existen $f_A \in free_2$, tal que $Z_{f_A} = A$ y $f_B \in free_2$, tal que $Z_{f_B} = B$, con $A \cap B = l = \overline{PQ}$, $A \cup B = [0,1]^2$ y $Z_{f_A \oplus f_B} = l$.

Demostración : Como $P, Q \in \mathbb{Q}^2$, l tiene la ecuación:

$$0 = ax + by + c, \quad a, b, c \in \mathbb{Z}$$

De la ecuación anterior construimos el plano

$$p(x, y) = ax + by + c \in free_2$$

entonces $p(x, y) = 0$ sobre la recta l y $p(x, y) \leq 0$ en A ó en B, así ceros de $p^{\#} = Z_{p^{\#}} = A$ si $p(x, y) \leq 0$ para todo $(x, y) \in A$, de lo contrario $Z_{p^{\#}} = B$.

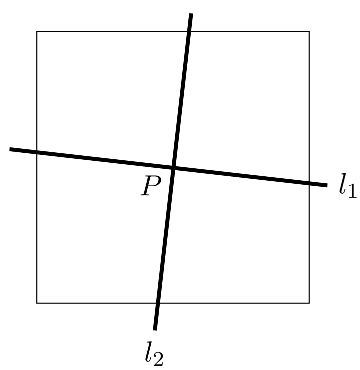
Podemos ver que si $Z_{p^{\#}}$ $=A$ entonces $Z_{(-p)^{\#}} = B$. Se sigue directamente de la definición de $p(x, y)$.

Corolario 3.3. *Dada $l \subseteq [0, 1]^2$ linea que une dos puntos racionales de dos bordes de $[0, 1]^2$, existe $f_l \in free_2$ $(Z_{f_l} = l)$.*

Por el lema (3.2), existen f_A, f_B en $free_2$ y $f_l = f_A \vee f_B$

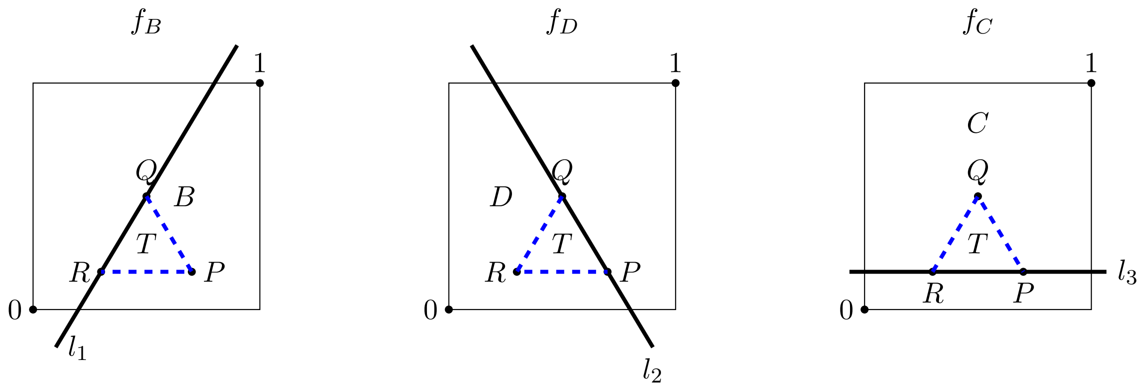
Corolario 3.4. *Dado P un punto de $[0, 1]^2 \cap \mathbb{Q}^2$,existe $f_P \in free_2$, tal que $Z_{f_P} = P$.*

Demostración: Por construcción existen l_1, l_2 tales que intersectan el borde de $[0, 1]^2$ en puntos de $\mathbb{Q}^2$ y $l_1 \cap l_2 = \{P\}$. Por el corolario 3.3 existen $f_{l_1}, f_{l_2} \in free_2$. Así $f_P = f_{l_1} \oplus f_{l_2}$, debido a que $Z_{f_{l_1} \oplus f_{l_2}} = Z_{f_{l_1}} \cap Z_{f_{l_2}} = Z_{f_P} = \{P\}$.



Corolario 3.5. *Dado un triángulo $T \subseteq [0, 1]^2$, cuyos vértices están en $\mathbb{Q}^2$, existe $f_T \in free_2$, tal que $Z_{f_T} = T$.*

Demostración: Dadas l_1, l_2, l_3 tres rectas correspondientes a cada uno de los lados de T, se tiene que ellas intersectan los bordes del cuadrado en puntos racionales y por construcción existen f_B, f_D y f_C en $free_2$ tales que $T \subseteq B \cap D \cap C$ y ,

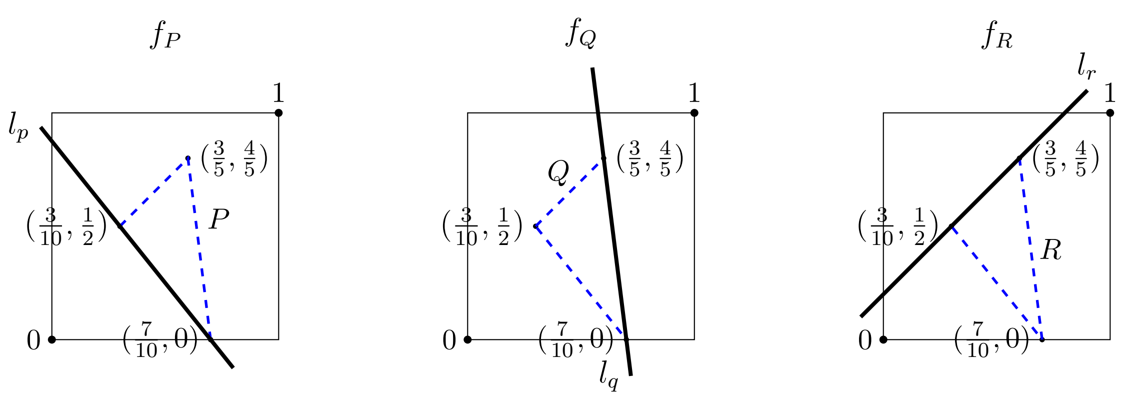


$$f_T = f_B \oplus f_C \oplus f_D \in free_2$$

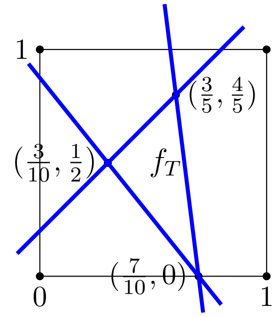
El Corolario anterior lo ilustraremos con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.3.

Dado T el triangulo cuyos vértices son :$(\frac{3}{10}, \frac{1}{2}), (\frac{3}{5}, \frac{4}{5}), (\frac{7}{10}, 0)$ y los planos $p(x, y) = -10x - 8y + 7, q(x, y) = 40x + 8y - 28, r(x, y) = -5x + 5y - 1$,tenemos l_p, l_q y l_r como se muestra en los gráficos.



Obtenemos $f_P \oplus f_Q \oplus f_R = f_T \in free_2$



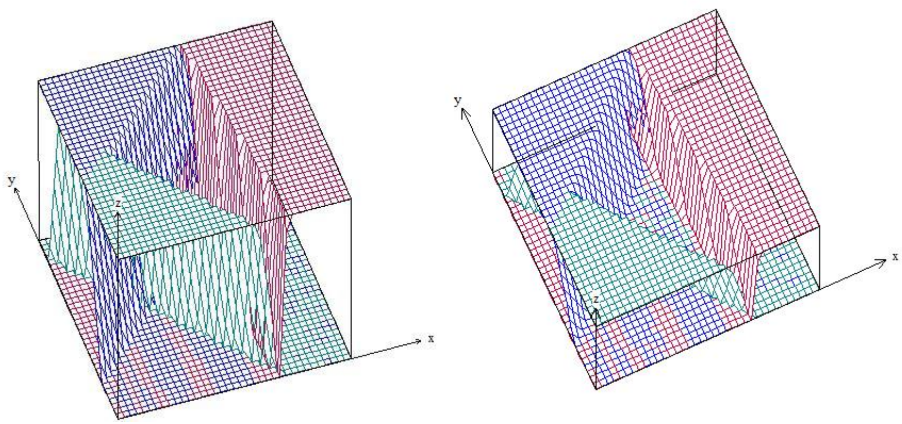


Figura 3.5: Ejemplo 3.3: $f_T = f_P \oplus f_Q \oplus f_R$

Lema 3.6. *Dado $f \in free_2$, si $Z_f = \emptyset$, entonces existe $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $n.f = 1$.*

Demostración: *Por la compacidad de $[0,1]^2$ y la continuidad de f, existe $(x_0, y_0) \in [0,1]^2$ tal que $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$, para todo $(x, y) \in [0,1]^2$, como $f(x_0, y_0) > 0$, existe $n \in \mathbb{Z}^+$, tal que $1 = n \cdot f(x_0, y_0) \leq n \cdot f(x, y)$.*

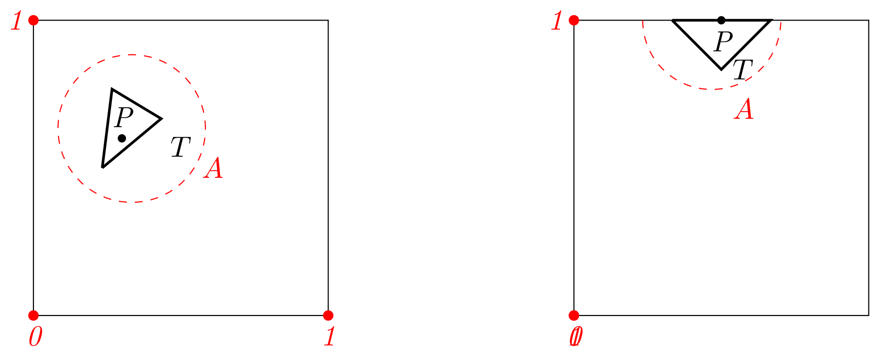
Lema 3.7. *Dada una función $f \in free_2$ con $f(x_0, y_0) > 0$, existe un abierto A de la topología usual de $[0,1]^2$ como subespacio de $\mathbb{R}^2$, con $(x_0, y_0) \in A$, tal que $f(x, y) > 0$ para todo $(x, y) \in A$*

Demostración: *Teorema de Conservación del signo de funciones continuas. Ver (* [8])

Corolario 3.8. *Dado $f \in free_2$, con $f(x_0, y_0) > 0$, existe T un triángulo con vértices en $\mathbb{Q}^2$ tal que $(x_0, y_0) \in T \subset [0,1]^2$ y $f(x, y) > 0$, para todo $(x, y) \in T$, es decir la topología cuya base de abiertos son los simplex con vértices racionales es más fina que la usual.*

Demostración:*Por el lema (3.7) existe A un abierto de $[0,1]^2$ con la topología usual de $\mathbb{R}^2$ inducida a $[0,1]^2$,que contiene a $P = (x_0, y_0)$ y por la densidad de $\mathbb{Q}^2$ en $[0,1]^2$*

es posible encontrar un triángulo T con vértices racionales tal que $P \in T$ y $T \subseteq A$, como se muestra en el gráfico.



Lema 3.9. $I_{(x_0,y_0)} = \{f \in free_2 \,|\, f(x_0, y_0) = 0\}$ *es ideal maximal para todo* $(x_0, y_0) \in [0, 1]^2$

Este lema se encuentra en [3] para el caso general, aquí presentamos una demostración para el caso free$_2$.

Demostración: Dado $g(x, y) \notin I_{(x_0,y_0)}$,del corolario(3.8) , existe T triángulo con vértices racionales tal que $(x_0, y_0) \in T$ y $g(x, y) > 0$,para todo $(x, y) \in T$ y del corolario(3.5), existe $f \in free_2$ tal que $Z_f = T$ con lo cual $f \in I_{(x_0,y_0)}$ y $Z_{f \oplus g} = \phi$, y del lema(3.6), $n.(f \oplus g) = 1$ y $< I_{(x_0,y_0)}, g >= free_2$. Por lo tanto $I_{(x_0,y_0)}$ es un ideal maximal.

Nota: Para todo ideal I de $free_2$ tenemos que $V_I = \cap\{Z_f : f \in I\}$. Por proposición 3.4.2, del libro [1] tenemos que para cada ideal propio I de $free_2$ se tiene que $V_I \neq \emptyset$.

Lema 3.10. *Todo ideal maximal I en $free_2$ es de la forma $I_{(x_0,y_0)}$.*

Demostración: *Como I es un ideal propio de $free_2$, $V_I \neq \emptyset$, entonces existe $(x_0, y_0) \in V_I$ por lo tanto $I \subseteq I_{(x_0,y_0)}$, como I es maximal entonces son iguales.*

Lema 3.11. *(Ver* [3], *Lema 3.4.8.) Sea $f, g \in free_n$, entonces*

$$g \in \langle f \rangle \text{ si y solo si } Z_g \supseteq Z_f$$

Lema 3.12. *(Ver* [3], *Corolario 1.2.12.) Todo ideal primo I de una MV-álgebra A está contenido en un único ideal maximal de A*

3.2. Ideales primos no maximales de $free_2$

En la sección anterior observamos que los ideales de funciones que se anulan en un conjunto fijo A con más de un punto no son primos y que los ideales que se anulan en un punto son maximales. En esta sección se caracterizarán los ideales primos no maximales de $free_2$. En el artículo [2] se encuentra la caracterización de los ideales primos no maximales de las MV-álgebras libres $free_n$, cuyo enfoque es algebraico y combinatorio. Queremos hacer la misma representación para el caso $free_2$ desde un enfoque geométrico más simple que el desarrollado en [2] . El caso $free_1$ fue tratado en [9].

3.3. 1-Simplex

Analizaremos los segmentos de recta con un punto fijo, una dirección fija y una longitud variable, teniendo en cuenta las siguientes consideraciones:

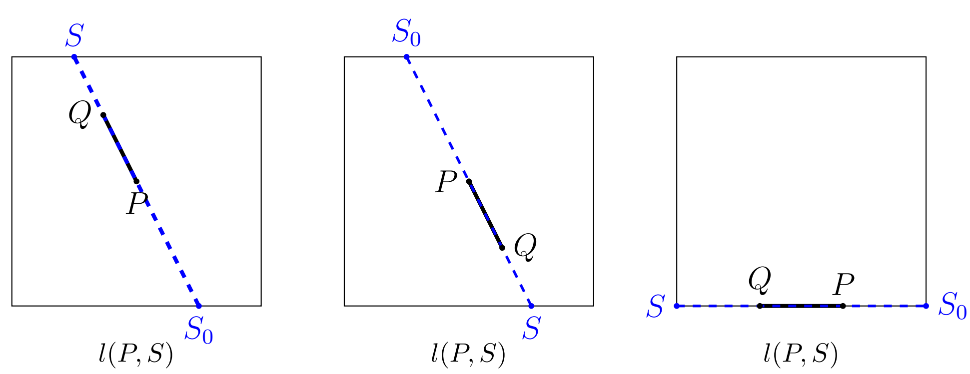
Llamaremos $rect(P, S)$ a la recta generada por los puntos P y S

Llamaremos línea racional a la recta determinada por la ecuación $ax + by + c = 0$ con $a, b, c \in \mathbb{Q}$ y diremos que $\overline{PS}$ es racional si pertenece a una línea racional.

Un punto P es racional si sus dos coordenadas son racionales.

Definición 3.13. *Dados* $P \in [0, 1]^2 \cap \mathbb{Q}^2$, S *en el borde de* $[0, 1]^2 \cap \mathbb{Q}^2$.

$$l(P, S) = \left\{\overline{PQ}\,\middle|\,Q \in \overline{PS}, P \neq Q\right\}$$



Notación: Dada f una función de $free_2$

$f(\overline{PQ})= \left\{f(x,y)|\ para\ todo\ (x,y)\in \overline{PQ}\right\}$

Definición 3.14. $I_{l(P,S)}=$

$\left\{f\in free_2|f(\overline{PQ})=0\ para\ alg\acute{u}n\overline{PQ}\in l(P,S)\ que\ depende\ de\ f\right\}$

Proposición 3.15. $I_{l(P,S)}$ *es MV-Ideal primo no maximal.*

Demostración:

1. $I_{l(P,S)}$ es un MV-ideal

   i) $0\in I_{l(P,S)}$

   ii) Dados $f,g\in I_{l(P,S)}$, entonces existen Q,Q' tales que $f(\overline{PQ})=0$ y $g(\overline{PQ'})=0$, con $\overline{PQ},\overline{PQ'}\in l(P,S)$. $\overline{PQ}\cap\overline{PQ'}=\overline{PQ''}\in l(P,S)$ y $f\oplus g(\overline{PQ''})=0$, con lo cual $f\oplus g\in l(P,S)$.

   iii) Si $f\in free_2$, $g\in I_{l(P,S)}$ y $f\leq g$ para todo $(x,y)\in[0,1]^2$, entonces $Z_g\subset Z_f$, luego $f\in I_{l(P,S)}$

2. $I_{l(P,S)}$ es primo

   Dados $f,g\in free_2$, se cumple que $f(P)=g(P)$, $f(P)>g(P)$, $g(P)>f(P)$

   Si $f(P)>g(P)$, por continuidad y teorema (3.7) existe $\overline{PQ}\in l(P,S)$,tales que $f\ominus g(\overline{PQ})>0$ y así $g\ominus f(\overline{PQ})=0$.

