

SUPERFICIES ASOCIADAS A NUDOS

por

Laura Restrepo Mazo

Trabajo presentado como requisito parcial
para optar al Título de

Magister en Matemáticas

Director(a): Margarita Toro Villegas

Universidad Nacional de Colombia
Sede Medellín

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

2010

Resumen

El estudio de las superficies asociadas a nudos ha sido muy importante en la teoría clásica de nudos, pues de ellas se derivan invariantes y propiedades que han permitido estudiar la clasificación y la existencia de los nudos y enlaces. En este trabajo se estudian las superficies asociadas a nudos clásicos en general, interpretando algunos invariantes de nudos y enlaces provenientes de ellas. Se presenta el algoritmo de Killian Michael O'Brien para calcular una matriz de Seifert de un nudo, usando el lenguaje de los nudos combinatorios, y se retoman algunos resultados y procesos de dicho algoritmo con el fin de formular condiciones suficientes y necesarias para determinar si un nudo combinatorio no trivial es realizable en el plano. Además, se construye con éste lenguaje una triangulación para la Superficie Canónica de un nudo clásico con el objetivo de crear un proceso análogo para caracterizar una Superficie Canónica asociada a un nudo virtual.

Contenido

Introducción	vii
1 Conceptos básicos	1
1.1 Preliminares	1
1.2 Superficies	2
1.3 Superficies de Seifert	5
1.3.1 Algoritmo de Seifert	5
1.3.2 Matriz de Seifert	7
1.4 Nudos Combinatorios	9
2 Géneros de un enlace L	11
2.1 Definiciones y propiedades	11
2.2 Géneros de enlaces y nudos especiales	15
3 Algoritmo para calcular la matriz de Seifert	20
3.1 Grafos asociados al diagrama de un nudo	20
3.1.1 Grafo anidado	21
3.1.2 Grafo de Seifert	22
3.2 Algoritmo a partir del nudo combinatorio	24
3.2.1 Aristas del diagrama de un nudo a partir del nudo combinatorio	25
3.2.2 Cómo determinar los círculos de Seifert a partir del nudo combinatorio	25
3.2.3 Cómo determinar el grafo anidado	26
3.2.4 Cómo fijar un diagrama D' dado un nudo combinatorio	29

3.3	Caminos en la superficie de Seifert	32
3.4	Cálculo de los números de enlace	34
3.5	Resumen y ejemplo	50
3.5.1	Ejemplo: Nudo Trébol (3_1)	51
3.6	Matriz de Seifert a partir de diagramas sin círculos de Seifert anidados	53
3.6.1	Fórmula de Kauffman	56
3.6.2	Fórmula de Burde y Zieschang.	56
4	Nudos Virtuales	61
4.1	Cuándo un nudo combinatorio no trivial es realizable	62
4.2	Superficies y nudos virtuales	63
4.2.1	Superficie de Carter	64
4.2.2	Superficies Canónicas	65
4.2.2.1	Triangulación de la superficie canónica de un nudo clásico	66
4.2.2.2	Triangulación de la superficie canónica de un nudo virtual.	70
4.3	Conclusiones	71
	Bibliografía	73

Agradecimientos

Quiero agradecer a todas las personas que de una u otra forma me apoyaron en la realización de este trabajo. Entre los más destacados:

A la doctora Margarita María Toro Villegas, por permitirme desarrollar esta tesis bajo su dirección. Mi estudio con ella durante estos meses fueron un gran aporte a mi carrera como Matemática y su interés y entusiasmo hicieron que valorara cada vez mas todas las etapas de mi trabajo de grado.

A la profesora Débora Tejada Jiménez y al profesor Jose Gregorio Rodríguez Nieto por el desempeño como jurados. Gracias y por sus importantes aportes para mejorar el trabajo.

A mi familia por el apoyo incondicional que me han brindado para que pueda ejercer mi condición de estudiante sin dificultades externas a las académicas.

A todos los profesores de la Maestría, quienes me han apoyado de la mejor manera a culminar esta etapa de estudio.

A mis compañeros de la Maestría con quienes compartí todos mis momentos de estudio. En especial a Natalia Agudelo, por su amistad y ayuda.

A Juan Camilo Pérez Muñoz, por su compañía, la cual valoro con amor, y por la colaboración con asuntos técnicos de la tesis.

Introducción

El objetivo principal de la teoría de nudos y enlaces ha sido la clasificación de los mismos. A través de la búsqueda de sus características y propiedades, se ha llevado un trabajo conjunto con otras áreas del conocimiento. Una de las más importantes es la topología y en particular las superficies, las cuales han servido de base para construir y estudiar invariantes de nudos. Este trabajo aborda la relación entre los nudos y las superficies, teniendo como primer objetivo la revisión de los estudios realizados desde el campo de las superficies con enfoque a la teoría de nudos.

Un nudo K se define desde la teoría clásica como un embebimiento continuo e inyectivo del círculo unitario en \mathbb{R}^3 ó S^3 . Recientemente se ha estado estudiando una clase de embebimientos del círculo unitario en otras 3-variedades, conocida como la teoría de nudos virtuales. Dicha teoría, introducida por Kauffman en [15], se ha considerado como una generalización del estudio de los nudos, donde la teoría clásica se ubica como una de sus categorías. Motivados por los resultados en [28], donde se usa la noción de nudo combinatorio como herramienta para el estudio de los nudos virtuales, queremos relacionar y extender algunos resultados de las superficies asociadas a nudos clásicos en el mundo de los nudos virtuales.

En el Capítulo 1 se exponen los conceptos básicos de la teoría clásica de nudos y algunas nociones topológicas de las superficies que necesitaremos para el estudio de nudos. Se consideran los nudos clásicos en \mathbb{R}^3 y se da la definición de superficie asociada a un nudo. Se explica también el algoritmo de Seifert para construir la superficie canónica de un nudo, el cual es la prueba del teorema que afirma que todo enlace tiene una superficie canónica. Posteriormente se define la Matriz de Seifert, la cual ha sido la puerta de importantes invariantes y que se calcula a partir de una superficie asociada a un nudo. Por último se introduce los conceptos de nudo combinatorio y nudo virtual, necesarios para el desarrollo de los Capítulos 3 y 4.

El Capítulo 2 enfoca la atención en el invariante de enlaces más directamente relacionado con las superficies: el género de un enlace. Se define ésta noción y se estudian sus propiedades haciendo una revisión bibliográfica, exponiendo ejemplos de nudos y enlaces cuyos géneros presentan características especiales.

Como se menciona, la Matriz de Seifert ha sido una herramienta fundamental en la búsqueda de invariantes de nudos, por lo que surgió la necesidad de encontrar un cálculo rápido de la misma, por tanto el problema de implementar un algoritmo que calcule fácilmente la matriz de Seifert ha sido objeto de gran interés en el estudio de la teoría de nudos. Los alcances encontrados en la bibliografía, y el deseo de aproximarse a resultados propios muestran que desde los orígenes del problema (hace ya más de 7 décadas), los caminos encontrados para implementar un algoritmo han llevado a algunos investigadores a usar otras herramientas y otras técnicas,

por ejemplo, Burde y Zieschang en [2], al igual que Kauffman en [14], exponen fórmulas con las cuáles se puede calcular la matriz de Seifert de un nudo con modificaciones previas del diagrama. Otro ejemplo es el trabajo de la matemática Julia Collins de la Universidad de Edimburgo, quien en el 2007 presentó un algoritmo para calcular la matriz de Seifert de un nudo, pero a partir de su representación en trenza. Collins trabajó de la mano de los creadores de *Seifert View*, un programa implementado para visualizar las superficies canónicas (superficies de Seifert) asociadas a un nudo, que maneja como entrada también la representación en trenza. La interfase gráfica de dicho algoritmo puede verse fácilmente en www.maths.ed.ac.uk/~s0681349/SeifertMatrix/, y el programa SeifertView es de libre acceso en Internet. Pero de nuevo, para obtener la representación en trenza de un nudo se debe aplicar otro procedimiento, entre los más conocidos para hacerlo está, el Algoritmo de Alexander, [23], o el algoritmo de Vogel que puede consultarse en [32]. El Capítulo 3 de ésta tesis está dedicado prácticamente a desarrollar el algoritmo implementado en 2002 por Killian Michael O'Brien en [26, Capítulo 2], que es un práctico algoritmo que calcula directamente la matriz de Seifert sin alterar previamente el diagrama, por ello, el interés de trabajar con este método. Uno de los aportes de la tesis fue modificar el lenguaje usando los nudos combinatorios, lo que llevó a una gran simplificación del procedimiento con fácil programación en un computador. Al final del Capítulo explicamos las fórmulas de Burde y Zieschang y de Kauffman que acabamos de mencionar con el fin de brindar otros métodos.

El Capítulo 4 estará dividido en dos secciones. En éste punto se distingue entre nudo *realizable* y nudo *virtual*, y se dice que un nudo *realizable* es un nudo cuyo diagrama se puede dibujar sin problemas en el plano $z = 0$. La intención principal en la primera sección es extender los resultados e ideas del algoritmo de la matriz de Seifert desarrollado en el Capítulo 3, para dar condiciones necesarias y suficientes para determinar cuándo un nudo combinatorio no trivial, es realizable o no. En la segunda sección queremos relacionar las superficies y los nudos virtuales. Se estudiará entonces la superficie de Carter explicando brevemente el algoritmo para su construcción, [3]. Luego, se construye una superficie canónica asociada a un nudo virtual por medio de una triangulación. Para ello daremos primero la triangulación de la superficie canónica en el caso clásico y así, intentar hacer un procedimiento análogo en el caso virtual. Se muestra entonces que se pueden seguir los mismos pasos hasta llegar a la forma de pegar las caras de la triangulación, lo que da como resultado, una superficie no orientable, embebida en \mathbb{R}^4 . Es decir, se construye una superficie, no orientable, asociada a un nudo virtual. Los resultados de las Secciones 4.1 y 4.2, excepto los que tienen relación con la superficie de Carter, son aportes originales de la tesis.

Capítulo 1

Conceptos básicos

En éste capítulo revisaremos algunos conceptos básicos de la teoría clásica de nudos. Incluiremos definiciones y nociones de nudo, enlace, proyección regular, entre otras. Con el fin de abordar nuestro estudio, haremos una breve explicación sobre las propiedades topológicas de las superficies que utilizaremos o mencionaremos a lo largo del trabajo. Además enunciaremos el teorema de la curva cerrada de Jordan, ya que es una herramienta importante para justificar algunos argumentos que daremos mas adelante. Luego diremos qué es una superficie asociada a un nudo y explicaremos el conocido algoritmo de Seifert para construir una de las superficies de nuestro mayor interés: la superficie canónica y, con ella, la definición de la Matriz de Seifert. Por último, introduciremos el concepto de nudo combinatorio y nudo virtual. Las definiciones se enunciarán en forma general, sin entrar en ésta parte en muchos detalles de la teoría de nudos virtuales.

1.1 Preliminares

Revisaremos rápidamente algunos conceptos básicos de la teoría clásica de nudos que necesitaremos en el transcurso del trabajo.

Un nudo K es un subconjunto de \mathbb{R}^3 homeomorfo a un círculo. Un enlace, es una unión disjunta y finita de nudos $L = K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_n$. Cada nudo K_i es llamado componente del enlace. Diremos que dos enlaces L_1 y L_2 son ambiente isotópicos si existe una isotopía $h : \mathbb{R}^3 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $h(L_1, 0) = h_0(L_1) = L_1$ y $h(L_1, 1) = h_1(L_1) = L_2$. Una isotopía ambiente de un subconjunto $X \subset \mathbb{R}^3$ es una isotopía de \mathbb{R}^3 que envía a X en sí mismo.

Un diagrama D de un nudo K es una proyección regular del nudo sobre el plano $z = 0$, donde cada punto doble en la proyección se convierte en un *cruce* del diagrama y usamos la convención de cortar el arco del nudo que pasa por debajo, ver Figura 1-5.

Ahora, sea D un diagrama orientado de un enlace de dos componentes $K_1 \cup K_2$, y sea D_i

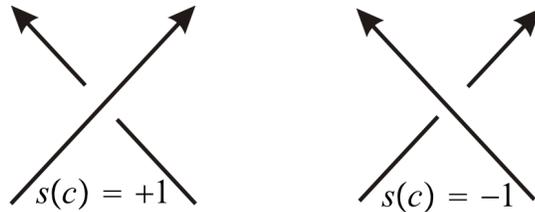


Figura 1-1: Definición de número de enlace.

la componente de D correspondiente de K_i , $i = 1, 2$. Los cruces de D son de tres tipos: D_1 con sí mismo, D_2 con si mismo y D_1 con D_2 . Denotemos el conjunto de D_1 con D_2 como $D_1 \cap D_2$. El número de enlace de D_1 con D_2 está definido como

$$Link(D_1, D_2) = \frac{1}{2} \sum_{c \in D_1 \cap D_2} s(c),$$

donde $s(c) = +1$, si c es un cruce positivo, $s(c) = -1$, si c es un cruce negativo, como se muestra en la Figura 1-1.

Mencionemos ahora el teorema de la curva cerrada de Jordan, que es un importante resultado que utilizaremos para justificar varios argumentos mas adelante.

Teorema 1.1.1 (Teorema de la curva cerrada de Jordan) .*Toda curva simple cerrada en el plano, divide el plano en dos componentes conexas. (Ver por ejemplo [33])*

1.2 Superficies

Las propiedades topológicas de los nudos están directamente relacionadas con las propiedades de las superficies en general, por ello juegan un papel fundamental en el estudio de la teoría de nudos. Una superficie es una 2-variedad compacta que posee una estructura que sólo depende de ella misma y no del espacio donde esté embebida, [4]. Es decir, una superficie tiene propiedades intrínsecas que nos permiten distinguirla de otra, las cuáles comentaremos brevemente a continuación. Para pruebas de estos resultados se puede consultar [18].

Orientación: Una vecindad de un punto en una superficie puede ser orientada en el sentido de las manecillas del reloj o contrario a ellas. Entonces a cada punto de la superficie le podemos

asignar alguna de esas dos orientaciones y localmente es posible que todas las orientaciones coincidan en una pequeña vecindad. Si es posible orientar toda la superficie coherentemente, ésta se llama *superficie orientable*, y cuando la escogencia coherente de la orientación esté hecha se dirá *orientada*. El ejemplo clásico de una superficie *no orientable* es la Cinta de Möbius, donde no es posible mantener una orientación consistente sobre toda la superficie. Otra forma de reconocer si una superficie es orientable, es determinar si los dos lados de la superficie se pueden pintar con dos colores distintos sin que ellos se toquen. Los dos lados usualmente son llamados positivos y negativos. Una orientación en la superficie determina una orientación en su frontera.

Nosotros estamos usualmente familiarizados con superficies como la Esfera, el Toro, el Disco, el Anillo. Todas éstas son superficies orientables y conexas y las usaremos para explicar otras dos propiedades para distinguirlas:

Componentes de la frontera: La esfera y el Toro son superficies cerradas, no tienen frontera. Pero el Disco y el Anillo sí tienen componentes en la frontera, el Disco uno y el Anillo, dos.

Conexidad: Para medir la conexidad de una superficie, la cortamos a lo largo de curvas cerradas y arcos propiamente embebidos. Entonces hay un número máximo de cortes que podemos hacer antes de que la superficie quede desconexa: éste número es un invariante topológico de la superficie. Notemos que en la esfera no podemos hacer ningún corte ya que ella no tiene frontera y por tanto no tiene arcos propiamente embebidos y todas las curvas cerradas la separan en dos piezas. En el caso del Toro, un meridiano m y una longitud l son ejemplos de curvas que no separan la superficie, es decir, cuando cortamos el Toro a lo largo de dichas curvas lo podemos abrir en un rectángulo, por tanto no queda desconexo. Pero un conjunto de más de tres curvas cerradas en el Toro sí pueden desconectarlo. Por tanto el número máximo de cortes es 2.

Género: En una superficie orientable las curvas que separan la superficie siempre aparecen en parejas. Así, una superficie orientable siempre tiene un número par de curvas cerradas que la separan (desconectan), digamos $2g$. El número g es llamado el *género de la superficie*. Otra manera de pensar en el género de una superficie es contar el número de “túneles” independientes a través de la superficie o, equivalentemente, el número de asas independientes que tenga. Una

asa es precisamente una parte tubular de la superficie, ver Figura 1-2. Lo anterior, se resume

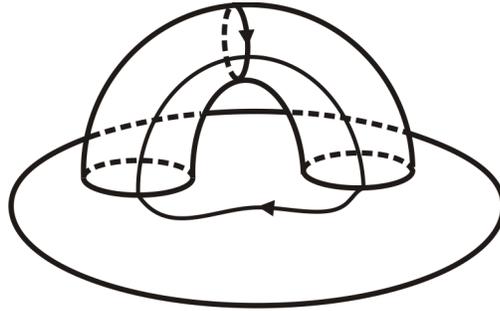


Figura 1-2: Cada asa en una superficie contribuye dos curvas que la separan.

en el siguiente teorema, [4].

Teorema 1.2.1 (Teorema de Clasificación de Superficies) *Dos superficies son topológicamente equivalentes si y sólo si ellas tienen el mismo género, el mismo número de componentes de la frontera y si ambas son orientables o no.*

Otra característica de las superficies que nos interesa relacionar con los nudos es el concepto de *compresibilidad*.

Definición 1.2.1 *Una superficie F , embebida en una 3-variedad M , es compresible si satisface alguna de las siguientes afirmaciones:*

1. F es una 2-esfera y acota una 3-bola en M ;
2. F es un disco en ∂M ;
3. F es un disco propiamente embebido en M y hay una 3-bola en M cuya frontera está contenida en $F \cup \partial M$;
4. F no es una 2-esfera o un disco, y existe un disco $\Delta \subset M$ tal que $\Delta \cap F = \partial\Delta$ y $\partial\Delta$ es una curva cerrada esencial en F , es decir, $\partial\Delta$ no acota un disco en F .

Una superficie que no sea compresible se llama *incompresible*.

Ejemplo

En la Figura 1-3 se muestra posibles superficies compresibles F_1 , F_2 , y F_3 , embebidas en la 3-variedad $M = \text{Toro macizo}$. F_1 es un *disco* en la frontera de M , F_2 es una *2-esfera* que acota una 3-bola en M , F_3 es un disco propiamente embebido en M y $F_3 \cup \partial M$ contiene la frontera de una 3-bola en M .

