Solución Numérica del Problema de Control de Contaminación del Aire

Fedossova A.* Kafarov V.† Mahecha Bohórquez D.P. †

Resumen

Se considera el problema de contaminación del aire en una región con n plantas químicas, cuyas proporciones de la emisión tienen que ser controladas de tal manera que el nivel anual de la concentración de contaminación en cada punto de la región satisface la norma establecida para la contaminación del aire.

Es un problema de optimización semi-infinita y para resolverlo proponemos el algoritmo estocástico de aproximaciones externas para ser aplicado en una región industrial .

Palabres claves: *optimización semi-infinita, problema de contaminación de aire, algoritmos estocásticos.*

Abstract

This work presents a stochastic outer approximation algorithm to solve air pollution control problem while minimizing the control costs which thereby occur. These air quality standards give rise to an infinite number of constraints and this is a semi-infinite programming problem.

Keywords***: semi-infinite programming problems, air pollution problem, stochastic algorithms*.

1 Introducción

La contaminación del aire y la disminución del ozono han llegado a ser dos de los más serios problemas medioambientales que enfrenta la humanidad y consiste en la presencia en el aire de sustancias contaminantes o formas de energía que alteran la calidad del mismo, que implica riesgos potenciales sobre la salud humana, los diversos ecosistemas acuáticos y terrestres que provocan la implementación de planes de acción, estrategias y políticas ambientales, destinados a trazar las políticas de prevención y control de la contaminación. Las ultimas décadas se habían caracterizado por el crecimiento de interés en el fenómeno de contaminación del aire por medio de transporte y su efecto global.

Muchas países del mundo han establecido las leyes y regulaciones para la calidad de aire y han implementado los estándares de emisión.

El Ministerio de Medio Ambiente de Colombia, por ejemplo, propuso las Normas de Calidad de Aire para diferentes clases de contaminantes con el objetivo de garantizar el

* Universidad Autónoma de Bucaramanga, Laboratorio de Computo Especializado, A.A. 1642, Bucaramanga, afedosova@unab.edu.co

† Universidad Industrial de Santander, Escuela de Ingeniería Química, A.A. 678, kafarov@uis.edu.co

bienestar de los seres vivos y de los diversos ecosistemas Las normas de la calidad del aire que se deben cumplir en cada punto de la región constituyen el conjunto infinito de restricciones llamado "conjunto de restricciones de la calidad aérea" en una región, es decir, indican que la concentración en cada punto de la tierra debe ser menor o igual que los estándares promedios.

El objetivo general de esta investigación es la construcción del algoritmo estocástico de las aproximaciones externas y el software para solucionar el problema de minimización de los costos de control de la contaminación del aire. Los experimentos numéricos se realizan para diferentes problemas de optimización semi-infinita lineal y no lineal.

2 Definición del problema y algoritmo principal

En una región de control bidimensional dada *S*, tiene que ser garantizada cierta calidad del aire [2,3]. Al mismo tiempo, el promedio de la concentración anual de un contaminante (por ejemplo, dióxido de azufre o monóxido de carbono) tiene ser guardado debajo de una norma prescrita que se describe por una función real φ en *S*. Se asume que la concentración existente en S viene de dos tipos de fuentes: plantas químicas - fuentes que pueden ser controlados y entonces reguladas y fuentes que no pueden ser controlados, en primer lugar transporte.

Para minimizar los costos del control de contaminación del aire podemos formular este problema utilizando una función de costos lineal sujeta al conjunto infinito de restricciones, así llegamos a siguiente problema de optimización semi-infinita:

P(S) *Minimizar* $$c(x_1,...,x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

sujeta a las restricciones

$$g(x,s) = \sum_{j=1}^{n} (1-x_j)u_j(s) + u_0(s) \le \varphi(s) \quad \forall s \in S,$$

donde $x_1,...,x_n \in [0,1]$ son los factores de reducción de la contaminación (porcentajes de la cantidad de reducción de la contaminación en cada fuente) con sus costos respectivos $c_1,...,c_n$; $u_0, u_1,...,u_n$ son plantas químicas contaminantes (fuentes de contaminación) y S es el área de control.

