LA DOBLE FUERZA CENTRIFUGA

por DARIO ROZO M.

En el número 71 de la revista *Ingeniería y Arquitectura,* el profesor Julio Carrizosa Valenzuela afirma que hemos dicho que la fuerza centrífuga, en los cuerpos elásticos rotantes, es doble de lo que se acepta hoy por todos los científicos. El doctor Carrizosa nos ha interpretado mal, pues no hemos afirmado tal cosa ni el doctor Rodrigo Noguera ni yo: quisimos demostrar que en un determinado problema resulta una fuerza igual al doble de la centrífuga; esto es muy distinto a afirmar que la fuerza centrífuga es el doble de la que aceptan los científicos.

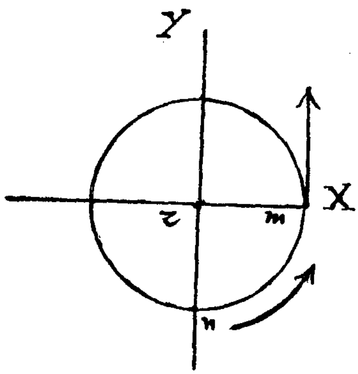
Sin duda se debió la confusión del doctor Carrizosa a una lectura superficial de mi escrito, porque no puede suponerse una tergiversación adrede para hacer público alarde de nuestra ignorancia en las materias que él conoce tan acertadamente y que enumera con detalle. Mas debemos confesar que en el caso que estudia "para concretar la discusión" se desarrolla un problema enteramente distinto al estudiado por nosotros y que constituye el motivo de la crítica.

En efecto, el caso estudiado por el doctor Carrizosa es el de una esfera de masa *M sujeta* al extremo de una varilla rígida, la cual gira alrededor de un eje que le es normal. Nuestro problema es el de un punto material perteneciente a la superficie de una masa líquida en rotación alrededor de un eje matemático interior a la masa; el punto material no está *sujeto* al líquido, puede moverse, y desprenderse de la superficie dicha.

No hay más analogía entre estos dos problemas que la de girar. El primero pertenece a la resistencia de materiales, muy acorde con las disciplinas de la cátedra que el doctor Carrizosa preside en la Facultad. El segundo pertenece a ciertos estudios de mecánica en que mi ilustración deja mucho que desear.

El propósito mío, ahora, es el de aclarar en cuanto pueda lo referente a mi problema para evitar esta lamentable ignorancia del elenco.

El problema esbozado arriba se redujo a lo siguiente: supongamos una sección plana, normal al eje de giro del cuerpo propuesto por nosotros y cuya superficie debe ser líquida. El contorno de esa sección es representable por una curva cerrada como la de la figura adjunta, en la cual el punto z indica la proyección del eje, que será normal al plano de la figura; tomaremos ese eje por eje de las ZZ, y en el plano de la figura los otros dos ejes de coordenadas rectangulares entre sí, XX, YY.



Cualquier punto de la periferia de esta sección, que llamaremos paralelo, estará sometido a las condiciones enumeradas al enunciar el problema en general, por consiguiente se puede considerar para el caso el punto material de masa m que ocupa en un instante dado el eje de las XX. Todo el disco limitado por el paralelo gira en el sentido nm.

Por ser fluído como un líquido el material vecino al borde del disco, el punto m estará suelto y tenderá a salir por la tangente, puesto que falta la rigidez de una varilla que lo retenga y no se pueden suponer las tensiones Ta y Tb actuando del modo explicado detalladamente por el doctor Carrizosa. Le falta, pues, al punto m aquella indispensable "reacción que corresponde a la fuerza centrípeta" y por tanto el punto tenderá a seguir en la dirección de la tangente.

Supongamos las condiciones del problema en este estado, esto es, a punto de deshacerse el equilibrio. Entonces, para que el equilibrio subsista es necesario que el punto no tome la tangente y siga sobre el paralelo con *la misma velocidad circulatoria de éste,* la cual se supone constante.

Planteado así el problema se tenía un bonito ejercicio de mecánica; pero yo, temeroso de mí mismo, lo escribí muy claramente y acudí a un alumno de la Facultad para que me lo resolviera. El lo leyó pausadamente tres o cuatro veces y después me dijo sonriendo, cuando le insinué que el principio de D'Alembert sería oportuno:

—Profesor, aquí no se necesita tal cosa porque no se trata de hallar las ecuaciones de movimiento.

