

EL USO DE EXPECTILES EN LA MEDICIÓN DEL RIESGO. COMPARATIVA CON EL VaR Y CON EL ES.

Larisa Cimpean

Trabajo de investigación 006/017

Máster en Banca y Finanzas Cuantitativas

Tutores: Dr. Alfonso Novales Cinca
Dra. Laura García Jorcano.

Universidad Complutense de Madrid

Universidad del País Vasco

Universidad de Valencia

Universidad de Castilla-La Mancha



**El uso de expectiles en la medición del riesgo.
Comparativa con el VaR y con el ES**

Larisa Cimpean

Máster en Banca y Finanzas Cuantitativas

Directores:

Alfonso Novales Cinca

Laura García Jorcano

Departamento de Economía Cuantitativa
Universidad Complutense de Madrid

Universidad de Valencia

Universidad Complutense de Madrid

Universidad del País Vasco

Universidad de Castilla-La Mancha

Madrid, Julio 2017

Resumen

En este trabajo se utilizan los expectiles como medida de riesgo. Se pretende desarrollar un expectil cambiante en el tiempo que mida el riesgo inherente de un activo a lo largo del periodo de gestión. Antes de analizar el Expectil de manera paramétrica, se explican las medidas de riesgo Value at Risk (VaR) y Expected Shortfall (ES). También se analizan los modelos semiparamétricos, CAViaR (Conditional Autoregressive Value at Risk) para el VaR, CARE (Conditional Autoregressive Expectiles) para el Expectil y CARES (Conditional Autoregressive Expected Shortfall based on Expectiles) para el Expected Shortfall. Por último se lleva a cabo un análisis empírico para diferentes activos y se presentan las conclusiones con posibles continuaciones de este trabajo.

Palabras Clave:

VaR, ES, Expectil, modelos tipo-GARCH, Modelos CARE, backtesting.

Agradecimientos

Me gustaría dar las gracias a Alfonso Novales Cinca y Laura García Jorcano por sus sabios consejos, recomendaciones, sugerencias y, sobre todo, por su apoyo incondicional y paciencia en mi primer trabajo de investigación.

En segundo lugar, pero no menos importante, agradecer a mi familia, sin los cuáles mi formación académica no hubiera sido posible.

Índice

1. Introducción	1
2. Literatura	2
3. Medidas de Riesgo	5
3.1. Value at Risk (VaR)	5
3.2. Expected Shortfall (ES)	6
3.3. Expectil	7
4. Predicción con modelos paramétricos	13
4.1. VaR	14
4.2. ES	15
4.3. Expectil	16
5. Modelos semiparamétricos	16
5.1. CAViaR	17
5.2. CARE	18
5.3. CARES	19
6. Backtesting	21
6.1. VaR	21
6.1.1. Ratio de violaciones	21
6.1.2. Test de cobertura incondicional (Kupiec)	22
6.1.3. Test de cobertura condicional (Christoffersen)	23
6.1.4. Test Dynamic Quantile (Engle & Manganelli)	25
6.1.5. Función de pérdida de López	26
6.1.6. Función de pérdida de Sarma et al.	27
6.2. ES	28
6.2.1. Test Righi & Ceretta	28
6.3. Expectil	30
6.3.1. Ratio de pérdidas y ganancias	30
6.3.2. Función de pérdida de Bellini & Di Bernardino	33
7. Datos y Modelos Estimados	34
7.1. Optimización de los modelos	35
7.2. Resultados de la estimación	36
7.3. Resultados backtesting	43
8. Conclusiones	54
9. Bibliografía	56

Anexo	59
A. Propiedades de las medidas de riesgo	59
A.1. Coherencia	59
A.2. Convexidad	60
A.3. Medidas Espectrales	60
A.4. Elicitabilidad	62
A.5. Robustez	63
B. Modelos de volatilidad	64
B.1. GARCH	65
B.2. GJR-GARCH	66
B.3. APARCH	67
C. Distribuciones de probabilidad	68
C.1. Normal	68
C.2. t-Student	68
C.3. Skew-tStudent	69
D. Gráficos FTSE	72
D.1. Gráficos Medidas de Riesgo	73
E. Resultados Backtesting	76

1. Introducción

El cambio en las condiciones de mercado debido a la crisis financiera de 2007 sometieron al sector bancario a graves presiones, necesitando la participación de bancos centrales e incluso alguna institución financiera para respaldar el funcionamiento de los mercados monetarios. Por este motivo, cada vez hay más preocupación por captar y medir lo mejor posible el riesgo en la cola de la distribución de pérdidas y ganancias de los activos y carteras. El Comité de Supervisión Bancaria de Basilea ha aumentado el control del sistema bancario y ha llevado a cabo reformas para mejorar la capacidad de absorción de perturbaciones procedentes de tensiones financieras o económicas de cualquier tipo, reduciendo con ello, el riesgo de contagio del sector financiero a la economía real.

La métrica más empleada en la medición del riesgo de la cola de la distribución de pérdidas y ganancias de los activos y carteras ha sido el Value at Risk (VaR). Esto se debe principalmente a dos motivos: *i)* proporciona una medida resumida del riesgo de mercado y *ii)* se puede realizar un backtesting de manera simple para saber si está midiendo el riesgo de forma adecuada. No obstante, presenta un gran inconveniente y es que no es una medida coherente [ver Artzner et. al, 1999, *Coherent measures of risk*] al no cumplir la propiedad de subaditividad. Es decir, fusionar dos carteras puede aumentar el riesgo conjunto en el caso del VaR, no facilitando la diversificación y dando pie a comportamientos oportunistas.

Para solventar el inconveniente del VaR surge una nueva medida de riesgo denominada Expected Shortfall (ES), [ver Acerbi & Tasche, 2002, *On the Coherence of Expected Shortfall*]. A diferencia del VaR que no tiene en cuenta el comportamiento de la cola más allá del propio cuantil, el ES sí que lo tiene. El ES al 97.5% es la medida que ha impuesto el Comité de Basilea en la revisión de las normas para los requerimientos de capital de las entidades bancarias de enero de 2016. Si bien es cierto que se trata de una medida coherente tiene el inconveniente de no cumplir la propiedad de elicibilidad. Esto ha estado restringiendo el desarrollo de pruebas y procedimientos de backtesting para el Expected Shortfall.

Recientemente, se ha tomado en consideración una medida de riesgo coherente basada en la familia de los expectiles. Éstos fueron introducidos por Newey & Powell (1987) como la solución a la minimización de una función cuadrática asimétrica para las pérdidas. El $Expectil_{\tau}$ es la medida de riesgo financiero asociada a los expectiles, de la misma forma que el VaR_{α} es la medida de riesgo asociada a los cuantiles. Desde el punto de vista financiero, se interpreta como la cantidad de capital que se debería añadir a una posición o cartera para disponer de un ratio de ganancias y pérdidas predeterminado lo suficientemente alto [ver Bellini y Di

Bernardino, 2015, *Risk Management with Expectiles*].

Las preguntas a las que se trata de dar respuesta con la realización de este trabajo son: ¿Es el Expectil una buena medida de riesgo?, ¿Qué modelos y/o distribuciones son más adecuados para su predicción? y ¿Cuál es la aportación del Expectil a las medidas benchmark, VaR y ES? Se determinará que el Expectil es una medida de riesgo con capacidad de absorción de las potenciales pérdidas de capital en la cola izquierda de la distribución de rendimientos, además de permitir ajustar lo mejor posible el riesgo real al considerar toda la distribución. Tanto el Expectil, como las demás medidas de riesgo, sugieren que la selección de la distribución de probabilidad es más importante que la del modelo de volatilidad. Así, distribuciones asimétricas y volatilidades con apalancamiento tienden a ser preferidas en el backtesting. Y, por último, se espera que el Expectil capture mejor el riesgo que el VaR y ES por incluir más información, presentar la ventaja de sencillez de cálculo y eficiencia computacional e incorporar las propiedades que el VaR y ES no cumplen.

En la sección 2 se realiza un breve recorrido por la literatura relacionada con la definición y estimación de los expectiles, así como, de los modelos CAViaR (Conditional Autoregressive Value at Risk) y CARE (Conditional Autoregressive Expectiles). En la sección 3 se presentan de manera general las medidas de riesgo VaR, ES y Expectil. En la sección 4 se proponen los modelos paramétricos de las medidas de riesgo con las que se lleva a cabo la predicción. En la sección 5 se estudian los modelos CARE para los expectiles y CARES (Conditional Autoregressive Expected Shortfall based on Expectiles) para el ES y se comparan con el modelo CAViaR existente para la estimación del VaR. En la sección 6 se explican los diferentes contrastes y funciones de pérdida que se van a emplear para la validación de las medidas de riesgo propuestas. En la sección 7 se indica la naturaleza de los datos y se presentan los resultados del análisis empírico con tablas y gráficos para diferentes activos, además de los resultados del backtesting que permiten comparar la precisión de estas medidas de riesgo para los diferentes activos. Por último, en la sección 8 se muestra un breve resumen de este trabajo y las conclusiones que se han extraído del mismo.

2. Literatura

En la literatura se han estudiado exhaustivamente las medidas tradicionales de riesgo, VaR y ES. La mayoría de los métodos existentes estiman la distribución de los rendimientos y luego recuperan su cuantil de manera indirecta. Por el contrario, Engle & Manganelli (2004) introdujeron, como método semiparamétrico para la estimación del VaR, los modelos CAViaR que modelan directamente

el cuantil y cuya estructura es similar a los modelos GARCH. La estimación de los parámetros del modelo se obtiene a través de la minimización de la regresión cuantílica. Utilizando el criterio de que en cada período la probabilidad de superar el VaR debe ser independiente de toda la información pasada, introducen un nuevo test para verificar la adecuación del modelo, el test DQ (Dynamic Quantile test).

Liao & Smith (2014) introducen una nueva clase de modelos, los modelos CARES¹ (Conditional Autoregressive Expected Shortfall) que utilizan los modelos CAViaR para la estimación del cuantil y después modelizan directamente la evolución del número de pérdidas esperadas que exceden el cuantil a través del tiempo utilizando un proceso autorregresivo específico (ES). La estimación de los parámetros se hace en dos etapas o bien una estimación conjunta dentro del marco del método generalizado de momentos (GMM). Los modelos CARES de Liao & Smith difieren de los modelos CARES empleados en este trabajo puesto que no tienen ninguna relación con los expectiles mientras que los modelos CARES que se van a considerar modelizan el Expected Shortfall basado en expectiles.

Aunque el punto de mira en los expectiles como medida de riesgo es algo reciente y no tan conocida como las otras medidas mencionadas, lo cierto es que Newey & Powell (1987) ya utilizaron este término para la solución a un problema de regresión de mínimos cuadrados asimétricos (ALS²). Ante la existencia de un mapeo uno-a-uno entre expectiles y cuantiles, Efron (1991) propuso obtener la estimación de los α -cuantiles a través de los expectiles de manera que el número de observaciones que caen por debajo del τ -expectil de interés sea α . Esto proporciona una justificación del empleo de la regresión ALS para la obtención de cuantiles.

Taylor (2008) introdujo un nuevo enfoque para la estimación del VaR y del ES condicional que es compatible con las prácticas actuales de gestión de riesgos. La dinámica del VaR y del ES se modeliza a través de la dinámica de los expectiles que se obtienen utilizando la regresión ALS. Normalmente el nivel de confianza α está predeterminado (1%, 5%) y, por ello, Taylor determina numéricamente el nivel de confianza τ específico para cada activo. Una vez hecho ésto, mostró que el

¹Los modelos CARES de Liao & Smith son diferentes a los modelos CARES que se van a presentar en este trabajo. Liao & Smith, en una primera etapa, estiman los parámetros ($\hat{\beta}$) del modelo CAViaR y el \widehat{VaR}_α solucionando $\min_{\{\beta\}} 1/T \sum_{t=1}^T (\alpha - I_{\{r_t < VaR_t(\alpha)\}} (r_t - VaR_t(\alpha)))$ y, en una segunda y última etapa, el VaR estimado se usa como una observación en el problema a minimizar para estimar los parámetros (γ) de su modelo CARES para el ES, $\min_{\{\gamma\}} 1/T \sum_{t=1}^T I_{\{r_t < \widehat{VaR}_t(\alpha)\}} (r_t - ES_t(\alpha))^2$; alternativamente, presentan la estimación conjunta de los parámetros β y γ solucionando los problemas anteriores conjuntamente dentro del marco GMM.

²ALS es el acrónimo en inglés de *asymmetric least squares*. En algunos papers se utiliza el acrónimo LAWS (*least asymmetrically weighted least squares*) para diferenciarlo de ALS (*alternating least squares*).

estimador del expectil condicional se puede utilizar como un estimador del cuantil condicional y, tras una simple transformación, como el estimador condicional ES. De esta manera, lo que él denomina *EVaR* no es más que el VaR estimado a partir de expectiles, para un nivel τ predeterminado que se corresponde con un nivel α . Además, introdujo los modelos CARE³ (Conditional Autoregressive Expectiles), similares a los modelos CAViaR, para la estimación del ES a través de la estimación de un modelo previo de expectiles.

Kuan et al. (2009) proponen como medida el *Expectil* $_{\tau}$ y lo interpretan como un VaR flexible basado en cuantiles (QVaR) para la distribución de los rendimientos subyacente. Un determinado τ -expectil está asociado a diferentes α -cuantiles dependiendo de la distribución considerada. Así, en lugar de encontrar el QVaR para un α predeterminado, ellos proponen identificar el Expectil para un τ dado y permitir que los datos revelen su propio riesgo en términos de la probabilidad en la cola (α). Esta es la gran diferencia entre Taylor y Kuan et al.: i) Taylor calcula la misma medida de riesgo, un VaR, haciéndolo a través de los expectiles por eficiencia computacional, por ejemplo, si quiere obtener un VaR a un nivel de confianza $\alpha = 5\%$ simplemente calcula el expectil para un $\tau(\alpha) = 0.0126$ correspondiente a su muestra FTSE, y ese $e_{\tau(\alpha)=0,0126}$ es igual que el $q_{\alpha=0,05}$. ii) Kuan et al. calcula el Expectil para un nivel de confianza τ , con una interpretación distinta al VaR_{α} . No obstante, gracias al mapeo uno-a-uno entre expectiles y cuantiles, es posible averiguar el VaR_{α} correspondiente a un *Expectil* $_{\tau}$. Por ejemplo, si calcula un *Expectil* $_{\tau=0,01}$ se sabe que el Value at Risk asociado a esa medida de riesgo es el $VaR_{\alpha=0,043}$ en el caso de una Normal(0,1), por tanto, sí es posible obtener un VaR asociado al Expectil, pero no es éste el objetivo de Kuan et al, ya que además de interpretar τ como un índice de prudencia, discuten las propiedades de los expectiles y del estimador ALS, introducen una serie de modelos CARE y llevan a cabo un análisis empírico utilizando índices de mercado.

Bellini & Di Bernardino (2015) realizan una comparativa entre el VaR y EVaR para diferentes funciones de distribución. Asimismo, estudian las propiedades de los expectiles, el comportamiento asintótico de los mismos en la cola derecha así como, su interpretación financiera.

Emmer et al. (2015) realizan un amplio estudio acerca de las propiedades estadísticas y matemáticas que cumplen las diferentes medidas de riesgo, esto es, VaR, ES y expectiles. Además, llevan a cabo un análisis empírico en el que mediante backtesting concluyen que el ES es una medida de riesgo más apropiada según la muestra y periodo muestral utilizado.

³Los modelos CARE de Taylor modelizan el expectil para aquel τ correspondiente a un nivel α tal que $e_{\tau(\alpha)} = q_{\alpha}$. En este trabajo los modelos CARE van a servir para modelizar la dinámica del *Expectil* $_{\tau}$.

Hamidi et al. (2015) introducen una nueva clase de modelos para el VaR y el ES, los modelos DARE (Dynamic AutoRegressive Expectiles). Un modelo DARE para un cuantil condicional $q_t(\alpha)$ se define como un promedio ponderado de K modelos CARE⁴. El prefijo “dinámico” hace referencia al uso de ponderaciones cambiantes en el tiempo que pueden depender de la información pasada. El uso de expectiles evita tener que hacer supuestos sobre la distribución y el enfoque de modelos ponderados permite diversificar el riesgo asociado a cada uno de los mismos. En definitiva, es otra forma de mostrar el uso de expectiles para la estimación de cuantiles como medidas de riesgo. Por último, llevan a cabo un amplio número de contrastes de backtesting para comparar el enfoque DARE con otros métodos tradicionales de cálculo de predicciones del Value at Risk.

3. Medidas de Riesgo

La Gestión de Riesgos es una competencia básica de instituciones financieras como bancos, compañías de seguros y fondos de inversión, entre otros. Las técnicas para la medición del riesgo son claramente centrales para el proceso de gestión del riesgo. El riesgo se puede medir en términos de distribuciones de probabilidad. Sin embargo, a veces es útil expresar el riesgo con un número que puede ser interpretado como una cantidad de capital. Las herramientas que asignan distribuciones de pérdidas o variables aleatorias a las cantidades de capital se llaman medidas de riesgo. A continuación, se definen y explican de manera general las medidas de riesgo que se van a tomar en consideración.

3.1. Value at Risk (VaR)

El Value at Risk es la medida más utilizada para evaluar y gestionar el riesgo de una determinada posición o cartera de activos financieros. Se interpreta como el cuantil de la distribución de rendimientos de los activos o cartera. El VaR a un determinado nivel de significación, α , y un horizonte de gestión predeterminado, h , mide la mínima pérdida potencial de la posición o cartera de activos financieros en euros si cae en el $\alpha\%$ de los posibles peores casos. Por tanto,

$$VaR_\alpha \equiv q_\alpha = F^{-1}(\alpha) \quad t.q. \quad P[r_t \leq q_\alpha] = \alpha \quad (1)$$

⁴Utilizan los modelos CARE de Taylor (2008), los que modelizan el expectil para un nivel de confianza $\tau(\alpha)$ que hace que $e_{\tau(\alpha)} = q_\alpha$.

donde, q_α refleja el cuantil de la distribución para un nivel de confianza α , r_t refleja la serie de rendimientos de los activos y F^{-1} la función cuantil o, lo que es lo mismo, la inversa de la función de distribución de los rendimientos.

Un inconveniente de tener como medida de riesgo un solo cuantil de la distribución de rendimientos de los activos es que depende sólo de la probabilidad de más realizaciones extremas pero no de sus valores. Es decir, dos activos cuya forma de la cola de la distribución sea diferente puede tener el mismo VaR.

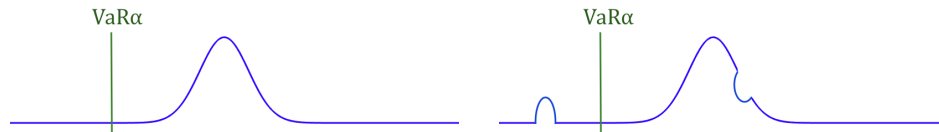


Figura 1: Fuente: *Elaboración propia*. Funciones de densidad de dos activos con colas muy diferentes. Se pretende mostrar la debilidad del VaR como medida de riesgo, ya que es incapaz de capturar la severidad de las potenciales pérdidas. Claramente el activo de la derecha presenta mayores pérdidas potenciales y sin embargo el VaR es el mismo en ambos casos.

Por último, el VaR no siempre satisface la propiedad de subaditividad⁵ y, por tanto, no se considera una medida de riesgo coherente. Esta propiedad sólo se mantiene bajo rendimientos i.i.d., bajo distribuciones elípticas y bajo un tipo de dependencia recogida por una cópula arquimediana. Sin embargo, carece de fundamento bajo distribuciones de los rendimientos con colas pesadas, las más comunes en finanzas.

3.2. Expected Shortfall (ES)

El Expected Shortfall (ES) es la métrica que el Comité de Supervisión de Basilea III ha decidido implantar como medida de riesgo para los requerimientos de capital de las entidades bancarias en enero de 2016⁶. Se define como el promedio de las pérdidas que exceden el VaR para un nivel de probabilidad prefijado, α %, proporcionando así información sobre la magnitud de las potenciales pérdidas en la cola izquierda. Formalmente,

$$ES_\alpha = \mathbb{E} [r_t \mid r_t \leq q_\alpha] = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha q_u \, du \quad (2)$$

⁵Las propiedades de las medidas de riesgo están explicadas en detalle en el anexo.

⁶Basilea III, enero 2016: Normas (standards). Requerimientos mínimos de capital por riesgo de mercado. *Banco de Pagos Internacionales 2016*. ISBN 978-92-9197-455-9 (versión en línea) o www.bis.org.

Esta medida satisface todas las propiedades que deben cumplirse para considerar a una medida coherente. No obstante, no cumple con la propiedad de elicibilidad,⁷ lo que puede llevar a predicciones no consistentes y a dificultar el backtesting. A pesar de sus ventajas, solo se basa en la cuantía de las pérdidas de la cola izquierda sin tener en cuenta las posibles ganancias de la cola derecha que puedan disminuir riesgo. Por otra parte, es mucho más conservadora ya que además de depender de la probabilidad de la cola, también depende de los valores de la cola, a diferencia del VaR que sólo depende de α . Esto puede llevar, en ocasiones, a la acumulación de demasiada tesorería por parte de los bancos e instituciones financieras en lugar de sacarle provecho por otras vías.

3.3. Expectil

Los expectiles⁸ son medidas de riesgo coherentes correspondientes a una familia de un sólo parámetro que surgen como una alternativa a los cuantiles. A diferencia de las anteriores medidas de riesgo, los expectiles se basan en una información más completa ya que dependen de las dos colas de la distribución de pérdidas y ganancias de los rendimientos de los activos. Antes de examinar formalmente los expectiles, conviene recordar que el α -cuantil de una variable aleatoria R es el parámetro q_α , solución al siguiente problema de minimización,

$$\min_{q_\alpha} \mathbb{E} [(\alpha - I_{\{R < q_\alpha\}})(R - q_\alpha)] \quad (3)$$

El cuantil q_α correspondiente a la serie de rendimientos r_t , $t = 1, 2, \dots, T$ es la solución al problema de minimización⁹ de la regresión cuantílica introducida por Koenker & Basset (1978),

$$\min_{q_\alpha} \sum_{t=1}^T (\alpha - I_{\{r_t < q_\alpha\}})(r_t - q_\alpha) \quad (4)$$

La condición de primer orden de la minimización de la regresión cuantílica es,

$$\alpha \int_{q_\alpha}^{\infty} dF_R(r) + (\alpha - 1) \int_{-\infty}^{q_\alpha} dF_R(r) = 0 \quad (5)$$

⁷Recuerde que todas las propiedades de las medidas de riesgo se encuentran en el anexo explicadas detalladamente.

⁸Aclarar al lector que se utilizará “expectil” en minúscula para referirse a la medida de posición no central, de la misma forma que se hace referencia a los cuantiles; y se empleará “Expectil” en mayúscula para referirse a la medida financiera, de la misma forma que se hace con el Value at Risk.

⁹Es conveniente aclarar que a la hora de minimizar no afecta el multiplicar por T^{-1} .

donde F_R hace referencia a la función de distribución acumulada asociada a la variable que representa los rendimientos R , lo que implica,

$$\frac{\int_{-\infty}^{q_\alpha} dF_R(r)}{\int_{-\infty}^{q_\alpha} dF_R(r) + \int_{q_\alpha}^{\infty} dF_R(r)} = \int_{-\infty}^{q_\alpha} dF_R(r) = \alpha \quad (6)$$

De manera análoga, el expectil e_τ para un determinado nivel de confianza $\tau \in [0, 1]$ es la solución al siguiente problema de minimización,

$$\min_{e_\tau} \mathbb{E} [|\tau - I_{\{R < e_\tau\}}| (R - e_\tau)^2] \quad (7)$$

Para obtener el expectil e_τ se utiliza la regresión por mínimos cuadrados asimétricos (ALS),

$$\min_{e_\tau} \sum_{t=1}^T |\tau - I_{\{r_t < e_\tau\}}| (r_t - e_\tau)^2 \quad (8)$$

La condición de primer orden de la minimización ALS es,

$$\tau \int_{e_\tau}^{\infty} (r - e_\tau) dF_R(r) + |\tau - 1| \int_{-\infty}^{e_\tau} (r - e_\tau) dF_R(r) = 0 \quad (9)$$

donde F_R hace referencia a la función de distribución acumulada asociada a la variable que representa los rendimientos R , lo que implica que el expectil e_τ satisface [ver Kuan et al., 2009],

$$\frac{\int_{-\infty}^{e_\tau} |r - e_\tau| dF(r)}{\int_{-\infty}^{e_\tau} |r - e_\tau| dF(r) + \int_{e_\tau}^{\infty} |r - e_\tau| dF(r)} = \frac{\int_{-\infty}^{e_\tau} |r - e_\tau| dF_R(r)}{\int_{-\infty}^{\infty} |r - e_\tau| dF_R(r)} = \tau \quad (10)$$

Para las funciones de distribución más comunes, los expectiles están más cerca del centro de la distribución que los correspondientes cuantiles. Normalmente, la curva de cuantiles y de expectiles cortan en un único punto, que corresponde con el centro simétrico en el caso de funciones de distribución simétricas [ver Bellini & Di Bernardino, 2015]. A continuación se muestra una comparativa entre cuantiles y expectiles para las distribuciones que se van a utilizar en este trabajo.

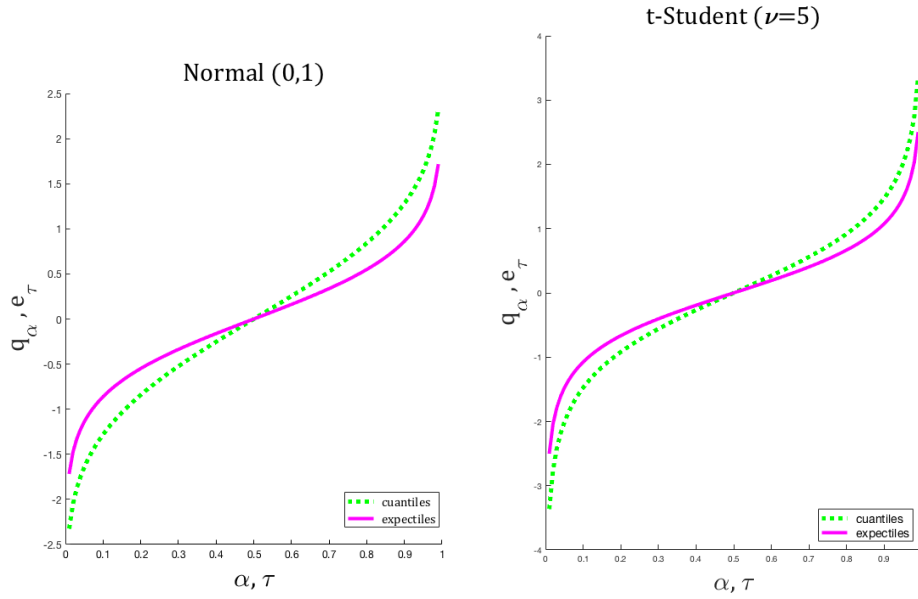


Figura 2: Fuente: Elaboración propia. Comparación entre expectiles (línea continua de color violeta) y cuantiles (línea discontinua de color verde) para las funciones de distribución Normal estándar y t-Student con 5 grados de libertad, respectivamente.

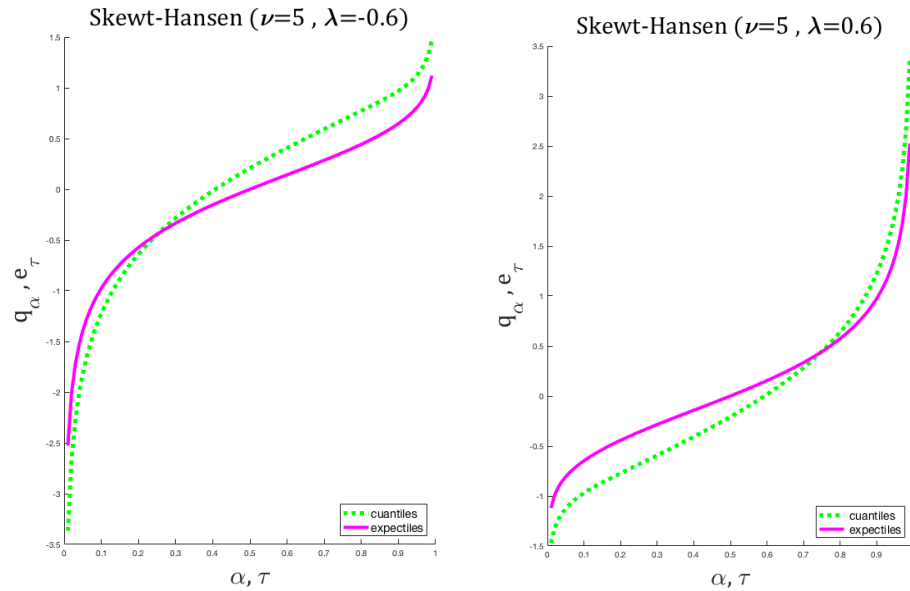


Figura 3: Fuente: elaboración propia. Comparación entre expectiles (línea continua de color violeta) y cuantiles (línea discontinua de color verde) para las funciones de distribución Skew-tStudent de Hansen con 5 grados de libertad, asimétrica hacia la izquierda y hacia la derecha, respectivamente.

En la *Tabla 4*, para un nivel de confianza $\alpha = \tau = 1\%$ y para diferentes distribuciones, se observa con mayor claridad que el expectil es menor que el cuantil en todos los casos estudiados.

	N(0,1)	t-Student (v=5)	Skew-t (v=5, $\lambda=-0.8$)	Skew-t (v=15, $\lambda=0.6$)
q ($\alpha=1\%$)	-2.33	-2.02	-1.85	-1.27
e ($\tau=1\%$)	-1.72	-1.48	-1.43	-0.90

Tabla 4: Comparación entre expectiles y cuantiles incondicionales para un mismo $\tau = \alpha = 1\%$ para diferentes funciones de distribución.

Pero cuidado, no dejarse confundir por los valores numéricos y pensar erróneamente que el expectil recoge menos riesgo. No se puede atribuir la misma interpretación a ambas medidas de riesgo ya que el cuantil depende únicamente de la probabilidad de la cola α , mientras que el expectil depende de la forma de toda la distribución de rendimientos y de su probabilidad en cada cola, τ y $(1 - \tau)$, respectivamente.

Una desventaja atribuida a los expectiles es la difícil interpretación para su uso como medida de riesgo. No obstante, Kuan et al. (2009) han propuesto una definición más intuitiva para los expectiles en términos de riesgo financiero, presentando el parámetro de asimetría τ como un *índice de prudencia*. El nivel de prudencia se basa en el uso de medidas de riesgo como requerimientos de capital ya que se puede entender como el coste relativo de la pérdida marginal esperada. Tomando e_τ como un margen para los requerimientos de capital, la integral $\int_{-\infty}^{e_\tau} |y - e_\tau| dF(r)$ es la pérdida marginal esperada y un coste potencial para pérdidas más extremas, mientras que la integral $\int_{e_\tau}^{\infty} |y - e_\tau| dF(r)$ es el coste de oportunidad debido al sobrecargado margen esperado. Así, la suma de ambos costes, $\int_{-\infty}^{\infty} |y - e_\tau| dF(r)$, es el coste total esperado por disponer del capital requerido e_τ . Por tanto, τ , que es el ratio entre la pérdida marginal esperada y el coste total de los requerimientos de capital, se puede entender como el coste relativo de la pérdida marginal esperada. Un mayor $|e_\tau|$, es decir, un mayor margen de prudencia requerido, se traduce en una menor pérdida marginal esperada y, por consiguiente, menor τ . Menores valores de τ indican mayor aversión al riesgo.

El expectil satisface todos los axiomas para ser una medida coherente y elicitable. Además, una de las principales razones por las que los investigadores empezaron a reconocer las ventajas del uso de expectiles es la mayor eficiencia computacional de la regresión ALS frente la regresión cuantílica. El cálculo del expectil es más simple que el del cuantil debido a que la función de pérdidas y ganancias es continuamente diferenciable.