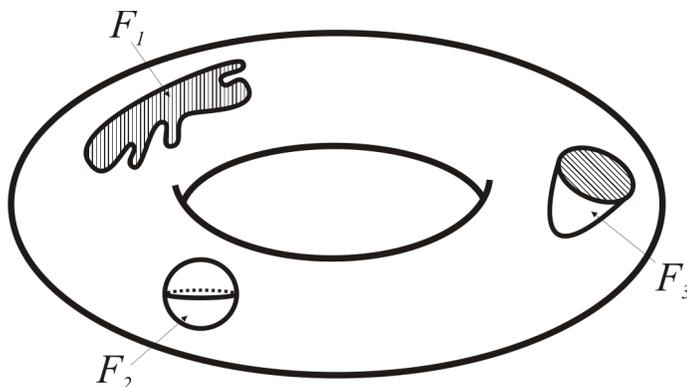


Figura 1-3: Superficies compresibles F , embebidas en un Toro macizo M .

1.3 Superficies de Seifert

En esta sección nos concentraremos en las *superficies asociadas a nudos*, frecuentemente llamadas *superficies de Seifert*. Una superficie orientable F es una *superficie de Seifert* para un enlace L , si la frontera de F , ∂F , es ambiente isotópica a L . Un enlace puede tener diferentes superficies de Seifert asociadas. Una de las superficies más importantes es *la superficie Canónica* de L que es una superficie de Seifert pero construida con el algoritmo de Seifert el cual explicaremos a continuación. Cabe anotar que de aquí en adelante nos concentraremos en trabajar sólo con nudos, pero, para enlaces se tienen resultados análogos. Ver [6].

1.3.1 Algoritmo de Seifert

El algoritmo de Seifert es un procedimiento para construir la *superficie canónica* de un nudo K a partir del diagrama del nudo. Es decir, dado un nudo cualquiera K siempre es posible

encontrar una superficie canónica asociada a K . Este resultado fue probado primero por Felix Frankl y Lev Pontrjagin en 1930, pero la prueba más conocida es la de Herbert Seifert en 1934 quien dio el un algoritmo explícito para encontrar tal superficie, el cual daremos a continuación:

Sea K un nudo en \mathbb{R}^3 y esojamos una orientación para el nudo K . Dibujemos un diagrama D para K en el plano xy . En una vecindad de cada cruce se hace el siguiente cambio: se borra el cruce y se reconectan los puntos finales preservando la orientación, ver Figura 1-4

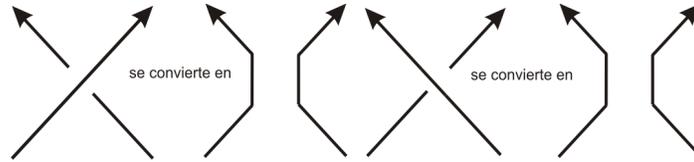


Figura 1-4: Cómo se modifican los cruces del diagrama.

Con el proceso anterior construimos una colección de discos disjuntos en el plano y nos referiremos a ellos como *los círculos de Seifert del diagrama D* , denotados con la letra C . Dichos círculos pueden estar anidados. A la colección de círculos de Seifert de D la denotaremos por \mathcal{C} y para cada $C \in \mathcal{C}$, F_C es el disco cuya frontera es C , que llamaremos *disco de Seifert*. Esta prueba puede encontrarse en [6].

Por ejemplo, para el diagrama del nudo 7_6 , ver Figura 1-5 (a), los círculos de Seifert se muestran en la Figura 1-5 (b).

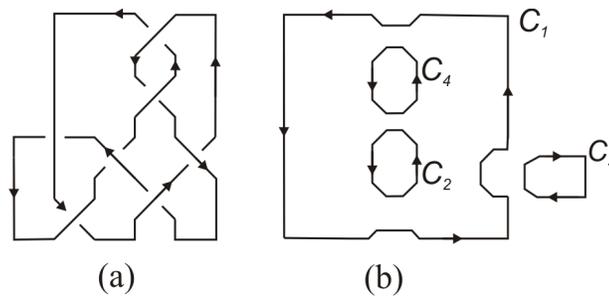


Figura 1-5: Círculos de Seifert en un diagrama del nudo 7_6 .

A continuación definimos una función $h : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{N}_0$ que la llamaremos *función altura* así:

$$\forall C \in \mathcal{C}, h(C) = \text{número de círculos de Seifert que contienen a } C. \quad (1.1)$$

Para el ejemplo de la Figura 1-5: $h(C_1) = 0, h(C_2) = 1, h(C_3) = 0, h(C_4) = 1$

¿Cómo construir la superficie? Para cada círculo de Seifert C tomamos un disco F_C en el plano $z = h(C)$ tal que ∂F_C sea C . Esta colección de discos vive en \mathbb{R}_+^3 y los discos están dispuestos de tal forma que cuando los vemos desde arriba, la frontera de cada disco es visible. Los discos heredan la orientación del diagrama: si la frontera del disco está orientada en sentido de las manecillas del reloj, cuando miramos desde arriba, entonces la cara superior del disco es coloreada blanca; de otra manera es coloreada negra (blanca=positiva, negra=negativa). Luego, por cada cruce pegamos una banda girada, (ver Figura 1-6) uniendo los círculos de Seifert y teniendo en cuenta que cada banda debe estar en el lugar que le corresponde a cada cruce. Si una banda conecta dos discos que están a la misma altura, los discos deben tener diferente color en la cara superior; cualquier otra banda conectará dos discos cuyas alturas difieran en 1. Estos discos tendrán el mismo color en la cara superior y las bandas deben estar pegadas de acuerdo con esto. Así, la superficie que se forma queda orientable. La Figura 1-7, se muestra la superficie canónica del nudo Trebol (3_1).

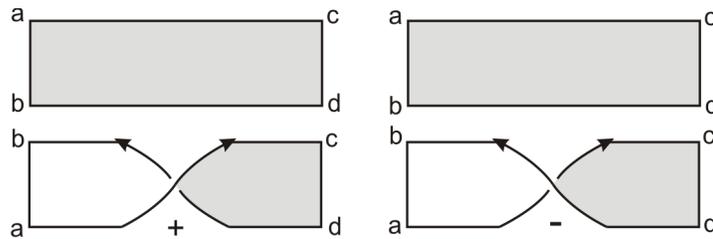


Figura 1-6: Bandas de Seifert

1.3.2 Matriz de Seifert

Para calcular la matriz de Seifert usamos la superficie canónica que acabamos de construir. Sea F una superficie canónica de un enlace K . “Engordaremos” a F , considerando $F \times [-1, 1]$ de la siguiente manera: sea $\beta : F \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ un homeomorfismo tal que $\beta(F \times \{0\}) = F$



Figura 1-7: Superficie canónica del Trebol.

y $\beta(F \times \{1\})$ cae en el lado positivo de F . Ahora, cualquier subconjunto X de F puede ser empujado a cualquier lado de la superficie, entonces llamemos $X^+ = \beta(F \times \{1\})$, cuando empujamos hacia el lado positivo y $X^- = \beta(F \times \{-1\})$, hacia el negativo. Entonces definamos el mapeo

$$\begin{aligned} \theta : H_1(F) \times H_1(F) &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ (a, b) &\longmapsto \text{Link}(a, b^+) \end{aligned}$$

donde $\text{Link}(a, b^+)$ es el número de enlace entre los ciclos a y b^+ . Si tomamos una base $\alpha = \{a_1, \dots, a_{2g}\}$ del primer grupo de homología, $H_1(F)$, la *matriz de Seifert* (asociada a la base α) será $M = [\theta(a_i, a_j)]$, para $i, j = 1, \dots, 2g$.

El estudio de la matriz de Seifert ha sido muy importante porque a partir de ella se han obtenido invariantes para clasificar los nudos y enlaces. Dicha matriz no es propiamente un invariante, pues para un mismo enlace pueden existir diferentes matrices asociadas, ya que, como dijimos antes, un enlace puede ser frontera de superficies diferentes, pero existe una relación de equivalencia entre matrices de un mismo enlace: dos matrices M_1 y M_2 son *S-equivalentes* si están relacionadas por una secuencia finita de operaciones de alargamiento o reducción de filas o columnas ([6, Capítulo 6]) o si existe un matriz $P \in GL(n, \mathbb{Z})$ tal que $M_1 = P^T M_2 P$.

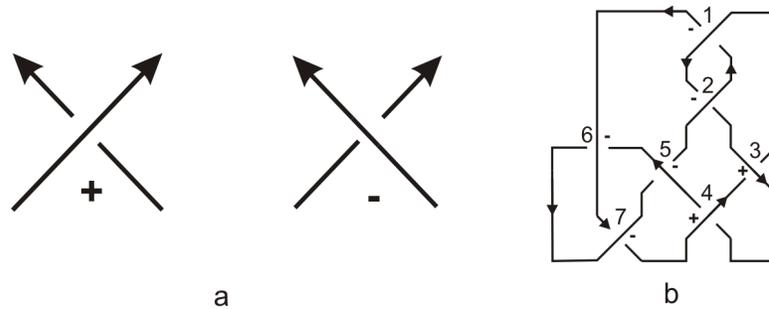


Figura 1-8: a) Tipos de cruces. b) Ejemplo de cómo numerar los cruces en un diagrama del nudo 7_6 .

1.4 Nudos Combinatorios

Un nudo combinatorio es básicamente un código que representa un nudo y se halla a partir de un diagrama del mismo. Daremos la definición por medio de un ejemplo para facilitar su comprensión. Dicho código también es comúnmente llamado el Código de Gauss. Utilizaremos la codificación que nos ofrecen los nudos combinatorios para construir un algoritmo que nos permita calcular la matriz de Seifert de un nudo en forma automática y además, extenderemos algunos resultados para el caso de los nudos virtuales, lo cuál nos motiva a hacer en ésta sección la definición de nudos virtuales.

Sea K un nudo y D su diagrama orientado, con m cruces. Definiremos un código para representar K , el cual llamaremos *nudo combinatorio*. Nombremos los cruces de 1 a m recorriendo el diagrama según su orientación, empezando en cualquier cruce. La Figura 1-8 b) muestra el diagrama del nudo 7_6 . Además cada cruce lo llamaremos del tipo $+$ ó $-$, según la Figura 1-8 a)

El código tendrá la forma

$$K = \{ \{ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \}, \{ s_1, s_2, \dots, s_m \} \}$$

donde

$$\alpha_i = \begin{cases} j, & \text{si pasamos por encima en el cruce } j \\ -j, & \text{si pasamos por debajo en el cruce } j \end{cases} \quad s_k = \begin{cases} 1, & \text{si el cruce } i \text{ es positivo} \\ -1, & \text{si el cruce } i \text{ es negativo} \end{cases}$$

para $i = 1, \dots, 2m$ y $k = 1, \dots, m$. El código lo creamos así: α_1 será cualquier cruce y para cualquier $\alpha_i, 1 \leq i < 2m$, α_{i+1} será el próximo cruce que nos encontremos después de α_i cuando recorremos el diagrama en la dirección definida. El nudo combinatorio para el ejemplo del nudo 7_6 es

$$7_6 = \{\{1, -2, 3, -4, 5, -6, 7, -5, 2, -1, 6, -7, 4, -3\}, \{-1, -1, 1, 1, -1, -1, -1\}\}.$$

Cabe anotar que ésta codificación depende de varias cosas: del punto de dónde empecemos a hacer la numeración en el diagrama, del diagrama, de la numeración, etc., es decir, pueden existir dos codificaciones distintas del mismo nudo. Pero para resolver esos problemas se define una relación de equivalencia entre nudos virtuales que puede consultarse en [28].

Capítulo 2

Géneros de un enlace L

Uno de los objetivos centrales de la teoría de nudos y enlaces es la clasificación de los mismos y para ello se han buscado múltiples invariantes. En este capítulo nos concentraremos en el estudio de uno de ellos: el género de un enlace, que se deriva de las superficies de Seifert. Debido a la variedad de restricciones sobre las superficies de Seifert hay distintas clases de géneros para un enlace L . La primera noción de género de un enlace la introdujo H. Seifert en 1934, [30], y es una propiedad intrínseca de las superficies asociadas a los enlaces, es decir no depende del diagrama escogido para L , pero sí depende del tipo de superficie de Seifert de L .

Principalmente nos enfocaremos en definir los géneros, interpretaremos sus propiedades y haremos una recopilación de resultados y ejemplos de nudos cuyos géneros tienen características particulares. No haremos las pruebas de dichos resultados porque no están al alcance de éste trabajo, pero daremos referencias completas.

2.1 Definiciones y propiedades

Antes de definir las distintas clases de géneros para un enlace L probaremos la siguiente propiedad de las superficies canónicas. Recordemos que una superficie se dice canónica si es una superficie de Seifert de L construida con el algoritmo de Seifert. Usaremos la prueba de Hirasawa en [11].

Lema 2.1.1 *Toda superficie canónica F para L es planar, es decir, F es isotópica a una superficie que puede embeberse en el plano excepto en las vecindades de los cruces.*

Prueba. Comenzamos aplicando el algoritmo de Seifert a un diagrama D de L . Sean C_1, C_2, \dots, C_k los círculos de Seifert, y E_1, E_2, \dots, E_k los discos de Seifert. Definamos

$$r(C_i) = \text{número máximo de círculos contenidos en } C_i \text{ concéntricamente.}$$

Sea $r(D) = \max\{r(C_i) : C_i \text{ es un círculo de Seifert de } D\}$. Probaremos el lema por inducción sobre $r(D)$. Si $r(D) = 0$ entonces el diagrama no tiene círculos de Seifert anidados, por tanto la superficie es planar. Supongamos que la afirmación es cierta cualquier superficie cuyo diagrama D cumple que para $r(D) \leq n$. Veamos que es cierta para $r(D) = n + 1$.

Sea F una superficie obtenida de un diagrama D con $r(D) = n + 1$ y sea C_i el círculo de Seifert tal que $r(D) = r(C_i) = n + 1$. Escojamos un arco β entre los arcos abiertos $C_i \setminus \partial$ (arcos que conectan los círculos de Seifert) y seguimos los siguientes pasos:

a) Hacemos una isotopía en β cerca a $C_i \setminus \beta$ comprimiendo E_i para obtener una “cinta delgada” T . Ver Figura 2-1.

b) Giramos la cinta T en cada vecindad de $T \cap \partial$ (una banda que conecte los círculos que están alrededor de C_i) de acuerdo con la forma en que estén los círculos conectados.

c) “Estiramos T ” y reducimos los giros innecesarios. Figura 2-2.

Con este procedimiento desanidamos el círculo C_i , es decir, $r(C_i) = 0$ entonces el círculo que estaba inmediatamente contenido en C_i tiene ahora $r(D) = n$.

Si hay otro círculo C_j para el cuál $r(D) = r(C_i) = r(C_j) = n + 1$, se repiten los mismos pasos a), b) y c) y se realiza el paso c) donde sea necesario. ■

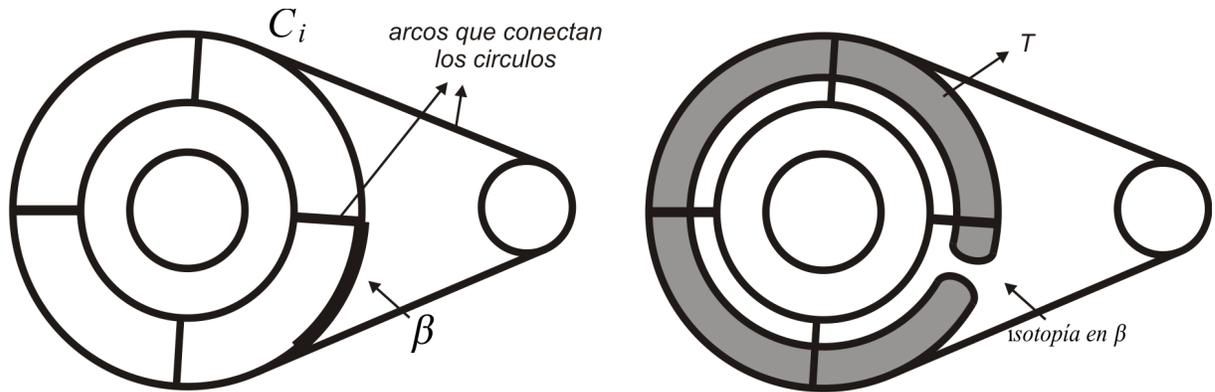


Figura 2-1: Isotopía para obtener una cinta delgada en el disco de Seifert.

En la Figura mostramos un ejemplo de como desanidar los círculos de Seifert del diagrama del nudo 7_6 .

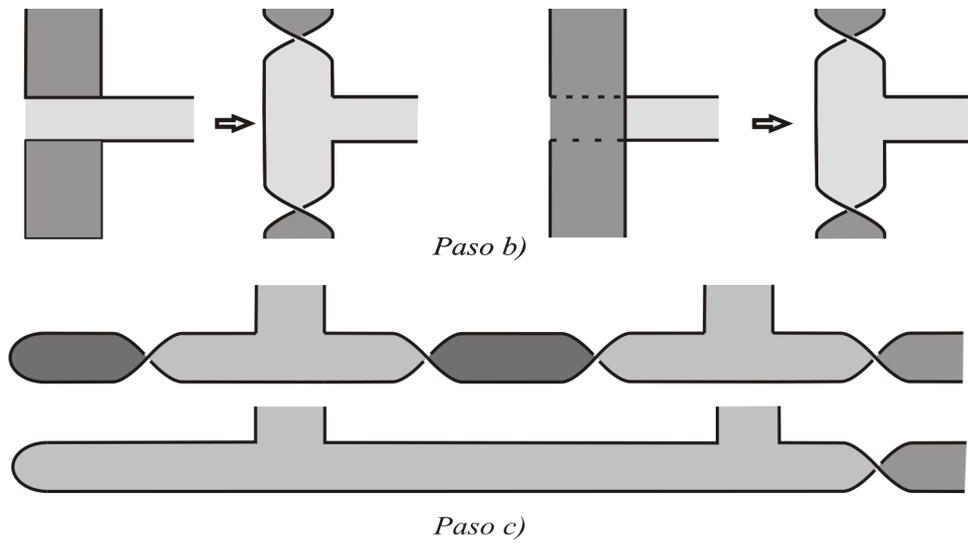


Figura 2-2: b) Cómo girar T en las vecindades de las bandas. c) Eliminar cruces innecesarios.

