



UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA  
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

Tesis Doctoral

**Marcos en espacios de Hilbert.**  
Completaciones a marcos ajustados, minimización de  
funcionales convexos y marcos de subespacios.

Mariano A. Ruiz

**Director:** Dr. Demetrio Stojanoff

2008

*A Alejandra,  
a mis padres, Alicia y Arnaldo  
y a mis hermanos Cecilia, Germán y Federico.*

# Agradecimientos

Quiero expresar mi más sincera gratitud a todas aquellas personas que de una u otra manera influyeron en la redacción de esta tesis.

En primer lugar, a Demetrio Stojanoff, quien no sólo aceptó dirigirme, sino que además tuvo la generosidad de compartir sus conocimientos y opiniones en varias horas de charla y discusiones. Gracias, también, a Gustavo Corach, quien me inició en el tema de los marcos, con varias charlas y una pilita de papers que me dejó en el escritorio del Iam hace ya unos años.

Deseo agradecer a todo el personal, tanto académico como administrativo del Departamento de Matemática y el Instituto Argentino de Matemática. En especial a mis compañeros de oficina: Celeste, Cristian, Eduardo, Francisco, Guillermina, Jorge, Laura, Pedro, con quienes he compartido muchos momentos, mates, charlas, risas y, cada tanto, algo de trabajo en matemática.

Por último, quiero agradecer profundamente a mi familia, a mis padres y hermanos, a quienes durante todo este tiempo los he sentido junto a mi, ya sea estando a cuadras o a miles de kilómetros de distancia. Y, con todo mi corazón, a Alejandra, a quien le debo el haber tenido que soportarme todo este tiempo con infinita paciencia.

# Índice general

<b>1. Preliminares</b>	<b>18</b>
1.1. Notaciones y nociones básicas de la teoría de operadores en espacios de Hilbert. . . . .	18
1.1.1. Pseudoinversas. . . . .	19
1.1.2. Módulo mínimo reducido y ángulo entre subespacios. . . . .	19
1.2. Mayorización en $\mathbb{R}^d$ . . . . .	21
1.3. Marcos en espacios de Hilbert - Nociones básicas . . . . .	23
1.3.1. Reconstrucción en $\mathcal{H}$ usando marcos. . . . .	25
1.3.2. Noción de exceso en los marcos. . . . .	27
1.4. Perturbaciones de marcos . . . . .	28
1.5. Normas de los vectores en una sucesión de Bessel. . . . .	31
1.6. Marcos de Subespacios . . . . .	33
<b>2. Completaciones a marcos ajustados</b>	<b>36</b>
2.1. Introducción . . . . .	36
2.2. Agregando vectores para obtener marcos ajustados. . . . .	37
2.3. Completando con restricción en las normas de los vectores a agregar. . . . .	38
2.4. Marcos ajustados con normas iguales. . . . .	43
2.5. Implementación de Algoritmos . . . . .	44
2.5.1. Ejemplos Numéricos. . . . .	46
<b>3. Funcionales convexos en marcos en <math>\mathbb{C}^d</math></b>	<b>49</b>
3.0.2. Introducción . . . . .	49
3.0.3. Mínimos para la mayorización. . . . .	52
3.1. Funcionales convexas definidas en operadores de marco. . . . .	55
3.1.1. Algunas aplicaciones de los resultados anteriores. . . . .	58
3.2. Funcionales convexas en marcos GUC. . . . .	60
3.2.1. Funcionales convexas sobre marcos GUC. . . . .	60
3.3. De operadores de marcos a marcos. . . . .	62
3.4. Perturbaciones de marcos - Prueba del Teorema 3.3.3 . . . . .	67

---

<b>4. Marcos de Subespacios</b>	<b>72</b>
4.0.1. Introducción . . . . .	72
4.0.2. Marcos y operadores . . . . .	73
4.1. Pesos Admisibles. . . . .	76
4.2. Proyectores y marcos de subespacios. . . . .	78
4.3. Refinamientos de marcos de subespacios. . . . .	81
4.4. Ejemplos. . . . .	84

# Introducción

La teoría de marcos en espacios de Hilbert tiene su génesis en el trabajo, publicado en 1952: “A class of nonharmonic fourier frames” de R.J. Duffin y A. C. Schaeffer. Aquí, los autores, continúan con el estudio de las series de Fourier no armónicas  $\{e^{i\lambda_n t}\}_n$  iniciado por Paley y Wiener 20 años antes. Duffin y Schaeffer muestran que determinadas condiciones de densidad en los coeficientes (reales o complejos)  $\lambda_n$ , implican que la sucesión  $\{e^{i\lambda_n t}\}_n$  no sólo genera el espacio  $L_2(-\gamma, \gamma)$ , con  $0 \leq \gamma \leq \pi$ , sino que además constituye lo que ellos llaman un *marco*, pues satisface la siguiente desigualdad:

$$A \leq \frac{\frac{1}{2\pi} \sum_n \left| \int_{-\gamma}^{\gamma} g(t) e^{i\lambda_n t} dt \right|^2}{\int_{-\gamma}^{\gamma} |g(t)|^2} \leq B,$$

para cierto par de constantes  $A, B > 0$  y toda  $g \in L_2(-\gamma, \gamma)$ .

Expresándolo en forma abstracta, un marco en un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ , es una sucesión de elementos  $\{f_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{H}$  tal que existen  $A, B > 0$  tal que

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{i \in I} |\langle f, f_i \rangle|^2 \leq B\|f\|^2 \quad \forall f \in \mathcal{H}. \quad (1)$$

En particular, la desigualdad inferior en (1) determina que un marco sea una sucesión generadora para  $\mathcal{H}$ .

Históricamente, el estudio de sistemas generadores para espacios de Banach se centró en las denominadas *bases de Schauder*: aquellas en las que se tuviera una descripción *única* de cada elemento del espacio como combinación lineal (serie infinita) de los elementos del sistema. No hace falta remarcar la importancia de tener todo elemento del espacio descrito en términos de elementos “mas sencillos” que permite, por ejemplo, estudiar a un operador lineal y acotado analizando su acción en los elementos de la base.

Eventualmente, uno podría pedir que la base tuviera características adicionales, como por ejemplo que fueran “incondicionales”, es decir, que la convergencia de las series involucradas en la reconstrucción fuera incondicional (en cierto modo, esto implica que no importe el orden en el que listamos la base). Ejemplos de este tipo de sistemas generadores se tienen en las bases ortonormales en espacios de Hilbert o las bases de Riesz en espacios de Banach, que son las bases incondicionales acotadas en norma, tanto superior como inferiormente.

Sin embargo, como ya muestran Duffin y Schaeffer en el trabajo antes mencionado, un marco es *sobredimensionado*, esto es, pueden existir sucesiones de “momentos”  $\{c_i\}_{i \in I}$  en  $\ell_2(I)$  tal que  $\sum_{i \in I} c_i f_i = 0$ . Esta falta de unicidad en la reconstrucción, aparentemente problemática es la que resultó ser interesante en las aplicaciones años más tarde.

Durante años, el trabajo de Duffin y Schaeffer fue prácticamente desconocido fuera del análisis no armónico, no obstante, un primer estudio sistemático de los marcos, aún en el contexto de las series no armónicas se da en el libro de Young de 1980 ([56]).

Es en 1986, cuando I. Daubechies, A. Grossman y Y. Meyer ([27]) traen de nuevo a luz el trabajo de Duffin y Schaeffer, donde analizan la condición de marco en un conjunto denso de vectores en  $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R})$  estudiado en la física cuántica, llamados estados coherentes, obtenido mediante subconjuntos discretos de la representación continua del grupo de Weyl-Heisenberg como operadores unitarios de  $\mathcal{H}$ .

Este renovado interés se vio favorecido además por el rápido desarrollo de la teoría de wavelets, introduciendo a los marcos como una herramienta muy útil en el análisis tiempo-frecuencia de señales y el procesamiento de imágenes, sobre todo con el estudio de marcos de construcción sencilla, como los denominados marcos de Gabor, que consisten en traslaciones en tiempo y frecuencia de una sola “señal”  $g \in L^2(\mathbb{R})$ ; i.e. tienen la forma  $\{e^{2\pi i m b x} g(x - na)\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ ; o los marcos wavelets, que consisten en dilaciones y traslaciones de una señal  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$  (esto es  $\{\frac{1}{a^{j/2}} \psi(\frac{x}{a^j} - kb)\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ ).

Hoy en día, debido al intenso desarrollo producido por un importante número de investigadores en diversas ramas de la matemática, existe una amplia gama de aplicaciones de la teoría de marcos, en temas tan diversos como lo son la computación cuántica, el análisis de multiresolución, codificación de antena múltiple, teoría de muestreo, entre otros.

Es usual asociar a un marco ciertos operadores acotados (matrices en el caso finito dimensional), y analizar sus propiedades para deducir resultados relativos al marco. Esto permite además utilizar herramientas de la teoría de operadores y el análisis matricial. Así, a un marco  $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i \in I}$  para  $\mathcal{H}$  se lo puede pensar como un operador suryectivo  $T^{\mathcal{F}} : \ell_2(I) \rightarrow \mathcal{H}$  que asigna a cada elemento de la base canónica en  $\ell_2(I)$  el elemento correspondiente del marco. Este es denominado *operador de síntesis*, su adjunto es el *operador de análisis* y  $S^{\mathcal{F}} := T^{\mathcal{F}}(T^{\mathcal{F}})^*$  es el *operador de marco*. Básicamente, el operador de análisis aplicado a un vector  $f$  (señal) nos da los coeficientes de marco de  $f$ ,  $\langle f, f_n \rangle$ . Sin embargo, poder reconstruir la señal a partir de estos coeficientes no es tarea sencilla (a diferencia de las bases ortonormales), dado que se requiere invertir el operador de marco, y en términos computacionales esto conlleva un alto costo (la matriz que representa al operador de marco puede ser demasiado grande). Es importante destacar que, sin embargo, el sobredimensionamiento del marco hace que un vector se pueda reconstruir con más de una sucesión de coeficientes. Esto da cierta libertad de reconstrucción de un vector usando un marco, a diferencia de la rigidez que presenta una base ortonormal.

Esto acentuó el interés en marcos cuyo operador de marco sea fácil de invertir, en particular, aquellos cuyo  $S^{\mathcal{F}}$  sea múltiplo de la identidad. Estos se denominaron *marcos ajustados* dado que en ellos la proporción entre las constantes óptimas  $A, B$  del marco

es uno y, como se dijo anteriormente, se tiene una reconstrucción sencilla de todo vector ( $f = \frac{1}{A} \sum \langle f, f_n \rangle f_n$ ). Cuando  $A = B = 1$  los marcos se llaman *marcos de Parseval* por razones obvias. Éstos se comportan casi como bases ortonormales y son, de hecho, proyecciones ortogonales de bases ortogonales de un espacio de Hilbert que contiene a  $\mathcal{H}$  (ver el libro de D. Han y D. Larson [42]).

Como acertadamente intuyeron Daubechies, Grossman y Meyer cuando los definieron, los marcos ajustados resultaron ser de gran utilidad en matemáticas aplicadas. En el análisis de señales, por ejemplo, el empleo de marcos ajustados con adecuadas restricciones en las normas de los vectores presenta cierta robustez ante la presencia de ruidos y pérdida de datos en la transmisión (ver [19, 26, 43], entre otros).

Una de las ventajas que se tiene trabajando con marcos en lugar de bases ortonormales es la escasa rigidez estructural que un marco presenta a diferencia de una base ortonormal, sin ir más lejos, basta notar que el número de elementos de un marco ajustado uniforme (esto es, con vectores de norma uno) en  $\mathbb{C}^d$  puede ser cualquier  $p \geq d$ . Esta libertad permite adecuar el marco a emplear a las características estructurales que la aplicación requiera.

El diseño de marcos con restricciones en las normas, ha sido largamente estudiado, tanto en dimensión finita como en dimensión infinita. Podemos citar, por ejemplo, el trabajo de P. Casazza ([16]), los trabajos de P. Casazza y M. Leon ([20, 21]), así como el artículo de D. Larson y K. Kornelson ([47]), o el trabajo de K. Dykema, D. Freeman, K. Kornelson, D. Larson, M. Ordower, y E. Weber ([32]).

Paralelamente, en el trabajo [12] de J. Benedetto y M. Fickus, los autores proponen un enfoque geométrico diferente. Inspirándose en la ley de Coulomb que explica el ordenamiento de un conjunto de partículas cargadas en una esfera como minimizadores de cierto potencial, estudian una clase de función potencial, que llaman potencial de marco (en la literatura también se lo denomina potencial de Benedetto-Fickus) y analizan los minimizadores de este potencial para  $m$  vectores de norma uno en  $\mathbb{C}^d$ , probando que se corresponden a conjuntos ortogonales si  $m \leq d$  y marcos ajustados si  $m > d$ . En particular, muestran la existencia de tales marcos, como mínimos de una función continua sobre un compacto. Estos resultados se extendieron a marcos con normas diferentes a uno, pero prefijadas de antemano ([18]) y a marcos con una estructura especial, llamados marcos convolucionales ([36]).

Con el correr de los años, la noción de marco se extendió rápidamente a otros contextos, podemos mencionar, por ejemplo, la publicación de K. Gröchenig sobre marcos en espacios de Banach ([40]), el trabajo de M. Frank y D. Larson que trata sobre marcos definidos en módulos de Hilbert ([37]). Asimismo, hay generalizaciones del concepto de marcos de vectores a marcos de operadores (ver el artículo de G. Sun [54]) y marcos de subespacios, de los que nos ocuparemos en el Capítulo 4.

La teoría (abstracta) de los marcos de subespacios se inicia en el trabajo de P. Casazza y G. Kutyniok [22]. Previamente, M. Fornasier había estudiado, basándose en métodos de descomposición, uniones de sucesiones de vectores, cada una de las cuales forma un

marco en el subespacio que generan, de modo de lograr un marco en el espacio total generado ([35]). P. Casazza y G. Kutyniok consideraron las proyecciones ortogonales a los subespacios generados como punto de partida para definir los marcos de subespacios. Recientemente, han ido apareciendo varias aplicaciones de estos nuevos objetos (que han sido renombrados como *marcos de fusión*) al análisis de señales (por ejemplo, la modelización de una red de sensores), y su estudio se ha visto incrementado en gran medida.

### Estructura de la tesis.

La primer parte de la tesis, basada en los trabajos [51] y [52], trata con marcos abstractos en espacios de dimensión finita. Se estudiaron problemas relacionados con construcciones de marcos ajustados, y con generalizaciones de las caracterizaciones de los mínimos del potencial de Benedetto-Fickus a una familia más amplia de funcionales. De este modo, en el Capítulo 2 se resuelve completamente un problema planteado por D. J. Feng, L. Wang y Y. Wang en [33] sobre construcciones de marcos ajustados agregando un número óptimo de vectores unitarios a un conjunto fijo de vectores de norma uno. Además, al final del mencionado Capítulo se propone un algoritmo para construir tales completaciones. Estos resultados están contenidos en el trabajo “Tight frame completions with prescribed norms”([51]).

En el Capítulo 3 se define una familia de funcionales  $P_\phi$  definidos en el conjunto de marcos en  $\mathbb{C}^d$  (para ser precisos, en sus operadores de marco), construidos a partir de funciones convexas  $\phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ . Como caso particular, se recupera el potencial de marco con la función convexa  $x^2$ . Se obtienen las mismas caracterizaciones para los mínimos globales que las halladas en los trabajos [12], [18] y [36]. Sin embargo, al plantearse el estudio de mínimos locales, surgen dificultades interesantes al tratar de relacionar mínimos locales con respecto a la topología de la norma de operadores, cuando consideramos  $P_\phi$  actuando en el conjunto de marcos con normas fijas de antemano  $\{a_i\}_{i=1}^m$  y cuando la pensamos actuando directamente en los marcos, identificación marco-operador de marco mediante. En este último caso teniendo en cuenta, como se hace en los trabajos antes mencionados, la topología producto del producto de  $m$  esferas de radio  $\sqrt{a_i}$ . En este sentido, se hallan resultados parciales para tales mínimos. El Capítulo 3 esta basado en el trabajo “Minimization of convex functionals over frame operators” ([52]).

En el capítulo final de la tesis el tema central dejan de ser los marcos finito dimensionales, y pasa a ser el estudio de los llamados *marcos de subespacios*, o *marcos de fusión* en espacios de Hilbert generales, tanto de dimensión finita como infinita.

Como objetivo principal en el estudio presentado en el Capítulo 4 se busca generalizar varios de los resultados conocidos de la teoría de marcos, presentando ejemplos en el caso en que esto no sea posible. Se estudia la acción de operadores suryectivos en bases ortonormales de subespacios, y la relación que existe entre ciertos ángulos de subespacios y los pesos admisibles (ver definiciones en el Capítulo 1) para que las imágenes de los elementos de la base por el operador formen un marco de subespacios. Como operadores

surjectivos particulares, se analizan proyecciones (tanto ortogonales como oblicuas) de un espacio de Hilbert  $\mathcal{K} \supset \mathcal{H}$  sobre  $\mathcal{H}$ , obteniéndose generalizaciones parciales de resultados válidos para marcos de vectores. Se definen y estudian además marcos de subespacios que son refinamientos de otros, y se utilizan estos refinamientos para relacionar el exceso del marco (dimensión del núcleo del operador de marco) con el sobredimensionamiento de los espacios que conforman el marco. Se concluye con varios ejemplos que ilustran las diferencias entre marcos integrados por vectores y los formados por subespacios. Estos resultados se hallan contenidos en el artículo “Some properties of frames of subspaces obtained by operator theory methods” ([53]).

La organización de este trabajo es entonces la siguiente: en el Capítulo 1 se presentan resultados y definiciones básicas que serán utilizadas en los demás capítulos. En general, no se dan demostraciones de los enunciados, salvo que el enfoque sea de interés o presente cierta novedad. Los siguientes capítulos (en donde se encuentran los resultados originales de la tesis) están basados en los trabajos [51, 52, 53] respectivamente.

En lo que resta de la Introducción haremos un resumen más detallado de los resultados originales del trabajo.

## Resumen de los resultados originales en el trabajo

### Capítulo 2

En el Capítulo 2, se estudia el problema planteado en [33] sobre la obtención de marcos ajustados en  $\mathbb{C}^d$  agregando vectores a un conjunto inicial  $\{f_i\}_{i=1}^p$ . Recordemos que un marco ajustado en  $\mathbb{C}^d$  es un conjunto de vectores  $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^p$  tal que para todo  $g \in \mathbb{C}^d$ ,  $\|g\|^2 = A \sum_{i=1}^p |\langle g, f_i \rangle|^2$ , para cierta  $A > 0$ .

En concreto, el problema planteado por D.Feng, L.Wang y Y.Wang en [33] es el siguiente:

*Dados  $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^p \subset \mathbb{C}^d$  vectores de norma uno. ¿Cuál es el número mínimo de vectores (de norma uno) a agregar para obtener un marco ajustado? Es decir, de acuerdo a la terminología introducida en el capítulo, uno busca una *completación óptima de  $\mathcal{F}$  a un marco ajustado*.*

Notado matricialmente, si  $T$  es la matriz de  $d \times p$  cuyas columnas son los vectores de  $\mathcal{F}$ , entonces lo que se busca es obtener un múltiplo escalar de una coisometría (es decir, una matriz  $X$  tal que  $XX^* = Id$ ) agregando el número óptimo de columnas de norma uno a  $T$ .

Notamos por  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_d$  los autovalores de la matriz correspondiente al operador de marco de  $\mathcal{F}$ . Llamemos  $h := \sum_{i=2}^d \lambda_1 - \lambda_i$  y sea  $r_0$  el número mínimo de vectores de norma uno que se pueden agregar a  $\mathcal{F}$  para obtener un marco ajustado. La solución al problema anterior es la siguiente (Proposición 2.4.2):

- a) Si  $h < d$ , entonces  $r_0 = h$  si  $h = 0$  o si  $h \in \mathbb{N}$  y  $1 + \frac{1}{h} \sum_{i=1}^h \lambda_{d-i+1} \leq \lambda_1$ . En caso contrario,  $r_0 = d$ .

b) Si  $h \geq d$ ,  $r_0 = \lceil h \rceil$ .

Los resultados y técnicas utilizados en el planteo y desarrollo del problema antes expuesto pueden aplicarse en un contexto más general, a completaciones con vectores cuyas normas al cuadrado estén prefijadas por una sucesión de números positivos  $\mathbf{a} = \{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ , (ordenados en forma decreciente), en lugar de considerar vectores de norma uno solamente. En este caso, diremos que un conjunto de  $r$  vectores cuyas normas al cuadrado están dadas por los primeros  $r$  términos de la sucesión  $\mathbf{a}$ , y que completa a  $\mathcal{F}$  a un marco ajustado, es una  $(\mathbf{a}, r)$ -completación de  $\mathcal{F}$ .

Cabe aclarar que con esta imposición en las normas puede suceder que no se tenga completación ajustada alguna. En este sentido, se probó lo siguiente (ver Teorema 2.3.3):

Dado  $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ,  $\mathcal{F}$  es  $(\mathbf{a}, r)$ -completable si y sólo si

i.

$$\lambda_1 \leq \frac{1}{d} \left( \sum_{i=1}^r a_i + \alpha \right) < \infty. \quad (2)$$

ii. Para  $t = \min\{d, r\}$ ,

$$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (a_i + \lambda_{d-i+1}) \leq \frac{1}{d} \left( \sum_{i=1}^r a_i + \alpha \right), \quad 1 \leq k \leq t, \quad (3)$$

donde  $\alpha = \text{tr}(S^{\mathcal{F}}) = \sum_{i=1}^d \lambda_i$ .

En particular, si  $r \in \mathbb{N}$  es tal que  $r \geq d$  y  $\mathcal{F}$  es  $(\mathbf{a}, r)$ -completable entonces  $\mathcal{F}$  es  $(\mathbf{a}, k)$ -completable para cada  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq r$ .

Con el objetivo de describir el mínimo número  $r$  de vectores que formen una  $(\mathbf{a}, r)$ -completación de  $\mathcal{F}$ , se introducen recursivamente los siguientes  $d+1$  números  $c_k$ ,  $0 \leq k \leq d$ :  $c_0 = \lambda_1$  y, para  $1 \leq k \leq d$ :

$$c_k := \max \left( c_{k-1}, \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (a_i + \lambda_{d-i+1}) \right). \quad (4)$$

Por medio de estos valores pueden enunciarse de manera diferente las condiciones para que existan completaciones con  $r$  vectores (ver Proposición 2.3.6).

Además, el mínimo  $r_0$  puede ser entonces fácilmente caracterizado (Proposición 2.3.7):

Sea  $\mathcal{F}$   $(\mathbf{a}, r)$ -completable para algún  $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ , y  $r_0 \in \mathbb{N}$  el mínimo tal que  $\mathcal{F}$  es  $(\mathbf{a}, r_0)$ -completable. Entonces

**Caso 1**  $r_0 < d$  si y sólo si  $c_{r_0} = \frac{1}{d} (\sum_{i=1}^{r_0} a_i + \alpha)$ .

**Caso 2**  $d \leq r_0 < \infty$  si y sólo si  $c_k \neq \frac{1}{d} (\sum_{i=1}^k a_i + \alpha)$  para todo  $1 \leq k \leq d-1$  y  $r_0 \in \mathbb{N}$  es el mínimo tal que  $c_d \leq \frac{1}{d} (\sum_{i=1}^{r_0} a_i + \alpha)$ .

**Caso 3**  $r_0 = \infty$  si y sólo si  $c_k \neq \frac{1}{d} \left( \sum_{i=1}^k a_i + \alpha \right)$  para todo  $1 \leq k \leq d-1$  y  $c_d = \frac{1}{d} \left( \sum_{i=1}^{\infty} a_i + \alpha \right)$ .

Al final del capítulo, se describe un algoritmo que permite construir completaciones para un conjunto dado de vectores. Se propone un método que evita diagonalizar la matriz  $S^{\mathcal{F}} = TT^*$ , que por supuesto no completa con el número óptimo de vectores. Este se basa fuertemente en el algoritmo de Cholesky que es fundamental en la prueba del siguiente resultado (ver Proposición 2.5.1):

Dada  $\mathbf{a}$  una sucesión divergente. Sea  $m \in \mathbb{R}$  una cota superior para  $\|S^{\mathcal{F}}\|$  y  $t = m + a_1$ . Si  $r \in \mathbb{N}$  es tal que

$$\sum_{i=1}^{r-1} a_i < t \cdot d - \text{tr}(S^{\mathcal{F}}) \leq \sum_{i=1}^r a_i \quad (5)$$

entonces existen vectores  $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i=1}^r$  tal que  $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$  es un marco ajustado, con  $\|g_i\|^2 = a_i$  para  $1 \leq i \leq r$ . Este conjunto puede ser construido sin diagonalizar  $S^{\mathcal{F}}$ .

El Capítulo 2 concluye con un breve análisis de los algoritmos planteados, en el caso en que las completaciones sean con vectores unitarios.

### Capítulo 3

En el Capítulo 3 se estudia una familia de funcionales  $P_\phi$  definidos en los operadores de marco (en marcos de dimensión finita) construidos a partir de una función creciente y convexa  $\phi : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ . Concretamente, se define  $P_\phi(S^{\mathcal{F}}) = \text{tr}(\phi(S^{\mathcal{F}}))$ , donde  $S^{\mathcal{F}}$  es el operador de marco asociado a  $\mathcal{F}$ , es decir,  $S^{\mathcal{F}} = T^{\mathcal{F}}(T^{\mathcal{F}})^*$  donde  $T^{\mathcal{F}}$  es la matriz que tiene como columnas a los vectores de  $\mathcal{F}$ . Aquí  $\phi(S^{\mathcal{F}})$  se obtiene mediante cálculo funcional.

El motivo de tal estudio es el de generalizar resultados relativos al potencial de marco (también llamado potencial de Benedetto - Fickus) definido en la publicación de J.J. Benedetto y M. Fickus [12], que puede interpretarse como  $P_\phi$  con  $\phi(x) = x^2$ . Esta elección particular de función convexa hace posible (y de hecho es la definición usual) definir al potencial de marco en términos de los vectores del marco sin usar el operador de marco. En [12], se demuestra que el potencial de marco tiene como minimizadores globales (y locales) a los marcos ajustados cuando nos restringimos al conjunto de marcos con vectores de norma uno de  $m \geq d$  elementos en  $\mathbb{C}^d$ . P.G Casazza, M. Fickus, J. Kovacevic, M.T. Leon y J.C. Tremain en [18] caracterizan a los mínimos locales y globales, cuando ponen restricciones más generales en las normas de los  $m$  vectores. En nuestro caso, como definimos  $P_\phi$  en operadores de marco (matrices), la restricción en las normas se traduce en condiciones en el espectro de estas matrices. Mediante técnicas de mayorización de vectores, se logra generalizar parte de los resultados antes mencionados a toda la familia de funcionales  $P_\phi$ .

Antes de hacer una breve exposición de los resultados, introduzcamos algo de notación para los conjuntos de marcos a estudiar:

$$\mathcal{A}(c) := \{\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^m \subset \mathbb{C}^d, \sum_{i=1}^m \|f_i\|^2 = \text{tr}(S^{\mathcal{F}}) = c\},$$

$$\mathcal{B}(\mathbf{a}) := \{\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^m \subset \mathbb{C}^d, \|f_i\|^2 = a_i \text{ para todo } i\},$$

donde  $\mathbf{a} = (a_i)_{i=1}^m$  es una sucesión (finita) decreciente de números positivos. Definimos además al conjunto de operadores de marco correspondientes a los conjuntos  $\mathcal{A}(c)$  y  $\mathcal{B}(\mathbf{a})$  como  $\mathcal{T}(c)$  y  $\mathcal{R}(\mathbf{a})$  respectivamente.

Se caracterizó entonces a los mínimos globales en  $\mathcal{T}(c)$  y  $\mathcal{R}(\mathbf{a})$  para la familia  $P_\phi$  de la siguiente manera (ver Teoremas 3.1.6 y 3.1.7):

- a) Si  $\mathcal{F} \in \mathcal{A}(c)$  es un marco ajustado, entonces  $S^{\mathcal{F}}$  es un mínimo global para  $P_\phi$  en  $\mathcal{T}(c)$ . Si suponemos además que  $\phi$  es estrictamente convexa entonces todo mínimo global en  $\mathcal{T}(c)$  corresponde a un marco ajustado.
- b) Si  $\mathcal{F} \in \mathcal{B}(\mathbf{a})$  es de la forma

$$\{\sqrt{a_i} e_i\}_{i=1}^r \cup \{f_i\}_{i=r+1}^m \quad (6)$$

donde  $\{e_i\}_{i=1}^d$  es una base ortonormal para  $\mathbb{C}^d$ ,  $r$  es la  $d$ -irregularidad de  $\mathbf{a}$  (ver Definición 3.0.9) y  $\{f_i\}_{i=r+1}^m$  es un marco ajustado para  $\text{span} \{e_i\}_{i=r+1}^d$  entonces  $S^{\mathcal{F}}$  es un mínimo global para  $P_\phi$  en  $\mathcal{R}(\mathbf{a})$ . Si además  $\phi$  es estrictamente convexa entonces todo mínimo global en  $\mathcal{R}(\mathbf{a})$  es el operador de marco de una sucesión definida como en (6).

En lo que respecta a los mínimos locales, la situación es diferente. No es claro en general que la función  $\mathcal{F} \mapsto S^{\mathcal{F}}$  de  $\mathcal{B}(\mathbf{a})$  en  $\mathcal{R}(\mathbf{a})$  tenga secciones locales, cuando consideramos la topología dada por  $d(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \max_{1 \leq i \leq m} \|f_i - g_i\|$  en  $\mathcal{B}(\mathbf{a})$  y la dada por la norma de operadores en  $\mathcal{R}(\mathbf{a})$ . Es por esto que las caracterizaciones de los mínimos locales para  $P_\phi$  en  $\mathcal{B}(\mathbf{a})$  no pueden leerse como generalizaciones de los resultados presentados en [12] y [18] (es importante destacar que en el caso del potencial de marco, los minimizadores locales son además minimizadores globales en  $\mathcal{B}(\mathbf{a})$ ). Por otro lado, los mínimos locales en  $\mathcal{T}(c)$  se corresponden a mínimos locales en  $\mathcal{A}(c)$ . En resumen, la descripción de los minimizadores locales para  $P_\phi$  hallada es la siguiente (Teoremas 3.1.6 y 3.1.7). Para facilitar la exposición haremos un abuso de notación, llamando también  $P_\phi$  al funcional que al marco  $\mathcal{F}$  le asigna  $P_\phi(S^{\mathcal{F}})$ :

- a) Fijado  $m \in \mathbb{N}$ , todo mínimo local de  $P_\phi$  en  $\mathcal{A}(c)$  con respecto a la topología producto en  $\overbrace{\mathbb{C}^d \times \dots \times \mathbb{C}^d}^m$  es un marco ajustado, y por lo tanto un mínimo global.

- b) Todo mínimo local de  $P_\phi$  en  $\mathcal{R}(\mathbf{a})$  con respecto a la norma de operadores es de la forma (6) y por lo tanto, es un mínimo global.

En la última sección del capítulo, se estudia la existencia de secciones locales para la asignación marco  $\mapsto$  operador de marco, y se obtiene el siguiente resultado (Teorema 3.3.3):

Supongamos que  $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^m \subseteq \mathbb{C}^d$  es un marco tal que  $\mathcal{F}$  no puede partitionarse en dos conjuntos mutuamente ortogonales. Sea  $\{S_i\}_i \subseteq \mathcal{M}_d(\mathbb{C})^+$  una sucesión convergente a  $S = S^\mathcal{F}$ , el operador de marco de  $\mathcal{F}$ , con  $\text{tr}(S_i) = \text{tr}(S)$ ,  $\forall i$ . Entonces, dado  $\eta > 0$  existe  $i_1 \in \mathbb{N}$  tal que, para cada  $i \geq i_1$  existe un marco  $\mathcal{G}(i) = \mathcal{G} = \{g_i\}_{i=1}^m$  que verifica:

1.  $\|g_i\| = \|f_i\|$  para  $1 \leq i \leq m$ .
2.  $\|g_i - f_i\| \leq \eta$  para  $1 \leq i \leq m$ .
3.  $S^\mathcal{G} = S_i$ .

Por lo que el conjunto de candidatos a mínimos locales para las  $P_\phi$  se ve reducido considerablemente: si  $\phi$  es estrictamente convexa, toda sucesión  $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^m \in \mathcal{B}(\mathbf{a})$  que no pueda partitionarse en dos conjuntos mutuamente ortogonales es un mínimo local para  $P_\phi$  en  $\mathcal{B}(\mathbf{a})$  si y sólo si es un mínimo global de  $P_\phi$  (y por lo tanto es un marco ajustado, dada la estructura descrita en (6)).

En el Capítulo 3 se hace además un estudio de los minimizadores para  $P_\phi$  en el conjunto de marcos geoméricamente uniformes compuestos, que se construyen a partir de un conjunto finito de vectores  $\mathcal{F}$  y la representación unitaria de un grupo cíclico finito, haciéndolo actuar sobre  $\mathcal{F}$ . Así se obtienen generalizaciones parciales a los resultados hallados en [36] sobre mínimos del potencial de marco en marcos convolucionales.

## Capítulo 4

Finalmente, el Capítulo 4 está dedicado a los marcos de subespacios (o marcos de fusión). Estos se definen a partir de una sucesión de subespacios cerrados  $\{W_i\}_{i \in I}$  en el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  junto con una sucesión de pesos

$$\mathbf{w} = \{w_i\}_{i \in I} \in \ell_+^\infty(I) := \{\mathbf{b} = \{b_i\}_{i \in I} \in \ell^\infty(I) : b_i > 0 \quad \forall i \in I\}.$$

Concretamente,  $\mathcal{W}_\mathbf{w} = (w_i, W_i)_{i \in I}$  es un marco de subespacios para  $\mathcal{H}$  si existen  $A, B > 0$  tal que, para todo  $f \in \mathcal{H}$ ,

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{i \in I} w_i^2 \|P_{W_i} f\|^2 \leq B\|f\|^2 \quad (7)$$

donde  $P_{W_i}$  es la proyección ortogonal sobre  $W_i$ . Constituyen una generalización de los marcos de vectores, si consideramos como subespacios a los espacios unidimensionales

generados por cada vector del marco y como pesos las normas de los mismos. En particular, uno puede definir el operador de síntesis  $T_{\mathcal{W}_w}$  cuyo dominio es

$$\mathcal{K}_{\mathcal{W}} = \sum_{i \in I} \oplus W_i := \left\{ g = (g_i)_{i \in I} : g_i \in W_i \text{ y } \|g\|^2 = \sum_{i \in I} \|g_i\|^2 < +\infty \right\},$$

y definir el *exceso* del marco, como con los marcos de vectores. El exceso de un marco  $\mathcal{F}$  de vectores (respectivamente de subespacios  $\mathcal{W}_w$ ) es  $E(\mathcal{F}) = \dim N(T^{\mathcal{F}})$  (resp.  $E(\mathcal{W}_w) = \dim N(T_{\mathcal{W}_w})$ ), donde por  $N(T)$  indicamos el núcleo del operador  $T$ . En los marcos de vectores mide, en cierto sentido, la redundancia del marco (de ahí su nombre), sin embargo, como es de esperar, en los marcos de subespacios la situación es diferente.

Dado que los marcos de vectores pueden caracterizarse por ser imágenes de operadores suryectivos de bases ortonormales, es natural preguntarse si hay resultados similares para los marcos de subespacios, es decir, dada una base ortonormal de subespacios  $\{E_i\}_{i \in I}$  para un espacio de Hilbert  $\mathcal{K}$  (es decir,  $\mathcal{K} = \oplus_{i \in I} E_i$ ), qué puede decirse de su imagen por un operador suryectivo  $T : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{H}$ . Notar que  $T(E_i)$  puede no ser cerrado para todo  $i \in I$ ; sin embargo, aún si lo fueran, puede suceder que no exista sucesión de pesos para la cual se tenga un marco de subespacios. En la sección de ejemplos, al final del capítulo, se presentan ésta y otras situaciones que muestran las diferencias de los marcos de subespacios con los marcos de vectores usuales.

Para asegurar que los  $T(E_i)$  sean subespacios cerrados de  $\mathcal{H}$  (utilizando la notación del Capítulo 4,  $T(E_i) \sqsubseteq \mathcal{H}$ ) uno impone condiciones en el módulo mínimo reducido de  $TP_{E_i} : \gamma(TP_{E_i}) > 0$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ , donde

$$\gamma(B) = \inf\{\|Bx\| : x \in N(B)^\perp, \|x\| = 1\}.$$

Sin embargo, para asegurar la existencia de una sucesión de pesos que haga de  $\{T(E_i)\}_{i \in I}$  un marco de fusión uno tiene que poner más condiciones (ver Teorema 4.0.6):

Sea  $\{E_i\}_{i \in I}$  una base ortonormal de subespacios de  $\mathcal{K}$  y  $T \in L(\mathcal{K}, \mathcal{H})$  un epimorfismo. Supongamos que existen  $0 < A \leq B < \infty$  tal que, para todo  $i \in I$ ,

$$\frac{A}{B} \leq \frac{\gamma(TP_{E_i})^2}{\|TP_{E_i}\|^2} \quad \text{i.e., tal que} \quad \frac{\|TP_{E_i}\|^2}{B} \leq \frac{\gamma(TP_{E_i})^2}{A}. \quad (8)$$

Para cada  $i \in I$ , llamemos  $W_i = T(E_i) \sqsubseteq \mathcal{H}$ . Sea  $\mathbf{w} = \{w_i\}_{i \in I} \in \ell_+^\infty(I)$  tal que

$$\frac{\|TP_{E_i}\|^2}{B} \leq w_i^2 \leq \frac{\gamma(TP_{E_i})^2}{A} \quad \text{para todo } i \in I. \quad (9)$$

Entonces probamos lo siguiente:

1. La sucesión  $\mathcal{W}_w = (w_i, W_i)_{i \in I}$  es un marco de subespacios para  $\mathcal{H}$ .
2. Además,  $\mathcal{W}_w$  tiene cotas

$$\frac{\gamma(T)^2}{B} \leq A_{\mathcal{W}_w} \quad \text{y} \quad B_{\mathcal{W}_w} \leq \frac{\|T\|^2}{A}. \quad (10)$$

3. Si  $N(T) \cap E_i = \{0\}$  para todo  $i \in I$ , entonces  $E(\mathcal{W}_w) = \dim N(T)$ .

El siguiente paso a seguir fue estudiar el conjunto de *pesos admisibles* dado un conjunto de subespacios que generan el Hilbert  $\mathcal{H}$ . Esto es, dado una familia generadora  $\mathcal{W} = \{W_i\}_{i \in I}$  para  $\mathcal{H}$  (es decir,  $W_i$  es cerrado  $\forall i \in I$  y  $\overline{\text{span}} \{W_i : i \in I\} = \mathcal{H}$ ), hallar los  $w \in \ell_+^\infty(I)$  que hacen de  $\mathcal{W}_w$  un marco de subespacios para  $\mathcal{H}$ . Este es un problema interesante y que presenta dificultades incluso planteado en términos de marcos vectoriales: dadas ciertas “direcciones” (vectores de norma uno en  $\mathcal{H}$ ) ¿qué normas podemos asociar a cada dirección de modo de obtener un marco con determinadas propiedades (por ejemplo minimizar el potencial de marco)? Es decir, uno invierte el problema clásico de fijar las normas y hallar marcos (si es posible) con esas normas que optimicen cierta condición. Uno define entonces el conjunto de “pesos admisibles” para una sucesión generadora de subespacios  $\mathcal{W} = \{W_i\}_{i \in I}$  de  $\mathcal{H}$ ,

$$\mathcal{P}(\mathcal{W}) := \{w \in \ell_+^\infty(I) : \mathcal{W}_w \text{ es un marco de subespacios para } \mathcal{H}\} \subseteq \ell_+^\infty(I).$$

El resultado al que se arriba en la sección 4.1 es el siguiente (Proposición 4.1.2):

Dada  $\mathcal{W} = \{W_i\}_{i \in I}$  una sucesión generadora de  $\mathcal{H}$ ,

1. Si  $w \in \mathcal{P}(\mathcal{W})$ , entonces  $aw \in \mathcal{P}(\mathcal{W})$  y  $E(\mathcal{W}_w) = E(\mathcal{W}_{aw})$ , para todo  $a \in \ell_+^\infty(I)^*$ , donde  $aw$  es el producto coordenada a coordenada en  $\ell_+^\infty$ , y por  $\ell_+^\infty(I)^*$  notamos a los elementos en  $\ell_+^\infty(I)$  que son invertibles con este producto.
2. Si  $\mathcal{W}_w$  es una base de Riesz de subespacios, para algún  $w \in \ell_+^\infty(I)$ , entonces  $\mathcal{P}(\mathcal{W}) = \ell_+^\infty(I)^*$ , y además  $(a, \mathcal{W})$  es una base de Riesz para todo  $a \in \ell_+^\infty(I)^*$ . En particular,  $(e, \mathcal{W})$  es una base de Riesz de subespacios, con  $e = (1, 1, \dots)$ .
3. Sea  $G \in Gl(\mathcal{H})$ . Entonces  $\mathcal{P}(\mathcal{W}) = \mathcal{P}(\{GW_i\}_{i \in I})$ . En otras palabras, una sucesión  $w \in \ell_+^\infty(I)$  es admisible para  $\mathcal{W}$  si y sólo si es admisible para  $G\mathcal{W}$ .