El $Expectil_\tau$ es la medida de riesgo financiero asociada a los expectiles (e_τ) de la misma forma que el VaR_α es la medida de riesgo financiero asociada a los cuantiles (q_α). Por tanto, el $Expectil$ a un determinado nivel de confianza $\tau \in [0, 1]$ se define como,

$$Expectil_\tau \equiv e_\tau \quad (11)$$

Bellini et al. (2015) definen el $Expectil_\tau$ como el capital que se debe añadir a una posición para disponer de un predeterminado ratio de ganancias y pérdidas lo suficientemente alto. En el caso del VaR_α , una posición se considera aceptable (\mathcal{A}) para un nivel de significación α si el ratio de la *probabilidad* de una ganancia con respecto a la probabilidad de una pérdida es lo suficientemente alto,

$$\mathcal{A}_{VaR_\alpha} = \left\{ R \mid \frac{P(R > 0)}{P(R \leq 0)} \geq \frac{1 - \alpha}{\alpha} \right\} \quad (12)$$

mientras que en el caso del $Expectil_\tau$ una posición se considera aceptable si el ratio entre el *valor esperado* de la ganancia y el valor esperado de la pérdida es lo suficientemente alto,

$$\mathcal{A}_{Expectil_\tau} = \left\{ R \mid \frac{\mathbb{E}[R_+]}{\mathbb{E}[R_-]} \geq \frac{1 - \tau}{\tau} \right\} \quad (13)$$

Kuan et al. (2009) sugieren que el $Expectil$ se puede interpretar como un VaR flexible para la distribución de rentabilidad subyacente. Típicamente se suele escoger un valor pequeño (grande) de α para el VAR_α si la cola izquierda es más pesada (menos pesada). Aún así, la forma de la distribución de los rendimientos rara vez es conocida en la práctica y el valor de α es establecido por organismos reguladores o gerentes de riesgos pudiendo no ser capaz de revelar el riesgo potencial cuando la distribución de rentabilidades cambia su forma con el tiempo. Por ello, los autores proponen identificar directamente el Expectil para un τ dado y permitir que los datos muestren el riesgo en términos de la probabilidad de la cola, α . De hecho, para cualquier $\alpha \in (0, 1)$, sea $\tau(\alpha)$ tal que $e_{\tau(\alpha)} = q_\alpha$, se puede obtener una relación entre $\tau(\alpha)$ y q_α , así,

$$\tau(\alpha) = \frac{\alpha \cdot q_\alpha - \int_{-\infty}^{q_\alpha} r dF(r)}{\mathbb{E}[R] - 2 \int_{-\infty}^{q_\alpha} r dF(r) - (1 - 2\alpha)q_\alpha} \quad (14)$$

En la *Tabla 5* de Kuan et al. (2008) se muestran los valores de los α implícitos bajo diferentes distribuciones.

τ (%)	U(-a,a) (%)	N(0,1) (%)	t(30) (%)	t(10) (%)	t(5) (%)	t(3) (%)
1	9.2	4.3	4.0	3.5	3.0	2.4
3	15.0	9.1	8.8	8.0	6.8	5.6
5	18.6	12.6	12.3	11.5	10.0	8.5
10	25.0	19.5	19.0	18.3	16.6	14.5
25	36.6	33.2	32.8	32.2	31.9	29.4

Tabla 5: Fuente: Kuan et al. (2009). Valores implícitos de α bajo diferentes distribuciones.

Por último, se presenta una tabla resumen con las propiedades de las medidas de riesgo que se encuentran explicadas en más detalle en el Anexo.

Propiedad	Varianza	VaR	ES	Expectil	Autores
Coherencia			✓	✓	Artzner, et al. 2000
Aditividad comonótona		✓	✓		Emmer, et al, 2015
Robustez débil		✓			Huber and Ronchetti, 2009
Robustez Wassertein	✓	✓	✓	✓	Stahl, et al, 2012
Elicitabilidad		✓		✓	Gneiting, 2011 Ziegel, 2013
Elicitabilidad condicional	✓	✓	✓	✓	Tasche, 2013 Emmer, et al, 2015

Tabla 6: Fuente: Comentarista Lidia Sanchís Marco (2017). Resumen de las propiedades de las medidas de riesgo.

4. Predicción con modelos paramétricos

La sección 3 se centraba en la comprensión de las medidas de riesgo más utilizadas y de los expectiles. En esta sección se pretende explorar el potencial de las medidas de riesgo permitiendo que sean variables en el tiempo. Para ello, es necesario el uso de algún modelo para la estimación de las volatilidades y medias condicionales de cada serie. En la predicción de las medidas de riesgo según el enfoque paramétrico se va a considerar que las rentabilidades presentan dependencia temporal y viene recogida por un proceso autorregresivo de orden uno,

$$\begin{aligned} r_t &= \rho_0 + \rho_1 r_{t-1} + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t &= z_t \sigma_t \quad z_t \stackrel{i.i.d.}{\sim} F(0, 1) \end{aligned} \tag{15}$$

donde ρ_i , $i=0,1$ son parámetros del modelo AR(1), ε_t es la innovación, z_t es un ruido blanco distribuido como una F , que será una función de distribución específica para cada caso y que se explicarán de forma detallada en el apartado C del anexo, y σ es la volatilidad condicional modelizada según distintos modelos. Cabe resaltar que, en este caso, al haber persistencia en rentabilidad, lo que se modeliza es la volatilidad de la innovación, es decir, del componente de rentabilidad que no está explicado por el modelo de evolución temporal establecido y no de la serie de rentabilidades como en el caso de no haber estructura de dependencia temporal. En este trabajo, la estimación se realiza en dos etapas:

i) Se estiman los parámetros del modelo AR(1) y con ellos se genera la serie de innovaciones.

ii) Se estiman los parámetros del modelo de volatilidades cambiantes en el tiempo.

Para modelizar una volatilidad cambiante en el tiempo que después se empleará para el cálculo de las tres medidas de riesgo tomadas en consideración, VaR, ES y Expectil, se utilizan los modelos GARCH(1,1), GJR-GARCH (1,1) y APARCH (1,1). Además se emplean las distribuciones Normal, t-Student y Skew-tStudent (Hansen, 1994) para la estimación de los parámetros de los modelos de volatilidad cambiantes en el tiempo mencionados anteriormente. Ver apartados B y C del anexo para más detalle de los modelos de volatilidad condicionales y de las distribuciones de probabilidad empleadas, respectivamente.

Supongamos que el modelo de rentabilidades sigue un proceso AR(1) y que el modelo que permite la estimación de volatilidades cambiantes en el tiempo es un

GARCH(1,1)¹⁰,

$$\sigma_t^2 = \omega + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \beta_2 \varepsilon_{t-1}^2 \quad (16)$$

Una vez estimada la serie de volatilidades hay que predecir entre hoy (T) y el horizonte de gestión ($T + h$) las volatilidades previstas para el cálculo de la medida de riesgo tomada en consideración. El modelo de predicción es el siguiente,

$$\text{Cond. iniciales} \begin{cases} \sigma_{f,T+1}^2 = \omega + \beta_1 \sigma_T^2 + \beta_2 \varepsilon_T^2 \\ \varepsilon_{f,T+1} = \sigma_{f,T+1} z_{T+1} \\ r_{f,T+1} = \rho_0 + \rho_1 r_T + \varepsilon_{f,T+1} \end{cases} \quad (17)$$

$$\begin{cases} \sigma_{f,T+h}^2 = \omega + \beta_1 \sigma_{f,T+h-1}^2 + \beta_2 \varepsilon_{f,T+h-1}^2 \\ \varepsilon_{f,T+h} = \sigma_{f,T+h} z_{T+h} \\ r_{f,T+h} = \rho_0 + \rho_1 r_{f,T+h-1} + \varepsilon_{f,T+h} \end{cases} \quad (18)$$

donde σ_T^2 hace referencia a la última varianza estimada GARCH, $\sigma_{f,T+h}^2$ hace referencia a la varianza "forecast" para el periodo T+h, r_T a la última rentabilidad observada, $r_{f,T+h}$ a la rentabilidad predicha para el periodo T+h, ε_T a la última innovación estimada del modelo GARCH(1,1), $\varepsilon_{f,T+h}$ a la innovación predicha para el periodo T+h y z_t es un ruido blanco.

4.1. VaR

La predicción del VaR paramétrico para un nivel de confianza α a un periodo T+h se define como,

$$VaR_{\alpha}^{\{T\}}_{\{T+h\}} = \sigma_{f,T+h} F^{-1}(\alpha) + \mu_{f,T+h}, \quad h = 1, 2, \dots, H \quad (19)$$

donde,

$$F^{-1}(\alpha) \equiv C(x) = \{q_{\alpha} : G(x) = 0\}, \quad G(x) = \int_{-\infty}^{q_{\alpha}} x f(x) dx$$

¹⁰El procedimiento es el mismo para los modelos GJR-GARCH(1,1) y APARCH(1,1).

En definitiva, $F^{-1}(\alpha)$ hace referencia a la función cuantil de una distribución estandarizada (con media 0 y varianza 1) que puede ser Normal, t-Student o Skew-tStudent, $f(x)$ es la función de densidad, $\sigma_{f,T+h}$ hace referencia a la volatilidad "forecast" para el horizonte de gestión desde T a T+h y $\mu_{f,T+h}$ a la media condicional de las rentabilidades durante el periodo de predicción ($\mu_{f,T+h} = \rho_0 - \rho_1 r_{f,T+h-1}$).

4.2. ES

Para obtener un Expected Shortfall cambiante en el tiempo se necesita un modelo que permita que la volatilidad también sea cambiante en el tiempo. Una vez obtenida ésta, el Expected Shortfall a un nivel de confianza α para un horizonte de gestión $T + h$ se define como,

$$\underset{\{T+h\}}{E} \overset{\{T\}}{S}_\alpha = \sigma_{f,T+h} E_{T+h} \left[\varepsilon_{T+h} \mid \varepsilon_{T+h} < F^{-1}(\alpha) \right] + \mu_{f,T+h} \quad (20)$$

donde $\sigma_{f,T+h}$ hace referencia a la volatilidad "forecast" para el horizonte de gestión desde T a T+h, $\mu_{f,T+h}$ a la media condicional de las rentabilidades durante el periodo de predicción, $\varepsilon_{f,T+h}$ a la innovación predicha para el periodo T+h y $F^{-1}(\alpha)$ a la distribución acumulada para una probabilidad α .

Según Nadarajah & Kotz (2008), los momentos de una distribución truncada con limite superior B se pueden obtener a través de la integral,

$$\mathbb{E} [X^n] = \frac{1}{F(B)} \int_{-\infty}^B x^n f(x) dx \quad (21)$$

donde F es la función de distribución acumulada (CDF), f la función de densidad de X, y B sería, según la notación utilizada en este trabajo, $F^{-1}(\alpha)$. En este trabajo X son las z_t , es decir la serie de ruidos blancos.

Esta propiedad permite la siguiente definición del Expected Shortfall que facilita su cálculo de manera paramétrica,

$$\underset{\{T+h\}}{E} \overset{\{T\}}{S}_\alpha = \sigma_{f,T+h} \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{F^{-1}(\alpha)} r f(r) dr + \mu_{f,T+h} \quad (22)$$

donde $f(r)$ es la función de densidad de una $F(0,1)$ de la variable aleatoria que representa los rendimientos de los activos, R .

4.3. Expectil

En este trabajo se va estimar el Expectil de manera paramétrica, es decir, permitiendo que los expectiles sean cambiantes en el tiempo. Al igual que en el caso de las anteriores medidas de riesgo, se necesita un modelo para la estimación de volatilidades cambiantes en el tiempo. Una vez obtenidas, se realiza una predicción de dichas volatilidades entre hoy (T) y el horizonte de predicción ($T + h$) que se emplean en el cálculo del Expectil.

Así pues, la predicción del Expectil paramétrico para un nivel de confianza τ a un periodo $T+h$ se define como,

$$Expectil_{\tau}^{\{T\}} = \sigma_{f,T+h} C(x) + \mu_{f,T+h}, \quad h = 1, 2, \dots, H \quad (23)$$

donde,

$$C(x) = \{e_{\tau} : G(x) = 0\}, \quad G(x) = \int_{-\infty}^{e_{\tau}} |x - e_{\tau}| f(x) dx - \tau$$

$f(x)$ hace referencia a la función de densidad para las respectivas F consideradas, a saber, Normal, t-Student y Skew-tStudent, $\sigma_{f,T+h}$ es la volatilidad "forecast" para el horizonte de gestión desde T a $T+h$ y $\mu_{f,T+h}$ es la media condicional de las rentabilidades durante el periodo de predicción.

5. Modelos semiparamétricos

En este apartado se utiliza un enfoque semiparamétrico para la estimación de las medidas de riesgo. Una diferencia con el enfoque paramétrico es que los modelos aquí propuestos evitan tener que hacer cualquier supuesto sobre el modelo de volatilidad condicional y sobre la distribución que pueda seguir la serie de rendimientos. Por otra parte, mientras que en el método paramétrico se supone que el modelo de rentabilidades sigue un proceso AR(1), en el método semiparamétrico se supone que $r_t = \varepsilon_t$.

5.1. CAViaR

En este subapartado se explica uno de los métodos de estimación del VaR propuesto por Engle y Manganelli (2004). Dicha estimación del VaR está basada en un método semiparamétrico que consiste en resolver un problema de minimización de la regresión cuantílica. Los autores propusieron los modelos CAViaR que permiten modelizar directamente la evolución del cuantil en el tiempo sin tener que hacer ningún supuesto sobre la volatilidad. Siguiendo la propuesta de los autores, en este trabajo se presentan tres modelos CAViaR.

El primero es el modelo *Symmetric Absolute Value CAViaR* que posee una estructura similar a la de un modelo GARCH.

$$q_t(\alpha) = \beta_0 + \beta_1 q_{t-1}(\alpha) + \beta_2 |r_{t-1}| \quad (24)$$

donde $q_t(\alpha)$ es el cuantil condicional asociado a un nivel de confianza α , β_i , $i = 0, 1, 2$ son parámetros a estimar del modelo, y r_t hace referencia a las observaciones de las serie de rentabilidades de los activos.

En segundo lugar, se presenta el modelo *Asymmetric Slope CAViaR* diseñado específicamente para recoger el efecto apalancamiento en volatilidad, es decir, el efecto en el que sorpresas negativas generan un mayor impacto en volatilidad que sorpresas positivas del mismo tamaño.

$$q_t(\alpha) = \beta_0 + \beta_1 q_{t-1}(\alpha) + \beta_2 (r_{t-1})^+ + \beta_3 (r_{t-1})^- \quad (25)$$

Por último, se tiene el modelo *Indirect GARCH CAViaR*,

$$q_t(\alpha) = (1 - 2I_{\{\alpha < 0,5\}}) \left(\beta_0 + \beta_1 q_{t-1}^2(\alpha) + \beta_2 r_{t-1}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \beta_i > 0 \quad (26)$$

Los parámetros de los modelos CAViaR se estiman utilizando la minimización de la regresión cuantílica, expresión que fue introducida por Koenker & Bassett (1978),

$$\min_{\beta} \sum_{t=1}^T (\alpha - I_{\{r_t < q_t(\alpha)\}}) (r_t - q_t(\alpha)) \quad (27)$$

donde I es una función indicatriz que toma el valor 1 si se cumple la condición entre llaves y 0 en caso contrario.

5.2. CARE

En esta sección se presentan tres modelos CARE (Conditional Autoregressive Expectile) introducidos por Taylor (2008) que siguen la misma estructura que los modelos CAViaR explicados en la sección anterior. No obstante, los modelos CARE de este trabajo difieren de los modelos CARE de Taylor. Éstos últimos modelizan la evolución del VaR y del ES a través de los expectiles, buscando aquel $\tau(\alpha)$ que hace que $e_{\tau(\alpha)} = q_\alpha$. Por tanto, aunque le llame modelo CARE, no deja de modelizar un VaR o un ES por cuestiones de eficiencia computacional de la regresión ALS frente a la regresión cuantílica, además de la mayor facilidad en el cálculo de expectiles gracias a que la función de pérdidas y ganancias es continuamente diferenciable. Por contra, los modelos CARE considerados en este trabajo modelizan la evolución del expectil como una tercera medida de riesgo, aparte del VaR y del ES, para un τ predeterminado. Si bien es cierto que gracias al mapeo uno-a-uno entre expectiles y cuantiles, para la medida de riesgo financiero e_τ , que se obtiene con los modelos CARE aquí considerados para un τ dado, se puede calcular su VaR_α , aunque éste no es el interés. Nótese que el α de ese VaR_α será muy superior al τ tomado en consideración, con lo cual carece de interés establecer ese símil. Así los modelos CARE considerados en este trabajo presentan una estructura similar a los modelos CAViaR del apartado anterior.

- **Symmetric Absolute CARE.**

$$e_t(\tau) = \beta_0 + \beta_1 e_{t-1}(\tau) + \beta_2 |r_{t-1}| \quad (28)$$

- **Asymmetric Slope CARE.**

$$e_t(\tau) = \beta_0 + \beta_1 e_{t-1}(\tau) + \beta_2 (r_{t-1})^+ + \beta_3 (r_{t-1})^- \quad (29)$$

- **Indirect GARCH CARE.**

$$e_t(\tau) = (1 - 2I_{\{\tau < 0,5\}}) \left(\beta_0 + \beta_1 e_{t-1}^2(\tau) + \beta_2 r_{t-1}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \beta_i > 0 \quad (30)$$

donde e_τ es el expectil τ -ésimo, con $\tau \in [0,1]$, I es una función indicatriz que toma el valor 1 si se cumple la condición entre llaves y 0 en caso contrario y β_i , $i = 1, 2, 3$ son parámetros del modelo que han de estimarse utilizando la regresión ALS,

$$\min_{\beta} \sum_{t=1}^T | \tau - I_{\{r_t < e_t(\tau)\}} | (r_t - e_t(\tau))^2 \quad (31)$$

5.3. CARES

Los modelos CARES (Conditional Autoregressive Expected Shortfall) que se van a proponer en este trabajo modelizan la evolución del ES a través del tiempo. No obstante, para poder modelizar éste es necesario pasar primero por los expectiles. Taylor (2008) mostró una relación existente entre los expectiles y el Expected Shortfall. La condición de primer orden de la minimización ALS se puede reescribir como,

$$\mathbb{E} [R | R < e_\tau] = \left(1 + \frac{\tau}{(1 - 2\tau) F(e_\tau)} \right) e_\tau - \left(\frac{\tau}{(1 - 2\tau) F(e_\tau)} \right) \mathbb{E} [R] \quad (32)$$

Esta expresión sugiere una relación entre expectiles y Expected Shortfall proporcionando una fórmula para el ES del cuantil α que coincide con el expectil $\tau(\alpha)$. En este caso, $F(e_{\tau(\alpha)}) = \alpha$ lo que permite reescribir la expresión como,

$$ES_t(\alpha) = \left(1 + \frac{\tau(\alpha)}{(1 - 2\tau(\alpha)) \alpha} \right) e_{\tau(\alpha)} - \left(\frac{\tau(\alpha)}{(1 - 2\tau(\alpha)) \alpha} \right) \mathbb{E} [r_t] \quad (33)$$

esta expresión se atribuye al ES basado en expectiles para un nivel α implícito al nivel τ .¹¹ Por ejemplo, supongamos que para un $\alpha = 0.05$, el nivel $\tau(\alpha) = 0.00126$ de una muestra hipotética es aquel que iguala el expectil y el cuantil de la muestra, $e_{\tau(\alpha)} = q_\alpha$.

Por tanto, para obtener los modelos CARES para el ES es necesario estimar primero los modelos de expectiles para aquel $\tau(\alpha)$ que hace que $e_{\tau(\alpha)} = q_\alpha$.

¹¹Para el ES_α de la cola derecha de la distribución se debe reemplazar τ y α por $(1 - \tau)$ y $(1 - \alpha)$, respectivamente.

- **Symmetric Absolute Value CARES.**

En primer lugar se estiman los parámetros del modelo de expectiles simétrico,

$$e_t(\tau(\alpha)) = \beta_0 + \beta_1 e_{t-1}(\tau(\alpha)) + \beta_2 |r_{t-1}| \quad (34)$$

Utilizando la relación entre expectiles y ES propuesta por Taylor, y asumiendo que la media de la serie de rendimientos es cero,

$$e_t(\tau(\alpha)) = \frac{ES_t(\alpha)}{\left(1 + \frac{\tau(\alpha)}{(1-2\tau(\alpha))\alpha}\right)} \quad (35)$$

y sustituyendo esta expresión en la del modelo de expectiles para $e_{\tau(\alpha)}$ obtenemos el modelo CARES Simétrico para el ES,

$$ES_t(\alpha) = \varsigma_0 + \varsigma_1 ES_{t-1}(\alpha) + \varsigma_2 |r_{t-1}| \quad (36)$$

donde $\varsigma_i = \left(1 + \frac{\tau(\alpha)}{(1-2\tau(\alpha))\alpha}\right) \beta_i$ para $i=0,1,2$. Las β_i son las correspondientes al modelo de expectiles simétrico.

El mismo procedimiento se emplea para obtener los modelos Asymmetric Slope CARES e Indirect GARCH CARES.

- **Asymmetric Slope CARES.**

$$ES_t(\alpha) = \varsigma_0 + \varsigma_1 ES_{t-1}(\alpha) + \varsigma_2 (r_{t-1})^+ + \varsigma_3 (r_{t-1})^- \quad (37)$$

donde $\varsigma_i = \left(1 + \frac{\tau(\alpha)}{(1-2\tau(\alpha))\alpha}\right) \beta_i$ para $i=0,1,2,3$. Las β_i son las correspondientes al modelo de expectiles asimétrico.

- **Indirect GARCH CARES.**

$$ES_t(\alpha) = (1 - 2I_{\{\tau < 0,5\}}) \left(\varsigma_0 + \varsigma_1 ES_{t-1}^2(\alpha) + \varsigma_2 r_{t-1}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \varsigma_i > 0 \quad (38)$$

donde $\varsigma_i = \left(1 + \frac{\tau(\alpha)}{(1-2\tau(\alpha))\alpha}\right)^2 \beta_i$ para $i=0,1,2$. Las β_i son las correspondientes al modelo de expectiles Indirect GARCH.

6. Backtesting

Según Jorion (2007), backtesting es un conjunto de procedimientos estadísticos diseñados para verificar si las verdaderas pérdidas, observadas ex post, están en línea con las predicciones del VaR. Por supuesto, esta definición se puede extender a cualquier medida de riesgo.

6.1. VaR

En esta sección se van a realizar cuatro métodos cuantitativos para determinar si las predicciones del VaR en cada modelo son consistentes con los supuestos en los que se basa el modelo correspondiente. Posteriormente, se pretende establecer un ranking para los modelos que mejor captan el riesgo.

6.1.1. Ratio de violaciones

El ratio de violaciones ($\hat{\pi}$) consiste en calcular el número de veces que los rendimientos out-of-sample exceden la predicción del VaR a un periodo condicionado a la información del periodo anterior para un horizonte de gestión de riesgo y un nivel de confianza predeterminados. La tasa de fallos observada se calcula como,

$$\hat{\pi} = \frac{T_1}{T}$$

donde T_1 hace referencia al número de veces que la rentabilidad ha excedido la predicción del VaR y T al total de la muestra out-of-sample. Se espera que este ratio de violaciones sea similar al 1 % o, lo que es lo mismo, que el número de excesos (T_1) sea similar a $\alpha T = 1\% \cdot 1000 = 10$. Siguiendo el procedimiento propuesto por el Comité de Basilea en su Acuerdo de Capital de 1996, se pueden establecer tres zonas ligadas a la cantidad de excepciones registradas en el periodo de evaluación. Un valor del VaR pertenece a la Zona Verde y, por lo tanto, es aprobado si el número de violaciones del $VaR_{1\%}$ no excede el cuantil Bernoulli 95 % (con $p = 0.01$); corresponde a la Zona Amarilla y es sujeto a un estrecho control con un número de violaciones hasta el cuantil 99.99 % de dicha distribución; y se caracteriza como

poco fiable y sujeto a una nueva estimación cuando ocurren más violaciones (Zona Roja)¹².

6.1.2. Test de cobertura incondicional (Kupiec)

El test de cobertura incondicional es un test de frecuencia introducido por Kupiec (1995) y se basa en el ratio de violaciones. Se trata de un contraste a dos colas, donde la hipótesis nula viene especificada como,

$$\begin{cases} H_0 : \hat{\pi} = \alpha \\ H_1 : \hat{\pi} \neq \alpha \end{cases}$$

donde $\hat{\pi}$ es la tasa de fallos observada. Bajo la hipótesis nula, la función indicatriz,

$$I_t = \begin{cases} 1 & \text{si } r_t < VaR_t(\alpha) \\ 0 & \text{si } r_t \geq VaR_t(\alpha) \end{cases}$$

se dice que sigue un proceso i.i.d. de Bernouilli(α), con α número de éxitos.

El rechazo o no de la hipótesis nula se verifica a través del ratio de máxima verosimilitud,

$$LR_{uc} = -2 \ln \left(\frac{L(\hat{\Pi}_\alpha)}{L(\hat{\Pi})} \right) = -2 \ln \left(\frac{(1-\alpha)^{T_0} \alpha^{T_1}}{(1-\hat{\pi})^{T_0} \hat{\pi}^{T_1}} \right) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \chi_1^2$$

donde T_0 es el número de veces que los rendimientos no han excedido la predicción del VaR, es decir, $T_0 = T - T_1$. El p-valor asociado a este test estadístico se calcula de la siguiente manera,

$$p - value = 1 - F_{\chi_1^2}(LR_{uc})$$

donde $F_{\chi_1^2}(\cdot)$ es la función de distribución acumulada de una χ^2 con un grado de libertad. La hipótesis nula se rechaza si LR_{uc} es mayor que el valor crítico en tablas de la χ_1^2 , o bien, si el p-valor es menor que el nivel de significación α .

La justificación del uso de este test es la fácil aplicación, la simple intuición que aporta y el no requerir de demasiada información. No obstante, presenta una serie

¹²La zona verde o de seguridad abarca todos los resultados del backtesting entre 0 y 4 excepciones para una muestra de 250 observaciones que, desde el punto de vista probabilístico, no arrojan ninguna duda sobre la validez predictiva del modelo y, por tanto, cuya lectura no produce respuesta supervisora en el sentido de una elevación del nivel de capitalización. Dentro de la zona amarilla caen los resultados que producen dudas no concluyentes sobre la efectividad del modelo (entre 5 y 9 excepciones) y cuya lectura podría ir acompañada de elevaciones entre 0.40 y 0.85 puntos en el factor multiplicador de la base de capital. Finalmente en la zona roja entran todos los resultados iguales o superiores a 10 excepciones, cuya medida correspondiente es la elevación en un punto del factor multiplicador.

de inconvenientes importantes,

i) Falta de potencia que puede llevar a cometer un Error de Tipo II, es decir, no rechazar la hipótesis nula siendo esta falsa. Por tanto, se puede pasar por bueno un modelo no adecuado.

ii) Se necesita de un amplio conjunto de datos en la muestra para que el test sea capaz de identificar los modelos inapropiados.

iii) Este test no recoge información acerca del patrón temporal del número de excesos. Esto es importante porque muchos modelos de riesgo predicen que el número de excesos deberían ser i.i.d, lo que viene a decir que la probabilidad en la cola izquierda es constante e independiente de si ha ocurrido o no un exceso en el periodo anterior.

iv) Los tests de frecuencia no tienen en cuenta información útil como puede ser el tamaño de las pérdidas en la cola previstas por la predicción de los modelos de riesgo. La principal implicación derivada de esta situación es pasar un modelo como adecuado si genera una frecuencia aceptable de excesos aunque las magnitudes de dichos excesos sean grandes.

6.1.3. Test de cobertura condicional (Christoffersen)

Christoffersen (1998) supone bajo la hipótesis alternativa de la ineficiencia del VaR que el proceso de violaciones $I_t(\alpha)$ se puede modelizar como una cadena de Markov¹³ cuya matriz de probabilidades de transición se define como,

$$\Pi_1 = \begin{pmatrix} \pi_{00} & \pi_{01} \\ \pi_{10} & \pi_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \pi_{01} & \pi_{01} \\ 1 - \pi_{11} & \pi_{11} \end{pmatrix}$$

donde $\pi_{ij} = P[I_t(\alpha) = j \mid I_{t-1}(\alpha) = i]$. Esta cadena de Markov postula la existencia de memoria de orden uno en el proceso $I_t(\alpha)$, es decir, la probabilidad de tener o no una violación en el periodo presente depende de si ha habido una violación o no en el periodo anterior.

La prueba de Christoffersen se divide en realidad en dos tests estadísticos, el de independencia y el de cobertura condicional.

¹³Recordemos que en un proceso de Markov los valores futuros no dependen del pasado si se conoce el presente. Es decir, la propiedad de Markov significa que el proceso no tiene memoria.

• **Test de independencia.** La hipótesis nula de este test contrasta la probabilidad de que una violación en el presente no dependa de una violación en el periodo anterior, es decir, que sean independientes.

$$\begin{cases} H_0 : \pi_{01} = \pi_{11} = \pi \\ H_1 : \pi_{01} \neq \pi_{11} \end{cases}$$

Por tanto, bajo independencia la matriz de probabilidades de transición se define como,

$$\hat{\Pi} = \begin{pmatrix} 1 - \hat{\pi} & \hat{\pi} \\ 1 - \hat{\pi} & \hat{\pi} \end{pmatrix}$$

Bajo la hipótesis alternativa, la matriz de probabilidades de transición se define como,

$$\hat{\Pi}_1 = \begin{pmatrix} 1 - \hat{\pi}_{01} & \hat{\pi}_{01} \\ 1 - \hat{\pi}_{11} & \hat{\pi}_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{T_{00}}{T_{00}+T_{01}} & \frac{T_{01}}{T_{00}+T_{01}} \\ \frac{T_{10}}{T_{10}+T_{11}} & \frac{T_{11}}{T_{10}+T_{11}} \end{pmatrix}$$

$$\text{donde } T_{ij} = \begin{cases} I_t(\alpha) = j \\ I_{t-1}(\alpha) = i \end{cases} \text{ con } I_t(\alpha) = \begin{cases} 1 & R_t < VaR_t \\ 0 & R_t \geq VaR_t \end{cases} \text{ y } \begin{cases} T_0 = T_{00} + T_{10} \\ T_1 = T_{11} + T_{01} \end{cases}$$

El estadístico que verifica el rechazo o no de la hipótesis nula es,

$$LR_{ind} = -2 \ln \left(\frac{L(\hat{\Pi})}{L(\hat{\Pi}_1)} \right) = -2 \ln \left(\frac{(1 - \hat{\pi})^{T_0} \hat{\pi}^{T_1}}{(1 - \hat{\pi}_{01})^{T_{00}} \hat{\pi}_{01}^{T_{01}} (1 - \hat{\pi}_{11})^{T_{10}} \hat{\pi}_{11}^{T_{11}}} \right) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \chi_1^2$$

$$p\text{-value} = 1 - F_{\chi_1^2}(LR_{ind})$$

• **Test de cobertura condicional.** La hipótesis nula de este test contrasta la probabilidad de que una violación en el presente no dependa de una violación en el periodo anterior, es decir, que sean independientes y además que se cumpla con probabilidad α .

$$\begin{cases} H_0 : \pi_{01} = \pi_{11} = \alpha \\ H_1 : \pi_{01} = \pi_{11} \neq \alpha \end{cases}$$

El estadístico del test de cobertura condicional es simplemente la unión del test de Kupiec y del test de independencia,

$$\begin{aligned} \text{LR}_{cc} &= -2 \ln \left(\frac{L(\Pi_\alpha)}{L(\hat{\Pi}_1)} \right) = -2 \ln \left[\left(\frac{L(\Pi_\alpha)}{L(\hat{\Pi})} \right) \left(\frac{L(\hat{\Pi})}{L(\hat{\Pi}_1)} \right) \right] = \\ &= -2 \ln \left(\frac{L(\Pi_\alpha)}{L(\hat{\Pi})} \right) - 2 \ln \left(\frac{L(\hat{\Pi})}{L(\hat{\Pi}_1)} \right) = \text{LR}_{uc} + \text{LR}_{ind} \quad \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \chi_2^2 \end{aligned}$$

$$p\text{-value} = 1 - F_{\chi_2^2}(\text{LR}_{cc})$$

La sencillez de este test no lo libra de dos grandes inconvenientes,

i) La forma de verificar la independencia no tienen en consideración otras alternativas que recojan la independencia de órdenes superiores a uno.

ii) El uso de la cadena de Markov solo permite medir la influencia de las violaciones pasadas $I_{t-1}(\alpha)$ y no permite la influencia de otras variables exógenas.

6.1.4. Test Dynamic Quantile (Engle & Manganelli)

El test DQ (Dynamic Quantile) fue propuesto por Engle & Manganelli (2004) y supera los dos inconvenientes del test de cobertura condicional de Christoffersen. Los autores propusieron utilizar una regresión lineal que vincula las violaciones actuales con las anteriores. Se define el $Hit_t(\alpha)$ como,

$$Hit_t(\alpha) = \begin{cases} 1 - \alpha & \text{si } r_t < VaR_{t|t-1}(\alpha) \\ -\alpha & \text{si } r_t \geq VaR_{t|t-1}(\alpha) \end{cases}$$

Se considera el siguiente modelo de regresión lineal,

$$Hit_t(\alpha) = \delta_0 + \sum_{i=1}^p \delta_i Hit_{t-1}(\alpha) + \sum_{j=p+1}^q \delta_j M_j + \epsilon_t$$

donde, a diferencia del test de cobertura condicional de Christoffersen, se permite la inclusión de variables explicativas exógenas, M_j . Engle & Manganelli sugieren utilizar como variable exógena $M_j = VaR(\alpha)$. Con ello se verifica si la probabilidad de una excepción depende del nivel del VaR. Siguiendo la mecánica de los autores,

se han utilizado 4 retardos de Hit_{t-i} .