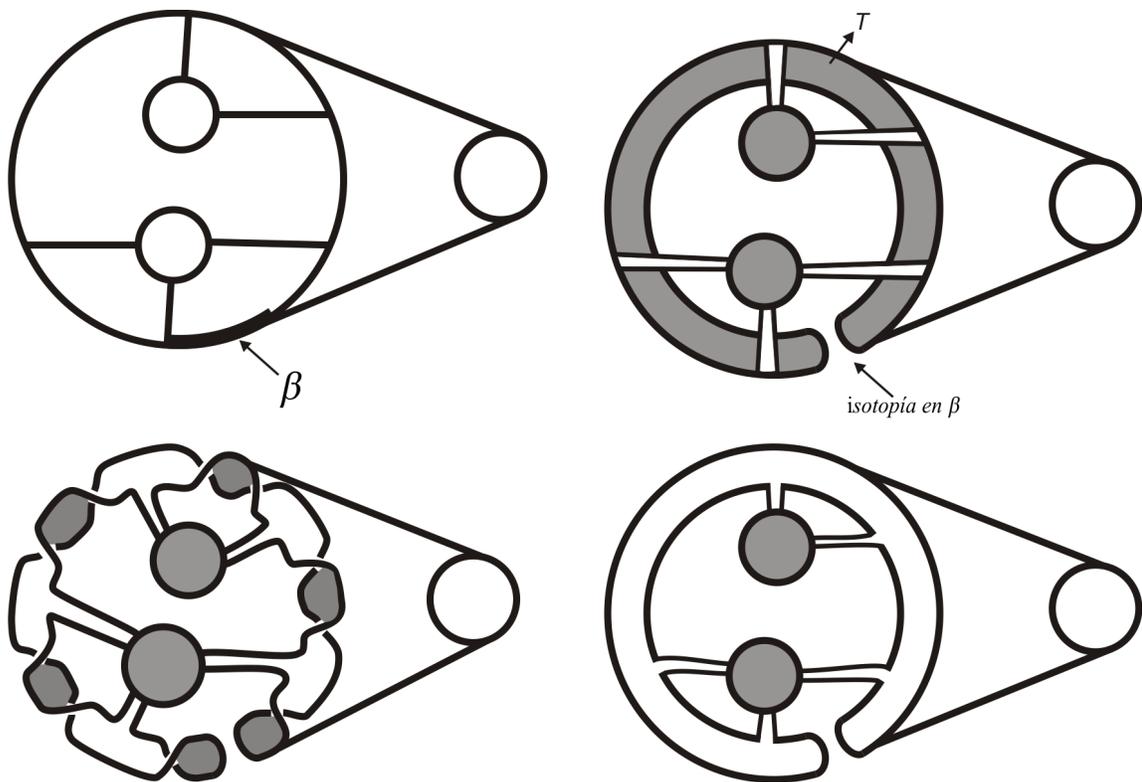


Figura 2-3: Pasos para desanidar los círculos de Seifert del diagrama del nudo 7_6 , usando el lema 2.1.1.

Ahora definamos las distintas nociones de género para un enlace L :

$g(L)$: **Género estándar**. Es el mínimo de los géneros de todas las superficies de Seifert de L .

$g_c(L)$: **Género canónico**. Es el mínimo de los géneros de todas las superficies canónicas de L .

$g_b(L)$: **Género plano**. Es el mínimo de los géneros de todas las superficies canónicas de L pero construidas a partir de un diagrama de L sin círculos de Seifert anidados, es decir, la función altura (ver Capítulo 1) es cero para todos los círculos de Seifert. Esto significa que la superficie de Seifert es planar (puede embeberse en el plano) excepto en vecindades de los cruces. Es claro que el lema anterior nos permite definir este género.

$g_f(L)$: **Género libre**. Es el mínimo de los géneros de todas las superficies de Seifert no anudadas. Una superficie F se dice no anudada o libre si su grupo fundamental $\pi_1(S^3 \setminus F)$ es un grupo libre. Por ejemplo todas las superficies canónicas son no anudadas.

$g_4(L)$: **Género 4-bola**. Es el mínimo de los géneros de todas las superficies de Seifert pero que están embebidas en la bola 4 dimensional. En éste caso el enlace es un subconjunto de $S^3 = \partial B^4$.

Para entender mejor $g_4(L)$ consideremos un ejemplo en una dimensión menor. Supongamos que dos líneas en $S^2 = \partial B^3$ se intersectan transversalmente. Si parte de una de ellas en una vecindad de la intersección es “empujada” hacia el interior de B^3 entonces la intersección puede removerse. Análogamente si dos superficies de S^3 se intersectan transversalmente como se muestra en la Figura 2-4 a) entonces el área de la intersección puede “empujarse” hacia adentro de la 4-bola para remover la intersección. Las intersecciones de las superficies como las de la Figura 2-4 a) se llaman *singularidades de listón*. Una superficie en S^3 donde todas las intersecciones de ella con sí misma son singularidades de listón se llaman *superficies de listón*. Como ejemplo consideremos el nudo en la Figura 2-4 b), es fácil ver que este nudo es la frontera de dos discos conectados por una banda, posiblemente anudada que debe pasar a través de cada disco en una singularidad de listón. Entonces la superficie de listón (dos discos unidos por una sola banda) es topológicamente un disco, luego el nudo acota un disco embebido en B^4 y así se tiene que $g_4 = 0$. Ver [6, Capítulo 5].

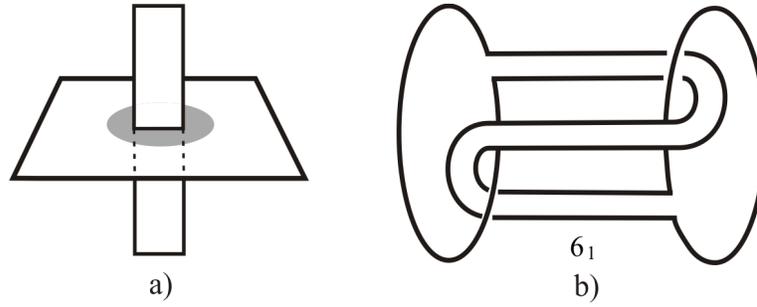


Figura 2-4: Singularidad de listón.

Para un enlace L se tiene que

$$g_b(L) \geq g_c(L) \geq g_f(L) \geq g(L) \geq g_4(L). \quad (1)$$

La primera desigualdad, $g_b(L) \geq g_c(L)$, es clara ya que el conjunto de superficies canónicas construidas a partir de cualquier enlace L contiene el conjunto de superficies canónicas construidas a partir de un diagrama de L que no tenga círculos anidados. Ahora, al construir una superficie F con el algoritmo de Seifert, se ve fácilmente que $S^3 \setminus F$ es un cuerpo con asas y por cada asa hay un generador de $\pi_1(S^3 \setminus F)$, por tanto $\pi_1(S^3 \setminus F)$ es un grupo libre. Así, todas las superficies construidas con el algoritmo de Seifert son libres, entonces $g_c(L) \geq g_f(L)$. Y claramente el género estándar se toma sobre todas las superficies de Seifert de L , luego $g_c(L) \geq g_f(L) \geq g(L)$. La última desigualdad también se ve fácilmente, pues toda superficie de Seifert de L se puede embeber en la bola 4-dimensional.

2.2 Géneros de enlaces y nudos especiales

Analicemos el comportamiento de los géneros en las superficies asociadas a nudos. Primero notemos que del Lema 2.1.1 se concluye inmediatamente el siguiente hecho:

Lema 2.2.1 *Para cualquier enlace L , $g_b(L) = g_c(L)$.*

Es decir, realmente para un enlace L se tiene que

$$g_b(L) = g_c(L) \geq g_f(L) \geq g(L) \geq g_4(L).$$

Sin embargo existen nudos y enlaces con los otros tipos de género distintos. A continuación mostraremos algunos ejemplos de enlaces y superficies de Seifert cuyos tipos de géneros son distintos y presentan propiedades particulares.

Ejemplo 1

En 1987, con el artículo [22], Moriah probó que para cualquier entero positivo n , existe un nudo K tal que $g(K) = 1$ pero $g_f(K)$ es arbitrariamente grande, es decir, $g_f(K) - g(K) \geq n$. Este resultado se tiene para los nudos K que pertenecen a la clase de los enlaces de *Whitehead* con k giros. Un enlace de Whitehead es un enlace que consiste de un nudo trivial y un nudo con k giros, como en la Figura 2-5

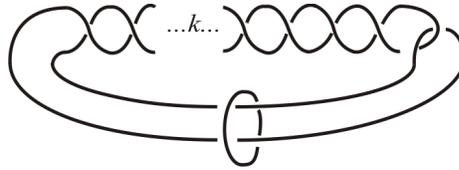


Figura 2-5: Enlace de Whitehead.

Ejemplo 2

Kawauchi en [16], descubrió con resultados sobre polinomios asociados a nudos, que para cualquier entero positivo n , existe un nudo K' con polinomio de Alexander trivial, mostrado en la Figura 2-6 el cual cumple que $g_c(K') - g(K') = 2n$. Esto, contrasta el resultado de Moriah (en el ejemplo anterior) que exhibe un nudo K con polinomio de Alexander no trivial con la misma propiedad, pues por la desigualdad (1) se cumple $g_c(K) - g(K) \geq g_f(K) - g(K) \geq 2n$. El artículo de Kawauchi también muestra, en particular, que si K' es el nudo *doble trébol* entonces $g(K') = 1$, $g_f(K') = 2$ y $g_c(K') = 3$ y este es un ejemplo de que existen nudos que no tienen la superficie canónica como la superficie de género minimal.

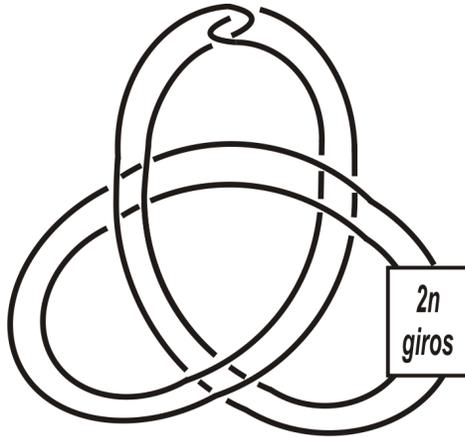


Figura 2-6: Nudo doble trebol, K' .

Ejemplo 3

Mosako Kobayashi y Tsuyoshi Kobayashi en [19] probaron el siguiente teorema:

Teorema 2.2.2 *Sea K_n un nudo como el de la Figura 2-7 con $n \neq 0, 1$ y sea $K_{m,n}$ una suma conexas de m copias de K_n . Entonces se tiene*

$$g_c(K_{m,n}) = 3m, \quad g_f(K_{m,n}) = 2m \quad \text{y} \quad g(K_{m,n}) = m$$

Las igualdades $g_c(K_{m,n}) = 3m$ y $g(K_{m,n}) = m$ se tiene del trabajo de Kawauchi en [16]. El resultado principal de [19] es la igualdad $g_f(K_{m,n}) = 2m$.

Ejemplo 4

En 1971, Herbert C. Lyon [20], prueba dos resultados, el primero afirma que existen infinitos nudos K en la clase de los nudos primos de Neuwirth, que contienen en su complemento $C = \overline{S^3 \setminus V(K)}$ una superficie cerrada, incompresible y de género arbitrariamente alto. En el segundo resultado, construye teóricamente una superficie de Seifert incompresible de género arbitrariamente alto del nudo 9_{46} , que es un nudo de género $g(9_{46}) = g_c(9_{46}) = 1$. En la Figura 2-8 mostramos el nudo con la superficie canónica.

Ejemplo 5

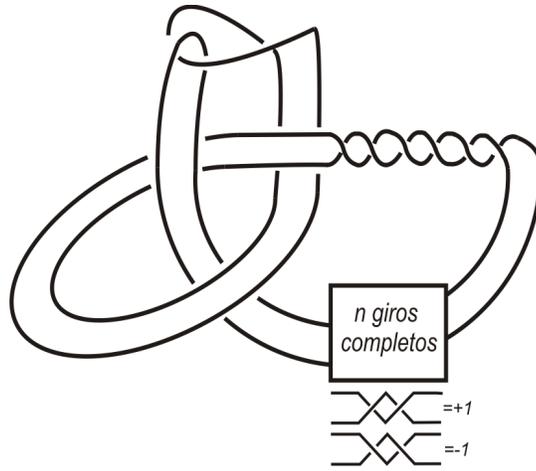


Figura 2-7: K_n

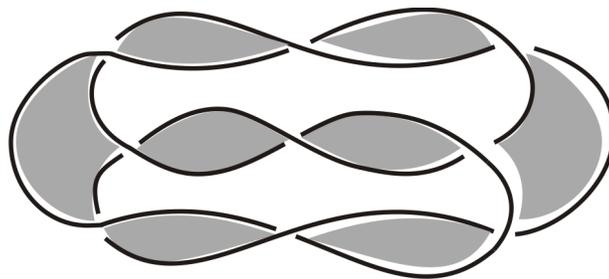


Figura 2-8: Nudo 9_{46} y la superficie de Seifert de género 1.

Schaufele [29], exhibe nudos mansos en S^3 , cuyas superficies de Seifert que proporcionan el género mínimo son las superficies anudadas y también tienen superficies de Seifert no anudadas, incompresibles, de género alto. Como dijimos antes, las superficies canónicas (construidas con el algoritmo de Seifert) son superficies no anudadas para todo nudo. H. Lyon inspirado en estas observaciones se preguntó si cualquier nudo tiene una superficie de Seifert incompresible y no anudada, entonces escribió, en 1972, el artículo [21], presentando como contraejemplo el nudo de la Figura 2-9, el cuál no tiene una superficie de Seifert no anudada e incompresible. Además la prueba que presenta sirve para construir más contraejemplos.

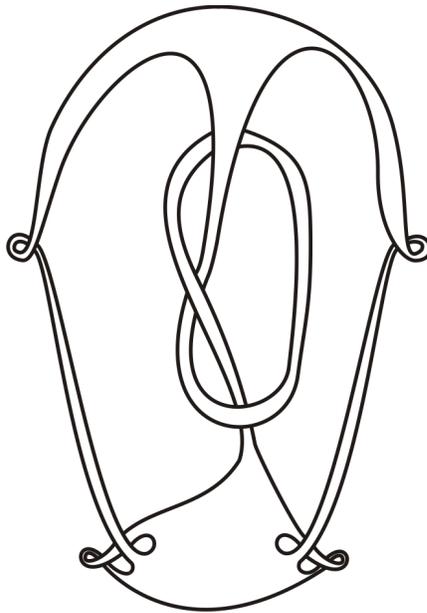


Figura 2-9: Nudo sin una superficie de Seifert incompresible.

Capítulo 3

Algoritmo para calcular la matriz de Seifert

Como ya hemos explicado en la Sección 1.3.1, el algoritmo de Seifert es un procedimiento aplicado sobre un diagrama de un nudo para construir una superficie orientable cuya frontera es ambiente isotópica al nudo. Con algunos de los generadores de su grupo de homología calculamos la matriz de Seifert asociada a un nudo. En este capítulo usaremos la idea principal del algoritmo presentado en el Capítulo 2 de la tesis doctoral de Killian Michael O'Brien [26] para hacer el cómputo de la matriz de Seifert directamente del diagrama, sin tener que calcular los números de enlaces entre los generadores del primer grupo de homología de la superficie de Seifert asociada. Nuestro trabajo principal fue adaptar este algoritmo al lenguaje de los nudos combinatorios, obteniendo un algoritmo “fácil” de programar en el computador. Dicho algoritmo se programó usando el programa *Mathematica*. O'Brien implementó el algoritmo usando Maple.

Como mencionamos antes, para calcular la matriz de Seifert de un nudo K debemos primero aplicar el algoritmo de Seifert, sobre un diagrama de K , para construir la superficie canónica F de K . Luego escogemos un conjunto de ciclos en F que formen una base para $H_1(F)$ y con ellos averiguamos los números de enlaces asociados.

3.1 Grafos asociados al diagrama de un nudo

En esta sección haremos uso de la teoría de grafos asociando dos tipos de grafos a los diagramas de los nudos. Los grafos asociados al diagrama de un nudo brindan una información muy útil para conocer fácilmente los ciclos generadores, ya que se ha probado que los grupos de homología de la superficie de Seifert y de su grafo de Seifert son isomorfos. [33, Corolario 6.4.3]

3.1.1 Grafo anidado

Definición 3.1.1 Sea D un diagrama de un nudo y sea \mathcal{C} la colección de círculos de Seifert de D . El grafo anidado $\mathcal{N}(D)$ de D es el grafo formado como sigue: asociamos un vértice $n(U)$ por cada componente U de $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{C}$ y una arista $e(C)$ para $C \in \mathcal{C}$. La arista $e(C)$ une los vértices $n(U_1)$ y $n(U_2)$ donde $C \in \partial U_1 \cap \partial U_2$.

En la Figura 3-1 mostramos el grafo anidado del diagrama del nudo 7_6 .

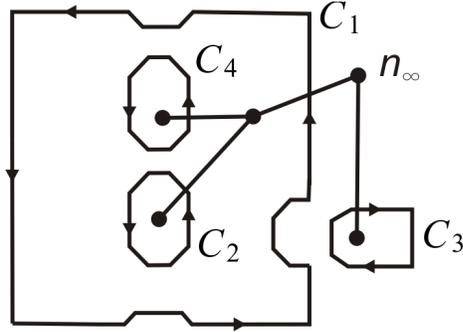


Figura 3-1: Grafo anidado del nudo 7_6 .

Lema 3.1.1 $\mathcal{N}(D)$ es un grafo acíclico, es decir, es un árbol.