Muchos problemas de ingeniería, física, robótica, matemáticas se llevan a los problemas de optimización semi-infinita apenas aparece alguna dependencia de las coordenadas o del tiempo [1,3,4]. Son problemas de programación matemática donde la optimización de la función objetivo está sujeta a conjunto infinito de restricciones. Actualmente, en el mercado se encuentra bastante software para la solución de problemas clásicos de optimización. Los problemas de programación semi-infinita son muy complicados y no existe software para resolverlos. Por eso en el área de investigación de operaciones el problema de desarrollo de los algoritmos numéricos para los problemas restringidos con el número infinito de restricciones es muy actual.

Una de las mejores herramientas para la solución de este clase de problemas es el método estocástico de las aproximaciones externas [1,4]. Su idea principal consiste en el reemplazo del problema original (número infinito de restricciones), *P(S)* con la secuencia de los problemas aproximados mas sencillos $P(S_n)$, n=1,2,..., donde cada problema $P(S_n)$ depende solo del conjunto finito Y de parámetros:

$P(S_n)$ *Minimizar* $c(x_1,...,x_n)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

sujeta a las restricciones

$$g(x,s)=\sum_{j=1}^{n}(1-x_j)u_j(s)+u_0(s)\le\varphi(s) \quad \forall s\in S_n,$$

aquí S_n son conjuntos finitos de restricciones activas de cada problema aproximado $P(S_n)$. Para encontrarlos el método utiliza búsqueda activa a partir de un punto aleatorio en el área factible (procedimiento SPROC.ACTIV.medio).

Como criterio de optimización utilizamos la función cuasi-óptima $\Theta(x,S_n)$ para evaluar que tan cerca se encuentra el punto x de la solución del problema aproximado $P(S_n)$. En este algoritmo el criterio no depende de ningún método especial, es decir, para calcular la función cuasi-óptima no necesitamos resolver adicionalmente algún problema como se hacia anteriormente en otros casos de optimización semi-infinita [4]. Así, para nuestro caso la función cuasi-óptima es:

$$\Theta(x,S)=\max(c(x)-\min_{\substack{x\in X\ : \\ g(x,s)\le\varphi(s)\forall s\in S}} c(x),\max_{s'\in S} g(x,s'))$$

2.1 Algoritmo SMETH.ACTIV.medio

Paso 0. n:=1 $S_1:=\varnothing$.

Paso 1. Encontrar x^n - solución del problema $P(S_n)$.

Paso 2. Llamar procedimiento SPROC.ACTIV.medio con los parámetros x^n y S_n.

Obtener ΔS_n y θ_n.

Paso 3. Formar el conjunto nuevo de restricciones

$$S_{n+1}:=\Delta S_n \cup \bigcup_{\substack{j:\theta_j>\delta/n \\ 1\le j\le n-1}} \Delta S_j .$$

Paso 4. n:=n+1 y regresar al paso 1.

Procedimiento SPROC.ACTIV.medio

Parámetros de entrada: $x\in X^0$, $S\in \mathrm{M}_f(S^0)$.

Parámetros de salida: $\theta\in\Re^1_+$, $\Delta S\in \mathrm{M}_f(S^0)$.

Parámetro del procedimiento: δ >0.

Paso 0. i:=1.

Paso 1. Aplicar el algoritmo de la búsqueda local para solución del problema $\max_{s\in S^0} g(x,s)$ empezando desde un punto aleatorio s_i para obtener el punto $s_i^*\in S^0$, tal que:

$s_i^*\in S^{\varepsilon}_{stat}(x),\ g(x,s_i)\le g(x,s_i^*).$

Paso 2. $\theta_i = \max(g(x,s_1^*),...,g(x,s_i^*))$.

Paso 3. (Paso de control.) Si $i \cdot \theta_i \le \delta$ entonces i:=i+1 y regresar al paso 1.

Paso 4. $\theta := \theta_i$;

$\Delta S := \{s_i, s_i^*\}$ y salida.

El algoritmo termina de trabajar cuando ya no encontramos más puntos activos en el área que no cumplen con las restricciones del conjunto factible.

El algoritmo propuesto es una nueva versión del método general SMETH.ACTIV propuesto por Zavriev, Volkov en [4].