Se contrasta bajo la hipótesis nula que la esperanza condicional de $Hit_t(\alpha)$ dada cualquier información conocida en $t - 1$ debe ser cero. En concreto, la secuencia de $Hit_t(\alpha)$ debe estar incorrelacionada con cualquier variable que pertenezca al conjunto de información \mathfrak{S}_{t-1} , esto es, incorrelacionada con sus propios retardos y con el VaR, así, su hipótesis nula es $\mathbb{E} [Hit_t(\alpha)] = \mathbb{E} [\epsilon_t] = 0$. El contraste se define como un contraste de significación conjunta de Wald,

$$\begin{cases} H_0 : \delta_0 = \delta_i = \delta_j = 0 & i = 1, \dots, p, j = p + 1, \dots, q \\ H_1 : \text{algún } \delta \neq 0 \end{cases}$$

Utilizando el Teorema Central del Límite se puede obtener el estadístico de Wald y la distribución asintótica del estimador OLS bajo la hipótesis nula,

$$\hat{\delta}_{OLS} = (X'X)^{-1}X'Hit_t \stackrel{a}{\sim} N(0, \alpha(1-\alpha)(X'X)^{-1})$$

donde X es el vector que contiene las variables explicativas de la regresión OLS.

Una vez hecho esto, el estadístico del test DQ y su p-valor se derivan de forma inmediata,

$$\begin{aligned} \text{DQT} &= \frac{\hat{\delta}'_{OLS}X'X\hat{\delta}_{OLS}}{\alpha(1-\alpha)} \sim \chi^2_{p+q+1} \\ p\text{-value} &= 1 - F_{\chi^2_{p+q+1}}(\text{DQT}) \end{aligned}$$

6.1.5. Función de pérdida de López

Hay casos en los que no solo se está interesado en cómo funcionan los modelos individuales sino en la comparación entre distintos modelos. Esto se puede hacer utilizando métodos de evaluación de predicciones que asignan a cada modelo una puntuación en función de alguna función de pérdida. Así se puede establecer un ranking de modelos siendo el mejor modelo aquel que reciba una menor puntuación en la función de pérdida. Este enfoque no se basa en tests estadísticos para ver si los modelos son adecuados o no sino en establecer un ranking de los modelos. Gracias a que no se basan en tests estadísticos, la evaluación de las predicciones no se ven afectadas por la baja potencia de los contrastes estándar como, por ejemplo, los de frecuencias. Esto hace atractivas a las funciones de pérdida para el backtesting con un conjunto muestral reducido típicamente disponible en las aplicaciones de la vida real. Además, es posible adaptar las funciones de pérdida según las preocupaciones particulares que se tengan, por ejemplo, se puede mostrar una mayor preocupación

por las altas pérdidas que por las bajas y, por tanto, querer otorgar un peso mayor a las pérdidas más elevadas en la función de pérdida.

En este subapartado se toma en consideración la evaluación del VaR a través de una de las funciones de pérdida introducidas por López (1998,1999). La magnitud de la función de pérdida asigna un score numérico cuando el VaR predicho excede a la rentabilidad observada y cero en caso contrario. Es decir, presta atención a las pérdidas no cubiertas solo cuando ocurren. Lo bueno de esta función de pérdida es que no solo se incorpora la excepción del VaR sino también la magnitud de las pérdidas. La magnitud de la función de pérdida de López presenta la siguiente especificación cuadrática,

$$C_t = \begin{cases} 1 + (r_t - VaR_t(\alpha))^2 & \text{si } r_t < VaR_t(\alpha) \\ 0 & \text{si } r_t \geq VaR_t(\alpha) \end{cases}$$

En esta función de pérdida, el término cuadrático asegura que los mayores excesos se penalizan más que los excesos menores. Esta función se contruyó para fines regulatorios en la evaluación de los modelos internos de los bancos.

Un modelo VaR se preferirá a otro si presenta el menor promedio de la función de pérdida, $\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T C_t$.

6.1.6. Función de pérdida de Sarma et al.

Basándose en el trabajo de López (1998,1999), Sarma et al. (2003) introducen dos funciones de pérdida, la función de pérdida regulatoria (RLF) y la función de pérdida de la firma (FLF). Mientras que la primera está creada para reflejar la función de utilidad de los reguladores, la segunda está diseñada para reflejar la función de utilidad de la compañía. Ambas emplean la distancia cuadrática entre los rendimientos observados y el $VaR(\alpha)$ predicho cuando ocurre una violación para asegurar la penalización en los mayores excesos.

La función **RLF** (regulatory loss function) presenta un aspecto similar a la de López vista anteriormente. Penaliza de diferente manera los excesos de una función de pérdida binomial y presta atención a la magnitud de las pérdidas,

$$l_t = \begin{cases} (r_t - VaR_t(\alpha))^2 & \text{si } r_t < VaR_t(\alpha) \\ 0 & \text{si } r_t \geq VaR_t(\alpha) \end{cases}$$

La función **FLF** (firm loss function) captura la idea de que la compañía utiliza el VaR en la gestión de riesgos interna. Aquí se produce un conflicto entre el objetivo de seguridad y el objetivo de maximización del beneficio. Una predicción del VaR que arroje valores del mismo “demasiado elevados” forzaría a la compañía a retener “demasiado” capital lo que elevaría el coste de oportunidad de sacarle provecho por otras vías. Sarma et al. proponen modelizar la función de pérdida de la compañía penalizando los excesos pero también imponiendo una penalización que refleje el coste del capital sufrido en días anteriores,

$$l_t = \begin{cases} (r_t - VaR_t(\alpha))^2 & \text{si } r_t < VaR_t(\alpha) \\ -\alpha VaR_t(\alpha) & \text{si } r_t \geq VaR_t(\alpha) \end{cases}$$

Aquí α mide el coste de oportunidad de tener el capital retenido. El modelo VaR preferible será aquel que presente un menor promedio de la función de pérdida, $\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T l_t$.

6.2. ES

En esta sección se va a explicar un test para determinar si las predicciones del Expected Shortfall en cada modelo son consistentes con los supuestos en los que se basa el modelo correspondiente. Además se presenta una función de pérdida que permite establecer un ranking entre modelos.

6.2.1. Test Righi & Ceretta

Para evaluar la estimación condicional del ES se sigue el enfoque de Righi & Ceretta (2015) que proponen un nuevo test basado en la dispersión truncada por el VaR. Se ha optado por este contraste ya que es una mejora de las ineficiencias del contraste propuesto por McNeil & Frey (2000). El enfoque de Righi & Ceretta se basa en la serie BT_t que representa las violaciones del VaR estandarizadas respecto al ES y la desviación estándar truncada por el VaR (SD_t). Dado un nivel de significación α , se puede representar formalmente la serie BT_t como,

$$BT_t = \begin{cases} (SD_t)^{-1}(r_t - ES_t) & \text{si } r_t < VaR_t(\alpha) \\ 0 & \text{si } r_t \geq VaR_t(\alpha) \end{cases}$$

La diferencia entre este test y el de McNeil & Frey (2000) es que en este caso se considera la dispersión solo para las violaciones y no para toda la muestra. Esta dispersión es la desviación estándar truncada por el VaR, SD_t (*Shortfall Deviation*). La SD_t es una estimación mejor que la desviación estándar de toda la muestra porque cuando ocurren rendimientos negativos extremos es el riesgo de la cola izquierda el que preocupa a los gestores de riesgo e instituciones financieras. Además, para precisar cuán lejos se encontraba una pérdida de su valor esperado se necesita usar una medida de riesgo intrínseca a esta esperanza en lugar de una vinculada a toda la esperanza de la distribución. El cálculo de la SD_t difiere dependiendo del empleo de un enfoque paramétrico o del de un enfoque semiparamétrico,

$$SD_t(\alpha) = \sqrt{\sigma_t^2 \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha \left(F^{-1}(s) - \left(\frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha F^{-1}(s) ds \right) \right)^2 ds}$$

$$SD_t(\alpha) = \sqrt{\frac{1}{\alpha T} \sum_{i=1}^T \left(r_i I_{\{r_i < VaR_t(\alpha)\}} - ES_t(\alpha) \right)^2}$$

La primera fórmula de $SD_t(\alpha)$ es la que se aplica para el backtesting de los modelos paramétricos, donde σ_t^2 es la varianza condicional cambiante en el tiempo y $F^{-1}(s)$ es el cuantil de las rentabilidades estandarizadas. La segunda fórmula es la que se aplica en el backtesting de los modelos semiparamétricos ya que no hay un supuesto sobre una varianza cambiante en el tiempo. En esta segunda fórmula, el $VaR_t(\alpha)$ es el correspondiente al modelo CAViaR oportuno y el $ES_t(\alpha)$ al modelo CARES correspondiente. Este cambio en el término de dispersión puede conducir a tasas de rechazo más precisas porque se realiza un análisis más enfocado al riesgo real.

La hipótesis nula asociada a este test es,

$$\begin{cases} H_0 : \mathbb{E} [BT_t] = 0 \\ H_0 : \mathbb{E} [BT_t] < 0 \end{cases}$$

La hipótesis alternativa representa el verdadero peligro, que es la infravaloración del riesgo por parte del ES. Aclarar que en este contraste a una cola la hipótesis alternativa se especifica con un signo negativo para posiciones largas (tomadas en consideración en este trabajo) y con un signo positivo para posiciones cortas.

Para encontrar de manera robusta el valor crítico asociado al estadístico BT_t , es decir, sin tener que hacer ningún supuesto sobre la distribución del ratio, se realizan simulaciones Monte Carlo tal y como se explica en el siguiente algoritmo,

i) Se generan N veces n variables aleatorias, $u_{ij} \stackrel{i.i.d.}{\sim} F$, $i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, N$. En este trabajo $N = 1000$ y $n = 100000$.

ii) Para cada muestra N , se calcula el α -cuantil de esas u_{ij} , $q(u_{ij})$, la $\mathbb{E} [u_{ij} \mid u_{ij} < q(u_{ij})]$ y la $\mathbb{V}\text{AR} [u_{ij} \mid u_{ij} < q(u_{ij})]$.

iii) Para cada $u_{ij} < q(u_{ij})$, se calcula $BT_{ij}(\alpha) = \frac{u_{ij} - \mathbb{E} [u_{ij} \mid u_{ij} < q(u_{ij})]}{\sqrt{\mathbb{V}\text{AR} [u_{ij} \mid u_{ij} < q(u_{ij})]}}$. No se calcula $BT_{ij}(\alpha)$ para aquellas $u_{ij} > q_{ij}$.

iv) Dado un nivel de significación p , se determina el valor crítico como la mediana de la serie de p -cuantiles de BT_{ij} .

v) Por último, se puede determinar el p -valor asociado a este test como la mediana de $\mathbb{P} [BT_{ij} < BT_t]$.

No se propone una función de pérdida para el ES debido a la dificultad que entraña al no ser una medida de riesgo elicitable. Nolde & Ziegel (2017) proponen una función scoring homogénea de grado 1/2 que depende del VaR y del ES. Se requiere de ambas medidas para aprovechar la propiedad “condicionalmente elicitable” del ES.

6.3. Expectil

En esta sección se pretende determinar cuáles de los modelos de predicción empleados son aceptables, qué estrategias de estimación de los expectiles parecen mejores y qué métodos de validación son más fiables.

6.3.1. Ratio de pérdidas y ganancias

Gracias al mapeo uno-a-uno entre cuantiles y expectiles no es de extrañar que haya cierta similitud entre algunos de los contrastes propuestos para el VaR y para el Expectil. Bellini & Di Bernardino (2015) utilizan el término “violaciones” ya que está relacionado con el ratio de ganancias y pérdidas. Este ratio se obtiene de la condición de primer orden que garantiza la existencia de los expectiles,

$$\tau \mathbb{E} [R - e_\tau(R)]_+ = (1 - \tau) \mathbb{E} [R - e_\tau(R)]_-$$

donde R es la variable aleatoria que representa los rendimientos de los activos. De esta manera, Bellini & Di Bernardino enfrentan el ratio de ganancias y pérdidas teórico (el de la C.P.O.) con el observado,

$$R_{teorico} = \frac{1 - \tau}{\tau} = \frac{1 - 0,01}{0,01} = 99$$

$$R_{observado} = \frac{\mathbb{E} [r_t - e_t(\tau)]_+}{\mathbb{E} [r_t - e_t(\tau)]_-}$$

donde $\mathbb{E} [x_t]_+ = \mathbb{E} [\max(x_t, 0)]$ y $\mathbb{E} [x_t]_- = \mathbb{E} [\min(x_t, 0)]$.

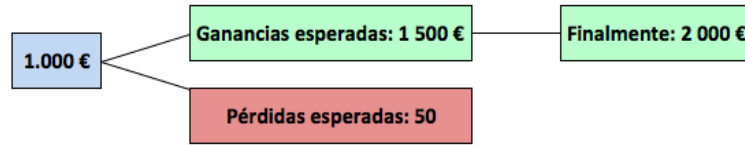
Un valor bajo del ratio observado sugiere que el modelo no es lo suficientemente conservador. El valor del ratio observado puede disminuir o bien porque disminuye el numerador (N), o bien porque aumenta el denominador (D). Esto es, o bien disminuye el coste de oportunidad de hacer asset allocation, por lo que se tiene más capital congelado, o bien, aumenta la pérdida esperada y, con ello, un coste potencial para pérdidas más extremas. Por otro lado, un valor muy alto del ratio observado tampoco es beneficioso ya que sería demasiado conservador y atesoraría demasiado capital en reservas. Analizemos más detenidamente estas afirmaciones con un pequeño ejemplo ilustrativo.

Ejemplo. Supongamos que con un determinado capital invertido y una probabilidad de pérdidas τ se espera tener un ratio de ganancias y pérdidas teórico $\frac{1-\tau}{\tau}$. El ratio de ganancias y pérdidas observado puede estar por encima o por debajo del teórico. Veamos qué ocurre en cada caso:

1) Ratio de ganancias y pérdidas observado **por encima** del teórico. Esto indica que el modelo empleado para la predicción del expectil es más conservador. ¿Porqué se da esta situación? Pues bien hay 2 motivos posibles que se pueden dar conjuntamente o aplicando ceteris paribus (mientras algo cambia, el resto permanece inalterado):

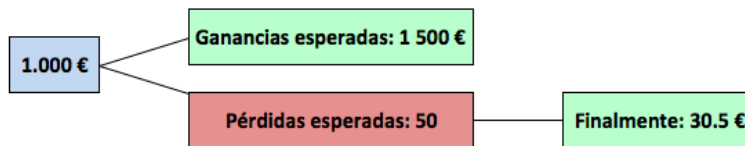
a) Se han obtenido más ganancias de las que se esperaban (aumenta N). Si se hubiese tenido constancia previamente de que las ganancias esperadas iban a ser más elevadas que las previstas en un principio, la decisión de calcular el ratio teórico en base a lo que se prevé hubiese sido diferente. Es decir, se podría haber invertido más parte del capital dedicado a cubrir provisiones, con lo que tanto los beneficios

esperados como la capacidad de absorción de pérdidas hubiesen sido mayores.



$$R_{teorico} = \frac{1500}{50} = 30; \quad R_{observado} = \frac{2000}{50} = 40$$

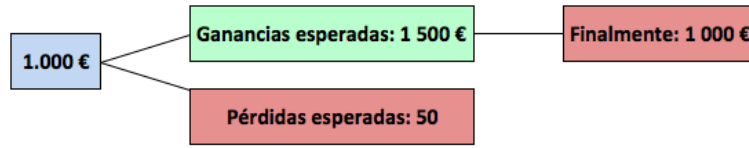
b) Se ha dado el caso de que las pérdidas esperadas han sido menores (disminuye D) por lo que se ha sobrevalorado el riesgo y como consecuencia se ha dotado demasiado capital en concepto de provisiones que perfectamente se hubiera podido destinar a hacer asset allocation.



$$R_{teorico} = \frac{1500}{50} = 30; \quad R_{observado} = \frac{1500}{30,5} = 40$$

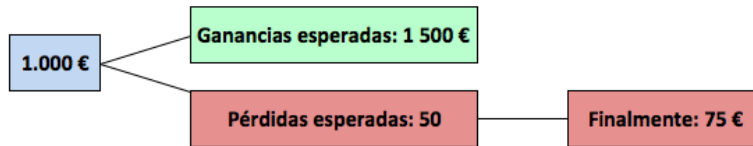
2) Ratio de ganancias y pérdidas observado **por debajo** del teórico. Esto indica que el modelo no es lo suficientemente conservador, es decir, es bastante agresivo. Por lo que se podría decir que el modelo empleado para la predicción del expectil infravalora el riesgo. Al igual que en el caso anterior hay dos explicaciones posibles que se pueden dar conjuntamente o aplicando ceteris paribus:

a) Se han obtenido menores ganancias que las esperadas en el momento de tomar la decisión de inversión (disminuye N). Se tiene una pérdida de valor debido a la dotación de capital por algo que se esperaba que tuviese unas ganancias mayores a las finalmente obtenidas.



$$R_{teorico} = \frac{1500}{50} = 30; \quad R_{observado} = \frac{1000}{50} = 20$$

b) Se han obtenido mayores pérdidas de las esperadas (aumenta D) por lo que se puede producir un grave problema de liquidez al tener que afrontar unas pérdidas no previstas en un principio. Esto es, se infravalora el riesgo.



$$R_{teorico} = \frac{1500}{50} = 30; \quad R_{observado} = \frac{1500}{75} = 20$$

Bellini & Di Bernardini sugieren que cabe la posibilidad de desarrollar un test formal basado en el ratio de pérdidas y ganancias realizado, similar al test binomial para la violaciones del VaR. No obstante, no llevan a cabo este enfoque ya que parece ser que el ratio de pérdidas y ganancias es bastante inestable desde un punto de vista numérico al tratarse de un ratio de cantidades de diferente orden de magnitud.

6.3.2. Función de pérdida de Bellini & Di Bernardino

Hay casos en los que no solo se está interesado en saber qué modelo es el más adecuado sino en poder establecer un ranking entre aquellos modelos de predicciones consistentes con los supuestos establecidos para los mismos.

Ya que el $Expectil_{\tau}$ minimiza una función scoring asimétrica, se puede establecer una función de pérdida asociada a dicho scoring,

$$L(e_t(\tau), r_t) = \begin{cases} |\tau - 1| (r_t - e_t(\tau))^2 & \text{si } r_t < e_t(\tau) \\ \tau (r_t - e_t(\tau))^2 & \text{si } r_t \geq e_t(\tau) \end{cases}$$

Un modelo de Expectil se preferirá a otro si presenta el menor promedio de la función de pérdida, $\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T L(e_t(\tau), r_t)$.

7. Datos y Modelos Estimados

En esta sección se muestra el análisis comparativo entre las tres medidas de riesgo calculadas según el enfoque paramétrico (VaR, ES y Expectil) y según el enfoque semiparamétrico (CAViaR, CARE y CARES). El estudio considera la estimación de la medida de riesgo oportuna a un día ($h=1$) y para un nivel de confianza $\alpha = \tau = 1\%$, ya que son las condiciones más consideradas en la práctica.

La muestra se compone de las cotizaciones diarias de cinco bloques de activos diferentes, esto es, índices, acciones, tipos de interés, tipos de cambio y commodities obtenidos de *Datastream Thomson Reuters*. Cada bloque de activo incorpora tres ejemplos,

Índices	Acciones	Tipos de interés	Tipos de cambio	Commodities
DAX30	BBVA	Letra Tesoro Español (1año)	\$ / €	Oro (LBM \$/Troy Ounce)
FTSE100	IBM	T-bill americana (3 años)	\$ / £	Petróleo (Brent \$/BBL)
VIX	BAYER	T.i del bono alemán (10 años)	¥ / \$	Gas (Henry Hub \$/MMBTU)

Tabla 7: *Diferentes tipos de activos que se van a tomar en consideración en el análisis empírico.*

El período tomado en consideración va desde 01/01/2008 hasta 28/04/2017 proporcionando un total de 2433 rendimientos logarítmicos. El período de muestra in-sample con el que se lleva a cabo la estimación de los parámetros de los modelos es de 1433 rendimientos, dejando 1000 datos para la comparación de la predicción out-of-sample, correspondiente al periodo 1/07/2013 a 28/04/2017. Para el cálculo de las rentabilidades de mercados que cotizan en tipos de interés, se generan precios de bonos cupón cero, $P_r = 100/(1 + r_t)$, y se calcula la variación logarítmica en dichos precios. Se lleva a cabo una predicción estática, es decir, un solo día hacia adelante, y cada 50 datos se vuelven a reestimar los parámetros de los modelos. Aclarar que en la predicción no se hace uso de ventanas móviles sino que cada día se incorpora un dato nuevo, por lo que el tamaño de la muestra in-sample va

aumentando conforme aumenta el horizonte de gestión (método recursivo). El software empleado en todo el trabajo es MATLAB-R2016a.

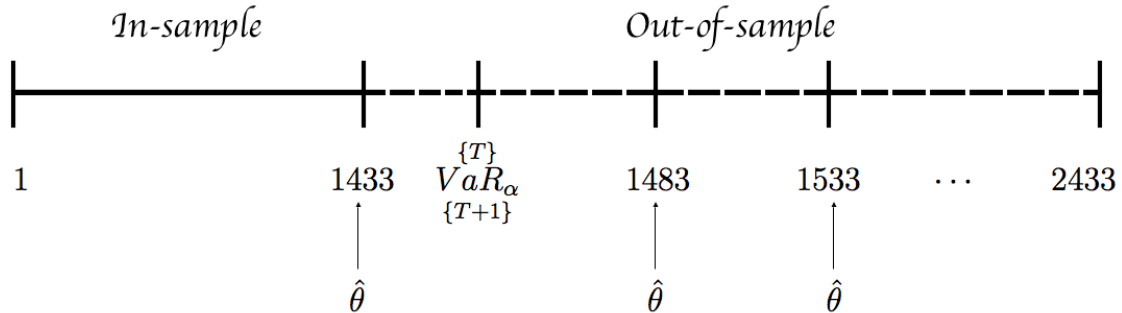


Figura 8: Ventana temporal en la que se refleja la muestra in-sample empleada para la estimación y la muestra out-of-sample para la predicción y backtesting de las medidas de riesgo. Asimismo, se puede apreciar la reestimación temporal de los parámetros $\hat{\theta}$ de los modelos empleados tanto para la rentabilidad como para la volatilidad.

7.1. Optimización de los modelos

En este subapartado se va a explicar el procedimiento seguido para la estimación según el enfoque oportuno.

En primer lugar, en los modelos paramétricos se ha utilizado el paquete de Matlab MFE de Kevin Sheppard para la estimación de los parámetros de los modelos de volatilidad. La obtención del $Expectil_{\{T+h\}}^{\{T\}}(\tau)$ del enfoque paramétrico se deriva de la condición de primer orden de la regresión ALS explicada en la sección 3.3, donde la $F_R(r)$ hace referencia a la función de distribución acumulada Normal, t-Student y Skew-tStudent estandarizadas, en cada caso.

En segundo lugar, en la estimación de los parámetros de los modelos semiparamétricos se sigue el mismo procedimiento propuesto por Engle & Manganelli (2004) para optimizar los modelos. Se generan $[10^4, 10^5, 10^4]$ vectores de parámetros de una $U(0,1)$ para cada modelo Simétrico, Asimétrico e Indirect GARCH, respectivamente. Con ellos se hace una rejilla para calcular la suma QR o ALS dependiendo si tenemos el modelo CAViaR o CARES y CARE. Se eligen los $[10, 15, 10]$ vectores de parámetros respectivos a cada modelo que menor suma QR o suma ALS tengan y se introducen en el algoritmo Simplex. El vector de parámetros óptimo del algoritmo Simplex se utiliza como condición inicial para el algoritmo Quasi-Newton. El óptimo del algoritmo Quasi-Newton se vuelve a utilizar como condición inicial en el Simplex. Estos dos últimos pasos se repiten hasta que los criterios de convergencia

sean satisfechos. El nivel de tolerancia para la función y los parámetros se fija en 10^{-10} . Este procedimiento solo se utiliza para la muestra in-sample, la reestimación de los parámetros posterior utiliza como condición inicial los parámetros óptimos anteriores.

Por último, los modelos CARES modelizan la evolución del ES_α a través de los expectiles. Para la modelización de los expectiles es necesario estimar el parámetro $\tau(\alpha)$ que hace que $e_{\tau(\alpha)} = q_\alpha$. Una vez se tiene el modelo de expectiles para $\tau(\alpha)$, el ES_α se obtiene de manera inmediata tal y como se explicó en el apartado de CARES. Para obtener el valor de $\tau(\alpha)$, se crea una rejilla para diferentes valores de $\tau(\alpha)$ que va desde 0 a 1 con un paso de 0.0001 y se va estimando el expectil de la muestra in-sample a través de la minimización ALS con cada $\tau(\alpha)$. Después se calcula la mínima diferencia entre el cuantil de la muestra in-sample para un $\alpha = 1\%$ y el expectil de la muestra in-sample para cada valor de $\tau(\alpha)$ de la rejilla. El $\tau(\alpha)$ será aquel valor de la rejilla correspondiente a la mínima diferencia.

7.2. Resultados de la estimación

En este apartado se procede a realizar un análisis más profundo relacionado con la estimación de los parámetros de los modelos de volatilidad y rentabilidad empleados en el cálculo de las medidas de riesgo VaR, ES y Expectil.

En primer lugar, se muestra una tabla con los principales estadísticos descriptivos de los activos tomados en consideración para tener una idea del aspecto que presentan las series con las que estamos tratando. La *Figura 21* y la *Figura 22* del Anexo, muestran gráficos de la serie de cotizaciones al cierre del índice FTSE¹⁴ y de la serie de rendimientos con su correspondiente histograma, respectivamente.

¹⁴Si se requiere se puede solicitar al autor los gráficos de los demás activos.

	Media (%)	Mediana (%)	Moda	Desviación típica	Asimetría	Curtosis	Máximo	Mínimo	JB-test
DAX	-0.0009	0.04	0	0.02	0.12	8.48	0.11	-0.07	1787 (p=0)
FTSE	-0.003	0	0	0.01	-0.09	9.69	0.09	-0.09	2658 (p=0)
VIX	-0.02	-0.004	0	0.07	0.70	6.68	0.41	-0.35	920 (p=0)
BBVA	-0.06	-0.07	0	0.03	0.40	7.30	0.20	-0.14	1133 (p=0)
IBM	-0.06	-0.07	0	0.03	0.40	7.30	0.20	-0.14	1133 (p=0)
BAYER	0.02	0	0	0.02	-0.15	6.64	0.11	-0.11	792 (p=0)
\$ / €	-0.008	0	0	0.01	0.17	5.89	0.05	-0.04	502 (p=0)
\$ / £	-0.02	0	0	0.01	-0.04	7.34	0.04	-0.04	1116 (p=0)
¥ / \$	-0.008	0	0	0.01	-0.19	7.32	0.04	-0.05	1119 (p=0)
Petróleo	0.006	0.04	0	0.02	0.04	10.32	0.18	-0.17	3179 (p=0)
Oro	0.03	0.05	0	0.01	-0.59	8.14	0.07	-0.10	1653 (p=0)
Gas	-0.05	0	0	0.04	0.77	14.57	0.28	-0.26	8098 (p=0)
Letra Tesoro	0.002	0	0	0.14	-0.49	18.24	0.91	-0.94	1386 (p=0)
T-bill	0.002	0.002	0	0.06	-0.50	13.04	0.40	-0.56	6051 (p=0)
Bono alemán	0.002	0.002	0	0.05	0.09	4.30	0.25	-0.17	101 (p=0)

Tabla 9: Principales estadísticos descriptivos de la serie de rendimientos in-sample de todos los activos considerados en este análisis. También se muestra el estadístico correspondiente al test de normalidad de Jarque-Bera y en paréntesis el p-valor asociado a dicho estadístico.

Atendiendo a la *Tabla 9* se puede observar que las series de rendimientos de los activos utilizados en este estudio presentan las características más comunes de las series financieras: media prácticamente nula, un poco de asimetría o bien negativa que implica que los datos están ligeramente sesgados hacia la izquierda, o bien positiva que indica lo contrario, un coeficiente de curtosis superior a 3 señalando un mayor apuntamiento de los datos que la normal estándar (leptocúrtica) y con colas pesadas. Se puede apreciar que en los activos con una asimetría negativa la moda presenta un valor numérico superior a la mediana y ésta, a su vez, superior a la media aritmética. El elevado coeficiente de apuntamiento nos proporciona una idea de la proporción de la varianza que se explica por la combinación de datos extremos respecto a la media en contrapartida de datos poco alejados de la media. Por este motivo, a priori se espera que los modelos y distribuciones asimétricas permitan captar mejor el riesgo inherente a estas series financieras. No obstante, se va a comprobar también con modelos y distribuciones simétricas.

Antes de analizar en profundidad los parámetros obtenidos para cada modelo y distribución es necesario analizar los valores que arrojan los $\tau(\alpha)$ para los distintos activos necesarios en la estimación de los parámetros de los modelos CARES para el ES.

DAX	FTSE	VIX	BBVA	IBM
0.00187	0.0028	0.0038	0.0019	0.0016
BAYER	\$/€	\$/£	¥/\$	Oro
0.0027	0.0020	0.0035	0.0043	0.0039
Petróleo	Gas	Letra Tesoro	T-bill	Bono
0.0041	0.0044	0.0037	0.0043	0.0015

Tabla 10: Estimación del parámetro $\tau(\alpha)$ de la muestra in-sample correspondiente a un nivel $\alpha = 1\%$ para cada uno de los activos tomados en consideración en este trabajo. Este $\tau(\alpha)$ es aquel que hace que $e_{\tau(\alpha)} = q_\alpha$.

Si observamos la *Tabla 10* se pueden ver distintos valores de $\tau(\alpha)$ pero ¿qué implicaciones tienen valores de τ menores? Si recordamos la condición de primer orden que garantiza la existencia de los expectiles y la adecuamos para $\tau(\alpha)$,

$$\tau(\alpha)\mathbb{E} [R - e_{\tau(\alpha)}(R)]_+ = (1 - \tau(\alpha))\mathbb{E} [R - e_{\tau(\alpha)}(R)]_-$$

$$\frac{\mathbb{E} [R - e_{\tau(\alpha)}(R)]_+}{\mathbb{E} [R - e_{\tau(\alpha)}(R)]_-} = \frac{\mathbb{E} [R - q_\alpha(R)]_+}{\mathbb{E} [R - q_\alpha(R)]_-} = \frac{1 - \tau(\alpha)}{\tau(\alpha)}$$

cuanto menor sea la magnitud $\tau(\alpha)$, mayor es la media de los excesos del VaR_α . Por ejemplo, si con IBM obtenemos un $\tau(\alpha) = 0,0016$ menor que con el oro, $\tau(\alpha) = 0,0039$, es porque los excesos del $\text{VaR}_{1\%}$ de IBM tienen una mayor magnitud y, por tanto, la media de los mismos es mayor que los del oro.

Profundizando en cada modelo se puede analizar la estimación de los parámetros in-sample, así como, la evolución de los mismos durante el horizonte de predicción. Las tablas que se muestran a continuación que pretenden recoger este análisis se refieren únicamente al índice FTSE. En caso de requerir los datos de los demás activos se pueden solicitar al autor de este trabajo.