Prueba. Sabemos que un grafo T con n vértices es un árbol si y sólo si T es conexo y tiene $n - 1$ aristas, ver Teorema 2.1.4 de [33]. Veamos que $\mathcal{N}(D)$ es conexo. Tomemos dos vértices $n(U_1)$ y $n(U_2)$ de $\mathcal{N}(D)$, que corresponden a dos componentes distintas U_1 y U_2 de $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{C}$ y probemos que existe un camino que conecta éstos dos vértices. Existen círculos C_1 y C_2 en \mathcal{C} tal que $C_1 \in \partial U_1$ y $C_2 \in \partial U_2$. Tenemos dos casos: **(i)** $C_1 = C_2$. Entonces claramente la arista $e(C_1)$ conecta $n(U_1)$ y $n(U_2)$. **(ii)** $C_1 \neq C_2$. Tenemos dos subcasos, si $C_2 \in \partial U_1$ entonces $C_2 \in \partial U_1 \cap \partial U_2$ por tanto la arista $e(C_2)$, que corresponde al círculo C_2 , conecta los vértices $n(U_1)$ y $n(U_2)$. Si $C_2 \notin \partial U_1$, entonces el Teorema de la curva cerrada de Jordan aplicado a C_2 nos garantiza la existencia de otra componente U_3 de $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{C}$, distinta de U_1 y U_2 , tal que $C_2 \in \partial U_2 \cap \partial U_3$. Como $C_2 \notin \partial U_1$ existe un círculo $C_3 \neq C_2$ tal que $C_3 \in \partial U_1$. Ahora, si $C_3 \in \partial U_1$ entonces $C_3 \in \partial U_1 \cap \partial U_3$ y así la arista $e(C_3)$ conecta los vértices $n(U_1)$ y $n(U_3)$ y como $C_2 \in \partial U_2 \cap \partial U_3$ entonces la arista $e(C_2)$ conecta los vértices $n(U_3)$ y $n(U_2)$ y así existe

un camino de $n(U_1)$ a $n(U_3)$ ($[e(C_1), e(C_3)], [e(C_3), e(C_2)]$). Pero si $C_3 \notin \partial U_1$ entonces hacemos el mismo razonamiento anterior. Este proceso termina, ya que el número de círculos es finito y así probamos la conexidad del grafo. Ahora $\mathcal{N}(D)$ es un árbol, ya que si \mathcal{C} tiene n círculos entonces $\mathcal{N}(D)$ tiene $n + 1$ vértices (Teorema de Jordan), pero por cada círculo hay una arista, es decir $\mathcal{N}(D)$ tiene $n = (n + 1) - 1$ aristas. ■

Sea n_∞ el vértice de $\mathcal{N}(D)$ correspondiente a la componente no acotada de $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{C}$. El grafo anidado $\mathcal{N}(D)$ puede verse como un *árbol enraizado*, con n_∞ como raíz. A los vértices de éste árbol les asociamos una *profundidad*: por ejemplo la raíz tiene *profundidad* 0, los hijos de la raíz tienen *profundidad* 1, los hijos de los hijos de la raíz tienen *profundidad* 2, etc.

Lema 3.1.2 *Para un diagrama D de un nudo y C un círculo de Seifert, la función altura h , definida en (1.1) se puede calcular como $h(C) = n$ si la arista $e(C)$ de $\mathcal{N}(D)$ une vértices de profundidad n y $n + 1$.*

Prueba. Dado un círculo de Seifert C , existe una arista $e(C)$ correspondiente a C que une dos vértices $n(U_1)$ y $n(U_2)$ con $C \in \partial U_1 \cap \partial U_2$. Sin pérdida de generalidad, digamos que U_1 es la componente acotada por C . Si $h(C) = n$ entonces hay n círculos de Seifert que contienen a C , por tanto hay $n + 1$ aristas en el camino que une $n(U_1)$ con la raíz (pues hay una arista por cada círculo de Seifert más $e(C)$), luego es claro que la arista $e(C)$ une vértices de profundidad n y $n + 1$. ■

3.1.2 Grafo de Seifert

Describiremos un segundo grafo asociado al diagrama D .

Definición 3.1.2 *El grafo de Seifert $\mathcal{S}(D)$ de un diagrama D es el grafo definido de la siguiente manera: hay un vértice por cada círculo de Seifert de D , y una arista $e(c)$ por cada cruce c de D , que conecta dos vértices correspondientes a dos círculos de Seifert que sean adyacentes a c*

En la Figura 3-2 se muestra el grafo de Seifert del nudo 7_6 .

Notemos que dos diagramas relacionados por una isotopía del plano tienen el mismo grafo de Seifert, pues una isotopía del plano no cambia los cruces ni la orientación del diagrama, por

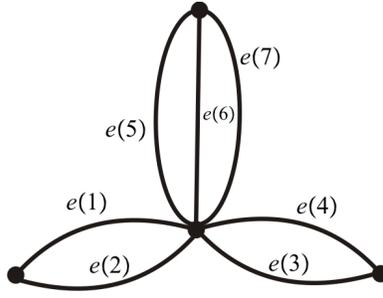


Figura 3-2: Grafo de Seifert del diagrama del nudo 7_6

tanto se conservan los mismos círculos de Seifert y los mismos cruces, que respectivamente, equivalen en el grafo a los vértices y las aristas.

El siguiente teorema nos muestra la importante relación que hay entre el grafo de Seifert y la superficie canónica de un diagrama.

Lema 3.1.3 *Si F es la superficie canónica de un diagrama D entonces $H_1(\mathcal{S}(D)) = H_1(F)$.*

Prueba. Esto es claro, ya que $\mathcal{S}(D)$ puede embeberse en F y es un retracto de deformación de F . ■

Un ciclo en $\mathcal{S}(D)$ es una secuencia de aristas de $\mathcal{S}(D)$, que es un ciclo cerrado y sin repetición de aristas y un ciclo equivalente en F será cualquier curva que recorra las bandas giradas de F asociadas a las aristas de la secuencia en el grafo, en el mismo orden. El siguiente es un algoritmo conocido para calcular un conjunto de ciclos que generen a $H_1(G)$, para un grafo conexo G :

1. Sea $T(G)$ un árbol generador para G . Un árbol generador $T(G)$ de G es un subgrafo acíclico de G que contiene todos los vértices de G , o equivalentemente, un subgrafo acíclico maximal de G . Para formar el árbol generador podemos escoger inicialmente cualquier vértice n_0 de G y formar el árbol $\hat{T}(G)$ que tiene a n_0 como raíz. Continuamos el proceso de la siguiente forma: para cada vértice n de $\hat{T}(G)$, sea n_1, n_2, \dots, n_r los vértices adyacentes a n en G que no están en $\hat{T}(G)$. Para cada $1 \leq i \leq r$ añadimos el vértice n_i a $\hat{T}(G)$ y la arista que conecta n y n_i , y denotamos de nuevo por $\hat{T}(G)$ a éste grafo extendido. Cuando no podamos continuar con éste proceso decimos que $\hat{T}(G) = T(G)$, el árbol generador

para G .

2. Nombremos las aristas de G de tal forma que las primeras r no estén en el árbol: $e_1, \dots, e_r \notin T(G)$ y $e_{r+1}, \dots, e_n \in T(G)$.
3. Para cada vértice n de $T(G)$, sea s_n la sucesión de aristas desde la raíz n_0 hasta n . Sea e una arista que no esté en $T(G)$ y que conecta dos nodos n_1 y n_2 . Entonces la sucesión de aristas $(s_{n_1}, e, s_{n_2}^{-1})$ será un ciclo no trivial en G , donde s^{-1} es la secuencia s reversada. Este ciclo es no trivial porque $T(G)$ es un subgrafo acíclico maximal de G .

Este procedimiento produce entonces un conjunto de ciclos generadores de $H_1(\mathcal{S}(D))$ que lo llamaremos Z y corresponde a un conjunto de ciclos que podemos recordar como secuencias de aristas de $\mathcal{S}(D)$, que a su vez, corresponden a secuencias de cruces del diagrama D . Para eliminar cualquier redundancia con estas representaciones simplificamos las secuencias con la siguiente regla:

Sea e una arista de $\mathcal{S}(D)$ y s y t cualquier par de secuencias de aristas. Una secuencia de la forma (s, e, e, t) ó (e, s, e) puede ser simplificada como (s, t) ó (s) , respectivamente. Claramente esto último no cambia la homología del ciclo, pues representan el mismo camino cerrado en el grafo.

Por ejemplo, para el grafo de Seifert del nudo 7_6 el conjunto de ciclos es

$$Z = \{(1, 2), (5, 6), (6, 7), (3, 4)\}$$

3.2 Algoritmo a partir del nudo combinatorio

El nudo combinatorio será la entrada del algoritmo para calcular la matriz de Seifert. En esta sección indicaremos cómo usar el código del nudo combinatorio de un nudo clásico para implementar el algoritmo y obtener la matriz de Seifert. Recordemos que el nudo combinatorio para el ejemplo del nudo 7_6 es

$$7_6 = \{\{1, -2, 3, -4, 5, -6, 7, -5, 2, -1, 6, -7, 4, -3\}, \{-1, -1, 1, 1, -1, -1, -1\}\}.$$

Sea D un diagrama con nudo combinatorio asociado $\{\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2m}\}, \{s_1, s_2, \dots, s_m\}\}$.

3.2.1 Aristas del diagrama de un nudo a partir del nudo combinatorio

Veamos a D como la unión de aristas, donde una arista es un segmento del diagrama que une dos cruces sin pasar por cualquier otro cruce. Como D tiene m cruces entonces D consistirá de $2m$ aristas. Las aristas tendrán la forma $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ donde α_i y α_{i+1} son cruces consecutivos en el nudo combinatorio, es decir las aristas son:

$$[\alpha_1, \alpha_2], [\alpha_2, \alpha_3], \dots, [\alpha_i, \alpha_{i+1}], [\alpha_{i+1}, \alpha_{i+2}], \dots, [\alpha_{2m}, \alpha_1]$$

Para nuestro ejemplo, las aristas del nudo 7_6 son:

$$[1, -2], [-2, 3], [3, -4], [-4, 5], [5, -6], [-6, 7], [7, -5], [-5, 2], [2, -1], [-1, 6], [6, -7], \\ [-7, 4], [4, -3], [-3, 1].$$

Ahora, interpretaremos a partir de la forma de cada arista, cómo ésta entra o sale de los dos cruces que la determinan. Usaremos la notación $[x_-, i]$, $i > 0$, donde x_- es un símbolo que representa cualquier cruce, e i indica que nos estamos refiriendo específicamente al cruce i .

$$[x_-, i] := \text{Arista que entra al cruce } i \text{ por encima (Ee)}$$

$$[x_-, -i] := \text{Arista que entra al cruce } i \text{ por debajo (Ed)}$$

$$[i, x_-] := \text{Arista que sale del cruce } i \text{ por encima (Se)}$$

$$[-i, x_-] := \text{Arista que sale del cruce } i \text{ por debajo (Sd)}$$

3.2.2 Cómo determinar los círculos de Seifert a partir del nudo combinatorio

Determinaremos los círculos de Seifert a partir del nudo combinatorio de la siguiente forma. Representaremos cada círculo $C_i = \{[\alpha_{i_1}, \alpha_{i_1+1}], [\alpha_{i_2}, \alpha_{i_2+1}], \dots, [\alpha_{i_k}, -\alpha_{i_1}]\}$, como una secuencia de aristas donde $i_t \in \{1, \dots, 2m\}$, $1 \leq t \leq k$, con k el número de aristas que componen el círculo. Esta representación permite una permutación cíclica, es decir, $\{[\alpha_{i_1}, \alpha_{i_1+1}], \dots, [\alpha_{i_k}, -\alpha_{i_1}]\}$ y $\{[\alpha_{i_2}, \alpha_{i_2+1}], \dots, [\alpha_{i_k}, -\alpha_{i_1}], [\alpha_{i_1}, \alpha_{i_1+1}]\}$ representan el mismo círculo.

Hallaremos los círculos así: Comenzamos con cualquier arista que no haya sido identificada previamente en un círculo de Seifert y la llamaremos $[\alpha_{i_1}, \alpha_{i_1+1}]$, el índice i se refiere a que estamos construyendo el círculo i ; si $i_1 = 2m$, entonces $i_1 + 1 = 1$. La secuencia $([\alpha_{i_1}, \alpha_{i_1+1}])$ es el segmento inicial de la representación de algún círculo de Seifert C_i de D . Ahora, $-\alpha_{i_1+1} = \alpha_{i_j}$ para algún $j = 1, \dots, 2m$. Ver Figura 3-3. La arista siguiente del círculo será $[-\alpha_{i_1+1}, \alpha_{i_j+1}]$ y

el círculo completa su representación cuando lleguemos de nuevo a $[\alpha_{i_1}, \alpha_{i_1+1}]$ (que no volvemos a escribir).

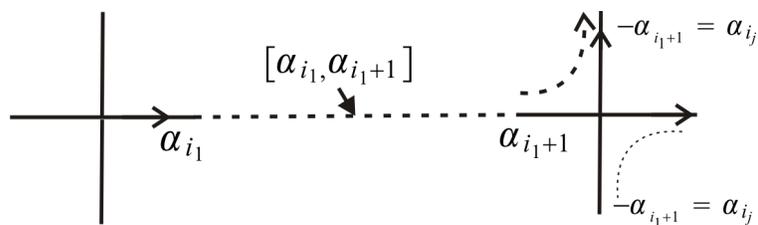


Figura 3-3: Cómo construir los círculos de Seifert.

Continuamos estos pasos hasta que todas las aristas hayan sido usadas. Así tendremos los círculos de Seifert representados como secuencias de aristas. Por ejemplo, las representaciones de los círculos del diagrama del nudo 7_6 son:

$$C_1 := \{[-1, 6], [-6, 7], [-7, 4], [-4, 5], [-5, 2], [-2, 3], [-3, 1]\},$$

$$C_2 := \{[6, -7], [7, -5], [5, -6]\},$$

$$C_3 := \{[4, -3], [3, -4]\},$$

$$C_4 := \{[1, -2], [2, -1]\}.$$

3.2.3 Cómo determinar el grafo anidado

Veamos cómo calcular a partir del nudo combinatorio, el grafo anidado $\mathcal{N}(D)$ definido en la Sección 3.1.1.

Para un cruce c de D dos círculos de Seifert que contengan aristas de la forma $[x_-, c]$, $[x_-, -c]$, $[c, x_-]$, $[-c, x_-]$ (es decir, aristas que contengan a c) en su secuencia de representación, son adyacentes a c y además dichos círculos de Seifert son adyacentes el uno con el otro. Considerando los dos tipos de cruces $+$ y $-$, podemos también determinar la posición relativa con respecto a c de los círculos de Seifert adyacentes a c .

Definición 3.2.1 *Para un cruce c de tipo $-$ diremos que el círculo de Seifert que contiene las aristas de la forma $[x_-, c]$ y $[-c, y_-]$, está a la derecha de c y el círculo de Seifert que contiene las aristas de la forma $[z_-, -c]$ y $[c, w_-]$, está a la izquierda de c .*

Para un cruce de tipo $+$ la situación es contraria: diremos que un círculo de Seifert que contiene las aristas de la forma $[x_-, c]$ y $[-c, y_-]$, está a la izquierda de c , mientras que el círculo de Seifert que contiene las aristas de la forma $[z_-, -c]$ y $[c, w_-]$, está a la derecha de c . Análogamente, diremos que si un círculo de Seifert está a la derecha de un cruce c , entonces el cruce está a la izquierda del círculo, y si el círculo está a la izquierda del cruce, entonces el cruce está a la derecha del círculo.

Para nuestro ejemplo del nudo 7_6 , las posiciones relativas de los círculos de Seifert en cada cruce son

Izquierda	Cruce	Tipo (s_i)	Derecha
C_4	1	$-$	C_1
C_4	2	$-$	C_1
C_1	3	$+$	C_3
C_1	4	$+$	C_3
C_2	5	$-$	C_1
C_2	6	$-$	C_1
C_2	7	$-$	C_1

Aplicando el teorema de la curva cerrada de Jordan (Teorema 1.1.1) a nuestros círculos de Seifert tenemos el siguiente lema.

Lema 3.2.1 *Cada círculo C parte el plano en dos regiones. Una de ellas contiene todos los cruces que están a la izquierda de C y la otra contiene todos los cruces que están a la derecha de C .*

Podemos igualmente hablar de estas dos regiones como las regiones que están a la derecha y a la izquierda de C . Esto nos permite referirnos a las posiciones relativas de las componentes de $\mathbb{R}^2 \setminus C$. Cada círculo de Seifert C forma parte de la frontera de dos de las componentes, digamos U y V de $\mathbb{R}^2 \setminus C$. Una de estas componentes estará en la región de $\mathbb{R}^2 \setminus C$ que está a la derecha de C y la otra estará en la región de $\mathbb{R}^2 \setminus C$ que está a la izquierda de C . Usaremos la notación $U_L(C)$ y $U_R(C)$ para referirnos a las regiones de $\mathbb{R}^2 \setminus C$ que están a la izquierda y a la derecha de C , respectivamente.

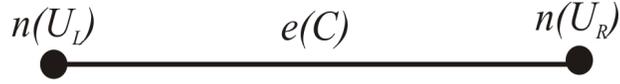


Figura 3-4: Grafo $\hat{\mathcal{N}}_0(D)$.

Ahora mostremos cómo determinar $\mathcal{N}(D)$ a partir del nudo combinatorio. Comenzaremos creando el grafo $\hat{\mathcal{N}}_0(D)$, mostrado en la Figura 3-4. $\hat{\mathcal{N}}_0(D)$ es el grafo que consiste de dos vértices y una arista que los conecta. Seleccionamos cualquier círculo de Seifert C y llamamos la arista de $\hat{\mathcal{N}}_0(D)$ como $e(C)$, es decir, la arista correspondiente a C . Nombramos alguno de los vértices $n(U_L(C))$, es decir que corresponde a la componente de $\mathbb{R}^2 \setminus C$ que está a la izquierda de C y el otro vértice como $n(U_R(C))$, el que corresponde a la componente de $\mathbb{R}^2 \setminus C$ que está a la derecha de C . Claramente $\hat{\mathcal{N}}_0(D)$ es un subgrafo de $\mathcal{N}(D)$. Ahora construiremos otro subgrafo $\hat{\mathcal{N}}(D)$ de $\mathcal{N}(D)$. Iniciamos el proceso tomando $\hat{\mathcal{N}}(D) = \hat{\mathcal{N}}_0(D)$ y lo completamos como sigue: escojamos un círculo de Seifert C' tal que $e(C') \notin \hat{\mathcal{N}}(D)$ pero que C' sea adyacente al círculo C para el cual $e(C) \in \hat{\mathcal{N}}(D)$ (tal C' existe ya que D es el diagrama de un nudo, por tanto conexo). Sean $U_L(C')$ y $U_R(C')$ las componentes de $\mathbb{R}^2 \setminus C'$ que están a la izquierda y a la derecha de C' , respectivamente. Queremos añadir la arista $e(C')$ y uno de los vértices $n(U_L(C'))$ ó $n(U_R(C'))$ a $\hat{\mathcal{N}}(D)$. Sea $U_L(C)$ y $U_R(C)$ las componentes de $\mathbb{R}^2 \setminus C$ que están a la izquierda y a la derecha de C , respectivamente. Dado que C' y C son adyacentes, C' está a la derecha o a la izquierda de C y esto se puede mirar en el nudo combinatorio de D como lo explicamos anteriormente. Supongamos que C' está a la izquierda de C , entonces $U_R(C') = U_L(C)$. En este caso añadimos la arista $e(C')$ y el vértice $n(U_L(C'))$ a $\hat{\mathcal{N}}(D)$ con $e(C')$ conectando $n(U_L(C)) (= n(U_R(C')))$ y $n(U_L(C'))$, como se muestra en la Figura 3-5a. En el caso que C' está a la derecha de C , entonces $U_L(C') = U_R(C)$ y añadimos la arista $e(C')$ y el vértice $n(U_R(C'))$ a $\hat{\mathcal{N}}(D)$ con $e(C')$ conectando $n(U_R(C)) (= n(U_L(C')))$ y $n(U_R(C'))$, como en la Figura 3-5b.