3 Experimentos numéricos y resultados

El algoritmo propuesto SMETH.ACTIV.medio fue aplicado para los experimentos numéricos para casos lineales y no lineales.

Consideremos tres plantas químicas P_i las cuales emiten el mismo contaminante. El objetivo es reducir la contaminación del aire hasta los estándares para toda el área de control S. Las funciones exponenciales $u_i(s), i = 1,2,3$, son contribuciones de P_i a las concentraciones del contaminante en el punto $s \in S$ y las variables $x_i (i = 1,2,3)$ sean los porcentajes necesarios de reducción del contaminante en cada planta P_i $(0 \le x_i \le 1)$ para cumplir con la concentración máxima permitida (aquí es la constante ½) en el área , minimizando el costo total de control *c(x)*.

3.1 Ejemplo 1. Caso lineal

Minimizar la función:

$$c(x) = 2x_1 + 4x_2 + x_3$$

sujeta a las restricciones

$$z(x,s) = \sum_{i=1}^{3} (1 - x_i) u_i(s) - 1/2 \le 0 , \qquad s \in S = ([-1,4],[-1,4])^T$$

Aquí $u_i(s)$, $i = 1,2,3,$ dados como

$$u_1(s) = (1/s_1)\exp((-1/s_1)(1 + (s_2 - 1)^2)) \quad \text{para} \quad s_1 > 0$$

$$u_2(s) = (1/s_1)\exp((-1/s_1)(2 + (s_2{}^2/4)) \quad \text{para} \quad s_1 > 0$$

$$u_3(s) = (1/(s_1 - 2))\exp((-1/(s_1 - 2))(1 + (s_2 + 1)^2)) \quad \text{para} \quad s_1 > 2$$

$u_{1,2,3}(s) = 0$ en el caso contrario. El sistema de coordenadas y proposiciones se asumen como en [2, 3].

Aplicando el algoritmo SMETH.ACTIV.medio realizamos los experimentos numéricos empezando desde diferentes puntos iniciales, con diferentes parámetros y áreas de control.

En la Tabla 1. podemos observar algunos resultados para este ejemplo. Aquí en la primera columna podemos observar el número de iteraciones que es igual al número de restricciones activas encontradas para solucionar el problema con la exactitud propuesta. Hay que notar que según los cálculos toda la concentración de contaminante de las tres plantas se encuentra aproximadamente en el punto (2.897737, -0.840293) donde este resultado coincide con Reemtsen [3] que ha solucionado este problema con el método de discretización.

Tabla 1. Resultados para el ejemplo 1 (caso lineal)

No. de iteraciones y el numero de restr. Activas	Coordenadas del punto critico aprox. (concentración de la contaminación)	Punto inicial	Punto óptimo	Valor función costos
3	(2.897737, -0.840293)	(0,0,0)	(0.0,0.0, 0.2729)	0.27298
5	(3.195362, -0.884669)	(0,0,0)	(0.0,0.0, 0.2730)	0.27303
4	(3.035533, -0.922631)	(0.15,0.2,0.05)	(0.0,0.0, 0.2750)	0.27506
3	(3.055767, -0.863967)	(0.15,0.2,0.05)	(0.0,0.0, 0.2752)	0.27526

El punto óptimo x_{opt} = (0.0,0.0, 0.2730) indica que para cumplir con los estándares propuestos en el problema y obtener el costo mínimo solamente hay que reducir en 27.30% la emisión de los contaminantes en la tercer planta química. optimo

En la Fig. 1 podemos observar la ubicación del área critica de color negro (los puntos del área de control que z(x, s)> -0.0001 en el punto óptimo), el área donde -0.1 < z(x,s) <= -0.0001 de color gris oscuro y el área donde z(x,s)<=-0.1 de color gris claro. Como podemos ver en el área negra se encuentra el punto critico aproximado (2.897737, -0.840293) que aparece en la Tabla 1, además, el área negra es donde la restricción z(x,s) <= -0.0001, o sea, de toda forma en este área estamos cumpliendo que z(x,s)<=0 que propone nuestro conjunto factible del problema planteado.