   Si $g(P)>f(P)$ la demostración es análoga

   Si $f(P)=g(P)$, se tienen dos casos

   caso 1 : Existe $\overline{PQ}\in l(P,S)$ tal que $f(\overline{PQ})=g(\overline{PQ})$ y así $f\ominus g(\overline{PQ})=0$.

   caso 2 : Si no, como f y g son funciones continuas definidas localmente por planos, existe $\overline{PQ}$ tal que $f<g$ en $\overline{PQ}-\{P\}$ ó $g<f$ en $\overline{PQ}-\{P\}$. Sí pasa lo primero entonces $f\ominus g(\overline{PQ})=0$, en caso contrario $g\ominus f(\overline{PQ})=0$.

3. $I_{l(P,S)}$ no es maximal.

   $I_{l(P,S)}\subset I_P$,como $P\in\mathbb{Q}^2$, existe f tal que $Z_f=\{P\}$, entonces $f\notin I_{l(P,S)}$.

Observación: Si $rect(P,S)$ no es racional, entonces $I_{l(P,S)}$ es un 2-simplex, ya que en este caso no existe ningún plano de McNaughton que se anule exactamente sobre la línea no-racional $rect(P,S)$ (Ver corolario 3.24).

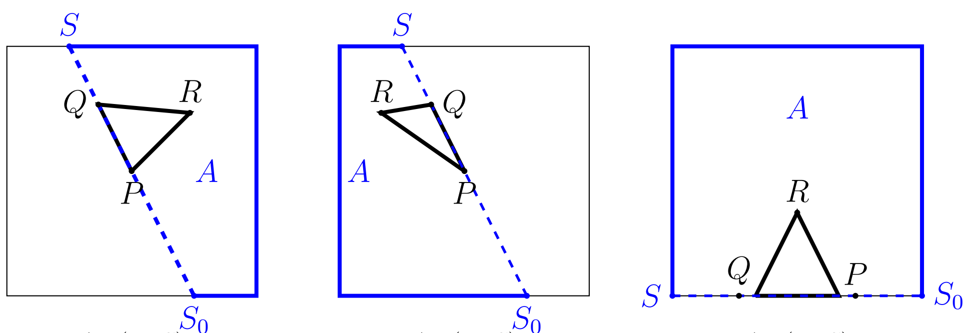
3.4. 2-Simplex

A continuación analizaremos los triángulos ΔPQR con vértices racionales de área variable que contienen una línea con dirección fija.

3.4.1. Triángulos ΔPQR de vértices racionales, con un punto fijo P , y un punto Q variable sobre una dirección fija $\overline{PS}$, con $\overline{PS}$ segmento racional.

Definición 3.16. *Dados $S, P \in [0,1]^2 \cap \mathbb{Q}^2$, $P \neq S$ y A una de las regiones de $[0,1]^2$ determinada por $rect(P,S)$ racional ,definimos:*

$$\Delta_A(P,S) = \left\{\Delta PQR \mid R \in A^\circ, \overline{PQ} \subseteq \overline{PS}, P \neq Q\right\}$$

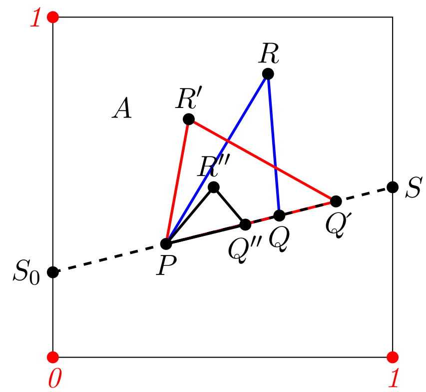


$\Delta_A(P,S)$ $\Delta_A(P,S)$ $\Delta_A(P,S)$

Nótese que los triángulos de $\Delta_A(P,S)$ son de área positiva.

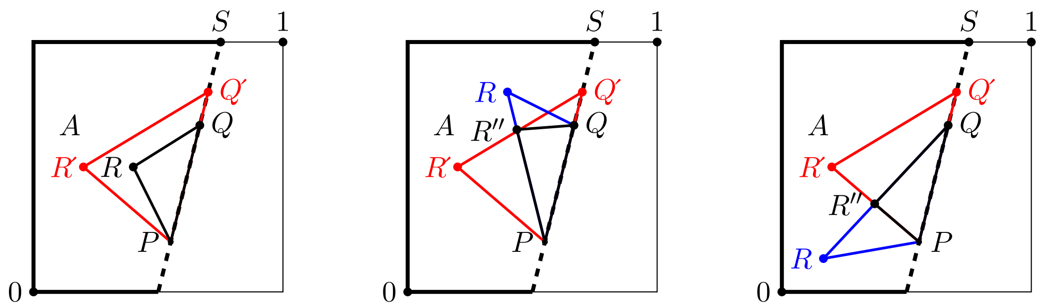
Proposición 3.17. *$\Delta_A(P,S)$, es filtrante para intersecciones finitas, es decir dados $\Delta PQR, \Delta PQ'R' \in \Delta_A(P,S)$, existe $\Delta PQ''R'' \subset \Delta PQR \cap \Delta PQ'R'$ con $\Delta PQ''R'' \in \Delta_A(P,S)$*

Demostración: *$\Delta PQR, \Delta PQ'R'$, dos triángulos contenidos en la región A, $\Delta PQR \cap \Delta PQ'R'$ es convexo y de área positiva por construcción; luego existen $R'', Q'' \in \Delta PQR \cap \Delta PQ'R'$ tales que $R'' \notin \overline{PS}$, $Q'' \in \overline{PS}$ y $\Delta PQ''R''$ satisface las condiciones pedidas.*



$\Delta PQ''R'' \subseteq \Delta PQR \cap \Delta PQ'R'$

A continuación graficamos algunos casos particulares:



$\Delta PQR \subseteq \Delta_A(P,S)$ $\Delta PQR'' \subseteq \Delta_A(P,S)$ $\Delta PQR'' \subseteq \Delta_A(P,S)$

Notación: $f(\Delta PQR) = \{f(x,y) \mid \textit{para todo } (x,y) \in \Delta PQR\}$

Definición 3.18. $I_{\Delta_A(P,S)} =$

$\{f \in free_2 \mid f(\Delta PQR) = 0 \textit{ para algún } \Delta PQR \in \Delta_A(P,S) \textit{ que depende de } f\}$

Proposición 3.19. $I_{\Delta_A(P,S)}$ *es ideal primo no maximal.*

Demostración:

1. $I_{\Delta_A(P,S)}$ *es un ideal.*

   i) $0 \in I_{\Delta_A(P,S)}$

   ii) Dados $f, g \in I_{\Delta_A(P,S)}$, *entonces* $f(\Delta PQR) = 0$ *y* $g(\Delta PQ'R') = 0$, *por proposición (3.17), existe* $\Delta PQ''R'' \subseteq \Delta PQR \cap \Delta PQ'R'$, *con* $\Delta PQ''R'' \in \Delta_A(P,S)$, *así* $f \oplus g \in I_{\Delta_A(P,S)}$

   iii) *Si $f \in free_2$, $g \in I_{\Delta_A(P,S)}$ y $f \leq g$ para todo $(x,y) \in [0,1]^2$, entonces $Z_g \subset Z_f$, luego $f \in I_{\Delta_A(P,S)}$*

2. *$I_{\Delta_A(P,S)}$ es un ideal primo.*

   Dados $f,g \in free_2$, se cumple que $f(P) = g(P), f(P) > g(P), g(P) > f(P)$.

   Si $f(P) > g(P)$, por continuidad y ley del signo existe $\Delta PQR \in \Delta_A(P,S)$, $f \ominus g(\Delta PQR) > 0$ y así $g \ominus f(\Delta PQR) = 0$.

   Si $g(P) > f(P)$ la demostración es análoga.

   Si $f(P) = g(P)$,se tienen dos casos

   1 : *Existe $\Delta PQR \in \Delta_A(P,S)$ tal que $f(\Delta PQR) = g(\Delta PQR)$ y así $f \ominus g(\Delta PQR) = 0$.*

   2 : *Si no, como f y g son funciones continuas definidas localmente por planos, existe $\Delta PQR \in \Delta_A(P,S)$ donde $f(x,y) = p(x,y)$ y $g(x,y) = q(x,y)$ para todo $(x,y) \in \Delta PQR$ con $p(x,y)$ y $q(x,y)$ polinomios lineales tales que $f \leq g$ en ΔPQR ó $g \leq f$ en ΔPQR. Sí pasa lo primero entonces $f \ominus g(\Delta PQR) = 0$, de lo contrario $g \ominus f(\Delta PQR) = 0$.*

3. *$I_{\Delta_A(P,S)}$ no es maximal.*

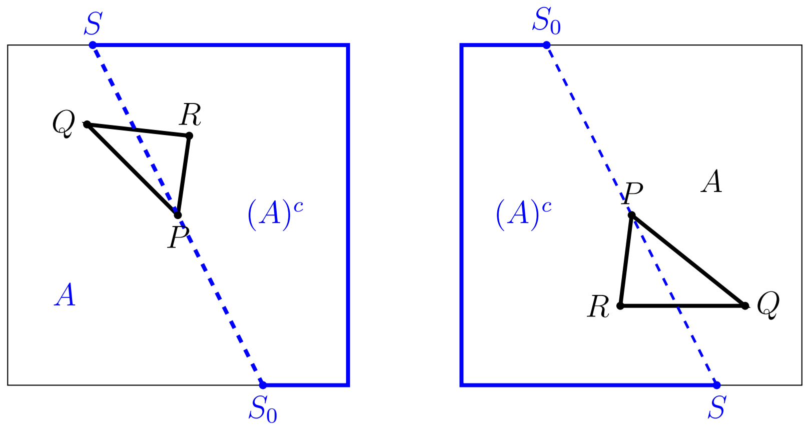
   $I_{\Delta_A(P,S)} \subset I_P$,como $P \in \mathbb{Q}^2$, existe f tal que $Z_f = \{P\}$, entonces $f \notin I_{\Delta_A(P,S)}$.

3.4.2. Triángulos ΔPQR con vértices racionales, P un punto fijo y $\overline{PS}$ segmento no-racional.

Definición 3.20. *Dados $P \in [0,1]^2 \cap \mathbb{Q}^2$,$S \notin [0,1]^2 \cap \mathbb{Q}^2$ y A una de las regiones de $[0,1]^2$ determinada por $rect(P,S)$ no-racional, definimos:*

$$\Delta(P,S) = \left\{ \Delta PQR |\ Q \in A^\circ,\ R \in (A)^c, \overline{PS} \cap \Delta PQR \neq P \right\}$$

En este caso no existe ningún plano de McNaughton que se anule exactamente sobre la línea no-racional $rect(P,S)$



$\Delta(P,S)$ $\Delta(P,S)$

ΔPQR: Triángulo con vértices $P, Q, R \in \mathbb{Q}^2$

Proposición 3.21. *Dados ΔPQR , $\Delta PQ'R' \in \Delta(P,S)$, existe $\Delta PQ''R'' \in \Delta(P,S)$ tal que $\Delta PQ''R'' \subseteq \Delta PQR \cap \Delta PQ'R'$.*

Demostración: La demostración es análoga a la de la proposición (3.17), solo se deben considerar $Q, Q' \in A^{\circ}, R, R' \in (A)^c$

Definición 3.22. $I_{\Delta(P,S)} =$

$\{f \in free_2 \,|\, f(\Delta PQR) = 0$ *para algún* $\Delta PQR \in \Delta(P,S)$ *que depende de* $f\}$

Proposición 3.23. *$I_{\Delta(P,S)}$ es ideal primo no maximal*

Demostración:

La demostración es análoga a la de la proposición 3.19

Corolario 3.24. *Si $rect(P,S)$ no es racional, entonces $I_{l(P,S)} = I_{\Delta}(P,S)$*

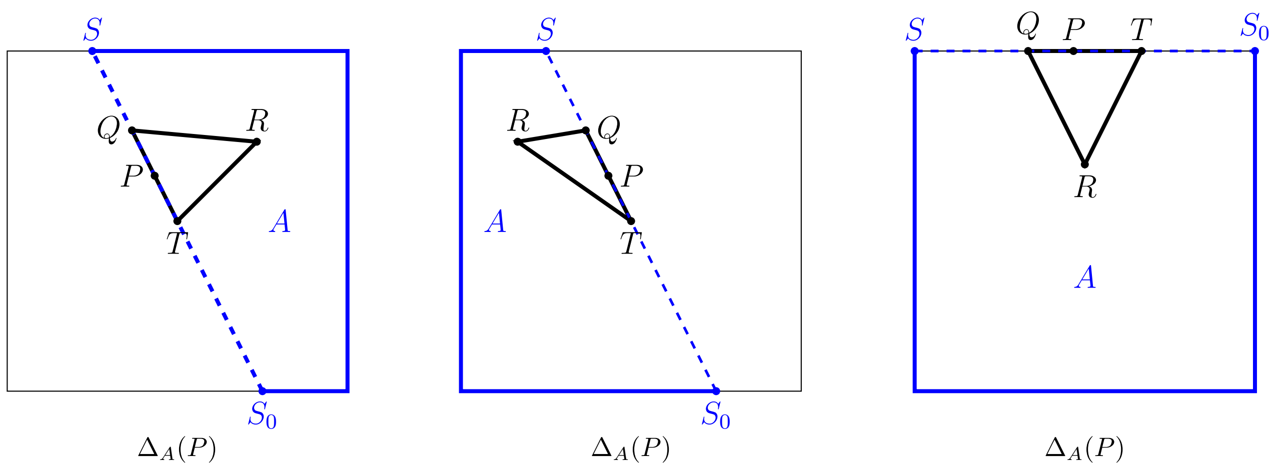
Proposición 3.25. *$I_{\Delta(P,S)}$ con $\overline{PS}$ segmento racional es un* ***ideal no primo***

Demostración: Si $rect(P,S)$ es racional podemos encontrar dos funciones f y g de $free_2$ tales que $Z_{f\ominus g} \cap Z_{g\ominus f} = rect(P,S)$, luego $f \ominus g \notin I_{\Delta(P,S)}$ y $g \ominus f \notin I_{\Delta(P,S)}$, luego $I_{\Delta(P,S)}$ no es primo.

3.4.3. Triángulos con vértices racionales $\Delta TQR \subseteq [0,1]^2$, P un punto no racional y $P \in \overline{QT} \subseteq rect(P,S)$ racional.

Definición 3.26. *Dados P punto no racional, $\overline{PS}$ segmento racional, A una de las regiones de $[0,1]^2$ determinada por $rect(P,S)$, definimos:*

$$\Delta_A(P) = \left\{\Delta TQR |\ R \in A^\circ, \overline{TQ} \subseteq rect(P,S), P \in \overline{TQ}\right\}$$



ΔTQR: Triángulo con vértices $T, Q, R \in \mathbb{Q}^2 \cap [0,1]^2$

$$f(\Delta TQR) = \{f(x,y) \,|\, \textit{para todo } (x,y) \in \Delta TQR\}$$

Definición 3.27. *$I_{\Delta_A(P)}$ es igual a:*

$\{f \in free_2 \,| f(\Delta TQR) = 0$ *para algún* $\Delta TQR \in \Delta_A(P)$ *que depende de* $f\}$

Nota: Eliminamos la letra S de la notación debido a que si pasa recta racional por P un punto no racional esta es única.

Proposición 3.28. *$I_{\Delta_A(P)}$ es ideal primo no maximal.*

Demostración: *1. $I_{\Delta_A(P)}$ es ideal primo. La demostración es análoga a la de la proposición 3.19*

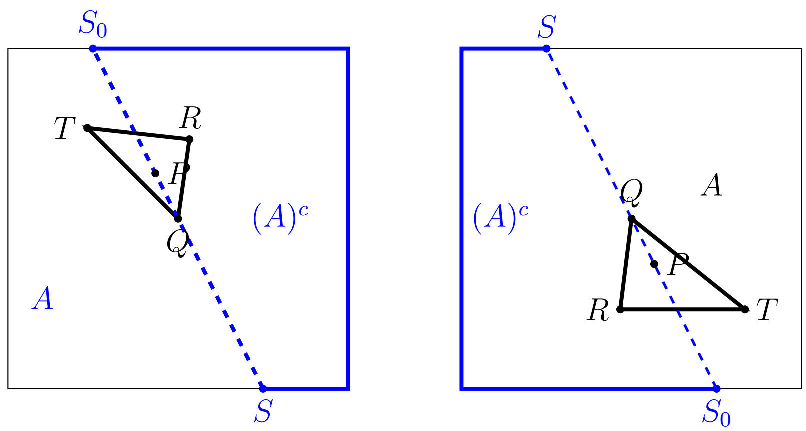
2.) $I_{\Delta_A(P)}$ ideal primo no maximal.