Así, empezando con $\hat{\mathcal{N}}_0(D)$, aplicamos el proceso anterior hasta que todas las aristas correspondientes a los círculos de Seifert hayan sido añadidas y finalmente obtenemos que $\hat{\mathcal{N}}(D) = \mathcal{N}(D)$. Este grafo anidado de D determinado por el nudo combinatorio prueba que diagramas con el mismo nudo combinatorio tienen el mismo grafo anidado. Ver Figura 3-6, como ejemplo del grafo anidado del nudo 7_6 . Notemos que en la figura, los vértices pueden

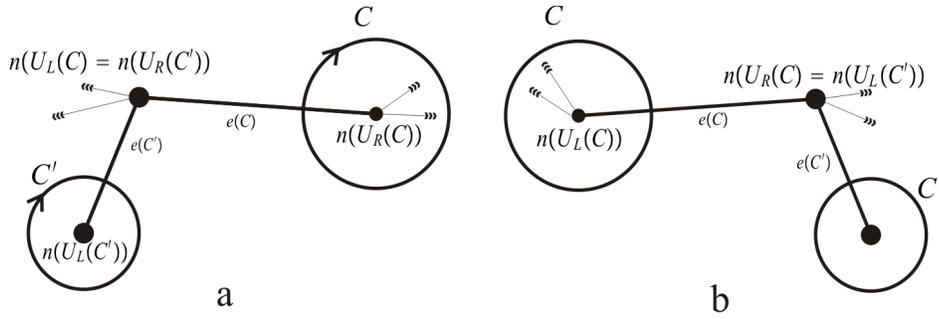


Figura 3-5: Extensión del grafo $\hat{\mathcal{N}}(D)$.

tener nombres distintos pero corresponden a la misma región.

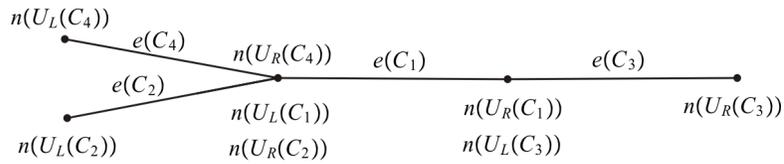


Figura 3-6: Grafo anidado del diagrama del nudo 7_6

3.2.4 Cómo fijar un diagrama D' dado un nudo combinatorio

Sabemos que un nudo tiene varios diagramas distintos en el plano, veamos que podemos implementar este algoritmo sin importar el diagrama D que escojamos inicialmente.

Como lo describimos antes, el grafo anidado puede verse como un árbol enraizado que tiene como raíz el vértice correspondiente a la componente no acotada de $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{C}$. Hasta ahora el algoritmo ha calculado $\mathcal{N}(D)$ pero no sabe cuál es la componente no acotada de $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{C}$. Existe una isotopía ϕ del plano extendido que lleva D a un nuevo diagrama D' tal que si U era una componente acotada de $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{C}$, $\phi(U)$ es una componente no acotada de $\mathbb{R}^2 \setminus \phi(\mathcal{C})$; observe los tres diagramas del nudo 7_6 en la Figura 3-7 para algunos ejemplos.

En este punto, el algoritmo escoge arbitrariamente uno de los vértices de $\mathcal{N}(D)$, digamos $n_0 = n(U_0)$ como raíz y denotemos por D' al diagrama $\phi(D)$ donde ϕ es una isotopía del plano extendido tal que $\phi(U_0)$ es la componente no acotada de $\mathbb{R}^2 \setminus \phi(\mathcal{C})$. Ahora llamemos al árbol resultante $\mathcal{N}^T(D')$, el superíndice T indica que ya escogimos la raíz. Entonces cada disco de

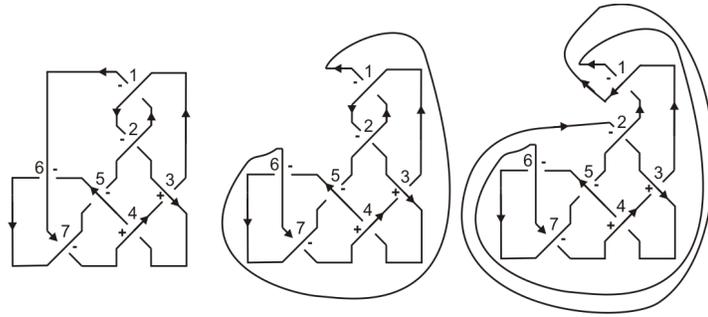


Figura 3-7: Diferentes diagramas con el mismo nudo combinatorio.

Seifert F_C estará en un plano de la forma $z = n$, donde la arista $e(C)$ une los vértices de profundidad n y $n + 1$ en el árbol $\mathcal{N}^T(D')$.

Con la información que tenemos hasta ahora podemos saber la orientación de los círculos de Seifert de D' . Sea F_{C_0} uno de los discos de Seifert, donde $e(C_0)$ conecta la raíz de $\mathcal{N}^T(D')$ con un vértice de profundidad 1; esto significa que F_{C_0} tiene que estar en el plano $z = 0$. En la construcción de $\mathcal{N}(D)(= \mathcal{N}(D'))$ la raíz n_0 tiene que estar almacenada como $n(U_L(C_0))$ ó $n(U_R(C_0))$. Si $n_0 = n(U_L(C_0))$ entonces C_0 tiene orientación en el sentido de las manecillas del reloj, pero si $n_0 = n(U_R(C_0))$ entonces C_0 tiene orientación en el sentido contrario a las manecillas del reloj. La orientación en C_0 es extendida a los otros círculos de Seifert con la siguiente regla: dos círculos adyacentes en el mismo plano (nivel) tendrán orientaciones opuestas, mientras que círculos adyacentes en planos (niveles) consecutivos tendrán la misma orientación. La Figura 3-8 muestra el árbol enraizado del nudo 7_6 .

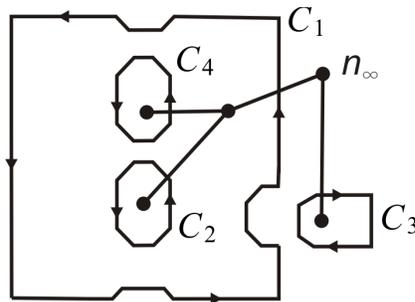


Figura 3-8: Grafo anidado del nudo 7_6 , después de escoger la raíz $n_0 = n(U_R(C_1))$ en el grafo anidado de la Figura 3-6.

Así, los círculos de Seifert del nudo 7_6 tienen altura:

Círculos	Altura
C_1	0
C_2	1
C_3	0
C_4	1

Definición 3.2.2 Sea c un cruce de D y denotemos por B_c la banda girada asociada a c . Recordemos que c puede ser un cruce de tipo $+$ ó $-$, entonces diremos igualmente que B_c es de tipo $+$ ó $-$, según lo sea c . Además B_c conecta dos discos de Seifert que están en el mismo plano o en planos consecutivos, entonces definimos seis configuraciones para B_c : $L_1, L_2, L_3, R_1, R_2, R_3$, de acuerdo con las Figuras 3-9, en la cuál las bandas giradas se pegan a una pequeña porción de los discos de Seifert al lado derecho o izquierdo, como se muestra.

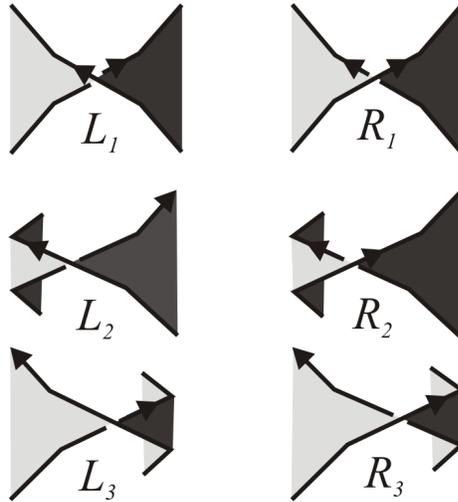


Figura 3-9: Configuraciones de las bandas giradas de Seifert.

Cualquier banda girada de una superficie de Seifert estandar lucirá como una y solamente una de las configuraciones de la Figura 3-9. Por ejemplo, una banda de tipo L_2 está asociada a un cruce c de tipo $-$, donde el disco de Seifert a la izquierda de c está un nivel (o un plano) abajo del que está a la derecha de c . En la siguiente tabla mostramos los tipos de las bandas

de nuestro ejemplo, el nudo 7_6 .

Banda	Tipo
B_1	L_3
B_2	L_3
B_3	R_3
B_4	R_3
B_5	L_3
B_6	L_3
B_7	L_3

3.3 Caminos en la superficie de Seifert

En esta sección describiremos un sistema de curvas orientadas en una superficie de Seifert F , a las cuales nos referiremos como *caminos* en F . Primero haremos la definición de los caminos en los discos de Seifert y luego en las bandas de F . Para esto, primero hablemos de las *banda ciclo* de los discos de Seifert.

Definición 3.3.1 *Una banda ciclo en un disco de Seifert F_C es una banda que recorre el disco alrededor de la frontera con la propiedad de que, cuando proyectamos sobre $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$, las banda ciclo no se intersectan. Así, en particular, cualquier otro círculo de Seifert de D que esté dentro de C no intersecta la proyección de la banda ciclo de F_C , ver Figura 3-10.*

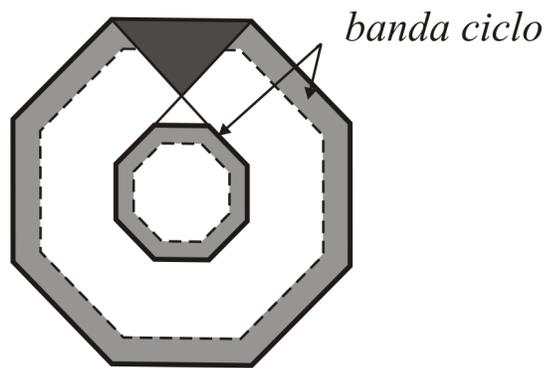


Figura 3-10: Banda ciclo

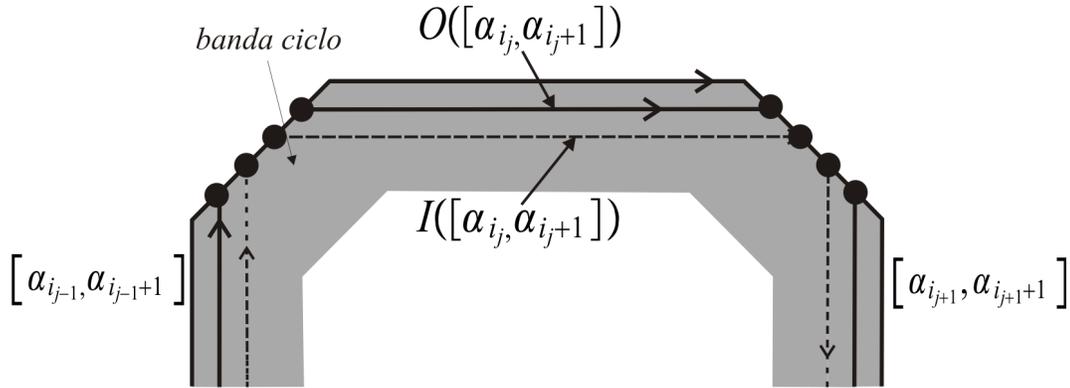


Figura 3-11: Caminos en una porción de un disco de Seifert.

La Figura 3-11 muestra dos segmentos, el de línea sólida, que está más externo, y el de la línea punteada, ubicados en una porción de un disco de Seifert C_i con representación

$$\{[\alpha_{i_1}, \alpha_{i_1+1}], [\alpha_{i_2}, \alpha_{i_2+1}], \dots, [\alpha_{i_k}, -\alpha_{i_1}]\}$$

Estos caminos están en la banda ciclo y marcamos cuatro puntos en las “esquinas” de los discos, que se obtuvieron de los cruces del diagrama cuando formamos los círculos de Seifert, ver Figura 1-4. Los segmentos externos (líneas sólidas), denotados $O([\alpha_{i_j}, \alpha_{i_{j+1}}])$, no se intersectan y recorren el disco paralelos a los arcos $[\alpha_{i_j}, \alpha_{i_{j+1}}]$, con $j = 1, \dots, k$, e $i_k + 1 = i_1$, y terminan en los puntos marcados en las esquinas de los puntos de cruces. Similarmente, los segmentos internos (líneas punteadas) se denotan $I([\alpha_{i_j}, \alpha_{i_{j+1}}])$ con $j = 1, \dots, k$, e $i_k + 1 = i_1$, no se intersectan y recorren el disco en forma paralela a los arcos $O([\alpha_{i_j}, \alpha_{i_{j+1}}])$ y terminan en los puntos marcados en las esquinas, como se muestra en la Figura 3-11. El punto importante aquí es que estos caminos están en las banda ciclo y los caminos externos e internos no se intersectan.

En la Figura 3-12 se muestran los caminos que aparecen en las bandas giradas que conectan los discos de Seifert. Para mejor comprensión de la figura se muestra la banda sin giro con una porción de un disco de Seifert a cada lado de la banda, pero la Figura 3-13 muestra la banda girada real. Los círculos de Seifert tienen representación $\{\dots, [\alpha_{i_j}, \alpha_{i_{j+1}}], [\alpha_{i_{j+1}}, \alpha_{i_{j+1}+1}], \dots\}$. El *camino externo* es entonces la unión de las líneas sólidas y el *camino interno* es la unión de las líneas punteadas. Notemos que los caminos internos y externos de las bandas se conectan

con los correspondientes caminos en los discos de Seifert.

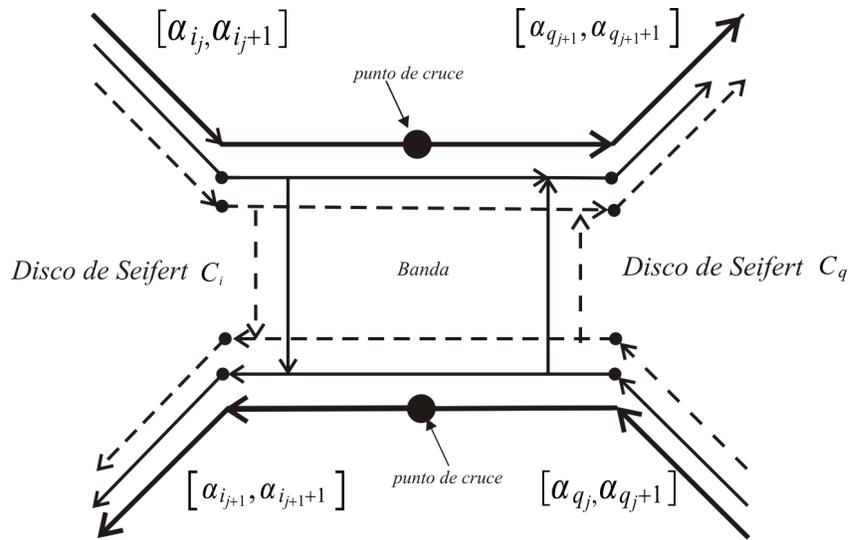


Figura 3-12: Caminos en una banda de Seifert.

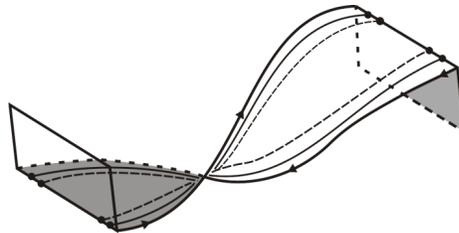


Figura 3-13: Mirada real de la banda girada.

3.4 Cálculo de los números de enlace

En esta sección mostraremos cómo calcular la matriz de Seifert de una superficie canónica F asociada a un diagrama D con respecto a la base de ciclos Z .

Recordemos que el número de enlace de dos 1-ciclos disjuntos x y y , $Link(x, y)$ puede calcularse de un diagrama E , de x y y como

$$Link(x, y) = \sum_{c \in E_x} s(c) \quad (3.1)$$

donde la suma es hecha sobre todos los cruces $c \in E_x = \{c \mid c \text{ es un cruce tal que } x \text{ pasa por encima de } y\}$ y $s(c) = -1$ si c es un cruce de tipo $-$, $s(c) = +1$ si c es un cruce de tipo $+$ (recordar Figura 1-1). Esta definición de $Link(x, y)$ es equivalente a la definición típica: $Link(x, y) = \frac{1}{2} \sum s(c)$, donde la suma se hace sobre todos los cruces entre x y y . La razón es que basta sumar las contribuciones $s(c)$ sobre todos los cruces c donde se sabe que x pasa por encima de y , pues cuando analizamos dos cruces hay dos opciones: que x pase por encima de y y en el siguiente cruce y pase por encima de x , en éste caso las contribuciones son del mismo signo $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ ó $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$, entonces basta considerar sólo un cruce, donde x pasa por encima y y con el valor $s(c) = +1$ ó $s(c) = -1$, respectivamente. En el caso que x pase por encima de y en los dos cruces consecutivos entonces la suma es $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$, que equivale a tener en cuenta $s(c) = +1$ y $s(c) = -1$, entonces $1 - 1 = 0$. Este análisis es suficiente ya que el número total de cruces entre x y y es par.