En particular, se tiene una caracterización completa del conjunto de pesos admisibles  $\mathcal{P}(\mathcal{W})$  en el caso particular de que  $\mathcal{W}_w$  sea una base de Riesz de subespacios (i.e.  $T_{\mathcal{W}_w}$  es invertible) para algún  $w \in \ell_+^\infty(I)$ . Es decir, si definimos la siguiente relación de equivalencia: dos pesos  $v$  y  $w$  en  $\mathcal{P}(\mathcal{W})$  son equivalentes si existe una sucesión  $a \in \ell_+^\infty(I)^*$  tal que  $v = aw$ , entonces, lo anterior puede resumirse diciendo que si  $\mathcal{W}_w$  es una base de Riesz de subespacios para  $\mathcal{H}$ , entonces los pesos admisibles constituyen una sola clase de equivalencia. En el extremo opuesto, se muestra en la sección de ejemplos del Capítulo 4 una sucesión generadora  $\mathcal{W}$  con infinitas sucesiones  $w \in \mathcal{P}(\mathcal{W})$  no equivalentes entre sí.

Una vez que se tienen condiciones necesarias para que la imagen de un epimorfismo de una base ortonormal de subespacios sea un marco de subespacios, es natural estudiar si se mantienen las relaciones entre proyecciones (ortogonales y oblicuas) y bases ortonormales y marcos que se dan en los marcos de vectores (ver [6], o la tesis doctoral de J. Antezana [5]). Es bien sabido que los marcos de Parseval en  $\mathcal{H}$  se caracterizan por ser

proyecciones de bases ortonormales de un Hilbert  $\mathcal{K} \supset \mathcal{H}$  en  $\mathcal{H}$  ([42]). Este resultado se extiende a marcos generales con ciertas restricciones, cambiando las bases ortonormales por bases de Riesz ó la proyección ortogonal por proyecciones oblicuas (ver [5, 6]). Estos resultados se extienden de manera parcial a marcos de subespacios, obteniéndose además cierta información sobre los pesos y exceso del marco:

Sea  $\mathcal{W}_{\mathbf{w}} = (w_i, W_i)_{i \in I}$  un marco de subespacios para  $\mathcal{H}$  Entonces

- Existe un espacio de Hilbert  $\mathcal{V} \supseteq \mathcal{H}$  y una *base de Riesz* de subespacios  $\{B_i\}_{i \in I}$  para  $\mathcal{V}$  tal que

$$P_{\mathcal{H}}(B_i) = W_i \quad \text{y} \quad A_{\mathcal{W}_{\mathbf{w}}}^{1/2} \|P_{\mathcal{H}}P_{B_i}\| \leq w_i \leq B_{\mathcal{W}_{\mathbf{w}}}^{1/2} \|P_{\mathcal{H}}P_{B_i}\| \quad \text{para todo } i \in I .$$

Esto es, la nueva sucesión de pesos  $v_i = \|P_{\mathcal{H}}P_{B_i}\|$ ,  $i \in I$ , es equivalente a  $\mathbf{w}$ . Además, podemos calcular  $E(\mathcal{W}_{\mathbf{w}}) = \dim \mathcal{V} \ominus \mathcal{H}$ .

- Si  $\mathcal{W}_{\mathbf{w}}$  es un marco de Parseval para  $\mathcal{H}$ , entonces existe un espacio de Hilbert  $\mathcal{V} \supseteq \mathcal{H}$  y una *base ortonormal* de subespacios  $\{F_i\}_{i \in I}$  para  $\mathcal{V}$  tal que

$$P_{\mathcal{H}}(F_i) = W_i \quad \text{y} \quad w_i = c[\mathcal{H}, F_i] = \|P_{\mathcal{H}}P_{F_i}\| \quad \text{para todo } i \in I ,$$

donde  $c[\mathcal{H}, F_i]$  es el *coseno del ángulo entre los subespacios cerrados*  $\mathcal{H}$  y  $F_i$  (ver la Definición 1.1.5).

- Si  $1 \leq A_{\mathcal{W}_{\mathbf{w}}}$ . Llamemos  $\mathcal{V} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{K}_{\mathcal{W}}$ . Entonces, existe una proyección *oblicua*  $Q \in L(\mathcal{V})$  con  $R(Q) = \mathcal{H} \oplus \{0\}$  y un *sistema ortonormal* de subespacios  $\{B_i\}_{i \in I}$  in  $\mathcal{V}$ , tal que

$$W_i \oplus 0 = Q(B_i) \quad \text{y} \quad w_i = \|Q P_{B_i}\| = \gamma(Q P_{B_i}) \quad \text{para todo } i \in I .$$

Más aún, si  $E(\mathcal{W}_{\mathbf{w}}) = \infty$ , entonces la sucesión  $\{B_i\}_{i \in I}$  puede tomarse como una *base ortonormal* de subespacios de  $\mathcal{V}$ .

Es importante mencionar que, a diferencia de los marcos de vectores, las proyecciones ortogonales de bases ortogonales de subespacios no son necesariamente marcos de Parseval de subespacios. Al final del Capítulo se presentan varios contraejemplos que muestran estas y otras diferencias entre los marcos de vectores y los de subespacios.

En el capítulo se define además una noción de exceso para marcos de subespacios, que permite recuperar algunas propiedades del exceso en marcos de vectores. Para esto, se introduce la noción de refinamientos de subespacios y marcos de subespacios que son refinamientos de un marco  $\mathcal{W}_{\mathbf{w}} = (w_i, W_i)_{i \in I}$ . Esto permite relacionar el exceso del marco  $\mathcal{W}_{\mathbf{w}} = (w_i, W_i)_{i \in I}$  con lo que puede “borrarse” de cada subespacio  $W_i$ , manteniendo un marco de subespacios para  $\mathcal{H}$ :

$$E(\mathcal{W}_{\mathbf{w}}) = \sup \left\{ E(\mathcal{W}, \mathcal{V}) : \mathcal{V}_{\mathbf{w}} = (w_i, V_i)_{i \in J} \text{ es un marco, refinamiento de } \mathcal{W}_{\mathbf{w}} \right\} ,$$

donde  $E(\mathcal{W}, \mathcal{V}) := \sum_{i \in J} \dim(W_i \ominus V_i) + \sum_{i \notin J} \dim W_i$ .

# Capítulo 1

## Preliminares

### 1.1. Notaciones y nociones básicas de la teoría de operadores en espacios de Hilbert.

En este trabajo, notaremos por  $\mathcal{H}, \mathcal{K}$  a los espacios de Hilbert complejos (separables). Dado  $M$  un subespacio lineal de  $\mathcal{H}$ , notaremos por  $M \sqsubseteq \mathcal{H}$  cuando  $M$  sea *cerrado* en  $\mathcal{H}$ .

Por  $L(\mathcal{H}, \mathcal{K})$  notaremos a las transformaciones lineales acotadas definidas en  $\mathcal{H}$  y a valores en  $\mathcal{K}$ . En el caso en que  $\mathcal{H} = \mathcal{K}$ ,  $L(\mathcal{H}) := L(\mathcal{H}, \mathcal{H})$  serán los operadores lineales acotados en  $\mathcal{H}$ . En  $L(\mathcal{H}, \mathcal{K})$  consideramos la norma (de operadores) definida por

$$\|B\| = \sup\{\|Bx\| : x \in \mathcal{H}, \|x\| = 1\} = \inf\{\alpha > 0 : \|Bx\| \leq \alpha\|x\| \forall x \in \mathcal{H}\}.$$

En el caso en que  $\mathcal{H}$  es finito dimensional, identificaremos directamente  $\mathcal{H} = \mathbb{C}^d$ , mediante un isomorfismo adecuado. En este caso, si  $\mathcal{K} = \mathbb{C}^k$ , entonces  $L(\mathcal{H}, \mathcal{K})$  se identificará con las matrices de  $k \times d$  a valores complejos, notado por  $\mathcal{M}_{k \times d}(\mathbb{C})$ . Similarmente, cuando  $\mathcal{H} = \mathbb{C}^d = \mathcal{K}$ , identificaremos  $L(\mathcal{H})$  con  $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$

Por  $L(\mathcal{H})^+$  notaremos al cono de operadores positivos en  $\mathcal{H}$  es decir,

$$L(\mathcal{H})^+ := \{B \in L(\mathcal{H}) : \langle Bx, x \rangle \geq 0, \quad \forall x \in \mathcal{H}\}.$$

Mientras que los operadores invertibles de  $\mathcal{H}$ , serán notados  $Gl(\mathcal{H})$ .

Dado  $T \in L(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ ,  $R(T)$  denota el rango o imagen de  $T$  en  $\mathcal{K}$ , y  $N(T)$  es el núcleo en  $\mathcal{H}$ . Notamos por  $L_{sa}(\mathcal{H})$  a los operadores autoadjuntos de  $\mathcal{H}$ , esto es, aquellos para los cuales  $T = T^*$ , y por  $\mathcal{U}(\mathcal{H})$  denotaremos los operadores unitarios de  $\mathcal{H}$ . En el caso en que  $\mathcal{H} = \mathbb{C}^d$ ,  $\mathcal{U}(\mathcal{H})$  se denotará  $\mathcal{U}(d)$ .

### 1.1.1. Pseudoinversas.

**Definición 1.1.1.** Dado  $T \in L(\mathcal{H}, \mathcal{K})$  un operador de rango cerrado ( $R(T)$  cerrado en  $\mathcal{K}$ ), decimos que  $B \in L(\mathcal{K}, \mathcal{H})$  es una pseudoinversa de  $T$  si

$$TBT = T \quad \text{y} \quad BTB = B. \quad (1.1)$$

En particular, se tiene que  $TB$  y  $BT$  son idempotentes, y con  $R(TB) = R(T)$ ,  $N(BT) = N(T)$ .

Notaremos el conjunto de pseudoinversas de  $T$  por  $SI(T)$ .

**Observación 1.1.2.** La condición  $R(T) \sqsubseteq \mathcal{K}$  es necesaria y suficiente para que exista  $B \in L(\mathcal{K}, \mathcal{H})$  que cumpla (1.1). Por un lado, si  $TB$  es idempotente, entonces  $R(TB)$  es cerrado, por lo tanto, también  $T$  es de rango cerrado, dado que  $R(T) = R(TB)$ . Recíprocamente, si  $R(T)$  es cerrado, uno puede construirse fácilmente  $B \in L(\mathcal{K}, \mathcal{H})$  definiéndolo adecuadamente en la suma directa  $\mathcal{K} = R(T) \oplus R(T)^\perp$ .

Puede mostrarse que, para cada par de idempotentes  $P$  y  $Q$  en  $L(\mathcal{K})$  y  $L(\mathcal{H})$  resp., con  $R(P) = R(T)$  y  $N(Q) = N(T)$  existe un único elemento  $B$  de  $SI(T)$  con  $TB = P$ ,  $BT = Q$ . En particular, se destaca el caso en que  $P$  y  $Q$  son las proyecciones ortogonales (i. e. idempotentes y autoadjuntas) al rango y núcleo de  $T$ , respectivamente:

**Definición 1.1.3.** Dado  $T \in L(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ , con  $R(T) \sqsubseteq \mathcal{K}$ . Se denota por  $T^\dagger$  al único operador en  $SI(T)$  tal que  $TT^\dagger$  y  $T^\dagger T$  son proyecciones ortogonales. Esta es la *pseudoinversa de Moore-Penrose* de  $T$ .

La Pseudoinversa de Moore-Penrose da la solución óptima a la ecuación  $Tx = b$  en el sentido de que si hacemos  $x = T^\dagger b$ , entonces  $Tx$  es el vector en  $R(T)$  mas cercano a  $b$ , como puede comprobarse fácilmente a partir de la definición de  $T^\dagger$ .

**Proposición 1.1.4.** Sea  $T \in L(\mathcal{H}, \mathcal{K})$  de rango cerrado. Entonces,

$$\|T^\dagger\| = \min\{\|B\| : B \in SI(T)\}.$$

Más aún, para todo  $x \in R(T)$ , y todo  $B \in SI(T)$ ,

$$\|Bx\| \geq \|T^\dagger x\|.$$

### 1.1.2. Módulo mínimo reducido y ángulo entre subespacios.

En esta sección daremos la definición y algunas propiedades importantes del ángulo entre subespacios cerrados en un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  y el módulo mínimo reducido de un operador. Para más detalles y las demostraciones, se recomienda leer el texto de J. Antezana y D. Stojanoff [8], la tesis doctoral de J. Antezana [5], el trabajo de F. Deutsch [29] o el texto clásico de T. Kato [46].

**Definición 1.1.5.** Sea  $\mathcal{M}, \mathcal{N} \subseteq \mathcal{H}$ . Notemos por  $\mathcal{M} \ominus \mathcal{N}$  a  $\mathcal{M} \cap \mathcal{N}^\perp$ .

El coseno del *ángulo* entre  $\mathcal{M}$  y  $\mathcal{N}$  se define como

$$c[\mathcal{M}, \mathcal{N}] = \sup\{|\langle x, y \rangle| : x \in \mathcal{M} \ominus \mathcal{N}, y \in \mathcal{N} \ominus \mathcal{M} \text{ y } \|x\| = \|y\| = 1\}.$$

Si  $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$  o  $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$ , definimos  $c[\mathcal{M}, \mathcal{N}] = 0$ , como si fueran ortogonales. El *seno* de este ángulo se denota  $s[\mathcal{M}, \mathcal{N}] = (1 - c[\mathcal{M}, \mathcal{N}]^2)^{1/2}$ .

**Proposición 1.1.6.** Sea  $\mathcal{M}, \mathcal{N} \subseteq \mathcal{H}$ . Entonces

1.  $c[\mathcal{M}, \mathcal{N}] = c[\mathcal{N}, \mathcal{M}] = c[\mathcal{M} \ominus \mathcal{N}, \mathcal{N}] = c[\mathcal{M}, \mathcal{N} \ominus \mathcal{M}]$ .
2. Si  $\dim \mathcal{M} < \infty$ , entonces  $c[\mathcal{M}, \mathcal{N}] < 1$ .
3.  $c[\mathcal{M}, \mathcal{N}] < 1$  si y sólo si  $\mathcal{M} + \mathcal{N}$  es cerrado.
4.  $c[\mathcal{M}, \mathcal{N}] = c[\mathcal{M}^\perp, \mathcal{N}^\perp]$
5.  $c[\mathcal{M}, \mathcal{N}] = \|P_{\mathcal{M}}P_{\mathcal{N} \ominus \mathcal{M}}\| = \|P_{\mathcal{M} \ominus \mathcal{N}}P_{\mathcal{N}}\| = \|P_{\mathcal{M}}P_{\mathcal{N}} - P_{\mathcal{M} \cap \mathcal{N}}\|$ .
6.  $s[\mathcal{M}, \mathcal{N}] = \text{dist}(\mathcal{N}, \{x \in \mathcal{M} \ominus \mathcal{N} : \|x\| = 1\})$ .

Definamos ahora el módulo mínimo reducido de un operador acotado.

**Definición 1.1.7.** Dado  $T \in L(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ , llamaremos módulo mínimo de  $T$  al número

$$\gamma(T) := \inf \{ \|Tx\| : x \in N(T)^\perp, \|x\| = 1 \}. \quad (1.2)$$

Cuando  $T = 0$ , usaremos la convención  $\gamma(T) = \infty$ .

Las siguientes son propiedades bien conocidas del módulo mínimo de  $T$  (ver [5]) ó [8]):

**Proposición 1.1.8.** Sea  $T \in L(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ . Entonces

1.  $\gamma(T) = \gamma(T^*) = \gamma(T^*T)^{1/2}$ .
2.  $R(T) \subseteq \mathcal{K}$  si y sólo si  $\gamma(T) > 0$ . En tal caso,  $\gamma(T) = \gamma(T^*) = \|T^\dagger\|^{-1}$ .
4. Si  $B \in Gl(\mathcal{K})$ , entonces

$$\|B^{-1}\|^{-1}\gamma(T) \leq \gamma(BT) \leq \|B\|\gamma(T). \quad (1.3)$$

5. Supongamos que  $R(T) \subseteq K$  y sea  $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{H}$ . Entonces

$$\gamma(T) s[N(T), \mathcal{M}] \leq \gamma(TP_{\mathcal{M}}) \leq \|T\| s[N(T), \mathcal{M}]. \quad (1.4)$$

En particular,  $T(\mathcal{M}) \subseteq K$  si y sólo si  $c[N(T), \mathcal{M}] < 1$ .

## 1.2. Mayorización en $\mathbb{R}^d$

Una de las herramientas fuertemente utilizadas en los dos capítulos siguientes es la de mayorización entre vectores de  $\mathbb{R}^d$  sobre todo en lo que respecta a su relación con las funciones convexas y el teorema de Schur-Horn.

La mayorización puede interpretarse como una comparación entre dos vectores que se basa en el grado de “uniformidad” en la distribución de las coordenadas. Resulta ser un preorden en  $\mathbb{R}^d$ .

Sólo enunciaremos aquí algunos resultados que nos serán de utilidad mas adelante. Para un completo desarrollo de este tema, sus aplicaciones y generalizaciones, recomendamos los trabajos [8], [11],[45] y [50].

Dado  $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_d) \in \mathbb{R}^d$ , notemos por  $\mathbf{b}^\downarrow \in \mathbb{R}^d$  el vector que se obtiene al ordenar las entradas de  $\mathbf{b}$  en orden decreciente. Si  $\mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^d$  decimos que  $\mathbf{b}$  está *mayorizado* por  $\mathbf{c}$  (equivalentemente,  $\mathbf{c}$  mayoriza a  $\mathbf{b}$ ), y notamos  $\mathbf{b} \prec \mathbf{c}$ , si

$$\sum_{i=1}^k b_i^\downarrow \leq \sum_{i=1}^k c_i^\downarrow \quad k = 1, \dots, d-1 \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^d b_i^\downarrow = \sum_{i=1}^d c_i^\downarrow.$$

Se tiene entonces que un vector  $\mathbf{b}$  está mayorizado por  $\mathbf{c}$  si las entradas de  $\mathbf{b}$  se obtienen tras un número finito de operaciones sobre las entradas de  $\mathbf{c}$  mediante combinaciones convexas de éstas (las llamadas *T - transformaciones*). Más aún, esto resulta ser equivalente a que  $\mathbf{b}$  está en la cápsula convexa de los vectores en  $\mathbb{R}^d$  obtenido por permutaciones de las entradas de  $\mathbf{c}$ . Asimismo, por un resultado debido a Birkoff, esto es equivalente a que  $\mathbf{b}$  es la imagen de  $\mathbf{c}$  por una matriz *doble estocástica*, esto es, una matriz de entradas positivas, cuyas filas y columnas suman uno. Por último, la noción de mayorización está relacionada con la minimización de funciones convexas definidas sobre los vectores.

Enunciemos lo mencionado anteriormente en el siguiente resultado:

**Teorema 1.2.1.** *Sean  $\mathbf{b}, \mathbf{c}$  en  $\mathbb{R}^d$ . Son equivalentes,*

1.  $\mathbf{b} \prec \mathbf{c}$ .
2.  $\mathbf{b}$  pertenece a la cápsula convexa generada por los vectores obtenidos de permutar las entradas de  $\mathbf{c}$ .
3. Existe una matriz doble estocástica  $D$  tal que  $\mathbf{b} = D\mathbf{c}$ .
4.  $\sum_{i=1}^d \phi(b_i) \leq \sum_{i=1}^d \phi(c_i)$  para toda función convexa  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Si además  $\mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^d$  y si  $\sum_{i=1}^d \phi(b_i) = \sum_{i=1}^d \phi(c_i)$  para una función arbitraria estrictamente convexa  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  entonces  $\mathbf{b}^\downarrow = \mathbf{c}^\downarrow$ .

La noción de mayorización de vectores fue extendida por T. Ando [4] a las matrices autoadjuntas. Concretamente, dadas  $S_1, S_2 \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})_{sa}$ , decimos que  $S_1$  mayoriza a  $S_2$ , y notamos  $S_2 \prec S_1$ , si  $\lambda(S_2) \prec \lambda(S_1)$ , donde por  $\lambda(S)$  notamos al vector de autovalores de  $S$ , contados con multiplicidad.

Así, tenemos que las equivalencias enunciadas en el Teorema 1.2.1 se extrapolan al contexto de mayorización de matrices de la siguiente manera:

**Teorema 1.2.2.** Sean  $S_1, S_2 \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})_{sa}$ . Son equivalentes,

1.  $S_2 \prec S_1$ .
2.  $S_2$  pertenece a la cápsula convexa generada por las matrices en la órbita unitaria de  $S_1$ , definida como  $\mathcal{U}(d)(S_1) := \{US_1U^* : U \in \mathcal{U}(d)\}$ .
3.  $\text{tr}(\phi(S_2)) \leq \text{tr}(\phi(S_1))$  para toda función convexa  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , donde, por cálculo funcional,  $\text{tr}(\phi(S)) = \sum_{n=1}^d \phi(\lambda_n(S))$ .

Si además  $S_1, S_2 \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})^+$  y si  $\text{tr}(\phi(S_2)) = \text{tr}(\phi(S_1))$  para una función arbitraria estrictamente convexa  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  entonces  $S_1 \in \mathcal{U}(d)(S_2)$ .

Por cuestiones prácticas, extenderemos la noción de mayorización (manteniendo notación) para poder “comparar” vectores de distinto tamaño, incluso sucesiones en  $\ell_1$  de números positivos, ordenadas de forma decreciente. Diremos que una sucesión  $\{a_i\}_{i=1}^m$  es sumable si  $m \in \mathbb{N}$ , o si  $m = \infty$  y  $\{a_i\}_{i=1}^\infty \in \ell^1(\mathbb{N})$ .

**Definición 1.2.3.** Sean  $\mathbf{a} = \{a_i\}_{i=1}^m$  y  $\mathbf{b} = \{b_i\}_{i=1}^s$  dos sucesiones decrecientes, sumables de números positivos, con  $s, m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ , tal que  $t = \min\{s, m\} < \infty$ . Decimos que  $\mathbf{b}$  mayoriza a  $\mathbf{a}$ , notado  $\mathbf{b} \succ \mathbf{a}$ , si

$$\sum_{i=1}^j b_i \geq \sum_{i=1}^j a_i \text{ para } 1 \leq j \leq t \text{ y } \sum_{i=1}^s b_i = \sum_{i=1}^m a_i. \quad (1.5)$$

Si ambos  $s = m = \infty$ , entonces  $\mathbf{b} \succ \mathbf{a}$  si

$$\sum_{i=1}^j b_i \geq \sum_{i=1}^j a_i \text{ para } j \in \mathbb{N} \text{ y } \sum_{i=1}^\infty b_i = \sum_{i=1}^\infty a_i. \quad (1.6)$$

Si  $m = s \in \mathbb{N}$  en la Definición 1.2.3 entonces obtenemos la mayorización usual de vectores en  $\mathbb{R}^m$ .

### 1.3. Marcos en espacios de Hilbert - Nociones básicas

Los marcos (frames) en espacios de Hilbert, y su generalización a marcos de subespacios son el tema central de este trabajo. En esta sección presentaremos algunos resultados básicos de la teoría de marcos, que serán usados en lo que resta de esta tesis. El texto de P. Casazza [15] y los libros de O.Christensen [25] y K. Gröchenig [41], son una referencia básica para el lector interesado en la teoría de marcos y sus aplicaciones.

Cabe aclarar que las definiciones y resultados expuestos en esta sección (salvo que se explicita lo contrario) se dan en el contexto de espacios de Hilbert de dimensión infinita. Todos los resultados y definiciones se mantienen en el caso en que  $\mathcal{H} = \mathbb{C}^d$  (en este caso, un marco no necesita tener un número infinito de vectores, dado que basta que sea un conjunto generador de  $\mathbb{C}^d$ ).

**Definición 1.3.1.** Sea  $\mathcal{F} = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión en un espacio de Hilbert separable  $\mathcal{H}$ .

1. Decimos que  $\mathcal{F}$  es una *sucesión de Bessel* para  $\mathcal{H}$  si existe  $B > 0$  tal que, para todo  $f \in \mathcal{H}$ ,

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle f, f_n \rangle|^2 \leq B \|f\|^2 \quad (1.7)$$

2.  $\mathcal{F}$  es un *marco* para  $\mathcal{H}$  si existen  $A, B > 0$  tales que, para toda  $f \in \mathcal{H}$ ,

$$A \|f\|^2 \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle f, f_n \rangle|^2 \leq B \|f\|^2 \quad (1.8)$$

3. Las constantes óptimas  $A_{\mathcal{F}}$  y  $B_{\mathcal{F}}$  para la ecuación (1.8) se llaman *cotas de marco* de  $\mathcal{F}$ .
4. El marco  $\mathcal{F}$  se denomina *ajustado* (o  $A_{\mathcal{F}}$  - ajustado) si  $A_{\mathcal{F}} = B_{\mathcal{F}}$ , y *ajustado y normalizado* (o también de *Parseval*) si  $A_{\mathcal{F}} = B_{\mathcal{F}} = 1$ . Además, diremos que un marco ajustado es *uniforme* si  $\|f_i\| = 1$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ .

**Observación 1.3.2.** Los marcos de Parseval deben su nombre a que para todo  $f \in \mathcal{H}$ ,

$$\|f\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle f, f_n \rangle|^2.$$

Es decir, ellos cumplen la *identidad de Parseval*. Por supuesto, en un marco de Parseval, los vectores no están normalizados en general, dado que, si un vector tiene norma uno, entonces es ortogonal al resto. De hecho, para todo vector  $f_n$  de un marco de Parseval,  $\|f_n\|^2(1 - \|f_n\|^2) = \sum_{m \neq n} |\langle f_n, f_m \rangle|^2$ .

Es decir, los marcos de Parseval uniformes, son las bases ortonormales de  $\mathcal{H}$ . Por otro lado, es claro que, dada la base canónica  $\{e_1, e_2\}$  en  $\mathbb{C}^2$ , el conjunto  $\{e_1, \frac{1}{\sqrt{2}}e_2, \frac{1}{\sqrt{2}}e_2\}$  es un marco de Parseval para  $\mathbb{C}^2$ , pero no es una base ortonormal.

Dada una sucesión de Bessel  $\mathcal{F} = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , la condición (1.7) implica que, para todo  $f \in \mathcal{H}$ , la sucesión de coeficientes  $\{\langle f, f_n \rangle\}_{n \in \mathbb{N}}$  es un elemento de  $\ell_2$ . También se deduce que el operador  $T^* : \mathcal{H} \rightarrow \ell_2$  definido por

$$T^*(f) = \{\langle f, f_n \rangle\}_{n \in \mathbb{N}}$$

es lineal y acotado, con  $\|T^*\| \leq \sqrt{B}$ . Por lo tanto puede definirse su operador dual  $T : \ell_2 \rightarrow \mathcal{H}$ , lineal y cuya norma también está acotada por  $\sqrt{B}$ . Notemos que, si consideramos la base canónica de  $\ell_2$ ,  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ :

$$\langle f, Te_n \rangle = \langle T^*f, e_n \rangle = \langle f, f_n \rangle \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (1.9)$$

por lo que  $Te_n = f_n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

Estos operadores constituyen una herramienta muy útil para el estudio de los marcos y sucesiones de Bessel, debido a que permiten el empleo de técnicas propias de la teoría de operadores.

En un contexto más general, el espacio de sucesiones  $\ell_2$  puede cambiarse por cualquier Hilbert separable  $\mathcal{K}$  (el mismo  $\mathcal{H}$  por ejemplo), si fijamos convenientemente una base ortonormal  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  en  $\mathcal{K}$ .

**Definición 1.3.3.** Sea  $\mathcal{F} = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de Bessel en  $\mathcal{H}$ . Sea  $\mathcal{K}$  un espacio de Hilbert separable y consideremos  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una base ortonormal de  $\mathcal{K}$ . Luego, existe un único  $T \in L(\mathcal{K}, \mathcal{H})$  tal que

$$T(e_n) = f_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Diremos que el operador  $T$  es un operador *preframe* de  $\mathcal{F}$ . En el caso en que  $\mathcal{K} = \ell_2$  (considerando la base canónica),  $T$  es el operador de *síntesis*, y  $T^*$  es en este caso el operador de *análisis*.

Por último, el *operador de marco* de  $\mathcal{F}$  es el operador  $S = TT^*$ . Notar que no depende del operador preframe elegido. De hecho, para  $f \in \mathcal{H}$ ,

$$Sf = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle f, f_n \rangle f_n. \quad (1.10)$$

En caso que haga falta hacer referencia a la sucesión de Bessel  $\mathcal{F}$ , notaremos  $S^{\mathcal{F}}$  y  $T^{\mathcal{F}}$  en lugar de  $S$  y  $T$ .

Notemos que, si  $\mathcal{F}$  es un marco para  $\mathcal{H}$ , entonces la desigualdad inferior en (1.8) implica que  $T^*$  es acotada inferiormente, y por lo tanto, un operador preframe  $T$  para  $\mathcal{F}$  es suryectivo sobre  $\mathcal{H}$ . Por supuesto, vale la recíproca, en el sentido en que toda imagen de una base ortonormal de  $\mathcal{K}$  bajo un operador suryectivo  $T \in L(\mathcal{K}, \mathcal{H})$  constituye un marco para  $\mathcal{H}$ :

**Teorema 1.3.4.** Sean  $\mathcal{K}, \mathcal{H}$  espacios de Hilbert separables, y  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una b.o.n. para  $\mathcal{K}$ . Sea  $T \in L(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ , y consideremos la sucesión  $f_n = Te_n$ , entonces son equivalentes

1.  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es un marco para  $\mathcal{H}$ .
2.  $T$  es un operador suryectivo.
3.  $T^*$  es acotado inferiormente.

Además,  $\mathcal{F}$  es un marco ajustado si y sólo si  $S = A Id$ .

De la definición del operador de marco  $S^{\mathcal{F}}$  se desprende que, si  $\mathcal{F}$  es un marco para  $\mathcal{H}$ , entonces  $A Id \leq S^{\mathcal{F}} \leq B Id$ , donde  $Id$  es el operador identidad en  $\mathcal{H}$ . En particular,  $S^{\mathcal{F}}$  es un operador positivo e invertible.

Más aún, si  $A_{\mathcal{F}}$  y  $B_{\mathcal{F}}$  son las cotas de marco óptimas (inferior y superior, respectivamente), entonces es fácil ver que

$$A_{\mathcal{F}} = \gamma(S^{\mathcal{F}}) = \|(S^{\mathcal{F}})^{-1}\|^{-1} \quad \text{y} \quad B_{\mathcal{F}} = \|S^{\mathcal{F}}\|. \quad (1.11)$$

### 1.3.1. Reconstrucción en $\mathcal{H}$ usando marcos.

Sea  $\mathcal{F}$  un marco para  $\mathcal{H}$ , y notemos por  $S$  a su operador de marco. Entonces, para todo  $f \in \mathcal{H}$ ,

$$f = SS^{-1}f = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle S^{-1}f, f_n \rangle f_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle f, S^{-1}f_n \rangle f_n. \quad (1.12)$$

En particular, el marco  $\mathcal{F}$  es un sistema de generadores para  $\mathcal{H}$ .

Por otro lado, también se tiene que

$$f = S^{-1}Sf = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle f, f_n \rangle S^{-1}f_n. \quad (1.13)$$

Es decir, uno puede reconstruir el vector  $f$  usando los *coeficientes de marco* de  $f$  con respecto a  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ :  $\{\langle f, f_n \rangle\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Observación 1.3.5.** Por lo tanto, reconstruir un vector (señal) utilizando el operador de marco  $S$  requiere encontrar su inversa, lo que suele ser muy complicado en términos de cálculos. Esta es una de las razones por las cuales los marcos ajustados son adecuados: si  $\mathcal{F}$  es un marco ajustado con cota de marco  $A$ , entonces  $\forall f \in \mathcal{H}$

$$f = \frac{1}{A} \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle f, f_n \rangle f_n.$$

En general, los coeficientes usados en la reconstrucción no son únicos, a diferencia de los coeficientes en una base ortonormal.

**Definición 1.3.6.** Sea  $\mathcal{F}$  un marco para  $\mathcal{H}$ . Decimos que una sucesión de Bessel  $\mathcal{G} = \{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es un *marco dual* para  $\mathcal{F}$ , si se satisfacen las siguientes igualdades para todo  $f \in \mathcal{H}$ :

$$f = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle f, g_n \rangle f_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle f, f_n \rangle g_n. \quad (1.14)$$

En particular, el marco  $\{(S^{\mathcal{F}})^{-1}f_n\}$  asociado a  $\mathcal{F} = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es llamado *marco dual canónico*. Notemos que, por (1.11), las cotas de marco óptimas para  $\{(S^{\mathcal{F}})^{-1}f_n\}$  son  $B_{\mathcal{F}}^{-1}$  y  $A_{\mathcal{F}}^{-1}$  respectivamente.

Existe una correspondencia entre los marcos duales a  $\mathcal{F}$  y las pseudoinversas del operador de síntesis  $T$  de  $\mathcal{F}$ :

**Teorema 1.3.7.** *Sea  $\mathcal{F}$  un marco para  $\mathcal{H}$ , con operador de síntesis  $T \in L(\ell_2, \mathcal{H})$  (sursyectivo). Entonces,*

1. *Para cada  $B \in SI(T)$ , la sucesión de Bessel  $\{B^*e_n\}$  es un marco dual de  $\mathcal{F}$*
2. *Dado  $\mathcal{G} = \{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  marco dual para  $\mathcal{F}$ , el operador de análisis  $G^* : \mathcal{H} \rightarrow \ell_2$  pertenece a  $SI(T)$ .*
3. *El marco dual canónico a  $\mathcal{F}$  está dado por  $\{(T^\dagger)^*e_n\}$*
4. *Para todo  $f \in \mathcal{H}$ , y todo marco dual  $\{g_n\}$  de  $\mathcal{F}$ ,*

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle f, g_n \rangle|^2 \geq \sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle f, (S^{\mathcal{F}})^{-1}f_n \rangle|^2.$$

*i.e., los coeficientes dados por el marco dual canónico son los de norma mínima entre los que reconstruyen a  $f$ .*

*Demostración.* Notar que, dado que  $T$  es sursyectivo (y por tanto, de rango cerrado), todo operador  $B$  en  $SI(T)$  satisface que  $TB = Id$ , es decir, es una inversa a derecha de  $T$ . Por lo tanto,  $B^*$  es sursyectivo, y si hacemos  $B^*e_n = g_n$ , con  $\{e_n\}$  la b.o.n. canónica de  $\ell_2$ , entonces, para todo  $f \in \mathcal{H}$ ,

$$f = B^*T^*f = B^* \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle f, f_n \rangle e_n \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle f, f_n \rangle B^*e_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle f, f_n \rangle g_n.$$

De manera similar, usando  $TB = Id$ , se tiene que  $f = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle f, g_n \rangle f_n$ , por lo que  $\{g_n\}$  es un marco dual para  $\mathcal{F}$ .

Recíprocamente, si  $\mathcal{G}$  es un marco dual, con operador de análisis  $G^*$  de las identidades (1.14) se tiene que  $G^*$  es una pseudoinversa para  $T$ .

Notemos que  $T(T^*S^{-1})T = T$  y  $(T^*S^{-1})T(T^*S^{-1}) = (T^*S^{-1})$ , con lo cual  $(T^*S^{-1}) \in SI(T)$ , además, dado que  $(T^*S^{-1})T$  es una proyección autoadjunta, tenemos que  $T^\dagger = (T^*S^{-1})$ , y por lo tanto, el marco dual canónico:  $S^{-1}f_n = (T^*S^{-1})^*e_n = (T^\dagger)^*e_n$ .

El último ítem del enunciado se deduce entonces del ítem anterior y la Proposición 1.1.4.  $\square$

De la ecuación (1.12) se deduce además que la sucesión  $\{S^{-1/2}f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es un marco de Parseval. En efecto,

$$f = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle f, S^{-1}f_n \rangle f_n = S^{-1/2} \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle f, S^{-1/2}f_n \rangle f_n \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle f, S^{-1/2}f_n \rangle S^{-1/2}f_n.$$

Es decir, todo marco está “relacionado” a un marco de Parseval. Podemos explicitar una relación de equivalencia entre marcos de la siguiente manera:

**Definición 1.3.8.** Dos marcos  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  en  $\mathcal{H}$  se dicen *equivalentes* si existe un operador invertible  $G$  en  $L(\mathcal{H})$  tal que  $g_n = Gf_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Por lo tanto,

**Proposición 1.3.9.** *Todo marco  $\{f_n\}$  (con operador de marco  $S^{\mathcal{F}}$ ) es equivalente al marco ajustado normalizado  $\{(S^{\mathcal{F}})^{-1/2}f_n\}$ .*

### 1.3.2. Noción de exceso en los marcos.

Como se vio previamente, los marcos resultan ser sistemas de generadores del espacio de Hilbert. Sin embargo, a diferencia de las bases, puede no haber unicidad en los coeficientes cuando representamos un vector  $f$  en términos del marco. Este “sobredimensionamiento” es una de las razones del interés que despiertan en las aplicaciones.

**Definición 1.3.10.** Dado  $\mathcal{F} = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  un frame en  $\mathcal{H}$  con operador preframe  $T$ .

1. El número cardinal

$$E(\mathcal{F}) = \dim N(T)$$

se llama el *exceso* de  $\mathcal{F}$ .

2. Notar que si  $T'$  es otro operador preframe, entonces  $T = T'U$  con  $U$  un operador unitario que manda una de las bases ortonormales en la otra (ver definición), esto implica que  $E(\mathcal{F})$  no depende del operador preframe elegido. En particular,

$$E(\mathcal{F}) = \dim \left\{ (c_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2 : \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n f_n = 0 \right\},$$

que es la nulidad del operador de síntesis.

3. Holub [44] y Balan, Casazza, Heil y Landau [10] probaron que

$$E(\mathcal{F}) = \sup \{ |I| : I \subseteq \mathbb{N} \text{ y } \{f_n\}_{n \notin I} \text{ es un marco para } \mathcal{H} \}. \quad (1.15)$$

Esta caracterización es la que justifica el nombre de “exceso de  $\mathcal{F}$ ”.

**Definición 1.3.11.** El frame  $\mathcal{F}$  se llama *base de Riesz* si  $E(\mathcal{F}) = 0$ , i.e., si  $\mathcal{F}$  es la imagen de una base ortonormal de algún Hilbert  $\mathcal{K}$  por un operador invertible  $T \in L(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ .

Se puede probar entonces que las bases de Riesz son las bases incondicionales y acotadas de  $\mathcal{H}$  (ver por ejemplo el libro de J.Lindenstrauss y L. Tzafriri [49]), esto es:  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una base de Riesz sii para todo  $f \in \mathcal{H}$ :

1. Existe una única representación de  $f$  de la forma

$$f = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n f_n$$

y la suma converge incondicionalmente (esto es, todas las reordenaciones de la serie convergen al mismo elemento de  $\mathcal{H}$ ).

2. Existen constantes  $m, M > 0$  tal que, para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$m \leq \|f_n\| \leq M.$$

Además, de la Definición 1.3.11 podemos decir que un marco es base de Riesz sii es equivalente a una base ortonormal.

## 1.4. Perturbaciones de marcos

En esta sección plantearemos brevemente el problema de perturbaciones de marcos. Esto es, dado un marco  $\mathcal{F} = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  para  $\mathcal{H}$ , y sea  $\mathcal{G} = \{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de Bessel. ¿Cuán cerca tiene que estar  $\mathcal{G}$  de  $\mathcal{F}$  para poder asegurar que  $\mathcal{G}$  es un marco? A esta clase de resultados se los conoce como teoremas del tipo Paley-Wiener, debido al clásico resultado de perturbaciones de bases en espacios de Banach probado por R. Paley y N. Wiener en los años 30: si  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una base de Riesz para un espacio de Banach  $X$ , entonces una sucesión  $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  en  $X$  es también una base si existe una constante  $0 < \mu < 1$  tal que

$$\left\| \sum_{n=1}^k c_n (f_n - g_n) \right\| \leq \mu \left\| \sum_{n=1}^k c_n f_n \right\|$$

para toda sucesión finita de escalares  $\{c_n\}_{n=1}^k$ .

El trabajo [15] de P.Casazza y el libro de O. Christensen [25] son una excelente guía sobre los resultados en este tema.