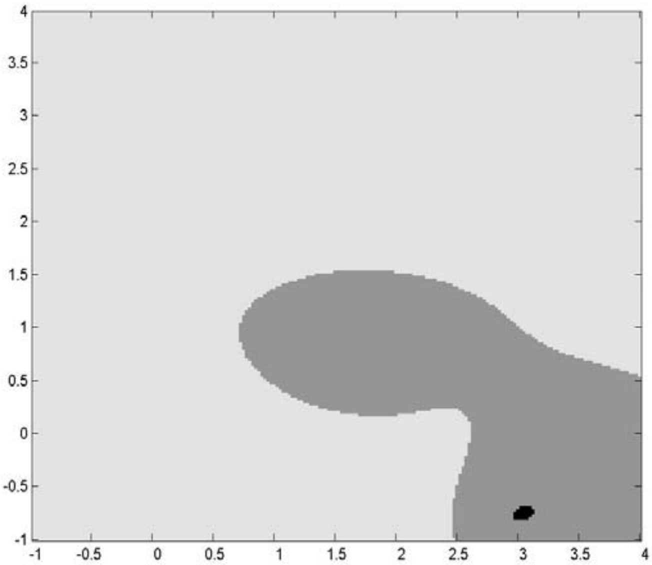

Fig 1. El caso lineal para el punto optimo (0.0,0.0,0.2729)

Para poder ver como ha avanzado el método comparamos la Fig. 1 con la Fig. 2 donde están las áreas que corresponden a los mismos intervalos pero en el punto inicial (0,0,0). Aquí, el área negra de no cumplimiento de las restricciones es mucho mas grande.

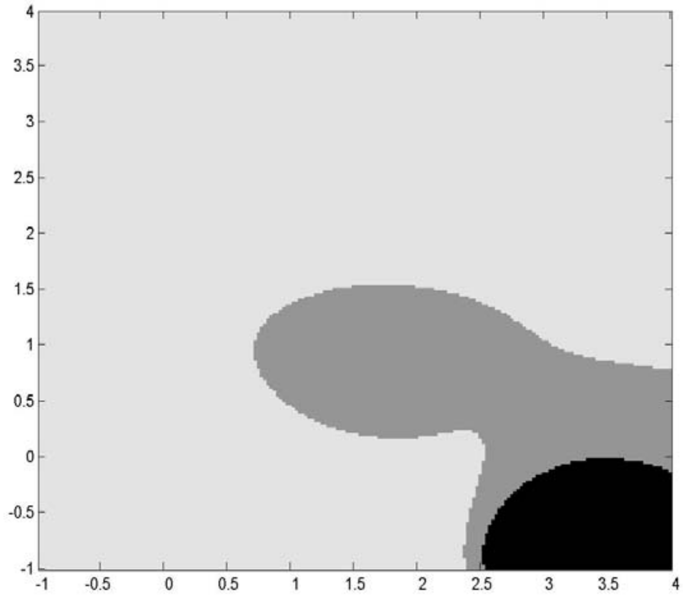

Fig 2. No cumplimiento de las restricciones para el punto inicial (0,0,0)

3.2 Ejemplo 2. Caso no lineal

Minimizar la función:

$$c(x) = 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 30x_3^2 + 30x_3^3$$

sujeta al mismo conjunto de restricciones y la misma área de control. Aplicando el algoritmo SMETH.ACTIV.medio llegamos a los siguientes resultados (ver Tabla 2).

Tabla 2. Resultados para el ejemplo 2 (caso no lineal)

No. de iteraciones y el numero de restr. Activas	Coordinadas de punto critico aprox.	Punto inicial	Punto óptimo	Valor función costos
3	(3.054029, -0.840367)	(0,0,0)	(0.0,0.3552,0.1119)	1.95107
4	(2.991705, -0.857316)	(0,0,0)	(0.0,0.3542, 0.1122)	1.94966
4	(2.941609, -0.936625)	(0.3,0.2,0.1)	(0.0,0.3552, 0.1119)	1.95102
5	(3.105584, -0.876363)	(0.0,0.0,0.0)	(0.0,0.3553, 0.1119)	1.95109

El punto óptimo $x_{opt} =$ (0.0,0.3542, 0.1122) nos indica que para cumplir con los estándares propuestos en el ejercicio y obtener el costo mínimo hay que reducir en un 35.42% la emisión de los contaminantes en la segunda planta química y en un 11.22% las emisiones en la tercera fuente de contaminación.