$I_{\Delta_A(P)} \subset I_P$,como $P \notin \mathbb{Q}^2 \cap [0,1]^2$ y $rect(P,S)$ es racional, existe $g \in I_P$ tal que $Z_g = A^c$, entonces $g \notin I_{\Delta_A(P)}$, se sigue que no es maximal

3.4.4. Triángulos ΔTQR con vértices racionales, P un punto no-racional en el interior del triángulo y $\overline{PS}$ segmento no-racional.

Definición 3.29. *Dado P un punto no-racional, definimos:*

$$\Delta(P) = \left\{\Delta_P TQR | P \in (\Delta TQR)^{\circ}, T \in A^{\circ},\ R \in (A)^c, Q \subseteq \overline{PS}\right\}$$



$\Delta(P)$ $\Delta(P)$

$$f(\Delta_P TQR) = \{f(x, y) \,|\, para\ todo\ (x, y) \in \Delta QRT\}$$

Proposición 3.30. *Dados $\Delta_P QRT$, $\Delta_P Q'R'T' \in \Delta(P)$, existe $\Delta_P Q''R''T'' \in \Delta(P)$ tal que $\Delta_P Q''R''T'' \subseteq \Delta_P QRT \cap \Delta_P Q'R'T'$.*

Demostración: Se tiene directamente por construcción, análoga a la de la proposición (3.17), solo se deben considerar $T, T' \in A^{\circ}, R, R' \in (A)^c$

Notación: $f(\Delta_P TQR) = \{f(x, y) \,|\, para\ todo\ (x, y) \in \Delta TQR\}$

Definición 3.31. $I_{\Delta_S(P)} =$

$\{f \in free_2 \,| f(\Delta_P TQR) = 0\ para\ algún\ \Delta_P TQR \in \Delta(P)\ que\ depende\ de\ f\}$

Para esta situación debemos analizar 2 casos. Si por P no pasa ninguna linea racional ó si pasa una única linea racional.

Caso 1: El punto P no pertenece a ninguna línea racional

Proposición 3.32. *Dado P un punto que no pertenece a ninguna linea racional, $I_{\Delta_S(P)}$ es ideal maximal*

Demostración: 1. $I_{\Delta_S(P)}$ es ideal. La demostración es análoga al numeral 1 de la proposición 3.19

2.) $I_{\Delta_S(P)} = I_P$ ideal maximal.

$\subseteq$) $I_{\Delta_S(P)} \subseteq I_P$, se tiene por definición de maximal.

$\supseteq$) Dada $f \in I_P$, se tiene que $f(P) = 0$, como por P no pasa ninguna línea racional, existe V abierto de $[0,1]^2$ con la topología usual, tal que $f(V) = 0$ y $0 \in V$ (P no esta en la frontera de ningún simplex), entonces existe $\Delta(TQR) \subseteq V$ tal que $0 \in \Delta(TQR)^{\circ}$ y $f(\Delta(TQR)) = 0$. Así $f \in I_{\Delta_S(P)}$

Caso 2: El punto P pertenece a una única línea racional

Proposición 3.33. *Dado P un punto no racional tal que existe $rect(P, S')$ racional, $I_{\Delta_S(P)}$ no es primo.*

Demostración: Si existe $rect(P, S')$ racional que pasa por P, podemos encontrar dos funciones f y g de $free_2$ tales que $Z_{f \ominus g} \cap Z_{g \ominus f} = rect(P, S)$, luego $f \ominus g \notin I_{\Delta_S(P)}$ y $g \ominus f \notin I_{\Delta_S(P)}$, luego $I_{\Delta_S(P)}$ no es primo.

Lema 3.34. *Dado I un ideal primo definimos,*

$$\hat{I} = \{f \in I | Z_f \text{ es un simplex}\}$$

entonces $< \hat{I} >= I$

Demostración: $< \hat{I} > \subset I$ se obtiene directamente, veamos que $I \subset < \hat{I} >$, dado $g \in I$, se tiene que $Z_g = \bigcup_{i=1}^{n} Z_{fi} = Z_{\bigwedge_{i=1} f_i}$, con Z_{fi} un simplex para todo i , entonces $\wedge f_i \in I$ (Ver [3], Proposición 3.4.8). Como I es primo para algún $i = i_0$, $f_{i_o} \in I$, por lo tanto $f_{i_o} \in \hat{I}$. Como $g \in < f_i >$ entonces $g \in < \hat{I} >$.

Con los lemas y proposiciones anteriores tenemos las suficientes herramientas para demostrar que los únicos ideales primos no maximal de $free_2$ son de la forma I_Δ con Δ un 1-simplex ó un 2-simplex.

Teorema 3.35. *Todo ideal primo no maximal de $free_2$ es de la forma , $I_{l(P,S)}$, $I_{\Delta_A(P,S)}$, $I_{\Delta(P,S)}$ ó $I_{\Delta_A(P)}$*

Demostración: Sea I un MV-ideal primo no maximal, entonces I está contenido en un único MV-ideal maximal I_X(Ver [3], corolario 1.2.12), y no existe $f \in I$ tal que Z_f es un 0-simplex (de existir I sería maximal).

Supongamos $X \in [0,1]^2 \cap \mathbb{Q}^2$

- **3.35.1** Veamos primero que si existe $g \in I$ y Z_g es un 1-simplex entonces $g \in I_{l(X,S)}$ y $I = I_{l(X,S)}$

$\subseteq$) Dado $h \in \hat{I}$ y $h \notin I_{l(X,S)}$, tenemos que $g \oplus h \in I$ y $Z_{g \oplus h} = \{X\}$, lo cual es absurdo, luego $I =< \hat{I} > \subseteq I_{l(X,S)}$.

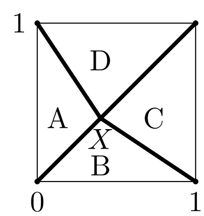
$\supseteq$) Dado $f \in I_{l(X,S)}$, puede pasar que $Z_g \subseteq Z_f$ ó $Z_f \subseteq Z_g$; sí $Z_g \subseteq Z_f$, $f \in < g >$ (Ver lema 3.11), y así $f \in I$.

Sí $Z_f \subseteq Z_g$, existe q tal que $Z_q = Z_g - Z_f$ (debido a que $Z_g - Z_f$ es un 1-simplex de extremo racional), luego $Z_{f \wedge q} = Z_g$, así $f \wedge q \in I$, como $q \notin I$ puesto que $q(X) \neq 0$ entonces $f \in I$.

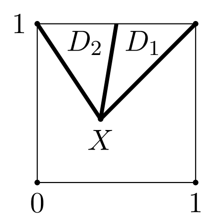
- **3.35.2** Si no existe $g \in I$ tal que Z_g es un 1-simplex entonces existe $g \in I$, tal que Z_g es un 2-simplex.

Consideremos los 2-simplex con extremo racional A, B, C, D como muestra la figura:

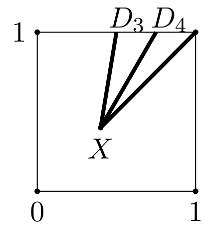
Como $g_A \wedge g_B \wedge g_C \wedge g_D = [0,1]^2$, alguno de ellos esta en I, debido a que I es primo (Ver lema C.3), supongamos $g_D \in I$. Dividamos D en dos regiones D_1 y D_2.



$g_{D1} \wedge g_{D2} \in I$, como I es primo alguno de ellos esta en I, supongamos que $g_{D1} \in I$, dividimos nuevamente D_1 en dos regiones D_3 y D_4.



$g_{D3} \wedge g_{D4} \in I$, como I es primo alguno de ellos esta en I, supongamos que $g_{D3} \in I$, al proceder de manera similar obtenemos una sucesión de 2-simplex con un vértice en X y los otros dos vértices en una cara fija de $[0,1]^2$, tal que $D \supset D_1 \supset D_3 \supset ... \supset D_i \supset ...$



Como los conjuntos D_i son cerrados y acotados con la topología usual, por el teorema de encaje de Cantor existe un segmento $\overline{XS} = \bigcap Z_{g_{Di}}$, con $g_{Di} \in I$, para todo i, con $S \in (caras\ de\ [0,1]^2) \cap D$.

En particular l es una línea de acumulación de los D_i; es decir para todo $\epsilon > 0$ existe g_{Di} tal que $Z_{g_{D_i}} \subset \Delta(X, S-\epsilon, S+\epsilon)$, la linea l puede ser racional o no.

- **3.35.2.1** Si $l = \overline{XS}$ es racional veremos que:

$$I = I_{\Delta_A(X,S)}$$

con A una de las regiones determinada por la recta generada por $\overline{XS}$. (Si $rect(X,S)$ es un borde de $[0,1]^2$, $A = [0,1]^2$ existe $g_A \in free_2$, $g_A = 0$ tal que $g_A \in I$, ahora si $rect(X,S)$ es una línea interior, divide $[0,1]^2$ en dos regiones , A y A^c, entonces existen $g_A, g_{A^c} \in free_2$, tales que $g_A \wedge g_{A^c} = 0$ y así alguno de ellos esta en I, a partir de ahora consideraremos $g_A \in I$)

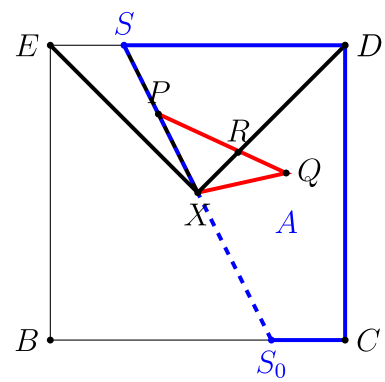
$\subseteq$) Dado $f \in \hat{I}$, $f \notin I_{\Delta_A(X,S)}$, Z_f es un 2-simplex, $g_D \in I$ y en general $g_{Di} \in I$, $l = \overline{XS} = \bigcap Z_{g_{D_i}}$, entonces $Z_f \cap l = X$ ó $Z_f \cap l = \overline{XQ} \in \overline{XS}$

Sí $Z_f \cap l = X$, como l es de acumulación para los D_i, existe g_{D_i} tal que $Z_f \cap Z_{g_{D_i}} = X$, lo cual es absurdo puesto que I no es maximal y $f \oplus g_{D_i} \in I$; así $f \in I_{\Delta_A(X,S)}$.

Ahora, sí $Z_f \cap l = \overline{XQ}$, entonces $Z_f \cap Z_{g_A} = \overline{XQ} = 1-simplex$, $f \oplus g_A \in I$, lo cual contradice el hecho de que no existe $h \in I$ tales que Z_h son 1-simplex; así $f \in I_{\Delta_A(X,S)}$.

$\supseteq$)Dado $f \in \hat{I}_{\Delta_A(X,S)}$, $g_D \in I$, como $\overline{XS}$ es racional existen g_1, g_2 tales que $Z_{g_1} = C_1$, $Z_{g_2} = C_2$, $C_1 \cap C_2 = \overline{XS}$, $C_1 \cup C_2 = D$, así $g_1 \wedge g_2 \in I$, como I es primo alguno esta en I, supongamos $g_1 \in I$, $Z_{g_1} \subseteq A$, entonces $Z_f \cap Z_{g_1} = Z_{f \oplus g_1} \in \Delta_A(X,S)$

$Z_f = \Delta PQX$
$Z_g = \Delta DEX = D$
$Z_{g_1} = \Delta DSX = C_1$
$Z_{g_2} = \Delta ESX = C_2$
$Z_{f\oplus g_1} = \Delta PRX$



Como D, P, R, S son racionales, existe g_3, tal que $Z_{g_3} = \square(PSDR)$ y $Z_{g_3\wedge(f\oplus g)} = C_1$, entonces $g_3 \wedge (f \oplus g) \in I$, como $g_3 \notin I$ (debido a que $g_3(X) \neq 0$), se sigue que $(f \oplus g) \in I$ y así $f \in I$ (debido a que $f \leq (f \oplus g)$).

- **3.35.2.2** Si l es no-racional

$$I = I_{\Delta(X,S)}$$

y la demostración es análoga al caso anterior, sin considerar la restricción a la región A.

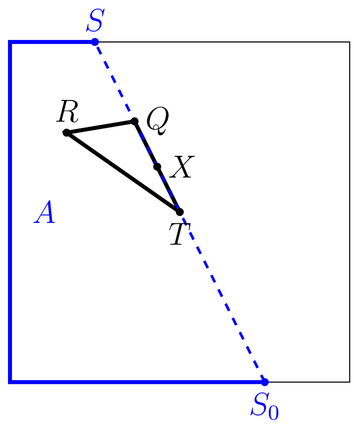
Por último se debe analizar el siguiente caso:

- **3.35.2.3** Si X un punto no racional y $\overline{XS}$ es una recta racional

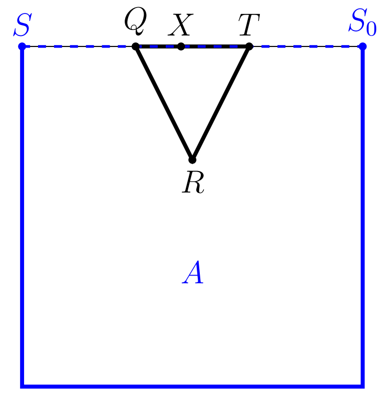
$$I = I_{\Delta_A(X)}$$

$\subseteq$) Dado $f \in \hat{I}$, Z_f un dos simplex, A y B regiones de $[0,1]^2$ tales que $A \cap B = rect(X,S)$, $A \cup B = 0,1]^2$,entonces, existe g_A y g_B tales que $Z_{g_A} = A$ y $Z_{g_B} = B$, así $g_A \wedge g_B = 0$, luego $g_A \in I$ ó $g_B \in I$. Supongamos $g_A \in I$, así $Z_f \subseteq A$ (sí $Z_f \subseteq B$, $Z_f \cap Zg_A$ es un 1-simplex caso ya excluido), como $X \in Z_f$ y no es racional, $f \in I_{\Delta_A(X)}$

$\supseteq$) Dado $f \in \hat{I}_{\Delta_A(X)}$, como $A - Z_f$ es un polígono con vértices racionales como muestra la figura.



$\Delta_A(X)$



$\Delta_A(X)$

Así, existe h tal que $Z_h = A - Z_f$, y $Z_{h \wedge f} = A$, luego $h \wedge f \in I$, como $h \notin I$, puesto que $h(X) \neq 0$, entonces $f \in I$ (Ver lema C.3).

Capítulo 4

Compacidad del Espectro Primo $\mathfrak{Z}(A)$ de las MV-álgebras

En [6] y [11] se demostró usando técnicas de la teoría de categorías que el Espectro Primo de una MV-álgebra es compacto. En este capítulo se demostrará la compacidad de dicho espectro de manera conjuntista. Esto con el objeto de que los no especialistas en teoría de categorías puedan ver su demostración.

Recordemos algunas definiciones básicas y algunos resultados de [11] que se usarán en la demostración.

Para verificar la compacidad de $\mathfrak{Z}(A)$,debemos demostrar que dado un cubrimiento abierto

$$\bigcup_{i \in J} U_i = \mathfrak{Z}(A)$$

existe un subcubrimiento finito tal que:

$$\bigcup_{i \in J_f} U_i = \mathfrak{Z}(A) \qquad \text{con } J_f \subseteq J,\ J_f \text{ finito}$$

Definición 4.1. [*Local*] *Un retículo completo L se llama local si y solo si para todo elemento $h \in L$ y cualquier familia $l_i \in L$, con $i \in J$ satisface la ecuación:*

$$h \wedge \bigvee_i l_i = \bigvee_i (h \wedge l_i)$$

Los morfismos de locales son funciones que preservan ínfimos finitos y supremos arbitrarios.

Definición 4.2. $[l - Filtro]$ *Dada A una MV-álgebra, F es l-filtro de A , Si F es un subconjunto no vacio de A que cumple las siguientes condiciones*

1. $y \geq x, x \in F,$ *entonces,* $y \in F$

2. $x, y \in F,$ *entonces,* $x \wedge y \in F$ *($x \wedge y$ es el ínfimo definido en A).*

Definición 4.3. $[MV - Filtro]$ *Dada A una MV-álgebra, F es MV-filtro de A , Si F es un subconjunto no vacio de A que cumple las siguientes condiciones*

1. $y \geq x, x \in F,$ *entonces,* $y \in F$

2. $x, y \in F,$ *entonces,* $x \odot y \in F$

Definición 4.4. $[l - ideal]$ *Un ideal de un retículo L es un subconjunto no vacío I tal que:*

1. *Sí* $x \leq y, y \in I,$ *entonces,* $x \in I$

2. $x, y \in F,$ *entonces,* $x \vee y \in F$

Notación. *Llamaremos L_A al retículo de los l-filtros de A con la propiedad descendente, ordenado por la inclusión.*

$$L_A = \{F \; es \; l - filtro \; de \; A \; con \; la \; propiedad \; na \in F \Longrightarrow a \in F\}$$

Afirmación : Los conjuntos

$$F_a = \{x \in A \,|\, \exists n \in \mathbb{N} \; con \; a \leq nx\} \in L_A$$

Demostración: veamos que F_a es un $l - filtro$.