En el caso clásico uno puede arribar al resultado de Paley-Wiener, considerando los operadores invertibles relacionados a las bases y el conocido teorema de Neumann sobre perturbaciones de operadores invertibles. En el caso de los marcos puede obrarse de manera similar, teniendo en cuenta que los marcos y los operadores suryectivos están fuertemente ligados. El siguiente es un resultado general del que se deducen algunos de los resultados de perturbación conocidos.

**Lema 1.4.1.** *Sea  $T \in L(\mathcal{H})$  tal que  $R(T) = \mathcal{H}$ . Si  $G \in L(\mathcal{H})$  y*

$$\|G - T\| < \gamma(T) = \|T^\dagger\|^{-1},$$

*entonces  $G$  es también suryectivo, y además  $\gamma(G) \geq \gamma(T) - \|G - T\|$ .*

*Demostración.* Por ser  $T$  suryectivo, tenemos que  $TT^\dagger = Id$ . Pero

$$\|GT^\dagger - Id\| = \|(G - T)T^\dagger\| \leq \|G - T\| \|T^\dagger\| < 1.$$

Esto muestra que  $GT^\dagger$  es invertible. Por lo tanto  $T^\dagger(GT^\dagger)^{-1}$  es una inversa a derecha de  $G$ , es decir, es una de sus pseudoinversas. Por la Proposición 1.1.4,  $\|G^\dagger\| \leq \|T^\dagger(GT^\dagger)^{-1}\|$  y

$$\begin{aligned} \gamma(G) = \|G^\dagger\|^{-1} &\geq \|T^\dagger(GT^\dagger)^{-1}\|^{-1} \geq \gamma(T) \|(GT^\dagger)^{-1}\|^{-1} \\ &\geq \gamma(T) \left( \sum_{n=0}^{\infty} \|G - T\|^n \|T^\dagger\|^n \right)^{-1} \\ &= \gamma(T) (1 - \|G - T\| \|T^\dagger\|) = \gamma(T) - \|T - G\| \end{aligned}$$

como se aseguraba. □

Fijemos de ahora en más un marco  $\mathcal{F} = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  en  $\mathcal{H}$ , con operador preframe  $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ . Como siempre, notaremos  $S = S^{\mathcal{F}} = TT^*$  al operador de marco de  $\mathcal{F}$ , que cumple  $\gamma(S) = A_{\mathcal{F}}$  y  $\|S\| = B_{\mathcal{F}}$ .

**Proposición 1.4.2.** *Sea  $\mathcal{G} = \{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de Bessel, con operador preframe  $G \in L(\mathcal{H})$ . Si existe algún  $B \in Gl(\mathcal{H})$  tal que*

$$R = \|T^*S^{-1/2} - G^*B\| < 1, \quad (1.16)$$

*entonces  $\mathcal{G}$  es un marco en  $\mathcal{H}$ , con constantes*

$$A_{\mathcal{G}} \geq (1 - R)^2 \|B\|^{-2} \quad y \quad B_{\mathcal{G}} \leq (1 + R)^2 \|B^{-1}\|^2. \quad (1.17)$$

*Demostración.* Tenemos que ver que  $G$  es epimorfismo, y que las constantes propuestas acotan a  $GG^*$ . Observar que  $S^{-1/2}T$  es una isometría parcial (la de la descomposición polar de  $T$ ). Luego

$$R = \|T^*S^{-1/2} - G^*B\| = \|S^{-1/2}T - B^*G\| < 1 = \gamma(S^{-1/2}T).$$

Por el Lema 1.4.1, tenemos que  $B^*G$  es epimorfismo, por lo que también  $G$  lo es. Además, el mismo Lema asegura que

$$\gamma(G) \geq \gamma(B^{-1})\gamma(B^*G) \geq \gamma(B^{-1})(\gamma(S^{-1/2}T) - \|S^{-1/2}T - B^*G\|) = \|B\|^{-1}(1 - R),$$

por lo que  $A_{\mathcal{G}} \geq (1 - R)^2 \|B\|^{-2}$ . La otra desigualdad sale en forma similar. □

**Corolario 1.4.3.** *Sea  $\mathcal{G} = \{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  sucesión de Bessel en  $\mathcal{H}$ . Si existe  $R < 1$  tal que*

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle f, S^{-1/2}(f_n - g_n) \rangle|^2 \leq R^2 \|f\|^2, \quad \text{para toda } f \in \mathcal{H}, \quad (1.18)$$

entonces  $\mathcal{G}$  es un marco en  $\mathcal{H}$  tal que

$$A_{\mathcal{F}}(1 - R)^2 \leq A_{\mathcal{G}} \quad \text{y} \quad B_{\mathcal{G}} \leq B_{\mathcal{F}}(1 + R)^2.$$

*Demostración.* Observar que (1.18) es equivalente a que

$$\|(T^* - G^*)S^{-1/2}\|^2 = \|T^*S^{-1/2} - G^*S^{-1/2}\|^2 \leq R^2,$$

porque  $\|(T^* - G^*)h\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle h, f_n - g_n \rangle|^2$ , para todo  $h \in \mathcal{H}$ . Por la Proposición 1.4.2, tenemos que  $\mathcal{G}$  es marco. Para la acotación de sus cotas, basta observar que

$$\|S^{-1/2}\|^{-2} = \gamma(S) = A_{\mathcal{F}} \quad \text{y} \quad \|S^{1/2}\|^2 = \|S\| = B_{\mathcal{F}},$$

y aplicar la fórmula (1.17). □

A partir de estos resultados, podemos deducir un par de resultados, uno debido P. Casazza y O. Christensen y el otro a O. Christensen y C. Heil (ver [15, 25]).

**Corolario 1.4.4.** *(Casazza, Christensen) Sean  $\mu_1, \mu_2 > 0$  tales que  $R = \mu_1 + \frac{\mu_2}{A_{\mathcal{F}}^{1/2}} < 1$ , y sea  $\mathcal{G} = \{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  sucesión de Bessel en  $\mathcal{H}$ . Si para toda  $f \in \mathcal{H}$  se tiene que*

$$\|(T^* - G^*)f\| = \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle f, f_n - g_n \rangle|^2 \right)^{1/2} \leq \mu_1 \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle f, f_n \rangle|^2 \right)^{1/2} + \mu_2 \|f\|, \quad (1.19)$$

entonces  $\mathcal{G}$  es un marco para  $\mathcal{H}$  tal que

$$A_{\mathcal{F}}(1 - R)^2 \leq A_{\mathcal{G}} \quad \text{y} \quad B_{\mathcal{G}} \leq B_{\mathcal{F}}(1 + R)^2.$$

*Demostración.* Aplicando (1.19) a  $S^{-1/2}f$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \|(T^* - G^*)S^{-1/2}f\| &\leq \mu_1 \|T^*S^{-1/2}f\| + \mu_2 \|S^{-1/2}f\| \\ &\leq \left( \mu_1 + \frac{\mu_2}{A_{\mathcal{F}}^{1/2}} \right) \|f\| = R \|f\|, \end{aligned}$$

porque  $\|S^{-1/2}\| = A_{\mathcal{F}}^{-1/2}$  y  $\|T^*S^{-1/2}\| = 1$ . Ahora basta aplicar el Corolario 1.4.3. □

**Corolario 1.4.5.** (*Christensen, Heil*) Sea  $\mathcal{G} = \{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  sucesión de Bessel en  $\mathcal{H}$  y sea  $0 < R < A_{\mathcal{F}}$ . Si para toda  $f \in \mathcal{H}$  se tiene que

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle f, f_n - g_n \rangle|^2 \leq R^2 \|f\|^2, \quad (1.20)$$

entonces  $\mathcal{G}$  es un marco en  $\mathcal{H}$  tal que

$$A_{\mathcal{F}} \left(1 - \frac{R}{A_{\mathcal{F}}}\right)^2 \leq A_{\mathcal{G}} \quad y \quad B_{\mathcal{G}} \leq B_{\mathcal{F}} \left(1 + \frac{R}{A_{\mathcal{F}}}\right)^2.$$

*Demostración.* Basta observar que, para toda  $f \in \mathcal{H}$ ,

$$\|(T^* - G^*)S^{-1/2}f\|^2 \leq R\|S^{-1/2}f\|^2 \leq \frac{R}{A_{\mathcal{F}}} \|f\|^2,$$

porque  $\|S^{-1/2}\| = A_{\mathcal{F}}^{-1/2}$ . Aplicar nuevamente el Cor. 1.4.3.  $\square$

## 1.5. Normas de los vectores en una sucesión de Bessel.

En esta sección nos ocuparemos de la relación entre las normas de una sucesión de Bessel o un marco en  $\mathbb{C}^d$  y su operador de marco.

Este problema está relacionado con el diseño de marcos; esto es, si se quiere construir un marco con cierta estructura (por ejemplo que sea ajustado) pero manteniendo las normas de los vectores controladas (e.g., que todos los vectores tengan norma uno). Existen varios trabajos que tratan de la construcción de marcos con condiciones estructurales prefijadas. En general, dado el interés práctico de estas cuestiones, se trabaja en dimensión finita, aunque existen trabajos que generalizan parcialmente algunos resultados en dimensión infinita.

A pesar de estar trabajando en  $\mathbb{C}^d$ , permitiremos sucesiones Bessel con infinitos elementos. En este caso, diremos que una sucesión de vectores en  $\mathbb{C}^d$  es *sumable* si la sucesión de normas es sumable. Notemos que por definición, una sucesión de Bessel infinita en  $\mathbb{C}^d$  es sumable.

Notaremos entonces por  $I$  al conjunto de índices de las sucesiones Bessel. Entonces,  $I = \mathbb{I}_m := (1, 2, \dots, m)$  ó  $I = \mathbb{N}$ .

El modo de relacionar los operadores asociados al marco con las normas de sus vectores es mediante el operador Grammiano:

**Definición 1.5.1.** Dada una sucesión de Bessel  $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i \in I}$  de  $\mathbb{C}^d$ , ( $I = \mathbb{I}_m$  ó  $I = \mathbb{N}$ ), el operador Grammiano de  $\mathcal{F}$ , es la matriz (infinita si  $I = \mathbb{N}$ )  $G$  con entradas  $G_{ij} = \langle f_i, f_j \rangle$ .

En términos del operador de síntesis  $T$ ,  $G = T^*T$ .

La matriz Grammiana de  $\mathcal{F}$  es unitariamente equivalente a una “ampliación” del operador de marco de  $\mathcal{F}$ :

**Proposición 1.5.2** ([7]). *Sea  $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i \in I}$  una sucesión de Bessel y notemos por  $G$  y  $S$  a la matriz Grammiana y la matriz que define el operador de marco de  $\mathcal{F}$  respectivamente. Entonces, existe un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  con dimensión  $|I| - d$  y un isomorfismo isométrico  $U : \ell_2(I) \rightarrow \mathbb{C}^d \oplus \mathcal{H}$  tal que*

$$UGU^* = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathbb{C}^d \\ \mathcal{H} \end{matrix} \quad (1.21)$$

En particular,  $\sum_{i \in I} \|f_i\|^2 = \text{tr}(S) < \infty$ .

Como consecuencia de la Proposición 1.5.2 vemos que, si  $\lambda(G)$  (resp  $\lambda(S) \in \mathbb{C}^d$ ) denotan los autovalores (contando multiplicidad) de  $G$  (resp. de  $S$ ), entonces  $\lambda(G) = (\lambda(S), 0_\sim)$  donde  $0_\sim$  representa un vector de  $|I| - d$  ceros.

Por otro lado, también puede deducirse que la constante de marco para un marco ajustado se deduce fácilmente de las normas de los elementos del marco:

**Corolario 1.5.3.** *Dada una sucesión decreciente de números estrictamente positivos  $\{a_i\}_{i \in I}$ , si  $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i \in I}$  es un marco  $c$ -ajustado para  $\mathbb{C}^d$  con  $\|f_i\|^2 = a_i$  para todo  $i \in I$ , entonces  $c = \frac{1}{d} \sum_{i \in I} a_i$ .*

*Demostración.* Es inmediato de

$$dc = \text{tr}(S^{\mathcal{F}}) = \text{tr}(G^{\mathcal{F}}) = \sum_{i \in I} \|f_i\|^2 = \sum_{i \in I} a_i < \infty.$$

□

Lo dicho anteriormente, sumado a que en general se tiene que las normas al cuadrado de los vectores de un marco están acotadas por la cota marco superior (esto puede verificarse fácilmente de la definición de marco), permite deducir la llamada *desigualdad fundamental*, que establece que si existe un marco ajustado para  $\mathbb{C}^d$  con normas al cuadrado  $\{a_i\}_{i \in I}$  entonces

$$a_1 \leq \frac{1}{d} \sum_{i \in I} a_i < \infty. \quad (1.22)$$

P. Casazza y M. T. Leon probaron que también vale la recíproca, esto es, (1.22) es una condición que garantiza la existencia de marcos ajustados con tal restricción en las normas de sus elementos.

Este resultado puede generalizarse mediante el Teorema de Schur - Horn y extensiones al caso  $\ell_1(\mathbb{N})$  (ver [7], [17]). En particular, nos permite encontrar una relación mediante desigualdades (mayorización) entre las normas de los vectores de una sucesión de Bessel y su operador de marco. Recíprocamente, estas relaciones determinan la existencia de una sucesión de Bessel con determinado operador de marco y normas de vectores prefijadas.

**Teorema 1.5.4.** *Sea  $\mathbf{a} = \{a_i\}_{i \in I}$  una sucesión decreciente de números positivos y sea  $S \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})^+$  con autovalores (con multiplicidad y en orden decreciente)  $\boldsymbol{\lambda} = \{\lambda_j\}_{j=1}^d$ . Entonces son equivalentes*

1.  $\mathbf{a} \prec \boldsymbol{\lambda}$  (ver Definición 1.2.3).
2. Existe una sucesión de Bessel (sumable)  $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i=1}^m \subset \mathcal{H}$  tal que  $\|g_i\|^2 = a_i \forall i$  y  $S^{\mathcal{G}} = S$ .

*Demostración.* Si suponemos  $S > 0$  entonces el caso  $I = \mathbb{I}_m$  es el Teorema 4.6 en [7], mientras que el caso  $I = \mathbb{N}$  es el Teorema 4.7 en [7]. Si el espectro de  $S$  tiene ceros (notar que ese es el caso cuando  $|I| < d$ ) podemos reducir al caso invertible restringiendo  $S$  al complemento ortogonal de  $N(S)$ .  $\square$

## 1.6. Marcos de Subespacios

Sea  $\mathcal{H}$  un espacio de Hilbert separable. Dado un conjunto de índices  $I$ ,  $\ell_+^\infty(I)$  representará a las sucesiones escalares  $\mathbf{w} = \{w_i\}_{i \in I}$  de entradas positivas y acotadas. Por  $\mathbf{e}$  notaremos a la sucesión en  $\ell_+^\infty(I)$  formada por unos.

De acuerdo al trabajo de Casazza y Kutyniok [22], definimos:

**Definición 1.6.1.** Sea  $\mathcal{W} = \{W_i\}_{i \in I}$  una sucesión de subespacios cerrados de  $\mathcal{H}$ , y sea  $\mathbf{w} = \{w_i\}_{i \in I} \in \ell_+^\infty(I)$ .

1. Decimos que  $\mathcal{W}_{\mathbf{w}} = (w_i, W_i)_{i \in I}$  es una sucesión de Bessel de subespacios si existe  $B > 0$  tal que

$$\sum_{i \in I} w_i^2 \|P_{W_i} f\|^2 \leq B \|f\|^2 \quad \text{para todo } f \in \mathcal{H}. \quad (1.23)$$

donde cada  $P_{W_i} \in L(\mathcal{H})$  es la proyección ortogonal sobre  $W_i$ .

2. Decimos que  $\mathcal{W}_{\mathbf{w}}$  es un *marco de subespacios (o marco de fusión)* para  $\mathcal{H}$ , (resp. marco de subespacios para  $\mathcal{S} \sqsubseteq \mathcal{H}$ ) si existen  $A, B > 0$  tal que

$$A \|f\|^2 \leq \sum_{i \in I} w_i^2 \|P_{W_i} f\|^2 \leq B \|f\|^2 \quad \text{para todo } f \in \mathcal{H} \text{ (resp. } f \in \mathcal{S}), \quad (1.24)$$

Las cotas óptimas para (1.24) se denotan  $A_{\mathcal{W}_{\mathbf{w}}}$  y  $B_{\mathcal{W}_{\mathbf{w}}}$ .

3.  $\mathcal{W}$  es una sucesión *minimal* si

$$W_i \cap \overline{\text{span}} \{W_j : j \neq i\} = \{0\} \quad \text{para todo } i \in I. \quad (1.25)$$

Supongamos que  $\mathcal{W}_{\mathbf{w}}$  es un marco de subespacios para  $\mathcal{H}$ . Entonces

4.  $\mathcal{W}_w$  es un marco *ajustado* si  $A_{\mathcal{W}_w} = B_{\mathcal{W}_w}$ , y de *Parseval* si  $A_{\mathcal{W}_w} = B_{\mathcal{W}_w} = 1$ .
5.  $\mathcal{W}_w$  es una *base de subespacios ortonormal* si  $w = e$  y  $W_i \perp W_j$  para  $i \neq j$ .
6.  $\mathcal{W}_w$  es una *base de Riesz de subespacios* si  $\mathcal{W}$  es una sucesión minimal.

**Observación 1.6.2.** Los marcos de subespacios pueden interpretarse como una generalización de los marcos usuales de vectores. Concretamente, dado un marco  $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i \in I}$  para  $\mathcal{H}$ , éste puede pensarse como un marco de subespacios  $\mathcal{W}_w$  si consideramos los subespacios de dimensión uno  $W_i = \text{span}\{f_i\}$  y los pesos  $w_i = \|f_i\|$ .

Las nociones de operadores de marco, síntesis y análisis pueden ser extendidas a sucesiones de Bessel de subespacios. Sin embargo, el espacio de “análisis” del marco ahora depende fuertemente de la sucesión de subespacios  $\mathcal{W} = \{W_i\}_{i \in I}$ .

**Definición 1.6.3.** Sea  $\mathcal{W}_w = (w_i, W_i)_{i \in I}$  una sucesión de Bessel de subespacios para  $\mathcal{H}$ . Definimos el espacio de Hilbert

$$\mathcal{K}_{\mathcal{W}} = \sum_{i \in I} \oplus W_i := \left\{ g = (g_i)_{i \in I} : g_i \in W_i \text{ y } \|g\|^2 = \sum_{i \in I} \|g_i\|^2 < +\infty \right\}.$$

Asociados a la sucesión de Bessel de subespacios  $\mathcal{W}_w = (w_i, W_i)_{i \in I}$  tenemos los siguientes operadores:

- *Operador de síntesis:*  $T_{\mathcal{W}_w} : \mathcal{K}_{\mathcal{W}} \rightarrow \mathcal{H}$ , definido por

$$T_{\mathcal{W}_w}(g) = \sum_{i \in I} w_i g_i, \quad \text{para } g = (g_i)_{i \in I} \in \mathcal{K}_{\mathcal{W}}.$$

- Su adjunto,  $T_{\mathcal{W}_w}^* \in L(\mathcal{H}, \mathcal{K}_{\mathcal{W}})$  es el *operador de análisis* de  $\mathcal{W}_w = (w_i, W_i)_{i \in I}$ . Es fácil ver que  $T_{\mathcal{W}_w}^*(f) = (w_i P_{W_i} f)_{i \in I}$ , para  $f \in \mathcal{H}$ .
- El *operador de marco:*  $S_{\mathcal{W}_w} = T_{\mathcal{W}_w} T_{\mathcal{W}_w}^* \in L(\mathcal{H})^+$ , que satisface

$$S_{\mathcal{W}_w} f = \sum_{i \in I} w_i^2 P_{W_i} f,$$

para  $f \in \mathcal{H}$ . i.e.  $S_{\mathcal{W}_w} = T_{\mathcal{W}_w} T_{\mathcal{W}_w}^*$ .

**Observación 1.6.4.** Sea  $\mathcal{W} = \{W_i\}_{i \in I}$  una sucesión de subespacios cerrados de  $\mathcal{H}$ , y sea  $w = \{w_i\}_{i \in I} \in \ell_+^\infty(I)$ . En [22] se prueban los siguientes resultados:

1.  $\mathcal{W}_w = (w_i, W_i)_{i \in I}$  es una sucesión de Bessel de subespacios si y sólo si el operador de síntesis  $T_{\mathcal{W}_w}$  está bien definido y es acotado. En este caso,  $\mathcal{W}_w$  es un marco de subespacios para  $\mathcal{H}$  (resp. para  $\mathcal{S} \sqsubseteq \mathcal{H}$ ) si y sólo si  $T_{\mathcal{W}_w}$  es suryectivo (resp  $R(T_{\mathcal{W}_w}) = \mathcal{S}$ ) .

Esto es equivalente además con que  $T_{\mathcal{W}_w}^*$  es acotado inferiormente.

Si  $\mathcal{W}_w$  es un marco de subespacios para  $\mathcal{H}$ , entonces

2.  $A_{\mathcal{W}_w} = \gamma(T_{\mathcal{W}_w})^2$  y  $B_{\mathcal{W}_w} = \|T_{\mathcal{W}_w}\|^2$ . Por lo tanto  $A_{\mathcal{W}_w} Id \leq S_{\mathcal{W}_w} \leq B_{\mathcal{W}_w} Id$ .
3.  $\mathcal{W}_w$  es una base de Riesz de subespacios si y sólo si  $T_{\mathcal{W}_w}$  es invertible (i.e. inyectivo) y  $\mathcal{W}_w$  es una base ortonormal de subespacios si y sólo si  $w = e$  y  $T_{\mathcal{W}_w}^* T_{\mathcal{W}_w} = Id$ , esto es equivalente a  $\mathcal{H} = \bigoplus_{i \in I} W_i$ .
4.  $\mathcal{W}_w$  es ajustado si y sólo si  $T_{\mathcal{W}_w} T_{\mathcal{W}_w}^* = A_{\mathcal{W}_w} Id$ , y  $\mathcal{W}_w$  es de Parseval si y sólo si  $T_{\mathcal{W}_w}$  es una coisometría.

El siguiente es uno de los resultados fundamentales probados en [22], que determina una relación entre marcos de subespacios y marcos de vectores. Básicamente, nos dice que, bajo determinadas condiciones, uno puede “unir” sucesiones marco y obtener un marco para el espacio de Hilbert completo. Por supuesto, esas condiciones tienen que ver con los subespacios generados por cada sucesión.

**Teorema 1.6.5.** Sea  $\mathcal{W} = \{W_i\}_{i \in I}$  una sucesión de subespacios cerrados de  $\mathcal{H}$  y sea  $w \in \ell_+^\infty(I)$ . Para cada  $i \in I$ , sea  $\mathcal{G}_i = \{f_{ij}\}_{j \in J_i}$  un marco para  $W_i$ . Supongamos que

$$0 < A = \inf_{i \in I} A_{\mathcal{G}_i} \quad \text{y} \quad B = \sup_{i \in I} B_{\mathcal{G}_i} < \infty .$$

Sea  $\mathcal{E}_i = \{e_{ik}\}_{k \in K_i}$  una base ortonormal para cada  $W_i$ . Entonces son equivalentes:

1.  $\mathcal{F} = \{w_i f_{ij}\}_{i \in I, j \in J_i} = \{w_i \mathcal{G}_i\}_{i \in I}$  es un marco para  $\mathcal{H}$ .
2.  $\mathcal{E} = \{w_i e_{ik}\}_{i \in I, k \in K_i} = \{w_i \mathcal{E}_i\}_{i \in I}$  es un marco para  $\mathcal{H}$ .
3.  $\mathcal{W}_w = (w_i, W_i)_{i \in I}$  es un marco de subespacios para  $\mathcal{H}$ .

En este caso, las cotas de marco para  $\mathcal{W}_w$  satisfacen las desigualdades

$$\frac{A_{\mathcal{F}}}{B} \leq A_{\mathcal{W}_w} = A_{\mathcal{E}} \leq \frac{A_{\mathcal{F}}}{A} \quad \text{y} \quad \frac{B_{\mathcal{F}}}{B} \leq B_{\mathcal{E}} = B_{\mathcal{W}_w} \leq \frac{B_{\mathcal{F}}}{A} . \quad (1.26)$$

Además  $T_{\mathcal{E}} = T_{\mathcal{W}_w}$ , usando la base ortonormal  $\mathcal{B} = \{e_{ik}\}_{i \in I, k \in K_i}$  de  $\mathcal{K}_{\mathcal{W}} = \sum_{i \in I} \bigoplus_{i \in I} W_i$ .  
□

# Capítulo 2

## Completaciones a marcos ajustados.

### 2.1. Introducción

Como se mencionó anteriormente, los marcos ajustados resultan ser de gran utilidad en las aplicaciones, en gran medida por la simpleza de la fórmula de reconstrucción que ellos proveen. Además, los marcos de Parseval con vectores de norma uno han mostrado ser los que optimizan el error medio cuadrático (MSE) ante la presencia de ruido en la transmisión, y presentan cierta robustez ante la pérdida de datos en la transmisión de la señal.

Esto generó una buena cantidad de trabajos ([16], [17], [20], [21], [7], [33], entre otros) que analizan la existencia de marcos ajustados (usualmente con cierta estructura adicional, restringiendo la norma de los vectores a un conjunto dado). Algunos de estos trabajos, proponen además algoritmos que permiten construir tales marcos.

En el artículo [33], D. Feng, L. Wang y Y. Wang plantean el problema de construir marcos ajustados uniformes (esto es, con vectores de norma uno), agregando vectores a un conjunto existente  $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^p$  en  $\mathbb{C}^d$ . Por un lado, analizan cómo varía el número de condicionamiento de la matriz de marco si agregamos  $t$  vectores. Notemos que el número de condicionamiento, es decir la proporción entre los autovalores máximo y mínimo de  $S^{\mathcal{G}}$  (recordemos que utilizamos la norma de operadores) es uno si y sólo si  $\mathcal{G}$  es un marco ajustado. Feng, Wang y Wang obtienen una cota inferior óptima para tal número de condicionamiento. En particular, se deduce que se puede completar cualquier conjunto inicial  $\mathcal{F}$  con al menos  $d - 1$  vectores para obtener un marco ajustado (ver [33, Teo. 1.1]). En esta sección enunciaremos y demostraremos tal resultado (ver Teorema 2.2.2), pero nuestra prueba difiere ampliamente de la del citado artículo.

Sin embargo, la situación cambia cuando se proponen calcular el número de vectores *de norma uno* a agregar para obtener un marco ajustado. En este caso, en el mencionado trabajo de Feng, Wang y Wang sólo obtienen una cota que dista de ser óptima:

**Teorema 2.1.1** ([33], Teorema 1.2). *Sea  $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^p \in \mathbb{C}^d$  un conjunto de vectores de norma uno con operador de marco  $S$ , cuyos autovalores, ordenados en forma decreciente*

son  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_d \geq 0$ . Sea  $r$  el menor entero  $\geq \lambda_1 + 1$  (i.e.  $r = \lceil \lambda_1 + 1 \rceil$ ). Entonces existen  $dr - p$  vectores de norma uno:  $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i=1}^{dr-p}$  tal que  $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$  es un marco ajustado.

Los mismos autores se encargan de mostrar con un ejemplo que tal cota no es óptima (ver Ejemplo 2.4.3).

El propósito de este capítulo es, mediante las técnicas que provee la mayorización, obtener la cota óptima, en un contexto más general. En concreto, dado el conjunto inicial de vectores  $\mathcal{F}$ , y una sucesión de números positivos  $\mathbf{a} = \{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  hallamos el número óptimo de vectores a agregar a  $\mathcal{F}$ , con normas dadas por  $\mathbf{a}$  de modo de obtener un marco ajustado.

## 2.2. Agregando vectores para obtener marcos ajustados.

Sea  $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^p \subseteq \mathcal{H}$  una sucesión de Bessel en  $\mathbb{C}^d$  con operador de marco  $S^{\mathcal{F}}$  cuyos autovalores (contados con multiplicidad) son  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_d$ .

**Proposición 2.2.1.** *Sea  $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i=1}^m$  una sucesión de Bessel sumable en  $\mathcal{H}$  y sea  $c > 0$ . Se tienen entonces las siguientes equivalencias:*

1.  $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$  es un marco  $c$ -ajustado.
2.  $S^{\mathcal{G}} = cId - S^{\mathcal{F}}$ .

*Demostración.* Es fácil ver que  $S^{\mathcal{F} \cup \mathcal{G}} = S^{\mathcal{G}} + S^{\mathcal{F}}$ . De hecho,

$$S^{\mathcal{F} \cup \mathcal{G}} f = \sum_{i=1}^p \langle f, f_i \rangle f_i + \sum_{i=1}^t \langle f, g_i \rangle g_i = S^{\mathcal{F}} f + S^{\mathcal{G}} f.$$

Esto muestra  $1 \leftrightarrow 2$ . □

Consideremos primero el problema más sencillo de completar un conjunto  $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^p$  de vectores en  $\mathbb{C}^d$  con vectores  $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i=1}^t \in \mathbb{C}^d$  de modo que la sucesión  $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$  es un marco ajustado, con libertad en las normas de los vectores de  $\mathcal{G}$ . Este resultado aparece en [33] pero la demostración que presentaremos difiere de la del citado artículo.

**Proposición 2.2.2.** *Sean  $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^p$ ,  $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i=1}^t \subset \mathbb{C}^d$  con  $t \leq d - 1$ , supongamos que  $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$  es un marco para  $\mathbb{C}^d$ . Sean  $\lambda_i(S^{\mathcal{F}})$  y  $\lambda_i(S^{\mathcal{F} \cup \mathcal{G}})$  los autovalores de  $S^{\mathcal{F}}$  y  $S^{\mathcal{F} \cup \mathcal{G}}$  respectivamente, ordenados en forma decreciente y contando multiplicidades. Entonces*

$$\frac{\lambda_1(S^{\mathcal{F} \cup \mathcal{G}})}{\lambda_d(S^{\mathcal{F} \cup \mathcal{G}})} \geq \frac{\lambda_1(S^{\mathcal{F}})}{\lambda_{d-t}(S^{\mathcal{F}})}. \quad (2.1)$$

*Y la igualdad se alcanza en un conjunto  $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i=1}^t$ .*

*Demostración.* Sean  $G_1 = G^{\mathcal{F}} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})^+$  y  $G_2 = G^{\mathcal{F} \cup \mathcal{G}} \in \mathcal{M}_{p+t}(\mathbb{C})^+$  los operadores Grammianos de  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$  respectivamente. Dado que  $G_1$  es una submatriz de  $p \times p$  de  $G_2$ , la versión generalizada del teorema de entrelace de Cauchy nos dice que, si  $\lambda_i(G_1)$ ,  $i = 1, \dots, p$  y  $\lambda_i(G_2)$ ,  $i = 1, \dots, p+t$  son los autovalores ordenados en forma decreciente de  $G_1$  y  $G_2$ , entonces:

$$\lambda_{k+t}(G_2) \leq \lambda_k(G_1) \leq \lambda_k(G_2) \quad \text{para } 1 \leq k \leq p.$$

En particular,  $\lambda_d(G_2) \leq \lambda_{d-t}(G_1)$ , y  $\lambda_1(G_1) \leq \lambda_1(G_2)$ . La desigualdad del enunciado se deduce entonces de que  $\lambda_i(G_1) = \lambda_i(S^{\mathcal{F}})$  y  $\lambda_i(G_2) = \lambda_i(S^{\mathcal{F} \cup \mathcal{G}})$ , para  $1 \leq i \leq d$ . Notar que por hipótesis,  $\lambda_d(G_2) > 0$ .

Veamos ahora que existe un conjunto de vectores  $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i=1}^t$  tal que

$$\frac{\lambda_1(S^{\mathcal{F} \cup \mathcal{G}})}{\lambda_d(S^{\mathcal{F} \cup \mathcal{G}})} = \frac{\lambda_1(S^{\mathcal{F}})}{\lambda_{d-t}(S^{\mathcal{F}})}.$$

Llamemos  $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_i(S))_{i=1}^d$  al vector en  $\mathbb{R}_+^d$  de autovalores de  $S = S^{\mathcal{F}}$  ordenados en forma decreciente. Existe pues una matriz unitaria  $U \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$  tal que  $S = U \text{diag}(\boldsymbol{\lambda}) U^*$ , donde por  $\text{diag}(\boldsymbol{\lambda})$  nos referimos a la matriz diagonal con  $\boldsymbol{\lambda}$  en su diagonal principal.

Dado  $1 \leq t \leq d-1$ , consideremos el vector  $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^d$  con entradas

$$\alpha_i = \max(0, \lambda_{d-t}(S) - \lambda_i(S)).$$

Claramente, la matriz  $S' := U \text{diag}(\boldsymbol{\alpha}) U^*$  es semidefinida positiva y tiene rango  $\leq t$ . Además,  $\lambda_{\max}(S + S') = \lambda_1(S)$  y  $\lambda_{\min}(S + S') = \lambda_{d-t}(S)$ , con  $\lambda_{\max}$  y  $\lambda_{\min}$  los autovalores máximo y mínimo de  $S + S'$  respectivamente.

Para finalizar la prueba, debemos encontrar un conjunto  $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i=1}^t$  de vectores tal que  $S^{\mathcal{G}} = S'$  (en realidad, puede optimizarse el número de vectores en  $s = \text{rango}(S')$ ). Pero para ello basta tomar

$$g_i = \sqrt{\lambda_{d-t}(S) - \lambda_{d-t+i}(S)} C_{d-t+i}(U),$$

donde  $C_i(X)$  representa el vector columna  $i$ -ésimo de la matriz  $X$ . □

**Observación 2.2.3.** Del resultado anterior se deduce que dados los vectores  $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^p$  en  $\mathbb{C}^d$  siempre podemos completarlo con al menos  $d-1$  vectores y obtener un marco ajustado. Más aún, de la desigualdad (2.1) se infiere que podemos completarlo con  $k \leq d-1$  vectores si y sólo si los primeros  $d-k$  autovalores de  $S^{\mathcal{F}}$  son iguales.

## 2.3. Completando con restricción en las normas de los vectores a agregar.

Consideremos ahora, además del conjunto  $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^p$  de vectores a completar, una sucesión de números positivos  $\mathbf{a} = \{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ , ordenados en forma decreciente. Llamemos  $\alpha = \sum_{i=1}^p \|f_i\|^2$ , es decir,  $\alpha$  es la traza de  $S^{\mathcal{F}}$ .

Nos proponemos ahora estudiar en qué contextos es válida una completación de  $\mathcal{F}$  a un marco ajustado, restringiendo las normas de los vectores a agregar:  $\|g_i\|^2 = a_i$ .

**Definición 2.3.1.** Decimos que  $\mathcal{F}$  es **(a, r)-completable** si existe  $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  y una sucesión Bessel  $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i=1}^r \subset \mathcal{H}$ , con  $\|g_i\|^2 = a_i \forall i$ , y tal que  $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$  es un marco ajustado.  $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i=1}^r$  constituye así una **(a, r)-completación** de  $\mathcal{F}$ .

**Observación 2.3.2.** Si  $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i=1}^r$  es una (a, r)-completación de  $\mathcal{F}$  entonces la cota de marco  $c \in \mathbb{R}$  de  $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$  queda determinada por el número  $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  y las normas de los vectores  $\mathcal{F}$ . De hecho, por lo visto en la sección 1.5 del capítulo anterior, se tiene  $c = \frac{1}{d}(\sum_{i=1}^r a_i + \alpha)$ .

Como consecuencia de la Proposición 2.2.1 y el Teorema 1.5.4 se tiene:

**Teorema 2.3.3.** Sea  $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ . entonces  $\mathcal{F}$  es (a, r)-completable si y sólo si

i.

$$\lambda_1 \leq \frac{1}{d} \left( \sum_{i=1}^r a_i + \alpha \right) < \infty \quad (2.2)$$

ii. Para  $t = \min\{d, r\}$ ,

$$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (a_i + \lambda_{d-i+1}) \leq \frac{1}{d} \left( \sum_{i=1}^r a_i + \alpha \right), \quad 1 \leq k \leq t \quad (2.3)$$

donde  $\alpha = \text{tr}(S^{\mathcal{F}}) = \sum_{i=1}^d \lambda_i$ .

En particular, si  $r \in \mathbb{N}$  es tal que  $r \geq d$  y  $\mathcal{F}$  es (a, r)-completable entonces  $\mathcal{F}$  es (a, k)-completable para cada  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq r$ .

*Demostración.* Supongamos que existe  $r \in \mathbb{N}$  y una sucesión finita  $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i=1}^r$  tal que  $S^{\mathcal{F} \cup \mathcal{G}} = S^{\mathcal{F}} + S^{\mathcal{G}} = c \text{Id}$  y  $\|g_i\|^2 = a_i$  para  $1 \leq i \leq r$ . Entonces  $c \text{Id} - S^{\mathcal{F}} = S^{\mathcal{G}} \geq 0$ ; en particular se tiene  $c \geq \|S^{\mathcal{F}}\| = \lambda_1$ . Por otro lado, los autovalores (contados con multiplicidad) de  $S^{\mathcal{G}}$  ordenados en forma decreciente son  $c - \lambda_d \geq \dots \geq c - \lambda_1 \geq 0$ . Por el Teorema 1.5.4 se tiene

$$(c - \lambda_d, c - \lambda_{d-1}, \dots, c - \lambda_1) \succ (a_1, \dots, a_r). \quad (2.4)$$

Entonces, de la Definición 1.2.3 se deducen (2.2) y (2.3), para  $t = \min\{d, r\}$ . dado que  $c = \frac{1}{d}(\sum_{i=1}^r a_i + \alpha)$  por la Observación 2.3.2.

Recíprocamente, supongamos que

$$\frac{1}{d} \left( \sum_{i=1}^r a_i + \alpha \right) \geq \lambda_1 = \|S^{\mathcal{F}}\|,$$

y además se cumple (2.3) para cierto  $r \in \mathbb{N}$ . Notemos  $c = \frac{1}{d} \left( \sum_{i=1}^r a_i + \alpha \right)$ .

Por lo tanto, el espectro del operador positivo  $c Id - S^{\mathcal{F}}$ ,  $(c - \lambda_d, c - \lambda_{n-1}, \dots, c - \lambda_1)$ , mayoriza (en el sentido de la Definición 1.2.3) a  $\{a_i\}_{i=1}^r$ . Por el Teorema 1.5.4, existe una sucesión Bessel  $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i=1}^r$  con  $S^{\mathcal{G}} = c Id - S^{\mathcal{F}}$  y  $\|g_i\|^2 = a_i$  para  $1 \leq i \leq r$ .

Supongamos ahora que  $\mathcal{F}$  es  $(\mathbf{a}, \infty)$ -completable con una sucesión Bessel infinita  $\mathcal{G}$ . Esto implica que  $\mathbf{a}$  debe ser sumable. De hecho,  $\text{tr}(S^{\mathcal{F} \cup \mathcal{G}}) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i + \alpha = dc$ , donde  $c$  es la cota del marco ajustado. Como en el caso  $r < \infty$ ,  $\lambda_1 = \|S^{\mathcal{F}}\| \leq c$  por lo que el ítem *i*. se deduce de este hecho y la Observación 2.3.2. Por la Proposición 2.2.1 y el Teorema 1.5.4,  $\mathbf{a} \prec (c - \lambda_d, c - \lambda_{n-1}, \dots, c - \lambda_1)$ , por lo que el ítem *ii*. también se cumple en este caso.

Por otro lado, si *i*. y *ii*. se cumplen para  $r = \infty$  entonces, como en el caso finito,  $c Id - S^{\mathcal{F}}$  es un operador semidefinido positivo cuyo espectro mayoriza  $\mathbf{a}$  por lo que por el Teorema 1.5.4,  $\mathcal{F}$  es  $(\mathbf{a}, \infty)$ -completable.  $\square$

**Observación 2.3.4.** Por el Teorema 2.3.3, si  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$  diverge, entonces todo conjunto de vectores  $\mathcal{F}$  es  $(\mathbf{a}, r)$ -completable para algún  $r \in \mathbb{N}$ .

De la Observación 2.2.3 se deduce que una  $(\mathbf{a}, r)$ -completación con  $r < d$  es posible si y sólo si los primeros  $n - r$  autovalores de  $S^{\mathcal{F}}$  son iguales. Del Teorema 2.3.3 y la Observación 3.0.7 se deducen algunas condiciones extra que se deben cumplir cuando se añade la restricción en las normas de los vectores que completan a  $\mathcal{F}$ :

**Corolario 2.3.5.**  $\mathcal{F}$  es  $(\mathbf{a}, r)$ -completable con  $r < d$  si y sólo si, para  $1 \leq i \leq d - r$  y  $1 \leq k \leq r$ ,

$$\lambda_i = \frac{1}{d} \left( \sum_{j=1}^r a_j + \alpha \right), \quad y \quad \lambda_1 \geq \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k (a_j + \lambda_{n-j+1}). \quad (2.5)$$

En particular,  $\mathcal{F}$  no es  $(\mathbf{a}, k)$ -completable para ningún  $r \neq k < d$ .