Sea $z \in Z$ uno de los ciclos generadores de $H_1(\mathcal{S}(D')) = H_1(F)$. Veamos como construir ciclos específicos en F que representen la misma clase de homología de z .

Definición 3.4.1 *Sea $z = (c_1, c_2, \dots, c_r)$ la representación de z como secuencia de cruces de D' . Podemos obtener otra representación de z , en términos de las aristas, la cuál denotaremos $R_O(z)$, “empujando” z sobre el camino externo así: Comenzamos llamando $\hat{R}_O(z) := (O([c_1, x_{1-}])$ donde $[c_1, x_{1-}]$ es la arista que “sale por encima” de c_1 . (También se puede escoger la arista que “sale por debajo” de c_1 , $[-c_1, x_{1-}]$).*

$\hat{R}_O(z)$ es un segmento inicial que se convertirá en $R_O(z)$, para esto repetimos el siguiente procedimiento. Sea $O([x_{i-}, \pm j])$ la última arista de $\hat{R}_O(z)$, entonces nos fijamos en su segunda componente, $\pm j$, si coincide con algún c_i de z , $1 \leq i \leq r$, entonces la arista siguiente será la que empieza con la misma componente $[\pm j, y_-]$, (esto significa que el camino cruzará la banda correspondiente al cruce c_i). Ahora, si $\pm j$ no es algún c_i de $R(z)$, entonces la arista siguiente será la que empieza con $\mp j$, es decir, con signo contrario, (en este caso el camino no cruza la banda correspondiente a c_i , simplemente pasa por un lado de ella). El procedimiento termina cuando llegemos a la arista de la forma $[w_-, c_1]$, es decir, la arista cuya segunda componente

sea la primera componente de la primera arista. Ver Figuras 3-14. Del mismo modo podemos “empujar” z hacia el camino interno y dar la misma representación pero llamarla $R_I(z)$. Esta representación permite una permutación cíclica. Ver Figuras 3-15.

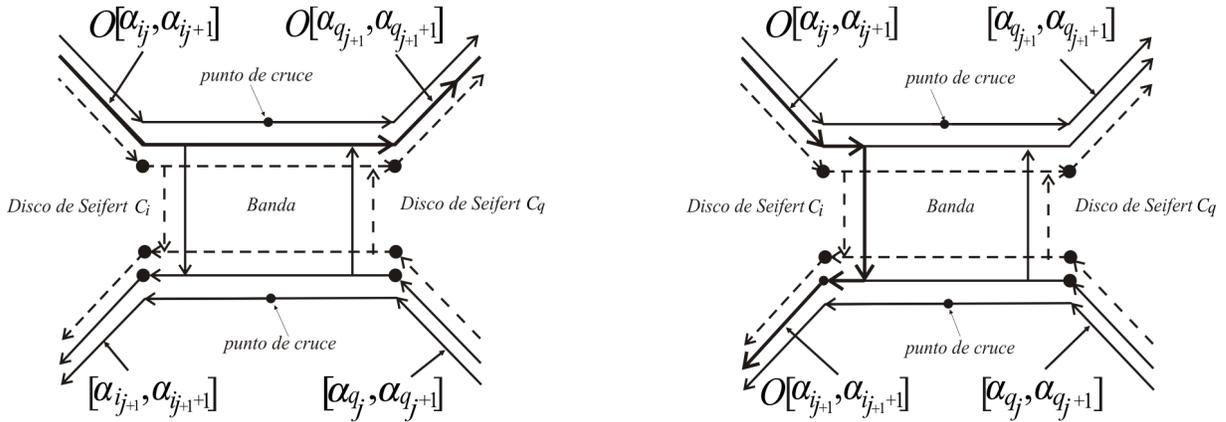


Figura 3-14: Representación de $\hat{R}_O(z)$.

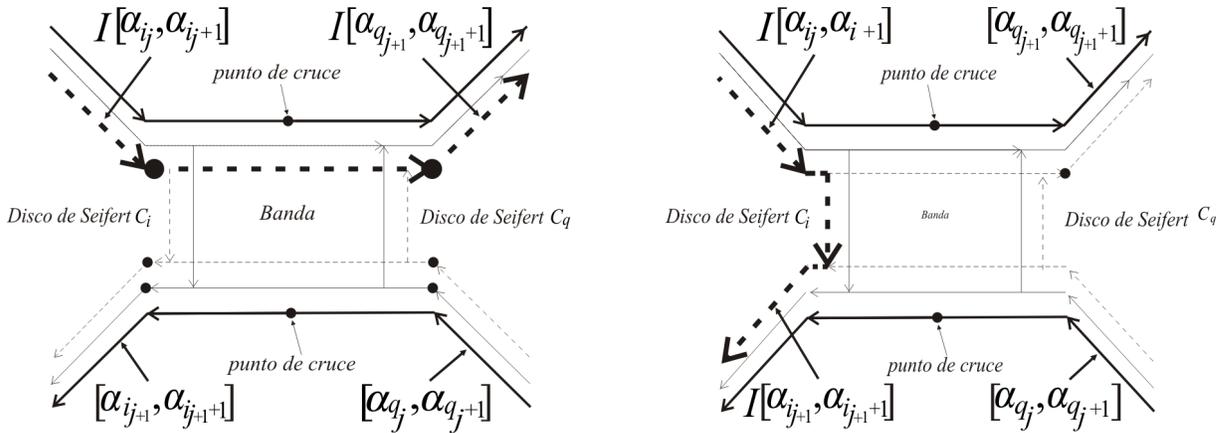


Figura 3-15: Representación $\hat{R}_I(z)$.

Recordemos que para el nudo 7_6 los caminos en términos de los cruces pueden ser (Sección 3.1.2):

$$z_1 = (1, 2), \quad z_2 = (5, 6), \quad z_3 = (6, 7), \quad z_4 = (3, 4)$$

entonces los caminos en términos de las aristas son:

$$\begin{aligned}
R_O(z_1) &= R_I(z_1) = ([1, -2], [-2, 3], [-3, 1]), \\
R_O(z_2) &= R_I(z_2) = ([5, -6], [-6, 7], [-7, 4], [-4, 5]), \\
R_O(z_3) &= R_I(z_3) = ([6, -7], [-7, 4], [-4, 5], [-5, 2], [-2, 3], [-3, 1], [-1, 6]), \\
R_O(z_4) &= R_I(z_4) = ([3, -4], [-4, 5], [-5, 2], [-2, 3]).
\end{aligned}$$

Usaremos la notación z^O y z^I para denotar la curva cerrada que es un subconjunto de los caminos internos o externos producidos en el proceso anterior, a diferencia de $R_O(z)$ y $R_I(z)$ que son simplemente secuencias de aristas. Claramente las representaciones $R_O(z)$ y $R_I(z)$ son esencialmente las mismas, representan la misma secuencia de aristas, por lo cual nos referiremos sólo a una representación $R(z)$. Pero notemos que los ciclos z^O y z^I no son los mismos (son homológicamente equivalentes), pues uno recorre el camino externo y el otro el camino interno.

Los caminos externos e internos fueron construidos de tal forma que cuando tomemos dos ciclos generadores z_i y z_j (permitiendo $i = j$) las proyecciones de z_i^O y z_j^I en \mathbb{R}^2 se intersectarán solo en la vecindad de cada banda girada de Seifert y podemos decir cuáles de estas intersecciones son cruces que están por encima o por debajo y en cuáles direcciones pasan, es decir toda la información necesaria para calcular $Link(z_i^{O+}, z_j^I)$, usando la fórmula (3.1).

Refrescando la notación, sea x uno de los ciclos generadores empujado hacia el *camino externo* y sea y uno de los ciclos generadores empujado hacia el *camino interno*. Si dos aristas consecutivas en la representación de aristas del ciclo son de la forma $[x_-, c]$, $[c, y_-]$ ó $[x_-, -c]$, $[-c, y_-]$ significa que el camino (ciclo) **atraviesa** la banda B_c , si son de la forma $[x_-, c]$, $[-c, y_-]$ y además están en un mismo círculo de Seifert, significa que el camino pasa **bordeando** la banda B_c . Para cada banda girada B_c de F , donde c es un cruce de D' , diremos que el ciclo x (ó y) toma una de las cinco formas siguientes, denotadas por los números 0, 1, 2, 3, 4 y mostradas en la Figura 3-16

El ciclo x es de la **forma 0** cerca de B_c si x no pasa cerca de B_c , es decir, si en su representación de aristas, en ningún corchete aparece el cruce c

El ciclo x es de la **forma 1** cerca de B_c si bordea la banda en un círculo que está a la izquierda de c , es decir si las aristas de la forma $[x_-, c]$, $[-c, y_-]$ o $[x_-, -c]$, $[c, y_-]$ están en un

círculo de la izquierda de c .

El ciclo x es de la **forma 2**, si atraviesa desde un círculo de la izquierda a un círculo de la derecha, es decir, si la arista $[x_-, c]$ está en un círculo de la izquierda de c y la arista $[c, y_-]$ está en uno de la derecha.

El ciclo x es de la **forma 3**, si bordea la banda en un círculo que está a la derecha de c .

El ciclo x es de la **forma 4**, si atraviesa B_c desde un disco de Seifert de la derecha a un disco de Seifert en la izquierda de c .

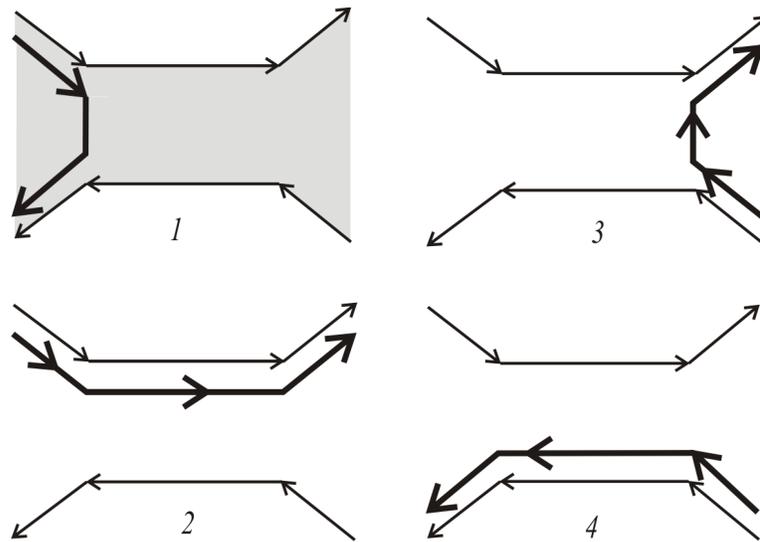


Figura 3-16: Formas de los ciclos cerca de las bandas.

Continuando con el mismo ejemplo, nudo 7_6 , tenemos que las formas de los caminos en cada banda son

Banda \ camino	z_1	z_2	z_3	z_4
B_1	4	0	3	0
B_2	2	0	3	3
B_3	1	0	1	2
B_4	0	1	1	4
B_5	0	4	3	3
B_6	0	2	4	0
B_7	0	3	2	0

Con esto diremos que la forma de x y y cerca a B_c es (i, j) donde i es la forma de x y j es la forma de y cerca a B_c . Entonces hay 25 posibles parejas (i, j) donde $0 \leq i, j \leq 4$, para especificar la forma de dos ciclos x y y en una banda. A continuación se mostrarán los diagramas con éstas posibilidades para cada una de las configuraciones de las bandas L_1, L_2, L_3, R_1, R_2 y R_3 . El ciclo x está sobre el camino externo y se dibujará con la línea sólida y el ciclo y se dibujará con una línea punteada. La primera columna muestra las porciones de los ciclos como aparecen sobre la superficies de Seifert F , la segunda muestra la correspondiente porción del diagrama (es decir, una proyección sobre \mathbb{R}^2 donde se ve cuál ciclo pasa por encima o por debajo) de las curvas x^+ y y y la tercera columna muestra la porción del diagrama de x y y^+ . El símbolo “+” significa que el camino pasa por encima del otro.

En total son $25 \times 6 = 150$ posibles diagramas, pero omitimos los de las formas $(0, i)$, $(i, 0)$, $(1, 3)$ ó $(3, 1)$, donde $0 \leq i \leq 4$, pues para éstas formas no hay cruces en el diagrama de x^+ y y o en el diagrama x y y^+ . En las figuras usamos la convención usual del sentido positivo teniendo en cuenta que la página está al frente del lector.

Luego mostraremos tres tablas donde se resume cómo todas estas posibilidades contribuyen al número de enlace $Link(x^+, y)$ y $Link(y^+, x)$. (Recordemos que x es el ciclo exterior y y es el interior). Es decir, la entrada en la tabla debajo de $Link(x^+, y)$ muestra la sumatoria $\sum s(c)$, donde la suma es tomada sobre todos los cruces c que aparezcan en la banda, tal que x^+ está por encima de y . Similarmente la entrada en la tabla debajo de $Link(y^+, x)$ es $\sum s(c)$, donde la suma es tomada sobre todos los cruces c , que aparezcan en la banda tal que y^+ está por encima de x . De nuevo omitimos las posibilidades $(0, i)$, $(i, 0)$, $(1, 3)$, ó $(3, 1)$, donde $0 \leq i \leq 4$, pues no contribuyen al número de enlace ya que para éstos casos no aparecen cruces de ningún tipo cuando proyectamos en \mathbb{R}^2 . Las formas $(1, 1)$ y $(3, 3)$ tampoco contribuyen pero son casos no triviales, por tanto mostraremos que pasa con ellos.

Así, toda la implementación está hecha para cada par de ciclos generadores $z_i, z_j \in Z$, donde a uno se le asigna ser “empujado” al *camino externo* y el otro hacia el *camino interno*; luego se busca las formas z_i^O y z_j^I cerca a cada banda de F y entonces resumimos las contribuciones relevantes para los números de enlace sacados de las tablas. La matriz de Seifert de la superficie F se arma así: la entrada ij –ésima = $Link(z_j^+, z_i)$ y la entrada ji –ésima = $Link(z_i^+, z_j)$, $1 \leq i \leq j$.

Cabe anotar que se mostrarán en las tablas de las contribuciones de los cruces, las columnas correspondientes a $Link(x^+, y)$ y $Link(y^+, x)$, para dar más completa la información, pero basta tener en cuenta sólo una columna por la siguiente razón: cuando analizamos los cruces entre un par de ciclos $z_i, z_j \in Z$ tenemos dos opciones: *i*) considerar $z_i = z_i^O$ como el camino externo y $z_j = z_j^I$ como el camino interno o *ii*) tomar $z_j = z_j^O$ como el externo y $z_i = z_i^I$ como el interno. Entonces, en general no es cierto que $Link(z_j^{I+}, z_i^O) = Link(z_j^{O+}, z_i^I)$, pero cuando hacemos la suma total de todos los valores correspondientes a $Link(z_j^{I+}, z_i^O) = Link(y^+, x)$ (en el caso *i*) en todas las bandas, deberá ser igual a la suma de todos los valores correspondientes a $Link(z_j^{O+}, z_i^I) = Link(x^+, y)$ (en el caso *ii*) ya que claramente el enlace $z_i^O \# z_j^I$ es ambiente isotópico a $z_j^O \# z_i^I$ y el número de enlace $Link(x, y)$, es un invariante de enlaces, es decir el resultado no cambia bajo enlaces ambiente isotópicos.

Banda	Forma x, y	$Lk(x^+, y)$	$Lk(y^+, x)$
L_1	1,1	0	0
L_1	1,2	-1	+1
L_1	1,4	+1	-1
L_1	2,1	0	0
L_1	2,2	0	+1
L_1	2,3	0	0
L_1	2,4	0	-1
L_1	3,2	0	0
L_1	3,3	0	0
L_1	3,4	0	0
L_1	4,1	0	0
L_1	4,2	-1	0
L_1	4,3	0	0
L_1	4,4	+1	0

Banda	Forma x, y	$Lk(x^+, y)$	$Lk(y^+, x)$
L_2	1,1	0	0
L_2	1,2	0	+1
L_2	1,4	0	-1
L_2	2,1	+1	0
L_2	2,2	+1	+1
L_2	2,3	0	0
L_2	2,4	0	-1
L_2	3,2	0	0
L_2	3,3	0	0
L_2	3,4	0	0
L_2	4,1	-1	0
L_2	4,2	-1	0
L_2	4,3	0	0
L_2	4,4	0	0

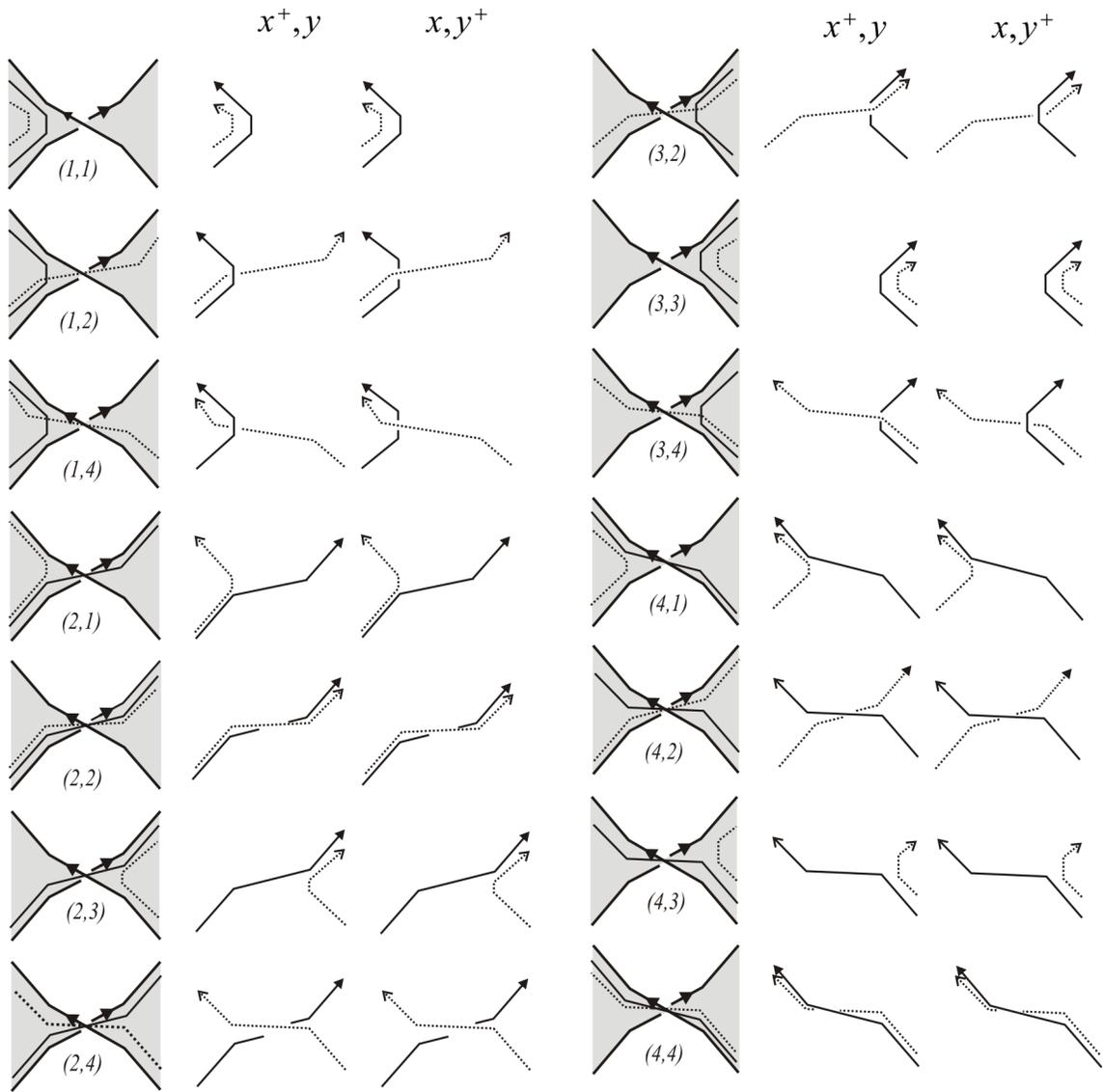


Figura 3-17: Comportamiento de los diferentes tipos de caminos cerca a las bandas de tipo L_1 . Note que en general las dos columnas no son iguales aunque en muchos casos coinciden.