1. Dado $y \geq x, x \in F_a$, entonces $a \leq nx \leq ny$, si y solo si $y \in F_a$.
2. Dado $x, y \in F_a, a \leq m_1x$ y $a \leq m_2y$, sea $n = max\{m_1, m_2\}$, luego $a < nx$, $a < ny$,se sigue que $a \leq nx \wedge ny \leq n(x \wedge y)$, entonces $x \wedge y \in F_a$.

3. Ahora demostremos que F_a tiene la propiedad descendente: Dado $nx \in F_a$, por definición $a \leq m(nx) \leq (m.n)(x)$, entonces $x \in F_a$.

Definición 4.5. [*Filtro generado en L_A*] *Dado un conjunto $H \subseteq A$, definimos el filtro generado $< H >$ como el filtro mas pequeño de A que contiene a H y pertenece a L_A*

Proposición 4.6. *Si G es igual a :*

$$\left\{ x \,\middle|\, \exists b_1, ..., b_m \in H,\ que\ dependen\ de\ x,\ tales\ que \bigwedge_{i=1}^{m} b_j \leq nx,\ para\ algún\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$entonces\ G =< H >$$

Demostración: Veremos que G es el filtro mas pequeño que contiene a H con la propiedad descendente:

1. $G \supset H$, debido a que para todo $x \in H, x \leq x$
2. Si $y \geq x, x \in G$, entonces $y \in G$.
   Sea $ny \geq nx \geq \bigwedge_{i=1}^{m} b_j$, entonces $ny \geq \bigwedge_{i=1}^{m} b_j$, luego $y \in G$
3. Si $x, y \in G$, entonces $x \wedge y \in G$
   Sean $x, y \in G$, entonces $n_1.x \geq \bigwedge_{i=1}^{m_1} a_i$, $n_2.y \geq \bigwedge_{i=m_1+1}^{m_2} a_i$, con $a_i \in H$, luego $n_1.x \wedge n_2.y \geq \bigwedge_{i=1}^{m_1+m_2} a_i$, como $n_1.n_2(x \wedge y) \geq n_1.x \wedge n_2.y \geq \bigwedge_{i=1}^{m_1+m_2} a_i$, entonces $x \wedge y \in G$.
4. G tiene la propiedad descendente.
   Dado $mx \in G$, existen b_j, tales que $\wedge b_j \leq n(mx) = (nm)x$, entonces $x \in G$.
5. Dado F en L_A, $F \supseteq H$, queremos ver que $F \supseteq G$.
   Sea $x \in G, \exists n \in \mathbb{N}$, tal que $n.x \geq \bigwedge_{j=1}^{m} b_j$, como $b_j \in H \subseteq F$, luego $\bigwedge_{j=1}^{m} b_j \in F$,ya que F es cerrado para ínfimos finitos, entonces $n.x \in F$, como F tiene la propiedad descendente $x \in F$.

Proposición 4.7. *Todo l-filtro F de L_A cumple:*

$$F = \bigcup_{a \in F} F_a$$

Demostración:

- $(\subseteq)$ Sea $x \in F$, luego $x \in F_x \subseteq \bigcup\limits_{a \in F} F_a$, entonces $x \in \bigcup\limits_{a \in F} F_a$
- $(\supseteq)$ Sea $y \in \bigcup\limits_{a \in F} F_a$, es decir $y \in F_a$ para algún $a \in F$,así $a \leq n.y$, como $a \in F$,entonces $n.y \in F$, como F tiene la propiedad descendente $y \in F$

Veremos ahora cuáles son el ínfimo, el supremo de 2 elementos de L_A y el supremo arbitrario de elementos de L_A

Teorema 4.8. *L_A es un local*

1. *Se verifica directamente que:(ver lema 4.16 en* [3]*)*

$$F_a \cap F_b = F_a \wedge F_b = F_{a \vee b}$$

$$< F_a \cup F_b >= F_a \vee F_b = F_{a \wedge b}$$

2. *En general por proposición 3.6:*

$$\bigvee_{a \in I} F_\alpha =< \bigcup_{a \in I} F_a >$$

3. *L_A es local*

$$F \wedge < \bigcup_{a \in I} F_a >= F \wedge \bigvee_{a \in I} F_a = \bigvee_{a \in I} F \wedge F_a$$

Teorema 4.9. *L_A es compacto*

Dado $\bigvee\limits_{a \in I} F_a = A$ queremos ver que existe un subcubrimiento finito de $\{F_a\}_{a \in I_f}$ tal que $\bigvee\limits_{a \in I_f} F_a = A$, I_f conjunto finito, $I_f \subset I$

Demostración:

$$\bigvee_{a \in I} F_a =< \bigcup_{a \in I} F_a >= \left\{ x \in A \middle| \exists b_j \in F_{a_j},\ con\ 1 \leq j \leq m\ y\ existe\ n \in \mathbb{N}\ tal\ que\ n.x \geq \bigwedge_{j=1}^{m} b_j \right\}$$

Como $0 \in A, 0 \in \left\{ x \in A \middle| \exists b_j \in F_{a_j},\ con\ 1 \leq j \leq m\ y\ existe\ n \in \mathbb{N}\ tal\ que\ n.x \geq \bigwedge_{j=1}^{m} b_j \right\}$

Entonces $0 \geq \bigwedge_{j=1}^{m} b_j$,con $b_j \in F_{a_j}$ luego $\bigwedge_{j=1}^{m} b_j = 0, j \in \{1, 2, ..., m\}$. Así:

$$0 \in \bigvee_{j=1}^{m} F_{a_j}, \text{entonces } \bigvee_{j=1}^{m} F_{a_j} = A$$

Definición 4.10. *Definimos el homomorfismo de locales θ como sigue:*

$$\mathcal{O}(\mathfrak{Z}(A)) \xrightarrow{\theta} L_A$$

$$W_a \longrightarrow F_a$$

$$\bigcup_{j \in J} W_{a_j} \longrightarrow \bigvee_{j \in J} F_{a_j}$$

Teorema 4.11. *θ es un isomorfismo ($L_A \underset{iso}{\approx} \mathcal{O}(\mathfrak{Z}(A))$)[1]:*

- *Demostremos que θ es sobreyectivo:*

Dado que $F \in L_A$, se tiene que $F = \bigcup_{a \in F} F_a = \bigvee_{a \in F} F_a$ entonces

$$\theta(\bigcup_{a \in F} W_a) = F \text{ por definición de } \theta$$

- Demostremos que θ es inyectiva:

Dados $F_1, F_2 \in L_A$, tales que $F_1 \neq F_2$ Sea $x \notin F_2$ y $x \in F_1$ entonces :

1. El MV-ideal de la MV-álgebra A generada por x cumple que:

$$(x) \cap F_2 = \phi$$

[1] Adaptado del teorema 4.20 de [11]

En efecto $(x) \cap F_2 \neq \phi$, implica que existe $z \in (x) \cap F_2$, y $z \leq n.x$, como F_2 es l-filtro con la propiedad descendente, $x \in F_2$, lo cuál es absurdo.

2. Consideremos el conjunto de MV-ideales

$$\mathfrak{U} = \{I \,|x \in I; I \cap F_2 = \phi\}$$
$$(x) \in \mathfrak{U} \text{ luego } \mathfrak{U} \neq \phi$$

El conjunto $\mathfrak{U}$ es inductivo superiormente: cualquier cadena de ideales $I_i \in \mathfrak{U}$ con el orden conjuntista dado por la contenencia, esta acotada superiormente por.

$$\bigcup I_i \in \mathfrak{U}$$

Entonces por el lema de Zorn, $\mathfrak{U}$ contiene elementos maximales. Sea P un maximal de $\mathfrak{U}$,entonces $x \in P$ y $P \cap F_2 = \phi$.

Queremos ver que P es primo

3. Sean $a, b \in A$, tales que $a \wedge b = 0$; se quiere ver que $a \in P$ ó $b \in P$.

Supongamos que $a \notin P$ y $b \notin P$. Por la maximalidad de P en $\mathfrak{U}$, se sigue que:

$$< P \cup \{a\} > \cap F_2 \neq \phi \qquad \text{y} \qquad < P \cup \{b\} > \cap F_2 \neq \phi$$

Consecuentemente existen $p, q \in P$, $z, z\acute{} \in F_2$ y $m, m\acute{} \in \mathbb{N}$ tales que

$$z\acute{} \leq p \oplus m\acute{}.a \text{ y } z \leq q \oplus m.b$$

Como F_2 es filtro entonces

$$(p \oplus m\acute{}.a) \in F_2 \qquad \text{y} \qquad (q \oplus m.b) \in F_2$$

si tomamos $n = max\,\{m, m\acute{}\}$ se sigue que

$$(p \oplus q \oplus n.a) \in F_2 \qquad \text{y} \qquad (p \oplus q \oplus n.b) \in F_2$$

Si llamamos $r = p \oplus q$ se verifica directamente que $r \in P$, debido a que $p, q \in P$. Como F_2 es cerrado para ínfimos finitos, entonces

$$(r \oplus n.a) \wedge (r \oplus n.b) \in F_2$$

Sin embargo como $n.a \wedge n.b \leq n.(a \wedge b)$

$$(r \oplus n.a) \wedge (r \oplus n.b) = r \oplus (n.a \wedge n.b) \leq r \oplus n.(a \wedge b) = r \oplus 0 = r$$

Como F_2 es l-filtro $r \in F_2$. Se sigue que:

$$r \in P \cap F_2$$

que contradice la hipótesis $P \cap F_2 = \phi$; luego $a \in P$ ó $b \in P$.

4. Consecuentemente

$$\bigcup_{a \in F_1} W_a \neq \bigcup_{b \in F_2} W_b.$$

porque $P \in \bigcup_{a \in F_1} W_a$, debido a que $x \in F_1$, $P \in W_x$, $P \notin \bigcup_{b \in F_2} W_b$ debido a que $P \cap F_2 = \phi$

De manera similar al trabajo realizado en el capitulo 2 presentamos la demostración para la teoría de anillos conmutativos con unidad, ampliando la proposición 6.a:

Proposición : $Spec(A)$ es un espacio topológico compacto.

Demostración: Si,

$$Spec(A) = \bigcup_{a \in V \subseteq A} \hat{a},$$

$< a >_{a \in V} = A$ debido a que si $< a >_{a \in V} \neq A$, existe P, $P \supset < a >_{a \in V}$, ideal primo maximál y por lo tanto $P \notin \bigcup_{a \in V \subseteq A} \hat{a}$.
Consecuentemente $1 \in < a >_{a \in V}$,luego existen $a_1, a_2, ..., a_n \in V$ tal que $1 = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$ con $a_i, \in V, b_i \in A$, así $< a >_{1 \leq i \leq n} = A$, lo que equivale a decir que $\bigcup_{i=1}^{n} \hat{a}_i = Spec(A)$

Corolario 4.12. $\mathfrak{Z}(A)$ *es un espacio topológico compacto.*

Demostración: *Se sigue directamente de que L_A es compacto y de que*

$$L_A \underset{iso}{\approx} \mathcal{O}(\mathfrak{Z}(A))$$

Se demostró la compacidad del espectro primo de las MV-álgebras de manera conjuntista, demostración realizada utilizando teoría de categorías en [6] y [11]. Se demuestra que el espectro primo dotado con la topología Co-Zariski es un espacio topológico compacto. Se desarrolla una construcción de su retículo de abiertos, esto produce una localidad compacta. Entonces el espectro primo es el espacio de puntos de esta localidad. Este espacio resulta ser compacto, siempre que el local tiene suficientes puntos, se sigue por una aplicación estándar del lema de Zorn.

Capítulo 5

Conclusiones

Epimorfismos en espectros primos Hausdorff de MV-álgebras

La proposición 2.3 y el teorema 4.11 establecen que el espectro primo de una MV-álgebras $\mathfrak{Z}(A)$ es un espacio topológico compacto T_0. Por otra parte cada homomorfismo de MV-álgebras, induce una función continua entre sus espectros primos(ver proposición 2.5.b).De esta forma se puede definir un funtor contravariante entre la categoría de MV-álgebras ($\mathbb{MV}$) y la categoría de espacios topológicos compactos T_0 ($\mathbb{ET}_0$).

$$F : \mathbb{MV} \longrightarrow \mathbb{ET}_0$$

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[rr, mapsto] \arrow[dd, "f"] & & \mathfrak{Z}(A) \arrow[dr, "g^!"] & \\
C \arrow[ur, "g"] \arrow[dr, dashed, "f\circ g"'] & & & & \mathfrak{Z}(C) \\
 & B \arrow[rr, mapsto] & & \mathfrak{Z}(B) \arrow[uu, "f^!"'] \arrow[ur, dashed, "g^!\circ f^!"'] &
\end{tikzcd}$$

Si en una MV-álgebra cada ideal primo es maximal (MV-álgebras hiper-arquimedianas) entonces su espectro primo es un espacio de Hausforff, la reciproca de esta afirmación también es cierta (La equivalencia se establece en la proposición 2.8.b). Entonces se puede definir un funtor entre la categoría de MV-álgebras para las cuales los ideales primos son maximales ($\mathbb{MVM}$) y la categoría de espacios compactos de Hausdorff ($\mathbb{COMP}$).

$$F : \mathbb{MVM} \longrightarrow \mathbb{COMP}$$

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[r, mapsto] \arrow[dd, "f"] & \mathfrak{Z}(A) \arrow[dr, "g^!"] & \\
C \arrow[ur, "g"] \arrow[dr, dashed, "f\circ g"'] & & & \mathfrak{Z}(C) \\
& B \arrow[r, mapsto] & \mathfrak{Z}(B) \arrow[uu, "f^!"] \arrow[ur, dashed, "g^!\circ f^!"'] &
\end{tikzcd}$$

De la proposición 2.11 se infiere que una función continua en la categoría de espacios compactos de Hausdorff es un epimorfismo si su imagen es densa en el codominio.

Partiendo de los hechos descritos anteriormente y que en 2.10.b se obtiene la igualdad $\overline{f^!\mathfrak{Z}(B)} = \mathfrak{Z}(A)$; se concluye en el corolario 2.13.b que $f^!\mathfrak{Z}(B) \to \mathfrak{Z}(A)$ es epimorfismo si A y B MV-álgebras hiperarquimedianas. Así este corolario establece una condición necesaria para que un homomorfismo de MV-álgebras induzca un epimorfismo en la categoría es espacios topológicos compactos Hausdorff.

En este trabajo hemos trasladado algunas propiedades de la teoría de anillos conmutativos con unidad a las MV-álgebras, sin embargo este es un tema de estudio que apenas inicia, donde se debe explorar más esta relación para establecer nuevos teoremas de representación dentro del contexto de las MV-álgebras y el álgebra conmutativa.

Ideales primos de $free_1$ y $free_2$

En 2005 en el artículo "Geometry of Robinson consistency in lukasiewicz logic." [2], se caracterizaron en general los ideales primos de las MV-algebras $free_n$. Posteriormente F.C. Osorio en [9] caracterizo de forma especifica los ideales primos de $free_1$ de la siguiente manera:

i) Para todo $x_0 \in [1,0]$ el ideal $I_{\{x_0\}} = \{f(x) \in free_1 : f(x_0) = 0,\ x_0 \in [0,1]\}$ es maximal.

ii) Todo ideal primo no maximal de $free_1$ es de la forma $I_{x_0^+} = \{f \in free : f(x) = 0\ \forall x \in [x_0, x_0+\epsilon]\}$, donde $x_0, x_0+\epsilon \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$ y $\epsilon > 0$ y $I_{x_0^-} = \{f \in free : f(x) = 0\ \forall x \in [x_0-\epsilon, x_0]\}$ donde $x_0, x_0-\epsilon \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$ y $\epsilon > 0$

En el desarrollo del capítulo 3 del presente trabajo se caracterizaron de forma geométrica los ideales primos de la MV-álgebra $free_2$, donde se estableció que los ideales primos de $free_2$ son de la forma I_Δ con Δ un 0-simplex, 1-simplex ó un

2-simplex de $[0,1]^2$, así:

0-simplex En este caso todo Ideal que se anule en un punto de $[0,1]^2$ es maximal.

$I_{\{P\}} = \{f(x,y) \in free_2 : f(P) = 0\}$ es maximal, para todo $P \in [0,1]^2$

1-simplex Todo ideal que se anule en una linea $\overline{PQ}$, P un punto racional fijo y Q un punto variable sobre una recta racional es ideal primo no maximal

$I_{l(P,S)}$=$\big\{f \in free_2 | f(\overline{PQ}) = 0 \ \textit{para algún} \overline{PQ} \in l(P,S) \ \textit{que depende de} \ f\big\}$

Si P es un punto no racional el ideal es maximal.