Yo no pude disimular mi confusión, y pensé que al decirme eso, me indicaba el procedimiento que yo debía intentar y que él eludía el trabajo de resolverlo. Debió notar mi turbación, porque mirándome a los ojos añadió:

—Si quiere y me da un tiempito, se lo traigo resuelto esta tarde.

Disimulando lo mejor que pude, traté de disculpar mi actuación y convinimos en que me lo traería resuelto.

El joven estudiante cumplió lo prometido y transcribo aquí lo que me entregó.

Sean $-G_x$ $-G_y$ $-G_z$, las componentes de la atracción newtoniana sobre el punto m según las direcciones de los ejes X, Y, Z.

Sea ω la velocidad angular
Sea α la aceleración angular
Sea r el radio de curvatura en m

La cantidad de movimiento del punto m al iniciarse el desprendimiento es mr, por tanto la fuerza de desviación será

$$F = \frac{d}{dt} mr\omega = mr\alpha \qquad \text{(a}$$

y tendrá la dirección del eje de las YY.

La fuerza centrípeta que trae el punto es

$$C = mr\alpha \qquad \text{(b}$$

Se tiene, pues, en general para las fuerzas exteriores

$$\begin{aligned} \Sigma X &= mra - G_x \\ \Sigma Y &= F \quad - G_y \\ \Sigma Z &= \quad\quad - G_z \end{aligned}$$

Nos concretaremos a las fuerzas situadas en el plano del paralelo, que es el de las XY, y que *es* lo que interesa.

Si el punto ha de moverse sobre el paralelo, designando con f la ecuación de éste, las fuerzas aplicadas son:

$$\Sigma X = - G_x + C + k \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\Sigma Y = - G_y + F + k \frac{\partial f}{\partial y}$$

Si el cuerpo al girar y llegar a su equilibrio toma una forma regular en torno del eje, la atracción de él sobre el punto m estará contenida en el plano del meridiano que pasa por m, y como $F = C$ se tendrá:

$$m \frac{\partial f}{\partial x} = - G_x + C + k \frac{\partial f}{\partial x} \qquad (1)$$

$$m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \quad C + k \frac{\partial f}{\partial^2 y} \qquad (2)$$

Por otra parte, como la ecuación del paralelo es función solamente de x y de y, se debe tener

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = o \qquad (3)$$

Como el punto m debe tener velocidad constante

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = o$$

por tanto la (2) dará

$$k \frac{\partial f}{\partial y} = - C$$

y por la (3)

$$k \frac{\partial f}{\partial x} = C$$

Sustituyendo este valor en la (1) resulta

$$m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = - G_x + 2C$$

Esta ecuación indica que según la dirección ZX, la dirección radial, hay una fuerza $2C$ que según la (b) es

$$2C = 2mra$$

igual al doble de la fuerza centrífuga.

Me entregó el papel, lo leí con cuidado y me atreví a preguntar:

—¿Por qué me dijo esta mañana que no se necesitaba el principio de D'Alembert?

—¡Ah! —me replicó con cierta burla—. ¿No ve que el principio de D'Alembert es para encontrar las ecuaciones de movimiento sin meterse con las fuerzas de ligazón? Y en su problema lo que se necesita buscar es precisamente la fuerza que obligue al punto a moverse sobre el paralelo.

Pero con todo yo no quedé satisfecho, porque podía haber ignorancia en el mecanismo del propio raciocinio matemático, y resolví acudir a los científicos de prestigio; guiado por vagos recuerdos de *velocidad de fuga* y de *fuerza centrífuga compuesta,* me di a buscar en libros escritos por ellos y hallé resueltos los siguientes problemas que copio y que confirman los resultados obtenidos por el estudiante.

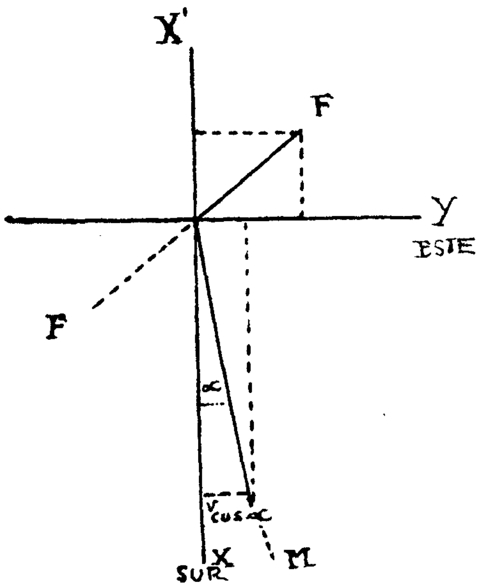
''Supongamos que un punto de masa m se mueve en un plano horizontal, con velocidad uniforme v, en la dirección OM, la cual forma un ángulo α con el eje de las X, es decir, con la porción del meridiano dirigida hacia el sur.''