Ambos resultados pueden resumirse en la siguiente proposición, que será útil para calcular el mínimo  $r$  tal que  $\mathcal{F}$  es  $(\mathbf{a}, r)$ -completable.

Definamos primero inductivamente los siguientes números: sea  $c_0 = \lambda_1$  y para  $1 \leq k \leq d$  sea

$$c_k = \max \left( c_{k-1}, \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (a_i + \lambda_{d-i+1}) \right). \quad (2.6)$$

Se desprende de la definición que  $\lambda_1 \leq c_1 \leq \dots \leq c_d$ .

**Proposición 2.3.6.** Sea  $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ .  $\mathcal{F}$  es  $(\mathbf{a}, r)$ -completable si y sólo si

$$c_r = \frac{1}{d} \left( \sum_{i=1}^r a_i + \alpha \right) \quad \text{para } r < d \quad (2.7)$$

o

$$c_d \leq \frac{1}{d} \left( \sum_{i=1}^r a_i + \alpha \right) < \infty \text{ para } r \geq d. \quad (2.8)$$

Más aún, si  $c_r = \frac{1}{d} (\sum_{i=1}^r a_i + \alpha)$  para algún  $r < d$ , entonces  $c_r = \lambda_1$ .

*Demostración.* Supongamos que  $\mathcal{F}$  es  $(\mathbf{a}, r)$ -completable. Si  $r < d$  entonces por (2.5) en el Corolario 2.3.5, se tiene que  $\lambda_1 = c_0 \leq \dots \leq c_r = \lambda_1$  y  $\lambda_1 = \frac{1}{d} (\sum_{i=1}^r a_i + \alpha)$ , por lo que (2.7) se satisface. Si  $r \geq d$  entonces  $\min\{d, r\} = d$  y el Teorema 2.3.3 junto con la definición de  $c_d$  implican que

$$\frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^r a_i + \alpha \right) \geq c_d.$$

Por lo que, en este caso (2.8) se cumple. Recíprocamente, si suponemos (2.8), entonces claramente  $\mathcal{F}$  es  $(\mathbf{a}, r)$ -completable, por el Teorema 2.3.3. Supongamos ahora que para algún  $r < d$ ,  $c_r = \frac{1}{d} (\sum_{i=1}^r a_i + \alpha)$ . Veamos que  $\mathcal{F}$  es  $(\mathbf{a}, r)$ -completable. De hecho, dado que  $dc_r = \sum_{i=1}^r a_i + \alpha$ , se tiene que

$$rc_r + (d-r)c_r - \sum_{i=1}^{d-r} \lambda_i = \sum_{i=1}^r a_i + \sum_{i=1}^r \lambda_{d-i+1}.$$

La definición de  $c_r$  implica que

$$\sum_{i=1}^r (a_i + \lambda_{d-i+1}) \leq rc_r = \sum_{i=1}^r (a_i + \lambda_{d-i+1}) - \sum_{i=1}^{d-r} (c_r - \lambda_i) \leq \sum_{i=1}^r (a_i + \lambda_{d-i+1}).$$

Por lo tanto,

$$\lambda_j = \frac{1}{d} \left( \sum_{i=1}^r a_i + \alpha \right) \text{ para } 1 \leq j \leq d-r$$

y

$$\lambda_1 \geq \max_{1 \leq k \leq r} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (a_i + \lambda_{d-i+1}),$$

por lo que  $\mathcal{F}$  es  $(\mathbf{a}, r)$ -completable, por el Corolario 2.3.5. La última afirmación de la Proposición es clara de los cálculos previos.  $\square$

Ahora estamos en condiciones de dar el mínimo  $r \in \mathbb{N}$  tal que  $\mathcal{F}$  es  $(\mathbf{a}, r)$ -completable, suponiendo que tal  $r \in \mathbb{N}$  existe.

**Proposición 2.3.7.** *Sea  $\mathcal{F}$   $(\mathbf{a}, r)$ -completable para algún  $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ , y  $r_0 \in \mathbb{N}$  el mínimo tal que  $\mathcal{F}$  es  $(\mathbf{a}, r_0)$ -completable. Entonces*

**Caso 1**  $r_0 < d$  si y sólo si  $c_{r_0} = \frac{1}{d} (\sum_{i=1}^{r_0} a_i + \alpha)$ .

**Caso 2**  $d \leq r_0 < \infty$  si y sólo si  $c_k \neq \frac{1}{d} \left( \sum_{i=1}^k a_i + \alpha \right)$  para todo  $1 \leq k \leq d-1$  y  $r_0 \in \mathbb{N}$  es el mínimo tal que  $c_d \leq \frac{1}{d} \left( \sum_{i=1}^{r_0} a_i + \alpha \right)$ .

**Caso 3**  $r_0 = \infty$  si y sólo si  $c_k \neq \frac{1}{d} \left( \sum_{i=1}^k a_i + \alpha \right) \quad \forall 1 \leq k \leq d-1$  y  $c_d = \frac{1}{d} \left( \sum_{i=1}^{\infty} a_i + \alpha \right)$ .

*Demostración.* Es inmediato de la Proposición 2.3.6. El hecho que  $r \geq d$  en el caso 2 se deduce de  $c_d \leq \frac{1}{d} \left( \sum_{i=1}^r a_i + \alpha \right)$ , dado que  $a_i > 0$  para todo  $i$ .  $\square$

El siguiente ejemplo muestra que es posible tener un conjunto de vectores  $\mathcal{F}$  y una sucesión  $\mathbf{a}$  tal que  $\mathcal{F}$  es  $(\mathbf{a}, r)$ -completable sólo para un  $r \in \mathbb{N}$ .

**Ejemplo 2.3.8.** Sea  $\mathcal{F} = \{\sqrt{2}e_1, \sqrt{2}e_2, e_3\}$  en  $\mathbb{C}^3$  donde  $\{e_i\}_{i=1}^3$  es la base ortonormal canónica y sea  $\mathbf{a} = \left\{ \left( \frac{1}{4} \right)^{i-1} \right\}_{i=1}^{\infty}$ . Entonces, los autovalores de  $S^{\mathcal{F}}$  son  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = 2$  y  $\lambda_3 = 1$ , por lo que  $\alpha = \text{tr } S^{\mathcal{F}} = 5$ . Por el Corolario 2.3.5  $\mathcal{F}$  es  $(\mathbf{a}, 1)$ -completable dado que  $\lambda_1 = \frac{1}{3}(a_1 + \alpha)$  y  $\lambda_1 \geq a_1 + \lambda_3$ . Más aún, es claro que si agregamos una copia del vector  $e_3$  a  $\mathcal{F}$  obtenemos un marco 2-ajustado de cuatro vectores. Notemos que, también por el Corolario 2.3.5,  $\mathcal{F}$  no es  $(\mathbf{a}, 2)$ -completable. Por otro lado, es fácil ver que  $\frac{1}{3} \left( \sum_{i=1}^{\infty} a_i + \alpha \right) = \frac{19}{9} < \frac{17}{8} = c_3$  entonces, por la Proposición 2.3.6,  $\mathcal{F}$  no es  $(\mathbf{a}, r)$ -completable para todo  $r \geq 3$ .

**Proposición 2.3.9.** Supongamos que  $\mathcal{F}$  es  $(\mathbf{a}, r)$ -completable con  $r < d$ . Entonces existe  $r_1 \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  con  $r_1 \geq d$  y tal que  $\mathcal{F}$  es  $(\mathbf{a}, r_1)$ -completable si y sólo si

$$\max_{r+1 \leq k \leq d} \frac{1}{k} \sum_{i=r+1}^k a_i \leq \frac{1}{d} \sum_{i=r+1}^{r_1} a_i < \infty.$$

*Demostración.* Dado que  $\mathcal{F}$  es  $(\mathbf{a}, r)$ -completable, con  $r < d$ , sabemos por el Corolario 2.3.5 que los primeros  $d-r$  autovalores de  $S^{\mathcal{F}}$  son iguales a  $\frac{1}{d} \left( \sum_{j=1}^r a_j + \alpha \right)$ . Por otro lado, para  $r_1 \geq d$  se tiene que  $\frac{1}{d} \left( \sum_{j=1}^{r_1} a_j + \alpha \right) > \frac{1}{d} \left( \sum_{j=1}^r a_j + \alpha \right)$ , pues los  $a_i$  son positivos.

Entonces, del Teorema 2.3.3 y el Corolario 2.3.5 se deduce que  $\mathcal{F}$  es  $(\mathbf{a}, r_1)$ -completable si y sólo si

$$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (a_i + \lambda_{d-i+1}) \leq \frac{1}{d} \left( \sum_{i=1}^{r_1} a_i + \alpha \right), \quad r+1 \leq k \leq d.$$

Restando  $\lambda_1$  a ambos lados de la desigualdad anterior tenemos que, para  $r+1 \leq k \leq d$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (a_i + \lambda_{d-i+1}) - \lambda_1 &\leq \frac{1}{d} \left( \sum_{i=1}^{r_1} a_i + \alpha \right) - \lambda_1, \\ \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (a_i + \lambda_{d-i+1}) - \frac{d}{k} \lambda_1 - \frac{k-d}{k} \lambda_1 &\leq \frac{1}{d} \left( \sum_{i=1}^{r_1} a_i + \alpha \right) - \frac{1}{d} \left( \sum_{j=1}^r a_j + \alpha \right), \\ \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (a_i + \lambda_{d-i+1}) - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^r a_i - \frac{(k-d)\lambda_1 - \alpha}{k} &\leq \frac{1}{d} \left( \sum_{i=r+1}^{r_1} a_i \right), \\ \frac{1}{k} \sum_{i=r+1}^k a_i + \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \lambda_{d-i+1} - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \lambda_{d-i+1} &\leq \frac{1}{d} \sum_{i=r+1}^{r_1} a_i, \\ \frac{1}{k} \sum_{i=r+1}^k a_i &\leq \frac{1}{d} \sum_{i=r+1}^{r_1} a_i \end{aligned}$$

(La igualdad  $(k-d)\lambda_1 - \alpha = \sum_{i=1}^k \lambda_{d-i+1}$  para  $r+1 \leq k \leq d$  es debido a que los primeros  $d-r$  autovalores son iguales a  $\lambda_1$ , por hipótesis).  $\square$

## 2.4. Marcos ajustados con normas iguales.

En esta sección consideraremos el caso particular en que  $\mathbf{a} = \{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  es la sucesión constante  $a_i = 1$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ . Notemos que en este caso  $\mathcal{F}$  es  $(\mathbf{a}, r)$ -completable para algún  $r \in \mathbb{N}$  por lo dicho en la Observación 2.3.4; de modo que resta calcular el mínimo número  $r$  de vectores de norma uno que hay que agregar a  $\mathcal{F}$  para obtener un marco ajustado.

**Observación 2.4.1.** Supongamos que  $a_i = 1$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ , se tiene entonces que

$$c_r = \max \left( \lambda_1, 1 + \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r \lambda_{d-i+1} \right).$$

De hecho, si  $j \leq k$  entonces  $\frac{1}{j} \sum_{i=1}^j \lambda_{d-i+1} \leq \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \lambda_{d-i+1}$  dado que  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_d \geq 0$ .

Esta sencilla fórmula para los coeficientes  $c_j$  es útil para la siguiente caracterización del número óptimo de elementos para completaciones a marcos ajustados con vectores de norma uno.

**Proposición 2.4.2.** Sea  $h := \sum_{i=2}^d \lambda_1 - \lambda_i = d\lambda_1 - \alpha$ , y  $r_0$  el número mínimo de vectores de norma uno que se pueden agregar a  $\mathcal{F}$  para obtener un marco ajustado.

**Caso 1:** Si  $h < d$ , entonces  $r_0 = h$  si  $h = 0$  o si  $h \in \mathbb{N}$  y  $1 + \frac{1}{h} \sum_{i=1}^h \lambda_{d-i+1} \leq \lambda_1$  (en particular,  $c_h = \lambda_1$ ). En caso contrario,  $r_0 = d$ .

**Caso 2:** Si  $h \geq d$ ,  $r_0 = \lceil h \rceil$ .

*Demostración.* Es claro que si  $h = 0$  entonces  $\mathcal{F}$  es un marco ajustado. Supongamos que  $0 < h < d$ ; entonces, dado que  $h = d\lambda_1 - \alpha$ , se tiene que  $c_d = 1 + \frac{\alpha}{d}$  por la Observación 2.4.1. Si además  $h \in \mathbb{N}$  y  $1 + \frac{1}{h} \sum_{i=1}^h \lambda_{d-i+1} \leq \lambda_1$ , (por lo que  $c_h = \frac{1}{d}(h + \alpha) = \lambda_1$ ), entonces  $r_0 = h$  por la Proposición 2.3.7. En caso contrario,  $c_k \neq \frac{1}{d}(k + \alpha)$  para todo  $k < d$ . De hecho, si  $c_k = \frac{1}{d}(k + \alpha)$  para algún  $k < d$ , entonces, por la Proposición 2.3.6  $c_k = \lambda_1$ , por lo que  $h = k$  y  $1 + \frac{1}{h} \sum_{i=1}^h \lambda_{d-i+1} \leq \lambda_1$ , que contradice la suposición inicial; entonces, dado que  $c_d = 1 + \frac{\alpha}{d}$ ,  $\lceil dc_d - \alpha \rceil = d$ , se concluye que  $r_0 = d$  por la Proposición 2.3.7.

Finalmente,  $h \geq d$  implica que  $c_k \neq \frac{1}{d}(k + \alpha)$  para todo  $k < d$  y  $c_d = \lambda_1$  (entonces  $c_k = \lambda_1$  para todo  $k \leq d$ ). Una vez más, la Proposición 2.3.7 implica que  $r_0 = \lceil d\lambda_1 - \alpha \rceil = \lceil h \rceil$ .  $\square$

**Ejemplo 2.4.3.** Sea  $f_1 = (1, 0)$  y  $f_2 = (\cos \theta, \sin \theta)$  en  $\mathbb{R}^2$ , y consideremos  $a_i = 1 \forall i$ . Es fácil ver que los autovalores de  $S^{\mathcal{F}}$  son  $1 \pm \cos \theta$ , por lo que  $h = \lambda_1 - \lambda_2 = 2|\cos \theta|$  ( $\lambda_1 \geq \lambda_2$  son los autovalores de  $S^{\mathcal{F}}$ ). Por lo tanto, por la Proposición 2.4.2, el número mínimo  $r_0$  de vectores de norma uno a agregar para obtener un marco ajustado es 2, a menos que  $\theta \in \{\frac{k\pi}{3}, k = 1, 2, 4, 5\}$ , en cuyo caso  $r_0 = 1$ , o si  $\theta \in \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$ , en donde  $r_0 = 0$  (en este caso  $f_1$  y  $f_2$  son una base ortonormal de  $\mathbb{R}^2$ , y por lo tanto, un marco ajustado uniforme).

## 2.5. Implementación de Algoritmos

Una vez calculado el número de vectores a agregar, pueden implementarse algoritmos para hallar tal completación usando métodos como los propuestos por Davies y Higham ([28]) (con vectores de norma uno), o su generalización a diferentes normas, el algoritmo de Bendel-Mickey generalizado (ver el trabajo de I.S. Dhillon, R.W. Heath Jr., M.A. Sustik y J.A. Tropp, [30]). Otra opción es el método propuesto en [33] que utiliza transformaciones de Householder.

Podemos describir brevemente estos algoritmos del siguiente modo: Sea  $X \in \mathcal{M}_{d \times p}(\mathbb{C})$ , cuyas columnas tienen normas al cuadrado dadas por el vector  $\mathbf{b}$ . Supongamos que  $\mathbf{a}$  es un vector de entradas positivas tal que  $\mathbf{a} \prec \mathbf{b}$ , entonces, existen (a lo sumo  $p - 1$ ) rotaciones  $\{U_j\}_{j=1}^k$  (o matrices de Householder, en el algoritmo propuesto en [33]) tal que  $X_1 = XU_1 \cdot U_2 \dots \cdot U_k$  tiene columnas con normas (al cuadrado) dadas por  $\mathbf{a}$ . Notar que, por construcción,  $XX^* = X_1X_1^*$ .

Dado un conjunto de vectores  $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^p$  en  $\mathbb{C}^d$ , sea  $T = T^{\mathcal{F}}$  representado matricialmente en  $\mathcal{M}_{d \times p}(\mathbb{C})$  de modo tal que  $C_i(T) = f_i$  para  $1 \leq i \leq p$ .

Propondremos dos algoritmos para completar  $\mathcal{F}$ , agregando columnas a  $T$ . El Algoritmo 1 calcula el número mínimo de columnas  $r$  de acuerdo a la Proposición 2.3.7 (consideraremos siempre  $r \geq d$  para simplificar los cálculos). Sin embargo, como contrapartida, necesitaremos diagonalizar  $S^{\mathcal{F}}$ , lo que conlleva un costo computacional importante.

Concretamente, la completación de  $\mathcal{F}$ , con normas fijadas previamente se hace en dos pasos,

Algoritmo 1:

**Paso 1** Se diagonaliza  $S^{\mathcal{F}} = TT^* = U \text{diag}(\boldsymbol{\lambda})U^*$ . Entonces se calcula el mínimo  $r$  (bajo la restricción  $\geq d$ ) de columnas a agregar a  $T$ . Se construye la matriz  $R \in \mathcal{M}_{d \times r}(\mathbb{C})$ ,  $R = [Z \ D]$ , siendo  $Z$  un bloque de ceros de tamaño  $d \times (r - d)$  y donde  $D$  es la matriz diagonal  $D = \text{diag}(\sqrt{c - \lambda_i})_i$ , con  $c = \frac{1}{d}(\sum_{i=1}^r a_i + \alpha)$ .

**Paso 2** Se aplica el algoritmo Bendel-Mickey a  $R$ , obteniendo  $R_1 \in \mathcal{M}_{d \times r}(\mathbb{C})$ , cuyas columnas tienen norma cuadrado dadas por el vector  $z = (a_1, a_2, \dots, a_r)$ . Notar que esto es posible dado que las normas al cuadrado de las columnas de  $R$  mayorizan a  $z$ . Esto implica que  $R_1 R_1^* = R R^* = Z Z^* + (c Id - \text{diag}(\lambda_i)_i) = c Id - \text{diag}(\lambda_i)_i$ . Así,  $(UR_1)(UR_1)^* = c Id - TT^*$ .

Finalmente,  $g_i = C_i(UR_1)$  para  $1 \leq i \leq r$  es la completación  $\mathcal{F}$ .

El siguiente resultado nos permite reemplazar la matriz  $R$  en el Paso 1 por otra matriz rectangular (con un mayor número de columnas) de modo de aplicar a esta los cálculos del Paso 2. A diferencia del Algoritmo uno, no es necesario diagonalizar  $S^{\mathcal{F}}$  (tampoco multiplicar por la matriz unitaria  $U$  en el último paso). En lugar de ello, factorizamos  $c Id - S^{\mathcal{F}}$  (para un  $c$  conveniente) usando el algoritmo de Cholesky.

**Proposición 2.5.1.** *Supongamos que  $\mathbf{a}$  es una sucesión divergente. Sea  $k \in \mathbb{R}$  una cota superior para  $\|S^{\mathcal{F}}\|$  y  $t = k + a_1$ . Si  $r \in \mathbb{N}$  es tal que*

$$\sum_{i=1}^{r-1} a_i < t \cdot d - \text{tr}(S^{\mathcal{F}}) \leq \sum_{i=1}^r a_i \quad (2.9)$$

entonces existen vectores  $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i=1}^r$  tal que  $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$  es un marco ajustado, con  $\|g_i\|^2 = a_i$  para  $1 \leq i \leq r$ . Este conjunto puede ser construido sin diagonalizar  $S^{\mathcal{F}}$ .

*Demostración.* Como antes, llamemos  $c = \frac{1}{d}(\sum_{i=1}^r a_i + \alpha)$ , entonces, por hipótesis,  $c \geq t$ . Por lo tanto,  $c Id - S^{\mathcal{F}}$  es definido positivo, dado que sus autovalores son:  $c - \lambda_d \geq \dots \geq c - \|S^{\mathcal{F}}\| > a_1$ .

Sea  $YY^*$ , con  $Y$  triangular inferior, la factorización obtenida mediante el algoritmo de Cholesky de  $c Id - S^{\mathcal{F}}$ . Notar que, dado que los autovalores de  $Y^*Y$  coinciden con los de  $YY^*$ , la entrada diagonal mas pequeña de  $Y^*Y$  es  $\geq c - \|S^{\mathcal{F}}\| > a_1$  (debido a las desigualdades de la mayorización). En particular, si  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^r$  es el vector cuyas entradas

son los cuadrados de las normas de las columnas de  $Y$  (ordenadas en forma decreciente), entonces  $\mathbf{b} \succ (a_1, a_2, \dots, a_r)$ .

Así, podemos aplicar el Paso 2 a la matriz  $R = [ZY]$  donde  $Z$  es un bloque de ceros de tamaño  $d \times (r - d)$  y obtener una completación de  $\mathcal{F}$ .  $\square$

El Algoritmo 2 podría describirse entonces:

Algoritmo 2

**Paso 1** Sea  $k$  una cota superior para  $\|S^{\mathcal{F}}\|$ , entonces, se calcula  $r$  que satisfaga (2.9). Para  $c = \frac{1}{d}(\sum_{i=1}^r a_i + \alpha)$ , se obtiene la descomposición de Cholesky  $RR^*$  de  $cId - S^{\mathcal{F}}$ . Se redefine  $R = [ZR]$  donde  $Z$  es un bloque de ceros de tamaño  $d \times (r - d)$ .

**Paso 2** Se aplica el algoritmo de Bendel-Mickey a  $R$ , para obtener  $R_1 \in \mathcal{M}_{d \times r}(\mathbb{C})$ , cuyas columnas tienen normas al cuadrado dadas por el vector  $z = (a_1, a_2, \dots, a_r)$ .

Finalmente,  $g_i = C_i(R_1)$  para  $1 \leq i \leq r$  es la completación de  $\mathcal{F}$ .

### 2.5.1. Ejemplos Numéricos.

Ambos algoritmos se implementaron usando MATLAB para el caso particular de completaciones a marcos ajustados de vectores de norma uno. En este caso, para el Algoritmo 1, el número  $r \geq d$  de vectores a agregar se calcula usando la Proposición 2.4.2.

**Ejemplo 2.5.2.** Dados los siguientes 6 vectores de norma uno en  $\mathbb{R}^4$ , generados aleatoriamente:

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} -0,225 & 0,238 & 0,766 & 0,728 & 0,844 & -0,008 \\ -0,478 & 0,806 & 0,225 & 0,402 & 0,140 & -0,818 \\ -0,683 & -0,222 & 0,007 & -0,459 & 0,092 & -0,341 \\ 0,504 & 0,494 & -0,602 & 0,312 & 0,509 & 0,463 \end{bmatrix}$$

el Algoritmo 1 los completa con 6 vectores de norma uno

$$G_1 = \begin{bmatrix} 0,005 & 0,305 & 0,885 & -0,051 & 0,429 & 0,005 \\ 0,038 & -0,569 & -0,390 & 0,045 & -0,860 & 0,038 \\ 0,829 & 0,7 & -0,029 & 0,53 & -0,05 & 0,83 \\ 0,559 & 0,307 & -0,252 & -0,845 & -0,27 & 0,558 \end{bmatrix}$$

y mientras que el Algoritmo 2 produce los siguientes vectores:

$$G_2 = \begin{bmatrix} -0,140 & -0,14 & 0,675 & 0,907 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,852 & -0,14 \\ 0,069 & 0,069 & -0,33 & -0,311 & 0,211 & 0,866 & 0,994 & 0,211 & -0,417 & 0,069 \\ 0,948 & 0,948 & 0,651 & 0,057 & -0,022 & -0,09 & -0,104 & -0,022 & 0,066 & 0,948 \\ 0,277 & 0,277 & -0,103 & 0,28 & 0,977 & -0,491 & 0,041 & 0,977 & -0,309 & 0,277 \end{bmatrix}$$

Los operadores de marco para ambas completaciones son, respectivamente:

$$S^{\mathcal{F} \cup G_1} = \begin{bmatrix} 3 & -1,04 \times 10^{-12} & -2,65 \times 10^{-12} & -3,80 \times 10^{-13} \\ -1,04 \times 10^{-12} & 3 & 3,61 \times 10^{-12} & 5,62 \times 10^{-12} \\ -2,65 \times 10^{-12} & 3,61 \times 10^{-12} & 3 & 8,88 \times 10^{-12} \\ -3,80 \times 10^{-13} & 5,62 \times 10^{-12} & 8,88 \times 10^{-12} & 3 \end{bmatrix}$$

y

$$S^{\mathcal{F} \cup G_2} = \begin{bmatrix} 4 & -3,45 \times 10^{-12} & -2,78 \times 10^{-13} & -1,60 \times 10^{-12} \\ -3,45 \times 10^{-12} & 4 & 4,16 \times 10^{-13} & 3,47 \times 10^{-13} \\ -2,78 \times 10^{-13} & 4,16 \times 10^{-13} & 4 & 2,78 \times 10^{-12} \\ -1,60 \times 10^{-12} & 3,47 \times 10^{-13} & 2,78 \times 10^{-12} & 4 \end{bmatrix}$$

**Observación 2.5.3.** En este caso, cuando los vectores tienen norma uno, la diferencia de vectores a agregar entre ambos algoritmos es exactamente  $d$ . De hecho, por la Proposición 2.4.2, el Algoritmo 1 produce  $r = \lceil d \|S^{\mathcal{F}}\| - \text{tr } S^{\mathcal{F}} \rceil$  vectores, mientras que el Algoritmo 2 genera  $r = \lceil d (\|S^{\mathcal{F}}\| + 1) - \text{tr } S^{\mathcal{F}} \rceil$ , por la Proposición 2.5.1 (asumiendo que acotamos de forma óptima  $\|S^{\mathcal{F}}\|$  con  $\lambda_1$ ).

Aún así, el número obtenido con el Algoritmo 2 es menor a la cota mencionada en el Teorema 2.1.1 dado que en general:

$$d \lceil \|S^{\mathcal{F}}\| + 1 \rceil - p \geq \lceil d \|S^{\mathcal{F}}\| + 1 \rceil - p$$

**Ejemplo 2.5.4** (Continuación del ejemplo 2.4.3). Si tomamos  $\theta = \frac{2\pi}{3}$  en el ejemplo 2.4.3, tenemos la matriz a completar

$$T = \begin{bmatrix} 1 & \cos(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) \end{bmatrix}$$

no es difícil probar que agregando el vector (columna)  $f = (\cos(\theta), -\sin(\theta))$  se obtiene un marco ajustado (llamado “Mercedes Benz” por la disposición de los vectores).

En cambio, los algoritmos 1 y 2 completan a  $T$  a las matrices  $T_1$  y  $T_2$  (ver Fig. 2.1) respectivamente:

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & \cos(\theta) & 0,866 & 0 \\ 0 & \sin(\theta) & 0,5 & 1 \end{bmatrix}$$

y

$$T_2 = \begin{bmatrix} 1 & \cos(\theta) & 0,3273 & 0,9449 & 0,5 \\ 0 & \sin(\theta) & -0,9449 & 0,3273 & 0,866 \end{bmatrix}$$

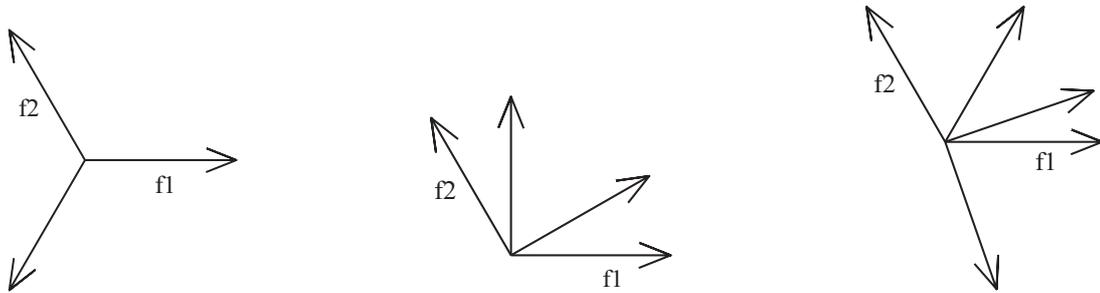


Figura 2.1: Completación óptima, con Algoritmo 1 y con Algoritmo 2 de los vectores  $\{f_1, f_2\}$ .

# Capítulo 3

## Funcionales convexos en marcos de $\mathbb{C}^d$

### 3.0.2. Introducción

El potencial de marco (frame potential), introducido por J.J. Benedetto y M. Fickus en [12] representa una herramienta interesante para hacer un estudio geométrico de los marcos en dimensión finita. La idea central en ese trabajo es mostrar que los marcos ajustados uniformes  $\mathbb{C}^d$ , forman una configuración de puntos en la esfera que resultan ser minimizadores locales (y globales) para el potencial de una fuerza (central) determinada.

Benedetto y Fickus se inspiraron en un problema clásico de la física que es el de estudiar las configuraciones estables (minizadores locales para cierto potencial) de electrones en una esfera considerando que cada electrón interactúa con otro de acuerdo a la ley de Coulomb (si consideramos que no hay presencia de fuerzas externas). Específicamente, la fuerza de un punto  $b \in S^2$  sobre otro punto distinto  $a \in S^2$  es (salvo un factor constante)  $F(a, b) = (a - b)/\|a - b\|^3$ . Por lo tanto, los electrones se “acomodarán” de modo que la energía potencial sea lo menor posible. Así, para hallar esas configuraciones, uno debe minimizar el potencial, que en este caso es, salvo un factor constante y para un par de puntos  $a, b \in S^2$ ,  $1/\|a - b\|$ .

Sin embargo, las configuraciones estables en  $S^2$  bajo la fuerza de Coulomb  $F$  en general no representan a vértices de marcos ajustados uniformes. De hecho, intuitivamente se ve que un par de puntos en la esfera tienden a estar lo más alejados entre sí, dado que la magnitud de la fuerza que los repele entre sí es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa. Sin embargo, los vectores de una base ortonormal en  $\mathbb{R}^2$  o en  $\mathbb{R}^3$  no parecen estar muy separados entre sí. Si uno considera a los marcos ajustados uniformes como candidatos naturales a extender las bases ortonormales, entonces el dato clave a considerar es el *ángulo* entre sus vectores, no la distancia que los separan. Esto llevó a que Benedetto y Fickus definieran una nueva noción de fuerza central, que caracterizara estos marcos como minimizadores de su potencial.

### Equilibrio bajo la fuerza de marco.

Dados dos puntos  $a, b$  en la esfera de radio uno  $S^{d-1}$ , Benedetto y Fickus definen la *fuerza marco* entre  $a$  y  $b$  como

$$\text{FM} : S^{d-1} \times S^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad \text{FM}(a, b) = \langle a, b \rangle (a - b).$$

Así, la fuerza marco tiende a “ortogonalizar”, siendo repulsiva cuando el ángulo entre los vectores que representan al par de puntos de la esfera es agudo, atractiva cuando es obtuso y es nula cuando son ortogonales.

La fuerza marco es muy diferente a las fuerzas que aparecen en la naturaleza. Por ejemplo, notemos que, por definición, depende del origen de coordenadas, dado que depende del ángulo que determinan los vectores correspondientes. Por lo tanto, no es una fuerza que sea invariante bajo traslaciones del sistema coordenado. Otro de los problemas que presenta es que el campo de fuerzas en  $\mathbb{R}^3$  generado por un vector  $(a, b, c)$  no es conservativo, en particular, el trabajo para transformar un punto en otro de acuerdo a este campo depende de la trayectoria empleada. Sin embargo, el campo es conservativo si nos restringimos a esferas centradas concéntricas, centradas en el origen.

En particular, puede calcularse el llamado *potencial de marco*, para un conjunto de vectores  $\{x_i\}_{i=1}^p$  en  $S^{d-1}$ , y resulta ser:  $\text{PM} : \underbrace{S^{d-1} \times \dots \times S^{d-1}}_{p \text{ veces}} \rightarrow [0, \infty)$ , dado por

$$\text{PM}(\{x_i\}_i) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p |\langle x_i, x_j \rangle|^2.$$

Uno puede extender la definición del potencial a vectores unitarios de espacios de Hilbert de dimensión finita, tanto reales como complejos y formalizar la noción de puntos de equilibrio bajo la fuerza marco como minimizadores locales de esta función.

La caracterización que obtienen Benedetto y Fickus de los mínimos globales para el potencial de marco es la siguiente:

**Teorema 3.0.5.** [12, Teo. 7.1] *Consideremos el potencial de marco*

$$\begin{aligned} \text{PM} : (S^{d-1})^p &\rightarrow [0, \infty) \\ \{x_i\}_i &\rightarrow \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p |\langle x_i, x_j \rangle|^2. \end{aligned}$$

Entonces

1. *Todo minimizador local del potencial de marco es un minimizador global.*
2. *Si  $p \leq d$  entonces el valor mínimo de PM es  $p$  y los minimizadores son las sucesiones ortonormales en  $\mathbb{C}^d$ .*

3. Si  $p \geq d$ , el valor mínimo del potencial de marco es  $p^2/d$ , y los minimizadores son los marcos ajustados con vectores unitarios de  $\mathbb{C}^d$ .

Es decir, continuando con la idea de que la fuerza marco tiende a ortogonalizar los vectores tanto como sea posible, queda claro que en el caso  $p \leq d$  un conjunto ortonormal va a ser el que minimice el potencial. Lo notable es que cuando  $p \geq d$ , las configuraciones que aparecen como minimizadores son los marcos ajustados uniformes, justificando así la noción de generalización de las bases ortonormales.

Cabe mencionar que la prueba que presentan los mencionados autores del Teorema 3.0.5 no depende de suponer la existencia de marcos ajustados con vectores de norma uno, así que puede interpretarse además como una prueba mas de existencia de tales marcos.

Estos resultados fueron extendidos en el trabajo de P.G Casazza, M. Fickus, J. Kovacevic, M.T. Leon y J.C. Tremain, [18], donde se restringió el potencial de marco al producto cartesiano  $S(\{a_i\}_{i=1}^p) := S(a_1) \times \dots \times S(a_p)$  de  $p$  esferas  $S(a_i) = \{f \in \mathbb{C}^d : \|f\|^2 = a_i\}$ . En este caso, los minimizadores locales (que resultan además globales) también son marcos ajustados, siempre que sea posible que tal marco ajustado exista (recordemos que ahora tenemos restricción en las normas, dadas por los valores  $a_i$ ,  $1 \leq i \leq p$ . En el caso en que no pueda existir un marco ajustado con esas normas para sus vectores, Casazza et al muestran en el resultado central de [18] que los minimizadores locales son lo mas cercano a un marco ajustado con dicha restricción en las normas. En concreto, dada una sucesión decreciente de números positivos  $\{a_i\}_{i=1}^p$ , con  $p \geq d$  se define la  $d$ -irregularidad de la sucesión, que puede interpretarse como el menor índice  $j$  para el cual los  $\{a_i\}_{i=j+1}^p$  pueden ser las normas de un marco ajustado en un subespacio de dimensión  $d - j$  (ver la Definición 3.0.9). Dicho esto, puede describirse a los minimizadores locales de la siguiente manera:

**Teorema 3.0.6.** [18, Teo. 1] Sea  $\{a_i\}_{i=1}^p$  una sucesión decreciente de números positivos  $p \geq d$  con  $d$ -irregularidad  $r_0$ . Entonces, todo minimizador local del potencial de marco  $\text{PM} : S(\{a_i\}_1^p) \rightarrow [0, \infty)$  es de la forma

$$\{f_i\}_{i=1}^{r_0} \cup \{f_i\}_{i=r_0+1}^p,$$

donde los  $\{f_i\}_{i=1}^{r_0}$  son ortogonales y  $\{f_i\}_{i=r_0+1}^p$  es un marco ajustado para el complemento ortogonal de  $\text{span}\{f_i\}_{i=1}^{r_0}$ .

Una observación crucial sobre el potencial de marco es que puede definirse en términos del operador de marco como:  $\text{PM}(\{f_i\}_{i=1}^p) = \text{tr}((S^{\mathcal{F}})^2)$ . Esto motivó el estudio, desarrollado en este capítulo, de minimizadores, locales y globales de funcionales de la forma:  $P_\phi = \text{tr}(\phi(\cdot))$ , donde  $\phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  es una función convexa, evaluada (cálculo funcional mediante) en los operadores de marco.

### 3.0.3. Mínimos para la mayorización.

El propósito de estas secciones es continuar brevemente con el estudio de la mayorización entre vectores, para caracterizar mínimos en determinados conjuntos de vectores.

**Observación 3.0.7.** Sean  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  como en la Definición 1.2.3, con  $\mathbf{b} \succ \mathbf{a}$  y  $m < s$ . Entonces  $b_j = 0$  para  $m + 1 \leq j$ . De hecho, dado que  $\mathbf{b}$  tiene entradas positivas

$$\sum_{j=1}^m a_j = \sum_{j=1}^s b_j \geq \sum_{j=1}^m b_j \geq \sum_{j=1}^m a_j \Rightarrow \sum_{j=m+1}^s b_j = 0.$$

De donde se deduce lo afirmado anteriormente.

**Proposición 3.0.8.** Sea  $c > 0$  y consideremos el conjunto

$$\mathcal{K}(c) = \{\mathbf{b} \in (\mathbb{R}^+)^d : \sum_{i=1}^d b_i = c\}, \quad (3.1)$$

entonces el vector  $\mathbf{v} = (\frac{c}{d}, \dots, \frac{c}{d})$  satisface  $\mathbf{b} \succ \mathbf{v}$  para todo  $\mathbf{b} \in \mathcal{K}(c)$ . Además, si  $\mathbf{b} \in \mathcal{K}(c)$  es tal que  $\mathbf{b}^\downarrow \neq \mathbf{v}$ , entonces para todo  $0 < \varepsilon$  suficientemente pequeño, existe  $\mathbf{b}_\varepsilon \in \mathcal{K}(c)$  tal que  $\mathbf{b}^\downarrow \neq \mathbf{b}_\varepsilon^\downarrow$ ,  $\mathbf{b} \succ \mathbf{b}_\varepsilon$  y  $\|\mathbf{b}^\downarrow - \mathbf{b}_\varepsilon^\downarrow\| \leq \varepsilon$ .

*Demostración.* A pesar de que la primer parte del enunciado es bien conocida en la teoría de mayorización, daremos una breve prueba para que la demostración sea completa.

Supongamos que tenemos  $\mathbf{b} \in \mathcal{K}(c)$  tal que, para cierto  $1 \leq k \leq d$ ,  $\sum_{i=1}^k b_i^\downarrow < k \frac{c}{d}$ . Sin pérdida de generalidad, supongamos que tal  $\mathbf{b}$  ya está ordenado en forma decreciente, es decir  $\mathbf{b} = \mathbf{b}^\downarrow$ . Entonces, para todo  $j \leq k + 1$ ,

$$b_j \leq b_{k+1} \leq \frac{1}{d} \sum_{i=1}^k b_i \leq \frac{c}{d},$$

pero entonces,

$$\sum_{i=1}^d b_i = \sum_{i=1}^k b_i + \sum_{i=k+1}^d b_i < c,$$

lo cual contradice  $\mathbf{b} \in \mathcal{K}(c)$ .

Para la prueba de la última afirmación, supongamos que  $\mathbf{b} \in \mathcal{K}(c)$  es tal que  $\mathbf{b} \neq \mathbf{v}$ , entonces existe un índice  $j$ ,  $1 \leq j \leq d$  tal que  $b_j^\downarrow > b_{j+1}^\downarrow$  donde notamos por  $b_i^\downarrow$  a las entradas de  $\mathbf{b}^\downarrow$ .

Sea  $0 < \varepsilon$  tal que  $b_j^\downarrow - \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} \geq b_{j+1}^\downarrow + \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}$  y notamos por  $\mathbf{b}_\varepsilon$  al vector  $\mathbf{b}_\varepsilon = \mathbf{b}^\downarrow - \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} \mathbf{e}_j + \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} \mathbf{e}_{j+1}$  donde  $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^d$  es la base canónica en  $\mathbb{R}^d$ . Claramente  $\mathbf{b}_\varepsilon \in \mathcal{K}(c)$ ,  $\mathbf{b} \succ \mathbf{b}_\varepsilon$ , y por construcción de  $\mathbf{b}_\varepsilon$ ,  $\|\mathbf{b}^\downarrow - \mathbf{b}_\varepsilon^\downarrow\|^2 = \varepsilon$ .  $\square$

En el trabajo [18] es definida la  $d$ -irregularidad de una sucesión de la siguiente manera

**Definición 3.0.9.** Sea  $\mathbf{a} = (a_i)_{i=1}^m$  una sucesión decreciente de números positivos y  $d \in \mathbb{N}$  con  $d \leq m$ . La  $d$ -irregularidad de  $\mathbf{a}$ , notada  $r_d(\mathbf{a}) \in \mathbb{N}$ , es definida como

$$r_d(\mathbf{a}) = \max \left\{ 1 \leq j \leq d-1 : (d-j)a_j > \sum_{i=j+1}^m a_i \right\}$$

si el conjunto de la derecha es no vacío, y  $r_d(\mathbf{a}) = 0$  en caso contrario.