2-simplex En este caso se consideraron varios aspectos y se presentan varios ideales primos.

1) Si P es un punto racional, $rect(P,S)$ racional:

$I_{\Delta_A(P,S)} = \{f \in free_2 \,| f(\Delta PQR) = 0 \ \textit{para algún} \ \Delta PQR \in \Delta_A(P,S) \ \textit{que depende de} \ f\}$ es un ideal primo no maximal.

2) Si P es un punto racional, $rect(P,S)$ no racional:

$I_{\Delta(P,S)} = \{f \in free_2 \,| f(\Delta PQR) = 0 \ \textit{para algún} \ \Delta PQR \in \Delta(P,S) \ \textit{que depende de} \ f\}$ es un ideal primo no maximal.

3) Si P es un punto no racional, $rect(P,S)$ racional:

$I_{\Delta_A(P)} = \{f \in free_2 \,| f(\Delta TQR) = 0 \ \textit{para algún} \ \Delta TQR \in \Delta_A(P) \ \textit{que depende de} \ f\}$ es un ideal primo no maximal.

4) Si no existen lineas racionales que cruzan por P, decir P es un punto no racional, $rect(P,S)$ no racional:

$I_{\Delta_S(P)}$ =$\{f \in free_2 \,| f(\Delta_P TQR) = 0 \ \textit{para algún} \ \Delta_P TQR \in \Delta(P) \ \textit{que depende de} \ f\}$ es un ideal maximal.

Se concluye que todo ideal primo no maximal de $free_2$ es de la forma , $I_{l(P,S)}$, $I_{\Delta_A(P,S)}$, $I_{\Delta(P,S)}$ ó $I_{\Delta_A(P)}$

En este trabajo se realizaron demostraciones nuevas y adaptaciones del caso general al caso $free_2$, dando un enfoque con un mayor componente geométrico al utilizado en [2], queda por investigar hasta que punto este enfoque se puede generalizar al caso

$free_n$.

En el actualidad se están encontrando bastantes resultados algebraicos y geométricos dentro de la teoría de MV-álgebras que constituirán parte importante dentro de las teorías que se pretendan desarrollar a futuro, este tipo de resultados abren el camino a una clase de álgebras con un gran contenido geométrico que hasta ahora empiezan a estudiarse.

Apéndice A

El Orden inherente en una MV-álgebra

Toda MV-álgebra tiene un orden inherente definido a partir de $\oplus$ y $\neg$.

Lema A.1. *(Ver* [3], *Lema 1.1.2) Sea A una MV-álgebra y $x, y \in A$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.*

(i) $\neg x \oplus y = 1$;

(ii) $x \odot \neg y = 0$;

(iii) $y = x \oplus (y \ominus x)$;

(iv) Existe un elemento $z \in A$ tal que $x \oplus z = y$.

Dada A una MV-álgebra se dirá que $x \leq y$ si y solo si satisface alguna de las condiciones del lema anterior. Así se sigue que $\leq$ es un orden parcial, llamado el orden natural de A.(la reflexividad es equivalente a MV9), la antisimetría se sigue de las condiciones (ii) y (iii) y la transitividad se sigue de la condición (iv).

Una MV-álgebra cuyo orden natural es total es llamada una MV-Cadena.

En la MV-álgebra $[0, 1]$ el orden natural es total, es decir, todos sus elementos se pueden comparar y además es equivalente al orden del intervalo $[0, 1]$ como subconjunto de los reales .

Lema A.2. *Dado* ($\preceq$) *el orden de los reales y* ($\leq$) *el orden de la MV-álgebra* $[0,1]$*, entonces* $x \preceq y \Leftrightarrow x \leq y$*.*

$\Rightarrow$) Dado $x, y \in [0,1]$ y $x \preceq y$, entonces existe $z \in \mathbb{R}^+$ talque $x + z = y$ como $y \in [0,1]$, $x + z \preceq 1$, entonces $min\{1, x+z\} = x + z = y$.Así existe z tal que $x \oplus z = y$, por tanto $x \leq y$

$\Leftarrow$) Supongamos que $x \leq y$ en la MV-álgebra $[0,1]$, entonces existe $z \in [0,1]$ tal que $x \oplus z = y$, como $y = min\{1, x+z\}$,si $y = 1$, entonces como $x \in [0,1]$,$x \preceq y$.Si $y = x + z$, como $z \in [0,1]$ entonces $x \preceq y$ $\square$

El orden natural de la mayoría de las MV-álgebras no es total, por ejemplo en $free_n$ existen funciones que no se pueden comparar como se ilustra en la siguiente ejemplo de $free_2$ (Solo se pueden comparar en subregiones de $[0,1]^2$)

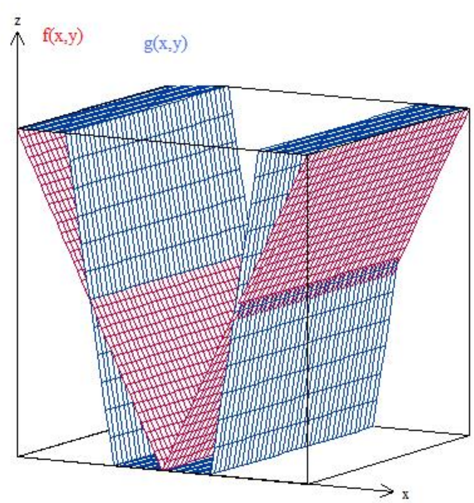


Figura A.1: Comparación $f(x,y), g(x,y) \in free_2$

Lema A.3. *(Ver* [3]*, Lema 1.1.4) En cada MV-álgebra A el orden natural* $\leq$ *tiene las siguientes propiedades:*

$i)$ $x \leq y$ si y solo si $\neg y \leq \neg x$

$ii)$ Si $x \leq y$ entonces para cada $z \in A$, $x \oplus z \leq y \oplus z$ y $x \odot z \leq y \odot z$.

$iii)$ $x \odot y \leq z$ si y solo si $x \leq \neg y \oplus z$

Proposición A.4. *Sobre cada MV-álgebra A el orden natural determina un retículo. Específicamente el* ***supremo*** *y el* ***ínfimo*** *de toda MV-álgebra A están definidos para todo* $x, y \in A$*, como sigue:*

$x \vee y = (x \odot \neg y) \oplus y = (x \ominus y) \oplus y$

$x \wedge y = \neg(\neg x \vee \neg y) = (x \ominus y) \ominus y$

Veamos un ejemplo en $free_2$.

Sean: $f(x,y) = x$, $\forall (x,y) \in [0,1]^2$

y $g(x,y) = 1 - x$, $\forall (x,y) \in [0,1]^2$

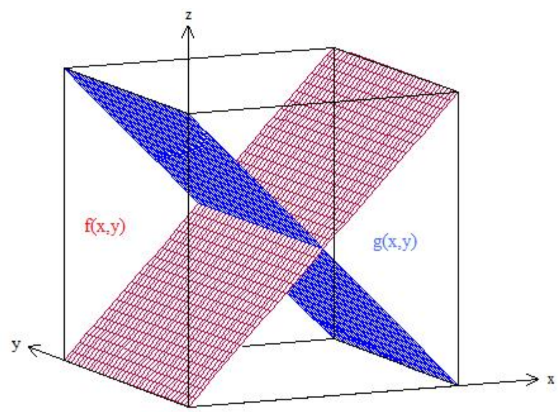


Figura A.2: Supremo e ínfimo $f(x,y), g(x,y) \in free_2$

$$f(x,y) \vee g(x,y) = \begin{cases} 1-x & \text{si} \quad 0 \leq x < \frac{1}{2}; 0 \leq y \leq 1 \\ x & \text{si} \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

$$f(x,y) \wedge g(x,y) = \begin{cases} x & \text{si} \quad 0 \leq x < \frac{1}{2}; 0 \leq y \leq 1 \\ 1-x & \text{si} \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

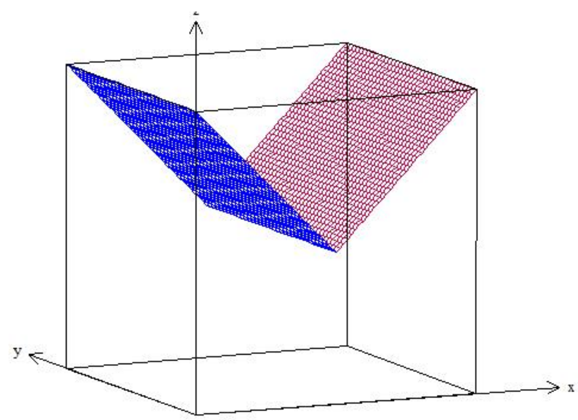


Figura A.3: Supremo: $f(x, y) \vee g(x, y)$

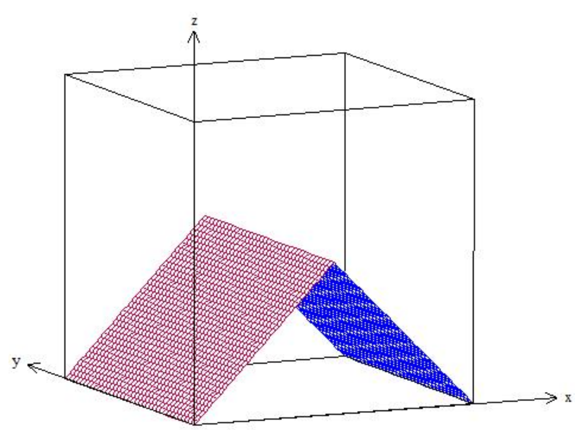


Figura A.4: Infimo: $f(x, y) \wedge g(x, y)$

Apéndice B

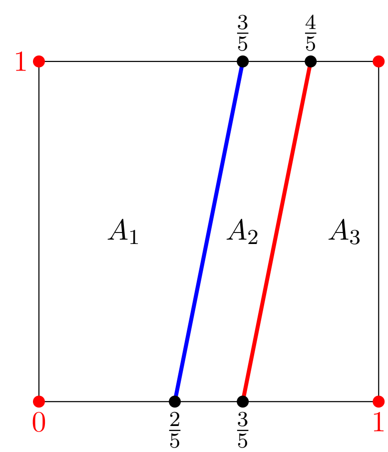
Operaciones Básicas del MV-álgebra $free_2$

En el capitulo 1, se definieron las MV-álgebras libres particularizando el caso de $free_1$ y $free_2$, en esta sección realizaremos algunos ejemplos de operaciones básicas en $free_2$, reconociendo que en la bibliografía existente se encuentran pocos ejemplos que expliquen de forma gráfica las operaciones básicas en esta MV-álgebra.

Suma: $f(x) \oplus g(x) = min(1, f(x,y) + g(x,y))$,

Dados:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad (x,y) \in A_1 \\ -5x + y + 3 & \text{si} \quad (x,y) \in A_2 \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) \in A_3 \end{cases} .$$



Donde:

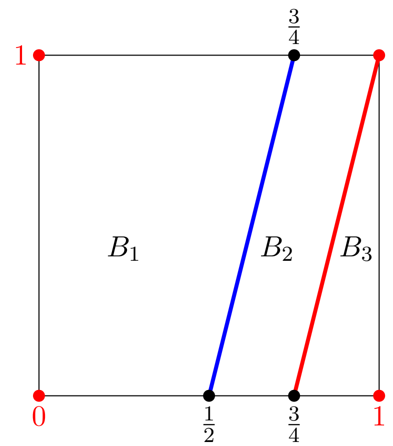
A_1 la región delimitada por las rectas que unen los puntos $(0,0) - (0,1) - (1, \frac{3}{5}) -$

$(0, \frac{2}{5}) - (0, 0)$

A_2 la región delimitada por las rectas que unen los puntos $(0, \frac{2}{5}) - (1, \frac{3}{5}) - (1, \frac{4}{5}) - (0, \frac{3}{5}) - (0, \frac{2}{5})$

A_3 la región delimitada por las rectas que unen los puntos $(0, \frac{3}{5}) - (1, \frac{4}{5}) - (1, 1) - (1, 0) - (0, \frac{3}{5})$

$$g(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad (x,y) \in B_1 \\ 4x - y - 2 & \text{si} \quad (x,y) \in B_2 \\ 1 & \text{si} \quad (x,y) \in B_3 \end{cases} .$$



Donde:

B_1 la región limitada por las rectas que unen los puntos $(0, 0) - (0, 1) - (1, \frac{3}{4}) - (0, \frac{1}{2}) - (0, 0)$

B_2 la región limitada por las rectas que unen los puntos $(0, \frac{1}{2}) - (1, \frac{3}{4}) - (1, 1) - (0, \frac{3}{4}) - (0, \frac{1}{2})$

B_3 la región limitada por las rectas que unen los puntos $(0, \frac{3}{4}) - (1, 1) - (1, 0) - (0, \frac{3}{4})$

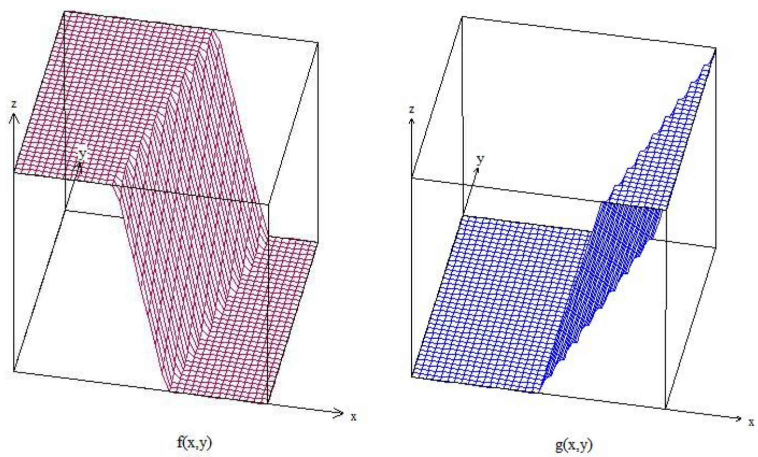
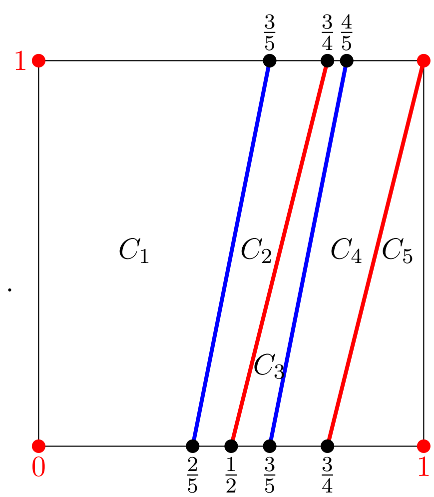


Figura B.1: Operaciones en free$_2$(f(x,y),g(x,y) $\in free_2$)

$$f(x,y) \oplus g(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad (x,y) \in C_1 \\ -5x + y + 3 & \text{si} \quad (x,y) \in C_2 \\ -x + 1 & \text{si} \quad (x,y) \in C_3 \\ 4x - y - 2 & \text{si} \quad (x,y) \in C_4 \\ 1 & \text{si} \quad (x,y) \in C_4 \end{cases} .$$



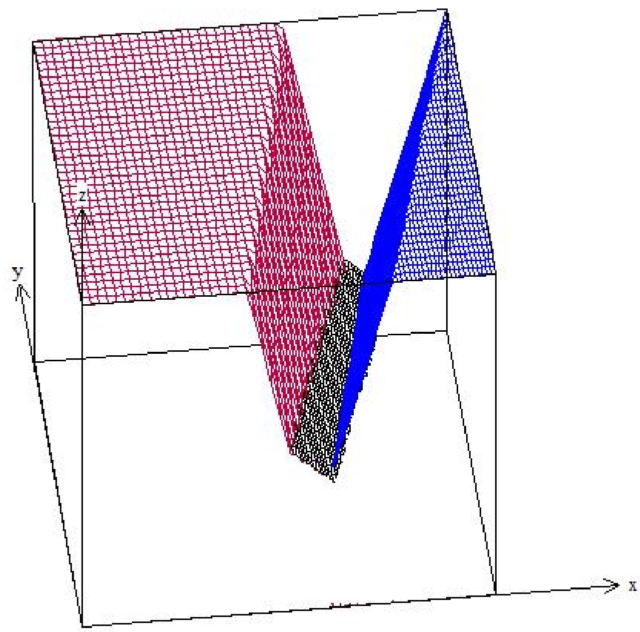


Figura B.2: $f(x,y) \oplus g(x,y)$

Donde:

C_1 la región limitada por las rectas que unen los puntos $(0,0) - (0,\frac{2}{5}) - (1,\frac{3}{5}) - (0,1) - (0,0)$

C_2 la región limitada por las rectas que unen los puntos $(0,\frac{2}{5}) - (0,\frac{1}{2}) - (1,\frac{3}{4}) - (1,\frac{3}{5}) - (0,\frac{2}{5})$