PARAMÉTRICOS - FTSE100										
	Parámetros Estimación In-Sample	Normal GARCH	t-Student GARCH	Skew-t GARCH	Normal GJR-GARCH	t-Student GJR-GARCH	Skew-t GJR-GARCH	Normal APARCH	t-Student APARCH	Skew-t APARCH
AR(1)	ρ_0	-2.31e-05	-2.31e-05	-2.31e-05	-2.31e-05	-2.31e-05	-2.31e-05	-2.31e-05	-2.31e-05	-2.31e-05
	ρ_1	-0.0363	-0.0363	-0.0363	-0.0363	-0.0363	-0.0363	-0.0363	-0.0363	-0.0363
Modelos tipo - GARCH	ω	2.21e-06	2.27e-06	2.16e-06	2.77e-06	2.77e-06	2.71e-06	2.03e-04	3.23e-04	3.37e-04
	β_1	0.9040	0.9035	0.9063	0.9099	0.9054	0.9069	0.9261	0.9224	0.9251
	β_2	0.0834	0.0851	0.0829	8.12e-10	3.28e-08	4.20e-08	0.0643	0.0732	0.0715
	η	#	#	#	0.1439	0.1573	0.1542	#	#	#
Distribuciones	θ	#	#	#	#	#	#	-0.9995	-0.9995	-0.9995
	δ	#	#	#	#	#	#	1.0663	0.9748	0.9572
	ν	#	7.5577	7.6451	#	9.2984	9.7844	#	9.3118	9.8194
	λ	#	#	-0.0878	#	#	-0.0956	#	#	-0.0980
Persistencia en volatilidad	p-value Ljung-Box (1 lags)	0.2122	0.2082	0.2376	0.0060	0.0045	0.0049	0.0103	0.0115	0.0130
	p-value Ljung-Box (3 lags)	0.3271	0.3270	0.3235	0.0534	0.0407	0.0441	0.0500	0.0472	0.0491
	p-value Ljung-Box (5 lags)	0.4784	0.4795	0.4541	0.1596	0.1265	0.1365	0.1490	0.1462	0.1510

Tabla 11: *Parámetros de la estimación in-sample bajo el enfoque paramétrico para el índice FTSE. Puede observarse la estimación de los parámetros in-sample para el modelo AR(1) supuesto para la rentabilidad y para los diversos modelos de volatilidad con distintas distribuciones. El modelo GARCH(1,1) se especifica como $\sigma_t^2 = \omega + \beta_1\sigma_{t-1}^2 + \beta_2\varepsilon_{t-1}^2$, el modelo GJR-GARCH(1,1) como $\sigma_t^2 = \omega + \beta_1\sigma_{t-1}^2 + \beta_2\varepsilon_{t-1}^2 + \eta I_{\{\varepsilon_{t-1} < 0\}}\varepsilon_{t-1}^2$ y el modelo APARCH(1,1) como $\sigma_t^\delta = \omega + \beta_1\sigma_{t-1}^\delta + \beta_2(|\varepsilon_{t-1}| - \theta\varepsilon_{t-1})^\delta$. Además, se presentan los p-value del contraste de Ljung-Box para 1, 3 y 5 retardos, respectivamente, para contrastar la existencia o no de autocorrelación en las rentabilidades estandarizadas al cuadrado. La almohadilla indica que no procede tener un dato ahí.*

En primer lugar, cabe recordar que la estimación de los parámetros en el enfoque paramétrico se ha realizado en dos etapas. Se estiman los parámetros del modelo AR(1) a través de MCO y posteriormente los del modelo de volatilidad y los de las distribuciones de probabilidad correspondientes. Por este motivo, los parámetros del modelo de rentabilidad son siempre los mismos independientemente del modelo de volatilidad empleado. Una vez estimados los parámetros de las distribuciones correspondientes, éstos se han utilizado tanto para el cálculo del VaR, del ES y del Expectil. Si analizamos los parámetros del modelo GARCH, para cualquiera de las distribuciones, Normal, t-Student y Skew-tStudent, se puede observar que apenas varían entre distribuciones, siendo β_1 , el parámetro correspondiente a la persistencia en volatilidad, el más elevado. Por tanto, en el modelo GARCH el mayor impacto en volatilidad viene a través de sus retardos y ligeramente a través del tamaño de las innovaciones. En el modelo GJR-GARCH, el parámetro correspondiente a la volatilidad retardada un periodo es el que mayor impacto causa en la volatilidad seguido del parámetro correspondiente al componente negativo no predecible de la serie de rentabilidades. En el modelo APARCH destaca la estimación del parámetro δ prácticamente igual a uno lo que indica que es más razonable modelizar directamente la volatilidad, en lugar de la varianza y así evitar aplicar la regla de la raíz cuadrada a la varianza y sus limitaciones.¹⁵ El único caso en el que

¹⁵La cuasi-varianza muestral $\frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T r_t^2$, calculada a partir de una muestra aleatoria simple,

el parámetro δ es significativamente igual a 2 es en el caso de los tipos de interés. Otro de los parámetros a destacar es el correspondiente al efecto apalancamiento en volatilidad, θ . Al ser θ un valor negativo, con el signo negativo en la ecuación se convierte en positivo lo que indica que los impactos negativos tienen un mayor efecto sobre la varianza que aquellos que son positivos. Puesto que en todos estos modelos se pretende recoger la evolución temporal en volatilidad, no debería existir autocorrelación en la rentabilidades estandarizadas al cuadrado. Para validar estos modelos se ha utilizado el contraste de Ljung-Box para 1,3 y 5 retardos. Utilizando un nivel de confianza del 1%, se puede observar que no se rechaza la hipótesis nula de validez del modelo en todos los modelos GARCH para un retardo y en los modelos GJR-GARCH y APARCH para 3 retardos.

En la siguiente figura se muestra la evolución de los parámetros bajo el enfoque paramétrico para cada uno de los modelos de volatilidad propuestos.

es decir, una muestra cuyos elementos son independientes entre sí, es un estimador insesgado de la varianza poblacional. Por tanto, $\mathbb{E} \left[\frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T r_t^2 \right] = \sigma_r^2$. Esto es válido para cualquier población con esperanza y varianza constantes. Sin embargo, la estimación que se deduce para la desviación típica tomando la raíz cuadrada de la estimación de la varianza no es insesgada, debido a que la esperanza matemática de una función no lineal no es igual al valor de la función en dicha esperanza matemática. De hecho, la desigualdad de Jensen dice que $\mathbb{E} [g(X)] \leq g(\mathbb{E}[X])$ si la función g es cóncava, y lo contrario ocurre si la función g es convexa. Por tanto, la esperanza matemática de la raíz cuadrada de una función es menor o igual que la raíz cuadrada de la esperanza matemática de la función, $\mathbb{E} [\sqrt{g(X)}] \leq \sqrt{\mathbb{E} [g(X)]}$. Si se calcula la desviación típica muestral como la raíz cuadrada (función cóncava) de la varianza muestral, $DT(r) = \sqrt{\frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T r_t^2}$, se obtendrá un valor numérico que, en promedio (aunque no para una única muestra) será mayor que la desviación típica poblacional, ya que por la desigualdad de Jensen: $\mathbb{E} [DT(r)] = \mathbb{E} \left[\sqrt{\frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T r_t^2} \right] \leq \sqrt{\mathbb{E} \left[\frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T r_t^2 \right]} \rightarrow \sigma_r$. El sesgo de sobre-estimación así cometido al estimar la desviación típica puede evaluarse en el caso de una población Normal. Bajo determinadas condiciones, el sesgo desaparece al aumentar el tamaño muestral, siendo la raíz cuadrada de la varianza muestral un estimador consistente de la desviación típica poblacional.

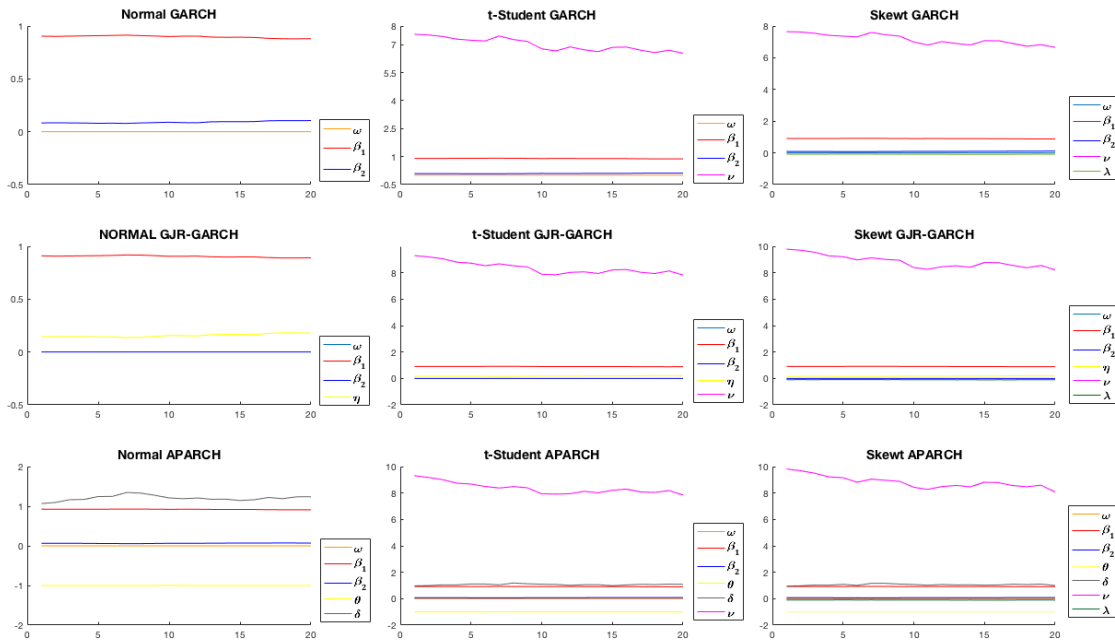


Figura 12: Evolución de los parámetros expuestos en la tabla anterior a lo largo del horizonte de predicción, reestimados cada 50 datos. En la primera fila se tiene la evolución de los parámetros del modelo GARCH para cada distribución, Normal, *t*-Student y Skew-*t*Student respectivamente. En la segunda fila se observan los parámetros correspondientes al modelo GJR-GARCH para cada una de las distribuciones mencionadas anteriormente. Y en la última fila se tienen los parámetros del modelo APARCH para cada distribución.

Como se puede observar la evolución de los parámetros es suave durante el horizonte de predicción para cada modelo, sin presentar saltos, debido en gran parte a que la muestra out-of-sample del índice FTSE100 es más o menos homogénea. Cabe mencionar que se produce una mayor variabilidad en el parámetro ν que representa los grados de libertad para todos los modelos, por lo que es más sensible a los datos de la muestra utilizados.

Análogamente, se presentan los parámetros de los modelos semiparamétricos de la estimación in-sample.

SEMIPARAMÉTRICOS									
Parámetros Estimación In-Sample	VaR (α)			ES (α)			Expectil (τ)		
	CAViaR Symmetric	CAViaR Asymmetric	CAViaR Indirect- GARCH	CARES Symmetric	CARES Asymmetric	CARES Indirect- GARCH	CARE Symmetric	CARE Asymmetric	CARE Indirect- GARCH
β_0	-0.0003	-0.0005	1.46E-06	-0.0002	-0.0008	8.89E-06	-0.0005	-0.0006	9.03E-06
β_1	0.8725	0.9168	0.9297	1.1816	1.1956	1.5209	0.8936	0.9231	0.9065
β_2	-0.4123	-0.0861	0.5167	-0.2943	0.0051	0.6738	-0.2152	-0.0007	0.2857
β_3	#	0.3491	#	#	0.3769	#	#	0.258	#

Tabla 13: *Parámetros de la estimación in-sample de los modelos CAViaR para el VaR, de los modelos CARES para el ES y de los modelos CARE para el Expectil. El modelo CAViaR Simétrico se estructura como $q_t(\alpha) = \beta_0 + \beta_1 q_{t-1}(\alpha) + \beta_2 |r_{t-1}|$, el CAViaR Asimétrico como $q_t(\alpha) = \beta_0 + \beta_1 q_{t-1}(\alpha) + \beta_2 (r_{t-1})^+ + \beta_3 (r_{t-1})^-$ y, por último, el CAViaR Indirect GARCH como $q_t(\alpha) = (1 - 2I_{\alpha < 0.5})(\beta_0 + \beta_1 q_{t-1}(\alpha) + \beta_2 r_{t-1}^2)^{\frac{1}{2}}$. Los modelos CARES y CARE presentan la misma estructura que los CAViaR, excepto que se sustituye el cuantil por el ES o el Expectil, respectivamente. La almohadilla indica que no procede tener un dato ahí.*

Los modelos simétricos y modelos Indirect GARCH tanto en CAViaR como en CARES y CARE son modelos tipo GARCH, por lo que no es extraño que sus parámetros presenten un comportamiento parecido. No obstante, en estos modelos no hay restricciones sobre el valor de los parámetros (es decir, $\beta_1 + \beta_2 \neq 1$), a excepción del Indirect GARCH (que exige positividad en los parámetros), y no es necesario hacer un supuesto sobre la volatilidad ya que modeliza directamente la evolución temporal del cuantil, del ES o del Expectil. Por tanto, hay una gran persistencia en la medida de riesgo oportuna de los periodos anteriores que viene recogida en el parámetro β_1 y una reducción (aumento) en la misma debido a las rentabilidades de periodos anteriores en el modelo simétrico (Indirect GARCH) que queda reflejada en el parámetro β_2 . Las medidas de riesgo de los modelos asimétricos, tal y como cabría esperar, vienen explicadas en gran parte, además del parámetro de persistencia, por las rentabilidades negativas de periodos anteriores. Esto indica que puede ser un modelo apropiado para recoger la asimetría negativa que al principio se vio que tiene esta serie. No obstante, todos los resultados se corroboran en la sección de presentación de resultados backtesting.

En la siguiente figura se muestra la evolución de los parámetros bajo el enfoque semiparamétrico para cada uno de los modelos propuestos.

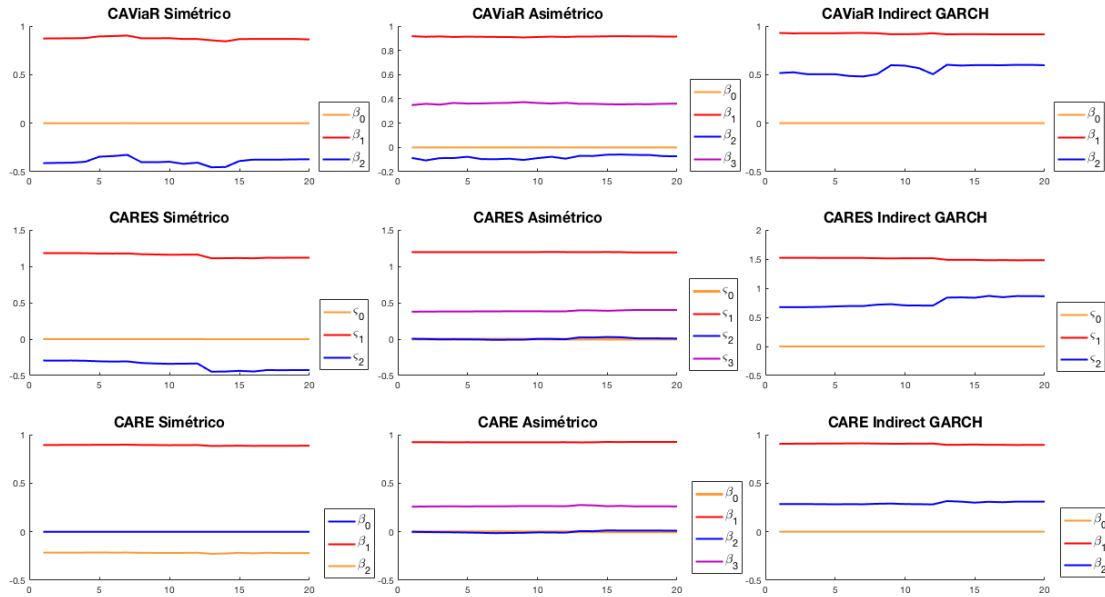


Figura 14: Evolución de los parámetros expuestos en la tabla anterior a lo largo del horizonte de predicción, reestimados cada 50 datos. En la primera fila se tiene la evolución de los parámetros del modelo CAViaR Simétrico, Asimétrico e Indirect GARCH, respectivamente. En la segunda fila se observan los parámetros correspondientes a los modelo CARES para ES. Y en la última fila se tienen los parámetros de los modelos CARE para Expectil.

Al igual que en el caso de los modelos paramétricos, la evolución de los parámetros de los modelos semiparamétricos durante el horizonte de predicción es muy suave, sin apenas saltos, siendo β_2 la única que varía ligeramente tanto en el modelo CAViaR simétrico como en el CAViaR Indirect GARCH.

7.3. Resultados backtesting

En esta sección se presentan los resultados de los procedimientos de backtesting para los modelos paramétricos y semiparamétricos de las medidas de riesgo tomadas en consideración, VaR, ES y Expectil.

En la *Figura 23*, *Figura 24* y *Figura 24* del apéndice se ilustra el comportamiento de las series de VaR, de ES y de Expectil según diferentes modelos paramétricos y semiparamétricos para el índice FTSE¹⁶. Con estos gráficos no es posible determinar qué modelo o qué distribución es la más adecuada en la predicción de las medidas de riesgo consideradas para FTSE. Para ello, se emplean los contrastes y

¹⁶ Solicitar al autor del trabajo si se requiere de más combinaciones de las medidas para el FTSE o de los gráficos de los activos restantes.

funciones de pérdida del backtesting que comentaremos a continuación. Sin embargo, es conveniente mostrar las figuras para tener una idea del aspecto que presentan las medidas cambiantes en el tiempo en relación a las rentabilidades out-of-sample. Se puede apreciar que el ES de manera sistemática se encuentra por debajo del VaR y que del mismo modo, el Expectil siempre aparece por encima. Pero cuidado, esto no indica que una medida u otra infravalore o sobrevalore el riesgo. Esto no es capaz de determinarlo un gráfico. Simplemente, por definición ocupan una posición u otra. Por ejemplo, el ES al ser una media de los datos que exceden del VaR, si hay muchos excesos la media será mayor y estará por debajo. Lo mismo ocurre con el Expectil, al considerar ambas colas de la distribución, de hecho se puede observar que en el momento en el que la serie de rentabilidades tiene un pico positivo muy alto, el Expectil se acerca mucho más a la media de esa serie de rentabilidades.

Las tablas con los resultados particulares de los contrastes de backtesting para cada tipo de activo se encuentran en el anexo en el apartado *E) Tablas backtesting*. Sin embargo, al igual que en el caso anterior se lleva a cabo un pequeño ejercicio de análisis para un activo individual (FTSE) para tener una mejor idea del procedimiento llevado a cabo para nuestra pregunta principal que no es la de análisis particular de los activos, sino la de ver si el Expectil es una mejor medida de riesgo de manera general y ver si es posible obtener algún patrón que determine qué enfoque, modelo de volatilidad o distribución es más adecuada para la predicción del mismo.

p = 1%	VaR - Ratio de Violaciones	VaR - Test Kupiec	VaR - Test Christoffersen		VaR - Test Engle & Manganelli	VaR - Funciones de pérdida			Expected Shortfall	Expectil	Expectil - Función de pérdida
	π	LRuc	LRind	LRcc	DQT	López	Sarma et al. (RLF)	Sarma et al. (FLF)	Righi & Ceretta (2015)	Ratio ganancias-pérdidas	Bellini & Di Bernardino
N-GARCH	2.1%	9.2840 (0.0023)	0.5917 (0.4418)	9.8758 (0.0072)	32.5548 (1.28e-05)	0.0210	9.5241e-07	2.0485e-04	-0.8699 (0.1660)	64	3.2318e-04
t-GARCH	0.5%	3.0937 (0.0786)	5.8467 (0.0156)	8.9404 (0.0114)	23.1710 (0.0007)	0.0050	2.7195e-07	2.6981e-04	-0.0959 (0.3160)	178	5.0037e-04
Skewt-GARCH	1.2%	0.3798 (0.5377)	2.3137 (0.1282)	2.6935 (0.2601)	16.6467 (0.0107)	0.0120	5.1260e-07	2.3802e-04	0.1912 (0.4360)	103	4.0133e-04
N-GJRGARCH	1.7%	4.0910 (0.0431)	1.1554 (0.2824)	5.2464 (0.0726)	13.3296 (0.0381)	0.0170	5.6885e-07	2.0651e-04	-0.6981 (0.1980)	75	3.2613e-04
t-GJRGARCH	0.7%	1.0156 (0.3136)	-	-	1.1628 (0.9787)	0.0070	1.3279e-07	2.5836e-04	0.1461 (0.4190)	182	4.6684e-04
Skewt-GJRGARCH	0.9%	0.1045 (0.7465)	-	-	0.4357 (0.9285)	0.0090	2.5095e-07	2.3603e-04	0.0748 (0.3890)	122	4.0027e-04
N-APARCH	1.4%	1.4374 (0.2306)	1.7740 (0.1829)	3.2114 (0.2007)	12.5331 (0.0511)	0.0140	5.5468e-07	2.0965e-04	-0.8871 (0.1635)	76	3.2985e-04
t-APARCH	0.6%	1.8862 (0.1696)	-	-	1.9613 (0.9232)	0.0060	1.5029e-07	2.6359e-04	0.0510 (0.3770)	196	4.7786e-04
Skewt-APARCH	0.8%	0.4337 (0.5102)	-	-	1.2687 (0.9734)	0.0080	2.6037e-07	2.3801e-04	-0.3355 (0.2520)	127	4.0196e-04
CAViaR Simétrico	1.3%	0.8306 (0.3621)	2.0289 (0.1543)	2.8595 (0.2394)	21.5890 (0.0014)	0.0130	5.0016e-07	2.3473e-04	#	#	#
CAViaR Asímetrico	1.2%	0.3798 (0.5377)	2.3137 (0.1282)	2.6935 (0.2601)	7.9464 (0.2421)	0.0120	3.5643e-07	2.2564e-04	#	#	#
CAViaR Indirect GARCH	1.4%	1.4374 (0.2306)	1.7740 (0.1829)	3.2114 (0.2007)	16.5568 (0.0111)	0.0140	5.8884e-07	2.3359e-04	#	#	#
CARES Simétrico	#	#	#	#	#	#	#	#	-0.1705 (0.2174)	#	#
CARES Asímetrico	#	#	#	#	#	#	#	#	0.3278 (0.4215)	#	#
CARES Indirect GARCH	#	#	#	#	#	#	#	#	-0.0385 (0.3029)	#	#
CARE Simétrico	#	#	#	#	#	#	#	#	#	101	3.9837e-04
CARE Asímetrico	#	#	#	#	#	#	#	#	#	134	3.9731e-04
CARE Indirect GARCH	#	#	#	#	#	#	#	#	#	106	3.9377e-04

Tabla 15: Estadísticos correspondientes a los diferentes contrastes de backtesting (con sus p-valores asociados entre paréntesis) para los distintos modelos de predicción del VaR y promedios de las funciones de pérdida para las diferentes medidas de riesgo $VaR_1\%$, $ES_1\%$ y $Expectil_1\%$ para el índice FTSE100. En la 1ª columna se recoge el ratio de violaciones π , en las columnas 2 a 5 se recogen los contrastes de validación del VaR, Kupiec (LR_{uc}), Christoffersen (LR_{ind} , LR_{cc}) y Engle & Manganelli (DQT). Las columnas 6 a 8 corresponden a las funciones de pérdida para el VaR, la columna 9 corresponde al contraste de Righi & Ceretta (2015) para el ES, la columna 10 al contraste de Bellini & Di Bernardino para el Expectil y la última columna a la función de pérdida asociada al Expectil. Se resalta en color rojo, como algo negativo, los modelos que no pasan el test correspondiente a un nivel de significación $p = 1\%$ y en color azul, como algo positivo, las funciones de pérdida que menores valores presentan. El guión hace referencia a que no se ha podido establecer un dictamen debido a alguna indeterminación matemática (0^0) en el cálculo del estadístico del test correspondiente, con lo cual no hay un valor posible. La almohadilla indica que no procede tener un dato ahí.

Atendiendo a la *Tabla 15* se puede observar que el único modelo que no pasa el test de frecuencia de Kupiec es el GARCH con distribución Normal. Aunque este modelo consiga no rechazar la hipótesis nula del test de independencia de Christof-

fersen, si la rechaza en el test de cobertura condicional que es más exigente al unir tanto el test incondicional de Kupiec como el de cobertura condicional de Christoffersen. Tampoco consigue no rechazar la hipótesis nula del test DQ de Engle & Manganelli que solventa los inconvenientes del de Christoffersen. Por tanto, tal y como cabría esperar, se puede concluir que el modelo GARCH con distribución Normal no es el adecuado para el cálculo de las predicciones del VaR del índice FTSE. El modelo más adecuado de los GARCH es el correspondiente a la distribución Skew-tStudent de Hansen ya que no rechaza la hipótesis nula en ninguno de los tests aunque el ratio de violaciones indique que hay un exceso del 0.2%, es decir, se esperaban diez violaciones y han habido doce. El modelo más adecuado tanto de los GJR-GARCH como de los APARCH es también el correspondiente a la distribución Skew-tStudent ya que presenta los mayores p-values en todos los tests. Bajo el enfoque paramétrico de cálculo del VaR, el modelo que parece ser que mejor funciona para el índice FTSE es el Skewt-GJRGARCH ya que presenta unos p-valores superiores al APARCH. Se puede concluir que es un modelo adecuado que permite recoger la asimetría negativa de esta serie. Por último, se puede discernir entre los modelos del enfoque semiparamétrico para el cálculo del VaR. El modelo más adecuado es el CAViaR Asimétrico con unos p-valores muy superiores a los demás. Por otra parte, se puede llevar a cabo un análisis de backtesting basado en funciones de pérdidas que además permite establecer un ranking entre modelos. Las funciones de pérdida de López y RLF de Sarma et al. tenían un enfoque más regulador y coinciden en que los modelos más apropiados para la predicción del VaR serían el t-GJRGARCH y t-APARCH. La función de pérdida FLF de Sarma et al. tenía un enfoque más empresarial ya que también tomaba en consideración el coste de oportunidad de tener el capital retenido. Así pues, esta función considera los modelos N-GARCH, N-GJRGARCH, N-APARCH y CAViaR Asimétrico como los más adecuados para la predicción del VaR. En definitiva, para la predicción del VaR en el índice FTSE parece ser más apropiado emplear un enfoque paramétrico y, en concreto, el modelo Skewt-GJRGARCH que recoge la asimetría tanto en el modelo de volatilidad como en la distribución, además de las colas pesadas. Según el análisis de las funciones de pérdida vamos a tomar en consideración la FLF ya que consideramos que al tener en cuenta también el coste de oportunidad de tener el capital retenido puede ajustar mejor la medida al riesgo futuro real.

A continuación, se va a analizar la precisión de los modelos empleados en el cálculo del Expected Shortfall de la serie FTSE. Como se puede observar en la tabla anterior, no hay ningún modelo para el cual se rechaze la hipótesis nula, por lo que se podrían dar por válidos todos los modelos empleados en la predicción del ES para el FTSE. No obstante, se puede apreciar que los modelos Skewt-GARCH, t-GJRGARCH, Skewt-GJRGARCH, t-APARCH y CAViaR Asimétrico, que además presentan unos p-valores superiores a los demás modelos, sobrevaloran el riesgo al presentar un valor del estadístico positivo. Esto indica que los datos se han situado

a la derecha del ES pero sin sobrepasar el VaR.

En el caso del Expectil, lo que se presenta en la tabla es el ratio de ganancias y pérdidas observado. El valor que ahí aparece se debe comparar con el ratio de ganancias y pérdidas teórico, es decir, $\frac{1-\tau}{\tau} = 99$. Para poder validar un modelo para el Expectil se va a seguir un enfoque similar al propuesto por Basilea para el VaR con la delimitación de unos rangos para establecer unas zonas de aceptación o de rechazo. Para que un modelo se encuentre en la zona verde o de seguridad, la diferencia en valor absoluto entre el ratio teórico esperado y el ratio observado se debe encontrar entre 0-16 para una muestra de 1000 datos. Si se encuentra en el rango 17-36, el modelo se encontraría en la zona amarilla o de precaución y, por último, el modelo sería rechazado si se encuentra en la zona roja o de peligro, es decir, en el rango >36 . En este caso lo que se hace es penalizar tanto la situación en la que el ratio de ganancias y pérdidas observado se encuentra por encima del teórico (sobrevalora) como si se encuentra por debajo (no es suficientemente conservador). Por ejemplo, para el modelo Skewt-GJRGARCH el ratio de pérdidas y ganancias observado es superior al teórico, obteniendo una diferencia en valor absoluto de 23, mientras que en el modelo N-APARCH el ratio observado es inferior al teórico obteniendo una diferencia también de 23. En este caso, se brindaría el mismo trato a ambos modelos colocándolos en la zona amarilla o de precaución puesto que el Skewt-GJRGARCH puede sobrevalorar un poco el riesgo y el N-APARCH infravalorarle un poco. Los modelos más indicados con diferencia para el cálculo del Expectil del índice FTSE parecen ser el Skewt-GARCH y el CARE Simétrico ya que son los que más se acercan al ratio teórico esperado. En cuanto a la función de pérdida para el Expectil, resulta que establece como mejores modelos los mismos que escogió la FLF de Sarma et al. para el VaR. Esto no es de extrañar ya que ambas tienen en cuenta también el comportamiento de la cola derecha, es decir, toman en consideración también el coste de oportunidad de tener el capital inmovilizado.

El objetivo de ver este análisis de backtesting más en detalle para el índice FTSE era ayudar al lector a comprender mejor todos los pasos y procedimientos seguidos. Con el mismo fin, se presentan datos agregados del backtesting a nivel global para todos los activos. Por no romper el orden, se empieza con el análisis a nivel global del VaR, seguido del ES y por último del Expectil.

Siguiendo la práctica que estableció el Comité de Basilea en su Acuerdo de Capital de 1996, se muestra a continuación un cuadro con las tres zonas ligadas a la cantidad de excepciones registradas en el periodo de evaluación del VaR. Se calcula la equivalencia para la muestra empleada en este trabajo de los intervalos establecidos para la delimitación de las zonas. Los valores que aparecen en la tabla son los correspondientes al número de excesos observados menos el número de excesos

teórico (que de 1000 datos al 1 %, se esperan 10 excesos). De esta forma, la zona verde o de seguridad abarca los resultados del backtesting entre 0 y 6 excepciones para una muestra de 1000 observaciones, la zona amarilla recogería aquellas excepciones entre un rango 7-26 y, por último, la zona roja, aquellas que superen las 26 excepciones. Los números en rojo de la parte inferior son los correspondientes al cálculo de medianas según el tipo de activo. En la parte de la derecha la primera columna cuyos valores están en rojo son los correspondientes al cálculo de medianas por modelo para el total de activos, la segunda columna es el cálculo de medianas por distribuciones y la tercera columna al cálculo agregado por modelo de volatilidad.

VaR - (n)	DAX	FTSE	VIX	BBVA	IBM	BAYER	\$/€	\$/£	¥/\$	Petróleo	Oro	Gas	Letra Tesoro	T-bill	Bono alemán	Mediana modelo Individual	Mediana por distribución	Mediana por modelo volatilidad
N-GARCH	7	11	2	5	6	3	6	5	4	2	4	1	2	8	9	5	5	5
t-GARCH	7	5	9	8	1	7	3	5	7	4	10	5	4	2	4	5	4	4
Skt-GARCH	2	2	5	0	4	3	2	4	1	3	5	0	22	2	3	3	2	4
N-GJRGARCH	4	7	3	2	5	0	7	6	6	1	4	4	2	7	9	4		
t-GJRGARCH	3	3	8	5	3	7	4	4	7	4	9	5	4	2	6	4		
Skt-GJRGARCH	1	1	4	0	3	2	0	4	1	4	5	1	24	1	3	2		
N-APARCH	5	4	5	4	6	2	13	7	4	2	3	6	1	5	9	5		
t-APARCH	3	4	9	4	3	6	3	1	7	4	9	5	7	3	5	4		
Skt-APARCH	0	2	2	2	2	4	4	0	2	4	4	0	28	4	3	2		
CAViaR-Simétrico	0	3	4	3	5	2	2	3	3	2	5	4	10	1	17	3		3
CAViaR-Asimétrico	2	2	7	2	5	3	3	0	3	2	4	10	10	1	17	3		
CAViaR-Indirect GARCH	2	4	6	0	3	2	2	1	2	2	5	2	4	3	1	2		
Mediana por activo	2,5	3,5	5	2,5	3,5	3	3	4	3,5	2,5	5	4	5,5	2,5	5,5			

Tabla 16: Número de excesos observados menos el número de excesos teóricos (que de 1000 datos al 1 %, se esperan 10 excesos) de los rendimientos out-of-sample sobre el VaR_{1%} y su pertenencia a la correspondiente zona de aceptación, de precaución o de rechazo que estableció el Comité de Basilea en su Acuerdo de Capital de 1996.

Atendiendo a la información que resume la *Tabla 16*, se observan unos valores de medianas por distribuciones de 5, 4 y 2 para la Normal, t-Student y Skew-tStudent, respectivamente, indicando claramente que la distribución asimétrica Skew-tStudent es más apropiada para las predicciones del VaR. Los valores de las medianas por modelos de volatilidad son 5, 4 y 4 para el modelo GARCH, GJR-GARCH y APARCH, respectivamente, lo que muestra que aunque los asimétricos lo hacen mejor, las diferencias no son tan claras como entre distribuciones. En cuanto a bloque de modelos destaca que los modelos CAViaR lo hacen mejor que los paramétricos.

A continuación, se muestra un cuadro resumen en el que se cuenta para cada modelo el número de veces que ha sido rechazado según el test oportuno del total de

activos. Este cuadro pretende arrojar una luz sobre qué distribuciones van mejor para cada medida de riesgo, qué modelos de volatilidad o qué enfoque llevar a cabo.