''Siendo rectilíneo y uniforme el movimiento del punto, se tendrá

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = 0 \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = 0$$

y para hacerle seguir la recta OM, será necesario aplicarle una fuerza cuyas componentes X, Y, Z, estarán dadas por las ecuaciones

$$\begin{aligned} X + 2m\omega \operatorname{sen}\lambda \ . \ v \operatorname{sen}\alpha &= 0 \\ Y - 2m\omega \operatorname{sen}\lambda \ . \ v \cos\alpha &= 0 \\ Z + mg - 2m\omega \cos\lambda \ . \ v \operatorname{sen}\alpha &= 0 \end{aligned}$$



"La tercera ecuación da la reacción vertical del plano o de la recta que sirve de guía al punto."

En estas ecuaciones g es la aceleración debida a la gravedad, ω es la velocidad angular, λ es la latitud y v sen α es la componente de la velocidad del punto según la dirección de oeste a este.

Tenemos en estas fórmulas tres componentes de una fuerza especial, las que llamaremos x, y, z, a saber

$$x = 2m\omega \operatorname{sen} \lambda \;.\; v \operatorname{sen} \alpha$$
$$y = 2m\omega \operatorname{sen} \lambda \;.\; v \cos \alpha$$
$$z = 2m\omega \cos \lambda \;.\; v \operatorname{sen} \alpha$$

Ahora consideremos un caso particular de este problema que consiste en suponer que el punto m se mueve sobre el paralelo con velocidad igual a la de la tierra en ese mismo paralelo. Se tendrá entonces siendo r el radio del paralelo

$$\alpha = 90^\circ \qquad v = r\omega$$

y por consiguiente

$$x = 2m\omega \operatorname{sen} \lambda \;.\; r\omega$$
$$y = 0$$
$$z = -\,2m\omega \cos \lambda \;.\; r\omega$$

Estas componentes dan una fuerza contenida en el plano de las XY, esto es en el plano del meridiano. Eliminando λ por medio de los cuadrados se obtiene el valor de la fuerza, que estará situada a la vez en el plano del meridiano y en el del paralelo:

$$f = \sqrt{x^2 + z^2} = 2mr\omega^2$$

Como se ve, esta fuerza es el doble de la fuerza centrífuga.

El problema transcrito está tomado de la obra titulada *Traité de Mécanique*, escrita por Edouard Collignon, impresa en París en 1874 por Hachette et Cie.

Veamos ahora otro ejemplo tomado de la mecánica celeste.

"Sea un punto de masa m atraído por un centro fijo de masa M en razón inversa del cuadrado de la distancia y proporcional al producto de las masas. La fuerza será

$$F = G\frac{mM}{r^2}$$

siendo G la constante de gravitación.

"En el movimiento circular se tendrá, siendo

Ω = velocidad angular
g = la aceleración necesaria
v_c = velocidad lineal circular

$$g = \Omega^2 r^2 = v^2_c \quad : \quad r$$

"La condición de equilibrio es

$$g = \frac{v^2_c}{r} = \frac{GM}{r^2} \qquad v_c = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

"*Movimiento rectilíneo.*—Decir que la fuerza sobre la unidad de masa es $G\ M\ :\ r2$, es tanto como decir que existe un potencial $G\ M\ :\ r$. El trabajo efectuado por la fuerza atrayente es igual al *incremento* de esta cantidad."

"Apliquemos el teorema de las fuerzas vivas. Sean V y v las velocidades a las distancias R y r. Se tendrá

$$\frac{v^2 - V^2}{2} = GM\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right]$$

19

"Hay un caso interesante que considerar y es el de un punto que párte de una distancia infinita donde estaba en reposo. Entonces $R = \infty$ y $V = O$ y llegará a la distancia r con la velocidad

$$v_p = \sqrt{2GM : r} = \sqrt{2}\, v_c$$

"Esta velocidad se llama *parabólica.*"

Inversamente para que un cuerpo sea expelido se necesita que adquiera una velocidad

$$v_f = \sqrt{2}\, v_c$$

"Esta velocidad se llama *de fuga* o *de liberación.*"

En cualquiera de los dos casos es claro que para que el cuerpo sea captado a la distancia r, es necesaria una aceleración de la forma

$$a = v_p/r$$
$$a = v_f/r$$

o sea

$$a = 2v^2{}_c/r$$

Lo transcrito arriba se ha tomado de la *Astronomie Théorique et Practique* por H. Bouasse, Professeur a la Faculté des Sciences de Toulouse. Impresa en París en 1918. Librería Delagrave (páginas 301 y siguientes).