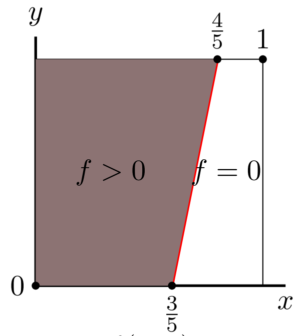
C_3 la región limitada por las rectas que unen los puntos $(0,\frac{1}{2}) - (0,\frac{3}{5}) - (1,\frac{4}{5}) - (1,\frac{3}{4}) - (0,\frac{1}{2})$

C_4 la región limitada por las rectas que unen los puntos $(0,\frac{3}{5}) - (0,\frac{3}{4}) - (1,1) - (1,\frac{4}{5}) - (0,\frac{3}{5})$

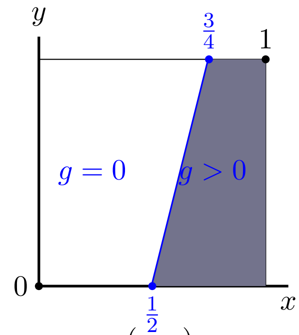
C_5 la región limitada por las rectas que unen los puntos $(0,\frac{3}{4}) - (1,1) - (1,0) - (0,\frac{3}{4})$

Resta: La resta como la suma se define por regiones, veamos las proyecciones de f y g sobre el plano xy, donde:

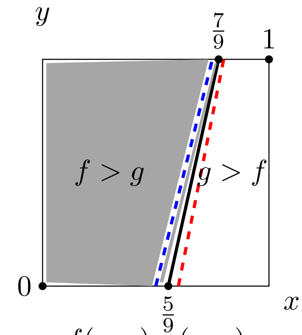
$f(x,y) \ominus g(x,y) = max(0, f(x,y) - g(x,y))$



$f(x,y)$

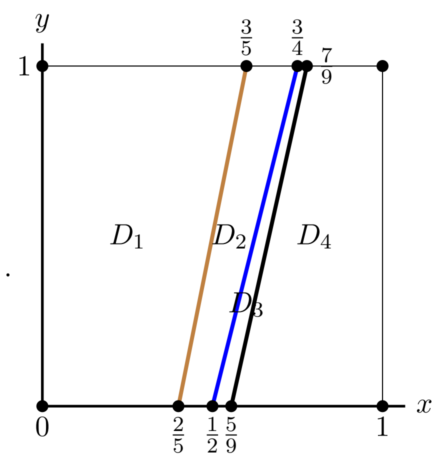


$g(x,y)$



$f(x,y), g(x,y)$

$$f(x,y) \ominus g(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad (x,y) \in D_1 \\ -5x + y + 3 & \text{si} \quad (x,y) \in D_2 \\ -9x + 2y + 5 & \text{si} \quad (x,y) \in D_3 \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) \in D_4 \end{cases}.$$



Donde:

D_1 la región limitada por las rectas que unen los puntos $(0,0) - (0, \frac{2}{5}) - (1, \frac{3}{5}) - (0,1) - (0,0)$

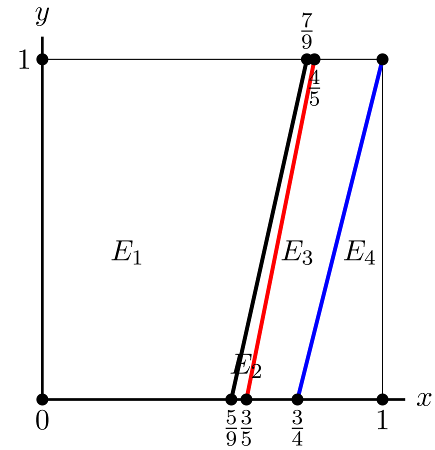
D_2 la región limitada por las rectas que unen los puntos $(0, \frac{2}{5}) - (0, \frac{1}{2}) - (1, \frac{3}{4}) - (1, \frac{3}{5}) - (0, \frac{2}{5})$

D_3 la región limitada por las rectas que unen los puntos $(0, \frac{1}{2}) - (0, \frac{5}{9}) - (1, \frac{7}{9}) - (1, \frac{3}{4}) - (0, \frac{1}{2})$

D_4 la región limitada por las rectas que unen los puntos $(0, \frac{5}{9}) - (1,0) - (1,1) - (1, \frac{7}{9}) - (0, \frac{5}{9})$

Ahora, $g(x,y) \ominus f(x,y) = max(0, g(x,y) - f(x,y))$

$$g(x,y) \ominus f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad (x,y) \in E_1 \\ 9x - 2y - 5 & \text{si} \quad (x,y) \in E_2 \\ 4x - y - 2 & \text{si} \quad (x,y) \in E_3 \\ 1 & \text{si} \quad (x,y) \in E_4 \end{cases}.$$



Donde:

E_1 la región limitada por las rectas que unen los puntos $(0,0) - (0, \frac{5}{9}) - (1, \frac{7}{9}) - (0,1) - (0,0)$

E_2 la región limitada por las rectas que unen los puntos $(0, \frac{5}{9}) - (0, \frac{3}{5}) - (1, \frac{4}{5}) - (1, \frac{7}{9}) - (0, \frac{5}{9})$

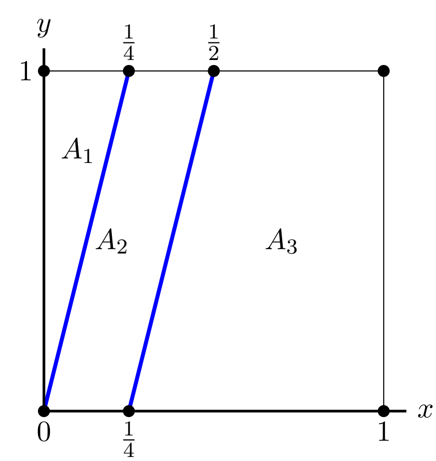
E_3 la región limitada por las rectas que unen los puntos $(0, \frac{3}{5}) - (0, \frac{3}{4}) - (1,1) - (1, \frac{4}{5}) - (0, \frac{3}{5})$

E_4 la región limitada por las rectas que unen los puntos $(0, \frac{3}{4}) - (1,0) - (1,1) - (1, \frac{3}{4})$

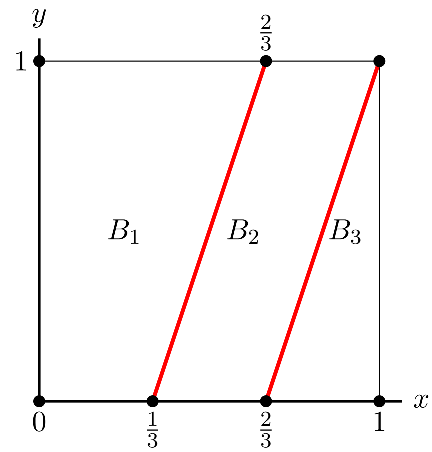
Multiplicación: La multiplicación entre 2 funciones de $free_2$, se realiza de la misma forma que que la suma o la resta. Como se ve a continuación:

$f(x,y) \odot g(x,y) = max(0, f(x,y) + g(x,y) - 1)$

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad (x,y) \in A_1 \\ 4x - y & \text{si} \quad (x,y) \in A_2 \\ 1 & \text{si} \quad (x,y) \in A_3 \end{cases}.$$



$$g(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad (x,y) \in A_1 \\ -3x+y+2 & \text{si} \quad (x,y) \in A_2 \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) \in A_3 \end{cases} .$$



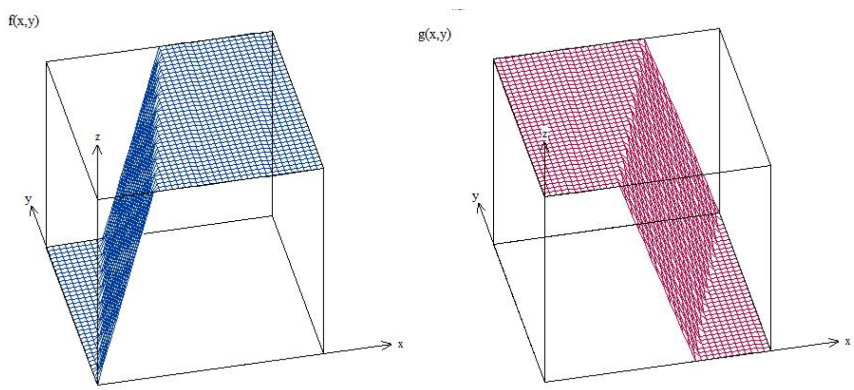
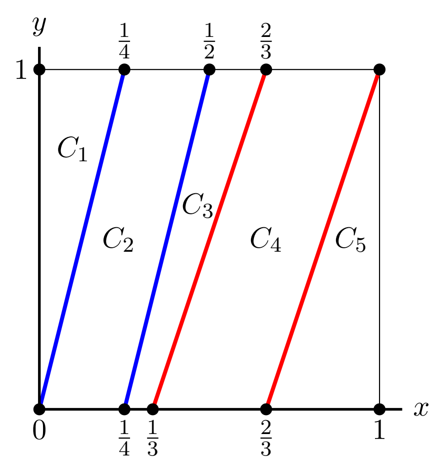


Figura B.3: Funciones a multiplicar: $f(x,y), g(x,y)$

Obtenemos:

$$f(x,y) \odot g(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad (x,y) \in C_1 \\ 4x-y & \text{si} \quad (x,y) \in C_2 \\ 1 & \text{si} \quad (x,y) \in C_3 \\ -3x+y+2 & \text{si} \quad (x,y) \in C_4 \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) \in C_5 \end{cases} .$$



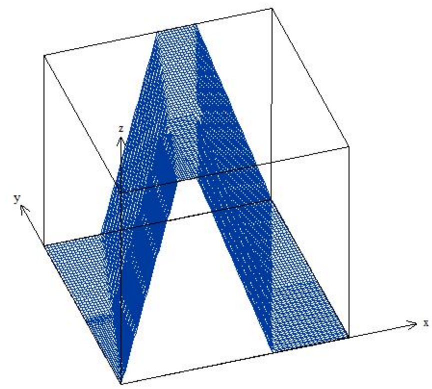
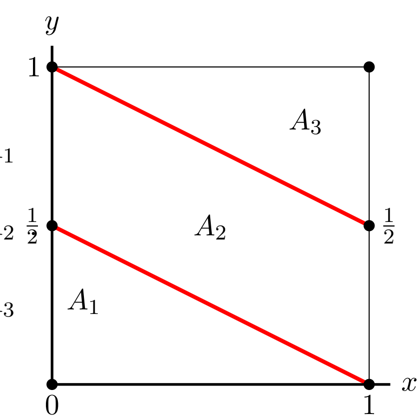


Figura B.4: Multiplicación: $f(x,y) \odot g(x,y)$

Negación: $\neg f(x,y) = 1 - f(x,y)$

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad (x,y) \in A_1 \\ -x-2y+2 & \text{si} \quad (x,y) \in A_2 \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) \in A_3 \end{cases}$$



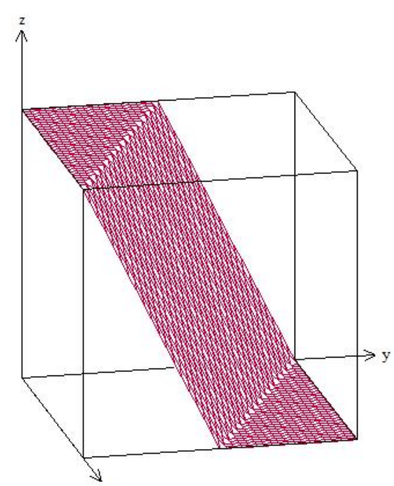
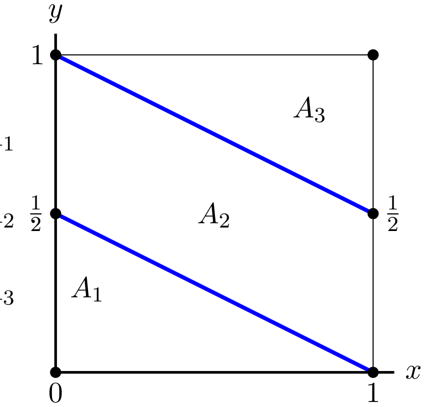


Figura B.5: $f(x,y)$ (Ejemplo negación)

Luego:

$$
\neg f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad (x,y) \in A_1 \\ x + 2y - 1 & \text{si} \quad (x,y) \in A_2 \\ 1 & \text{si} \quad (x,y) \in A_3 \end{cases}
$$



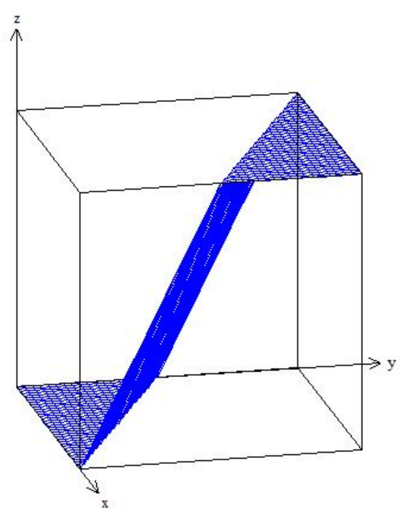


Figura B.6: $\neg(f(x,y)$ (Ejemplo negación)

La suma de $\neg f(x,y)$ y $f(x,y)$ es igual a la función constante uno

$$
\begin{aligned}
\neg f(x,y) \oplus f(x,y) &= min(1, 1 - f(x,y) + f(x,y)) \\
\neg f(x,y) \oplus f(x,y) &= 1
\end{aligned}
$$

Apéndice C

Homomorfismos e Ideales en las MV-álgebras

C.1. Homomorfismos

Dadas A y B, MV-álgebras , una función $h : A \to B$ es un MV-homomorfismo si y solo si satisface las siguientes condiciones, para cada $x, y \in A$.

$H,1)$ $h(0) = 0$

$H,2)$ $h(x \oplus y) = h(x) \oplus h(y)$

$H,3)$ $h(\neg x) = \neg h(x)$

h es isomorfismo si es homomorfismo sobreyectivo e inyectivo, escribiremos $A \cong B$ para decir que A es isomorfo a B

El kernel de un MV-homomorfismo $h : A \to B$ es el conjunto:

$$Ker(h) = h^{-1}(0) = \{x \in A \mid h(x) = 0\}$$

C.2. Ideales

Un MV-ideal de una MV-álgebra es un subconjunto I de A que satisface las siguientes condiciones:

I.1) $0 \in I$

I.2) Si $x \in I, y \in A$, $y \leq x$, entonces $y \in I$

I.3) Si $x \in I, y \in I$, entonces $x \oplus y \in I$

Observación:*(Ver* [10], *pg 13)* Un ideal en la estructura de un retículo subyacente $L(A)$ para una MV-álgebra A, es un subconjunto I_L de A que satisface I.1), I.2) y que para cada par de elementos $a, b \in I_L$ se tiene que $a \vee b \in I_L$. Como $a \vee b \leq a \oplus b$ para todo par $a, b \in A$, entonces tenemos que todo ideal de una MV-álgebra es un ideal de la estructura del retículo subyacente de A.