	VaR LRuc	VaR LRind	VaR LRcc	VaR DQ	ES R&C
N-GARCH	1 / 15	0 / 3	1 / 3	3 / 15	2 / 15
t-GARCH	5 / 14	0 / 2	0 / 2	1 / 14	0 / 14
Skt-GARCH	1 / 15	0 / 2	0 / 2	2 / 15	0 / 15
N-GJRGARCH	0 / 15	0 / 3	0 / 3	2 / 15	2 / 15
t-GJRGARCH	4 / 15	0 / 1	0 / 1	0 / 15	0 / 15
Skt-GJRGARCH	1 / 15	0 / 1	0 / 1	2 / 15	1 / 15
N-APARCH	1 / 15	0 / 4	1 / 4	4 / 15	2 / 15
t-APARCH	3 / 15	-	-	0 / 15	0 / 15
Skt-APARCH	1 / 15	0 / 2	1 / 2	2 / 15	0 / 15
CaViaR Simétrico	1 / 15	0 / 4	1 / 3	3 / 13	#
CAViaR Asimétrico	2 / 15	0 / 5	2 / 6	2 / 13	#
CAViaR Indirect GARCH	0 / 15	1 / 3	0 / 3	1 / 15	#
CARES Simétrico	#	#	#	#	0 / 14
CARES Asimétrico	#	#	#	#	0 / 14
CARES Indirect GARCH	#	#	#	#	0 / 15

Tabla 17: Número de rechazos en el test correspondiente a un nivel de significación $p = 1\%$ para las medidas de riesgo VaR y ES a un nivel de confianza $\alpha = 1\%$. El guión hace referencia a que no se ha podido establecer un dictamen debido a alguna indeterminación matemática (0^0) en el cálculo del estadístico del test correspondiente, con lo cual no hay un valor posible. El número que aparece a la derecha de la barra en cada test hace referencia al total de activos. En el caso en el que aparece un número inferior a 12 es porque para algún activo ha habido un guión en el test correspondiente, luego sólo se toman en consideración aquellos activos para los que se ha podido establecer una decisión. La almohadilla indica que no procede tener un dato ahí.

Del cuadro resumen se pueden hacer dos grandes distinciones, según el enfoque paramétrico y según el enfoque semiparamétrico.

Atendiendo al primer enfoque, se puede observar con claridad que la función que parece ser que mejor se ajusta en las predicciones del VaR y del ES es la tStudent. Esto es así para todos los casos, ya que no hay ningún rechazo para los modelos que emplean esta distribución, excepto en el caso del GARCH que hay una, lo cual

no es de extrañar puesto que la mayoría de las series financieras se caracterizan por tener colas pesadas y un poco de asimetría. En cuanto al modelo de volatilidad no se puede hacer una distinción clara. Atendiendo al test DQ, que es el que mejora los inconvenientes de los anteriores contrastes, se puede observar que el número de rechazos es muy reducido para las distintas tipologías de modelos de volatilidad condicional, con lo cual no es posible posicionarse por uno u otro. Atendiendo al enfoque semiparamétrico no hay una clara distinción entre tipos de modelos. El modelo CAViaR Indirect GARCH recibe un sólo rechazo en el test DQ para todos los activos, pero los modelos Simétrico y Asimétrico reciben 3 y 2 rechazos, respectivamente. Ante esta situación, lo más apropiado sería indicar que todos los modelos semiparamétricos se ajustan bastante bien en el cálculo de las medidas de riesgo.

Si nos fijamos en los contrastes de validación del VaR y del ES de las *Tablas 14 y 25 a 38*, se observan diferencias entre los p-valores obtenidos para los modelos paramétricos y semiparamétricos, siendo éstas más acentuadas en los contrastes de validación del VaR que en el del ES. Las diferencias de p-valores entre los propios modelos semiparamétricos son menores que las que se observan en los modelos paramétricos, tanto para contrastes de validación del VaR como para el del ES. Esto puede ser debido a la ventaja que supone no tener que hacer ningún supuesto acerca de la distribución y de la volatilidad en los modelos semiparamétricos. Gracias a estas diferencias en p-valores se puede establecer qué modelos de los no rechazados por los contrastes de validación del VaR y del ES son más adecuados para capturar el riesgo asociado a las series de rentabilidades. Serán preferibles aquellos modelos que presenten un menor estadístico o un mayor p-valor. En términos generales, se observa que los modelos de volatilidad que recogen el efecto apalancamiento, a saber, GJR-GARCH y APARCH, son preferibles al modelo que no recoge dicho efecto, a saber, el modelo GARCH. En cuanto a las distribuciones, la intuición previa a este análisis cuantitativo relativa a que la asimetría y curtosis presentes en las series financieras se vería reflejada mejor por una distribución asimétrica y/o leptocúrtica, es corroborada por los elevados p-valores que presentan los modelos que llevan asociadas dichas distribuciones, a saber, t-Student y Skew-tStudent. Respecto a los modelos semiparamétricos, destaca la modalidad Indirect GARCH de los CAViaR y la modalidad Asimétrica de los CARES.

A continuación se muestra el cuadro de las zonas de aceptación y rechazo a nivel de todos los activos para el $\text{Expectil}_\tau = 1\%$. En esta tabla se muestran los valores correspondientes al cálculo del ratio de ganancias y pérdidas teórico menos el ratio de ganancias y pérdidas observado en términos absolutos y como porcentaje del ratio teórico. Puesto que el término “violaciones” está relacionado con dicho ratio se ha decidido acudir al número de umbrales que establece Basilea a la hora de asignar violaciones, para dar por válido un modelo de predicción del Expectil

en términos de un ratio de ganancias y pérdidas en valor absoluto. En la primera columna los valores de color rojo son los correspondientes al cálculo de medianas por modelo individual para todos los activos, en la segunda columna aparecen las medianas de las medianas por modelos de volatilidad y en la última columna las medianas de las medianas por distribuciones.

Expectil	DAX	FTSE	VIX	BBVA	IBM	BAYER	\$/€	\$/€	\$/S	Petróleo	Oro	Gas	Letra Tesoro	T-bill	Bono alemán	Mediana de cada modelo	Medianas de medianas	
																Distribución	Volatilidad	
N-GARCH	0,32	0,35	0,99	0,30	0,55	0,27	0,33	0,39	0,31	0,19	0,03	0,10	0,17	0,40	0,44	0,32	0,31	0,32
t-GARCH	1,58	0,80	0,06	1,01	0,17	2,04	0,81	0,00	1,70	0,85	15,56	2,23	3,76	1,63	0,08	1,01	0,89	0,31
Sk-t-GARCH	0,25	0,04	7,79	0,09	0,42	0,37	0,11	0,21	0,01	0,30	1,70	0,37	0,73	0,00	0,32	0,30	0,30	0,30
N-GJRGARCH	0,17	0,24	0,15	0,34	0,53	0,17	0,31	0,40	0,32	0,12	0,03	0,33	0,18	0,40	0,45	0,31		
t-GJRGARCH	0,88	0,84	0,15	0,49	0,22	1,90	0,81	0,09	1,78	0,93	13,40	1,56	3,82	1,82	0,07	0,88		
Sk-t-GJRGARCH	0,20	0,23	6,76	0,17	0,34	0,39	0,03	0,20	0,04	0,35	2,31	0,05	0,74	0,04	0,29	0,23		
N-APARCH	0,28	0,23	0,15	0,40	0,55	0,19	0,42	0,46	0,25	0,15	0,04	0,38	0,08	0,41	0,39	0,28		
t-APARCH	0,82	0,98	0,31	0,38	0,18	1,85	0,69	0,34	1,53	0,89	10,95	1,45	30,41	1,75	0,16	0,89		
Sk-t-APARCH	0,15	0,28	11,30	0,30	0,39	0,41	0,18	0,42	0,02	0,30	1,38	0,05	0,67	0,03	0,29	0,30		
CARE-Simétrico	0,13	0,02	0,11	0,11	0,32	0,18	0,15	0,38	0,17	0,10	2,80	0,25		0,40	0,37	0,18		CARE
CARE-Asimétrico	0,16	0,35	0,29	0,01	0,32	0,42	0,17	0,40	0,15	0,35	2,96	0,30		0,28	1,27	0,31		0,18
CARE-Indirect GARCH	0,14	0,07	0,36	0,02	0,30	0,27	0,02	0,26	0,11	0,09	2,82	0,05	17,37	0,18	0,33	0,18		

Tabla 18: Número correspondiente al cálculo del ratio de ganancias y pérdidas teórico menos el ratio de ganancias y pérdidas observado en términos absolutos y como porcentaje del ratio teórico. Para este resultado se establecen una zonas de aceptación o rechazo.

De la *Tabla 18*, atendiendo al valor numérico de las medianas de medianas por modelo de volatilidad y distribución, se puede deducir que no se puede discernir entre modelos de volatilidad, pero sí hay un resultado favorable para aquel modelo paramétrico que lleve asociada un distribución Skew-tStudent. Además, las medianas sugieren que los modelos CARE lo hacen mejor porque su mediana presenta un valor numérico menor que las medianas para modelos de volatilidad y para distribuciones de probabilidad. Es decir, parece que genera menores desviaciones entre el ratio teórico y el ratio observado, aunque esto requeriría un análisis más detallado para más activos.

Por último, para acabar con el análisis del backtesting se presenta una tabla resumen a nivel global para el enfoque en el que se atiende también al criterio de la función de pérdida que toma en consideración también la magnitud de los datos y no sólo la frecuencia como en el caso de los contrastes estadísticos.

	VaR		Expectil	
	López	Sarma et al. (RLF)	Sarma et al. (FLF)	Bellini & Di Bernardino
N-GARCH	0	0	11	12
t-GARCH	13	9	0	0
Skt-GARCH	1	2	1	2
N-GJRGARCH	0	0	11	12
t-GJRGARCH	13	8	0	0
Skt-GJRGARCH	2	1	2	1
N-APARCH	0	1	11	10
t-APARCH	12	10	0	0
Skt-APARCH	1	1	3	2
CAViaR-Simétrico	0	3	1	#
CAViaR-Asimétrico	0	3	1	#
CAViaR-Indirect GARCH	1	1	1	#
CARE-Simétrico	#	#	#	2
CARE-Asimétrico	#	#	#	1
CARE-Indirect GARCH	#	#	#	2

Tabla 19: Número de veces que una función de pérdida determinada ha escogido un modelo determinado como uno de los mejores para todos los activos considerados en este trabajo. La almohadilla indica que no procede tener un dato ahí.

Atendiendo a los valores numéricos de la *Tabla 19* se puede observar que tanto en el caso del VaR como en el caso del Expectil, las funciones de pérdida arrojan conclusiones distintas sobre el modelo a usar en la predicción de las medidas de riesgo a las que se obtuvieron con los contrastes estadísticos. La función de pérdida de López para el VaR, que únicamente presta atención a las pérdidas no cubiertas cuando estas ocurren, indica que los mejores modelos para la predicción del VaR son los paramétricos con una distribución t-Student. Por contra, la función de pérdida FLF de Sarma et al. que además de penalizar los excesos del VaR también impone una penalización que refleje el coste del capital sufrido en el día, indica que los mejores modelos para la predicción del VaR son los paramétricos pero con una Normal. Por último, la función de pérdida propuesta por Bellini & Di Bernardino arroja las mismas evidencias para la predicción del Expectil que la FLF del VaR. Puesto que nuestra preocupación es medir el riesgo lo más adecuadamente posible daremos más credibilidad a la FLF de Sarma et al. para el VaR ya que se preocupa también por la cola derecha aunque sea en una pequeña proporción. No es de extrañar que la FLF para el VaR y la función de Bellini & Di Bernardino para el Expectil arrojen conclusiones similares en cuanto a los modelos a escoger puesto que ambas penalizan, aunque de manera distinta, tanto la infravaloración del riesgo como la sobrevaloración del mismo.

De las *Tablas 14 y 25 a 38* se desprende que hay una menor diferencia entre los valores numéricos que arrojan las funciones de pérdida basadas en el enfoque empresarial que en el enfoque regulador. En el caso del Expectil, a nivel global, diremos que los modelos CARE son más adecuados para la predicción del mismo tanto a nivel de backtesting como a nivel de función de pérdida. Aunque en el caso de esta última, los modelos más elegidos son los paramétricos correspondientes a una Normal, lo cierto es que las diferencias con los semiparamétricos en cuanto a criterio de función de pérdida son muy pequeñas.

8. Conclusiones

En este trabajo de investigación se analiza el Expectil como una medida del riesgo inherente a un activo financiero, con el objetivo de responder a las siguientes preguntas, *¿es el Expectil una buena medida de riesgo financiero?*, *¿qué modelos y/o distribuciones son más adecuadas para su predicción?* y *¿cuál es la aportación del Expectil a las medidas benchmark, Value at Risk (VaR) y Expected Shortfall (ES)?*

El Expectil se define como un margen para los requerimientos de capital, es decir, como la cantidad de capital que se ha de añadir a una posición o cartera para obtener un ratio de ganancias y pérdidas lo suficientemente alto. Para dar respuesta con el mayor criterio posible al resto de las cuestiones planteadas se ha llevado a cabo un análisis exhaustivo con diferentes activos de distinta naturaleza, empleando tanto un método paramétrico con el modelo de rentabilidad, AR(1), los modelos de volatilidad, GARCH, GJR-GARCH y APARCH, y las funciones de distribución, Normal, t-Student y Skew-tStudent, como un método semiparamétrico con modelos CARE de diversas tipologías, Simétrico, Asimétrico e Indirect GARCH.

Como respuesta a la primera pregunta, en este trabajo se apuesta por el Expectil puesto que es una medida de riesgo con capacidad de absorción de las potenciales pérdidas de capital en la cola izquierda de la distribución de rendimientos, además de permitir ajustar lo mejor posible el riesgo real al considerar la información disponible de toda la distribución.

En cuanto a la segunda pregunta, tanto el Expectil, como las demás medidas de riesgo, sugieren que la selección de la distribución de probabilidad es más importante que la del modelo de volatilidad. Distribuciones asimétricas y volatilidades con apalancamiento tienden a ser preferidas en el backtesting, aunque el uso de funciones de pérdida sugiere lo contrario, lo cual merece ser analizado más en detalle, quizá con nuevas funciones de pérdida, otros activos, otros modelos de volatilidad, otras distribuciones, otros métodos de predicción de las medidas de riesgo, etc.

Por último, se espera que los expectiles capturen mejor el riesgo en comparación con el VaR y ES por i) ser sensibles a las magnitudes de los valores que exceden del VaR y además tomar en consideración magnitudes de los valores más extremos de la distribución, ii) tener en cuenta la información de ambas colas, por lo que si se altera el perfil de la cola derecha, los expectiles sí se ven afectados a diferencia del ES que no, iii) por ser una medida coherente y elicitable y iv) por la eficiencia computacional y la ventaja de sencillez de cálculo al ser la función de minimización de la que es solución el expectil continuamente diferenciable.

Entre las aportaciones de este trabajo cabría destacar, i) estimación y predicción del Expectil por distintos enfoques: paramétrico y no paramétrico (3 versiones de autorregresivo condicional CARE) ii) primer trabajo de validación del Expectil predicho con el contraste y con la función de pérdida propuestos por Bellini & Di Bernardino (2015) y iii) incorporación del Expectil, junto con VaR y ES en la selección de modelo (distribución de probabilidad + especificación de volatilidad) para la estimación del riesgo.

Por último, este trabajo podría ampliarse con su extensión a carteras utilizando distribuciones multivariantes, correlaciones cambiantes en el tiempo, dependencia no lineal, profundizar en el análisis de validación del Expectil y desarrollo de más contrastes y funciones de pérdida para la validación del Expectil.

9. Bibliografía

Acerbi C. (2002). Spectral measures of risk: A coherent representation of subjective risk aversion. *Journal of Banking and Finance*, 26, 105–1518.

Acerbi C., Tasche D. (2002). On the coherence of Expected Shortfall. *Journal of Banking & Finance* 26, 1487-1503.

Anderson A.L. (2012). A study on expectiles: measuring risk in finance. URL: https://getd.libs.uga.edu/pdfs/anderson_andrew_l_201212_ms.pdf

Artzner P., Delbaen F., Eber J.M., Heath D. (1999). Coherent Measures of Risk. *Mathematical Finance* 9, 203-208.

Bellini F., Di Bernardino E. (2015). Risk Management with Expectiles. *The European Journal of Finance* 23, 487-506.

Corredor P., Santamaría R. (2001). Predicción de la volatilidad y precio de las opciones en el IBEX-35. *Revista de Economía Aplicada* 25, 39-64.

Dowd K., Cotter J., Sorwar G. (2008). Spectral Risk Measures: Properties and Limitations. *Journal of Financial Services Research*, 34, 61-75.

Efron B. (1991). Regression Percentiles Using Asymmetric Squared Error Loss. *Statistica Sinica* 1, 93-125.

Emmer S., Kratz M., Tasche D. (2015). What is the Best Risk Measure in Practice? A Comparison of Standard Measures. *Journal of Risk* 18, 31-60.

Engle R.F., Manganelli S. (2004). CAViaR: Conditional Autoregressive Value at Risk by Regression Quantiles. *Journal of Business and Economic Statistics* 22, 367-381.

Fölmer H., Schied A. (2002). Convex measures of risk and trading constraints. *Finance and Stochastics* 6, 429–447.

Fölmer H., Schied A. (2008). Convex and coherent risk measures. URL: <http://www.alexschied.de/Encyclopedia6.pdf>

Glosten L.R., Jagannathan R., Runkle D.E. (1993). On the Relation between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks. *The*

Journal of Finance 48, 1779-1801.

Gneiting T. (2011). Making and evaluating point forecasts. *Journal of the American Statistical Association* 106, 746-762.

Gschöpf P. (2014). Measuring risk with expectile based expected shortfall estimates. URL: <http://edoc.hu-berlin.de/master/gschoepf-philipp-2014-07-23/PDF/gschoepf.pdf>

Hamidi B., Hurlin C., Kouontchou P. & Maillet B. (2015). A DARE for VaR. *Finance*, 36, 7-38.

Hansen B. E. (1994). Autoregressive conditional density estimation. *International Economic Review*, 35, 705-730.

Huber P., Ronchetti E. (2009). Robust statistics. *Editorial Wiley*, 2ª edición.

Jiménez Gómez A.E., Melo Velandia. L.F. (2015). Conditional Modeling of Skewness and Kurtosis on Colombian Financial Series. *Desarrollo y Sociedad*, 76.

Kiesel R., Rühlicke R., Stahl G., Zheng J. (2016). The Wasserstein Metric and Robustness in Risk Management. *Risks* 4, 32.

Kuan C.M, Yeh J.H., Hsu Y.C. (2009). Assessing value at risk with CARE, the Conditional Autoregressive Expectile models. *Journal of Econometrics* 150, 261-270.

Kupiec P. (1999). Risk Capital and VaR. *Journal of Derivatives* 7, 41-52.

Lambert N.S., Pennock D.M. & Shoham Y. (2008). Eliciting Properties of Probability Distributions. *Proceedings of the 9th ACM Conference on Electronic Commerce*, 129-138.

Liao Y. & Smith D. (2014). Estimating Expected Shortfall Using a Conditional Autoregressive Model: CARES. URL: https://editorialexpress.com/cgi-bin/conference/download.cgi?db_name=ESAMACE2014&paper_id=438.

López J.A. (1998). Testing your risk tests. *Financial Survey* 18, 20.

López J.A. (1999). Methods for evaluating Value-at-Risk estimates. *Federal Reserve Bank of New York. Economic Policy Review*, 3-17.

- McNeil A.J. & Frey R. (2000). Estimation of tail-related risk measures for heteroscedastic financial time series: an extreme value approach. *Journal of Empirical Finance* 7, 271-300.
- Nadarajah S., Kotz S. (2008). Moments of truncated t and F distributions. *Portuguese Economics Journal* 7, 63-73.
- Newey W.K., Powell J.L. (1987). Asymmetric Least Squares Estimation and Testing. *Econometrica* 55, 819-847.
- Nolde N., Ziegel J.F. (2017). Elicitability and backtesting: Perspectives for banking regulation. URL: <https://arxiv.org/abs/1608.05498?context=stat>.
- Osband K.H. (1985). Providing Incentives for Better Cost Forecasting. *PhD thesis, University of California, Berkeley*.
- Righi M.B. & Ceretta P.S. (2013). Individual and flexible expected shortfall backtesting. *Journal of Risk Model Validation*, 7, 3-20.
- Righi M.B. & Ceretta P.S. (2015). A comparison of Expected Shortfall estimation models. *Journal of Economics and Business*, 78, 14-47.
- Sarma M., Thomas S., Shah A. (2003). Selection of value-at-risk models. *Journal of Forecasting*, 22, 337-358.
- Tasche D. (2002). Expected Shortfall and Beyond. *Journal of Banking & Finance* 26, 1519-1533.
- Taylor J.W. (2008). Estimating Value at Risk and Expected Shortfall Using Expectiles. *Journal of Financial Econometrics* 6, 231-252.
- Ziegel J.F. (2016). Coherence and elicibility. *Mathematical Finance* 26, 901-918. URL: (2013) <https://arxiv.org/abs/1303.1690>

Anexo

A. Propiedades de las medidas de riesgo

En este apartado se procede a definir y a estudiar las propiedades de las medidas de riesgo que se toman en consideración, VaR, ES y EVaR.

A.1. Coherencia

Supongamos que R es una variable aleatoria que mide la rentabilidad futura de una cartera o activo y $\rho(R)$ es la medida de riesgo asociada a las posibles pérdidas de capital sobre R . Las propiedades que se deben cumplir para que una medida de riesgo se considere coherente [ver Artzner et. al, 1999] son las siguientes:

- **Monotonía o decreciente.** A mayor riqueza (no rentabilidad), mayor riesgo. Formalmente,

$$\rho(R_1) \geq \rho(R_2) \quad \Leftrightarrow \quad P(R_1 \leq R_2) = 1$$

- **Invarianza por traslaciones.** Si se añade liquidez (cash) a una cartera, su riesgo debe reducirse en la misma cantidad constante añadida ya que actúa como un seguro frente a la pérdida en la posición inicial. Formalmente, si k es determinista,

$$\rho(R + k) = \rho(R) - k$$

- **Positivamente homogénea.** La medida de riesgo es independiente de la escala, es decir, si se incrementa el tamaño de la cartera por un factor k , su riesgo aumenta proporcionalmente. Formalmente,

$$\rho(k \cdot R) = k \cdot \rho(R), \quad k \geq 0$$

- **Subaditividad.** Refleja el principio de diversificación y es que fusionar dos carteras no puede aumentar el riesgo conjunto. Formalmente,

$$\rho(R_1 + R_2) \leq \rho(R_1) + \rho(R_2)$$

A.2. Convexidad

No obstante, la definición de medida coherente propuesta por Artzner et al. (1998) presenta algunos problemas para incrementos no lineales en riesgo, sobre todo los incrementos en riesgo de liquidez debido a posiciones muy grandes al no considerarse adecuadamente. Este hecho inspiró a Föllmer & Schied (2002) a introducir la noción de medidas de riesgo convexas,

$$\rho(\lambda R_1 + (1 - \lambda)R_2) \leq \lambda\rho(R_1) + (1 - \lambda)\rho(R_2)$$

Nótese que la convexidad sigue garantizando el principio de diversificación. Según Föllmer & Schied (2008), una medida de riesgo se considera **medida de riesgo convexa** si es invariante por traslaciones, monótona y convexa. Cualquier medida de riesgo positivamente homogénea y subaditiva es también convexa. Así pues, el VaR no es una medida de riesgo convexa ya que no cumple la subaditividad, pero tanto el Expected Shortfall como los expectiles sí lo son.

A.3. Medidas Espectrales

Acerbi(2002) introdujo la clase de medidas de riesgo espectrales. Una medida de riesgo espectral, $\rho_\phi(X)$, se define como,

$$\rho_\phi(X) = \int_0^1 q_p^+ \phi(p) dp$$

donde q_p^+ es el cuantil de la cola derecha de la función de pérdidas y ganancias y $\phi(p)$ es una función de ponderación determinada por el investigador (también denominada *espectro de riesgo* o función de aversión al riesgo) y definida en todo el rango de probabilidades acumuladas $p \in [0, 1]$. Desde el punto de vista económico, el espectro de riesgo indica el grado de aversión al riesgo del individuo o de la entidad financiera, de forma que $\phi(p)dp$ puede interpretarse como el peso que el cuantil p -ésimo tiene en la medida de riesgo. La condición de admisibilidad del espectro se interpreta directamente en el sentido de asignar mayor peso a mayores pérdidas en la valoración del riesgo bajo el principio de coherencia. La definición de distintos espectros de riesgo permite obtener diferentes medidas de riesgo [ver Dowd, Cotter & Sorwar, 2008]. Para el caso del VaR,

$$VaR_{\alpha}^{+} = q_{\alpha}^{+} \rightarrow \begin{cases} \phi(p) = 1, & p = \alpha \\ \phi(p) = 0, & p \neq \alpha \end{cases}$$

donde $\phi(p)$ es, en este caso, la función Delta de Dirac¹⁷. Para el caso del ES,

$$ES_{\alpha}^{+} = \frac{1}{1-\alpha} \int_{\alpha}^1 q_p dp$$

donde la función de ponderación $\phi(p)$, en este caso, da a todos los cuantiles de la cola el mismo peso, $\frac{1}{1-\alpha}$, mientras que los cuantiles que no están en la cola reciben un peso igual a cero.

Dowd, Cotter & Sorwar (2008) abordan el problema sobre la elección de la función de utilidad que recoge la aversión al riesgo del individuo examinando enfoques alternativos basados en funciones de utilidad exponenciales y potenciales.

Tasche (2002) muestra que las medidas de riesgo espectrales son aquellas que cumplen las siguientes propiedades:

- **Coherente.** Todos los axiomas descritos en la sección 3.1.
- **Invariante por ley.** Una medida de riesgo depende únicamente de la distribución de probabilidad de las pérdidas y ganancias de los activos y no de otros factores (por ejemplo, VaR). Formalmente, $\rho(R_1) = \rho(R_2)$ si R_1, R_2 tienen la misma distribución.
- **Comonótonamente aditivas.** El riesgo total es igual a la suma de los riesgos si la diversificación no aporta nada, debido a que los riesgos no se compensan, sino que crecen y decrecen a la vez. Esto es, van en la misma dirección si el riesgo de un activo sube, el riesgo del otro también y viceversa, aunque no hace falta que sea en la misma proporción. Formalmente, $\rho(R_1 + R_2) = \rho(R_1) + \rho(R_2)$. Ésta es una propiedad muy deseable ya que la falta de la misma indicará que la medida de riesgo no es capaz de recoger los efectos de la diversificación de manera adecuada. Tanto el VaR como el ES cumplen esta propiedad. Sin embargo, el Expectil no la cumple, recibiendo por ello críticas como medida de riesgo.

¹⁷Delta de Dirac, $\delta(x)$ se define como $\int_a^b f(x) \delta(x-c) dx = f(c), \quad \forall c \in (a,b)$.

A.4. Elicitabilidad

Antes de entrar en la definición de elicitable es conveniente introducir el concepto de funciones scoring estrictamente consistentes. Una función scoring S es una función,

$$\begin{aligned} S : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow [0, \infty), \\ (\hat{R}_t, R_t) &\rightarrow S(\hat{R}_t, R_t) \end{aligned}$$

donde \hat{R} son observaciones predichas y R observaciones realizadas. Una función scoring mide la precisión de las predicciones probabilísticas. Es aplicable a tareas en las que las predicciones deben asignar probabilidades a un conjunto de resultados discretos mutuamente excluyentes. Un score puede considerarse como una medida de calibración de un conjunto de predicciones probabilísticas, o como una función de coste o función de pérdida. Los siguientes ejemplos de funciones scoring son de interés en este trabajo,

$$S(\hat{R}, R) = (\hat{R} - R)^2$$

$$S(\hat{R}, R) = \begin{cases} \tau (\hat{R} - R)^2, & \hat{R} < R \\ (1 - \tau)(\hat{R} - R)^2, & \hat{R} \geq R \end{cases}, \quad 0 < \tau < 1$$

$$S(\hat{R}, R) = |\hat{R} - R|$$

$$S(\hat{R}, R) = \begin{cases} \alpha (\hat{R} - R), & \hat{R} < R \\ (1 - \alpha)(\hat{R} - R), & \hat{R} \geq R \end{cases}, \quad 0 < \alpha < 1$$

La *elicitable* es una propiedad muy deseada para la eficiencia computacional y la determinación de predicciones óptimas. La noción de elicitable se remonta al trabajo pionero de Osband (1985) aunque el término fue acuñado por Lambert, Pennock & Shoham (2008). Posteriormente, Gneiting (2011) y Ziegel (2013) alegaron que una medida de riesgo ρ es elicitable si puede definirse como el minimizador de la esperanza de una adecuada función scoring. Formalmente, sea ρ un funcional, es decir, una función que asigna un número real a cada distribución. Se dice que ρ es elicitable si existe una función scoring tal que,

$$\rho(F_t(R)) = \arg \min_{\hat{R}_t \in \mathbb{R}} \mathbb{E} [S(\hat{R}_t, R_t)] = \arg \min_{\hat{R}_t \in \mathbb{R}} \int S(\hat{R}_t, R_t) dF_t(R)$$

En este caso, se dice que la función scoring es consistente con ρ y que ρ es elicitable por S. Por lo tanto, la elicibilidad de un funcional de una distribución de probabilidad se puede interpretar como la propiedad de que el funcional pueda ser estimado por una regresión generalizada. Por ejemplo, la media es elicitable puesto que se puede escribir como,

$$\mathbb{E}[X] = \int x dF(x) = \arg \min_t \mathbb{E}[(X - t)^2]$$

Otros ejemplo de medidas de riesgo elicibles son el VaR y el Expectil, mientras que ni la varianza ni el Expected Shortfall cumplen esta propiedad [ver Lambert et al. 2008].

La utilidad estadística de esta propiedad puede resumirse en dos ventajas importantes:

i) la capacidad de comparar diferentes métodos estadísticos utilizando la función scoring y, por lo tanto, dar sentido a los procedimientos de backtesting.

ii) la capacidad de realizar predicciones y estimaciones por regresiones basadas en la media.

A.5. Robustez

Otro aspecto importante para la estimación de medidas de riesgo es la robustez. Huber & Ronchetti (2009) definen la robustez como la insensibilidad a pequeñas desviaciones de los supuestos del modelo. Sin esta propiedad los resultados no son significativos ya que pequeños errores de medida en la distribución de pérdidas pueden tener un gran impacto en la estimación de medidas de riesgo. Por este motivo se investiga la robustez en términos de continuidad. Dado que la mayoría de medidas de riesgo no son continuas se necesita de unas nociones de convergencia más fuertes. Por ello, y debido a algunas propiedades convenientes en gestión de riesgos, se suele considerar la distancia de Wasserstein para la investigación de la robustez de medidas de riesgo.

La *distancia de Wasserstein* (d_W) entre dos medidas de probabilidad \mathbb{P} y \mathbb{Q} se define como la distancia esperada más pequeña entre las variables aleatorias con estas distribuciones [ver Bellini et al., 2013],

$$d_W(\mathbb{P}, \mathbb{Q}) = \inf \{ \mathbb{E}[|X - Y|] : X \sim \mathbb{P}, Y \sim \mathbb{Q} \}$$

Otra manera equivalente de definir la distancia de Wasserstein es la que proponen Kiesel et al. (2016). Sea $X \sim P_X$, $Y \sim P_Y$ variables aleatorias con sus correspondientes funciones de distribuciones,

$$d_W(X, Y) = \int_{-\infty}^{\infty} |F_X(t) - F_Y(t)| dt = \int_0^1 |F_X^{-1}(\alpha) - F_Y^{-1}(\alpha)| d\alpha$$

donde F_X es la función de distribución acumulada de X y F_X^{-1} la función cuantil.

Cuando se dice que una medida de riesgo es robusta respecto a la distancia de Wasserstein, se hace referencia a la continuidad respecto a la distancia de Wasserstein.

Emmer et al. (2015): Sea \mathbb{P}_n , $n \geq 1$, $X_n \sim \mathbb{P}_n$ y $P \sim X$. Una medida de riesgo ρ es continua en X respecto a la distancia Wasserstein si,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_W(X_n, X) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |\rho(X_n - X)| = 0$$

B. Modelos de volatilidad

La importancia de un modelo cambiante en el tiempo es que permite modelizar el cambio en el riesgo a lo largo del periodo de gestión. Si se observan las series de rendimientos en cualquier momento, se puede apreciar que diferentes periodos de tiempo tienen asociado diferentes niveles de riesgo. Por ello, modelizar el cambio en volatilidad con el paso del tiempo es esencial para presentar una medida de riesgo que evalúa con precisión el riesgo sobre un horizonte de gestión determinado.