En particular se tiene que:

1.  $(d-j)a_j \leq \sum_{i=j+1}^m a_i$ , para  $r_d(\mathbf{a}) < j \leq d$ .
2. Si  $r_d(\mathbf{a}) > 0$ ,  $(d-j)a_j > \sum_{i=j+1}^m a_i$ , para todo  $1 \leq j \leq r_d(\mathbf{a})$ .

Para probar la segunda de las afirmaciones (la primera es obvia de la definición), basta notar que, si  $1 \leq j \leq m-1$  es tal que  $(d-j)a_j \leq \sum_{i=j+1}^m a_i$ , entonces

$$(d-(j+1))a_{j+1} \leq (d-j)a_j - a_{j+1} \leq \sum_{i=j+1}^m a_i,$$

con lo que  $(d-(j+1))a_{j+1} \leq \sum_{i=(j+1)+1}^m a_i$ .

**Proposición 3.0.10.** Sea  $0 < d \leq m$  y  $\mathbf{a} = (a_i)_{i=1}^m$  una sucesión decreciente de números positivos con  $d$ -irregularidad  $r = r_d(\mathbf{a})$ . Consideremos el conjunto

$$\mathcal{P}(\mathbf{a}) = \left\{ \mathbf{b} \in (\mathbb{R}^+)^d : \sum_{i=1}^k b_i^\downarrow \geq \sum_{i=1}^k a_i \text{ para } 1 \leq k \leq d \text{ y } \sum_{i=1}^d b_i = \sum_{i=1}^m a_i \right\}.$$

Sea  $\mathbf{v} = (a_1, \dots, a_r, \overbrace{c, \dots, c}^{d-r})$ , donde  $c = (d-r)^{-1} \sum_{j=r+1}^m a_j$ . Entonces  $\mathbf{v} \in \mathcal{P}(\mathbf{a})$  y, para todo  $\mathbf{b} \in \mathcal{P}(\mathbf{a})$ ,  $\mathbf{b} \succ \mathbf{v}$ . Además, si  $\mathbf{b} \in \mathcal{P}(\mathbf{a})$  y  $\mathbf{b}^\downarrow \neq \mathbf{v}$ , entonces, para todo  $0 < \varepsilon$  suficientemente pequeño, existe  $\mathbf{b}_\varepsilon \in \mathcal{P}(\mathbf{a})$  tal que  $\mathbf{b}_\varepsilon^\downarrow \neq \mathbf{b}^\downarrow$ ,  $\mathbf{b} \succ \mathbf{b}_\varepsilon$  y  $\|\mathbf{b}^\downarrow - \mathbf{b}_\varepsilon^\downarrow\| \leq \varepsilon$ .

*Demostración.* Por los comentarios posteriores a la Definición 3.0.9,  $\mathbf{v} = \mathbf{v}^\downarrow$ . Primero, veamos que  $\mathbf{v} \in \mathcal{P}(\mathbf{a})$ . Notemos que  $\sum_{j=1}^k a_j = \sum_{j=1}^k v_j$  para  $1 \leq j \leq r$ . Por otro lado,

$$a_{r+1}(d-r) - a_{r+1} = a_{r+1}(d-(r+1)) \leq \sum_{j=r+2}^m a_j \Rightarrow a_{r+1} \leq (d-r)^{-1} \sum_{j=r+1}^m a_j.$$

Por lo tanto,  $c \geq a_{r+1} \geq a_j$  para todo  $r+1 \leq j \leq m$ . Entonces, para  $r+1 \leq k \leq d$  se tiene que

$$\sum_{j=1}^k v_j = \sum_{j=1}^r a_j + \sum_{j=r+1}^k c_j \geq \sum_{j=1}^k a_j.$$

Dado que  $\sum_{j=1}^d v_j = \sum_{j=1}^m a_j$  se concluye que  $\mathbf{v} \in \mathcal{P}(\mathbf{a})$ . Sea  $\mathbf{b} = (b_i)_{i=1}^d \in \mathcal{P}(\mathbf{a})$  y, sin pérdida de generalidad, supongamos que  $\mathbf{b} = \mathbf{b}^\downarrow$ . Entonces, claramente  $\sum_{j=1}^k v_j \leq \sum_{j=1}^k b_j$  para todo  $1 \leq k \leq r$ . Sea  $\alpha = \sum_{j=1}^r b_j - \sum_{j=1}^r a_j \geq 0$ . Entonces

$$\left( \sum_{j=1}^r b_j - \sum_{j=1}^r a_j \right) + \sum_{j=r+1}^d b_j = \sum_{j=r+1}^m a_j \Rightarrow \sum_{j=r+1}^d (b_j + (d-r)^{-1}\alpha) = \sum_{j=r+1}^m a_j \quad (3.2)$$

que implica, por la Proposición 3.0.8, que  $(c)_{i=r+1}^d \prec ((d-r)^{-1}\alpha + b_i)_{i=r+1}^d \in \mathbb{R}^{d-r}$ . Entonces, para todo  $r+1 \leq k \leq d$  se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k b_j &= \sum_{j=1}^r b_j - \sum_{j=r+1}^k (d-r)^{-1}\alpha + \sum_{j=r+1}^k (b_j + (d-r)^{-1}\alpha) \\ &\geq \sum_{j=1}^r b_j - \alpha + \sum_{j=r+1}^k c_j = \sum_{j=1}^r a_j + \sum_{j=r+1}^k c_j = \sum_{j=1}^k v_j. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\sum_{j=1}^d b_j = \sum_{j=1}^m a_j = \sum_{j=1}^d v_j$$

por lo que se concluye que  $\mathbf{v} \prec \mathbf{b}$ . Para la segunda parte, sea  $\mathbf{b} \in \mathcal{P}(\mathbf{a})$ ,  $\mathbf{b}^\downarrow \neq \mathbf{v}$ . Como antes, podemos suponer que  $\mathbf{b} = \mathbf{b}^\downarrow$ .

Veamos que existe  $j$ ,  $1 \leq j \leq d-1$  tal que  $b_j > b_{j+1}$  y  $\sum_{i=1}^j b_i > \sum_{i=1}^j a_i$ .

Es claro que para algún  $1 \leq k \leq d-1$ ,  $b_k > b_{k+1}$ , dado que si esto no es cierto,  $b_i = b_1$  para todo  $i$  lo que implicaría  $\mathbf{b} = \mathbf{v}$  (la  $d$ -irregularidad de  $a$  sería entonces 0). Notemos por  $b_{t_1} \geq b_{t_2} \geq \dots \geq b_{t_m}$  las entradas de  $\mathbf{b}$  que satisfacen  $b_{t_n} > b_{t_{n+1}}$ .

Supongamos que para todo  $t_n$ ,  $\sum_{i=1}^{t_n} b_i = \sum_{i=1}^{t_n} a_i$ . Entonces, dado que por hipótesis  $kb_1 = \sum_{i=1}^k b_i \geq \sum_{i=1}^k a_i$  para todo  $k \leq t_1$ , se tiene que  $a_i = b_1 = b_i$  para todo  $i \leq t_1$ . Por el mismo razonamiento,  $a_i = b_{t_1+1} = b_i$  para todo  $t_1+1 \leq i \leq t_2$ . Finalmente, se tiene que  $a_i = b_i$  para todo  $1 \leq i \leq t_m$ , mas aún,  $b_k = (d-t_m)^{-1} \sum_{i=t_m+1}^m a_i$  para  $t_m+1 \leq k$ . La definición de irregularidad de  $\mathbf{a}$  implica que  $t_m \leq r$  (de otro modo, las entradas de  $\mathbf{b}$  no estaría ordenado en forma decreciente), pero si  $t_m \leq r-1$ , entonces, por los comentarios que siguen a la Definición 3.0.9,

$$a_{t_m+1} > (d - (t_m + 1))^{-1} \sum_{i=t_m+2}^m a_i,$$

que implica que  $a_{t_m+1} > (d - t_m)^{-1} \sum_{i=t_m+1}^m a_i = b_{t_m+1}$ , lo que contradice  $\mathbf{b} \in \mathcal{P}(\mathbf{a})$ . El único caso posible es  $t_m = r$ , pero en este caso,  $\mathbf{b} = \mathbf{v}$ , que contradice las hipótesis en  $\mathbf{b}$ .

Dado  $1 \leq j \leq d - 1$  tal que  $b_j > b_{j+1}$  y  $\sum_{i=1}^j b_i > \sum_{i=1}^j a_i$ , sea  $\varepsilon$  tal que  $b_j - \varepsilon/\sqrt{2} \geq b_{j+1} + \varepsilon/\sqrt{2}$  y  $\sum_{i=1}^j b_i - \varepsilon/\sqrt{2} \geq \sum_{i=1}^j a_i$ . Notemos por  $\mathbf{b}_\varepsilon$  al vector  $\mathbf{b} - \varepsilon/\sqrt{2} \mathbf{e}_j + \varepsilon/\sqrt{2} \mathbf{e}_{j+1}$ . Es fácil ver que entonces  $\mathbf{b}_\varepsilon$  satisface las propiedades del enunciado.  $\square$

**Observación 3.0.11.** Notemos que la prueba de la Proposición anterior muestra que el único vector  $\mathbf{b}$  en  $\mathcal{P}(\mathbf{a})$  tal que:  $\mathbf{b}^\downarrow = (a_1, a_2, \dots, a_k, c, \dots, c)$  es  $\mathbf{v}$ .

### 3.1. Funcionales convexas definidas en operadores de marco.

En esta sección definiremos una familia de funcionales  $P_\phi$  definidas en el conjunto de operadores de marco de sucesiones  $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^m$  en  $\mathbb{C}^d$ , a partir de una función convexa  $\phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ .

Cuando nos restringimos a una clase particular de sucesiones, concretamente, aquellas sucesiones cuyos elementos tienen normas prescritas de antemano, podemos calcular el mínimo que toma  $P_\phi$  en el correspondiente conjunto de operadores de marco y además caracterizar el espectro de los minimizadores de  $P_\phi$ , para cualquier función creciente y convexa  $\phi$ , que además satisface  $\phi(0) = 0$ .

**Definición 3.1.1.** Sea  $\phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  una función creciente y convexa. Entonces notamos por  $P_\phi$ , a la función definida en el conjunto de operadores de marco de sucesiones en  $\mathbb{C}^d$  dada por

$$P_\phi(S^\mathcal{F}) = \text{tr}(\phi(S^\mathcal{F})) \tag{3.3}$$

para todo  $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^m \subset \mathbb{C}^d$ . En particular, si notamos por  $\lambda = (\lambda_i)_{i=1}^d$  a los autovalores de  $S^\mathcal{F}$  contados con multiplicidad, entonces  $P_\phi(S^\mathcal{F}) = \sum_{i=1}^d \phi(\lambda_i)$ .

**Observación 3.1.2.** Usando la relación entre  $G^\mathcal{F}$  y  $S^\mathcal{F}$  establecida en la Proposición 1.5.2, tenemos que

$$\text{tr}(\phi(G^\mathcal{F})) = P_\phi(S^\mathcal{F}) + (m - d)\phi(0).$$

**Ejemplo 3.1.3** (Potencial de marco). Sea  $\phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  la función estrictamente convexa  $\phi(x) = x^2$ . Entonces

$$P_\phi(S^\mathcal{F}) = \text{tr}((S^\mathcal{F})^2) = \text{tr}((G^\mathcal{F})^2) = \sum_{i,j=1}^m |\langle f_i, f_j \rangle|^2, \tag{3.4}$$

y así obtenemos el potencial de marco.

En lo que sigue, para  $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^m \subset \mathbb{C}^d$  y  $\alpha \in \mathbb{C}$  notamos por  $\alpha\mathcal{F} = \{\alpha f_i\}_{i=1}^m$ .

**Teorema 3.1.4.** *Sea  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  una función creciente y convexa y  $\mathcal{F}_1 = \{f_i\}_{i=1}^{M_1}$ ,  $\mathcal{F}_2 = \{g_i\}_{i=1}^{M_2} \subset \mathbb{C}^d$ .*

1. *Si  $S^{\mathcal{F}_1} \prec S^{\mathcal{F}_2}$  entonces*

$$P_\phi(S^{\mathcal{F}_1}) \leq P_\phi(S^{\mathcal{F}_2}).$$

2. *Supongamos que además  $f$  es estrictamente convexa, y  $P_\phi(S^{\mathcal{F}_1}) = P_\phi(S^{\mathcal{F}_2})$ . Entonces, existe un unitario  $U \in \mathcal{U}(d)$  tal que*

$$US^{\mathcal{F}_1}U^* = S^{\mathcal{F}_2}.$$

3. *Si  $t \in [0, 1]$  y  $\mathcal{G} = t^{1/2}\mathcal{F}_1 \cup (1-t)^{1/2}\mathcal{F}_2$  entonces*

$$P_\phi(S^{\mathcal{G}}) \leq tP_\phi(S^{\mathcal{F}_1}) + (1-t)P_\phi(S^{\mathcal{F}_2}).$$

4. *Si  $\mathcal{G} = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$  entonces*

$$P_\phi(S^{\mathcal{G}}) \geq P_\phi(S^{\mathcal{F}_1}) + P_\phi(S^{\mathcal{F}_2}).$$

*Demostración.* Los primeros dos items ya fueron mencionados en el Teorema 1.2.2. Las últimas dos son bien conocidas (ver [3, Teorema 1-24]).  $\square$

**Observación 3.1.5.** Para  $\psi = -\phi$ ,  $P_\psi(S) = \text{tr}(\psi(S))$  para  $S \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})^+$  son los funcionales “entrópicos” definidos en [3]. De este modo, minimizar a  $P_\phi$  equivale a maximizar el funcional entrópico  $P_\psi$ .

Sea  $c > 0$  y  $\mathbf{a} = \{a_i\}_{i=1}^m$  una sucesión decreciente de números positivos. En lo que sigue, consideraremos los siguientes conjuntos:

$$\mathcal{A}(c) := \{\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^m \subset \mathbb{C}^d, \sum_{i=1}^m \|f_i\|^2 = \text{tr}(S^{\mathcal{F}}) = c\},$$

$$\mathcal{B}(\mathbf{a}) := \{\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^m \subset \mathbb{C}^d, \|f_i\|^2 = a_i \text{ para todo } i\}.$$

Notemos que, por el Teorema 1.5.4, el conjunto de operadores de marco para sucesiones en  $\mathcal{A}(c)$  y  $\mathcal{B}(\mathbf{a})$  pueden ser bien caracterizados:

$$\mathcal{T}(c) := \{S^{\mathcal{F}}, \mathcal{F} \in \mathcal{A}(c)\} = \{S \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})^+, \lambda(S) \in \mathcal{K}(c)\}. \quad (3.5)$$

$$\mathcal{R}(\mathbf{a}) := \{S^{\mathcal{F}}, \mathcal{F} \in \mathcal{B}(\mathbf{a})\} = \{S \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})^+, \lambda(S) \in \mathcal{P}(\mathbf{a})\}. \quad (3.6)$$

**Teorema 3.1.6.** *Sea  $\phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  una función creciente y convexa y sea  $P_\phi$  la función asociada a  $\phi$  y sea  $c > 0$ . Entonces, si  $\mathcal{F} \in \mathcal{A}(c)$  es un marco ajustado,*

$$P_\phi(S^\mathcal{F}) \leq P_\phi(S^\mathcal{G}) \quad \forall S^\mathcal{G} \in \mathcal{T}(c).$$

*Además, si  $\phi$  es estrictamente convexa y  $S^\mathcal{F}$  es un mínimo local para  $P_\phi$  (considerando la norma de operadores en  $\mathcal{T}(c)$ ), entonces  $S^\mathcal{F} = \frac{c}{d} Id$ , lo que implica que  $\mathcal{F}$  es un marco ajustado.*

*Demostración.* La prueba se deduce inmediatamente de la Proposición 3.0.8. De hecho,  $S^\mathcal{F} \in \mathcal{T}(c)$  es un mínimo global para  $P_\phi$  si y sólo si  $\lambda(S^\mathcal{F}) = \mathbf{v}$ , i.e.  $S^\mathcal{F} = \frac{c}{d} Id$ , lo que implica que  $\mathcal{F}$  es un marco ajustado en  $\mathcal{A}(c)$ . Por otro lado, si  $\lambda = \lambda(S^\mathcal{F}) \neq \mathbf{v}$ , entonces por la Proposición 3.0.8 para cada  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño, existe  $\lambda_\varepsilon \in \mathcal{K}(c)$  tal que  $\lambda_\varepsilon \prec \lambda$ ,  $\lambda^\downarrow \neq \lambda_\varepsilon^\downarrow$  y  $\|\lambda - \lambda_\varepsilon\| < \varepsilon$ . Entonces, si  $S^\mathcal{F} = U^* \text{diag}(\lambda)U$  con  $U$  unitario, es claro que  $S_\varepsilon = U^* \text{diag}(\lambda_\varepsilon)U \in \mathcal{T}(c)$  satisface  $\|S^\mathcal{F} - S_\varepsilon\| < \varepsilon$  y  $P_\phi(S_\varepsilon) < P_\phi(S^\mathcal{F})$ , por el Teorema 3.1.4. □

**Teorema 3.1.7.** *Sea  $\phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  creciente y convexa y  $P_\phi$  la función asociada a  $\phi$ . Sea  $\mathbf{a} = (a_i)_{i=1}^m$  una sucesión decreciente de números positivos, con  $d \leq m$ . Supongamos que  $\mathcal{F} \in \mathcal{B}(\mathbf{a})$  es de la forma*

$$\{\sqrt{a_i} e_i\}_{i=1}^r \cup \{f_i\}_{i=r+1}^m \quad (3.7)$$

*donde  $\{e_i\}_{i=1}^d$  es una base ortonormal de  $\mathbb{C}^d$ ,  $r$  es la  $d$ -irregularidad de  $\mathbf{a}$  y  $\{f_i\}_{i=r+1}^m$  es un marco ajustado para  $\text{span}\{e_i\}_{i=r+1}^d$  con cota de marco  $c = (d-r)^{-1} \sum_{i \geq r+1} a_i$ .*

*Entonces,  $S^\mathcal{F}$  es un mínimo global para  $P_\phi$  en  $\mathcal{R}(\mathbf{a})$ . Más aún, si  $\phi$  es estrictamente convexa y  $S^\mathcal{F}$  es un mínimo local para  $P_\phi$  en  $\mathcal{R}(\mathbf{a})$  (considerando la norma de operadores), entonces  $\mathcal{F}$  es como en (3.7).*

*Demostración.* Sea  $\mathcal{F} \in \mathcal{B}(\mathbf{a})$  de la forma dada en (3.7). Entonces, el espectro (ordenado) del operador de marco  $S^\mathcal{F}$  es  $\mathbf{v} = (a_1, \dots, a_r, c, \dots, c)$  donde  $c = (d-r)^{-1} \sum_{i \geq r+1} a_i$  es un autovalor con multiplicidad  $d-r$ . Entonces, por la Proposición 3.0.10 y el Teorema 3.1.4, podemos concluir que  $\mathcal{F}$  es un mínimo global en  $\mathcal{B}(\mathbf{a})$ .

Supongamos ahora que  $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i=1}^m \in \mathcal{B}(\mathbf{a})$  es tal que  $\lambda(S^\mathcal{G}) = \mathbf{v}$ . Entonces, la cota de marco superior (óptima) de  $\mathcal{G}$  es  $a_1$  y tenemos que

$$\|g_1\|^4 + \sum_{j>1} |\langle g_j, g_1 \rangle|^2 \leq a_1 \|g_1\|^2 = \|g_1\|^4$$

Por lo tanto,  $g_1$  es ortogonal a  $g_j$  para  $j \neq 1$ . Restringiéndonos a  $\text{span}\{g_i\}_{i=2}^m$ , deducimos que  $\langle g_2, g_i \rangle = 0$  para  $i \neq 2$  del mismo modo. Por lo tanto, podemos concluir que  $\langle g_i, g_j \rangle = 0$  para  $1 \leq i \leq r$ ,  $j \neq i$ , en particular, podemos definir el conjunto ortonormal  $e_i = a_i^{-1/2} \psi_i$  para  $1 \leq i \leq r$ , que completamos a  $\{e_i\}_{i=1}^d$ .

Finalmente, dado que el operador de marco, restringido al complemento ortogonal del espacio generado por  $\{e_i\}_{i=1}^r$  es un múltiplo de la identidad, el resto del marco es un marco ajustado de este complemento. Entonces  $\mathcal{G}$  es de la forma descrita en (3.7).

Sea  $S^{\mathcal{F}} \in \mathcal{R}(\mathbf{a})$  tal que  $\lambda(S^{\mathcal{F}})$  no es  $\mathbf{v} \in \mathcal{P}(\mathbf{a})$ . Por lo tanto, por la Proposición 3.0.10 y argumentando como en el Teorema 3.1.6, dado  $\varepsilon > 0$ , podemos encontrar un operador positivo  $S_\varepsilon \in \mathcal{R}(\mathbf{a})$  tal que  $\|S_\varepsilon - S^{\mathcal{F}}\| < \varepsilon$ ,  $\lambda(S_\varepsilon) \neq \lambda(S^{\mathcal{F}})$  y  $S_\varepsilon \prec S^{\mathcal{F}}$ . Entonces  $P_\phi(S_\varepsilon) < P_\phi(S^{\mathcal{F}})$  para toda función  $\phi$  estrictamente convexa, por el Teorema 3.1.4. En particular, todo mínimo local de  $P_\phi$  en  $\mathcal{R}(\mathbf{a})$  es un mínimo global, por lo que es el operador de marco de un marco de la forma dada en (3.7).  $\square$

**Corolario 3.1.8.** *Sea  $\phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  una función creciente y convexa. Se tienen las siguientes desigualdades:*

Si  $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^m \in \mathcal{A}(c)$ ,

$$(d-1) \cdot \phi(0) + \phi(c) \geq P_\phi(S^{\mathcal{F}}) \geq d \cdot \phi\left(\frac{c}{d}\right). \quad (3.8)$$

Y, para  $\mathcal{F} \in \mathcal{B}(\mathbf{a})$  se tiene

$$(d-1) \cdot \phi(0) + \phi\left(\sum_{i=1}^m a_i\right) \geq P_\phi(S^{\mathcal{F}}) \geq \sum_{i=1}^r \phi(a_i) + (d-r) \cdot \phi(h), \quad (3.9)$$

con  $h = (d-r)^{-1} \sum_{i \geq r+1} a_i$ . Además, si  $\phi$  es además estrictamente convexa y la cota inferior es alcanzada en (3.8) (respectivamente en (3.9)) entonces  $\mathcal{F}$  es un marco ajustado (respectivamente como en (3.7) para cierta base ortonormal  $\{e_i\}_{i=1}^d$  de  $\mathbb{C}^d$ ).

### 3.1.1. Algunas aplicaciones de los resultados anteriores.

El primer ejemplo que presentaremos es el antes mencionado potencial de Benedetto-Fickus o potencial de marco.

**Ejemplo 3.1.9** (continuación del ejemplo 3.1.3). Sea  $f(x) = x^2$  y notemos que, por la ecuación (3.4), si  $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^m \in \mathcal{A}(c)$  entonces

$$P_\phi(S^{\mathcal{F}}) = \sum_{i,j=1}^m |\langle f_i, f_j \rangle|^2.$$

Así, la ecuación (3.9) implica

$$1 \geq \frac{\sum_{i=1}^m |\langle f_i, f_j \rangle|^2}{\left(\sum_{i=1}^m \|f_i\|^2\right)^2} \geq d \cdot \frac{1}{d^2} = \frac{1}{d} \quad (3.10)$$

que es la *desigualdad de Welch general* (ver [55]). Además, por el Teorema 3.1.8 la cota inferior (resp. la cota superior) en la ecuación (3.10) se alcanza si y sólo si  $\mathcal{F}$  es un marco ajustado con constante  $\frac{c}{d}$  (resp. si y sólo si  $\text{span}(\mathcal{F})$  tiene dimensión 1).

**Ejemplo 3.1.10** ( potencial de marco  $n$ -ésimo). Sea  $n \geq 2$  y consideremos  $\phi_n(x) = x^n$  para  $x \geq 0$ . Entonces,  $\phi_n$  es creciente y estrictamente convexa y produce el *potencial de marco  $n$ -ésimo* dado por

$$P_n(S^{\mathcal{F}}) = \text{tr}((S^{\mathcal{F}})^n)$$

donde  $S^{\mathcal{F}}$  es el operador de marco para  $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i \in m} \subset \mathbb{C}^d$ . Dado que  $\phi_n(0) = 0$  entonces se tiene que

$$P_n(\{f_i\}_{i=1}^m) = \text{tr}((G^{\mathcal{F}})^n) = \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^m \prod_{j=1}^n \langle f_{i_j}, f_{i_{j+1}} \rangle, \quad (3.11)$$

donde definimos  $i_{n+1} = i_1$ . Notemos que  $P_2$  es el potencial de marco usual. De hecho, la fórmula (3.11) se deduce de la identidad

$$\langle (G^{\mathcal{F}})^n e_k, e_k \rangle = \sum_{\substack{i_2, \dots, i_n=1 \\ i_1=k}}^m \prod_{j=1}^n \langle f_{i_j}, f_{i_{j+1}} \rangle \geq 0. \quad (3.12)$$

Por lo tanto, usando (3.11), la ecuación (3.9) implica

$$1 \geq \frac{\sum_{i_1, \dots, i_n=1}^m \prod_{j=1}^n \langle f_{i_j}, f_{i_{j+1}} \rangle}{(\sum_{i=1}^m \|f_i\|^2)^n} \geq \frac{1}{d^{n-1}}, \quad (3.13)$$

mientras que (3.12) implica

$$\max_{1 \leq k \leq m} \sum_{\substack{i_2, \dots, i_n=1 \\ i_1=k}}^m \prod_{j=1}^n \langle f_{i_j}, f_{i_{j+1}} \rangle \geq \frac{(\sum_{i=1}^m \|f_i\|^2)^n}{m \cdot d}. \quad (3.14)$$

Como antes, la cota inferior en la fórmula (3.13) se alcanza si y sólo si  $\mathcal{F}$  es un marco ajustado con cota de marco  $\frac{c}{d}$ . De forma similar, la cota en la ecuación (3.14) se alcanza si y sólo si  $\mathcal{F}$  es un marco ajustado.

**Ejemplo 3.1.11** (Entropía de von Neumann.). Si consideramos la función cóncava  $\phi(x) = -x \ln(x)$ , entonces  $P_\phi$  restringido a matrices de densidad (esto es, positivas y de traza uno), se obtiene la entropía de von Neumann de la teoría de información cuántica. En cierto sentido, esta mide la falta de información sobre el estado de un sistema. Los teoremas 3.1.6 y 3.1.7 muestran, como caso particular, la estructura de los maximizadores de la entropía (dado que la función es cóncava y los teoremas se refieren a funciones convexas), sin restricciones en el primer caso y con la restricción  $\{S \text{ matriz de densidad con } (\lambda(S), 0_{m-d}) \succ \mathbf{a}\}$  para una sucesión de pesos  $\mathbf{a}$  con  $\sum_{i=1}^m a_i = 1$ , en el segundo.

## 3.2. Funcionales convexas en marcos GUC.

**Definición 3.2.1.** Sea  $\mathbf{G}$  un grupo abeliano finito de matrices unitarias en  $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ , y  $f \in \mathbb{C}^d$ . Si el conjunto de vectores  $\mathbf{G} \cdot f = \{Uf : U \in \mathbf{G}\}$  es un marco, entonces decimos que  $\mathbf{G} \cdot f$  es un **marco geoméricamente uniforme** (GU). Cuando hacemos actuar el grupo  $\mathbf{G}$  en un conjunto de vectores  $\mathcal{F} = \{f_i \in \mathbb{C}^d : 1 \leq i \leq m\}$  y  $\mathbf{G} \cdot \mathcal{F}$  es un marco, entonces decimos que es un **marco geoméricamente uniforme compuesto**.

Con el propósito de simplificar los cálculos, asumamos que  $\mathbf{G}$  es cíclico. Por lo tanto, tenemos que  $\mathbf{G} = \{U^i : 0 \leq i \leq n-1\}$  donde  $U$  es una matriz unitaria tal que  $U^n = Id$ . De este modo, consideraremos sucesiones marco de la forma  $\mathbf{G} \cdot \mathcal{F} = \{U^i f_j : 0 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq m\}$ .

### 3.2.1. Funcionales convexas sobre marcos GUC.

En esta sección estamos interesados en extender los resultados de las secciones previas al conjunto de marcos GUC. Es decir, minimizar  $P_\phi$  cuando la restringimos al conjunto de operadores de marcos de los marcos GUC:

$$\mathbf{G} \cdot \mathcal{B}(\mathbf{a}) = \{\mathbf{G} \cdot \mathcal{F} : \mathcal{F} \in \mathcal{B}(\mathbf{a})\},$$

donde  $\mathbf{G}$  es un grupo cíclico de unitarios y  $\mathbf{a}$  es un conjunto fijo de números positivos. Claramente  $\mathbf{G} \cdot \mathcal{B}(\mathbf{a}) \subset \mathcal{B}(\mathbf{b})$ , donde  $\mathbf{b} = \{b_i\}_{i=1}^{nM}$  es la sucesión  $\mathbf{a}$  repetida  $n$  veces. Entonces, por el Corolario 3.1.8, si  $\mathcal{F} \in \mathbf{G} \cdot \mathcal{B}(\mathbf{a})$ ,

$$P_\phi(S^\mathcal{F}) \geq \sum_{i=1}^r \phi(b_i) + (d-r) \cdot \phi(h), \quad (3.15)$$

donde  $h = (d-r)^{-1} \sum_{i=r+1}^{nM} b_i$  y  $r$  es la  $d$ -irregularidad de  $\mathbf{b}$ . La desigualdad (3.15) puede establecerse en términos de  $\mathbf{a}$  si uno caracteriza adecuadamente la  $d$ -irregularidad de  $\mathbf{b}$ :

**Proposición 3.2.2.** Sea  $\mathbf{a} = (a_i)_{i=1}^m$  una sucesión decreciente de números positivos y sea  $\mathbf{b} = (b_i)_{i=1}^{nM}$  una sucesión dada por:

$$b_j = a_i \quad \text{para} \quad j = (i-1)n + s, \quad 1 \leq s \leq n, \quad 1 \leq i \leq m.$$

Entonces, si  $r_0$  es la  $d$ -irregularidad de  $\mathbf{b}$ , se tiene que  $r_0 = nr$ , donde

$$r := \text{máx}\left\{j : \left(\frac{d}{n} - j\right) a_j > \sum_{k=j+1}^m a_k\right\}.$$

*Demostración.* El enunciado es trivial si  $r_0 = 0$ . Si  $r_0 \neq 0$ , entonces se tiene que  $n$  divide a  $r_0$ . Esto es pues, por definición de  $r_0$ ,  $b_{r_0} \neq b_{r_0+1}$  y ésto sólo puede ocurrir si  $r_0 = nr$ ,  $r \in \{1, \dots, m\}$ .

Finalmente,

$$r_0 = \max\{nj : (d - nj) b_{nj} > \sum_{k=nj+1}^{nM} b_k\} = n \max\{j : (\frac{d}{n} - j) a_j > \sum_{k=j+1}^m a_k\}.$$

□

**Teorema 3.2.3.** *Sea  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{a}$  y  $\mathcal{B}(\mathbf{a})$  como antes. Supongamos que  $n|d$  y que existe una familia ortonormal  $\{e_i\}_{i=1}^N$ , con  $N = \frac{d}{n}$  tal que el conjunto  $\{U^k e_j : 1 \leq k \leq n, 1 \leq j \leq N\}$  es una base ortonormal de  $\mathbb{C}^d$ . Sea  $\mathcal{F}'$  en  $\mathcal{B}(\mathbf{a})$  de la forma*

$$\mathcal{F}' = \{\sqrt{a_i} b_i\}_{i=1}^r \cup \mathcal{D} \quad (3.16)$$

donde  $\mathcal{E} = \{b_i\}_{i=1}^r$  es un conjunto ortonormal tal que  $\mathbf{G} \cdot \mathcal{E}$  es ortonormal,  $r$  es la  $N$ -irregularidad de  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{G} \cdot \mathcal{D}$  es un marco ajustado para  $\text{span}(\mathbf{G} \cdot \mathcal{E})^\perp$  con cota de marco  $h = (N - r)^{-1} \sum_{k=r+1}^m a_k$ . Notemos por  $\mathcal{F} = \mathbf{G} \cdot \mathcal{F}' \in \mathbf{G} \cdot \mathcal{B}(\mathbf{a})$ .

Entonces  $S^{\mathcal{F}}$  es un mínimo global para  $P_\phi$  en el conjunto de operadores de marco de  $\mathbf{G} \cdot \mathcal{B}(\mathbf{a})$ . Además, si  $\phi$  es estrictamente convexa, y  $S^{\mathcal{F}}$  es un mínimo global para  $P_\phi$ , entonces  $\mathcal{F}$  es de la forma  $\mathbf{G} \cdot \mathcal{V}$ , con  $\mathcal{V}$  como en (3.16).

*Demostración.* Por el Teorema 3.1.7 y la Proposición 3.2.2 es claro que, si tal sucesión existe, entonces  $S^{\mathcal{F}}$  es un mínimo global en  $\mathcal{R}(\mathbf{b})$  (usando la notación de las secciones anteriores), entonces es un mínimo global cuando restringimos  $P_\phi$  al conjunto de operadores de marco de  $\mathbf{G} \cdot \mathcal{B}(\mathbf{a})$ . Mas aún, si  $\phi$  es estrictamente convexa, todo mínimo global tiene que ser de esta forma, por el Teorema 3.1.7.

Por lo tanto, para finalizar la prueba, debemos mostrar que tal sucesión existe. Consideremos la sucesión  $\mathcal{F}'$  dada por

$$\{\sqrt{a_i} e_i\}_{i=1}^r \cup \{f_i\}_{i=r+1}^m$$

donde  $\{e_i\}_{i=1}^N$  es el conjunto ortonormal que existe por hipótesis,  $r$  es la  $N$ -irregularidad de  $\mathbf{a}$  y  $\{f_i\}_{i=r+1}^m$  es un marco ajustado para  $\text{span}\{e_k\}_{k=r+1}^N$ , con cota de marco  $h = (N - r)^{-1} \sum_{k=r+1}^m a_k$ . Tal marco existe por el Teorema 3.1.7.

Claramente, para todo  $1 \leq k \leq n$ , el conjunto  $\{U^k f_i\}_{i=r+1}^m$  es un marco ajustado (con la misma cota  $h = (N - r)^{-1} \sum_{k=r+1}^m a_k$ ) para  $\text{span}\{U^k e_i\}_{i=r+1}^N$ , por lo tanto,  $\mathcal{D} = \mathbf{G} \cdot \{f_i\}_{i=r+1}^m$  es un marco ajustado para  $\text{span}(\mathbf{G} \cdot \mathcal{E})^\perp$  con cota de marco  $c = (N - r)^{-1} \sum_{k=r+1}^m a_k$ , donde  $\mathcal{E} = \{e_i\}_{i=1}^r$ .

□

**Observación 3.2.4.** Si además ponemos la condición de que los vectores iniciales  $\mathcal{F}$  pertenezcan al subespacio  $\frac{d}{n}$ -dimensional  $\mathcal{K}$  de  $\mathbb{C}^d$  generado por  $\{e_i\}_{i=1}^N$  ( $\frac{d}{n} = N$ ), entonces se tiene que los mínimos globales son de la forma dada en (3.16), donde  $r$  es la

$\frac{d}{n}$ -irregularidad de  $\mathbf{a}$  y  $\mathcal{D}$  es un marco ajustado para  $\mathcal{K} \cap (\text{span}\{b_i\}_{i=1}^r)^\perp$ . De hecho, en este caso, la matriz Grammiana de  $\mathbf{G} \cdot \mathcal{F}$  es diagonal a bloques.

Un caso especial de esta situación está dado por los marcos convolucionales estudiados en [36]. En particular, el Teorema anterior puede verse como una generalización parcial a [36, Teo. 6].

**Corolario 3.2.5.** *Bajo las hipótesis del Teorema 3.2.3, para  $\mathcal{F} \in \mathcal{B}(\mathbf{a})$  se tiene que*

$$(d-1) \cdot \phi(0) + \phi(n \cdot \sum_{i=1}^m a_i) \geq P_\phi(S^{\mathbf{G} \cdot \mathcal{F}}) \geq n \left\{ \sum_{i=1}^r \phi(a_i) + (d-r) \cdot \phi(h) \right\} \quad (3.17)$$

con  $h = (d-r)^{-1} \sum_{i \geq r+1} a_i$ . Mas aún, si además  $\phi$  es estrictamente convexa y la cota inferior en (3.17) se alcanza, entonces  $\mathcal{F}$  es de la forma dada en (3.16).

### 3.3. De operadores de marcos a marcos.

En las secciones previas, hemos considerado la función  $P_\phi$  asociada una función convexa  $\phi$  como función de los operadores de marco; así, hemos descripto la estructura de los minimizadores locales de  $P_\phi$  cuando nos restringimos a los conjuntos  $\mathcal{T}(c)$  y  $\mathcal{R}(\mathbf{a})$  provistos de la topología dada por la norma de operadores.

En esta sección nos proponemos considerar a la función  $P_\phi$  definida directamente en el conjunto de marcos:

$$P_\phi(\mathcal{F}) := P_\phi(S^{\mathcal{F}}) = \text{tr}(\phi(S^{\mathcal{F}}))$$

para  $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^m \subset \mathbb{C}^d$ , y así estudiar la estructura de los mínimos globales y locales de estos funcionales cuando nos restringimos a los conjuntos  $\mathcal{A}(c)$  y  $\mathcal{B}(\mathbf{a})$ , considerando la topología en  $\underbrace{\mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^d \times \dots \times \mathbb{C}^d}_{m \text{ veces}}$  dada por la distancia:

$$d(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \max_{1 \leq i \leq m} \|f_i - g_i\| \quad (3.18)$$

para sucesiones  $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^m$ ,  $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i=1}^m$ .

Es importante notar que la distancia (en norma) entre los operadores de marco no acota la distancia entre los marcos; de hecho, si  $\sigma$  es una permutación de orden  $m$  y  $\mathcal{G} = \{f_{\sigma(i)}\}_{i=1}^m$  entonces  $S^{\mathcal{F}} = S^{\mathcal{G}}$  mientras que posiblemente  $d(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \neq 0$ . Esto implica que los resultados anteriores no pueden emplearse para obtener una caracterización completa de los mínimos locales en este nuevo enfoque.

El estudio de este problema involucra la existencia de secciones locales para la aplicación  $\mathcal{F} \mapsto S^{\mathcal{F}}$  cuando está restringida a los conjuntos  $\mathcal{A}(c)$  y  $\mathcal{B}(\mathbf{a})$ .

El Teorema 3.1.6 implica que si una sucesión  $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^m \in \mathcal{A}(c)$  no tiene la estructura de mínimo local (global) de  $P_\phi$  en  $\mathcal{T}(c)$ , para  $\phi$  una función estrictamente convexa, entonces para todo  $\varepsilon > 0$ , existe un operador  $S \in \mathcal{T}(c)$  tal que  $\|S - S^{\mathcal{F}}\| \leq \varepsilon$  y  $P_\phi(S) < P_\phi(S^{\mathcal{F}})$ .

Por lo tanto, para mostrar que  $\mathcal{F}$  no es un mínimo local de  $P_\phi$  en  $\mathcal{A}(c)$ , considerando la distancia entre marcos, se tiene que considerar el siguiente problema: para tal  $S$ , ¿existe alguna sucesión  $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i=1}^m \in \mathcal{A}(c)$  tal que  $S^{\mathcal{G}} = S$  y  $d(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \leq \delta(\varepsilon)$  con  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta(\varepsilon) = 0$ ?