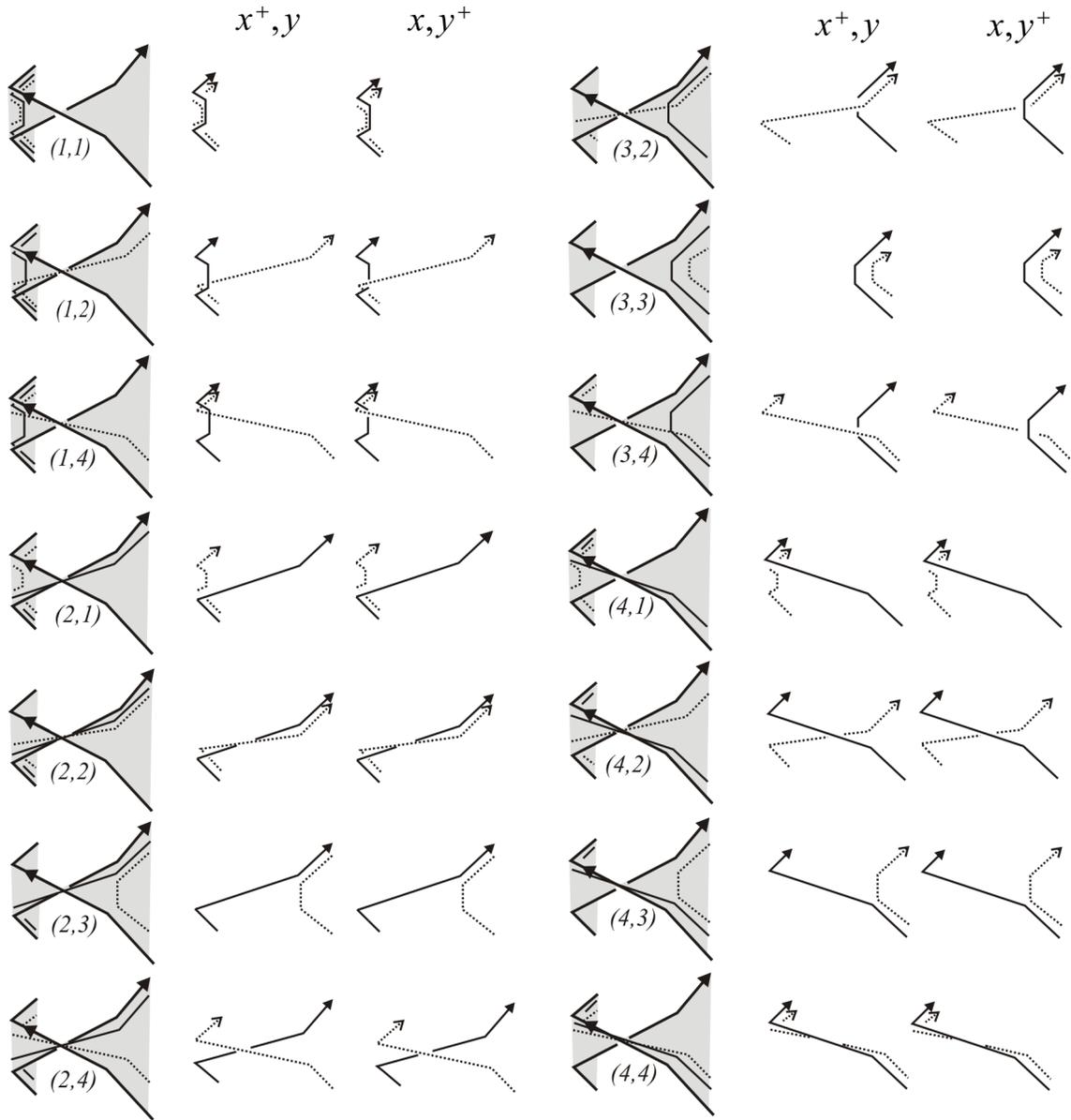


Figura 3-18: Comportamiento de los diferentes tipos de caminos cerca a las bandas de tipo L_2 .

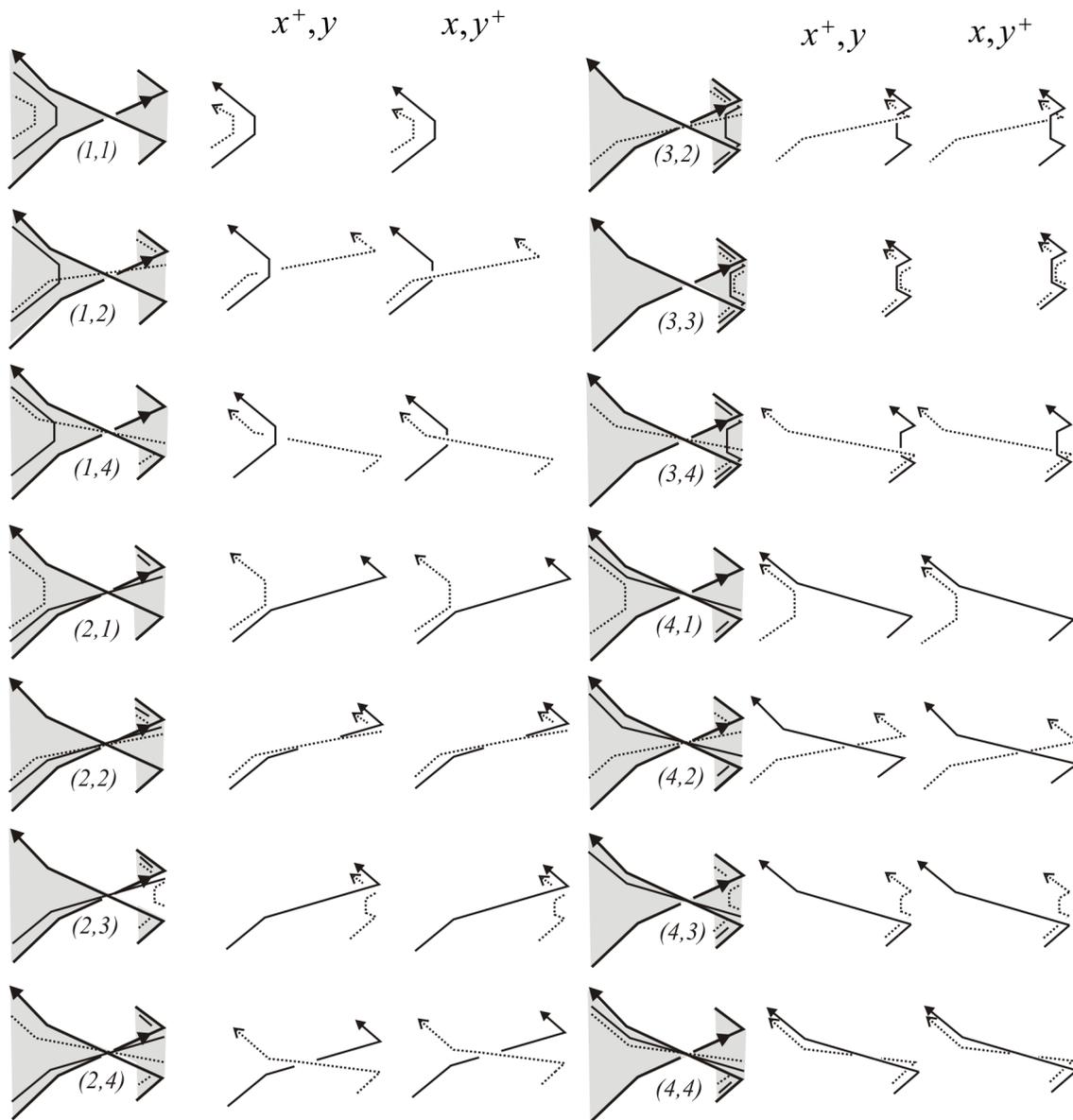


Figura 3-19: Comportamiento de los diferentes tipos de caminos cerca a las bandas de tipo L_3 .

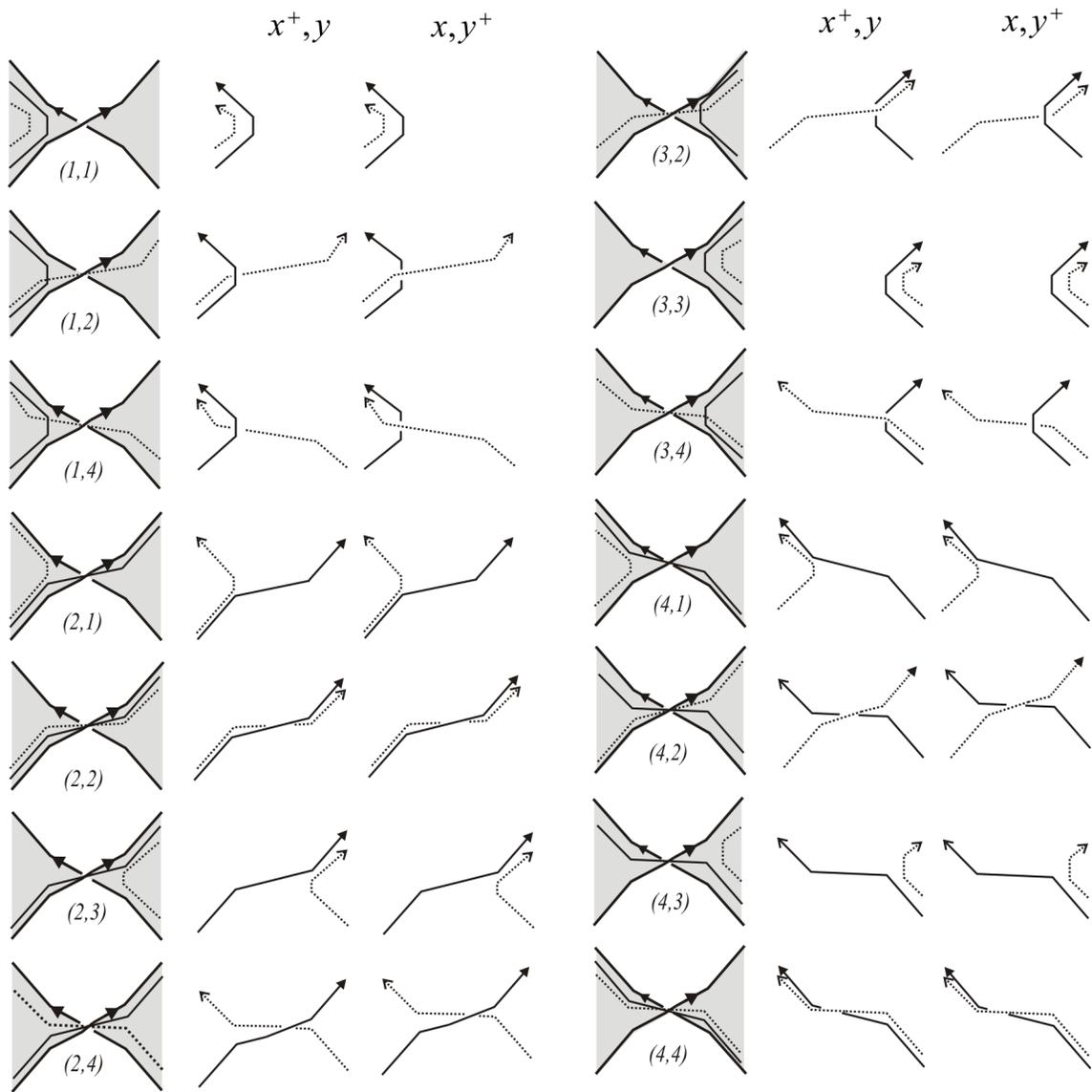


Figura 3-20: Comportamiento de los diferentes tipos de caminos cerca a las bandas de tipo R_1 .

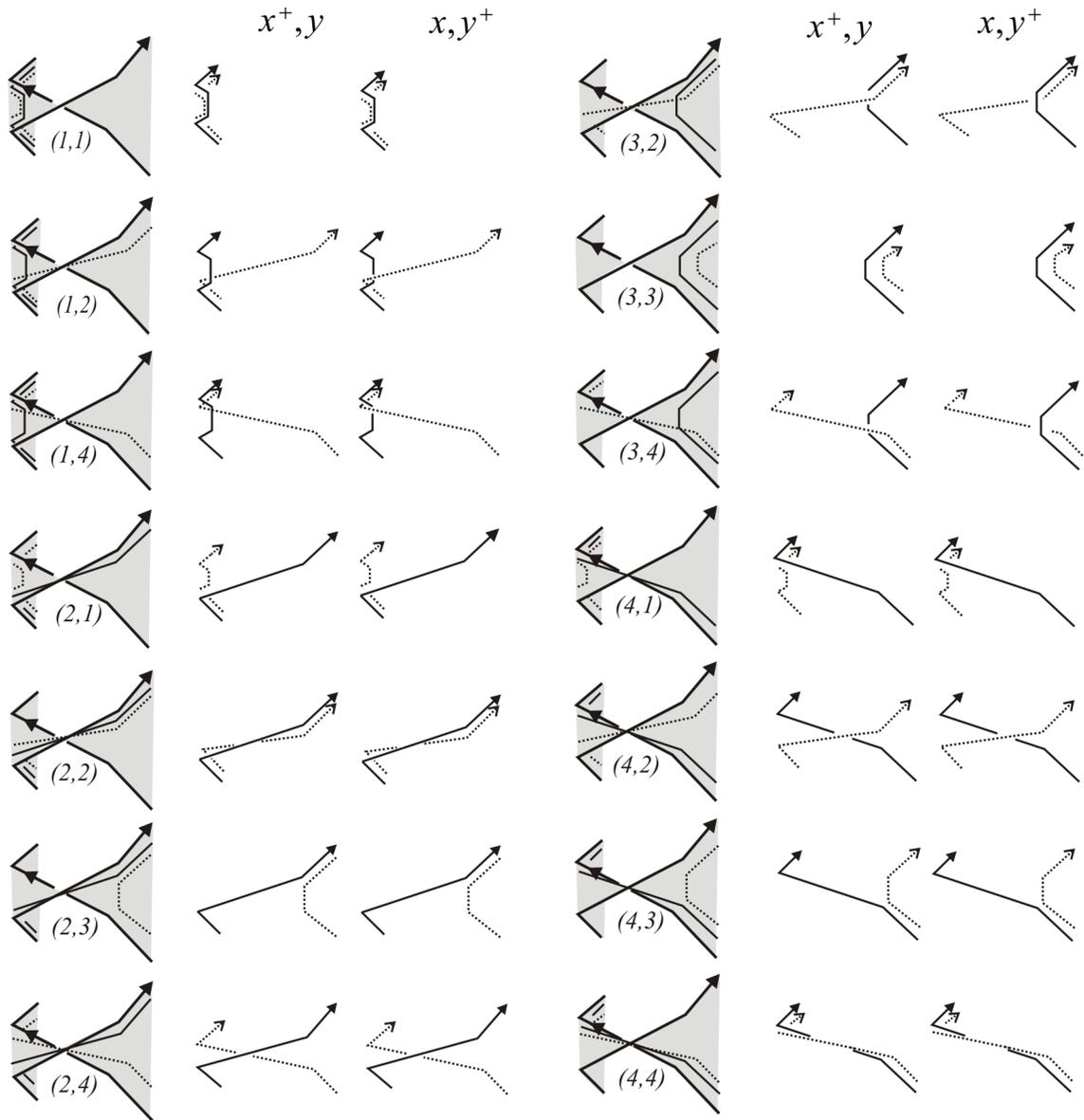


Figura 3-21: Comportamiento de los diferentes tipos de caminos cerca a las bandas de tipo R_2 .