En los siguientes subapartados se presentan tres modelos para modelizar una volatilidad cambiante en el tiempo que después se empleará para el cálculo de las tres medidas de riesgo tomadas en consideración, VaR, ES y Expectil.

B.1. GARCH

El proceso GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) fue introducido por Bollerslev (1986) como generalización de los procesos ARCH (Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) desarrollados por Engle (1982). Los procesos GARCH(p,q) mejoran la estimación de heterocedasticidad incluyendo la varianza condicional de los p intervalos de tiempo previos además de aprovechar las ventajas de la autocorrelación existente entre los q anteriores rendimientos al cuadrado.¹⁸ En este trabajo se utiliza el modelo GARCH(1,1) debido a su simplicidad y tratabilidad empírica. Así pues, la serie de volatilidades cambiantes en el tiempo se modeliza como,

$$\begin{aligned}\sigma_t^2 &= \omega + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \beta_2 \varepsilon_{t-1}^2 \\ \sigma_0^2 &= \frac{1}{T-1} \sum_{i=1}^T (r_i^2 - \bar{r}_t) \\ \sigma_t &= \sqrt{\sigma_t^2}\end{aligned}$$

donde la constante ω representa el nivel de referencia para la volatilidad a largo plazo con una ponderación γ . El parámetro β_1 mide el impacto de varianzas condicionales de periodos anteriores en la varianza condicional actual, mientras que β_2 mide la influencia de los shocks pasados en la volatilidad condicional del periodo actual, ε_t es la innovación, σ_0^2 es la varianza muestral que se propone como condición inicial y \bar{r}_t es la media muestral de la serie de rentabilidades.

Las restricciones del modelo GARCH que garantizan que la varianza condicional sea positiva son,

$$\omega > 0; \quad \beta_1 > 0; \quad \beta_2 > 0; \quad \beta_1 + \beta_2 < 1$$

Estimando los coeficientes ω, β_1, β_2 por máxima verosimilitud se generan las series de volatilidades cambiantes en el tiempo. Además se obtiene la varianza incondicional o a largo plazo a la que revierte la varianza condicional, así como, su coeficiente γ ,

$$\begin{aligned}\omega &= \gamma \sigma_{LP}^2 \\ \gamma &= (1 - \beta_1 - \beta_2)\end{aligned}$$

¹⁸La autocorrelación entre rendimientos al cuadrado y no simplemente entre rendimientos es una propiedad estadística común de las series financieras.

$$\sigma_{LP}^2 = \frac{\omega}{(1 - \beta_1 - \beta_2)}$$

Para validar el modelo GARCH es necesario que las rentabilidades estandarizadas al cuadrado $\left(\frac{r_t^2}{\sigma_t^2}\right)$ no presenten autocorrelación. Puesto que se pretende recoger en el modelo la evolución temporal de la volatilidad, no debería existir tal autocorrelación. Para ello, se pueden utilizar contrastes como el de Ljung-Box, el test de razón de verosimilitudes o analizar la función de autocorrelación parcial simple de las rentabilidades estandarizadas al cuadrado.

B.2. GJR-GARCH

El modelo GJR-GARCH o GARCH asimétrico fue introducido por Glosten et al. (1993) y está diseñado para recoger el efecto apalancamiento en volatilidad, es decir, el mayor impacto de innovaciones negativas en volatilidad que innovaciones positivas de igual tamaño.

$$\sigma_t^2 = \omega + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \beta_2 \varepsilon_{t-1}^2 + \eta I_{\{\varepsilon_t < 0\}} \varepsilon_{t-1}^2$$

donde I es una variable ficticia que toma el valor 1 cuando las innovaciones son negativas y cero en caso contrario. Un valor positivo de η en esta representación indicaría que una innovación negativa genera mayor volatilidad que una innovación positiva de igual tamaño, y la interpretación contraria se tendría para un valor negativo de η .

Las restricciones del modelo que garantizan que la varianza condicional sea positiva son,

$$\omega > 0; \quad \beta_1 > 0; \quad \beta_2 > 0; \quad \eta + \beta_2 > 0; \quad \eta \text{ libre}$$

y en el caso de distribuciones simétricas, $\beta_1 + \beta_2 + \frac{\eta}{2} < 1$.

La estimación de los parámetros del modelo a través del procedimiento de máxima verosimilitud permite obtener la serie de varianzas condicionales y la varianza incondicional,

$$\begin{aligned} \omega &= \gamma \sigma_{LP}^2 \\ \gamma &= \left(1 - \beta_1 - \beta_2 - \frac{\eta}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\sigma_{LP}^2 = \frac{\omega}{\left(1 - \beta_1 - \beta_2 - \frac{\eta}{2}\right)}$$

De acuerdo con Corredor y Santamaría (2001) la obtención de las predicciones en este modelo de volatilidad condicional atiende al siguiente proceso:

$$\sigma_{f,T+1} = \omega + \beta_1 \sigma_T + \beta_2 \varepsilon_T^2 + \eta I_{\{\varepsilon_T < 0\}} \varepsilon_T^2$$

$$\sigma_{f,T+h} = \omega + \left(\beta_1 + \beta_2 + \frac{\eta}{2}\right) \sigma_{f,T+h-1}$$

donde σ_T hace referencia a la última volatilidad estimada con el modelo GJR-GARCH y $\sigma_{f,T+h}$ hace referencia a la volatilidad *forecast* durante el horizonte $T+h$.

B.3. APARCH

El modelo APARCH (Asymmetric Power ARCH) fue propuesto por Ding, Grange and Engle (1993) y recoge varias propiedades de las series temporales financieras, además de capturar adicionalmente la asimetría en la volatilidad de los rendimientos, al igual que el modelo GJR-GARCH. Es decir, las rentabilidades negativas producen un mayor impacto en la varianza condicional que las rentabilidades positivas (leverage effects). El modelo APARCH (1,1) tiene el siguiente aspecto,

$$\begin{aligned} \sigma_t^\delta &= \omega + \beta_1 \sigma_{t-1}^\delta + \beta_2 \left(|\varepsilon_{t-1}| - \theta \varepsilon_{t-1} \right)^\delta \\ r_t &= \mu + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t = Z_t \sigma_t, \quad Z_t \sim N(0, 1) \end{aligned}$$

donde $\delta > 0$ permite una mayor flexibilidad que los modelos GARCH al evitar seleccionar a priori una potencia arbitraria, μ es la media condicional de la serie de rentabilidades, y los demás parámetros ω, β_1, β_2 mantienen las mismas propiedades que en los modelos GARCH. El parámetro θ recoge el efecto apalancamiento en volatilidad y se mueve en el intervalo $[-1, 1]$. Un valor de θ positivo implica que los impactos negativos tienen un mayor efecto sobre la varianza que aquellos que son positivos,

$$\sigma_t^\delta = \begin{cases} \omega + \beta_2 (1 - \theta)^2 \varepsilon_{t-1}^2 & \text{si } \varepsilon_{t-1}^2 \geq 0 \\ \omega + \beta_2 (1 + \theta)^2 \varepsilon_{t-1}^2 & \text{si } \varepsilon_{t-1}^2 < 0 \end{cases}$$

C. Distribuciones de probabilidad

En este apartado se definen las distribuciones que se van a emplear para la estimación de los parámetros de los modelos de volatilidades cambiantes en el tiempo expuestos anteriormente.

C.1. Normal

Puesto que las rentabilidades presentan dependencia temporal a través de un proceso AR(1), el supuesto de normalidad se aplica a las innovaciones del modelo. La función de verosimilitud presenta el siguiente aspecto,

$$L(\theta | \varepsilon) = \prod_{t=1}^T \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} e^{\left(\frac{-\varepsilon_t^2}{2\sigma_t^2}\right)} \right]$$

donde θ recoge los parámetros del modelo AR(1) de rentabilidades y los parámetros del modelo de volatilidad condicional empleado. El logaritmo neperiano de la verosimilitud,

$$\ln L(\theta | \varepsilon) = \frac{-T}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left(\ln \sigma_t^2 + \frac{(r_t - \rho_0 - \rho_1 r_{t-1})^2}{\sigma_t^2} \right)$$

C.2. t-Student

La distribución t-Student se utiliza para intentar recoger la leptocurtosis (picos más altos y colas más gruesas) de los datos de las series de rentabilidades frecuentes. La distribución t-Student habitual tiene media y asimetría igual a cero, varianza $\frac{\nu}{\nu-2}$ definida solo para $\nu < 2$, siendo ν el número de grados de libertad, y exceso de curtosis finito para $\nu > 4$, $\kappa = \frac{6}{\nu-4}$. Su función de densidad es,

$$t(\varepsilon | \nu) = \frac{1}{\sqrt{\nu\pi}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)^{-1} \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}$$

Es habitual trabajar con una distribución t-Student estandarizada, $t(0,1)$ aplicando la estandarización $Y = \frac{R}{\sigma} = \frac{R}{\sqrt{\frac{\nu}{\nu-2}}} = \sqrt{\frac{\nu-2}{\nu}} R$, donde R es la variable aleatoria que representa los rendimientos. Así su función de densidad es,

$$\tilde{t}(\varepsilon | \nu) = \frac{1}{\sqrt{(\nu-2)\pi}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)^{-1} \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{\nu-2}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}$$

El logaritmo de la función de verosimilitud de la t-Student estandarizada es,

$$\begin{aligned} \ln L(\theta | \varepsilon) &= \sum_{t=1}^T \ln(\tilde{t}_\nu(Z_t)) = \\ &= T \left[-\frac{1}{2} \ln(\nu-2) - \frac{1}{2} \ln(\pi) - \ln \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) + \ln \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) \right] - \\ &\quad - \frac{\nu+1}{2} \sum_{t=1}^T \ln \left(1 + \frac{(r_t/\sigma_t)^2}{\nu-2} \right) \end{aligned}$$

C.3. Skew-tStudent

La versión "skewed" de la distribución t-Student, introducida por Hansen (1994), considera la asimetría de las series financieras. Dicha asimetría queda recogida por el parámetro λ , de forma que si $\lambda > 0$ la moda de la densidad está a la izquierda del cero y la variable es asimétrica hacia la derecha y viceversa cuando $\lambda < 0$.

La función de densidad para las innovaciones estandarizadas, es decir, $z = \frac{\varepsilon_t}{\sigma_t}$ con media cero y varianza unitaria es,

$$f(z | \nu, \lambda) = \begin{cases} bc \left(1 + \frac{1}{\nu-2} \left(\frac{bz+a}{1-\lambda} \right)^2 \right)^{-\frac{(\nu+1)}{2}}, & z < \frac{-a}{b} \\ bc \left(1 + \frac{1}{\nu-2} \left(\frac{bz+a}{1+\lambda} \right)^2 \right)^{-\frac{(\nu+1)}{2}}, & z \geq \frac{-a}{b} \end{cases}$$

donde $2 < \nu < \infty$ y $-1 < \lambda < 1$. Las constantes a , b y c vienen dadas por las siguientes expresiones,

$$\begin{aligned} a &= 4\lambda c \left(\frac{\nu-2}{\nu-1} \right) \\ b^2 &= 1 + 3\lambda^2 - a^2 \\ c &= \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi(\nu-2)} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \end{aligned}$$

Para $\lambda = 0$ se tiene como caso particular la densidad de la t-Student estandarizada.

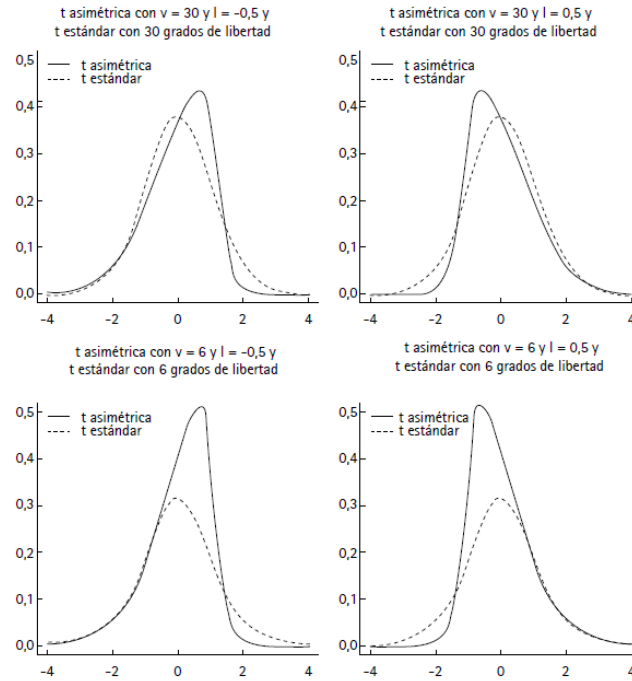


Figura 20: Fuente: Jiménez y Melo (2015). En esta figura se muestra el aspecto de una distribución t-Student estándar con diferentes grados de libertad (ν) y el aspecto de una distribución Skew-tStudent de Hansen para diferentes grados de libertad (ν) y diferentes parámetros de asimetría (l).

El logaritmo de la verosimilitud es,

$$\begin{aligned} \ln L(\nu, \lambda; z) &= \sum_{i=1}^I \left(\ln(b) + \ln(c) - \left(\frac{\nu+1}{2} \right) \ln \left[1 + \left(\frac{1}{\nu-2} \right) \left(\frac{bz_i + a}{1+\lambda} \right)^2 \right] \right) + \\ &+ \sum_{j=1}^J \left(\ln(b) + \ln(c) - \left(\frac{\nu+1}{2} \right) \ln \left[1 + \left(\frac{1}{\nu-2} \right) \left(\frac{bz_j + a}{1-\lambda} \right)^2 \right] \right) - \\ &- \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \ln(\sigma_t^2) \end{aligned}$$

donde,

$$z = \begin{cases} z_i, & z_t \geq \frac{-a}{b} \\ z_j, & z_t < \frac{-a}{b} \end{cases}$$

D. Gráficos FTSE

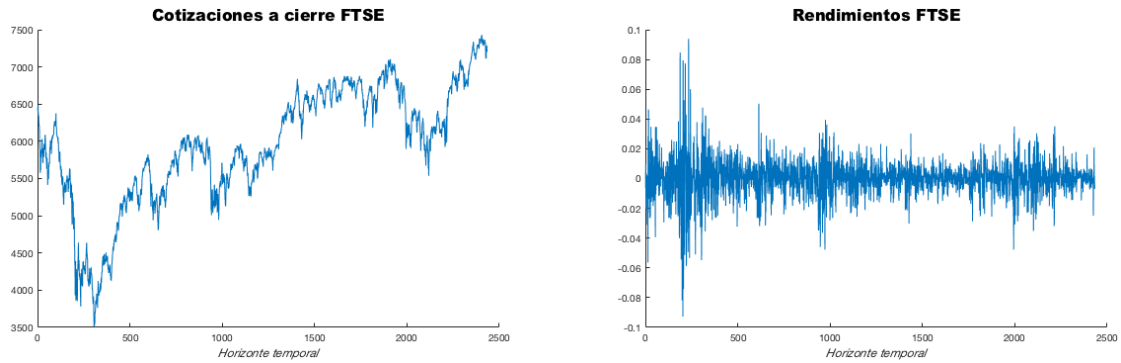


Figura 21: Serie de cotizaciones al cierre del índice FTSE100 a la izquierda y la serie de rendimientos asociada a la derecha para el horizonte de gestión 01/01/2008 - 28/04/2017. La muestra *in-sample* sobre la que se trabaja la estimación engloba los 1433 primeros datos de la serie de rendimientos, y la muestra *out-of-sample* empleada en la predicción de las medidas de riesgo y *backtesting* los 1000 últimos datos de la serie de rendimientos.

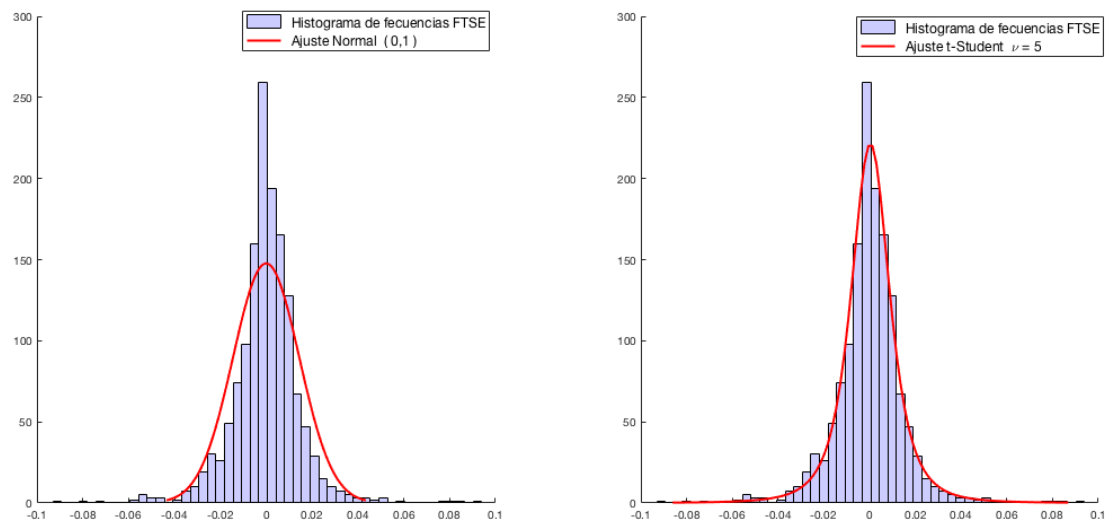


Figura 22: En el gráfico de la izquierda se muestra el histograma de frecuencias de la serie de rendimientos *in-sample* del índice FTSE100 y el ajuste de una Normal $(0,1)$. En el gráfico de la derecha se muestra el mismo histograma de frecuencias pero con el ajuste de una *t-Student* con $\nu = 5$ grados de libertad.

D.1. Gráficos Medidas de Riesgo

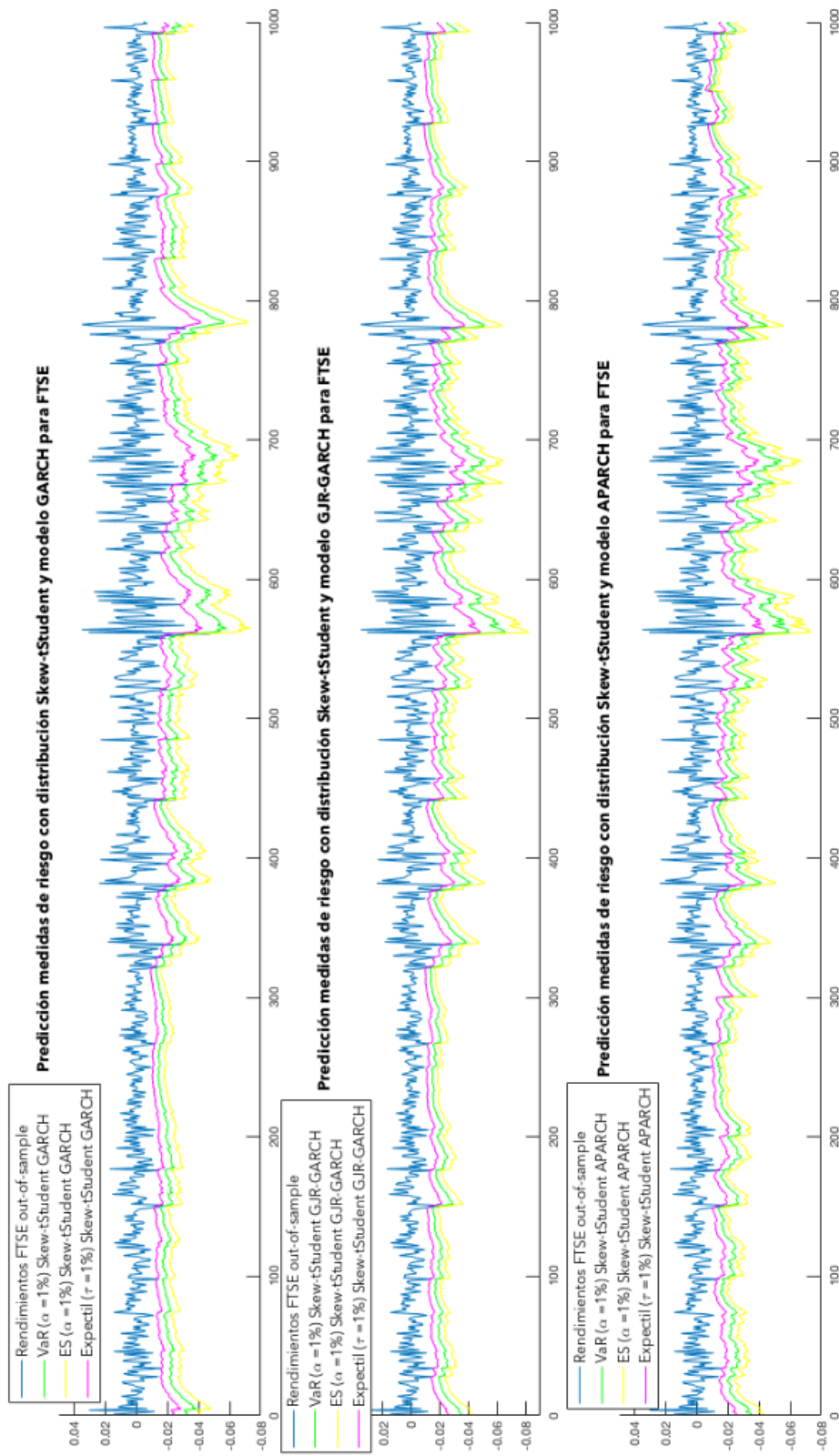


Figura 23: En cada uno de los gráficos se presenta el ajuste de la predicción del $VaR_{1\%}$, del $ES_{1\%}$ y del $Expectil_{1\%}$ a la muestra *out-of-sample* del índice FTSE. Las tres figuras están ordenadas por modelos de predicción de volatilidad, en el siguiente orden, $GARCH(1,1)$, $GJR-GARCH(1,1)$ y $APARCH(1,1)$, y en cada una de ellas se presentan las tres medidas de riesgo para la misma distribución, *Skew-t* (Hansen, 1991). El color verde representa el VaR , el color amarillo representa el ES y el color magenta el $Expectil$.

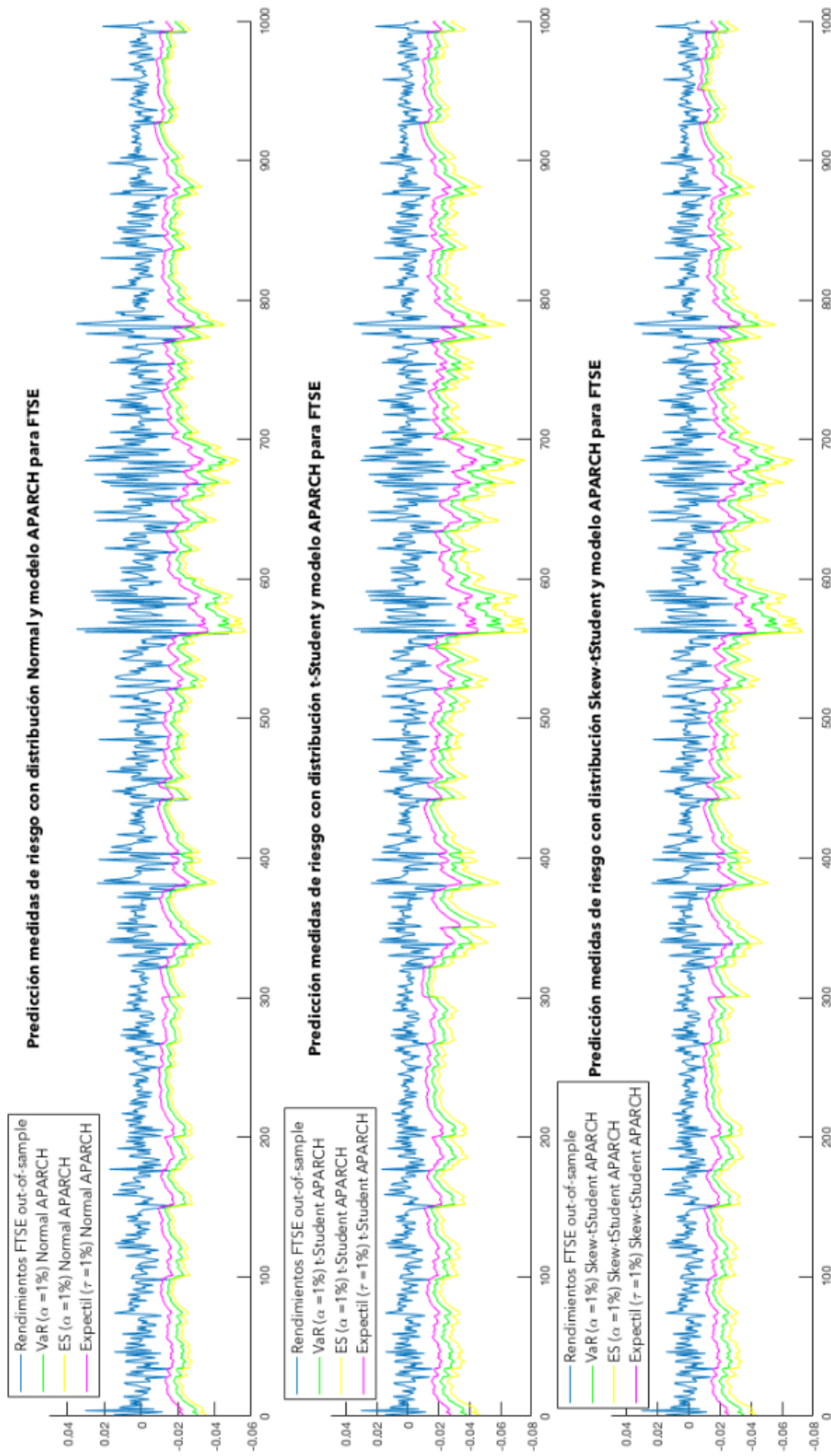


Figura 24: En cada uno de los gráficos se presenta el ajuste de la predicción del $VaR_1\%$ y del $ES_1\%$ y del $Expectil_1\%$ a la muestra out-of-sample del índice FTSE. Las tres figuras están ordenadas por distribuciones de probabilidad, en el siguiente orden, Normal, t-Student y Skew-t, y en cada una de ellas se presentan las tres medidas de riesgo para el mismo modelo de volatilidad condicional, APARCH(1,1). El color verde representa el VaR, el color amarillo representa el ES y el color magenta el Expectil.

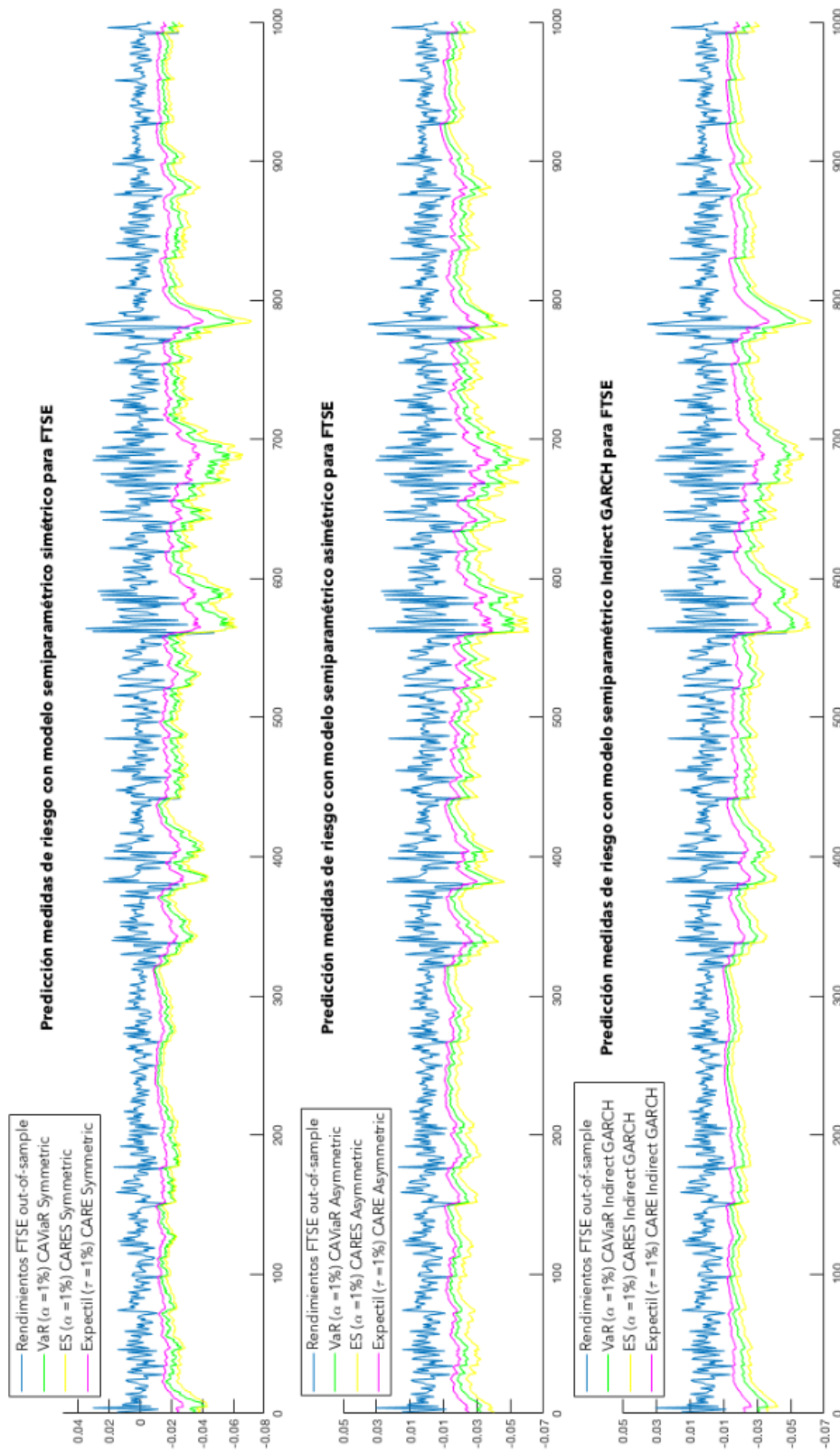


Figura 25: En cada uno de los gráficos se presenta el ajuste de la predicción del VaR_{1%} a través del modelo CAViaR, del ES_{1%} a través del modelo CARES y del Expectil_{1%} a través del modelo CARE a la muestra out-of-sample del índice FTSE. Las tres figuras están ordenadas por tipo de modelo semiparamétrico, en el siguiente orden, Simétrico, Asimétrico e Indirect GARCH y en cada una de ellas se presentan las tres medidas de riesgo para el mismo tipo de modelo semiparamétrico. El color verde representa el VaR, el color amarillo representa el ES y el color magenta el Expectil.