Una respuesta positiva se da en la siguiente

**Proposición 3.3.1.** *Dado  $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^m \in \mathcal{A}(c)$ , sea  $S \in \mathcal{T}(c)$  tal que  $\|S - S^{\mathcal{F}}\| < \varepsilon$ . Entonces existe  $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i=1}^m \in \mathcal{A}(c)$  tal que  $d(\mathcal{F}, \mathcal{G}) < \varepsilon^{1/2}$  y  $S^{\mathcal{G}} = S$ .*

*Demostración.* Consideremos la descomposición polar de  $T^{\mathcal{F}}$ ,  $T^{\mathcal{F}} = (S^{\mathcal{F}})^{1/2}W$ . Entonces, dado que

$$\|S - S^{\mathcal{F}}\| < \varepsilon, \quad \|S^{1/2} - (S^{\mathcal{F}})^{1/2}\| < \varepsilon^{1/2} \text{ por [11, Teo. X.1.1].}$$

Ahora, sea  $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i=1}^m$ , donde  $g_i = S^{1/2}W e_i$  para  $1 \leq i \leq m$ . Entonces  $T^{\mathcal{G}} = S^{1/2}W$ ,  $S^{\mathcal{G}} = T^{\mathcal{G}}(T^{\mathcal{G}})^* = S$  y, para  $1 \leq i \leq m$ ,

$$\|g_i - f_i\| \leq \|T^{\mathcal{G}} - T^{\mathcal{F}}\| \leq \|S^{1/2} - (S^{\mathcal{F}})^{1/2}\| < \varepsilon^{1/2}.$$

□

El resultado previo, en conjunto con el Teorema 3.1.6 provee de una caracterización completa de los mínimos locales (globales) de  $P_\phi$  en  $\mathcal{A}(c)$  con respecto a la distancia entre marcos, para una función estrictamente convexa  $\phi$ .

**Teorema 3.3.2.** *Sea  $\phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  una función creciente y convexa. Si  $\mathcal{F} \in \mathcal{A}(c)$  es un marco ajustado, entonces es un mínimo global de  $P_\phi$  en  $\mathcal{A}(c)$ . Más aún, si  $\phi$  es estrictamente convexa, entonces todo mínimo local de  $P_\phi$  en  $\mathcal{A}(c)$  con respecto a la distancia entre marcos es un marco ajustado.*

*Demostración.* La primer parte del enunciado se deduce del Teorema 3.1.6 y (3.5). Por la prueba de 3.1.6, si  $\mathcal{F} \in \mathcal{A}(c)$  no es ajustado, entonces para todo  $\varepsilon > 0$ , existe un  $S_\varepsilon \in \mathcal{T}(c)$  tal que  $\|S^{\mathcal{F}} - S_\varepsilon\| < \varepsilon^2$  y  $P_\phi(S_\varepsilon) < P_\phi(S^{\mathcal{F}})$ .

Finalmente, por la Proposición 3.3.1, existe  $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i=1}^m \in \mathcal{A}(c)$  tal que  $S^{\mathcal{G}} = S_\varepsilon$  y  $\|f_i - g_i\| < \varepsilon$ . □

Como antes, si queremos obtener una caracterización de los minimizadores locales de  $P_\phi$  en  $\mathcal{B}(\mathbf{a})$  con respecto a la distancia entre marcos, usando el Teorema 3.1.7, nos vemos obligados a considerar el siguiente problema de perturbación:

Dada una sucesión  $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^m \in \mathcal{B}(\mathbf{a})$  y  $S \in \mathcal{R}(\mathbf{a})$  con  $\|S^{\mathcal{F}} - S\| \leq \varepsilon$ , ¿existe una sucesión  $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i=1}^m \in \mathcal{B}(\mathbf{a})$  con  $S^{\mathcal{G}} = S$  y  $d(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \leq \delta(\varepsilon)$  con  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta(\varepsilon) = 0$ ?

La restricción  $\mathcal{G} \in \mathcal{B}(\mathbf{a})$  le confiere dificultad al problema. Dicho sea de paso, notemos que no tenemos control sobre las normas de los vectores en el  $\mathcal{G}$  construido en la Proposición 3.3.1.

Asimismo, resulta conveniente trabajar con el operador grammiano, dado que la restricción  $\mathcal{G} \in \mathcal{B}(\mathbf{a})$  es equivalente a  $d(G^{\mathcal{G}}) = \mathbf{a}$ , donde  $d(X) \in \mathbb{C}^m$  denota la diagonal principal de la matriz de  $m \times m$   $X$ .

En este sentido, hemos obtenido sólo resultados parciales, expuestos en la siguiente Proposición, cuya prueba depende de aspectos geométricos y será desarrollada en la siguiente sección.

**Teorema 3.3.3.** *Sea  $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^m \subseteq \mathbb{C}^d$  un marco con  $S = S^{\mathcal{F}}$  su operador de marco supongamos además que  $\mathcal{F}$  no puede partitionarse en dos conjuntos mutuamente ortogonales. Sea  $\{S_i\}_i \subseteq \mathcal{M}_d(\mathbb{C})^+$  una sucesión convergente a  $S$ , con  $\text{tr}(S_i) = \text{tr}(S)$ ,  $\forall i$ . Entonces, dado  $\eta > 0$  existe  $i_1 \in \mathbb{N}$  tal que, para cada  $i \geq i_1$  existe un marco  $\mathcal{G}(i) = \mathcal{G} = \{g_j\}_{j=1}^m$  tal que:*

1.  $\|g_j\| = \|f_j\|$  para  $1 \leq j \leq m$ .
2.  $\|g_j - f_j\| \leq \eta$  para  $1 \leq j \leq m$ .
3.  $S^{\mathcal{G}} = S_i$ .

**Teorema 3.3.4.** *Sea  $\phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  una función creciente y convexa. Si  $\mathcal{F} \in \mathcal{B}(\mathbf{a})$  tiene la estructura descrita en (3.7) entonces es un mínimo global para  $P_\phi$  en  $\mathcal{B}(\mathbf{a})$ .*

*Si además suponemos que  $\phi$  es una función estrictamente convexa, entonces todo mínimo global de  $P_\phi$  en  $\mathcal{B}(\mathbf{a})$  es de la forma (3.7). Además, toda sucesión  $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^m \in \mathcal{B}(\mathbf{a})$  que no pueda partitionarse en dos conjuntos mutuamente ortogonales es un mínimo local si y sólo si es un mínimo global de  $P_\phi$ .*

*Demostración.* La primer parte del Teorema se tiene inmediatamente del Teorema 3.1.7 y (3.6)

Supongamos ahora que  $\mathcal{F}$  no es un mínimo global; por la prueba del Teorema 3.1.7, existe una sucesión de operadores  $\{S_n\}$  tal que  $S_n$  converge a  $S^{\mathcal{F}}$  y tal que  $P_\phi(S_n) < P_\phi(S^{\mathcal{F}})$ ,  $\forall n$ .

Sea  $\varepsilon > 0$ , entonces, por el Teorema 3.3.3, para un  $n_0 \in \mathbb{N}$  suficientemente grande, existe un marco  $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i=1}^m \in \mathcal{B}(\mathbf{a})$  tal que  $\|f_i - g_i\| < \varepsilon$  y  $S^{\mathcal{G}} = S_{n_0}$ . En particular,  $P_\phi(\mathcal{G}) < P_\phi(\mathcal{F})$ .  $\square$

Supongamos ahora que  $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^m \in \mathbb{C}^d$  es tal que  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ , con los vectores de  $\mathcal{F}_1 = \{g_i\}_{i=1}^{m_1}$  ortogonales a los de  $\mathcal{F}_2 = \{h_i\}_{i=1}^{m_2}$  (que denotaremos por  $\mathcal{F}_1 \perp \mathcal{F}_2$ ). En este caso, la matriz gramiana de  $\mathcal{F}$ , después de ordenar adecuadamente a los vectores en  $\mathcal{F}$ , es diagonal a bloques, con dos bloques correspondientes a las submatrices gramianas de  $\mathcal{F}_1$  y  $\mathcal{F}_2$ . Entonces, claramente

$$\text{tr}(\phi(G^{\mathcal{F}})) = \text{tr}(\phi(G^{\mathcal{F}_1})) + \text{tr}(\phi(G^{\mathcal{F}_2})).$$

Además, como se vio en la Observación 3.1.2,  $P_\phi(S^{\mathcal{F}}) = \text{tr}(\phi(G^{\mathcal{F}})) - (m - d)\phi(0)$ .

Haciendo un cambio de bases adecuado en  $\mathbb{C}^d$ , podemos suponer que  $\mathbb{C}^d = \mathbb{C}^k \oplus \mathbb{C}^{d-k}$ , de modo que  $\mathcal{F}_1$  y  $\mathcal{F}_2$  generan  $\mathbb{C}^k \oplus \{0\}$  y  $\{0\} \oplus \mathbb{C}^{d-k}$  respectivamente.

Por lo tanto, restringiéndonos a sus subespacios generados, tenemos que  $\mathcal{F}_1$  es un marco para  $\mathbb{C}^k$  y  $\mathcal{F}_2$  es un marco para  $\mathbb{C}^{d-k}$ . En ese caso, la Observación 3.1.2 implica que:

$$P_\phi(\mathcal{F}_1) = P_\phi(S^{\mathcal{F}_1}) = \text{tr}(\phi(G^{\mathcal{F}_1}) - (m_1 - k)\phi(0)),$$

y

$$P_\phi(\mathcal{F}_2) = P_\phi(S^{\mathcal{F}_2}) = \text{tr}(\phi(G^{\mathcal{F}_2}) - (m_2 - (d - k))\phi(0)).$$

Por lo tanto, se tiene que  $P_\phi(\mathcal{F}) = P_\phi(\mathcal{F}_1) + P_\phi(\mathcal{F}_2)$ .

Es importante notar que estamos considerando a  $P_\phi$  con dominios diferentes cuando la evaluamos en  $\mathcal{F}_1$  y en  $\mathcal{F}_2$ : en el primer caso, la evaluamos en un marco para  $\mathbb{C}^k$  mientras que en el segundo en un marco para  $\mathbb{C}^{d-k}$ . El valor difiere del que hubiésemos obtenido si consideráramos a  $\mathcal{F}_1$  y  $\mathcal{F}_2$  como sucesiones de Bessel para  $\mathbb{C}^d$ , salvo que  $\phi(0) = 0$ , dado que lo que cambia en cada situación es la cantidad de veces que sumamos  $\phi(0)$ .

Estas observaciones permiten entonces deducir el siguiente Corolario:

**Corolario 3.3.5.** *Sea  $\mathcal{F} \in \mathcal{B}(\mathbf{a})$  tal que  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$  con  $\mathcal{F}_1 = \{f_i\}_{i=1}^{m_1} \perp \mathcal{F}_2 = \{h_i\}_{i=1}^{m_2}$ , y supongamos que  $\mathcal{F}_1$  no puede partitionarse en dos sucesiones mutuamente ortogonales, y además, no es un mínimo global de  $P_\phi$  restringido al conjunto*

$$\mathcal{B}(\mathbf{a}_1) = \{\{g_i\}_{i=1}^{m_1} : g_i \in \text{span } \mathcal{F}_1, \|g_i\| = \|f_i\| \quad 1 \leq i \leq m_1\}.$$

Entonces,  $\mathcal{F}$  no es un mínimo local de  $P_\phi$ .

*Demostración.* Por el Teorema 3.3.4, aplicado a  $\mathcal{F}_1$  y a  $\mathcal{B}(\mathbf{a}_1)$ , se deduce que  $\mathcal{F}_1$  no es un mínimo local para  $P_\phi$  en  $\mathcal{B}(\mathbf{a}_1)$ . En particular, a partir de un  $\varepsilon_0$  suficientemente pequeño, dado  $\varepsilon < \varepsilon_0$  existe un marco  $\mathcal{F}_1^\varepsilon \in \mathcal{B}(\mathbf{a}_1)$  con  $d(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_1^\varepsilon) < \varepsilon$  y  $P_\phi(\mathcal{F}_1^\varepsilon) < P_\phi(\mathcal{F}_1)$ .

Sea  $\mathcal{F}_\varepsilon = \mathcal{F}_1^\varepsilon \cup \mathcal{F}_2$ , es claro que  $d(\mathcal{F}, \mathcal{F}_\varepsilon) < \varepsilon$  y además, por lo mencionado anteriormente:

$$P_\phi(\mathcal{F}_\varepsilon) = P_\phi(\mathcal{F}_1^\varepsilon) + P_\phi(\mathcal{F}_2) < P_\phi(\mathcal{F}_1) + P_\phi(\mathcal{F}_2) = P_\phi(\mathcal{F}),$$

con lo cual,  $\mathcal{F}$  no es un mínimo global para  $P_\phi$  en  $\mathcal{B}(\mathbf{a})$ . □

La caracterización de los mínimos globales para  $P_\phi$  dada en el Teorema 3.3.4 implica que éstos están formados por conjuntos de vectores que generan subespacios ortogonales de  $\mathbb{C}^d$ , salvo que los mínimos globales sean marcos ajustados que no puedan partitionarse en conjuntos mutuamente ortogonales de vectores. Por lo tanto, del Corolario anterior, se puede deducir la siguiente caracterización de los mínimos locales para  $P_\phi$ :

**Proposición 3.3.6.** *Sea  $\mathcal{F} \in \mathcal{B}(\mathbf{a})$  un mínimo local para  $P_\phi$ , entonces:*

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cup \dots \cup \mathcal{F}_k,$$

con  $\mathcal{F}_i \perp \mathcal{F}_j$ , para  $i \neq j$ , y cada  $\mathcal{F}_j$  es un marco ajustado en  $\text{span } \mathcal{F}_j$ .

En particular, los vectores de  $\mathcal{F}$  son autovectores de  $S^\mathcal{F}$ .

Notemos que la estructura general para los mínimos locales para una función arbitraria  $P_\phi$  (con  $\phi$  creciente y estrictamente convexa) no puede ser deducida del Teorema 3.3.4 y el Corolario 3.3.5. Sin embargo, como quedará explícito mas adelante, estos resultados permiten reducir el estudio de posibles mínimos locales a un caso particular de marcos (ver Problema  $(\star)$ ). A modo de ejemplo, podemos recuperar el resultado [18, Teo. 10] que caracteriza los minimizadores en el caso particular del potencial de marco.

**Teorema 3.3.7.** *Todo minimizador local  $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^m$  del potencial de marco en  $\mathcal{B}(\mathbf{a})$  con respecto a la distancia  $d(\cdot, \cdot)$  es un mínimo global, y por lo tanto, tiene la estructura dada en (3.7).*

*Demostración.* Supongamos que tenemos un marco  $\mathcal{F} \in \mathcal{B}(\mathbf{a})$  que no es un mínimo global para el potencial de marco PM. Debemos mostrar que entonces no es un mínimo local.

Sea  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cup \dots \cup \mathcal{F}_k$  su descomposición minimal en subconjuntos dos a dos ortogonales (minimal en el sentido que ningún  $\mathcal{F}_j$  puede ser particionado en dos subconjuntos mutuamente ortogonales). Por el Corolario 3.3.5, si existe un  $1 \leq i \leq k$  tal que  $\mathcal{F}_i$  no es un mínimo global para FP (restringido a  $\mathcal{B}(\mathbf{a}_i)$ ), entonces  $\mathcal{F}$  no puede ser un mínimo local.

Por lo tanto, podemos suponer que cada  $\mathcal{F}_i$  es un mínimo global en  $\mathcal{B}(\mathbf{a}_i)$ . Entonces, por el Teorema 3.1.7, y dado que la partición es minimal, cada  $\mathcal{F}_i$  es un marco ajustado en el espacio que genera (posiblemente con un sólo vector), con cota de marco  $c_i$ , para  $1 \leq i \leq k$ .

Entonces, es claro que debe existir al menos un par  $i, j$  tal que el marco  $\mathcal{F}_i \cup \mathcal{F}_j$  no es un mínimo global para FP en el espacio generado por  $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$  y con las restricciones en las normas dadas por las normas de los vectores en  $\mathcal{F}_i$ ,  $i = 1, 2$ .

Por otro lado, por la Observación 3.0.11, dado que  $\mathcal{F}_i \cup \mathcal{F}_j$  no es un mínimo global, tenemos que, si  $c_j < c_i$ , entonces  $\mathcal{F}_i$  es linealmente dependiente.

Entonces, como se deduce de la prueba del Claim 3 en la demostración del [18, Teo. 10], dado  $\varepsilon > 0$  existe una sucesión  $\mathcal{F}(\varepsilon)$  tal que  $d(\mathcal{F}_i \cup \mathcal{F}_j, \mathcal{F}(\varepsilon)) \leq \varepsilon$  y  $\text{FP}(\mathcal{F}(\varepsilon)) < \text{FP}(\mathcal{F})$ . Por lo tanto,  $\mathcal{F}$  no es un mínimo local de FP en  $\mathcal{B}(\mathbf{a})$ .  $\square$

Analizando la prueba anterior, se deduce que una completa caracterización de los mínimos locales para toda función  $P_\phi$  en  $\mathcal{B}(\mathbf{a})$  depende del siguiente problema:

**Problema $(\star)$ :** sea  $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^m = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \in \mathcal{B}(\mathbf{a})$  tal que  $\mathcal{F}_1 \perp \mathcal{F}_2$  y  $\mathcal{F}_i$  es un marco ajustado en el espacio que genera. Supongamos que  $\mathcal{F}$  no es un mínimo global de  $P_\phi$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , existe un marco  $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i=1}^m \in \mathcal{B}(\mathbf{a})$  tal que  $\|f_i - g_i\| < \varepsilon, \forall i$  y  $P_\phi(\mathcal{G}) < P_\phi(\mathcal{F})$ ?

## 3.4. Perturbaciones de marcos - Prueba del Teorema 3.3.3

En esta sección consideraremos el grupo de Lie de matrices unitarias de  $m \times m$ ,  $\mathcal{U}(m)$ . Dado  $U \in \mathcal{U}(m)$ , tenemos que su espacio tangente

$$\mathcal{T}_U \mathcal{U}(m) = \{X \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C}) : U^* X \in i \cdot \mathcal{M}_m(\mathbb{C})^{sa}\}$$

al que identificaremos con el espacio de matrices anti-hermitianas  $\mathcal{T}_{Id} \mathcal{U}(m) = i \cdot \mathcal{M}_m(\mathbb{C})^{sa}$  of  $m \times m$ , via el isomorfismo isométrico  $X \mapsto U^* X$ . Dado  $G \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})^+$ , consideramos la aplicación suave  $\Psi_G : \mathcal{U}(m) \rightarrow \mathcal{U}_m(G)$  dada por  $\Psi_G(U) = U^* G U$ . Bajo las identificación de los espacios tangentes, mencionada previamente, es fácil ver que el diferencial de  $\Psi_G$  en un punto  $U \in \mathcal{U}(m)$  y en la dirección dada por  $X \in i \cdot \mathcal{M}_m(\mathbb{C})^{sa}$  está dada por

$$(D\Psi_G)_U(X) = [X, U^* G U]. \quad (3.19)$$

Como es bien sabido, el diferencial  $(D\Psi_G)_U$  es un epimorfismo en cada  $U \in \mathcal{U}(m)$  y por lo tanto, (3.19) nos da una descripción del espacio tangente a la variedad  $\mathcal{U}_m(G)$  en un punto  $U^* G U$ .

Sea  $\Delta(G) = \{x \in \mathbb{R}^m : \sum_{i=1}^m x_i = \text{tr}(G)\}$  y consideremos  $\Phi_G : \mathcal{U}(m) \rightarrow \Delta(G)$  dado por  $\Phi_G(U) = d(U^* G U)$ , donde  $d(A) \in \mathbb{R}^m$  es la diagonal principal de la matriz  $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$ . Notemos que  $\Delta(G)$  es una subvariedad de  $\mathbb{R}^m$  con tangente en  $x \in \Delta(G)$

$$\mathcal{T}_x \Delta(G) = \{y \in \mathbb{R}^m : \sum_{i=1}^m y_i = 0\}.$$

Mediante (3.19), obtenemos (identificando como antes los tangentes a  $\mathcal{U}(m)$ ) que el diferencial de  $\Phi_G$  en un punto  $U \in \mathcal{U}(m)$  en la dirección de  $X \in i \cdot \mathcal{M}_m(\mathbb{C})^{sa}$  es

$$(D\Phi_G)_U(X) = d([X, U^* G U]). \quad (3.20)$$

Nuestro primer paso es estudiar la existencia de secciones locales de la aplicación  $\Phi_G$  alrededor de la identidad  $Id \in \mathcal{U}(m)$ . Dado que la aplicación  $\Phi_G$  es suave, la existencia de secciones locales de  $\Phi_G$  es equivalente a la suryectividad de su diferencial  $(D\Phi_G)_{Id}$  alrededor de la identidad.

Fijemos primero algo de notación: recordemos que notamos por  $\mathbb{I}_m$  al conjunto ordenado  $(1, 2, \dots, m)$ . Sea  $\{e_i\}_{i \in \mathbb{I}_m}$  la base ortonormal canónica en  $\mathbb{C}^m$ , para  $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{I}_m$  definimos  $P_{\mathcal{I}}$  como la proyección ortogonal al espacio generado por  $\{e_i : i \in \mathcal{I}\}$ . Finalmente, por  $B_\delta(x)$  nos referiremos a una bola centrada en  $x$  con radio  $\delta$ , en la métrica dada por el contexto.

El siguiente resultado, que caracteriza la existencia de secciones locales, es parte del Paso 1 en [48].

**Lema 3.4.1.** *Sea  $G \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})^+$  con  $d(G) = \mathbf{a}$  y consideremos  $\Phi_G$  como antes. Entonces, el diferencial  $(D\Phi_G)_{Id} : i \cdot \mathcal{M}_m(\mathbb{C})^{sa} \rightarrow \mathcal{T}_{\mathbf{a}}\Delta(G)$  es suryectivo, y por lo tanto  $\Phi_G$  es abierta en  $\Delta(G)$ , si para  $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{I}_m$  tal que  $P_{\mathcal{I}}G = GP_{\mathcal{I}}$  entonces  $\mathcal{I} = \mathbb{I}_m$  o  $\mathcal{I} = \emptyset$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $(D\Phi_G)_{Id}$  no es suryectiva. Entonces, existe  $0 \neq x \in \mathcal{T}_{\mathbf{a}}\Delta(G)$  que es ortogonal a la imagen de  $(D\Phi_G)_{Id}$ . Sea  $D$  la matriz diagonal cuya diagonal principal está dada por  $x \in \mathbb{R}^m$ . Usando (3.20) tenemos que

$$0 = \langle d([X, G]), x \rangle = \text{tr}([X, G]D) = \text{tr}(X[G, D]), \quad \forall X \in i \cdot \mathcal{M}_m(\mathbb{C})^{sa}. \quad (3.21)$$

Dado que  $[G, D]$  es anti-hermitiana,  $[G, D] = 0$  y por lo tanto  $G$  y  $D$  conmutan. Si hacemos  $\mathcal{I} = \{i : x_i > 0\}$  podemos deducir, dado que  $P_{\mathcal{I}}$  es un polinomio en  $D$ , que  $[G, P_{\mathcal{I}}] = 0$ . Notemos que  $\mathcal{I} \neq \emptyset$  y  $\mathcal{I} \neq \mathbb{I}_m$  dado que  $\sum_{i=1}^m x_i = 0$ .  $\square$

**Lema 3.4.2.** *Asumamos que la aplicación  $\Phi := \Phi_G$ , definida como antes para  $G \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})^+$ , tiene secciones locales alrededor de la identidad. Sea  $\{G_i\}_i \subseteq \mathcal{M}_m(\mathbb{C})^+$  una sucesión convergente a  $G$  tal que  $\text{tr}(G_i) = \text{tr}(G) \forall i$ , y para  $i \in \mathbb{N}$  sea  $\Phi_i := \Phi_{G_i}$  definido como antes.*

*Entonces, existe  $\delta > 0$  y  $i_0 \in \mathbb{N}$  tal que, para  $i \geq i_0$*

$$B_{\delta}(Id) \cap \mathcal{U}(m) = \mathcal{S} + \mathcal{K}_i$$

*donde  $\mathcal{S}$  y  $\mathcal{K}_i$  son subvariedades con  $Id = (Id_{\mathcal{S}}, Id_{\mathcal{K}_i})$  y*

$$\Phi_i|_{\mathcal{S}} : \mathcal{S} \rightarrow \Phi_i(\mathcal{S}), \quad \Phi|_{\mathcal{S}} : \mathcal{S} \rightarrow \Phi(\mathcal{S})$$

*son difeomorfismos.*

*Demostración.* La condición  $\text{tr}(G_i) = \text{tr}(G)$  asegura que todas las  $\Phi_i$  son, como  $\Phi$ , funciones de  $\mathcal{U}(m)$  a  $\Delta(G)$ . Notemos además que las  $\Phi_i$  convergen uniformemente a  $\Phi$  dado que

$$\Phi_i(U) - \Phi(U) = d(U^*(G_i - G)U). \quad (3.22)$$

Por otro lado, hay convergencia uniforme a nivel de los diferenciales de esas transformaciones. De hecho, bajo la adecuada identificación de los espacios tangentes a  $\mathcal{U}(m)$  podemos aplicar (3.20) y obtenemos

$$\|(D\Phi)_U(X) - (D\Phi_i)_U(X)\| = \|d([X, U^*(G - G_i)U])\| \leq 2\sqrt{m} \|X\| \|G - G_i\|. \quad (3.23)$$

donde  $X \in i \cdot \mathcal{M}_m(\mathbb{C})^{sa}$  es arbitrario.

Consideremos ahora  $\Gamma : W \rightarrow B_{\delta_1}(Id) \cap \mathcal{U}(m)$  una carta local, donde  $W \subseteq \mathbb{R}^p$  es un conjunto abierto que contiene al 0 con  $\Gamma(0) = Id$ . Sea  $\Phi \circ \Gamma : W \rightarrow \Delta(G)$  y notemos que  $(D(\Phi \circ \Gamma))_0 : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathcal{T}_{\mathbf{a}}\Delta(G)$  es suryectivo. Por continuidad, podemos asumir que  $(D(\Phi \circ$

$\Gamma)_x$  es suryectivo para todo  $x \in W$ . Además, la proyección ortogonal  $Q_x$  sobre  $(\ker(D(\Phi \circ \Gamma)_x))^\perp$  es continua en  $W$ . De hecho, en este caso tenemos que  $Q_x = D_x^*(D_x D_x^*)^{-1} D_x$  dado que  $D_x := (D(\Phi \circ \Gamma))_x$  es suryectivo en  $W$ . Por continuidad de las proyecciones  $Q_x$  podemos asumir, sin pérdida de generalidad que  $\|Q_0(1 - Q_x)\| \leq 1/4$  para todo  $x \in W$ .

Tomando  $0 < \delta \leq \delta_1$  y usando la convergencia uniforme de los diferenciales (3.23), podemos asegurar que existe un  $i_1 \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $i \geq i_1$  entonces  $(D(\Phi_i \circ \Gamma))_x$  es suryectivo para todo  $x \in W$ . Si  $Q_{x,i}$  denota la proyección ortogonal sobre  $(\ker(D(\Phi_i \circ \Gamma))_x)^\perp$  entonces, usando la descripción previa de  $Q_{x,i}$  se tiene que para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $i(\varepsilon)$  tal que  $\|Q_{x,i} - Q_x\| \leq \varepsilon$  para  $i \geq i(\varepsilon)$  y para todo  $x \in W$ . Sea  $i_2 = i(1/4) \in \mathbb{N}$ , entonces, si  $i_0 = \max\{i_1, i_2\}$ , tenemos que para todo  $x \in W$  y todo  $i \geq i_0$

$$\|Q_0(1 - Q_{x,i})\| \leq \|Q_0(Q_x - Q_{x,i})\| + \|Q_0(1 - Q_x)\| \leq 1/2$$

y por lo tanto,

$$(\ker(D(\Phi \circ \Gamma))_0)^\perp \cap \ker(D(\Phi_i \circ \Gamma))_x = \{0\}. \quad (3.24)$$

Definamos  $\mathcal{S} := \Gamma(\ker(D(\Phi \circ \Gamma))_0)^\perp \cap W$  y  $\mathcal{K} := \Gamma(\ker(D(\Phi \circ \Gamma))_0 \cap W)$ . Por (3.24)  $(D\Phi|_{\mathcal{S}})_x$  es inyectivo, y por argumentos de dimensión,  $(D\Phi|_{\mathcal{S}})_x$  es además suryectivo para todo  $x \in \mathcal{S}$ ; lo mismo podemos decir de  $\Phi_i$  para  $i \geq i_0$ , finalizando la prueba del lema.  $\square$

**Lema 3.4.3.** *Usando las notaciones del lema previo, sea  $\Gamma : W (= W^0 \subseteq \mathbb{R}^t) \rightarrow \mathcal{S}$  una carta local de  $\mathcal{S}$  con  $\Gamma(0) = Id_{\mathcal{S}}$  y sea  $V(r) := \Psi(B_r(0)) \subseteq \mathcal{S}$ , donde  $B_r(0) \subseteq A$ . Entonces, para tal  $r > 0$  existe  $\varepsilon > 0$  tal que, para  $i \geq i_0$*

$$B_\varepsilon(d(G_i)) \subseteq \Phi_i(V(r)). \quad (3.25)$$

*Demostración.* Fijado  $r$ , sea  $V = V(r)$ . Notemos que, para  $i \geq i_0$  entonces  $\Phi_i(Id_{\mathcal{S}}) = d(G_i)$  es un punto interior de  $\Phi_i(V)$ . Similarmente,  $\Phi(Id_{\mathcal{S}}) = d(G)$  es un punto interior de  $\Phi(V)$ . Mostraremos que existe  $\varepsilon > 0$  tal que, para todo  $i \geq i_0$  entonces

$$\inf_{x \in \partial\Phi_i(V)} \|d(G_i) - x\| = \min_{x \in \partial\Phi_i(V)} \|d(G_i) - x\| \geq \varepsilon \quad (3.26)$$

donde  $\partial\Phi_i(V)$  es la frontera de la imagen  $\Phi_i(V)$  en  $\Delta(G)$ . El lema es entonces consecuencia de la condición dada en (3.26).

De hecho, asumamos que (3.26) no es cierto. Entonces, existe una subsucesión  $(\Phi_{i_k})$  tal que

$$\inf_{x \in \partial\Phi_{i_k}(V)} \|d(G_{i_k}) - x\| = \|d(G_{i_k}) - x_k\| \leq \frac{1}{k} \quad (3.27)$$

para algún  $x_k = \Phi_{i_k}(U_k)$  con  $U_k \in \partial V \subseteq \mathcal{S}$  dado que  $\Phi_{i_k}(\partial V) = \partial\Phi_{i_k}(V) \subseteq \Delta$ . Pero entonces, para cada  $k \in \mathbb{N}$  y  $U_k \in \partial V$  tenemos que

$$\begin{aligned} \|d(G) - \Phi(U_k)\| &\leq \|d(G) - d(G_{i_k})\| + \|d(G_{i_k}) - \Phi_{i_k}(U_k)\| + \|\Phi_{i_k}(U_k) - \Phi(U_k)\| \\ &= \|d(G) - d(G_{i_k})\| + \|d(G_{i_k}) - x_k\| + \|\Phi_{i_k}(U_k) - \Phi(U_k)\| \xrightarrow[k]{} 0 \end{aligned}$$

por (3.27) y las convergencias  $d(G_{i_k}) \rightarrow d(G)$  y  $\Phi_{i_k}(U_k) \rightarrow \Phi(U_k)$ . Pero esto implica que  $d(G)$  no es un punto interior de  $\Phi(V)$  debido a que, en este caso,

$$\inf_{x \in \partial\Phi(V)} \|d(G) - x\| = \inf_{z \in \partial V} \|d(G) - \Phi(z)\| = 0$$

lo que contradice la suposición hecha a comienzos de la demostración.  $\square$

Una vez que tenemos asegurado una bola de radio uniforme en la imagen de cada entorno suficientemente pequeño de la identidad por todas las  $\Phi_i$ , podemos probar el Teorema 3.3.3. La clave es construir una sucesión adecuada de operadores  $G_i$  que converjan a  $G$ , con diagonales tan cerca como querramos de la diagonal de  $G$  (que tiene las normas prefijadas para los vectores). A partir de cierto  $i_0$  las diagonales  $d(G_i)$  estarán lo suficientemente cerca de  $d(G)$  como para poder hallar un unitario  $U$  cercano a  $Id$  tal que  $\Phi_i(U) = d(G)$ .

*Prueba del Teorema 3.3.3.* Notemos que decir que  $\mathcal{F}$  no puede partirse en dos conjuntos mutuamente ortogonales es equivalente a decir que su matriz Grammiana  $G$  no conmuta con ninguna proyección  $P_{\mathcal{I}}$ , con  $\mathcal{I}$  distinto de  $\mathbb{I}_m$  y  $\emptyset$ , por lo tanto, por el Lema 3.4.1, la función  $\Phi_G$  es abierta en  $\Delta(G)$ .

Sea  $T = T^{\mathcal{F}} : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^d$  el operador de marco de  $\mathcal{F}$  cuya descomposición polar está dada por  $T = |T^*| U' = S^{1/2} U'$  con  $U' : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^d$  co-isometría. Definamos  $G_i = (U')^* S_i U'$  y notemos que, por hipótesis,  $\|G_i - G\| \rightarrow 0$  y  $\text{tr}(G_i) = \text{tr}(G) \forall i$ .

Usando la notación introducida en los lemas previos, sea  $\Gamma : W (\subseteq \mathbb{R}^t) \rightarrow \mathcal{S}$  una carta local y  $r > 0$  suficientemente pequeño tal que  $B_r(0) \subseteq A$  y para  $U \in V(r) = \Gamma(B_r(0))$  entonces

$$\|U - Id\| \leq \frac{\eta}{2\|S^{1/2}\|}. \quad (3.28)$$

Para este  $r > 0$  sea  $\varepsilon > 0$  como en (3.25) a partir de cierto  $i_0 \in \mathbb{N}$ . Sea  $i_2 \in \mathbb{N}$  tal que, para  $i \geq i_2$  entonces  $\|S^{1/2} - S_i^{1/2}\| \leq \eta/2$  y  $\|G_i - G\| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$ .

Si ahora definimos  $i_1 = \max(i_0, i_2)$  entonces para  $i \geq i_1$  tenemos que

$$\|\Phi(Id) - \Phi_i(Id)\| = \|d(G - G_i)\| \leq \sqrt{m} \|G - G_i\| < \varepsilon \Rightarrow d(G) \in \Phi_i(V(r)). \quad (3.29)$$

Fijemos  $i \geq i_1$  y construyamos  $\mathcal{G} = \mathcal{G}(i)$  con las propiedades deseadas. Por el Lema 3.4.2 y (3.29) existe  $U \in V(r) \subseteq \mathcal{S}$  tal que  $\Phi_i(U) = d(G)$ .

Definimos  $\tilde{T} := S_i^{1/2} WU$ , y  $\mathcal{G} = \{g_j\}_{j=1}^m = \{\tilde{T}(e_j)\}_{j=1}^m$  donde  $\{e_j\}_{j=1}^m$  es la base canónica en  $\mathbb{C}^m$ . Dado que por construcción  $G^{\mathcal{G}} = U^* G_i U$  y  $S^{\mathcal{G}} = S_i$ , entonces los ítems (1) y (3) se cumplen. El ítem (2) se obtiene de la desigualdad

$$\|T - \tilde{T}\| = \|S^{1/2} U' - S_i^{1/2} U' U\| \leq \|S^{1/2} - S_i^{1/2}\| + \|S^{1/2}\| \|Id - U\| \leq \eta.$$

$\square$

**Observación 3.4.4.** El Teorema 3.3.3 es interesante en si mismo, dado que da mucha más generalidad de la que necesitamos en el estudio de los minimizadores locales. Notemos que, para probar el resultado sobre mínimos locales (Teo. 3.3.4), uno sólo necesita emplearlo para una sucesión especial  $S_n \rightarrow S$ , que se construye perturbando sólo dos autovalores de  $S$  usando la Proposición 3.0.10. Es decir, existe un  $1 \leq j \leq d$  tal que podemos hacer, para  $n$  suficientemente grande,  $\lambda_j - \frac{1}{n} > \lambda_{j+1} + \frac{1}{n}$ , y, perturbando de esa manera esos dos autovalores de  $S$ , obtener  $S_n$ . Es fácil ver que, si uno construye los  $G_n$  como en la prueba de 3.3.3, entonces los  $\Phi_n$  tienen una forma sencilla:

$$\Phi_n = \Phi + \frac{1}{n}\Phi_H, \quad (3.30)$$

donde  $H$  es una matriz fija (con dos autovalores no nulos: 1 y  $-1$ ).

Esta “linealidad” de la sucesión de  $\Phi_n$  permite dar una prueba diferente en este caso. De hecho, supongamos que, componiendo con las cartas adecuadas, las  $\Phi_n$  y  $\Phi$  son funciones diferenciables de  $\mathbb{R}^p$  en  $\mathbb{R}^l$ . Entonces, las hipótesis y lo dicho en la primer parte de la sección, nos dicen que  $(D\Phi)_0$  y  $(D\Phi_n)_0$  son suryectivas a partir de cierto  $n_0$ . Por el Teorema de la Función Implícita, para cada entorno  $U$  del 0 suficientemente pequeño,  $\Phi_n(U)$  y  $\Phi(U)$  contienen entornos de  $\Phi_n(0)$  y  $\Phi(0)$  respectivamente. El tamaño de esos entornos puede calcularse usando cotas de  $\|(D\Phi_n)_0\|$  y  $\|(D^2\Phi_n)_0\|$ , ( $\|(D\Phi)_0\|$  y  $\|(D^2\Phi)_0\|$  respectivamente) (ver [1, Proposición 2.5.6]).

Por (3.30), uno puede dar una cota uniforme para todas estas derivadas y derivadas segundas, y obtener así una bola centrada en  $\Phi_n(0)$  (resp.  $\Phi(0)$ ) de tamaño *uniforme* dentro de cada  $\Phi_n(U)$  (resp.  $\Phi(U)$ ). Una vez hecho esto, uno completa la demostración del Teorema 3.3.3, para este caso particular de sucesión, como se hizo anteriormente.

# Capítulo 4

## Marcos de Subespacios.

### 4.0.1. Introducción

La teoría referida a los marcos de subespacios es relativamente reciente. P. Casazza y G. Kutyniok definen en [22] los marcos de subespacios estudiando posibles construcciones de marcos “pegando” sucesiones marco (sucesiones que forman un marco en el espacio generado) en un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ . Como muestran Casazza y Kutyniok, tal construcción es posible si los subespacios que las sucesiones marco generan satisfacen (concretamente las proyecciones ortogonales a ellos) una desigualdad similar a la de los marcos de vectores, por los que los bautizan marcos de subespacios. Enfoques similares aparecen en los trabajos de M. Fornasier, [34, 35], el trabajo de A. Aldroubi, C.Cabrelli y U.Molter, [2] y el paper de G. Sun [54].

Los marcos de subespacios, resultan ser el modelo adecuado para representar los denominados *procesos distribuidos* en los que una señal se estudia en partes, utilizando marcos, para finalmente reconstruir la señal completa uniendo adecuadamente esos segmentos. El ejemplo que Casazza y Kutyniok usan para graficar una situación de esta índole es el de una red de sensores, por ejemplo tomando datos climáticos, distribuída a lo largo de un terreno extenso. Por cuestiones prácticas, por ejemplo para que la transmisión de datos tenga cierta robustez, los sensores presentan cierto nivel de redundancia, por lo que los podemos considerar como elementos de un marco. Por otro lado, los sensores se agrupan en subredes redundantes, por ejemplo, para prevenirse de que fallas en algún sensor o grupo de sensores afecte la información que provee la red completa. Por lo tanto, cada una de esas subredes es un submarco, y los subespacios generados forman un marco de subespacios. De forma similar, se puede simular el proceso neuronal tratando a grupos de neuronas como submarcos integrando una red neuronal mas grande.

Los marcos de subespacios, renombrados *marcos de fusión* a partir del trabajo de P. Casazza, G. Kutyniok y S. Li [24], comenzaron a estudiarse intensivamente en los últimos años. La publicación [24] es un complemento al estudio iniciado en [22]. Aquí los autores estudian técnicas de reconstrucción utilizando marcos de fusión en procesos distribuidos,

comparando reconstrucciones locales y globales. Asimismo, P. Casazza y G. Kutyniok estudian en [23] propiedades de robustez en marcos de fusión, cuando se considera la eliminación de subespacios o de vectores en alguno de los submarcos que integran el marco global.

Recientemente han aparecido además los trabajos de Bodmann, Kribs y Paulsen ([14]) y Bodmann ([13]) en donde se estudian marcos de fusión Parseval (bajo el nombre de *resolución ponderada proyectiva de la identidad*) para la transmisión de estados cuánticos.

El objetivo de este capítulo es estudiar la relación existente entre marcos de fusión y operadores suryectivos. Además, se generaliza el concepto de exceso de un marco de fusión con marcos que son “refinamientos” del marco de subespacios original. Al final del mismo, se proveen varios ejemplos en donde se evidencian algunas diferencias con los marcos de vectores.