Aquí el método de aproximaciones externas tenia el área negra de puntos que violaban la restricción (Fig. 2 en el caso de punto inicial (0,0,0) y al final en el punto óptimo ya vemos en la Fig. 3 que el área negra esta muy pequeña, además, el área negra es donde la restricción z(x,s) <= -0.0001 o sea de toda forma en esta área estamos cumpliendo que z(x,s)<=0. El punto critico aproximado para este caso es (3.054029, -0.840367) según la Tabla 2 que se encuentra en el área negra en la Fig 3.

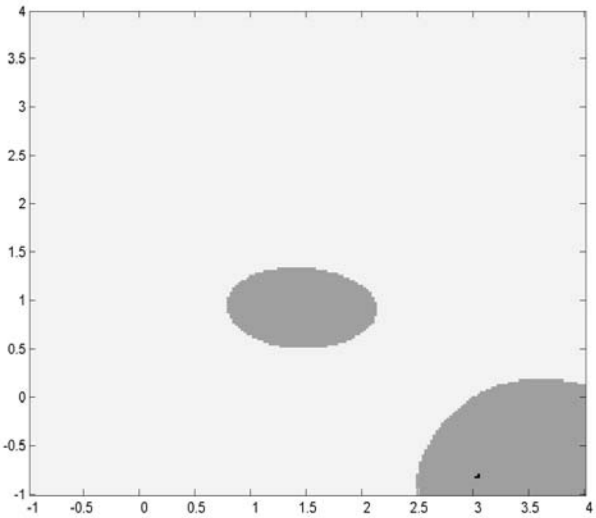

Fig 3. El caso no lineal para el punto optimo (0.0,0.3552,0.1119)

Los resultados obtenidos fueron comparados con la solución numérica del mismo problema a través de método de discretizaciòn (2,3) donde para la búsqueda de las restricciones activas se utiliza la malla para discretizar el área de control. La desventaja de este método es que los puntos activos en cada iteración se calculan *a priori* que no favorece una rápida convergencia del algoritmo. Podemos ver que en nuestro caso utilizando la búsqueda activa llegamos a punto optimo en 3-4 iteraciones en promedio.

4 Diseño del software

El software desarrollado se acomoda a las necesidades de las industrias en mantener sus contaminantes en el rango especificado, de la forma más rápida y compleja que caracterizan a un software.

El algoritmo fue desarrollado en Visual C++ 6 con utilización de una de las librerías NAG C Library en cada iteración para solucionar los problemas aproximados *P(Y).* Para el desarrollo del programa se opto por el evento de crear un solo modulo de captura, de muestra y dibujo de datos, en la cual se solicitan datos iniciales necesarios para evaluar un contaminante en un área determinada, de esta forma encontrar los puntos activos relevantes. El modulo esta compuesto por los campos de: modelo, factores de reducción iniciales "x", el área de optimización, puntos iniciales y campo de graficación de puntos activos en el área entre otros:

Fig 4 Módulo general

5 Agradecimientos

Este trabajo es financiado por COLCIENCIAS (El Instituto Colombiano para el Desarrollo de las Ciencias y la Tecnología) proyecto No. 1241-05-11483.

6 Referencias

[1] A.V. Fiacco and K.O. Kortanek. Semi-infinite programming and applications. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo 1983.

[2] S.A. Gustafson and K.O. Kortanek. Mathematical models for air pollution control: determination of optimum abatement policies. En: R.A. Deininger (ed.), *Models for environmental pollution control, Arbor Science Publishers, pags. 251-265, 1973.*

[3] R. Reemtsen, Discretization methods for solution of semi-infinite programming problems. *Jour. Of Optim. Th. And Appl.,* 71(1): 85-103, 1991.

[4] Y.V. Volkov and S.K. Zavriev, A general Stochastic Outer Approximations Method. *SIAM J. Control Optim.*, 35 (4): 1387-1421, 1997.

[5] P. Zannetti. Air Pollution Modeling. Theories, Computational Methods and Available Software. Aero Environment Inc, Monrovia, USA 2001.