La doble fuerza centrífuga no es, pues, una cosa reñida con las matemáticas; ni su deducción constituye teoría original alguna que merezca llamarse de modo especial; es una fuerza conocida desde hace muchos años por los hombres de ciencia, quienes la distinguieron con el nombre de *fuerza centrífuga compuesta;* interviene en determinados problemas, especialmente en algunos de mecánica celeste. No es, pues, una *base deleznable* para ciertos estudios ni constituye una hipótesis extraordinaria.

Ahora una quisicosa de álgebra.

De $\dfrac{V^2}{r} = \dfrac{V^2{}_x}{r} - \dfrac{V^2}{r}$ se obtiene $V^2 = V^2{}_x - V^2$

Si se tiene que Vx = h V resulta

$$V^2 = h^2V^2 - V^2$$

De aquí se obtiene $h^2V^2 = 2V^2$ y quitando el factor común, se encuentra

$$h^2 = 2$$

Yo no he podido comprender por qué se debe concluir que *h* debe ser igual a uno, como dice el doctor Carrizosa. Indudablemente no fui leído con cuidado porque en primer lugar la igualdad, tal como la transcribe el doctor Carrizosa, no aparece en mi escrito; y en segundo lugar, porque allí no se ha advertido que $Vx = V$ para después hacer $hV = V$ y deducir que h vale 2. Por el contrario, en la línea 16 de la página 361 del número 6 de la *Revista Universidad Nacional de Colombia*, que el doctor Carrizosa cita previamente para fundar su crítica, quedó impresa esta desigualdad

$$V_x \neq V$$

que se lee Vx diferente de V.

Tampoco en mi escrito deduje que $h = 2$; en la línea 4 de la página 362 de la revista citada está claramente escrito que

$$h^2 = 2$$

Otra nota. Se supone que las moléculas de un cuerpo sólido o líquido están ligadas por algo como una fuerza, que se llama de cohesión, y que las fuerzas elásticas provienen de esa cohesión. Un mismo cuerpo puede desarrollar fuerzas elásticas de contracción o de expansión, como el caucho que si se estira trata de contraerse y si se comprime, trata de expandirse.

Al ver la formación y desprendimiento de una gota de agua, se nota claramente la presencia de las fuerzas elásticas. En una masa líquida que esté en rotación, una molécula de la superficie de equilibrio tenderá a escaparse de ella cuando adquiera la velocidad de liberación que a su vez depende de la velocidad angular de la masa; en ese instante forzosamente tiene que iniciarse un alargamiento que es posible a causa de la elasticidad; tal alargmiento, si el equilibrio ha de permanecer, debe ser contrarrestado por alguna fuerza exterior; ahora bien, toda fuerza mecánica nace de una aceleración, por eso dije que debe haber una cierta aceleración que contrarresta el alargamiento x proveniente de la elasticidad. Frase ésta que causó la siguiente pregunta del doctor Carrizosa: ¿Qué es, por otra parte, contrarrestar el alargamiento por medio de una aceleración? ¿Anularla? Pregunta que queda contestada con lo dicho arriba.

Más abajo dice el doctor Carrizosa que yo afirmo al final de mi escrito que las fuerzas elásticas son función de las aceleraciones de las partículas. También leyó descuidadamente esta parte, y para comprobarlo transcribiré la frase a que alude:

"Si hay deformación elástica, la fuerza que entra en el equilibrio tiene que ser función de la aceleración W_x."

El sentido de esta frase es bien claro para quienes hayan leído lo que precede a la transcripción, la cual, parafraseada, sería así:

Si hay deformación elástica el equilibrio no subsiste, y entonces para que subsista, *la fuerza que entra en el equilibrio tiene que ser función de la aceleración* W_x, según lo expuesto anteriormente.

De lo que dejo escrito aquí se deduce que la crítica del doctor Carrizosa carece de serenidad y de fundamento adecuado.

Bogotá, febrero de 1947.