Recordemos que, dado  $I$  un conjunto de índices numerable,  $\ell_+^\infty(I)$  es el espacio de sucesiones acotadas de números (estrictamente) positivos que serán considerados pesos de aquí en adelante. Teniendo en cuenta el producto coordenada a coordenada en  $\ell_+^\infty(I)$ , notaremos por  $\ell_+^\infty(I)^*$  a los elementos invertibles en  $\ell_+^\infty(I)$  y por  $\mathbf{e} \in \ell_+^\infty(I)^*$  al elemento neutro, es decir  $\mathbf{e}$  es la sucesión formada por unos.

## 4.0.2. Marcos y operadores

El propósito de esta sección es caracterizar marcos de subespacios como imágenes de bases ortonormales de subespacios por epimorfismos con ciertas propiedades.

**Definición 4.0.5.** Sea  $\mathcal{W}_{\mathbf{w}} = (w_i, W_i)_{i \in I}$  una sucesión de Bessel de subespacios de  $\mathcal{H}$ , con operador de síntesis  $T_{\mathcal{W}_{\mathbf{w}}}$ . El *exceso* de  $\mathcal{W}_{\mathbf{w}}$  es la dimensión del núcleo de  $T_{\mathcal{W}_{\mathbf{w}}}$ , esto es:  $E(\mathcal{W}_{\mathbf{w}}) = \dim N(T_{\mathcal{W}_{\mathbf{w}}})$ .

**Teorema 4.0.6.** Sea  $\{E_i\}_{i \in I}$  una base ortonormal de subespacios de  $\mathcal{K}$  y  $T \in L(\mathcal{K}, \mathcal{H})$  un epimorfismo. Supongamos que existen  $0 < A \leq B < \infty$  tal que, para todo  $i \in I$ ,

$$\frac{A}{B} \leq \frac{\gamma(TP_{E_i})^2}{\|TP_{E_i}\|^2} \quad \text{i.e., tal que} \quad \frac{\|TP_{E_i}\|^2}{B} \leq \frac{\gamma(TP_{E_i})^2}{A}. \quad (4.1)$$

Para cada  $i \in I$ , llamemos  $W_i = T(E_i) \subseteq \mathcal{H}$ . Sea  $\mathbf{w} = \{w_i\}_{i \in I} \in \ell_+^\infty(I)$  tal que

$$\frac{\|TP_{E_i}\|^2}{B} \leq w_i^2 \leq \frac{\gamma(TP_{E_i})^2}{A} \quad \text{para todo } i \in I. \quad (4.2)$$

Entonces:

1. La sucesión  $\mathcal{W}_{\mathbf{w}} = (w_i, W_i)_{i \in I}$  es un marco de subespacios para  $\mathcal{H}$ .
2. Además,  $\mathcal{W}_{\mathbf{w}}$  tiene cotas

$$\frac{\gamma(T)^2}{B} \leq A_{\mathcal{W}_{\mathbf{w}}} \quad \text{y} \quad B_{\mathcal{W}_{\mathbf{w}}} \leq \frac{\|T\|^2}{A}. \quad (4.3)$$

3. Si  $N(T) \cap E_i = \{0\}$  para todo  $i \in I$ , entonces  $E(\mathcal{W}_w) = \dim N(T)$ .

*Demostración.* Supongamos que (4.1) y (4.2) valen para todo  $i \in I$ .

1. Dado que  $\gamma(TP_{E_i}) > 0$ , entonces  $W_i = T(E_i)$  es cerrado para todo  $i \in I$ . Sea  $\{b_{ij}\}_{j \in J_i}$  una base ortonormal para cada  $E_i$ . Por la Proposición 1.11 y las ecuaciones (4.1) y (4.2), toda sucesión  $\mathcal{G}_i = \{w_i^{-1} T b_{ij}\}_{j \in J_i}$  es un marco para  $W_i$  con

$$A_{\mathcal{G}_i} = w_i^{-2} \gamma(TP_{E_i})^2 \geq A \quad \text{y} \quad B_{\mathcal{G}_i} = w_i^{-2} \|TP_{E_i}\|^2 \leq B.$$

Por otro lado, dado que  $\{b_{ij}\}_{i \in I, j \in J_i}$  es una base ortonormal para  $\mathcal{K}$ , y  $T$  un epimorfismo, la sucesión  $\mathcal{F} = \{T b_{ij}\}_{i \in I, j \in J_i}$  es un marco para  $\mathcal{H}$ .

Finalmente, dado que  $\mathcal{F} = \{w_i(w_i^{-1} T b_{ij})\}_{i \in I, j \in J_i} = \{w_i \mathcal{G}_i\}_{i \in I}$ , el Teorema 1.6.5 implica que  $\mathcal{W}_w$  es un marco de subespacios para  $\mathcal{H}$ .

2. La ecuación (4.3) se deduce de (1.26) y del hecho que  $A_{\mathcal{F}} = \gamma(T)^2$  y  $B_{\mathcal{F}} = \|T\|^2$ .
3. Supongamos que  $N(T) \cap E_i = \{0\}$  para todo  $i \in I$ .

Entonces  $N(TP_{E_i}) = E_i^\perp$  y por lo tanto  $\gamma(TP_{E_i}) \cdot \|z\| \leq \|TP_{E_i} z\|$  para todo  $z \in E_i$ .

Por la Ec. (4.2), para cada  $x \in \mathcal{K}$  y  $i \in I$ ,

$$A^{1/2} w_i \|P_{E_i} x\| \leq \gamma(TP_{E_i}) \|P_{E_i} x\| \leq \|TP_{E_i} x\| \leq B^{1/2} w_i \|P_{E_i} x\|.$$

Sea  $\mathcal{K}_{\mathcal{W}} = \sum_{i \in I} \bigoplus_{i \in I} W_i$  (el dominio de  $T_{\mathcal{W}_w}$ ). Definimos la aplicación

$$V : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}_{\mathcal{W}} \quad \text{dada por} \quad Vx = \left( w_i^{-1} T(P_{E_i} x) \right)_{i \in I}, \quad \text{para } x \in \mathcal{K}.$$

$V$  está bien definida dado que  $T(E_i) = W_i$  para todo  $i \in I$ . Además, dado  $x \in \mathcal{K}$ ,

$$\|V(x)\|^2 = \sum_{i \in I} w_i^{-2} \|TP_{E_i} x\|^2 \leq B \sum_{i \in I} \|P_{E_i} x\|^2 = B \|x\|^2,$$

y

$$A \|x\|^2 = A \sum_{i \in I} \|P_{E_i} x\|^2 \leq \|V(x)\|^2 = \sum_{i \in I} w_i^{-2} \|TP_{E_i} x\|^2,$$

por lo que  $V$  es acotada e invertible.

De la definición del operador de síntesis  $T_{\mathcal{W}_w}$ , y que  $x = \sum_{i \in I} P_{E_i} x$ , para todo  $x \in \mathcal{K}$ , podemos deducir que  $T_{\mathcal{W}_w} \circ V = T$ . Por lo tanto  $\dim N(T) = \dim V^{-1}(N(T_{\mathcal{W}_w})) = \dim N(T_{\mathcal{W}_w}) = E(\mathcal{W}_w)$ .

□

Como caso particular del Teorema anterior, se tiene al operador  $T_{\mathcal{W}_w} : \mathcal{K}_{\mathcal{W}} \rightarrow \mathcal{H}$ , eligiendo una base ortonormal de subespacios adecuada:

**Observación 4.0.7.** Si  $\mathcal{W}_w = (w_i, W_i)_{i \in I}$  es un marco de subespacios para  $\mathcal{H}$ . Notemos que entonces tenemos la base ortonormal de subespacios  $\{E_i\}_{i \in I}$  en  $\mathcal{K}_W$ , donde los  $E_i$  se definen como

$$E_i := \sum_{j \in I} \oplus \delta_{ij} W_j. \quad (4.4)$$

En particular tenemos  $\mathcal{K}_W = \bigoplus_{i \in I} E_i$ . Entonces el operador de síntesis  $T_{\mathcal{W}_w}$  satisface claramente la Ec. (4.1). Más aún, se tiene que  $T_{\mathcal{W}_w} g = w_i g_i$  para todo  $g = (g_i)_{i \in I} \in E_i$ , la copia isométrica de  $W_i$  en  $\mathcal{K}_W$ . Por lo tanto,  $\gamma(T_{\mathcal{W}_w} P_{E_i}) = \|T_{\mathcal{W}_w} P_{E_i}\| = w_i$  para todo  $i \in I$ .

Con las notaciones del Teorema 4.0.6, la condición  $\gamma(TP_{E_i}) > 0$  es necesaria (y suficiente) para que  $W_i = T(E_i) \subseteq \mathcal{H}$ . Podría esperarse que además sea suficiente para asegurar que  $\mathcal{W} = \{T(E_i)\}_{i \in I}$  es un marco de subespacios para alguna sucesión de pesos adecuada. Sin embargo, en el Ejemplo 4.4.1 se verá que existe un operador suryectivo  $T$  y una base ortonormal de subespacios  $\mathcal{E} = \{E_i\}_{i \in I}$  tal que  $\gamma(TP_{E_i}) > 0$  para todo  $i \in I$  pero  $\mathcal{W}_w$  no es un marco de subespacios para todo peso  $w \in \ell_+^\infty(I)$ . En este caso,  $T$  y  $\mathcal{E}$  no satisfacen la ecuación (4.1).

Por otro lado, (4.1) no es tampoco una condición necesaria que asegure que  $\mathcal{P}(\mathcal{W}) \neq \emptyset$  (ver la Definición 4.1.1), si  $\mathcal{W} = T\mathcal{E}$ . Notemos que la Ec. (4.1) depende de  $T$  y no de los subespacios  $TE_i$  (por supuesto, asumiendo que  $\gamma(TP_{E_i}) > 0$  para todo  $i \in I$ ). En el Ejemplo 4.4.2 se tiene un marco de subespacios que es la imagen por un epimorfismo de una base ortonormal de subespacios pero que no satisface la Ec.(4.1).

Parte del siguiente resultado aparece en los trabajos de P. Casazza, G. Kutyniok y S. Li [24] (Corolario 2.12), y de P. Gavruta [38] (Teorema 2.4). Daremos una nueva prueba de este resultado, utilizando el Teorema 4.0.6, que además nos permite dar información extra sobre los pesos y el exceso de  $G\mathcal{W}_w$ .

**Corolario 4.0.8.** Sea  $\mathcal{W}_w = (w_i, W_i)_{i \in I}$  un marco de subespacios para  $\mathcal{H}$ , y sea  $G \in L(\mathcal{H}, \mathcal{H}_1)$  invertible. Entonces  $G\mathcal{W}_w = (w_i, G(W_i))_{i \in I}$  es un marco de subespacios para  $\mathcal{H}_1$ , cuyas cotas satisfacen las desigualdades

$$(\|G\| \|G^{-1}\|)^{-2} A_{\mathcal{W}_w} \leq A_{G\mathcal{W}_w} \quad \text{y} \quad B_{G\mathcal{W}_w} \leq (\|G\| \|G^{-1}\|)^2 B_{\mathcal{W}_w}.$$

Además,  $E(\mathcal{W}_w) = E(G\mathcal{W}_w)$ .

*Demostración.* Notemos por  $E_i$  la copia de cada  $W_i$  en  $\mathcal{K}_W$  definidos como en (4.4).

Definimos  $T = GT_{\mathcal{W}_w} \in L(\mathcal{K}_W, \mathcal{H}_1)$ , que es claramente suryectivo (dado que lo es  $T_{\mathcal{W}_w}$ ). Por (1.3) y la Observación 4.0.7,

$$\gamma(TP_{E_i}) \geq \gamma(G) \cdot \gamma(T_{\mathcal{W}_w} P_{E_i}) = \gamma(G) w_i \quad \text{y} \quad \|TP_{E_i}\| \leq \|G\| \|T_{\mathcal{W}_w} P_{E_i}\| = \|G\| w_i,$$

para todo  $i \in I$ . En particular,  $T(E_i) \subseteq \mathcal{H}_1$ . Entonces, puede aplicarse el Teorema 4.0.6 para  $T$  con constantes  $A = \gamma(G)^2$  y  $B = \|G\|^2$ . De hecho, para cada  $i \in I$ , hemos visto

que

$$\frac{\gamma(G)^2}{\|G\|^2} \leq \frac{\gamma(TP_{E_i})^2}{\|TP_{E_i}\|^2} \quad \text{y} \quad \frac{\|TP_{E_i}\|^2}{\|G\|^2} \leq w_i^2 \leq \frac{\gamma(TP_{E_i})^2}{\gamma(G)^2}.$$

Por lo tanto,  $G\mathcal{W}_w = (w_i, GW_i)_{i \in I}$  es un marco de subespacios para  $\mathcal{H}_1$  por el Teorema 4.0.6. En cuanto a las cotas, por (1.3) e ítem 2 de la Observación 1.6.4 se tiene que

$$\gamma(GT_{\mathcal{W}_w}) \geq \gamma(G) \gamma(T_{\mathcal{W}_w}) = \|G^{-1}\|^{-1} A_{\mathcal{W}_w}^{1/2} \quad \text{y} \quad \|GT_{\mathcal{W}_w}\| \leq \|G\| \|T_{\mathcal{W}_w}\| = \|G\| B_{\mathcal{W}_w}^{1/2}.$$

Finalmente, aplicamos (4.3) del Teorema 4.0.6 con las constantes  $A = \|G^{-1}\|^{-2}$  y  $B = \|G\|^2$ . Es fácil ver que  $N(T) = N(T_{\mathcal{W}_w})$ . Entonces  $N(T) \cap E_i = \{0\}$  ( $i \in I$ ). Por el Teorema 4.0.6, deducimos que  $E(\mathcal{W}_w) = \dim N(T_{\mathcal{W}_w}) = \dim N(T) = E(G\mathcal{W}_w)$ .  $\square$

## 4.1. Pesos Admisibles.

El propósito de esta sección es estudiar, para una sucesión de subespacios cerrados  $\mathcal{W} = \{W_i\}_{i \in I}$  que genera  $\mathcal{H}$ , el conjunto de pesos  $\mathbf{w} \in \ell_+^\infty(I)$  tal que  $\mathcal{W}_w = (w_i, W_i)_{i \in I}$  sea un marco para  $\mathcal{H}$ .

Recordemos que  $\ell_+^\infty(I)^* = \{ \{w_i\}_{i \in I} \in \ell_+^\infty(I) : \inf_{i \in I} w_i > 0 \} = \ell_+^\infty(I) \cap Gl(\ell^\infty(I))$ .

### Definición 4.1.1.

1. Decimos que  $\mathcal{W} = \{W_i\}_{i \in I}$  es una sucesión *generadora* de  $\mathcal{H}$ , si  $W_i \sqsubseteq \mathcal{H}$  para todo  $i \in I$ , y  $\overline{\text{span}} \{W_i : i \in I\} = \mathcal{H}$ .
2. Sea  $\mathcal{W} = \{W_i\}_{i \in I}$  una sucesión generadora de  $\mathcal{H}$ . Definimos

$$\mathcal{P}(\mathcal{W}) = \{ \mathbf{w} \in \ell_+^\infty(I) : \mathcal{W}_w \text{ es un marco de subespacios para } \mathcal{H} \} \subseteq \ell_+^\infty(I),$$

el conjunto de pesos *admisibles* para  $\mathcal{W}$ .

Los Ejemplos 4.4.1 y 4.4.3 muestran que no basta que una sucesión  $\mathcal{W} = \{W_i\}_{i \in I}$  sea generadora para que  $\mathcal{P}(\mathcal{W}) = \emptyset$ .

**Proposición 4.1.2.** *Sea  $\mathcal{W} = \{W_i\}_{i \in I}$  una sucesión generadora de  $\mathcal{H}$ .*

1. Si  $\mathbf{w} \in \mathcal{P}(\mathcal{W})$ , entonces  $\mathbf{a}\mathbf{w} \in \mathcal{P}(\mathcal{W})$  y  $E(\mathcal{W}_w) = E(\mathcal{W}_{\mathbf{a}\mathbf{w}})$ , para todo  $\mathbf{a} \in \ell_+^\infty(I)^*$ .
2. Si  $\mathcal{W}_w$  es una base de Riesz de subespacios, para algún  $\mathbf{w} \in \ell_+^\infty(I)$ , entonces  $\mathcal{P}(\mathcal{W}) = \ell_+^\infty(I)^*$ , y además  $(\mathbf{a}, \mathcal{W})$  es una base de Riesz para todo  $\mathbf{a} \in \ell_+^\infty(I)^*$ . En particular,  $(\mathbf{e}, \mathcal{W})$  es una base de Riesz de subespacios.

3. Sea  $G \in Gl(\mathcal{H})$ . Entonces  $\mathcal{P}(\mathcal{W}) = \mathcal{P}(\{G(W_i)\}_{i \in I})$ . En otras palabras, un peso  $\mathbf{w} \in \ell_+^\infty(I)$  es admisible para  $\mathcal{W}$  si y sólo si es admisible para  $G\mathcal{W}$ .

*Demostración.* Sea  $\mathcal{K}_{\mathcal{W}} = \sum_{i \in I} \oplus W_i$ , como antes, notemos por  $E_i \sqsubseteq \mathcal{K}_{\mathcal{W}}$  la copia de cada  $W_i$  en  $\mathcal{K}_{\mathcal{W}}$ .

- Para cada  $\mathbf{a} \in \ell_+^\infty(I)^*$ , consideremos el límite en la topología fuerte de operadores,  $D_{\mathbf{a}} = \sum_{i \in I} a_i P_{E_i}$ . Entonces  $D_{\mathbf{a}} \in Gl(\mathcal{K}_{\mathcal{W}})^+$ . Por lo tanto, si  $T_{\mathcal{W}_{\mathbf{w}}} \in L(\mathcal{K}_{\mathcal{W}}, \mathcal{H})$  es el operador de síntesis de  $\mathcal{W}_{\mathbf{w}}$ , entonces  $T_{\mathcal{W}_{\mathbf{w}}} D_{\mathbf{a}}$  es, por definición, el operador de síntesis de  $\mathcal{W}_{\mathbf{a}\mathbf{w}}$ . Dado que  $T_{\mathcal{W}_{\mathbf{w}}} D_{\mathbf{a}}$  es acotado y suryectivo, entonces  $\mathcal{W}_{\mathbf{a}\mathbf{w}}$  es también un marco de subespacios. Finalmente, notemos que  $N(T_{\mathcal{W}_{\mathbf{a}\mathbf{w}}}) = N(T_{\mathcal{W}_{\mathbf{w}}} D_{\mathbf{a}}) = D_{\mathbf{a}}^{-1}(N(T_{\mathcal{W}_{\mathbf{w}}}))$ .
- Si  $\mathcal{W}_{\mathbf{w}}$  es una base de Riesz de subespacios para  $\mathcal{H}$ , entonces  $T_{\mathcal{W}_{\mathbf{w}}}$  es invertible. Dado que  $T_{\mathcal{W}_{\mathbf{w}}} x = w_i x_i$  para  $x = (x_j)_{j \in I} \in E_i$ , entonces  $w_i \geq \gamma(T_{\mathcal{W}_{\mathbf{w}}}) = A_{\mathcal{W}_{\mathbf{w}}}^{1/2}$  para todo  $i \in I$ . Esto implica que  $\mathbf{w} \in \ell_+^\infty(I)^*$ . Notemos que  $\mathbf{w} \cdot \ell_+^\infty(I)^* = \ell_+^\infty(I)^*$  (dado que  $\mathbf{w}^{-1} \in \ell_+^\infty(I)^*$ ). Entonces  $\ell_+^\infty(I)^* \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{W})$  por (1). Sea  $\mathbf{a} \in \mathcal{P}(\mathcal{W})$ . Entonces  $\mathbf{w}^{-1}\mathbf{a} \in \ell_+^\infty(I)$  y, como en el ítem (1),

$$T_{\mathcal{W}_{\mathbf{a}}} = T_{\mathcal{W}_{\mathbf{w}(\mathbf{w}^{-1}\mathbf{a})}} = T_{\mathcal{W}_{\mathbf{w}}} D_{\mathbf{w}^{-1}\mathbf{a}} \implies D_{\mathbf{a}} = D_{\mathbf{w}} D_{\mathbf{w}^{-1}\mathbf{a}} = D_{\mathbf{w}} T_{\mathcal{W}_{\mathbf{w}}}^{-1} T_{\mathcal{W}_{\mathbf{a}}}.$$

Por lo tanto,  $D_{\mathbf{a}}$  es suryectivo (e inyectivo), entonces  $D_{\mathbf{a}} \in Gl(\mathcal{K}_{\mathcal{W}})^+$  y  $\mathbf{a} \in \ell_+^\infty(I)^*$ .

La última observación se deduce de la definición de base de Riesz (que sólo concierne a la sucesión  $\mathcal{W}$ ), o porque  $D_{\mathbf{w}^{-1}\mathbf{a}} \in Gl(\mathcal{K}_{\mathcal{W}})^+$ .

- Aplicar Corolario 4.0.8 para  $G$  y  $G^{-1}$ .

□

**Definición 4.1.3.** Sea  $\mathcal{W} = \{W_i\}_{i \in I}$  una sucesión generadora de  $\mathcal{H}$ . Dado  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{P}(\mathcal{W})$ , decimos que  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$  son *equivalentes* si existe  $\mathbf{a} \in \ell_+^\infty(I)^*$  tal que  $\mathbf{v} = \mathbf{a}\mathbf{w}$ .

**Observaciones 4.1.4.** Sea  $\mathcal{W} = \{W_i\}_{i \in I}$  una sucesión generadora de  $\mathcal{H}$ .

- Por la Proposición 4.1.2, si  $\mathbf{w} \in \mathcal{P}(\mathcal{W})$ , entonces toda su clase de equivalencia  $\mathbf{w} \cdot \ell_+^\infty(I)^* \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{W})$ .
- Por otro lado, en el Ejemplo 4.4.5 veremos que existen sucesiones generadoras  $\mathcal{W}$  de  $\mathcal{H}$  con infinitas sucesiones  $\mathbf{w} \in \mathcal{P}(\mathcal{W})$  no equivalentes.
- Si  $\mathcal{W}_{\mathbf{w}}$  es una base de Riesz de subespacios para  $\mathcal{H}$ , entonces por la Proposición 4.1.2 todas las sucesiones de pesos admisibles para  $\mathcal{W}$  son equivalentes a  $\mathbf{w}$ , dado que  $\mathcal{P}(\mathcal{W}) = \ell_+^\infty(I)^*$ .  $\mathcal{W}_{\mathbf{v}} = (\mathbf{v}, \mathcal{W})$  es además una base de Riesz para  $\mathcal{H}$ , para todo  $\mathbf{v} \in \ell_+^\infty(I)^*$ . Por lo tanto, de ahora en más, nos referiremos a las bases de Riesz

de subespacios  $\mathcal{W}$  sin hacer referencia explícita a la sucesión de pesos, dado que el conjunto de pesos admisibles es siempre el mismo (y además,  $\mathcal{W}$  es una base de Riesz para cualquier peso admisible).

4. Por definición, si  $\mathcal{W}$  es una base de Riesz de subespacios, entonces es una sucesión minimal. Sin embargo, en el Ejemplo 4.4.3, veremos que hay sucesiones minimales, generadoras de  $\mathcal{H}$ , pero con  $\mathcal{P}(\mathcal{W}) = \emptyset$ . Notar que en la definición de base de Riesz de subespacios, se pide  $\mathcal{P}(\mathcal{W}) \neq \emptyset$  además de la minimalidad.

**Proposición 4.1.5.** *Sea  $\mathcal{E} = \{E_i\}_{i \in I}$  una base ortonormal de subespacios para  $\mathcal{H}$ . Sea  $G \in L(\mathcal{H}, \mathcal{H}_1)$  un operador invertible. Entonces  $\mathcal{W} = \{G(E_i)\}_{i \in I}$  es una base de Riesz de subespacios para  $\mathcal{H}_1$ .*

*Demostración.* Es una consecuencia del Corolario 4.0.8. □

**Observación 4.1.6.** Hemos visto en el Capítulo 1 que dado un marco  $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i \in I}$  para  $\mathcal{H}$ , la sucesión  $\{S_{\mathcal{F}}^{-1/2} f_i\}_{i \in I}$  es un marco de Parseval. Sin embargo, si  $\mathcal{W}_{\mathbf{w}} = (w_i, W_i)_{i \in I}$  es un marco de subespacios, entonces  $S_{\mathcal{W}_{\mathbf{w}}}^{-1/2} \mathcal{W}_{\mathbf{w}}$  podría no ser un marco de Parseval de subespacios (Ejemplo 4.4.5), ni siquiera con una sucesión de pesos diferente. Peor aún, existen marcos de subespacios  $\mathcal{W}_{\mathbf{w}}$  para  $\mathcal{H}$  tal que la sucesión  $(\mathbf{v}, G\mathcal{W})$  no es un marco de Parseval para  $\mathcal{H}$  para cualquier  $G \in Gl(\mathcal{H})$  y  $\mathbf{v} \in \ell_+^{\infty}(I)$  (ver Ejemplo 4.4.6). La siguiente Proposición muestra que la situación es diferente para bases de Riesz de subespacios para  $\mathcal{H}$ :

**Proposición 4.1.7.** *Sea  $\mathcal{W} = \{W_i\}_{i \in I}$  una base de Riesz de subespacios para  $\mathcal{H}$ . Entonces, para todo  $\mathbf{w} \in \ell_+^{\infty}(I)^*$ , la sucesión  $\{S_{\mathcal{W}_{\mathbf{w}}}^{-1/2}(W_i)\}_{i \in I}$  es una base ortonormal de subespacios.*

*Demostración.* Sea  $\{e_{ik}\}_{k \in K_i}$  una base ortonormal en cada  $W_i$ . Por el Teorema 1.6.5, la sucesión  $\mathcal{E} = \{w_i e_{ik}\}_{i \in I, k \in K_i}$  es una base de Riesz para  $\mathcal{H}$  y  $T_{\mathcal{E}} = T_{\mathcal{W}_{\mathbf{w}}}$ . Entonces, la sucesión  $\{w_i S_{\mathcal{E}}^{-1/2} e_{ik}\}_{i \in I, k \in K_i}$  es una base de Riesz y además un marco de Parseval para  $\mathcal{H}$ , por lo cual, es una base ortonormal. Dado que  $S_{\mathcal{W}_{\mathbf{w}}} = S_{\mathcal{E}}$  y  $\{w_i S_{\mathcal{W}_{\mathbf{w}}}^{-1/2} e_{ik}\}_{k \in K_i}$  es una base ortonormal para cada subespacio  $S_{\mathcal{W}_{\mathbf{w}}}^{-1/2}(W_i)$ , la sucesión  $\{S_{\mathcal{W}_{\mathbf{w}}}^{-1/2}(W_i)\}_{i \in I}$  es una base ortonormal de subespacios para  $\mathcal{H}$ . □

## 4.2. proyectores y marcos de subespacios.

Es un resultado muy conocido de la teoría de marcos que  $\{f_j\}_{j \in I}$  es un marco de Parseval para  $\mathcal{H}$  si y sólo si existe un espacio de Hilbert  $\mathcal{K}$  que contiene a  $\mathcal{H}$  tal que  $f_j = P_{\mathcal{H}} b_j$  para todo  $j$ , donde  $\{b_j\}_{j \in I}$  es una base ortonormal para  $\mathcal{K}$ .

En esta sección estudiaremos la posible generalización a los marcos de subespacios, reemplazando bases ortonormales por bases ortonormales de subespacios. Se verá que una

implicación es cierta (un marco de Parseval de subespacios es la proyección ortogonal de una base ortonormal de subespacios) pero la otra implicación no es cierta (Ejemplo 4.4.4).

**Teorema 4.2.1.** *Sea  $\mathcal{W}_w = (w_i, W_i)_{i \in I}$  un marco de subespacios  $\mathcal{H}$ . Entonces existe un espacio de Hilbert  $\mathcal{V} \supseteq \mathcal{H}$  y una base de Riesz de subespacios  $\{B_i\}_{i \in I}$  para  $\mathcal{V}$  tal que*

$$P_{\mathcal{H}}(B_i) = W_i \quad \text{y} \quad A_{\mathcal{W}_w}^{1/2} \|P_{\mathcal{H}}P_{B_i}\| \leq w_i \leq B_{\mathcal{W}_w}^{1/2} \|P_{\mathcal{H}}P_{B_i}\| \quad \text{para todo } i \in I .$$

*Esto es, la nueva sucesión de pesos  $v_i = \|P_{\mathcal{H}}P_{B_i}\|$ ,  $i \in I$ , es equivalente a  $w$ . Además, podemos calcular  $E(\mathcal{W}_w) = \dim \mathcal{V} \ominus \mathcal{H}$ .*

*Demostración.* Como antes, notamos  $E_i$  la copia de  $W_i$  en  $\mathcal{K}_{\mathcal{W}}$ . Sea  $T_{\mathcal{W}_w} \in L(\mathcal{K}_{\mathcal{W}}, \mathcal{H})$  el operador de síntesis de  $\mathcal{W}_w$ . Llamemos  $\mathcal{N} = N(T_{\mathcal{W}_w})$  y  $\mathcal{V} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{N}$ . Identificamos  $\mathcal{H}$  con  $\mathcal{H} \oplus \{0\} \subseteq \mathcal{V}$ .

Sea  $U : \mathcal{K}_{\mathcal{W}} \rightarrow \mathcal{V}$  dado por

$$U(x) = T_{\mathcal{W}_w}x \oplus \gamma(T_{\mathcal{W}_w}) P_{\mathcal{N}}x, \quad x \in \mathcal{K}_{\mathcal{W}} . \quad (4.5)$$

Dado que  $\mathcal{K}_{\mathcal{W}} = \mathcal{N}^{\perp} \oplus \mathcal{N}$  y  $T_{\mathcal{W}_w}|_{\mathcal{N}^{\perp}} : \mathcal{N}^{\perp} \rightarrow \mathcal{H}$  es invertible, podemos deducir que  $U$  es acotado e invertible. Mas aún, es fácil ver que

$$\|U^{-1}\|^{-1} = \gamma(U) = \gamma(T_{\mathcal{W}_w}) = A_{\mathcal{W}_w}^{1/2} \quad \text{y} \quad \|U\| = \|T_{\mathcal{W}_w}\| = B_{\mathcal{W}_w}^{1/2} . \quad (4.6)$$

Por la Proposición 4.1.5, la sucesión  $\{B_i\}_{i \in I} = \{U(E_i)\}_{i \in I}$  es una base de Riesz de subespacios para  $\mathcal{V}$ . Observemos que

$$P_{\mathcal{H}}(B_i) = P_{\mathcal{H}}U(E_i) = T_{\mathcal{W}_w}(E_i) \oplus \{0\} = W_i \oplus \{0\} \sim W_i, \quad \text{para todo } i \in I .$$

Sea  $y$  un vector de norma uno de  $B_i = U(E_i)$ . Entonces  $y = Ux$  con  $x = (x_j)_{j \in I} \in E_i$ . Se tiene

$$\gamma(U)\|x\| \leq \|Ux\| = \|y\| = 1 \leq \|U\| \|x\| .$$

Usando que  $\|P_{\mathcal{H}}y\| = \|T_{\mathcal{W}_w}x\| = w_i\|x_i\| = w_i\|x\|$  y la Ec. (4.6), concluimos que para todo vector de norma uno  $y$  de  $B_i$ ,

$$A_{\mathcal{W}_w}^{1/2} \|P_{\mathcal{H}}y\| = \gamma(T_{\mathcal{W}_w}) \|P_{\mathcal{H}}y\| = w_i \gamma(U) \|x\| \leq w_i \implies A_{\mathcal{W}_w}^{1/2} \|P_{\mathcal{H}}P_{B_i}\| \leq w_i .$$

Similarmente,  $w_i \leq w_i \|U\| \|x\| = B_{\mathcal{W}_w}^{1/2} \|P_{\mathcal{H}}y\| \leq B_{\mathcal{W}_w}^{1/2} \|P_{\mathcal{H}}P_{B_i}\|$ .  $\square$

Como un caso particular del Teorema 4.2.1, se obtiene un resultado probado por Asgari y Khosravi [9], con un poco más de información sobre los pesos:

**Corolario 4.2.2.** *Sea  $\mathcal{W}_w = (w_i, W_i)_{i \in I}$  un marco de Parseval para  $\mathcal{H}$ . Entonces existe un espacio de Hilbert  $\mathcal{V} \supseteq \mathcal{H}$  y una base ortonormal de subespacios  $\{F_i\}_{i \in I}$  para  $\mathcal{V}$  tal que*

$$P_{\mathcal{H}}(F_i) = W_i \quad \text{y} \quad w_i = c[\mathcal{H}, F_i] = \|P_{\mathcal{H}}P_{F_i}\| \quad \text{para todo } i \in I .$$

*Demostración.* Usaremos las notaciones de la prueba del Teorema 4.2.1. Si  $\mathcal{W}_w$  es Parseval, entonces  $A_{\mathcal{W}_w} = B_{\mathcal{W}_w} = 1$ . La Ec. (4.6), implica que el operador  $U \in L(\mathcal{K}, \mathcal{V})$  definido en (4.5) es además unitario (es una isometría invertible).

Por lo tanto, en este caso, la sucesión  $\{F_i\}_{i \in I} = \{U(E_i)\}_{i \in I}$  es una base ortonormal de subespacios para  $\mathcal{V}$ . Además, por el Teorema 4.2.1, tenemos que  $w_i = \|P_{\mathcal{H}} P_{F_i}\|$  para todo  $i \in I$ . Es fácil ver que  $F_i \cap (\mathcal{H} \oplus \{0\}) \neq \{0\}$  implica que  $w_i = 1$  y  $F_i \subseteq (\mathcal{H} \oplus \{0\})$  (dado que  $U$  es unitario). Entonces  $\|P_{\mathcal{H}} P_{F_i}\| = c[\mathcal{H}, F_i]$  para todo  $i \in I$ .  $\square$

**Teorema 4.2.3.** *Sea  $\mathcal{W}_w = (w_i, W_i)_{i \in I}$  un marco de subespacios para  $\mathcal{H}$  tal que  $1 \leq A_{\mathcal{W}_w}$ . Llamemos  $\mathcal{V} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{K}_W$ . Entonces, existe una proyección oblicua  $Q \in L(\mathcal{V})$  con  $R(Q) = \mathcal{H} \oplus \{0\}$  y un sistema ortonormal de subespacios  $\{B_i\}_{i \in I}$  in  $\mathcal{V}$ , tal que*

$$W_i \oplus 0 = Q(B_i) \quad y \quad w_i = \|Q P_{B_i}\| = \gamma(Q P_{B_i}) \quad \text{para todo } i \in I .$$

Más aún, si  $E(\mathcal{W}_w) = \infty$ , entonces la sucesión  $\{B_i\}_{i \in I}$  puede tomarse como una base ortonormal de subespacios de  $\mathcal{V}$ .

*Demostración.* Escribamos  $T_{\mathcal{W}_w} = T$ . Por hipótesis,  $TT^* = S_{\mathcal{W}_w} \geq A_{\mathcal{W}_w} Id \geq Id$ . Notemos por

$$X = (TT^* - Id)^{1/2} \in L(\mathcal{H})^+ .$$

Consideremos la descomposición polar (a derecha)  $T = |T^*|V$ , donde  $V \in L(\mathcal{K}_W, \mathcal{H})$  es una isometría parcial con espacio inicial y final  $N(T)^\perp$  y  $\mathcal{H}$  respectivamente, por lo tanto  $VV^* = Id_{\mathcal{H}}$ . Consideremos la “ampliación”  $\tilde{T} \in L(\mathcal{K}_W, \mathcal{V})$  dada por  $\tilde{T}x = Tx \oplus 0$ . Entonces  $\tilde{T}\tilde{T}^* = \begin{pmatrix} TT^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathcal{H} \\ \mathcal{K}_W \end{matrix} \in L(\mathcal{V})$ . Definamos

$$Q = \begin{pmatrix} Id_{\mathcal{H}} & XV \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathcal{H} \\ \mathcal{K}_W \end{matrix} \in L(\mathcal{V}) .$$

Entonces es claro que  $Q$  es una proyección oblicua con  $R(Q) = \mathcal{H} \oplus 0$ . Más aún,

$$QQ^* = \begin{pmatrix} Id_{\mathcal{H}} + XX^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \tilde{T}\tilde{T}^* \implies |Q^*| = |\tilde{T}^*| .$$

Sea  $U \in L(\mathcal{K}_W, \mathcal{V})$  definido por

$$Ux = VP_{N(T)^\perp}x \oplus P_{N(T)}x \quad , \quad \text{para } x \in \mathcal{K}_W . \quad (4.7)$$

Entonces  $U$  es una isometría, porque el espacio inicial de  $V$  es  $N(T)^\perp$ . Además, se tiene que  $\tilde{T} = |\tilde{T}^*|U$ . La isometría parcial de la descomposición polar a derecha de  $Q$  se extiende a un operador unitario  $W$  en  $\mathcal{V}$ , porque  $\dim N(Q) = \dim R(Q)^\perp$ . Además,  $Q = |Q^*|W$ . Entonces

$$\tilde{T} = |\tilde{T}^*|U = |Q^*|U = Q W^*U .$$

Por lo tanto, si consideramos la base ortonormal de subespacios  $\{E_i\}_{i \in I}$  of  $\mathcal{K}_{\mathcal{W}}$ ,

$$W_i = T(E_i) \sim T(E_i) \oplus 0 = \tilde{T}(E_i) = QW^*U(E_i) = Q(B_i), \quad i \in I,$$

donde  $\{B_i\}_{i \in I} = \{W^*U(E_i)\}_{i \in I}$ , que es claramente un sistema ortonormal en  $\mathcal{V}$ . Si  $y \in B_i$  es un vector unitario, entonces  $y = W^*Ux$  para  $x \in E_i$  con  $\|x\| = 1$ , y

$$w_i = \|Tx\| = \|QW^*Ux\| = \|Qy\| \implies w_i = \|QP_{B_i}\| = \gamma(QP_{B_i}).$$

Supongamos ahora que  $\dim N(T) = \infty$ . Entonces, la isometría  $U$  definida en (4.7) puede cambiarse a un operador unitario de  $\mathcal{K}_{\mathcal{W}}$  sobre  $\mathcal{V}$ , manteniendo la identidad  $\tilde{T} = |\tilde{T}^*|U$ . Para ver esto, tomemos

$$Ux = VP_{N(T)^\perp}x \oplus Y P_{N(T)}x, \quad x \in \mathcal{H},$$

donde  $Y \in L(\mathcal{K}_{\mathcal{W}})$  es una isometría parcial con espacio inicial  $N(T)$  y espacio final  $\mathcal{K}_{\mathcal{W}}$ . Es inmediato entonces que  $U$  aplica isométricamente  $N(T)^\perp$  sobre  $\mathcal{H} \oplus \{0\}$  y  $N(T)$  sobre  $\{0\} \oplus \mathcal{K}_{\mathcal{W}}$ . Entonces, se concluye que la sucesión  $\{B_i\}_{i \in I}$  es una base ortonormal de subespacios para  $\mathcal{V}$ .  $\square$

### 4.3. Refinamientos de marcos de subespacios.

En [22] se muestra con un ejemplo que un marco de subespacios con  $E(\mathcal{W}_{\mathbf{w}}) > 0$  puede ser exacto, i.e.  $(w_i, W_i)_{i \in J}$  no es un marco, para todo subconjunto propio  $J \subset I$ . Esta situación es posible porque el exceso del marco puede ser contenido propiamente en algún  $W_i \in \mathcal{W}_{\mathbf{w}}$ , por lo que si “borramos” cualquiera de los subespacios de  $\mathcal{W}_{\mathbf{w}}$ , la sucesión restante deja de ser generadora.

En conclusión, la noción de “exceso” no la misma que la de los marcos de vectores, en el sentido de la Definición 1.3.10 y la Ec. (1.15). En esta sección, introducimos la noción de refinamientos de sucesiones de subespacios, que funcionará como medio natural para recuperar la conexión entre exceso y borradas.

En concreto, un refinamiento de una sucesión  $\mathcal{W} = \{W_i\}_{i \in I}$  es una sucesión de subespacios “mas chicos”. Con el objeto de mantener la convención de que los subespacios son  $\neq \{0\}$ , permitiremos el borrado de algunos subespacios de  $\mathcal{W}$ , considerando un subconjunto propio de  $I$  como conjunto de índices para el refinamiento.

**Definición 4.3.1.** Sea  $\mathcal{W} = \{W_i\}_{i \in I}$  una sucesión de subespacios cerrados.

1. Un *refinamiento* de  $\mathcal{W}$  es una sucesión  $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i \in J}$  de subespacios cerrados tal que

$$J \subseteq I.$$

$$\{0\} \neq V_i \subset W_i \text{ para todo } i \in J.$$

En este caso, usaremos la siguiente notación:

2. El exceso de  $\mathcal{W}$  con respecto a  $\mathcal{V}$  es el cardinal

$$E(\mathcal{W}, \mathcal{V}) = \sum_{i \in J} \dim(W_i \ominus V_i) + \sum_{i \notin J} \dim W_i .$$

3. Si  $\mathbf{w} \in \mathcal{P}(\mathcal{W})$ , decimos que  $\mathcal{V}_{\mathbf{w}} = (w_i, V_i)_{i \in J}$  es un refinamiento FS de  $\mathcal{W}_{\mathbf{w}}$  si además  $\mathcal{V}_{\mathbf{w}}$  es un marco de subespacios de  $\mathcal{H}$ .