Ejemplo C.1. *Dada la MV-álgebra A=* $\mathcal{C}$ $([0,1])$ *de funciones continuas de* $[0,1]$ *en* $[0,1]$ *, con las operaciones:*

- $f(x) \oplus g(x)$ $=min$ $(1, f(x) + g(x))$
- $\neg f(x) = 1 - f(x)$

Entonces $I = \{f \in C([0,1]) \mid f(0) = 0\}$ *es un ideal de A*

I.1) $f(0) = 0$ *, luego 0* $\in I$

I.2) $f \in I, g \in A$*,si* $g \leq f$*, entonces* $g \in I$*, ya que si* $g(0) \leq f(0)$*, entonces* $g(0) = 0$

I.3) $f \in I, g \in I, f \oplus g \in I$*,claramente , ya* $f(0) \oplus g(0) = (f \oplus g)(0) = 0$

Notación: Denotaremos $Z(f)$ al conjunto de los ceros de f, es decir $Z(f) = f^{-1}(0)$

Ejemplo C.2. *Sea* $I_l = \{f(x,y) \in free_2 \,|Z(f(x,y)) \supseteq l\}$*,con* l *la recta* $y = 4x - 1$*:*

$p(x,y) = 4x - y - 1$ y $q(x,y) = y - 4x + 1$ están en I_l

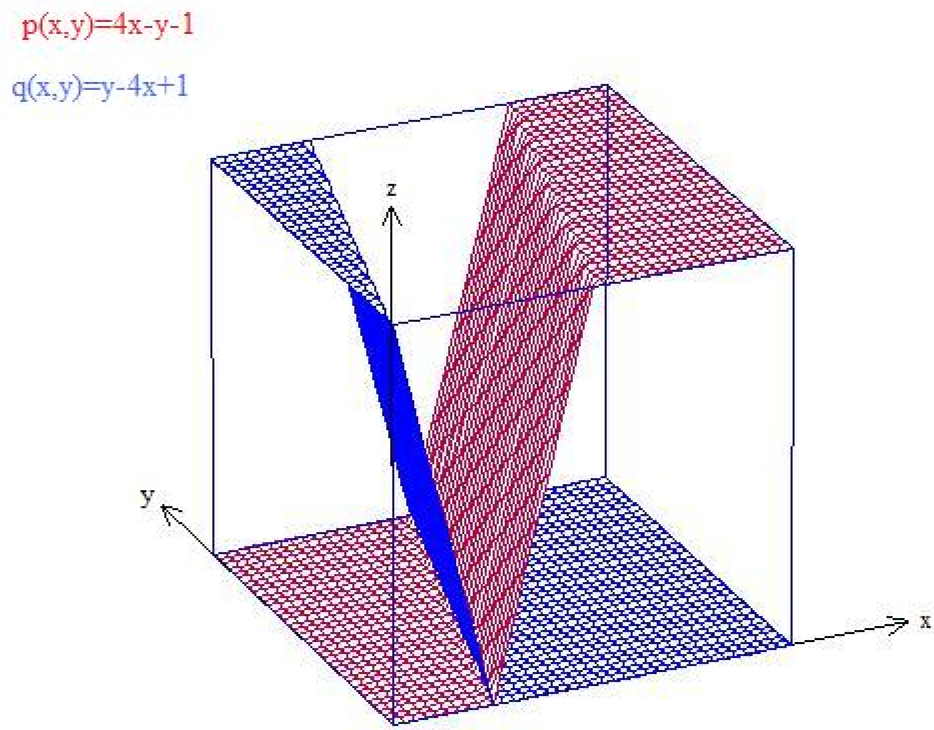
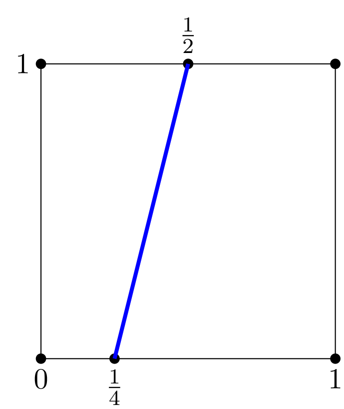


Figura C.1: Ejemplo C.2 (Ideal): $p(x,y), q(x,y) \in I_l$

Veamos que I_l es un MV-Ideal:

- $0 \in I_l$
- Sea $p \leq q, q \in I_l$,entonces $Zq \subseteq Zp$, luego $p \in I_l$
- Sean $p, q \in I_l$,así $Zp \supset l$, $Zq \supset l$,entonces $Z(p \oplus q) \supset l$, por lema 3.1, así $p \oplus q \in I_l$



Afirmación: La intersección de una familia finita de ideales de A es un ideal de A

Prueba:

Sea $A = (0, \oplus, \neg, 0, 1)$, una MV-álgebra, I, J ideales de A

Sea $x, y \in I \cap J$, así $x, y \in I, x, y \in J$

I.1) Como I, J son ideales $0 \in I, 0 \in J$,luego $0 \in I \cap J$

I.2) Si $x \in I \cap J, y \in A, y \leq x$, como I es ideal $y \in I$, como J es ideal $y \in J$,luego $y \in I \cap J$

I.3) Si $x, y \in I \cap J$, así $x, y \in I$, luego $x \oplus y \in I$,como $x, y \in J$, también $x \oplus y \in J$, luego $x \oplus y \in I \cap J$

Para cada subconjunto $W \subset A$, la intersección de todos los MV-ideales $I \supset W$ es llamado el ideal generado por W y lo denotaremos $< W >$

Lema C.1. *:Dado W un subconjunto de una MV-álgebra A.*

$W = \phi \Rightarrow < W >= \{0\}$

$W \neq \phi \Rightarrow < W >= \{x \in A \mid x \leq w_1 \oplus w_2 \oplus ... \oplus w_k,\, para\, algún\, w_1, ..., w_k \in W\}$

En particular para cada elemento z de una MV-álgebra A, el ideal

$$< z >=< \{z\} >$$

es llamado el MV-ideal principal generado por z, tenemos:

$< z >= \{x \in A \mid nz \geq x,\, para\, algún\, entero\, n \geq 0\}$

Así $< 0 >= \{0\}$, $< 1 >= A$

Adicionalmente, para cada MV-ideal J de una MV-álgebra A y cada z $\in A, tenemos$:

$< J \cup \{z\} >= \{x \in A \mid x \leq nz \oplus a,\, para\, cada\, entero,\, n \geq 0,\, a \in J\}$

Un ideal de una MV-álgebra es propio , si y solo si $I \neq A$

Definición C.2. ***Ideal Primo:***

Diremos que I es un MV-ideal primo si y solo si $I \neq A$ y satisface:

I.4) Para cada x, y en A, $(x \ominus y) \in I$, ó $(y \ominus x) \in I$

Lema C.3. *Dado J un ideal propio de una MV-álgebra A, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *J es primo*

2. *Para cualquier $x, y \in A$ y $x \wedge y = 0$ entonces $x \in J$ o $y \in J$.*

Demostración: *1.implica 2.*

Sea $x, y \in A$ talque $x \wedge y = 0$ entonces

$$x \wedge y = x \ominus (x \ominus y) = 0$$

y

$$y \wedge x = y \ominus (y \ominus x) = 0$$

Luego

$$\begin{array}{rcl} x & \leq & x \ominus y \\ y & \leq & y \ominus x \end{array}$$

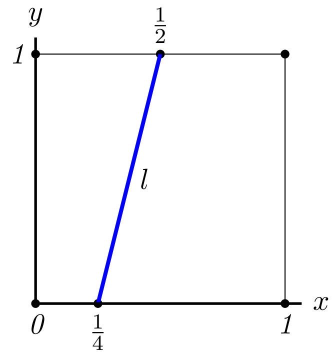
como J es primo entonces $x \in J$ o $y \in J$.

Ahora demostremos 2 implica 1. Tenemos que para todo $x, y \in A$ se cumple que $(x \ominus y) \wedge (y \ominus x) = 0$. (ver [3], Proposición 1.1.7), entonces $(x \ominus y) \in J$ y $(y \ominus x) \in J$. $\square$

En el capítulo 3 concluimos que el conjunto de funciones que se anulan en dos puntos fijos, no es un ideal primo , porque por lo menos existen dos funciones de $free_2$ tal que el conjunto los ceros de las restas entre ellas no contienen a estos puntos.

De manera análoga podemos concluir que los ideales que se anulan en una línea fija o en una región fija no son primos, ya que sin perdida de generalidad contienen dos puntos fijos. Veamos los siguientes ejemplos para ilustrar esta situación.

Ejemplo C.3. *Dado el ideal $I_l = \{f(x,y) \in free_2 \,|Z(f(x,y)) \supseteq l\}$,con l la recta $4x - 1$ (Ver ejemplo C.2):*



Veamos que I_l no es un ideal primo:

Sean $g(x,y), h(x,y) \in free_2$ como se muestra en el gráfico

$$g(x,y) = \begin{cases} 1-2y & si \quad (x,y) \in [0,1] \times [0, \frac{1}{2}] \\ 0 & si \quad (x,y) \in [0,1] \times [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

$$h(x,y) = \begin{cases} 1-2x & si \quad (x,y) \in [0, \frac{1}{2}] \times [0,1] \\ 0 & si \quad (x,y) \in [\frac{1}{2}, 1] \times [0,1] \end{cases}$$

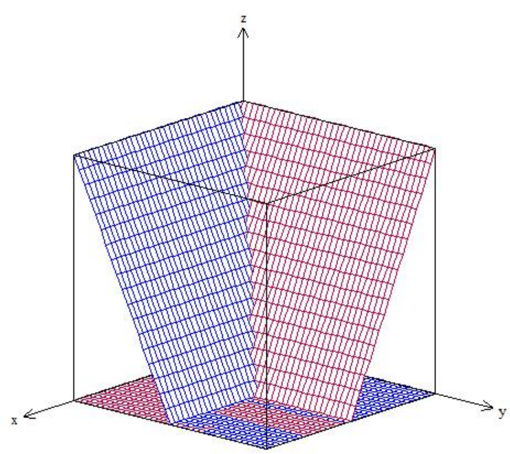
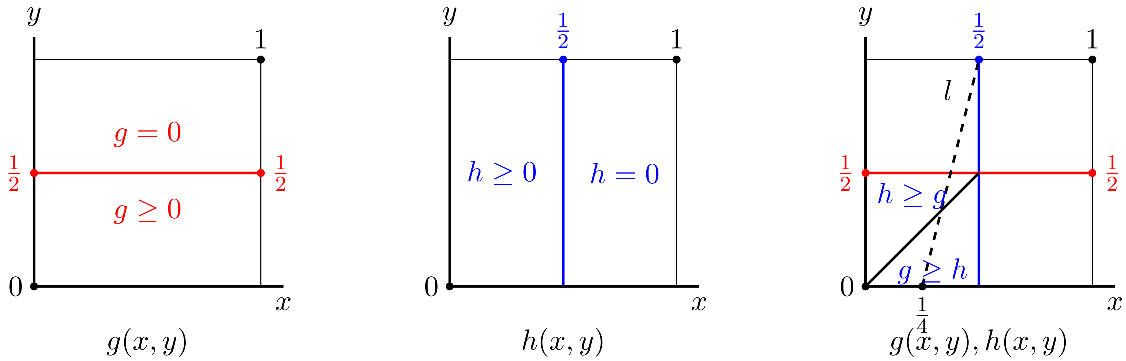
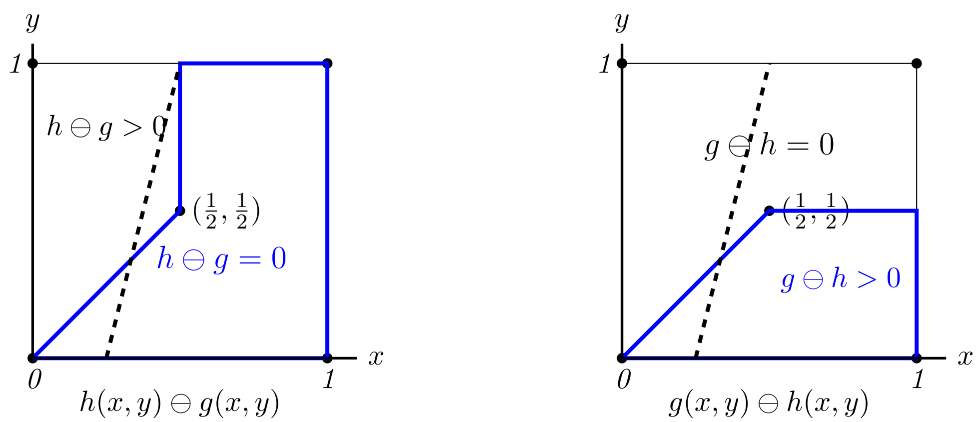


Figura C.2: Ejemplo C.3: $g(x,y)$ y $h(x,y)$

De acuerdo a la proyección sobre el plano xy tenemos:



Las restas entre g y h son iguales a:



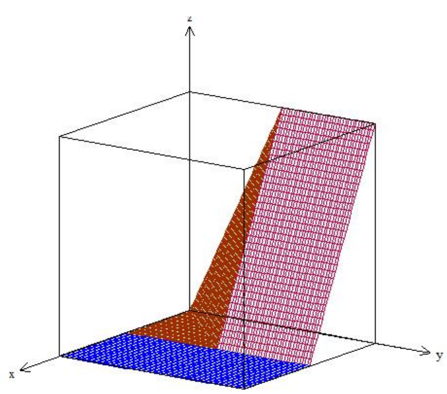


Figura C.3: Ejemplo C.3: $h(x, y) \ominus g(x, y)$

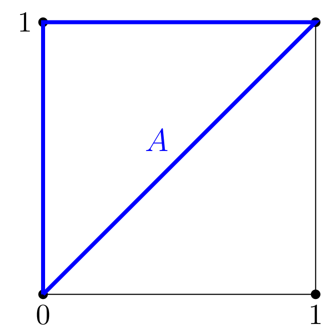
Claramente $h(x,y) \ominus g(x,y), g(x,y) \ominus h(x,y) \notin I_l$, por lo tanto I_l no es un ideal primo

A continuación analizaremos el caso de los ideales que se anulan en una región Fija.

Ejemplo C.4.

$$I_A = \{f(x,y) \in free_2 \,|Z(f) \supseteq A\}$$

El sector A, incluye sus bordes y en este ejemplo esta delimitado por las lineas $y = 0$, $x = 1$ y $y = x$, como se muestra en la figura:



Observemos como ejemplo que $p(x,y) = x - y$ y $q(x,y) = 2x - 1$ pertenecen a I_A

Veamos que I_A es un MV-Ideal:

- $0 \in I_A$
- Sea $p \leq q, q \in I_A$,entonces $Zq \subseteq Zp$, luego $p \in I_A$
- Sean $p, q \in I_A$,así $Zp \supset A$, $Zq \supset A$,entonces $Z(p \oplus q) \supset A$,luego $p \oplus q \in I_A$

Veamos ahora si es un ideal primo:

Sea I_A y los planos: $g(x,y), h(x,y) \in free_2$

$$g(x,y) = \begin{cases} 1 - 3y & \text{si} \quad (x,y) \in [0,1] \times [0, \frac{1}{3}] \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) \in [0,1] \times [\frac{1}{3}, 1] \end{cases}$$

$$h(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad (x,y) \in [0,\frac{1}{2}] \times [0,1] \\ -1+2x & \text{si} \quad (x,y) \in [\frac{1}{2},1] \times [0,1] \end{cases}$$

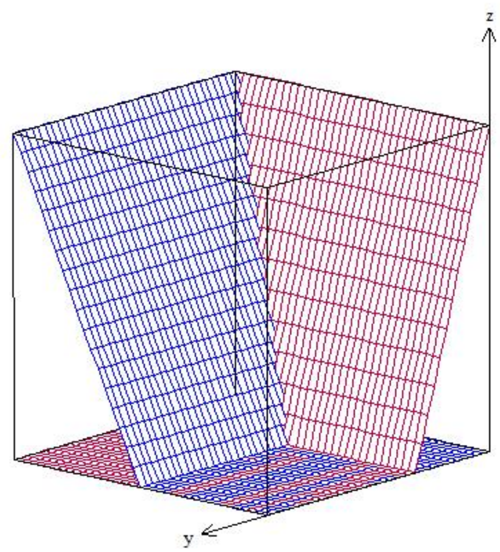
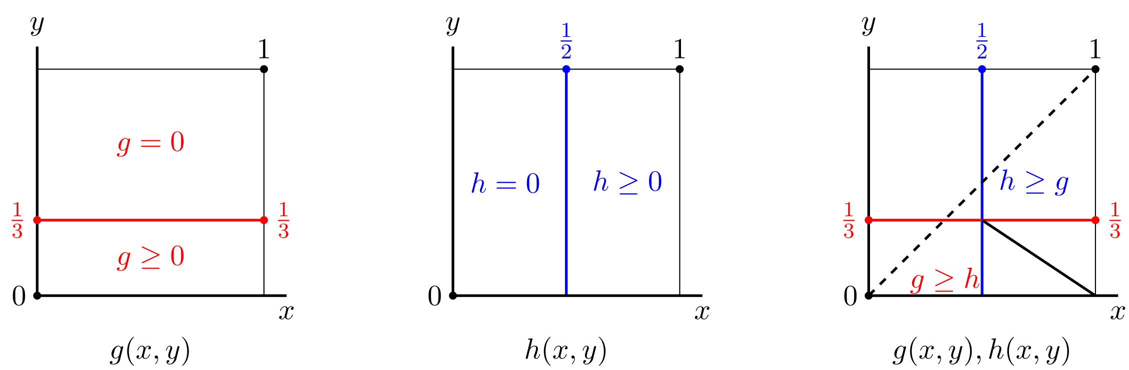


Figura C.4: Ejemplo C.4: $g(x,y)$ y $h(x,y)$

De acuerdo a la proyección sobre el plano xy tenemos:



Así las restas entre g y h son iguales a:

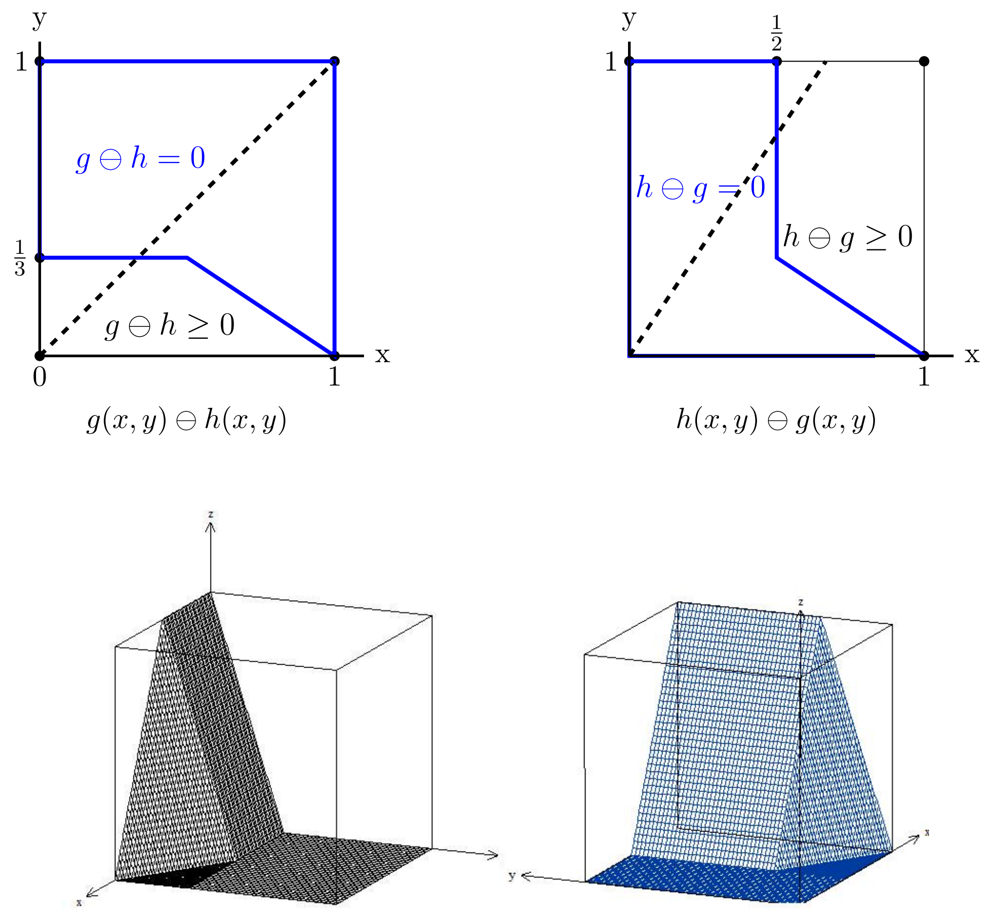


Figura C.5: Ejemplo C.4: $g(x, y) \ominus h(x, y); h(x, y) \ominus g(x, y)$

Claramente $g(x, y) \ominus h(x, y), h(x, y) \ominus g(x, y) \notin I_A$

Definición C.4. ***Ideal Maximal:***

Un MV-ideal I de una MV-álgebra A es llamado maximal si y solo si $I \neq A$, y para cada MV-ideal $J \neq I$, si $I \subseteq J$, entonces $J = A$

Denotaremos por I(A),P(A) y M(A)al conjunto de ideales, ideales primos e ideales maximales respectivamente.

Proposición C.5. *(ver [3], Proposición 1.2.2) Para cada MV-ideal propio J de una MV-álgebra A, las siguientes condiciones son equivalentes:*

$i)$ J es un ideal maximal.

$ii)$ Para $x \in A$, $x \notin J$ si y solo si $\neg nx \in J$ para algún entero $n \geq 1$

Prueba:

$i \Rightarrow ii$) Supongamos que J es un ideal maximal de A. Si $x \notin J$, entonces $< \{x\} \cup J >= A$, luego $1 = nx \oplus a$. Planteado de otra manera $\neg nx \leq a \in J$, por lo cual , ya que J es un ideal , $\neg nx \in J$. Opuestamente, si $x \in J$, entonces $nx \in J$ para cada entero $n \geq 1$.

$ii \Rightarrow i$) Sea $K \neq J$ un ideal de A, tal que $J \subseteq K$, para cada $x \in K - J$, nosotros tendriamos $\neg nx \in J$, para algún entero.Por tanto $1 = nx \oplus \neg nx \in K$,luego $K = A$, así J es un ideal maximal.

Lema C.6. *Dado $h : A \rightarrow B$ un MV-homomorfismo.Se tienen las siguientes propiedades:*

a) Para cada J de B, $h^{-1}(J) = \{x \in A \mid h(x) \in J\}$ es un ideal de A, en particular $Ker(h)$ es un ideal de A.

b) $h(x) \leq h(y)$ si y solo si $x \ominus y \in Ker(h)$.

c) h es inyectivo si y solo si $Ker(h) = \{0\}$.

d) $Ker(h) \neq A$, si y solo si B es no trivial.

e) $Ker(h) \in$ P(A), si y solo si B es no trivial y la $h(A)$, como subálgebra de B es una MV-Cadena

C.3. Propiedades de factorización

1. Dado un ideal P de una MV-álgebra A,

$$A/P \text{ es cadena} \Leftrightarrow \text{P es primo}$$

2. Dados L una MV-cadena, A una MV-álgebra y $A \rightarrow^f L$ un morfismo de MV-álgebras, el núcleo de f, $ker(f)$ es un ideal primo y se tiene la factorización.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr] & L \\ & A/Ker(f) \arrow[u, dashed, "k!"'] \end{tikzcd}$$

3. Para todo $a \in A$, todo ideal primo P y λ, γ morfismos canónicos de pasar al cociente; existe un único epimorfismo k tal que

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\lambda"] \arrow[dr, "\gamma"'] & A/<a> \arrow[d, dashed, "k!"] \\ & A/P \end{tikzcd}$$

el triángulo conmuta si y solo si, $a \in P$

4. Propiedad de factorización.**(Ver** [11]**,pág 40)**

Para todo ideal primo P de una MV-álgebra A y para todo $a, b \in A$ tal que $a \wedge b = 0$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\lambda"] \arrow[dr, "\gamma"'] & A/<a> \arrow[d, dashed, "k!"] \\ & A/P \end{tikzcd} \quad \text{ó} \quad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "\lambda"] \arrow[dr, "\gamma"'] & A/<b> \arrow[d, dashed, "k!"] \\ & A/P \end{tikzcd}$$

existe k ó $k!$ tal que el triángulo conmuta. Esta propiedad se sigue del lema C.3.

Consecuentemente, si $a \wedge b = 0$ todos los morfismos $A \to A/P$ se factorizan por $A/ < a >$ ó por $A/ < b >$.

Apéndice D

La Función Distancia

A continuación se define la función distancia, En particular se analizara con ejemplos en la MV-álgebras $free_2$, con el fin de seguir familiarizandonos con las operaciones de esta MV-álgebra.

Definición D.1. *La función distancia* $d : A \times A \to A$ *esta definida por :*

$$d(x, y) = (x \ominus y) \oplus (y \ominus x)$$

Observación:*(Ver* [10], *pg 32)*Claramente esta función no es una métrica, su codominio coincide con los números reales. Aunque si consideramos la MV-álgebra $[0, 1]$, es decir, el intervalo real unitario con las operaciones $x \oplus y = min\{1, x + y\}$ y $\neg x = 1 - x$. Tenemos que la función distancia coincide con la metríca usual de $[0, 1]$.

Así la MV-álgebra $[0, 1]$, $d(x, y) = |x - y|$.En cada álgebra booleana la función distancia coincide con la operación de diferencia simétrica.

Proposición D.2. *En cada MV-álgebra tenemos:*[1]

i) $d(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$

ii) $d(x, y) = d(y, x)$

iii) $d(x, z) \leq d(x, y) \oplus d(y, z)$

[1]Proposition 1.2.5, pag 15. Algebraic Foundations of Many-Valued Reasoning.

iv) $d(x, y) = d(\neg x, \neg y)$

v) $d(x \oplus s, y \oplus t) \leq d(x, y) \oplus d(s, t)$

Se definen las funciones distancias de las MV-álgebras $[0, 1]$ y $[0, 1]^n$ como $d(x, y) = |x - y|$ y $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (|x_1 - y_1|, \ldots, |x_n - y_n|)$ respectivamente.

En las MV-álgebras libres $free_n$ la función distancia es $d(f, g) = |f - g|$, veamos los siguientes ejemplos:

Ejemplo D.1.

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & si \quad 0 \leq x < \frac{1}{4};\ 0 \leq y \leq 1 \\ -4x + 2 & si \quad \frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{2};\ 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & si \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1;\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

$$g(x,y) = \begin{cases} 0 & si \quad 0 \leq x < \frac{1}{3};\ 0 \leq y \leq 1 \\ 3x - 1 & si \quad \frac{1}{3} \leq x < \frac{2}{3};\ 0 \leq y \leq 1 \\ 1 & si \quad \frac{2}{3} \leq x \leq 1;\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

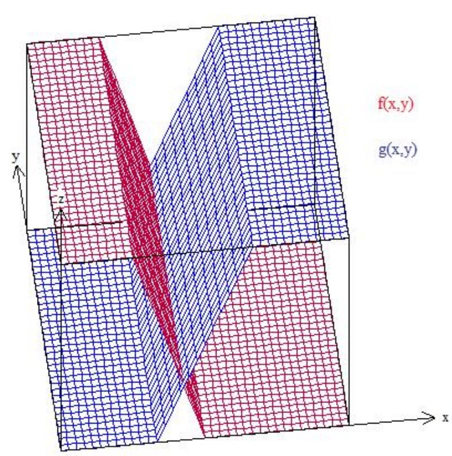


Figura D.1: $f(x, y), g(x, y)$

$$d(f(x,y),g(x,y)) = |f(x,y)-g(x,y)| \begin{cases} 1 & si \quad 0 \le x < \frac{1}{4}; 0 \le y \le 1 \\ -4x+2 & si \quad \frac{1}{4} \le x < \frac{1}{3};\ 0 \le y \le 1 \\ -7x+3 & si \quad \frac{1}{3} \le x \le \frac{3}{7};\ 0 \le y \le 1 \\ 7x-3 & si \quad \frac{3}{7} \le x \le \frac{1}{2};\ 0 \le y \le 1 \\ 3x-1 & si \quad \frac{1}{2} \le x \le \frac{2}{3};\ 0 \le y \le 1 \\ 1 & si \quad \frac{2}{3} \le x \le 1;\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$$

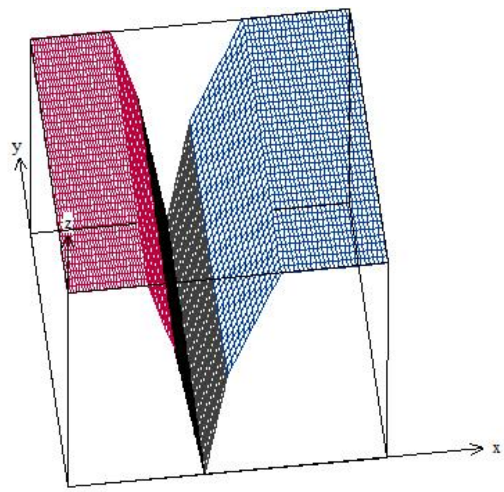
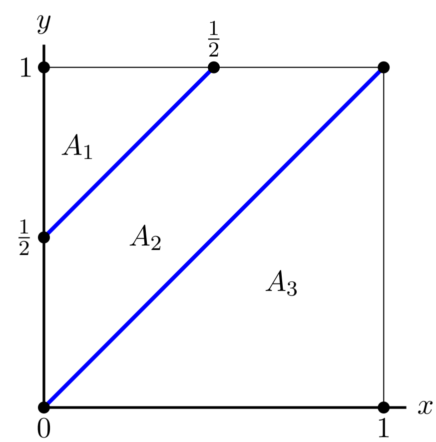


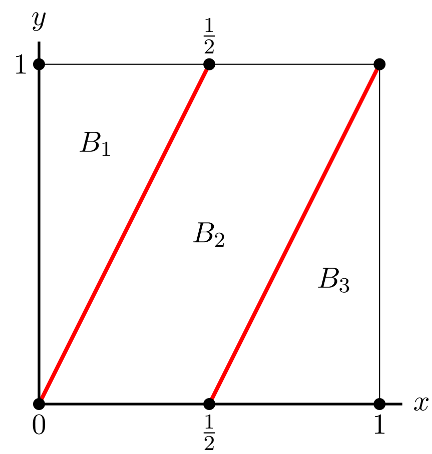
Figura D.2: $d(f(x,y),g(x,y))$

Ejemplo D.2. *Dadas*

$$\text{f(x,y)=} \begin{cases} 0 & \text{si} \quad (x,y) \in A_1 \\ 2x-2y+1 & \text{si} \quad (x,y) \in A_2 \\ 1 & \text{si} \quad (x,y) \in A_3 \end{cases} .$$



$$\text{g(x,y)} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad (x,y) \in B_1 \\ -2x+y+1 & \text{si} \quad (x,y) \in B_2 \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) \in B_3 \end{cases}.$$



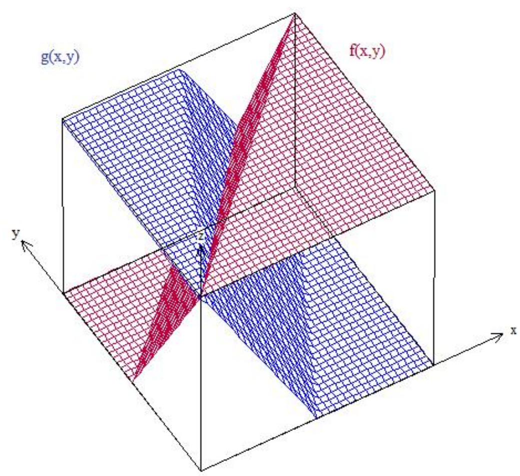
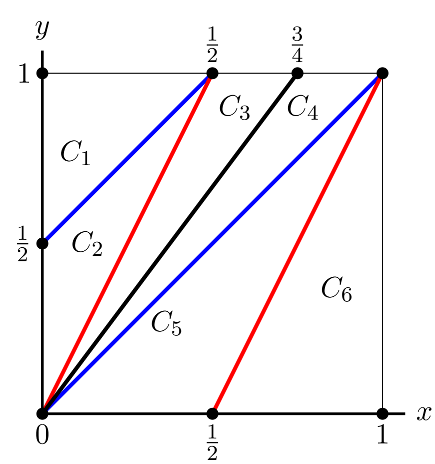


Figura D.3: Ejemplo D.2 (distancia): $f(x,y), g(x,y)$

$$\text{d(f(x,y),g(x,y))=} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad (x,y) \in C_1 \\ -2x+2y & \text{si} \quad (x,y) \in C_2 \\ -4x+3y & \text{si} \quad (x,y) \in C_3 \\ 0 & \text{si} \quad y = \frac{4}{3}x \\ 4x-3y & \text{si} \quad (x,y) \in C_4 \\ 2x-y & \text{si} \quad (x,y) \in C_5 \\ 1 & \text{si} \quad (x,y) \in C_6 \end{cases}.$$



Bibliografía

[1] M. Atiyah, I.G. Macdonald, *Introducción al Álgebra Conmutativa.* Ed. Reverté, Barcelona.1973

[2] Manuela Busaniche y Daniele Mundici, *Geometry of Robinson consistency in lukasiewicz logic.* Annals of Pure and Applied Logic. 2007.

[3] Roberto L.O. Cignoli, Itala M.L. D'ottaviano y Daniele Mundici. *Volumen 7: Algebraic Foundations of Many-valued Reasoning.* Klumer Academic Publishers, Dordrecht 2000.

[4] Roberto L.O. Cignoli, Itala M.L. D'ottaviano y Daniele Mundici. *Álgebras das Lógicas de lukasiewicz.* Colección CLE 12. Centro de Lógica, Epistemología e Historia de Ciencia. Brasil, Septiembre , 1994.

[5] Eduardo Dubuc,Yuri Poveda, *A Simple Proof of McNaughton theorem.* De arxib.org: http://arxib.org//PS-cache/arxiv/pdf/1107/1107.4641v1.pdf.¨[$Math.LO$], 22 de Julio de 2011

[6] Eduardo Dubuc,Yuri Poveda, *Representation theory of MV-algebras.* Annals of Pure and Applied Logic (2010) ISSN: 0168-0072, 2009 vol:161 fasc: N/A págs: 1024 - 1046 , Estados Unidos 2009.

[7] Carlos Escudero, Leonardo Prieto, Yuri Poveda, *Algunos Epimorfísmos entre Espectros Primos de Anillos Conmutativos.* Scientia et Technica. Pereira, Colombia 2009

[8] James Munkres. *Topología, segunda edición.* Editorial Prentice Hall, Madrid, España 2001.

[9] Fernan Camilo Osorio, *Introducción a las MV-álgebras y sus ideales primos.* Pereira, Colombia. 2011.

[10] Celimo Alexander Peña Rengifo, *Una Dualidad Uniforme para MV-álgebras semisimples.* Cali, Colombia. 2012.

[11] Yuri Alexander Poveda Quiñones, *Una Teoría General de Representación Para MV-álgebras*. Buenos Aires, Argentina. 2007.

[12] Yang, Yi Chuan, *l-Groups and Bézout Domains*. Institut fur Álgebra und Zahlentheorie , Alemania. 2006.