E. Resultados Backtesting

Backtesting - DAX30											
p = 1%	VaR - Ratio de Violaciones	VaR - Test Kupiec	VaR - Test Christoffersen		VaR - Test Engle & Manganelli	VaR - Funciones de pérdida			Expected Shortfall	Expectil	Expectil - Función de pérdida
	π	LRuc	LRind	LRcc	DQT	López	Sarma et al. (RLF)	Sarma et al. (FLF)	Righi & Ceretta (2015)	Ratio pérdidas-ganancias	Bellini & Di Bernardino
N-GARCH	1.7%	4.0910 (0.0431)	-	-	9.5864 (0.1432)	0.0170	2.02e-06	2.71e-04	-0.7015 (0.1970)	67	5.5055e-04
t-GARCH	0.3%	6.8255 (0.0090)	-	-	4.9413 (0.5514)	0.0030	6.94e-07	3.72e-04	-0.0180 (0.3390)	255	9.2335e-04
Skewt-GARCH	0.8%	0.4337 (0.5102)	-	-	0.7601 (0.9931)	0.0080	1.18e-06	3.19e-04	0.1716 (0.4220)	124	7.0845e-04
N-GJRGARCH	1.4%	1.4374 (0.2306)	-	-	11.0881 (0.0891)	0.0140	2.66e-06	2.72e-04	-1.6777 (0.0720)	82	5.6215e-04
t-GJRGARCH	0.7%	1.0156 (0.3136)	-	-	2.1677 (0.9036)	0.0070	1.36e-06	3.56e-04	-0.0954 (0.3180)	186	8.8382e-04
Skewt-GJRGARCH	0.9%	0.1045 (0.7465)	-	-	2.4999 (0.8685)	0.0090	1.90e-06	3.16e-04	-0.4048 (0.2290)	119	7.2175e-04
N-APARCH	1.5%	2.1892 (0.1390)	1.5453 (0.2138)	3.7346 (0.1545)	16.9395 (0.0095)	0.0150	2.56e-06	2.72e-04	-1.5502 (0.0830)	71	5.5846e-04
t-APARCH	0.7%	1.0156 (0.3136)	-	-	1.7876 (0.9382)	0.0070	1.30e-06	3.50e-04	-0.0438 (0.3380)	180	8.5300e-04
Skewt-APARCH	1%	0 (1)	-	-	2.1119 (0.9091)	0.0100	1.80e-06	3.11e-04	-0.2622 (0.2680)	114	6.9482e-04
CAViaR Simétrico	1%	0 (1)	-	-	0.7036 (0.9944)	0.0100	1.18e-06	3.18e-04	#	#	#
CAViaR Asimétrico	0.8%	0.4337 (0.5102)	-	-	1.3282 (0.9701)	0.008	1.67e-06	3.08e-04	#	#	#
CAViaR Indirect GARCH	0.8%	0.4337 (0.5102)	-	-	0.8218 (0.9915)	0.008	1.42e-06	3.10e-04	#	#	#
CARES Simétrico	#	#	#	#	#	#	#	#	-0.1453 (0.3075)	#	#
CARES Asimétrico	#	#	#	#	#	#	#	#	-0.3478 (0.2098)	#	#
CARES Indirect GARCH	#	#	#	#	#	#	#	#	-0.2564 (0.2293)	#	#
CARE Simétrico	#	#	#	#	#	#	#	#	#	112	6.9196e-04
CARE Asimétrico	#	#	#	#	#	#	#	#	#	115	6.6387e-04
CARE Indirect GARCH	#	#	#	#	#	#	#	#	#	113	6.7937e-04

Tabla 26: Estadísticos correspondientes a los diferentes contrastes de backtesting (con sus p-valores asociados entre paréntesis) para los distintos modelos de predicción del VaR y promedios de las funciones de pérdida para las diferentes medidas de riesgo $VaR_1\%$, $ES_1\%$ y $Expectil_1\%$ para el índice DAX30. En la 1ª columna se recoge el ratio de violaciones π , en las columnas 2 a 5 se recogen los contrastes de validación del VaR, Kupiec (LR_{uc}), Christoffersen (LR_{ind} , LR_{cc}) y Engle & Manganelli (DQT). Las columnas 6 a 8 corresponden a las funciones de pérdida para el VaR, la columna 9 corresponde al contraste de Righi & Ceretta (2015) para el ES, la columna 10 al contraste de Bellini & Di Bernardino para el Expectil y la última columna a la función de pérdida asociada al Expectil. Se resalta en color rojo, como algo negativo, los modelos que no pasan el test correspondiente a un nivel de significación $p = 1\%$ y en color azul, como algo positivo, las funciones de pérdida que menores valores presentan. El guión hace referencia a que no se ha podido establecer un dictamen debido a alguna indeterminación matemática (0^0) en el cálculo del estadístico del test correspondiente, con lo cual no hay un valor posible. La almohadilla indica que no procede tener un dato ahí.

E RESULTADOS BACKTESTING

Backtesting - VIX											
p = 1%	VaR - Ratio de Violaciones	VaR - Test Kupiec	VaR - Test Christoffersen		VaR - Test Engle & Manganelli	VaR - Funciones de pérdida			Expected Shortfall	Expectil	Expectil - Función de pérdida
	π	LRuc	LRind	LRcc	DQT	López	Sarma et al. (RLF)	Sarma et al. (FLF)	Righi & Ceretta (2015)	Ratio pérdidas-ganancias	Bellini & Di Bernardino
N-GARCH	1.2%	0.3798 (0.5377)	-	-	12.3015 (0.0556)	0.0120	3.1498e-05	0.0016	-0.3116 (0.2870)	1	0.0098
t-GARCH	0.1%	13.4764 (0.0002)	-	-	8.1780 (0.2254)	0.0010	9.1730e-06	0.0025	-0.3108 (0.2260)	105	0.0209
Skewt-GARCH	1.5%	2.1892 (0.1390)	-	-	11.1237 (0.0846)	0.0150	3.8150e-05	0.0016	0.1936 (0.4270)	870	0.0430
N-GJRGARCH	0.7%	1.0156 (0.3136)	-	-	1.1356 (0.9799)	0.0070	3.5067e-05	0.0016	-1.2136 (0.1170)	84	0.0196
t-GJRGARCH	0.2%	9.6267 (0.0019)	-	-	6.4354 (0.3762)	0.0020	1.0649e-05	0.0024	0.0998 (0.3770)	114	0.0212
Skewt-GJRGARCH	1.4%	1.4374 (0.2306)	-	-	7.4450 (0.2816)	0.0140	4.5282e-05	0.0015	0.0446 (0.3560)	768	0.0423
N-APARCH	0.5%	3.0937 (0.0786)	-	-	2.9507 (0.81509)	0.0050	2.3198e-05	0.0016	-0.8370 (0.1720)	84	0.0195
t-APARCH	0.1%	13.4764 (0.0002)	-	-	8.1424 (0.2279)	0.0010	3.9761e-06	0.0024	0.1073 (0.3810)	130	0.0210
Skewt-APARCH	1.2%	0.3798 (0.5377)	-	-	1.5517 (0.9560)	0.0120	2.9127e-05	0.0015	0.2012 (0.4340)	1218	0.0415
CAViaR Simétrico	1.4%	1.4374 (0.2306)	-	-	11.1146 (0.0849)	0.0140	4.4366e-05	0.0015	#	#	#
CAViaR Asimétrico	1.7%	4.0910 (0.0431)	1.1554 (0.2824)	5.2464 (0.0726)	14.4713 (0.0248)	0.0170	4.3953e-05	0.0013	#	#	#
CAViaR Indirect GARCH	1.6%	3.0766 (0.0794)	-	-	11.8784 (0.0647)	0.0160	4.5456e-05	0.0015	#	#	#
CARES Simétrico	#	#	#	#	#	#	#	#	-0.1153 (0.4216)	#	#
CARES Asimétrico	#	#	#	#	#	#	#	#	-0.0928 (0.4216)	#	#
CARES Indirect GARCH	#	#	#	#	#	#	#	#	-0.1357 (0.4216)	#	#
CARE Simétrico	#	#	#	#	#	#	#	#	#	88	0.0187
CARE Asimétrico	#	#	#	#	#	#	#	#	#	70	0.0192
CARE Indirect GARCH	#	#	#	#	#	#	#	#	#	63	0.0169

Tabla 27: Estadísticos correspondientes a los diferentes contrastes de backtesting (con sus p-valores asociados entre paréntesis) para los distintos modelos de predicción del VaR y promedios de las funciones de pérdida para las diferentes medidas de riesgo $VaR_1\%$, $ES_1\%$ y $Expectil_1\%$ para el índice VIX. En la 1ª columna se recoge el ratio de violaciones π , en las columnas 2 a 5 se recogen los contrastes de validación del VaR, Kupiec (LR_{uc}), Christoffersen (LR_{ind} , LR_{cc}) y Engle & Manganelli (DQT). Las columnas 6 a 8 corresponden a las funciones de pérdida para el VaR, la columna 9 corresponde al contraste de Righi & Ceretta (2015) para el ES, la columna 10 al contraste de Bellini & Di Bernardino para el Expectil y la última columna a la función de pérdida asociada al Expectil. Se resalta en color rojo, como algo negativo, los modelos que no pasan el test correspondiente a un nivel de significación $p = 1\%$ y en color azul, como algo positivo, las funciones de pérdida que menores valores presentan. El guión hace referencia a que no se ha podido establecer un dictamen debido a alguna indeterminación matemática (0^0) en el cálculo del estadístico del test correspondiente, con lo cual no hay un valor posible. La almohadilla indica que no procede tener un dato ahí.

E RESULTADOS BACKTESTING

Backtesting - BBVA											
p = 1%	VaR - Ratio de Violaciones	VaR - Test Kupiec	VaR - Test Christoffersen		VaR - Test Engle & Manganelli	VaR - Funciones de pérdida			Expected Shortfall	Expectil	Expectil - Función de pérdida
	π	LRuc	LRind	LRcc	DQT	López	Sarma et al. (RLF)	Sarma et al. (FLF)	Righi & Ceretta (2015)	Ratio pérdidas-ganancias	Bellini & Di Bernardino
N-GARCH	1.5%	2.1892 (0.1390)	-	-	4.3627 (0.6277)	0.0150	1.6729e-05	4.6101e-04	-1.1852 (0.1210)	69	0.0015
t-GARCH	0.2%	9.6267 (0.0019)	-	-	6.4298 (0.3768)	0.0020	1.1683e-05	6.1219e-04	-1.8899 (0.0500)	199	0.0024
Skewt-GARCH	1%	0 (1)	-	-	0.4438 (0.9985)	0.0100	1.4883e-05	5.0380e-04	-0.1270 (0.2980)	90	0.0017
N-GJRGARCH	1.2%	0.3798 (0.5377)	-	-	2.4276 (0.87765)	0.0120	1.9126e-05	4.6866e-04	-2.5881 (0.0260)	65	0.0016
t-GJRGARCH	0.5%	3.0937 (0.0786)	-	-	3.2029 (0.7830)	0.0050	1.4000e-05	5.9232e-04	-0.9044 (0.1370)	148	0.0024
Skewt-GJRGARCH	1%	0 (1)	-	-	1.7966 (0.9374)	0.0100	1.7254e-05	5.0505e-04	-0.8821 (0.1400)	82	0.0018
N-APARCH	1.4%	1.4374 (0.2306)	-	-	6.8149 (0.3383)	0.0140	1.9225e-05	4.5474e-04	-2.2755 (0.0370)	59	0.0015
t-APARCH	0.6%	1.8862 (0.1696)	-	-	2.4619 (0.8727)	0.0060	1.3905e-05	5.6915e-04	-1.0873 (0.1130)	137	0.0021
Skewt-APARCH	1.2%	0.3798 (0.5377)	-	-	3.8819 (0.6927)	0.0120	1.7904e-05	4.7566e-04	-0.8453 (0.1450)	69	0.0016
CAViaR Simétrico	0.7%	1.0156 (0.3136)	-	-	1.0722 (0.9827)	0.0070	1.3648e-05	5.0098e-04	#	#	#
CAViaR Asimétrico	0.8%	0.4337 (0.5102)	-	-	1.9760 (0.9219)	0.0080	1.7287e-05	5.1941e-04	#	#	#
CAViaR Indirect GARCH	1%	0 (1)	-	-	0.4450 (0.9984)	0.0100	1.4187e-05	4.9881e-04	#	#	#
CARES Simétrico	#	#	#	#	#	#	#	#	-0.3041 (0.1047)	#	#
CARES Asimétrico	#	#	#	#	#	#	#	#	-0.3379 (0.1047)	#	#
CARES Indirect GARCH	#	#	#	#	#	#	#	#	-0.1661 (0.1049)	#	#
CARE Simétrico	#	#	#	#	#	#	#	#	#	110	0.0018
CARE Asimétrico	#	#	#	#	#	#	#	#	#	100	0.0017
CARE Indirect GARCH	#	#	#	#	#	#	#	#	#	101	0.0017

Tabla 28: Estadísticos correspondientes a los diferentes contrastes de backtesting (con sus p-valores asociados entre paréntesis) para los distintos modelos de predicción del VaR y promedios de las funciones de pérdida para las diferentes medidas de riesgo $VaR_1\%$, $ES_1\%$ y $Expectil_1\%$ para la acción BBVA. En la 1ª columna se recoge el ratio de violaciones π , en las columnas 2 a 5 se recogen los contrastes de validación del VaR, Kupiec (LR_{uc}), Christoffersen (LR_{ind} , LR_{cc}) y Engle & Manganelli (DQT). Las columnas 6 a 8 corresponden a las funciones de pérdida para el VaR, la columna 9 corresponde al contraste de Righi & Ceretta (2015) para el ES, la columna 10 al contraste de Bellini & Di Bernardino para el Expectil y la última columna a la función de pérdida asociada al Expectil. Se resalta en color rojo, como algo negativo, los modelos que no pasan el test correspondiente a un nivel de significación $p = 1\%$ y en color azul, como algo positivo, las funciones de pérdida que menores valores presentan. El guión hace referencia a que no se ha podido establecer un dictamen debido a alguna indeterminación matemática (0^0) en el cálculo del estadístico del test correspondiente, con lo cual no hay un valor posible. La almohadilla indica que no procede tener un dato ahí.

E RESULTADOS BACKTESTING

Backtesting - IBM												
p = 1%	VaR - Ratio de Violaciones	VaR - Test Kupiec		VaR - Test Christoffersen		VaR - Test Engle & Manganelli	VaR - Funciones de pérdida			Expected Shortfall	Expectil	Expectil - Función de pérdida
	π	LRuc	LRind	LRcc	DQT	López	Sarma et al. (RLF)	Sarma et al. (FLF)	Righi & Ceretta (2015)	Ratio pérdidas-ganancias	Bellini & Di Bernardino	
N-GARCH	1.6%	3.0766 (0.0794)	1.3399 (0.2470)	4.4165 (0.1099)	14.2662 (0.0268)	0.0160	9.8590e-06	2.8662e-04	-4.7446 (0.0020)	45	5.8255e-04	
t-GARCH	0.9%	0.1045 (0.7465)	-	-	1.7954 (0.9375)	0.0090	4.1780e-06	4.2355e-04	-0.3918 (0.2060)	116	0.0012	
Skewt-GARCH	1.4%	1.4374 (0.2306)	-	-	4.9379 (0.5518)	0.0140	8.3117e-06	3.2042e-04	-0.8078 (0.1300)	57	6.9579e-04	
N-GJRGARCH	1.5%	2.1892 (0.1390)	-	-	5.6971 (0.4580)	0.0150	9.8225e-06	2.9372e-04	-5.0356 (0.001)	47	6.1357e-04	
t-GJRGARCH	0.7%	1.0156 (0.3136)	-	-	2.4803 (0.8707)	0.0070	4.2762e-06	4.4007e-04	-0.5573 (0.1720)	121	0.0013	
Skewt-GJRGARCH	1.3%	0.8306 (0.3621)	-	-	4.4763 (0.6125)	0.0130	8.2554e-06	3.3360e-04	-0.9518 (0.1120)	65	7.8919e-04	
N-APARCH	1.6%	3.0766 (0.0794)	-	-	5.4964 (0.4819)	0.0160	9.4385e-06	2.8276e-04	-4.5155 (0.0020)	45	5.6769e-04	
t-APARCH	0.7%	1.0156 (0.3136)	-	-	1.8721 (0.9311)	0.0070	4.0857e-06	4.1819e-04	-0.7710 (0.1370)	117	0.0012	
Skewt-APARCH	1.2%	0.3798 (0.5377)	-	-	2.0658 (0.9135)	0.0120	8.0172e-06	3.1602e-04	-1.1164 (0.0950)	60	6.9792e-04	
CAViaR Simétrico	1.5%	2.1892 (0.1390)	-	-	4.0892 (0.6646)	0.0150	7.0492e-06	3.1450e-04	#	#	#	
CAViaR Asímetrico	1.5%	2.1892 (0.1390)	-	-	4.2834 (0.6384)	0.0150	7.0999e-06	3.1623e-04	#	#	#	
CAViaR Indirect GARCH	1.3%	0.8306 (0.3621)	-	-	2.8641 (0.8257)	0.0130	7.3014e-06	3.2301e-04	#	#	#	
CARES Simétrico	#	#	#	#	#	#	#	#	0.0877 (0.6280)	#	#	
CARES Asímetrico	#	#	#	#	#	#	#	#	0.0860 (0.6280)	#	#	
CARES Indirect GARCH	#	#	#	#	#	#	#	#	0.0245 (0.6155)	#	#	
CARE Simétrico	#	#	#	#	#	#	#	#	#	67	7.4492e-04	
CARE Asímetrico	#	#	#	#	#	#	#	#	#	67	7.4477e-04	
CARE Indirect GARCH	#	#	#	#	#	#	#	#	#	69	7.6991e-04	

Tabla 29: Estadísticos correspondientes a los diferentes contrastes de backtesting (con sus p-valores asociados entre paréntesis) para los distintos modelos de predicción del VaR y promedios de las funciones de pérdida para las diferentes medidas de riesgo $VaR_1\%$, $ES_1\%$ y $Expectil_1\%$ para la acción IBM. En la 1ª columna se recoge el ratio de violaciones π , en las columnas 2 a 5 se recogen los contrastes de validación del VaR, Kupiec (LR_{uc}), Christoffersen (LR_{ind} , LR_{cc}) y Engle & Manganelli (DQT). Las columnas 6 a 8 corresponden a las funciones de pérdida para el VaR, la columna 9 corresponde al contraste de Righi & Ceretta (2015) para el ES, la columna 10 al contraste de Bellini & Di Bernardino para el Expectil y la última columna a la función de pérdida asociada al Expectil. Se resalta en color rojo, como algo negativo, los modelos que no pasan el test correspondiente a un nivel de significación $p = 1\%$ y en color azul, como algo positivo, las funciones de pérdida que menores valores presentan. El guión hace referencia a que no se ha podido establecer un dictamen debido a alguna indeterminación matemática (0^0) en el cálculo del estadístico del test correspondiente, con lo cual no hay un valor posible. La almohadilla indica que no procede tener un dato ahí.

E RESULTADOS BACKTESTING

Backtesting - BAYER											
p = 1%	VaR - Ratio de Violaciones	VaR - Test Kupiec	VaR - Test Christoffersen		VaR - Test Engle & Manganelli	VaR - Funciones de pérdida			Expected Shortfall	Expectil	Expectil - Función de pérdida
	π	LRuc	LRind	LRcc	DDT	López	Sarma et al. (RLF)	Sarma et al. (FLF)	Righi & Ceretta (2015)	Ratio pérdidas-ganancias	Bellini & Di Bernardino
N-GARCH	1.3%	0.8306 (0.3621)	-	-	2.2842 (0.8918)	0.0130	3.5491e-06	3.6134e-04	-1.0192 (0.1430)	72	9.3730e-04
t-GARCH	0.3%	6.8255 (0.0090)	-	-	4.9319 (0.5526)	0.0030	1.2661e-06	5.0731e-04	-0.1267 (0.2925)	301	0.0016
Skewt-GARCH	0.7%	1.0156 (0.3136)	-	-	1.0323 (0.9844)	0.0070	2.4243e-06	4.1659e-04	-0.0434 (0.3220)	136	0.0012
N-GJRGARCH	1%	0 (1)	-	-	0.4510 (0.9984)	0.0100	3.0995e-06	3.6427e-04	-1.5161 (0.0850)	82	9.5608e-04
t-GJRGARCH	0.3%	6.8255 (0.0090)	-	-	5.0225 (0.5409)	0.0030	9.6702e-07	4.9950e-04	-0.0316 (0.3300)	287	0.0016
Skewt-GJRGARCH	0.8%	0.4337 (0.5102)	-	-	0.6267 (0.9959)	0.0080	2.0008e-06	4.1557e-04	0.1066 (0.3880)	138	0.0012
N-APARCH	1.2%	0.3798 (0.5377)	-	-	2.1316 (0.9072)	0.0120	3.2946e-06	3.6634e-04	-1.1466 (0.1250)	80	9.6178e-04
t-APARCH	0.4%	4.7060 (0.301)	-	-	3.6328 (0.7262)	0.0040	1.0550e-06	4.9687e-04	0.1036 (0.3880)	282	0.0016
Skewt-APARCH	0.6%	1.8862 (0.1696)	-	-	1.6953 (0.9455)	0.0060	2.0227e-06	4.1933e-04	-0.1004 (0.3060)	140	0.0012
CAViaR Simétrico	0.8%	0.4337 (0.5102)	-	-	4.0779 (0.6661)	0.0080	2.8150e-06	4.2154e-04	#	#	#
CAViaR Asimétrico	0.7%	1.0156 (0.3136)	-	-	1.0323 (0.9844)	0.0070	2.3186e-06	4.1808e-04	#	#	#
CAViaR Indirect GARCH	0.8%	0.4337 (0.5102)	-	-	0.8038 (0.9920)	0.0080	2.7776e-06	4.1946e-04	#	#	#
CARES Simétrico	#	#	#	#	#	#	#	#	-0.2148 (0.3155)	#	#
CARES Asimétrico	#	#	#	#	#	#	#	#	-0.2459 (0.3151)	#	#
CARES Indirect GARCH	#	#	#	#	#	#	#	#	-0.1779 (0.3155)	#	#
CARE Simétrico	#	#	#	#	#	#	#	#	#	117	0.0012
CARE Asimétrico	#	#	#	#	#	#	#	#	#	141	0.0012
CARE Indirect GARCH	#	#	#	#	#	#	#	#	#	126	0.0012

Tabla 30: Estadísticos correspondientes a los diferentes contrastes de backtesting (con sus p-valores asociados entre paréntesis) para los distintos modelos de predicción del VaR y promedios de las funciones de pérdida para las diferentes medidas de riesgo $VaR_1\%$, $ES_1\%$ y $Expectil_1\%$ para la acción BAYER. En la 1ª columna se recoge el ratio de violaciones π , en las columnas 2 a 5 se recogen los contrastes de validación del VaR, Kupiec (LR_{uc}), Christoffersen (LR_{ind} , LR_{cc}) y Engle & Manganelli (DDT). Las columnas 6 a 8 corresponden a las funciones de pérdida para el VaR, la columna 9 corresponde al contraste de Righi & Ceretta (2015) para el ES, la columna 10 al contraste de Bellini & Di Bernardino para el Expectil y la última columna a la función de pérdida asociada al Expectil. Se resalta en color rojo, como algo negativo, los modelos que no pasan el test correspondiente a un nivel de significación $p = 1\%$ y en color azul, como algo positivo, las funciones de pérdida que menores valores presentan. El guión hace referencia a que no se ha podido establecer un dictamen debido a alguna indeterminación matemática (0^0) en el cálculo del estadístico del test correspondiente, con lo cual no hay un valor posible. La almohadilla indica que no procede tener un dato ahí.

E RESULTADOS BACKTESTING

p = 1%	Backtesting - \$/€										
	VaR - Ratio de Violaciones	VaR - Test Kupiec	VaR - Test Christoffersen		VaR - Test Engle & Manganelli	VaR - Funciones de pérdida			Expected Shortfall	Expectil	Expectil - Función de pérdida
	π	LRuc	LRind	LRcc	DQT	López	Sarma et al. (RLF)	Sarma et al. (FLF)	Righi & Ceretta (2015)	Ratio pérdidas-ganancias	Bellini & Di Bernardino
N-GARCH	1.6%	3.0766 (0.0794)	-	-	8.5175 (0.2026)	0.0160	3.0449e-07	1.2808e-04	-1.4207 (0.0940)	66	1.3005e-04
t-GARCH	0.7%	1.0156 (0.3136)	-	-	4.4063 (0.6219)	0.0070	1.0540e-07	1.6402e-04	-0.1412 (0.3070)	179	1.9059e-04
Skewt-GARCH	1.2%	0.3798 (0.5377)	-	-	3.2604 (0.7755)	0.0120	2.0708e-07	1.4153e-04	-0.1706 (0.2980)	88	1.4582e-04
N-GJRGARCH	1.7%	4.0910 (0.0431)	-	-	7.9216 (0.2439)	0.0170	2.8565e-07	1.2840e-04	-0.9969 (0.1470)	68	1.3025e-04
t-GJRGARCH	0.6%	1.8862 (0.1696)	-	-	2.4472 (0.8743)	0.0060	9.9630e-08	1.6265e-04	-0.1242 (0.3130)	179	1.8625e-04
Skewt-GJRGARCH	1%	0 (1)	-	-	2.2755 (0.8927)	0.0100	1.9918e-07	1.4140e-04	-0.3186 (0.2540)	96	1.4891e-04
N-APARCH	2.3%	12.4853 (0.0004)	0.3972 (0.5285)	12.8825 (0.0016)	34.5349 (0.0000)	0.0230	3.3278e-07	1.2306e-04	-0.9935 (0.1470)	57	1.2533e-04
t-APARCH	0.7%	1.0156 (0.3136)	-	-	4.3089 (0.6349)	0.0070	1.0189e-07	1.6070e-04	-0.0595 (0.3340)	167	1.8726e-04
Skewt-APARCH	1.4%	1.4374 (0.2306)	-	-	10.2894 (0.1130)	0.0140	2.2337e-07	1.3582e-04	-0.1391 (0.3080)	81	1.4314e-04
CAViaR Simétrico	1.2%	0.3798 (0.5377)	-	-	1.8010 (0.9371)	0.0120	1.6513e-07	1.4101e-04	#	#	#
CAViaR Asímetrico	1.3%	0.8306 (0.3621)	-	-	2.8857 (0.8231)	0.0130	1.6183e-07	1.4150e-04	#	#	#
CAViaR Indirect GARCH	1.2%	0.3798 (0.5377)	-	-	1.8769 (0.9307)	0.0120	1.5299e-07	1.4503e-04	#	#	#
CARES Simétrico	#	#	#	#	#	#	#	#	-0.1130 (0.4193)	#	#
CARES Asímetrico	#	#	#	#	#	#	#	#	0.0888 (0.4240)	#	#
CARES Indirect GARCH	#	#	#	#	#	#	#	#	0.1145 (0.4240)	#	#
CARE Simétrico	#	#	#	#	#	#	#	#	#	84	1.4180e-04
CARE Asímetrico	#	#	#	#	#	#	#	#	#	82	1.4173e-04
CARE Indirect GARCH	#	#	#	#	#	#	#	#	#	97	1.4784e-04

Tabla 31: Estadísticos correspondientes a los diferentes contrastes de backtesting (con sus p-valores asociados entre paréntesis) para los distintos modelos de predicción del VaR y promedios de las funciones de pérdida para las diferentes medidas de riesgo $VaR_1\%$, $ES_1\%$ y $Expectil_1\%$ para el tipo de cambio \$/€. En la 1ª columna se recoge el ratio de violaciones π , en las columnas 2 a 5 se recogen los contrastes de validación del VaR, Kupiec (LR_{uc}), Christoffersen (LR_{ind} , LR_{cc}) y Engle & Manganelli (DQT). Las columnas 6 a 8 corresponden a las funciones de pérdida para el VaR, la columna 9 corresponde al contraste de Righi & Ceretta (2015) para el ES, la columna 10 al contraste de Bellini & Di Bernardino para el Expectil y la última columna a la función de pérdida asociada al Expectil. Se resalta en color rojo, como algo negativo, los modelos que no pasan el test correspondiente a un nivel de significación $p = 1\%$ y en color azul, como algo positivo, las funciones de pérdida que menores valores presentan. El guión hace referencia a que no se ha podido establecer un dictamen debido a alguna indeterminación matemática (0^0) en el cálculo del estadístico del test correspondiente, con lo cual no hay un valor posible. La almohadilla indica que no procede tener un dato ahí.

E RESULTADOS BACKTESTING

Backtesting - \$/£											
p = 1%	VaR - Ratio de Violaciones	VaR - Test Kupiec	VaR - Test Christoffersen		VaR - Test Engle & Manganelli	VaR - Funciones de pérdida			Expected Shortfall	Expectil	Expectil - Función de pérdida
	π	LRuc	LRind	LRcc	DQT	López	Sarma et al. (RLF)	Sarma et al. (FLF)	Righi & Ceretta (2015)	Ratio pérdidas-ganancias	Bellini & Di Bernardino
	N-GARCH	1.5%	2.1892 (0.1390)	-	-	10.5397 (0.1037)	0.0150	4.1235e-06	1.3349e-04	-1.6528 (0.0740)	60
t-GARCH	0.5%	3.0937 (0.0786)	-	-	2.6839 (0.8473)	0.0050	3.6159e-06	1.5838e-04	-2.3655 (0.0340)	99	1.9946e-04
Skewt-GARCH	0.6%	1.8862 (0.1696)	-	-	2.3040 (0.8897)	0.0060	3.8423e-06	1.4839e-04	0.4948 (0.6060)	78	1.7269e-04
N-GJRGARCH	1.6%	3.0766 (0.0794)	-	-	6.6661 (0.3528)	0.0160	4.8298e-06	1.3496e-04	-1.9657 (0.0530)	59	1.5815e-04
t-GJRGARCH	0.6%	1.8862 (0.1696)	-	-	1.9445 (0.9247)	0.0060	4.4891e-06	1.5928e-04	-2.6507 (0.0260)	90	2.1118e-04
Skewt-GJRGARCH	0.6%	1.8862 (0.1696)	-	-	1.9512 (0.9241)	0.0060	4.6043e-06	1.5181e-04	-3.6047 (0.0100)	79	1.9224e-04
N-APARCH	1.7%	4.0910 (0.0431)	-	-	8.1338 (0.2285)	0.0170	4.9706e-06	1.4471e-04	-2.2854 (0.0370)	53	2.2898e-04
t-APARCH	0.9%	0.1045 (0.7465)	-	-	2.3679 (0.8829)	0.0090	4.8007e-06	1.4620e-04	-2.7701 (0.0220)	65	1.6859e-04
Skewt-APARCH	1%	0 (1)	-	-	1.8755 (0.9308)	0.0100	4.6011e-06	1.3407e-04	-2.3554 (0.0340)	57	1.4521e-04
CAViaR Simétrico	1.3%	0.8306 (0.3621)	-	-	36.2871 (0.0000)	0.0130	3.8353e-06	1.3939e-04	#	#	#
CAViaR Asimétrico	1%	0 (1)	2.9931 (0.0836)	2.9931 (0.2239)	9.5858 (0.1432)	0.0100	4.2180e-06	1.4338e-04	#	#	#
CAViaR Indirect GARCH	1.1%	0.0978 (0.7544)	-	-	10.9466 (0.0900)	0.0110	3.5342e-06	1.4534e-04	#	#	#
CARES Simétrico	#	#	#	#	#	#	#	#	-0.2960 (0.2111)	#	#
CARES Asimétrico	#	#	#	#	#	#	#	#	-0.2945 (0.2111)	#	#
CARES Indirect GARCH	#	#	#	#	#	#	#	#	-0.3083 (0.2111)	#	#
CARE Simétrico	#	#	#	#	#	#	#	#	#	61	1.5248e-04
CARE Asimétrico	#	#	#	#	#	#	#	#	#	59	1.4626e-04
CARE Indirect GARCH	#	#	#	#	#	#	#	#	#	73	1.7074e-04

Tabla 32: Estadísticos correspondientes a los diferentes contrastes de backtesting (con sus p-valores asociados entre paréntesis) para los distintos modelos de predicción del VaR y promedios de las funciones de pérdida para las diferentes medidas de riesgo $VaR_1\%$, $ES_1\%$ y $Expectil_1\%$ para el tipo de cambio \$/£. En la 1ª columna se recoge el ratio de violaciones π , en las columnas 2 a 5 se recogen los contrastes de validación del VaR, Kupiec (LR_{uc}), Christoffersen (LR_{ind} , LR_{cc}) y Engle & Manganelli (DQT). Las columnas 6 a 8 corresponden a las funciones de pérdida para el VaR, la columna 9 corresponde al contraste de Righi & Ceretta (2015) para el ES, la columna 10 al contraste de Bellini & Di Bernardino para el Expectil y la última columna a la función de pérdida asociada al Expectil. Se resalta en color rojo, como algo negativo, los modelos que no pasan el test correspondiente a un nivel de significación $p = 1\%$ y en color azul, como algo positivo, las funciones de pérdida que menores valores presentan. El guión hace referencia a que no se ha podido establecer un dictamen debido a alguna indeterminación matemática (0^0) en el cálculo del estadístico del test correspondiente, con lo cual no hay un valor posible. La almohadilla indica que no procede tener un dato ahí.