**Observación 4.3.2.** Es fácil ver que, si  $\mathcal{V}$  es un refinamiento de  $\mathcal{W}$  y  $\mathcal{V}'$  es un refinamiento de  $\mathcal{V}$ , entonces  $\mathcal{V}'$  refina a  $\mathcal{W}$  y  $E(\mathcal{W}, \mathcal{V}') = E(\mathcal{W}, \mathcal{V}) + E(\mathcal{V}, \mathcal{V}')$ .

**Lema 4.3.3.** Sea  $\mathcal{W}_{\mathbf{w}} = (w_i, W_i)_{i \in I}$  un marco de subespacios para  $\mathcal{H}$  y sea  $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i \in J}$  un refinamiento FS de  $\mathcal{W}$ . Consideremos  $\mathcal{K}_{\mathcal{V}} = \sum_{i \in J} \oplus V_i$  como subespacio de  $\sum_{i \in I} \oplus W_i = \mathcal{K}_{\mathcal{W}}$ . Entonces

1.  $E(\mathcal{W}, \mathcal{V}) = \dim \mathcal{K}_{\mathcal{V}}^{\perp} = \dim N(P_{\mathcal{K}_{\mathcal{V}}})$ .
2.  $\mathcal{V}_{\mathbf{w}} = (w_i, V_i)_{i \in J}$  es un refinamiento FS de  $\mathcal{W}_{\mathbf{w}}$  si y sólo si  $T_{\mathcal{W}_{\mathbf{w}}} P_{\mathcal{K}_{\mathcal{V}}}$  es suryectivo.

En este caso, tenemos que

3.  $E(\mathcal{W}, \mathcal{V}) \leq E(\mathcal{W}_{\mathbf{w}})$ .
4. Si  $E(\mathcal{W}, \mathcal{V}) < \infty$ , entonces  $E(\mathcal{V}_{\mathbf{w}}) = E(\mathcal{W}_{\mathbf{w}}) - E(\mathcal{W}, \mathcal{V})$ .

*Demostración.* Para cada  $i \in I$ , notemos por  $E_i$  (resp.  $F_i$ ) la copia de cada  $W_i$  (resp.  $V_i$ , o  $F_i = \{0\}$  si  $i \notin J$ ) en  $\mathcal{K}_{\mathcal{W}}$ . Entonces  $\mathcal{K}_{\mathcal{V}}^{\perp} = \oplus_{i \in I} E_i \ominus F_i$ , por lo que se prueba (1). Sea  $P = P_{\mathcal{K}_{\mathcal{V}}}$ . Por construcción,  $T_{\mathcal{V}_{\mathbf{w}}} = T_{\mathcal{W}_{\mathbf{w}}} |_{\mathcal{K}_{\mathcal{V}}} = T_{\mathcal{W}_{\mathbf{w}}} |_{R(P)} \in L(\mathcal{K}_{\mathcal{V}}, \mathcal{H})$ . Entonces  $R(T_{\mathcal{W}_{\mathbf{w}}} P) = R(T_{\mathcal{V}_{\mathbf{w}}}) = \mathcal{H}$  si y sólo si  $\mathcal{V}_{\mathbf{w}}$  es un refinamiento FS de  $\mathcal{W}_{\mathbf{w}}$ . En este caso,  $\{0\} = N(PT_{\mathcal{W}_{\mathbf{w}}}^*)$ . Dado que  $R(T_{\mathcal{W}_{\mathbf{w}}}^*) = N(T_{\mathcal{W}_{\mathbf{w}}})^{\perp}$ , entonces

$$N(T_{\mathcal{W}_{\mathbf{w}}})^{\perp} \cap N(P) = \{0\} \implies E(\mathcal{W}, \mathcal{V}) = \dim N(P) \leq \dim N(T_{\mathcal{W}_{\mathbf{w}}}) = E(\mathcal{W}_{\mathbf{w}}) .$$

Observemos que  $T_{\mathcal{W}_{\mathbf{w}}}$  es un operador semi-Fredholm, con  $\text{Ind}(T_{\mathcal{W}_{\mathbf{w}}}) = \dim N(T_{\mathcal{W}_{\mathbf{w}}}) - 0 = E(\mathcal{W}_{\mathbf{w}})$ . Si  $E(\mathcal{W}, \mathcal{V}) < \infty$ , entonces  $P$  es un operador de Fredholm, con  $\text{Ind}(P) = 0$ . Por lo tanto, se tiene que  $E(\mathcal{W}_{\mathbf{w}}) = \text{Ind}(T_{\mathcal{W}_{\mathbf{w}}}) + \text{Ind}(P) = \text{Ind}(T_{\mathcal{W}_{\mathbf{w}}} P) = \dim N(T_{\mathcal{W}_{\mathbf{w}}} P)$ . Finalmente, dado que  $T_{\mathcal{V}_{\mathbf{w}}} = T_{\mathcal{W}_{\mathbf{w}}} |_{\mathcal{K}_{\mathcal{V}}}$ ,

$$E(\mathcal{V}_{\mathbf{w}}) = \dim N(T_{\mathcal{V}_{\mathbf{w}}}) = \dim N(T_{\mathcal{W}_{\mathbf{w}}} P) - \dim N(P) = E(\mathcal{W}_{\mathbf{w}}) - E(\mathcal{W}, \mathcal{V}) ,$$

completando la demostración. □

**Lema 4.3.4.** Sea  $\mathcal{W}_{\mathbf{w}} = (w_i, W_i)_{i \in I}$  un marco de subespacios para  $\mathcal{H}$  con  $E(\mathcal{W}_{\mathbf{w}}) > 0$ . Entonces existe un refinamiento FS de  $\mathcal{W}_{\mathbf{w}}$ ,  $\mathcal{V}_{\mathbf{w}} = (w_i, V_i)_{i \in J}$  con  $E(\mathcal{W}, \mathcal{V}) = 1$ .

*Demostración.* Para cada  $i \in I$ , notemos por  $E_i$  la copia de  $W_i$  en  $\mathcal{K}_{\mathcal{W}}$ . Supongamos que no existe ningún refinamiento FS  $\mathcal{V}_{\mathbf{w}}$  de  $\mathcal{W}_{\mathbf{w}}$  con  $E(\mathcal{W}, \mathcal{V}) = 1$ . Entonces, por el Lema 4.3.3, para todo  $i \in I$  y todo vector unitario  $y \in E_i$ , se tiene que  $R(T_{\mathcal{W}_{\mathbf{w}}} P_{\{y\}^\perp}) \neq \mathcal{H}$ . Por la Proposición 1.1.6 y Ec. (1.3),

$$c [N(T_{\mathcal{W}_{\mathbf{w}}}), \{y\}^\perp] = c [N(T_{\mathcal{W}_{\mathbf{w}}})^\perp, \text{span}\{y\}] < 1 \implies R(T_{\mathcal{W}_{\mathbf{w}}} P_{\{y\}^\perp}) \sqsubseteq \mathcal{H}.$$

Tomamos  $x \in R(T_{\mathcal{W}_{\mathbf{w}}} P_{\{y\}^\perp})^\perp = N(P_{\{y\}^\perp}) T_{\mathcal{W}_{\mathbf{w}}}^*$  de norma uno.

Entonces  $0 \neq T_{\mathcal{W}_{\mathbf{w}}}^* x \in \text{span}\{y\}$ , i.e.,  $y \in R(T_{\mathcal{W}_{\mathbf{w}}}^*)$ . Esto implica que  $\cup_{i \in I} E_i \subseteq R(T_{\mathcal{W}_{\mathbf{w}}}^*)$  (que es cerrado), entonces  $T_{\mathcal{W}_{\mathbf{w}}}^*$  es suryectivo y  $E(\mathcal{W}_{\mathbf{w}}) = 0$ .  $\square$

**Teorema 4.3.5.** Sea  $\mathcal{W}_{\mathbf{w}} = (w_i, W_i)_{i \in I}$  un marco de subespacios para  $\mathcal{H}$ . Entonces

$$E(\mathcal{W}_{\mathbf{w}}) = \sup \left\{ E(\mathcal{W}, \mathcal{V}) : \mathcal{V}_{\mathbf{w}} = (w_i, V_i)_{i \in J} \text{ es un refinamiento FS de } \mathcal{W}_{\mathbf{w}} \right\}. \quad (4.8)$$

En particular, si  $E(\mathcal{W}_{\mathbf{w}}) = \infty$ , entonces, para todo  $n \in \mathbb{N}$ , existe  $\mathcal{V}_{\mathbf{w}} = (w_i, V_i)_{i \in J}$  refinamiento FS de  $\mathcal{W}_{\mathbf{w}}$  tal que  $E(\mathcal{W}, \mathcal{V}) = n$ .

*Demostración.* Notemos por  $\alpha$  el supremo de (4.8). Notemos que el ítem 3 del Lema 4.3.3 nos dice que  $\alpha \leq E(\mathcal{W}_{\mathbf{w}})$ . Si  $E(\mathcal{W}_{\mathbf{w}}) < \infty$ , combinando la Observación 4.3.2, el Lema 4.3.4 y el ítem 4 del Lema 4.3.3, uno puede probar inductivamente que  $\alpha \geq E(\mathcal{W}_{\mathbf{w}})$ . Si  $E(\mathcal{W}_{\mathbf{w}}) = \infty$ , un argumento similar muestra que para todo  $n \in \mathbb{N}$ , existe un marco  $\mathcal{V}_{\mathbf{w}}$ , refinamiento de  $\mathcal{W}_{\mathbf{w}}$  tal que  $E(\mathcal{W}, \mathcal{V}) = n$ .  $\square$

**Corolario 4.3.6.** Sea  $\mathcal{W}_{\mathbf{w}}$  un marco de subespacios para  $\mathcal{H}$  tal que  $E(\mathcal{W}_{\mathbf{w}}) < \infty$ . Entonces

1. La sucesión  $\mathbf{w} \in \ell_+^\infty(I)^*$ .
2. Existe  $\mathcal{V}_{\mathbf{w}} = (w_i, V_i)_{i \in J}$ , refinamiento FS de  $\mathcal{W}_{\mathbf{w}}$  tal que  $\mathcal{V}$  es una base de Riesz para  $\mathcal{H}$  y  $E(\mathcal{W}, \mathcal{V}) = E(\mathcal{W}_{\mathbf{w}})$ .

*Demostración.* Por el Teorema 4.3.5, existe  $\mathcal{V}_{\mathbf{w}} = (w_i, V_i)_{i \in J}$ , refinamiento FS de  $\mathcal{W}_{\mathbf{w}}$  tal que  $E(\mathcal{W}, \mathcal{V}) = E(\mathcal{W}_{\mathbf{w}})$ . Por el ítem 4 del Lema 4.3.3,  $E(\mathcal{V}_{\mathbf{w}}) = 0$ . Es decir,  $\mathcal{V}_{\mathbf{w}}$  es una base de Riesz de subespacios para  $\mathcal{H}$ . Entonces, por la Prop. 4.1.2, la sucesión  $\{w_i\}_{i \in J} \in \ell_+^\infty(J)^*$ . Dado que  $E(\mathcal{W}, \mathcal{V}) < \infty$ , entonces  $I \setminus J$  es finito, y se tiene además que  $\mathbf{w} \in \ell_+^\infty(I)^*$ .  $\square$

**Corolario 4.3.7.** Sea  $\mathcal{W}_{\mathbf{w}}$  un marco de subespacios para  $\mathcal{H}$  tal que  $E(\mathcal{W}_{\mathbf{w}}) < \infty$ . Entonces

$$\mathcal{P}(\mathcal{W}) = \ell_+^\infty(I)^* \quad y \quad E(\mathcal{W}_{\mathbf{v}}) = E(\mathcal{W}_{\mathbf{w}}) \text{ para cualquier otro } \mathbf{v} \in \mathcal{P}(\mathcal{W}).$$

*Demostración.* Por el Corolario 4.3.6, sabemos que  $\mathbf{w} \in \ell_+^\infty(I)^*$ . De la Proposición 4.1.2, se deduce que  $\ell_+^\infty(I)^* \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{W})$ . Sea  $\mathcal{V}_{\mathbf{w}} = (w_i, V_i)_{i \in J}$  un refinamiento de  $\mathcal{W}_{\mathbf{w}}$  que es una base de Riesz para  $\mathcal{H}$ , (existe por el Corolario 4.3.6). Tomemos  $\mathbf{v} \in \mathcal{P}(\mathcal{W})$ . Entonces la sucesión  $\mathcal{V}_{\mathbf{v}} = (v_i, V_i)_{i \in J}$  resulta ser un marco de subespacios, refinamiento de  $\mathcal{W}_{\mathbf{v}}$ .

De hecho, consideremos  $T_{\mathcal{V}_{\mathbf{v}}} = T_{\mathcal{W}_{\mathbf{v}}} \big|_{\mathcal{K}_{\mathcal{V}_{\mathbf{v}}}} \in L(\mathcal{K}_{\mathcal{V}_{\mathbf{v}}}, \mathcal{H})$ . Por el Lema 4.3.3,

$$\dim \mathcal{K}_{\mathcal{V}_{\mathbf{v}}}^\perp = E(\mathcal{W}, \mathcal{V}) < \infty.$$

Como en la prueba del Lema 4.3.4, esto implica que  $R(T_{\mathcal{V}_{\mathbf{v}}}) = R(T_{\mathcal{W}_{\mathbf{v}}} P_{\mathcal{K}_{\mathcal{V}_{\mathbf{v}}}}) \sqsubseteq \mathcal{H}$ . Por otro lado,  $\text{span}\{\cup_{i \in J} V_i\} \subseteq R(T_{\mathcal{V}_{\mathbf{v}}})$ . Pero  $\text{span}\{\cup_{i \in J} V_i\}$  es denso en  $\mathcal{H}$ , porque  $T_{\mathcal{V}_{\mathbf{v}}}$  es suryectivo ( $\mathcal{V}_{\mathbf{w}}$  es un marco de subespacios). Esto muestra entonces que  $T_{\mathcal{V}_{\mathbf{v}}}$  es suryectivo, i.e.  $\mathcal{V}_{\mathbf{v}}$  es un marco de subespacios. Es decir, se tiene que  $\mathcal{V}$  es una base de Riesz de subespacios, y  $\mathbf{v}_J = \{v_i\}_{i \in J} \in \mathcal{P}(\mathcal{V})$ . Por la Proposición 4.1.2,  $\mathbf{v}_J \in \ell_+^\infty(J)^*$ . Como antes, esto implica que  $\mathbf{v} \in \ell_+^\infty(I)^*$ . Usando la Prop. 4.1.2 otra vez, concluimos que  $E(\mathcal{W}_{\mathbf{v}}) = E(\mathcal{W}_{\mathbf{w}})$ .  $\square$

**Teorema 4.3.8.** *Sea  $\mathcal{W}_{\mathbf{w}} = (w_i, W_i)_{i \in I}$  un marco de subespacios para  $\mathcal{H}$ . Entonces*

$$E(\mathcal{W}_{\mathbf{v}}) = E(\mathcal{W}_{\mathbf{w}}) \quad \text{para cualquier otro } \mathbf{v} \in \mathcal{P}(\mathcal{W}).$$

*Demostración.* Si  $E(\mathcal{W}_{\mathbf{w}}) < \infty$ , aplicamos Corolario 4.3.7. En el caso en que  $E(\mathcal{W}_{\mathbf{w}}) = \infty$  y  $\mathbf{v} \in \mathcal{P}(\mathcal{W})$ , entonces también  $E(\mathcal{W}_{\mathbf{v}}) = \infty$ , dado que de otro modo se aplicaría el Corolario 4.3.7 a  $\mathcal{W}_{\mathbf{v}}$ .  $\square$

## 4.4. Ejemplos.

Observemos que, si  $\{E_i\}_{i \in I}$  es una base ortonormal de subespacios para  $\mathcal{K}$  y  $T \in L(\mathcal{K}, \mathcal{H})$  es un operador suryectivo tal que  $T(E_i) \sqsubseteq \mathcal{H}$  para todo  $i \in I$ , entonces  $\mathcal{W} = \{TE_i\}_{i \in I}$  es una sucesión generadora para  $\mathcal{H}$ . Sin embargo, el primer ejemplo muestra que, en general, tal sucesión  $\mathcal{W}$  puede tener  $\mathcal{P}(\mathcal{W}) = \emptyset$ , i.e.  $\mathcal{W}_{\mathbf{w}}$  no es un marco de subespacios para  $\mathcal{H}$ , para cualquier sucesión  $\mathbf{w} \in \ell_+^\infty(I)$ .

**Ejemplo 4.4.1.** Sea  $\mathcal{B} = \{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una base ortonormal de  $\mathcal{H}$ . Para  $k \in \mathbb{N}$ , consideremos el espacio  $E_k = \text{span}\{e_{2k-1}, e_{2k}\}$ . Entonces  $E_k$  resulta una base ortonormal de subespacios para  $\mathcal{H}$ . Sea  $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  el operador (definido en un denso) dado por

$$Te_n = \begin{cases} 2^{-k} e_1 & \text{si } n = 2k - 1 \\ e_{k+1} & \text{si } n = 2k \end{cases}.$$

Entonces  $T$  puede extenderse a un operador acotado y suryectivo (a quien seguimos llamando  $T$ ), dado que la sucesión  $\{Te_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  es claramente un marco ajustado para  $\mathcal{H}$ . Veremos que la sucesión de subespacios cerrados

$$\mathcal{W} = \{W_k\}_{k \in \mathbb{N}} \quad \text{tal que} \quad W_k = T(E_k) = \text{span}\{e_1, e_{k+1}\}, \quad k \in \mathbb{N}$$

cumple que  $\mathcal{P}(\mathcal{W}) = \emptyset$ . Supongamos que, por el contrario,  $\mathbf{w} \in \mathcal{P}(\mathcal{W})$ . Entonces, por la Ec. (1.24) aplicada a  $f = e_1 \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} W_k$ , tenemos que  $\mathbf{w} \in \ell^2(\mathbb{N})$ . Pero esto contradice la existencia de una cota inferior de marco  $A_{\mathcal{W}_{\mathbf{w}}}$  para  $\mathcal{W}_{\mathbf{w}} = (w_k, W_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , porque para todo  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$A_{\mathcal{W}_{\mathbf{w}}} = A_{\mathcal{W}_{\mathbf{w}}} \|e_{k+1}\|^2 \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} w_j^2 \|P_{W_j} e_{k+1}\|^2 = w_k^2 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Notemos que, por definición,  $\frac{\gamma(TP_{E_k})}{\|TP_{E_k}\|} = \frac{2^{-k}}{1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ .

El operador  $T$  y la base ortonormal  $\mathcal{E} = \{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  del ejemplo anterior no satisfacen la Ec. (4.1) del Teorema 4.0.6. Sin embargo, (4.1) no es una condición necesaria que asegure que  $\mathcal{P}(\mathcal{W}) \neq \emptyset$ , si  $\mathcal{W} = T\mathcal{E}$ . Esto se muestra en el próximo ejemplo, en donde se muestra un marco de subespacios, imagen por un epimorfismo de una base ortonormal de subespacios, pero que no satisfacen la Ecuación (4.1).

**Ejemplo 4.4.2.** Sea  $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  una base ortonormal para  $\mathcal{H}$  y consideremos el marco (de vectores)

$$\mathcal{F} = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{dado por} \quad f_n = \begin{cases} e_k & \text{si } n = 2k - 1 \\ \frac{e_{k+1}}{\sqrt{k+1}} & \text{si } n = 2k \end{cases}.$$

Sea  $T = T_{\mathcal{F}} \in L(\ell^2(\mathbb{N}), \mathcal{H})$  su operador de síntesis (que es suryectivo). Si  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es la base canónica de  $\ell^2(\mathbb{N})$ , entonces  $Tb_n = f_n$ . Para cada  $k \in \mathbb{N}$  hacemos  $E_k = \text{span}\{b_{2k-1}, b_{2k}\}$ . Entonces, por construcción  $\{E_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  es una base ortonormal de subespacios de  $\ell^2(\mathbb{N})$ . Tomemos las sucesiones

$$\mathbf{w} = \mathbf{e} \in \ell_+^{\infty}(\mathbb{N}) \quad \text{y} \quad W_k = TE_k = \text{span}\{e_k, e_{k+1}\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Entonces  $\mathcal{W}_{\mathbf{w}} = (w_k, W_k)_{k \in \mathbb{N}}$  es un marco de subespacios para  $\mathcal{H}$ . Sin embargo,  $T$  no cumple la Ec. (4.1), dado que  $\gamma(TP_{E_k}) = \frac{1}{\sqrt{k+1}}$ , mientras que  $\|TP_{E_k}\| = 1$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ .

En el Ejemplo 4.4.1, se tiene una sucesión generadora  $\mathcal{W} = \{W_i\}_{i \in I}$  con  $\mathcal{P}(\mathcal{W}) = \emptyset$ . El argumento clave fue que  $\bigcap_{i \in I} W_i \neq \{0\}$ . Esto es suficiente para asegurar que  $\mathcal{P}(\mathcal{W})$  es vacío si  $\text{span}\{W_i : 1 \leq i \leq n\} \neq \mathcal{H}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Sin embargo, como mostrará el siguiente ejemplo, esta condición no es necesaria, aún si  $\dim W_i < \infty$  para todo  $i \in I$ . Este ejemplo sirve además para mostrar que existen sucesiones generadoras, minimales de subespacios tales que  $\mathcal{P}(\mathcal{W}) = \emptyset$ .

**Ejemplo 4.4.3.** Fijemos una base ortonormal  $\mathcal{B} = \{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  para  $\mathcal{H}$ . Sea  $g = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e_{2k}}{2^{k/2}} \in \mathcal{H}$  ( $\|g\| = 1$ ). Para todo  $n \in \mathbb{N}$ , notemos por  $P_n \in L(\mathcal{H})$  a la proyección ortogonal sobre  $\mathcal{H}_n = \text{span}\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ . Consideremos la sucesión generadores  $\mathcal{W} = \{W_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  dada por

$$W_k = \text{span}\{P_{2k} g, e_{2k-1}\} = \text{span}\left\{\sum_{j=1}^k \frac{e_{2j}}{2^{j/2}}, e_{2k-1}\right\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Es fácil ver que  $\mathcal{W}$  es una sucesión minimal.

Lo que está sucediendo en este caso particular es que  $c[W_i, W_j] \xrightarrow{i,j \rightarrow \infty} 0$  (rápidamente), y por esta razón  $\mathcal{P}(\mathcal{W}) = \emptyset$ . De hecho, supongamos que  $w \in \mathcal{P}(\mathcal{W})$ , y el marco de subespacios  $\mathcal{W}_w$  tiene cotas  $0 < A_{\mathcal{W}_w} \leq B_{\mathcal{W}_w}$ . Entonces

$$B_{\mathcal{W}_w} = B_{\mathcal{W}_w} \|g\|^2 \geq \sum_{k \in \mathbb{N}} w_k^2 \|P_{W_k} g\|^2 = \sum_{k \in \mathbb{N}} w_k^2 \|P_{2k} g\|^2 = \sum_{k \in \mathbb{N}} w_k^2 (1 - 2^{-k}), \quad (4.9)$$

lo que implica que  $w_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ . Por otro lado, para todo  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$A_{\mathcal{W}_w} = A_{\mathcal{W}_w} \|e_{2k-1}\|^2 \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} w_i^2 \|P_{W_i} e_{2k-1}\|^2 = w_k^2 \quad (4.10)$$

por lo que  $A_{\mathcal{W}_w} = 0$ , contradiciendo la suposición inicial de que  $\mathcal{W}_w$  era un marco de subespacios. Por lo tanto,  $\mathcal{P}(\mathcal{W}) = \emptyset$ .

Sabemos que  $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  es un marco de Parseval para  $\mathcal{H}$  si y sólo si existe un espacio de Hilbert  $\mathcal{K}$  que contiene a  $\mathcal{H}$  tal que  $f_j = P_{\mathcal{H}} b_j$  para todo  $j \in \mathbb{N}$ , donde  $\{b_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  es una base ortonormal para  $\mathcal{K}$ . En la sección 4.2 se probó que en el caso de marcos de subespacios una implicación era cierta, si reemplazábamos convenientemente las bases ortonormales por bases ortonormales de subespacios. Concretamente, se vio que un marco Parseval de subespacios es la imagen por una proyección ortogonal de una base ortonormal de subespacios. El siguiente ejemplo muestra que la recíproca no es cierta en este contexto.

**Ejemplo 4.4.4.** Sea  $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  una base ortonormal para  $\mathcal{H}$ . Consideremos el vector unitario

$$g = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{e_{2k-1}}{2^{k/2}}, \quad \text{y sea } \mathcal{M} = \overline{\text{span}}\{g\} \cup \{e_{2k} : k \in \mathbb{N}\}.$$

Por otro lado, tomemos la sucesión  $\mathcal{E} = \{E_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  dada por  $E_k = \text{span}\{e_{2k-1}, e_{2k}\}$  ( $k \in \mathbb{N}$ ). Entonces  $\mathcal{E}$  es una bon de subespacios para  $\mathcal{H}$ . Sea la sucesión  $\mathcal{W} = \{W_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  dada por

$$W_k = P_{\mathcal{M}} E_k = \text{span}\{g, e_{2k}\}, \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Entonces  $\mathcal{P}(\mathcal{W}) = \emptyset$  por la misma razón que en el Ejemplo 4.4.1, porque

$$g \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} W_k \neq \{0\}.$$

El próximo ejemplo muestra que en el caso de marcos de subespacios, la existencia de un marco ajustado canónico no es cierta, a diferencia de los marcos de vectores.

**Ejemplo 4.4.5.** Sea  $\mathcal{E} = \{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una base ortonormal de  $\mathcal{H}$ . Definamos la sucesión  $\mathcal{W} = \{W_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  como

$$W_1 = \overline{\text{span}}\{e_k : k \geq 2\} = \{e_1\}^\perp \quad \text{y} \quad W_k = \text{span}\{e_1, e_k\} \quad , \quad \text{para} \quad k \geq 2 .$$

Notemos que  $\mathcal{P}(\mathcal{W}) = \ell_+^2(\mathbb{N})$ . De hecho, una inclusión es clara, y

$$\mathbf{w} \in \mathcal{P}(\mathcal{W}) \implies \sum_{k=2}^{\infty} w_k^2 = \sum_{k=2}^{\infty} w_k^2 \|P_{W_k} e_1\|^2 \leq B_{\mathcal{W}_w} \implies \mathbf{w} \in \ell_+^2(\mathbb{N}) .$$

Ahora veamos que  $\mathcal{W}_w$  no puede ser un marco ajustado de subespacios para ningún  $\mathbf{w} \in \mathcal{P}(\mathcal{W})$ . Si  $\mathcal{W}_w$  fuera un marco ajustado, con cota de marco  $A$ , entonces para todo  $k \geq 2$ ,

$$A = A \|e_k\|^2 = \sum_{i \in \mathbb{N}} w_i^2 \|P_{W_i} e_k\|^2 = w_1^2 + w_k^2 \implies w_k^2 = A - w_1^2 ,$$

lo que contradice  $\mathbf{w} \in \ell_+^2(\mathbb{N})$ . Veamos ahora que el operador de marco  $S_{\mathcal{W}_w} \in L(\mathcal{H})$  es diagonal con respecto a la base ortonormal  $\mathcal{E}$ , para todo  $\mathbf{w} \in \mathcal{P}(\mathcal{W})$ . De hecho,

$$T_{\mathcal{W}_w}^* e_1 = \{w_k P_{W_k} e_1\}_{k \in \mathbb{N}} = 0 \oplus \{w_k e_1\}_{k \geq 2} \implies S_{\mathcal{W}_w} e_1 = T_{\mathcal{W}_w} T_{\mathcal{W}_w}^* e_1 = \left( \sum_{k=2}^{\infty} w_k^2 \right) e_1 .$$

Por otro lado, si  $E_k$  es la copia de  $W_k$  en  $\mathcal{K}_{\mathcal{W}}$ , entonces para todo  $k \in \mathbb{N}$  y  $j \geq 2$ ,

$$P_{E_k} (T_{\mathcal{W}_w}^* e_j) = \begin{cases} w_1 e_j & \text{si } k = 1 \\ w_j e_j & \text{si } k = j \\ 0 & \text{si } k \neq 1, j \end{cases} \implies S_{\mathcal{W}_w} e_j = T_{\mathcal{W}_w} T_{\mathcal{W}_w}^* e_j = (w_1^2 + w_j^2) e_j .$$

En particular,  $S_{\mathcal{W}_w}^{-1/2}$  es también diagonal. Esto implica que  $S_{\mathcal{W}_w}^{-1/2} \mathcal{W} = \mathcal{W}$ , que sabemos que no puede ser ajustado para ninguna sucesión de pesos.

Otra propiedad del presente ejemplo es la siguiente:  $\mathcal{W}_w$  es un marco de subespacios para  $\mathcal{H}$ , pero la sucesión  $(w_k, W_k)_{k > 1}$  no es una sucesión marco de subespacios (i.e. un marco de subespacios para  $\overline{\text{span}}\{W_k : k > 1\}$ ). Esto puede probarse con los mismos argumentos utilizados en el Ejemplo 4.4.1, usando que  $\bigcap_{k > 1} W_k \neq \{0\}$ .

**Ejemplo 4.4.6.** Sea  $\mathcal{B}_4 = \{e_n\}_{n \leq 4}$  una base ortonormal para  $\mathbb{C}^4$ . Consideremos la sucesión  $\mathcal{W} = \{W_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  dada por

$$W_1 = \text{span}\{e_1, e_2\} \quad , \quad W_2 = \text{span}\{e_1, e_3\} \quad \text{y} \quad W_3 = \text{span}\{e_4\} .$$

Veremos que la sucesión  $G\mathcal{W}_{\mathbf{w}} = (w_k, G(W_k))_{k \in \mathbb{I}_3}$  no es un marco de Parseval para todo invertible  $G \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$  y todo peso  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}_+^3$ .

Tomemos una base ortonormal en cada  $G(W_i)$

$$G(W_1) = \text{span}\{g_1, g_2\}, \quad G(W_2) = \text{span}\{g_1, g_3\} \quad \text{y} \quad G(W_3) = \text{span}\{g_4\},$$

donde  $g_i = \frac{Ge_i}{\|Ge_i\|}$  para  $i = 1, 4$ . Si  $G\mathcal{W}_{\mathbf{w}}$  fuera de Parseval, entonces el marco

$$\mathcal{E} = \{T_{G\mathcal{W}_{\mathbf{w}}}g_k\}_{k \in \mathbb{I}_5} = \{w_1 g_1, w_1 g_2, w_2 g_1, w_2 g_3, w_3 g_3\},$$

sería un marco de Parseval (de vectores). Sea  $T \in \mathcal{M}_{4,5}(\mathbb{C})$  la matriz con los vectores de  $\mathcal{E}$  como columnas. Bajo un cambio de coordenadas adecuado,  $T$  es de la forma

$$T = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & \vec{v} \\ 0 & 0 & V \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathbb{C} \\ \mathbb{C}^3 \end{matrix} \quad \text{con } \vec{v} = (0, 0, a) \in \mathbb{C}^3 \text{ y } V \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}).$$

Dado que  $TT^* = Id_4$ , es fácil ver que  $V \in \mathcal{U}(3)$ . Pero esto es imposible dado que las dos primeras columnas de  $V$  tienen normas  $\|w_1 g_2\| = w_1$  y  $\|w_2 g_3\| = w_2$ , mientras que  $1 = w_1^2 + w_2^2 + |a|^2$ .

# Bibliografía

- [1] R. Abraham, J.E. Marsden, T. Ratiu *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications, Second Edition* , Applied Mathematical Sciences 75, Springer- Verlag, New York (1988).
- [2] A. Aldroubi, C. Cabrelli, U. M. Molter, *Wavelets on irregular grids with arbitrary dilation matrices and frame atoms for  $L^2(\mathbb{R}^d)$* , Appl. Comput. Harmon. Anal. 17 (2004), 119-140.
- [3] P.M. Alberti, A. Uhlmann *Stochasticity and partial order* Doubly stochastic maps and unitary mixing. Mathematische Monographien [Mathematical Monographs], 18. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, (1981).
- [4] T. Ando, *Majorization, doubly stochastic matrices and comparison of eigenvalues*, Lecture Note, Hokkaido Univ., (1982).
- [5] J.A. Antezana, *Proyecciones Oblicuas y Complemento de Schur - Aplicaciones a problemas de cuadrados mínimos, teoría de marcos y teoría de muestreo*, Tesis Doctoral, Universidad de La Plata (2006).
- [6] J.A. Antezana, G. Corach, M. Ruiz, D.Stojanoff, *Oblique Projections and Frames* , Proc. Amer. Math. Soc. 134 (2006), 1031-1037.
- [7] J. Antezana, P. Massey, M. Ruiz, D. Stojanoff, *The Schur-Horn Theorem for operators and frames with prescribed norms and frame operator*, Illinois Journal of Mathematics, Vol. 51, N° 2 (2007), 537-560.
- [8] J. Antezana, D. Stojanoff, *Análisis Matricial II - Operadores en espacios de Hilbert*, preprint.
- [9] M.S. Asgari, A. Khosravi, *Frames and bases of subspaces in Hilbert spaces*, J. Math. Anal. Appl., 308(2005), 541-553.
- [10] R. Balan, P. Casazza, C. Heil, Z. Landau, *Deficits and excesses of frames*, Adv. Comp . An., 18(2003), 93-116.
- [11] R. Bhatia, *Matrix analysis*. Graduate Texts in Mathematics, 169. Springer-Verlag, New York, (1997).
- [12] J.J. Benedetto, M. Fickus, *Finite normalized tight frames*, Adv. Comput. Math., 18 (2003), 357-385.
- [13] B. G. Bodmann, *Optimal linear transmission by loss-insensitive packet encoding*, Appl. Comput. Harmon. Anal. 22 (2007), 274-285.
- [14] B. G. Bodmann, D. W. Kribs, V. I. Paulsen, *Decoherence-insensitive quantum communications by optimal  $C^*$ -encoding*, preprint (2006).

- 
- [15] P.G. Casazza, *The art of frame theory*, Taiwanese J. Math., 4 no. 2 (2000), 129-201.
- [16] P.G. Casazza, *Custom building finite frames*, Wavelets, frames and operator theory, Contemp. Math., 345, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (2004),61-86.
- [17] P.G. Casazza, J.Kovacević, M.T.Leon, J.C.Tremain *Custom built frames*, Preprint (2000).
- [18] P.G Casazza, M. Fickus, J. Kovacevic, M.T. Leon, J.C. Tremain *A physical interpretation for tight frames*, Harmonic analysis and applications, Appl. Numer. Harmon. Anal., Birkhäuser Boston, Boston, MA, (2006), 51-76.
- [19] P.G. Casazza, J. Kovacevic, *Equal-norm tight frames with erasures*, Advances in Computational Mathematics, special issue on Frames, (2002).
- [20] P.G. Casazza,M.T.Leon, *Frames with a given frame operator*, preprint.
- [21] P.G. Casazza, M.T.Leon, *Existence and construction of finite tight frames*, J. Concr. Appl. Math. 4 (3) (2006), 277-289.
- [22] P. G. Casazza, G. Kutyniok, *Frames of subspaces*, Wavelets, frames and operator theory, Contemp. Math., 345, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (2004),87-113.
- [23] P. G. Casazza, G. Kutyniok, *Robustness of Fusion Frames under Erasures of Subspaces and of Local Frame Vectors*, preprint.
- [24] P. G. Casazza, G. Kutyniok, S. Li, *Fusion Frames and Distributed Processing*, Applied and Computational Harmonic Analysis, en prensa.
- [25] O. Christensen, *An introduction to frames and Riesz bases*, Birkhäuser, Boston, (2003).
- [26] I. Daubechies, *Ten Lectures on Wavelets*, SIAM Philadelphia, PA, (1992).
- [27] I.Daubechies, A. Grossman, Y. Meyer, *Painless nonorthogonal expansions*, Journ. Math. Phys. 27 (1986), 1271-1283.
- [28] P.I. Davies y N.J. Higham, *Numerically stable generation of correlation matrices and their factors*, BIT, 40 (2000), 640-651.
- [29] F. Deutsch, *The angle between subspaces in Hilbert space*, "Approximation theory, wavelets and applications", Kluwer, Netherlands, (1995), 107-130.
- [30] I.S. Dhillon, R.W. Heath Jr., M.A. Sustik, J.A. Tropp, *Generalized finite algorithms for constructing Hermitian matrices with prescribed diagonaly spectrum*, SIAM J. Matrix Anal. Appl. 27(1) (2005), 61-71.
- [31] R.J. Duffin, A. C. Schaeffer, *A class of nonharmonic Fourier series*, Trans. Amer. Math. Soc. 72 (1952) 341-366.
- [32] K. Dykema, D. Freeman, K. Korleson, D. Larson, M. Ordower y E. Weber, *Ellipsoidal tight frames and projection decomposition of operators*, Illinois J. Math. 48 (2004), 477-489.
- [33] D. J. Feng, L. Wang, Y. Wang *Generation of finite tight frames by Householder transformations*, Advances in Computational Mathematics, 24 (2006), 297-309.
- [34] M.Fornasier, *Quasi-orthogonal decompositions of structured frames*, J.Math. Anal. Appl. 289 (2004),180-199.

- 
- [35] M.Fornasier, *Decompositions of Hilbert spaces: local construction of global frames*, Proc. Int. Conf. on Constructive function theory, Varna (2002), B. Bojanov Ed., DARBA, Sofia, (2003), 275-281.
- [36] M. Fickus, B.D.Johnson, K. Kornelson, K.A.Okoudjou *Convolutional frames and the frame potential*, Appl. Comput. Harmon. Anal., 19 (2005), 77-91.
- [37] M. Frank, D.R. Larson, *Frames in Hilbert  $C^*$ -modules and  $C^*$ -algebras* J. Oper. Theory 48 (2) (2002), 273-314.
- [38] P. Gavruta, *On the duality of fusion frames*, J. Math. Anal. Appl. 333 (2007), 871-879.
- [39] V. K Goyal, J. Kovacevic, J.A. Kelner, *Quantized frame expansions with erasures*, journal of Appl. and Comput. Harmonic Analysis 10(3) (2001), 203-233.
- [40] K. Gröchenig, *Describing functions: Atomic decompositions versus frames*, Monatshefte für Math. 112 (1991), 1-41.
- [41] K. Gröchenig, *Foundations of time-frequency analysis*, Birkhäuser, Boston (2000).
- [42] D. Han, D.R. Larson, *Frame, Bases and Group Representations*, Mem. Amer. Math. Soc. 147 no. 697 (2000).
- [43] R. Holmes, V. Paulsen *Optimal Frames for Erasures*, Lin. Alg. Appl. 377 (2004), 31 -51.
- [44] J. R. Holub, *Pre-frame operators, Besselian frames and near-Riesz bases in Hilbert spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 122 (1994), 779-785.
- [45] R. Horn, C. Johnson, *Matrix analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, (1985).
- [46] T. Kato, *Perturbation theory of linear operators*, (second edition) Springer, New York, (1984).
- [47] K. Kornelson, D. Larson, *Rank-one decomposition of operators and construction of frames*. Wavelets, frames and operator theory, Contemp. Math., 345, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (2004), 203-214.
- [48] R. S. Leite, T. R. W. Richa, C. Tomei *Geometric proofs of some theorems of Schur-Horn type* Linear Algebra Appl. 286 (1999), 149-173.
- [49] J.Lindenstrauss, L Tzafriri, *Classical Banach spaces I*, Springer, New York 1977.
- [50] P.G. Massey, *Teorema de Schur-Horn, mayorización conjunta, modelado de operadores y aplicaciones*, Tesis Doctoral, Universidad de La Plata, (2006).
- [51] P. Massey, M. Ruiz, *Tight frame completions with prescribed norms*, Sampl. Theory Signal Image Process, aceptado para su publicación.
- [52] P. Massey, M. Ruiz *Minimization of convex functionals over frame operators*, preprint.
- [53] M. Ruiz, D. Stojanoff, *Some properties of frames of subspaces obtained by operator theory methods*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, aceptado para su publicación.
- [54] W. Sun *G-frames and g-Riesz bases*, J. Math. Anal. Appl., 322(2006), 437-452.
- [55] S. Waldron, *Generalised Welch Bound Equality sequences are tight frames*, IEEE Trans. Info. Th., vol., 49(9) (2003), 2307-2309.
- [56] R. M. Young, *An introduction to nonharmonic Fourier series* (revised first edition) Academic Press, San Diego, (2001).