E RESULTADOS BACKTESTING

Backtesting - ¥/\$											
p = 1%	VaR - Ratio de Violaciones	VaR - Test Kupiec	VaR - Test Christoffersen		VaR - Test Engle & Manganelli	VaR - Funciones de pérdida			Expected Shortfall	Expectil	Expectil - Función de pérdida
	π	LRuc	LRind	LRcc	DQT	López	Sarma et al. (RLF)	Sarma et al. (FLF)	Righi & Ceretta (2015)	Ratio pérdidas-ganancias	Bellini & Di Bernardino
N-GARCH	1.4%	1.4374 (0.2306)	-	-	3.7640 (0.7086)	0.0140	7.7971e-07	1.4604e-04	-1.4524 (0.0910)	68	1.6046e-04
t-GARCH	0.3%	6.8255 (0.0090)	-	-	4.9689 (0.5478)	0.0030	2.8228e-07	2.0918e-04	-0.2387 (0.2530)	267	2.9305e-04
Skewt-GARCH	1.1%	0.0978 (0.7544)	-	-	1.0294 (0.9845)	0.0110	5.6650e-07	1.6375e-04	0.1395 (0.4000)	98	1.9098e-04
N-GJRGARCH	1.6%	3.0766 (0.0794)	-	-	6.9648 (0.3241)	0.0160	7.2170e-07	1.4573e-04	-1.0403 (0.1400)	67	1.6080e-04
t-GJRGARCH	0.3%	6.8255 (0.0090)	-	-	5.0211 (0.5411)	0.0030	2.4854e-07	2.0886e-04	-0.1165 (0.2930)	225	2.9214e-04
Skewt-GJRGARCH	0.9%	0.1045 (0.7465)	-	-	0.7593 (0.9931)	0.0090	5.2142e-07	1.6418e-04	0.0430 (0.3550)	103	1.9483e-04
N-APARCH	1.4%	1.4374 (0.2306)	-	-	4.8096 (0.5685)	0.0140	7.4606e-07	1.4956e-04	-1.3707 (0.0990)	74	1.6719e-04
t-APARCH	0.3%	6.8255 (0.0090)	-	-	4.9629 (0.5486)	0.0030	2.7499e-07	2.0776e-04	-0.2888 (0.2410)	250	2.8593e-04
Skewt-APARCH	1.2%	0.3798 (0.5377)	-	-	2.9696 (0.8127)	0.0120	5.7435e-07	1.6258e-04	0.1371 (0.4000)	97	1.9025e-04
CAViaR Simétrico	1.3%	0.8306 (0.3621)	-	-	2.6651 (0.8496)	0.0130	6.3240e-07	1.5710e-04	#	#	#
CAViaR Asímetrico	1.3%	0.8306 (0.3621)	-	-	2.6234 (0.8544)	0.0130	6.3988e-07	1.5666e-04	#	#	#
CAViaR Indirect GARCH	1.2%	0.3798 (0.5377)	-	-	1.7145 (0.9440)	0.0120	6.6136e-07	1.5388e-04	#	#	#
CARES Simétrico	#	#	#	#	#	#	#	#	0.1687 (0.4431)	#	#
CARES Asímetrico	#	#	#	#	#	#	#	#	0.1831 (0.4543)	#	#
CARES Indirect GARCH	#	#	#	#	#	#	#	#	0.2157 (0.4729)	#	#
CARE Simétrico	#	#	#	#	#	#	#	#	#	82	1.8107e-04
CARE Asímetrico	#	#	#	#	#	#	#	#	#	84	1.8069e-04
CARE Indirect GARCH	#	#	#	#	#	#	#	#	#	88	1.8667e-04

Tabla 33: Estadísticos correspondientes a los diferentes contrastes de backtesting (con sus p-valores asociados entre paréntesis) para los distintos modelos de predicción del VaR y promedios de las funciones de pérdida para las diferentes medidas de riesgo $VaR_1\%$, $ES_1\%$ y $Expectil_1\%$ para el tipo de cambio ¥/\$. En la 1ª columna se recoge el ratio de violaciones π , en las columnas 2 a 5 se recogen los contrastes de validación del VaR, Kupiec (LR_{uc}), Christoffersen (LR_{ind} , LR_{cc}) y Engle & Manganelli (DQT). Las columnas 6 a 8 corresponden a las funciones de pérdida para el VaR, la columna 9 corresponde al contraste de Righi & Ceretta (2015) para el ES, la columna 10 al contraste de Bellini & Di Bernardino para el Expectil y la última columna a la función de pérdida asociada al Expectil. Se resalta en color rojo, como algo negativo, los modelos que no pasan el test correspondiente a un nivel de significación $p = 1\%$ y en color azul, como algo positivo, las funciones de pérdida que menores valores presentan. El guión hace referencia a que no se ha podido establecer un dictamen debido a alguna indeterminación matemática (0^0) en el cálculo del estadístico del test correspondiente, con lo cual no hay un valor posible. La almohadilla indica que no procede tener un dato ahí.

E RESULTADOS BACKTESTING

Backtesting - Petróleo											
p = 1%	VaR - Ratio de Violaciones	VaR - Test Kupiec	VaR - Test Christoffersen	VaR - Test Engle & Manganelli	VaR - Funciones de pérdida			Expected Shortfall	Expectil	Expectil - Función de pérdida	
	π	LRuc	LRind	LRcc	DQT	López	Sarma et al. (RLF)	Sarma et al. (FLF)	Righi & Ceretta (2015)	Ratio pérdidas-ganancias	Bellini & Di Bernardino
N-GARCH	1.2%	0.3798 (0.5377)	-	-	5.0758 (0.5341)	0.0120	6.9745e-06	4.7653e-04	-2.3207 (0.0350)	80	0.0019
t-GARCH	0.6%	1.8862 (0.1696)	-	-	2.2260 (0.8978)	0.0060	3.7483e-06	5.9969e-04	-0.8663 (0.1410)	183	0.0027
Skewt-GARCH	0.7%	1.0156 (0.3136)	-	-	2.1018 (0.9101)	0.0070	5.2062e-06	5.3425e-04	-1.1249 (0.1090)	129	0.0023
N-GJRGARCH	0.9%	0.1045 (0.7465)	-	-	1.0032 (0.9855)	0.0090	5.2879e-06	4.6648e-04	-2.3033 (0.0360)	87	0.0018
t-GJRGARCH	0.6%	1.8862 (0.1696)	-	-	1.7389 (0.9421)	0.0060	2.7633e-06	5.7040e-04	-0.4427 (0.2240)	191	0.0025
Skewt-GJRGARCH	0.6%	1.8862 (0.1696)	-	-	1.7309 (0.9427)	0.0060	3.8720e-06	5.1790e-04	-0.6615 (0.1590)	134	0.0021
N-APARCH	1.2%	0.3798 (0.5377)	-	-	3.3218 (0.7675)	0.0120	5.7840e-06	4.7563e-04	-2.2092 (0.0400)	84	0.0019
t-APARCH	0.6%	1.8862 (0.1696)	-	-	1.6915 (0.9458)	0.0060	2.6818e-06	5.6169e-04	-0.4821 (0.2140)	187	0.0024
Skewt-APARCH	0.6%	1.8862 (0.1696)	-	-	1.6925 (0.9457)	0.0060	3.6274e-06	5.1798e-04	-0.9177 (0.1370)	129	0.0021
CAViaR Simétrico	0.8%	0.4337 (0.5102)	-	-	1.3560 (0.9685)	0.0080	6.0607e-06	4.9621e-04	#	#	#
CAViaR Asimétrico	0.8%	0.4337 (0.5102)	-	-	0.7098 (0.9943)	0.0080	3.2200e-06	5.2271e-04	#	#	#
CAViaR Indirect GARCH	0.8%	0.4337 (0.5102)	-	-	1.6262 (0.9507)	0.0080	6.7203e-06	4.8937e-04	#	#	#
CARES Simétrico	#	#	#	#	#	#	#	#	-0.3514 (0.4168)	#	#
CARES Asimétrico	#	#	#	#	#	#	#	#	0.1383 (0.4903)	#	#
CARES Indirect GARCH	#	#	#	#	#	#	#	#	-0.3492 (0.4168)	#	#
CARE Simétrico	#	#	#	#	#	#	#	#	#	109	0.0021
CARE Asimétrico	#	#	#	#	#	#	#	#	#	134	0.0021
CARE Indirect GARCH	#	#	#	#	#	#	#	#	#	108	0.0021

Tabla 34: Estadísticos correspondientes a los diferentes contrastes de backtesting (con sus p-valores asociados entre paréntesis) para los distintos modelos de predicción del VaR y promedios de las funciones de pérdida para las diferentes medidas de riesgo $VaR_1\%$, $ES_1\%$ y $Expectil_1\%$ para el petróleo. En la 1ª columna se recoge el ratio de violaciones π , en las columnas 2 a 5 se recogen los contrastes de validación del VaR, Kupiec (LR_{uc}), Christoffersen (LR_{ind} , LR_{cc}) y Engle & Manganelli (DQT). Las columnas 6 a 8 corresponden a las funciones de pérdida para el VaR, la columna 9 corresponde al contraste de Righi & Ceretta (2015) para el ES, la columna 10 al contraste de Bellini & Di Bernardino para el Expectil y la última columna a la función de pérdida asociada al Expectil. Se resalta en color rojo, como algo negativo, los modelos que no pasan el test correspondiente a un nivel de significación $p = 1\%$ y en color azul, como algo positivo, las funciones de pérdida que menores valores presentan. El guión hace referencia a que no se ha podido establecer un dictamen debido a alguna indeterminación matemática (0^0) en el cálculo del estadístico del test correspondiente, con lo cual no hay un valor posible. La almohadilla indica que no procede tener un dato ahí.

E RESULTADOS BACKTESTING

Backtesting - Oro											
p = 1%	VaR - Ratio de Violaciones	VaR - Test Kupiec	VaR - Test Christoffersen		VaR - Test Engle & Manganelli	VaR - Funciones de pérdida			Expected Shortfall	Expectil	Expectil - Función de pérdida
	π	LRuc	LRind	LRcc	DQT	López	Sarma et al. (RLF)	Sarma et al. (FLF)	Righi & Ceretta (2015)	Ratio pérdidas-ganancias	Bellini & Di Bernardino
N-GARCH	1.4%	1.4374 (0.2306)	1.7740 (0.1829)	3.2114 (0.2007)	18.1308 (0.0059)	0.0140	3.4249e-07	2.3371e-04	-0.2318 (0.3090)	96	3.9253e-04
t-GARCH	0%	-	-	-	-	0	0	3.7771e-04	-	1639	9.1369e-04
Skewt-GARCH	0.5%	3.0937 (0.0786)	-	-	4.0523 (0.6696)	0.0050	1.0853e-07	2.8161e-04	0.4313 (0.5900)	267	5.6408e-04
N-GJRGARCH	1.4%	1.4374 (0.2306)	1.7740 (0.1829)	3.2114 (0.2007)	18.1303 (0.0059)	0.0140	3.3750e-07	2.3379e-04	-0.2135 (0.3150)	96	3.9250e-04
t-GJRGARCH	0.1%	13.4764 (0.0002)	-	-	8.2010 (0.2237)	0.0010	9.3045e-11	3.7757e-04	0.5626 (0.7230)	1327	9.1832e-04
Skewt-GJRGARCH	0.5%	3.0937 (0.0786)	-	-	4.5112 (0.6078)	0.0050	1.5425e-07	2.8216e-04	0.3556 (0.5290)	229	5.5234e-04
N-APARCH	1.3%	0.8306 (0.3621)	2.0289 (0.1543)	2.8595 (0.2394)	25.5586 (0.0003)	0.0130	3.9021e-07	2.4224e-04	-0.5142 (0.2360)	95	4.1393e-04
t-APARCH	0.1%	13.4764 (0.0002)	-	-	8.2423 (0.2209)	0.0010	3.4365e-09	3.7651e-04	0.6331 (0.8000)	1183	9.0971e-04
Skewt-APARCH	0.6%	1.8862 (0.1696)	-	-	4.7447 (0.5770)	0.0060	1.5491e-07	2.8665e-04	0.4266 (0.5850)	236	5.6654e-04
CAViaR Simétrico	0.5%	3.0937 (0.0786)	-	-	3.9786 (0.6796)	0.0050	8.8269e-08	2.9020e-04	#	#	#
CAViaR Asimétrico	0.6%	1.8862 (0.1696)	-	-	5.9585 (0.4279)	0.0060	1.3758e-07	2.8857e-04	#	#	#
CAViaR Indirect GARCH	0.5%	3.0937 (0.0786)	-	-	4.0897 (0.6645)	0.0050	9.6876e-08	2.8997e-04	#	#	#
CARES Simétrico	#	#	#	#	#	#	#	#	0.7218 (0.6356)	#	#
CARES Asimétrico	#	#	#	#	#	#	#	#	0.7585 (0.6377)	#	#
CARES Indirect GARCH	#	#	#	#	#	#	#	#	0.7046 (0.6354)	#	#
CARE Simétrico	#	#	#	#	#	#	#	#	#	376	5.9953e-04
CARE Asimétrico	#	#	#	#	#	#	#	#	#	392	6.0456e-04
CARE Indirect GARCH	#	#	#	#	#	#	#	#	#	378	5.9255e-04

Tabla 35: Estadísticos correspondientes a los diferentes contrastes de backtesting (con sus p-valores asociados entre paréntesis) para los distintos modelos de predicción del VaR y promedios de las funciones de pérdida para las diferentes medidas de riesgo $VaR_1\%$, $ES_1\%$ y $Expectil_1\%$ para el oro. En la 1ª columna se recoge el ratio de violaciones π , en las columnas 2 a 5 se recogen los contrastes de validación del VaR, Kupiec (LR_{uc}), Christoffersen (LR_{ind} , LR_{cc}) y Engle & Manganelli (DQT). Las columnas 6 a 8 corresponden a las funciones de pérdida para el VaR, la columna 9 corresponde al contraste de Righi & Ceretta (2015) para el ES, la columna 10 al contraste de Bellini & Di Bernardino para el Expectil y la última columna a la función de pérdida asociada al Expectil. Se resalta en color rojo, como algo negativo, los modelos que no pasan el test correspondiente a un nivel de significación $p = 1\%$ y en color azul, como algo positivo, las funciones de pérdida que menores valores presentan. El guión hace referencia a que no se ha podido establecer un dictamen debido a alguna indeterminación matemática (0^0) en el cálculo del estadístico del test correspondiente, con lo cual no hay un valor posible. La almohadilla indica que no procede tener un dato ahí.

E RESULTADOS BACKTESTING

Backtesting - Gas											
p = 1%	VaR - Ratio de Violaciones	VaR - Test Kupiec	VaR - Test Christoffersen		VaR - Test Engle & Manganelli	VaR - Funciones de pérdida			Expected Shortfall	Expectil	Expectil - Función de pérdida
	π	LRuc	LRind	LRcc	DQT	López	Sarma et al. (RLF)	Sarma et al. (FLF)	Righi & Ceretta (2015)	Ratio pérdidas-ganancias	Bellini & Di Bernardino
N-GARCH	1.1%	0.0978 (0.7544)	-	-	0.8779 (0.9898)	0.0110	5.7430e-06	8.0205e-04	-1.0373 (0.1400)	89	0.0065
t-GARCH	0.5%	3.0937 (0.0786)	-	-	2.5563 (0.8621)	0.0050	1.7226e-07	0.0011	0.7792 (0.8730)	320	0.0097
Skewt-GARCH	1%	0 (1)	-	-	0.6284 (0.9959)	0.0100	2.9886e-06	8.8511e-04	0.3526 (0.5230)	136	0.0073
N-GJRGARCH	1.4%	1.4374 (0.2306)	-	-	3.5953 (0.7312)	0.0140	5.9947e-06	7.7980e-04	-0.6170 (0.2140)	66	0.0060
t-GJRGARCH	0.5%	3.0937 (0.0786)	-	-	2.5498 (0.8629)	0.0050	3.0038e-07	0.0010	0.4779 (0.6030)	253	0.0090
Skewt-GJRGARCH	0.9%	0.1045 (0.7465)	-	-	0.4839 (0.9980)	0.0090	3.1238e-06	8.6828e-04	0.3026 (0.4940)	104	0.0069
N-APARCH	1.6%	3.0766 (0.0794)	-	-	10.6533 (0.0997)	0.0160	6.3588e-06	7.6385e-04	-0.4688 (0.2460)	61	0.0058
t-APARCH	0.5%	3.0937 (0.0786)	-	-	2.5491 (0.8629)	0.0050	1.8075e-07	0.0010	0.7963 (0.8730)	243	0.0085
Skewt-APARCH	1%	0 (1)	-	-	1.0363 (0.9842)	0.0100	2.7901e-06	8.4224e-04	0.3161 (0.5020)	94	0.0066
CAViAR Simétrico	1.4%	1.4374 (0.2306)	1.7740 (0.1829)	3.2114 (0.2007)	14.1207 (0.0283)	0.0140	4.1373e-06	8.3196e-04	#	#	#
CAViAR Asimétrico	2%	7.8272 (0.0051)	3.5461 (0.0597)	11.3734 (0.0034)	36.8912 (0.0000)	0.0200	1.9047e-05	8.1226e-04	#	#	#
CAViAR Indirect GARCH	1.2%	0.3798 (0.5377)	2.3137 (0.1282)	2.6935 (0.2601)	7.7298 (0.2586)	0.0120	3.5838e-06	9.0409e-04	#	#	#
CARES Simétrico	#	#	#	#	#	#	#	#	0.6051 (0.6311)	#	#
CARES Asimétrico	#	#	#	#	#	#	#	#	0.4792 (0.5793)	#	#
CARES Indirect GARCH	#	#	#	#	#	#	#	#	0.3659 (0.5458)	#	#
CARE Simétrico	#	#	#	#	#	#	#	#	#	74	0.0062
CARE Asimétrico	#	#	#	#	#	#	#	#	#	69	0.0061
CARE Indirect GARCH	#	#	#	#	#	#	#	#	#	94	0.0070

Tabla 36: Estadísticos correspondientes a los diferentes contrastes de backtesting (con sus p-valores asociados entre paréntesis) para los distintos modelos de predicción del VaR y promedios de las funciones de pérdida para las diferentes medidas de riesgo $VaR_1\%$, $ES_1\%$ y $Expectil_1\%$ para el gas. En la 1ª columna se recoge el ratio de violaciones π , en las columnas 2 a 5 se recogen los contrastes de validación del VaR, Kupiec (LR_{uc}), Christoffersen (LR_{ind} , LR_{cc}) y Engle & Manganelli (DQT). Las columnas 6 a 8 corresponden a las funciones de pérdida para el VaR, la columna 9 corresponde al contraste de Righi & Ceretta (2015) para el ES, la columna 10 al contraste de Bellini & Di Bernardino para el Expectil y la última columna a la función de pérdida asociada al Expectil. Se resalta en color rojo, como algo negativo, los modelos que no pasan el test correspondiente a un nivel de significación $p = 1\%$ y en color azul, como algo positivo, las funciones de pérdida que menores valores presentan. El guión hace referencia a que no se ha podido establecer un dictamen debido a alguna indeterminación matemática (0^0) en el cálculo del estadístico del test correspondiente, con lo cual no hay un valor posible. La almohadilla indica que no procede tener un dato ahí.

E RESULTADOS BACKTESTING

Backtesting - Letra Tesoro Español											
p = 1%	VaR - Ratio de Violaciones	VaR - Test Kupiec	VaR - Test Christoffersen	VaR - Test Engle & Manganelli	VaR - Funciones de pérdida			Expected Shortfall	Expectil	Expectil - Función de pérdida	
	π	LRuc	LRind	LRcc	DQT	López	Sarma et al. (RLF)	Sarma et al. (FLF)	Righi & Ceretta (2015)	Ratio pérdidas-ganancias	Bellini & Di Bernardino
N-GARCH	1.2%	0.3798 (0.5377)	-	-	8.6186 (0.1962)	0.0120	5.4013e-09	8.9414e-06	-5.8793 (0.0000)	82	6.1297e-07
t-GARCH	0.6%	1.8862 (0.1696)	-	-	2.2508 (0.8952)	0.0060	2.6479e-09	1.5708e-05	0.2691 (0.4730)	471	3.0719e-06
Skewt-GARCH	3.2%	30.9342 (0.0000)	-	-	64.7298 (0.0000)	0.0320	1.5600e-08	3.8327e-06	-1.3082 (0.0820)	27	2.3939e-07
N-GJRGARCH	1.2%	0.3798 (0.5377)	-	-	9.0812 (0.1691)	0.0120	5.5956e-09	8.7860e-06	-5.9978 (0.0000)	81	5.7356e-07
t-GJRGARCH	0.6%	1.8862 (0.1696)	-	-	2.2613 (0.8942)	0.0060	2.5707e-09	1.5947e-05	0.2441 (0.4620)	477	3.1946e-06
Skewt-GJRGARCH	3.4%	35.8033 (0.0000)	-	-	77.5076 (0.0000)	0.0340	1.5561e-08	3.8202e-06	-1.6754 (0.0630)	26	2.3021e-07
N-APARCH	1.1%	0.0978 (0.7544)	-	-	2.5876 (0.8585)	0.0110	5.6039e-09	9.4987e-06	-7.2263 (0.0000)	91	6.8799e-07
t-APARCH	0.3%	6.8255 (0.0090)	-	-	5.1600 (0.5235)	0.0030	3.9006e-10	3.5128e-05	0.4121 (0.5610)	3110	2.6773e-05
Skewt-APARCH	3.8%	46.2596 (0.0000)	0.2426 (0.6223)	46.5022 (0.0000)	103.9892 (0.0000)	0.0380	1.4397e-08	5.0201e-06	-0.6173 (0.1800)	33	6.1217e-07
CAViaR Simétrico	0%	-	-	-	-	0	0	4.6597e-05	#	#	#
CAViaR Asimétrico	0%	-	-	-	-	0	0	4.6373e-05	#	#	#
CAViaR Indirect GARCH	0.6%	1.8862 (0.1696)	-	-	3.6414 (0.7251)	0.0060	3.9803e-09	1.8030e-05	#	#	#
CARES Simétrico	#	#	#	#	#	#	#	#	-	#	#
CARES Asimétrico	#	#	#	#	#	#	#	#	-	#	#
CARES Indirect GARCH	#	#	#	#	#	#	#	#	0.9745 (1)	#	#
CARE Simétrico	#	#	#	#	#	#	#	#	#	Inf	1.2278e-05
CARE Asimétrico	#	#	#	#	#	#	#	#	#	Inf	1.1995e-05
CARE Indirect GARCH	#	#	#	#	#	#	#	#	#	1819	4.3375e-06

Tabla 37: Estadísticos correspondientes a los diferentes contrastes de backtesting (con sus p-valores asociados entre paréntesis) para los distintos modelos de predicción del VaR y promedios de las funciones de pérdida para las diferentes medidas de riesgo $VaR_1\%$, $ES_1\%$ y $Expectil_1\%$ para la Letra del Tesoro Español a 1 año. En la 1ª columna se recoge el ratio de violaciones π , en las columnas 2 a 5 se recogen los contrastes de validación del VaR, Kupiec (LR_{uc}), Christoffersen (LR_{ind} , LR_{cc}) y Engle & Manganelli (DQT). Las columnas 6 a 8 corresponden a las funciones de pérdida para el VaR, la columna 9 corresponde al contraste de Righi & Ceretta (2015) para el ES, la columna 10 al contraste de Bellini & Di Bernardino para el Expectil y la última columna a la función de pérdida asociada al Expectil. Se resalta en color rojo, como algo negativo, los modelos que no pasan el test correspondiente a un nivel de significación $p = 1\%$ y en color azul, como algo positivo, las funciones de pérdida que menores valores presentan. El guión hace referencia a que no se ha podido establecer un dictamen debido a alguna indeterminación matemática (0^0) en el cálculo del estadístico del test correspondiente, con lo cual no hay un valor posible. La almohadilla indica que no procede tener un dato ahí.

E RESULTADOS BACKTESTING

Backtesting - Tbill americana											
p = 1%	VaR - Ratio de Violaciones	VaR - Test Kupiec	VaR - Test Christoffersen	VaR - Test Engle & Manganelli	VaR - Funciones de pérdida			Expected Shortfall	Expectil	Expectil - Función de pérdida	
	π	LRuc	LRind	LRcc	DQT	López	Sarma et al. (RLF)	Sarma et al. (FLF)	Righi & Ceretta (2015)	Ratio pérdidas-ganancias	Bellini & Di Bernardino
N-GARCH	1.9%	6.4725 (0.0110)	-	-	29.3021 (0.0000)	0.0190	1.7279e-09	8.5092e-06	-1.4411 (0.0920)	59	5.5612e-07
t-GARCH	0.6%	1.8862 (0.1696)	-	-	6.2496 (0.3958)	0.0060	1.5914e-10	1.2541e-05	0.5869 (0.6915)	260	1.0471e-06
Skewt-GARCH	1.3%	0.8306 (0.3621)	-	-	19.3133 (0.0037)	0.0130	9.0720e-10	9.8325e-06	0.1639 (0.4120)	99	7.0010e-07
N-GJRGARCH	1.9%	6.4725 (0.0110)	-	-	29.5542 (0.0000)	0.0190	1.7180e-09	8.5105e-06	-1.4406 (0.0920)	59	5.5622e-07
t-GJRGARCH	0.4%	4.7060 (0.0301)	-	-	5.4754 (0.4844)	0.0040	1.3024e-10	1.2652e-05	0.3076 (0.4970)	279	1.0584e-06
Skewt-GJRGARCH	1.3%	0.8306 (0.3621)	-	-	18.8721 (0.0044)	0.0130	8.1996e-10	9.8837e-06	0.2877 (0.4860)	103	7.0671e-07
N-APARCH	1.9%	6.4725 (0.0110)	-	-	29.6776 (0.0000)	0.0190	1.7656e-09	8.4610e-06	-1.5116 (0.0860)	58	5.5116e-07
t-APARCH	0.5%	3.0937 (0.0786)	-	-	4.5280 (0.6056)	0.0050	1.3076e-10	1.2592e-05	0.5863 (0.6840)	272	1.0517e-06
Skewt-APARCH	1.3%	0.8306 (0.3621)	-	-	18.8065 (0.0045)	0.0130	8.2125e-10	9.8627e-06	0.2830 (0.4830)	102	7.0542e-07
CAViaR Simétrico	2.7%	19.9292 (0.0000)	4.4060 (0.0358)	24.3352 (0.0000)	78.7632 (0.0000)	0.0270	3.3664e-09	7.5847e-06	#	#	#
CAViaR Asímetrico	2.7%	19.9292 (0.0000)	1.6737 (0.1958)	21.6029 (0.0000)	57.8952 (0.0000)	0.0270	2.9454e-09	7.7129e-06	#	#	#
CAViaR Indirect GARCH	1.1%	0.0978 (0.7544)	-	-	12.2653 (0.0563)	0.0110	6.2918e-10	1.0552e-05	#	#	#
CARES Simétrico	#	#	#	#	#	#	#	#	0.7474 (0.6896)	#	#
CARES Asímetrico	#	#	#	#	#	#	#	#	0.6896 (0.6317)	#	#
CARES Indirect GARCH	#	#	#	#	#	#	#	#	0.3316 (0.5254)	#	#
CARE Simétrico	#	#	#	#	#	#	#	#	#	139	8.2734e-07
CARE Asímetrico	#	#	#	#	#	#	#	#	#	127	8.6919e-07
CARE Indirect GARCH	#	#	#	#	#	#	#	#	#	117	7.6530e-07

Tabla 38: Estadísticos correspondientes a los diferentes contrastes de backtesting (con sus p-valores asociados entre paréntesis) para los distintos modelos de predicción del VaR y promedios de las funciones de pérdida para las diferentes medidas de riesgo $VaR_1\%$, $ES_1\%$ y $Expectil_1\%$ para la T-bill americana a 3 años. En la 1ª columna se recoge el ratio de violaciones π , en las columnas 2 a 5 se recogen los contrastes de validación del VaR, Kupiec (LR_{uc}), Christoffersen (LR_{ind} , LR_{cc}) y Engle & Manganelli (DQT). Las columnas 6 a 8 corresponden a las funciones de pérdida para el VaR, la columna 9 corresponde al contraste de Righi & Ceretta (2015) para el ES, la columna 10 al contraste de Bellini & Di Bernardino para el Expectil y la última columna a la función de pérdida asociada al Expectil. Se resalta en color rojo, como algo negativo, los modelos que no pasan el test correspondiente a un nivel de significación $p = 1\%$ y en color azul, como algo positivo, las funciones de pérdida que menores valores presentan. El guión hace referencia a que no se ha podido establecer un dictamen debido a alguna indeterminación matemática (0^0) en el cálculo del estadístico del test correspondiente, con lo cual no hay un valor posible. La almohadilla indica que no procede tener un dato ahí.

E RESULTADOS BACKTESTING

Backtesting - Bono alemán											
p = 1%	VaR - Ratio de Violaciones	VaR - Test Kupiec	VaR - Test Christoffersen		VaR - Test Engle & Manganelli	VaR - Funciones de pérdida			Expected Shortfall	Expectil	Expectil - Función de pérdida
	π	LRuc	LRind	LRcc	DQT	López	Sarma et al. (RLF)	Sarma et al. (FLF)	Righi & Ceretta (2015)	Ratio pérdidas-ganancias	Bellini & Di Bernardino
N-GARCH	1.8%	5.2251 (0.0223)	0.9898 (0.3198)	6.2150 (0.0447)	14.5550 (0.0240)	0.0180	3.4050e-09	8.7221e-06	-1.2648 (0.1110)	55	5.5656e-07
t-GARCH	0.8%	0.4337 (0.5102)	3.8708 (0.0491)	4.3046 (0.1162)	11.9854 (0.0623)	0.0080	1.8403e-09	1.0657e-05	-0.3416 (0.2370)	107	7.5684e-07
Skewt-GARCH	1.2%	0.3798 (0.5377)	2.3137 (0.1282)	2.6935 (0.2601)	7.4971 (0.2773)	0.0120	2.6418e-09	9.5285e-06	-0.2181 (0.2580)	67	6.1446e-07
N-GJRGARCH	1.7%	4.0910 (0.0431)	1.1554 (0.2824)	5.2464 (0.0726)	13.9978 (0.0297)	0.0170	3.4998e-09	8.7176e-06	-1.3419 (0.1030)	54	5.5354e-07
t-GJRGARCH	0.8%	0.4337 (0.5102)	3.8708 (0.0491)	4.3046 (0.1162)	11.9820 (0.0624)	0.0080	1.8678e-09	1.0663e-05	-0.3984 (0.2280)	106	7.5715e-07
Skewt-GJRGARCH	1.1%	0.0978 (0.7544)	2.6331 (0.1047)	2.7309 (0.2553)	8.1476 (0.2275)	0.0110	2.6767e-09	9.5463e-06	-0.2408 (0.2690)	70	6.3213e-07
N-APARCH	1.5%	2.1892 (0.1390)	-	-	8.0752 (0.2326)	0.0150	2.5126e-09	8.9111e-06	-1.2122 (0.1180)	60	5.8015e-07
t-APARCH	0.7%	1.0156 (0.3136)	-	-	1.0593 (0.9833)	0.0070	1.4967e-09	1.0790e-05	-0.1973 (0.2830)	115	7.7409e-07
Skewt-APARCH	1.4%	1.4374 (0.2306)	1.7740 (0.1829)	3.2114 (0.2007)	12.8286 (0.0458)	0.0140	2.3289e-09	9.4632e-06	-0.1547 (0.2955)	70	6.2779e-07
CAViAR Simétrico	0.9%	0.1045 (0.7465)	3.4019 (0.0651)	3.5065 (0.1732)	10.2798 (0.1134)	0.0090	2.1463e-09	1.1331e-05	#	#	#
CAViAR Asímetrico	0.9%	0.1045 (0.7465)	3.4019 (0.0651)	3.5065 (0.1732)	13.2800 (0.0388)	0.0090	2.1585e-09	1.1637e-05	#	#	#
CAViAR Indirect GARCH	1.3%	0.8306 (0.3621)	6.7973 (0.0091)	7.6278 (0.0221)	36.6496 (0.0000)	0.0130	4.2105e-09	9.2532e-06	#	#	#
CARES Simétrico	#	#	#	#	#	#	#	#	-0.8707 (0.1215)	#	#
CARES Asímetrico	#	#	#	#	#	#	#	#	-0.7419 (0.2992)	#	#
CARES Indirect GARCH	#	#	#	#	#	#	#	#	-0.1216 (0.5298)	#	#
CARE Simétrico	#	#	#	#	#	#	#	#	#	62	6.0190e-07
CARE Asímetrico	#	#	#	#	#	#	#	#	#	225	2.0601e-06
CARE Indirect GARCH	#	#	#	#	#	#	#	#	#	66	6.1583e-07

Tabla 39: Estadísticos correspondientes a los diferentes contrastes de backtesting (con sus p-valores asociados entre paréntesis) para los distintos modelos de predicción del VaR y promedios de las funciones de pérdida para las diferentes medidas de riesgo $VaR_1\%$, $ES_1\%$ y $Expectil_1\%$ para el bono alemán a 10 años. En la 1ª columna se recoge el ratio de violaciones π , en las columnas 2 a 5 se recogen los contrastes de validación del VaR, Kupiec (LR_{uc}), Christoffersen (LR_{ind} , LR_{cc}) y Engle & Manganelli (DQT). Las columnas 6 a 8 corresponden a las funciones de pérdida para el VaR, la columna 9 corresponde al contraste de Righi & Ceretta (2015) para el ES, la columna 10 al contraste de Bellini & Di Bernardino para el Expectil y la última columna a la función de pérdida asociada al Expectil. Se resalta en color rojo, como algo negativo, los modelos que no pasan el test correspondiente a un nivel de significación $p = 1\%$ y en color azul, como algo positivo, las funciones de pérdida que menores valores presentan. El guión hace referencia a que no se ha podido establecer un dictamen debido a alguna indeterminación matemática (0^0) en el cálculo del estadístico del test correspondiente, con lo cual no hay un valor posible. La almohadilla indica que no procede tener un dato ahí.