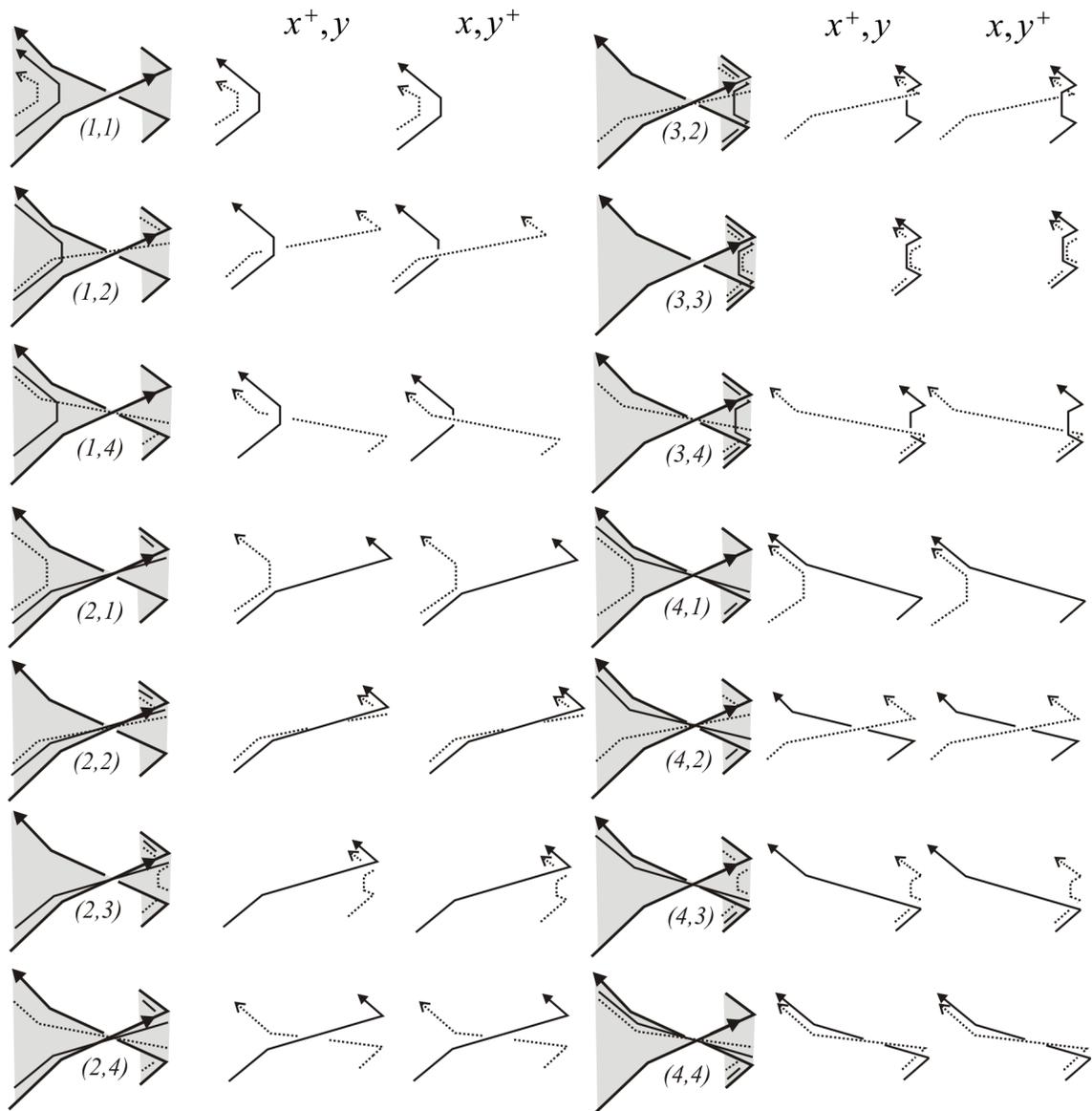


Figura 3-22: Comportamiento de los diferentes tipos de caminos cerca a las bandas de tipo R_3 .

Banda	Forma x, y	$Lk(x^+, y)$	$Lk(y^+, x)$
L_3	1,1	0	0
L_3	1,2	-1	+1
L_3	1,4	+1	-1
L_3	2,1	0	0
L_3	2,2	+1	+1
L_3	2,3	+1	0
L_3	2,4	0	-1
L_3	3,2	+1	0
L_3	3,3	0	0
L_3	3,4	-1	0
L_3	4,1	0	0
L_3	4,2	-1	0
L_3	4,3	-1	0
L_3	4,4	0	0

Banda	Forma x, y	$Lk(x^+, y)$	$Lk(y^+, x)$
R_1	1,1	0	0
R_1	1,2	-1	+1
R_1	1,4	+1	-1
R_1	2,1	0	0
R_1	2,2	0	0
R_1	2,3	+1	0
R_1	2,4	0	0
R_1	3,2	0	0
R_1	3,3	0	0
R_1	3,4	0	0
R_1	4,1	0	+1
R_1	4,2	0	0
R_1	4,3	0	0
R_1	4,4	0	-1

Banda	Forma x, y	$L(x^+, y)$	$L(y^+, x)$
R_2	1,1	0	0
R_2	1,2	0	+1
R_2	1,4	0	-1
R_2	2,1	+1	0
R_2	2,2	0	0
R_2	2,3	0	0
R_2	2,4	+1	0
R_2	3,2	0	0
R_2	3,3	0	0
R_2	3,4	0	0
R_2	4,1	-1	0
R_2	4,2	0	+1
R_2	4,3	0	0
R_2	4,4	-1	-1

Banda	Forma x, y	$L(x^+, y)$	$L(y^+, x)$
R_3	1,1	0	0
R_3	1,2	-1	+1
R_3	1,4	+1	-1
R_3	2,1	0	0
R_3	2,2	0	0
R_3	2,3	+1	0
R_3	2,4	+1	0
R_3	3,2	+1	0
R_3	3,3	0	0
R_3	3,4	-1	0
R_3	4,1	0	0
R_3	4,2	0	+1
R_3	4,3	-1	0
R_3	4,4	-1	-1

Halleemos entonces la matriz de Seifert del nudo 7_6 :

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	Total
(z_1, z_1)	(0, 0)	(0, 3)	(0, 2)	(1, 4)	(4, 3)	(2, 0)	(3, 0)	
$Lk(z_1^+, z_1)$	0	+1	0	0	0	0	0	+1
(z_1, z_2)	(4, 0)	(2, 0)	(1, 0)	(0, 1)	(0, 4)	(0, 2)	(0, 3)	
$Lk(z_1^+, z_2)$	0	0	0	0	0	0	0	0
$Lk(z_2^+, z_1)$	0	0	0	0	0	0	0	0
(z_1, z_3)	(4, 3)	(2, 3)	(1, 1)	(0, 1)	(0, 3)	(0, 4)	(0, 2)	
$Lk(z_1^+, z_3)$	-1	+1	0	0	0	0	0	0
$Lk(z_3^+, z_1)$	0	0	0	0	0	0	0	0
(z_1, z_4)	(4, 0)	(2, 3)	(1, 2)	(0, 4)	(0, 3)	(0, 0)	(0, 0)	
$Lk(z_1^+, z_4)$	0	+1	-1	0	0	0	0	0
$Lk(z_4^+, z_1)$	0	0	+1	0	0	0	0	+1
(z_2, z_2)	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)	(1, 1)	(4, 4)	(2, 2)	(3, 3)	
$Lk(z_2^+, z_2)$	0	0	0	0	0	+1	0	+1
(z_2, z_3)	(0, 3)	(0, 1)	(0, 1)	(1, 1)	(4, 3)	(2, 4)	(3, 2)	
$Lk(z_2^+, z_3)$	0	0	0	0	-1	0	+1	0
$Lk(z_3^+, z_2)$	0	0	0	0	0	-1	0	-1
(z_2, z_4)	(0, 0)	(0, 3)	(0, 2)	(1, 4)	(4, 3)	(2, 0)	(3, 0)	
$Lk(z_2^+, z_4)$	0	0	0	+1	-1	0	0	0
$Lk(z_4^+, z_2)$	0	0	0	-1	0	0	0	-1
(z_3, z_3)	(3, 3)	(3, 3)	(1, 1)	(1, 1)	(3, 3)	(4, 4)	(2, 2)	
$Lk(z_3^+, z_3)$	0	0	0	0	0	0	+1	+1
(z_3, z_4)	(3, 0)	(3, 3)	(1, 2)	(1, 4)	(3, 3)	(4, 0)	(2, 0)	
$Lk(z_3^+, z_4)$	0	0	-1	+1	0	0	0	0
$Lk(z_4^+, z_3)$	0	0	+1	-1	0	0	0	0
(z_4, z_4)	(0, 0)	(3, 3)	(2, 2)	(4, 4)	(3, 3)	(0, 0)	(0, 0)	
$Lk(z_4^+, z_4)$	0	0	0	-1	0	0	0	-1

Luego la matriz de Seifert es:

	z_1^+	z_2^+	z_3^+	z_4^+
z_1	1	0	0	1
z_2	0	1	-1	-1
z_3	0	0	1	0
z_4	0	0	0	-1

3.5 Resumen y ejemplo

A continuación daremos una lista que resume los principales pasos del algoritmo para obtener la matriz de Seifert a partir de un diagrama D de un nudo con m cruces.

1. Orientar el diagrama y nombrar los cruces en orden, recorriendo el diagrama con la orientación escogida y obtener el nudo combinatorio:

$$D = \{\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2m}\}, \{s_1, s_2, \dots, s_m\}\}.$$

(Sección 3.2).

2. Obtener las aristas del nudo combinatorio (Sección 3.2) y hallar los círculos de Seifert como indicamos en la Sección 3.2.2. Luego usar la Definición 3.2.1 para conocer la posición en la que se encuentra cada círculo respecto a sus cruces (derecha o izquierda).
3. Determinar el grafo anidado $\mathcal{N}(D)$ (Sección 3.2.3).
4. Escoger cualquier vértice de $\mathcal{N}(D)$ como raíz, para ver $\mathcal{N}(D)$ como un grafo enraizado $\mathcal{N}^T(D)$, donde D' es un diagrama isotópico a D y luego determinar la profundidad de cada vértice para determinar la altura de cada círculo de Seifert, como se explica en la Sección 3.2.4.
5. Con la información de las alturas de los círculos y los signos de los cruces determinar el tipo de banda girada que corresponde a cada cruce, según las Figuras 3-9.
6. Determinar el grafo de Seifert $\mathcal{S}(D)$ ($=\mathcal{S}(D')$) y el conjunto Z de ciclos generadores de $H_1(\mathcal{S}(D))$. (Lema 3.1.3).

7. Escribir la representación $R(z)$ de aristas de cada ciclo $z \in Z$. (Definición 3.4.1). Con ésta, calcular la forma de z en cada banda girada, según las Figuras 3-16. Luego organizar la información para cada par de ciclos z_i, z_j y buscar las contribuciones en las tablas de los números de enlace, para cada banda. Sumar las contribuciones de z_i y z_j correspondientes en cada banda para calcular las entradas ij -ésima (columna $L(x^+, y)$) y ji -ésima (columna $L(y^+, x)$) de la matriz de Seifert.

3.5.1 Ejemplo: Nudo Trébol (3_1)

Numeramos el diagrama del nudo 3_1 , el Trébol izquierdo, (Figura 3-23) y producimos el nudo combinatorio

$$3_1 = \{\{1, -2, 3, -1, 2, -3\}, \{-1, -1, -1\}\}$$

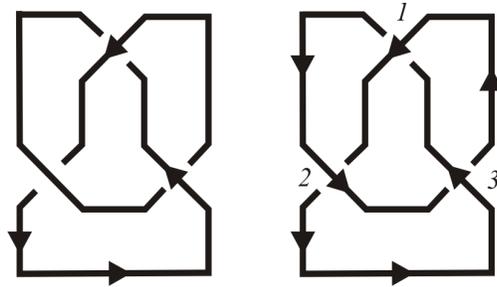


Figura 3-23: Diagrama del nudo Trébol.

Aristas: Las aristas del nudo 3_1 son $[1, -2], [-2, 3], [3, -1], [-1, 2], [2, -3], [-3, 1]$.

Círculos de Seifert:

$$C_1 = \{[1, -2], [2, -3], [3, -1]\}$$

$$C_2 = \{[-1, 2], [-2, 3], [-3, 1]\}$$

Posición de los círculos en cada cruce:

Izquierda	Cruce	Tipo (s_i)	Derecha
C_1	1	–	C_2
C_1	2	–	C_2
C_1	3	–	C_2

Grafo anidado: Figura 3-24 a) y b)

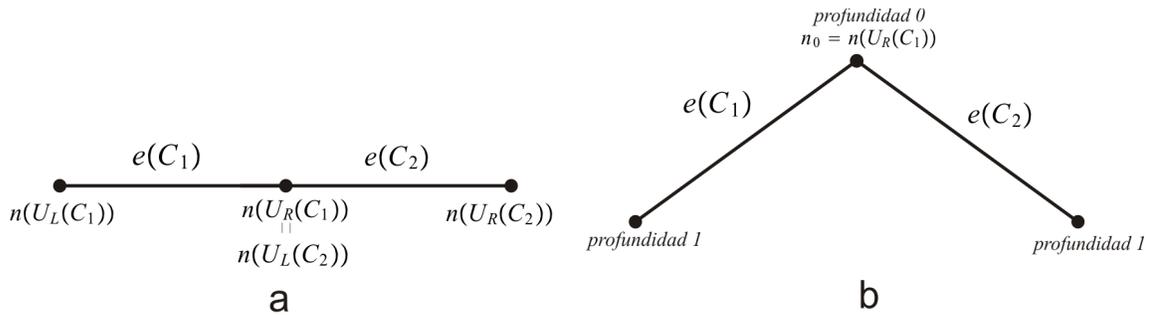


Figura 3-24: a) Grafo anidado $\mathcal{N}(D)$. b) Grafo anidado $\mathcal{N}^T(D)$ despues de escoger la raíz.

Altura de los círculos:

Círculos	Altura
C_1	0
C_2	0

Tipos de las bandas:

Banda	Tipo
B_1	L_1
B_2	L_1
B_3	L_1

Ciclos generadores en términos de los cruces: (A partir del grafo de Seifert)

$$z_1 = (1, 2) \quad z_2 = (2, 3)$$

Ciclos generadores en términos de las aristas ($R(z)$):

$$R(z_1) = ([1, -2], [-2, 3], [-3, 1]) \quad R(z_2) = ([2, -3], [-3, 1], [-1, 2])$$

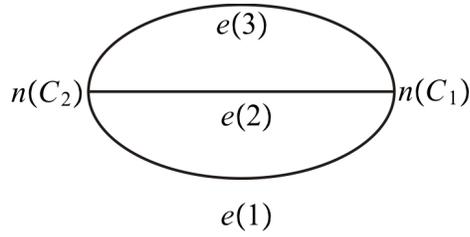


Figura 3-25: Grafo de Seifert $\mathcal{S}(D)$ del nudo Trebol

Forma de los caminos en cada banda:

Banda\Caminos	z_1	z_2
B_1	4	3
B_2	2	4
B_3	3	2

Tablas para hallar los números de enlace de cada par de caminos:

	(z_1, z_1)	$L(z_1^+, z_1)$	(z_1, z_2)	$L(z_1^+, z_2)$	$L(z_2^+, z_1)$	(z_2, z_2)	$L(z_2^+, z_2)$
B_1	(4,4)	+1	(4,3)	0	0	(3,3)	0
B_2	(2,2)	0	(2,4)	0	-1	(4,4)	+1
B_3	(3,3)	0	(3,2)	0	0	(2,2)	0
Total		+1		0	-1		+1

Matriz de Seifert:

$$\begin{array}{ccc}
 & z_1^+ & z_2^+ \\
 z_1 & +1 & 0 \\
 z_2 & -1 & +1
 \end{array}
 \iff
 \begin{bmatrix}
 +1 & -1 \\
 0 & +1
 \end{bmatrix}$$

3.6 Matriz de Seifert a partir de diagramas sin círculos de Seifert anidados

El algoritmo que hemos descrito nos proporciona la matriz de Seifert de cualquier nudo a partir de un diagrama arbitrario del mismo. Lo que se ha hecho tradicionalmente para calcular la

matriz de Seifert en forma manual, es emplear diagramas simples que permitan computarla casi de forma inmediata. A continuación presentaremos dos fórmulas para calcular la matriz de Seifert de un nudo pero a partir de diagramas que no tengan círculos de Seifert anidados. Primero estudiaremos el procedimiento hecho por Kauffman en [14] y luego la fórmula descrita por G. Burde y H. Zieschang en [2]

Ambos textos prueban que cualquier nudo tiene un diagrama con círculos de Seifert no anidados, llamados *proyección o diagrama especial*. Aunque en el Capítulo 2 ya dimos una prueba de este mismo hecho, daremos el método práctico descrito por Kauffman en [14].

Supongamos que tenemos un diagrama D de un nudo con círculos de Seifert anidados. Vamos a dibujar una curva γ correspondiente a un círculo que contenga otro. Escojamos un círculo de Seifert que contenga otro. Trazamos la curva γ siguiendo el círculo de tal manera que γ evita los cruces adyacentes al círculo sobrepasándolo, como se muestra en la Figura 3-26. Orientamos a γ en el sentido contrario a la orientación del círculo de Seifert, así γ y él acotan

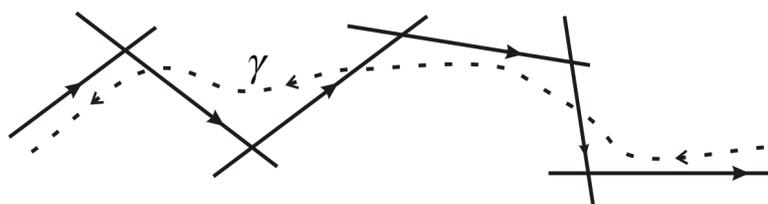


Figura 3-26: Curva γ (línea punteada), sobrepasando una porción de un círculo de Seifert que contiene a otro.

nuevas regiones que corresponden a nuevos círculos de Seifert no anidados. Con esto tenemos la siguiente proposición:

Proposición 3.6.1 *Sea D un diagrama orientado de un nudo y sea F la superficie canónica de K . Sea D' el diagrama obtenido de D añadiendo una curva γ por cada círculo de Seifert que contenga otro en D . Llamemos estas curvas como $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$, entonces D' sólo tiene círculos de Seifert no anidados y F es ambiente isotópica a $F' \cup D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_k$, donde D_i es un disco con frontera $\gamma_i, 1 \leq i \leq k$, y $D_i \cap D_j = \emptyset$ para $i \neq j$.*

En [2, Capítulo 13] definen proyección especial (o diagrama especial), que equivale a decir que un el diagrama no tiene círculos de Seifert anidados.

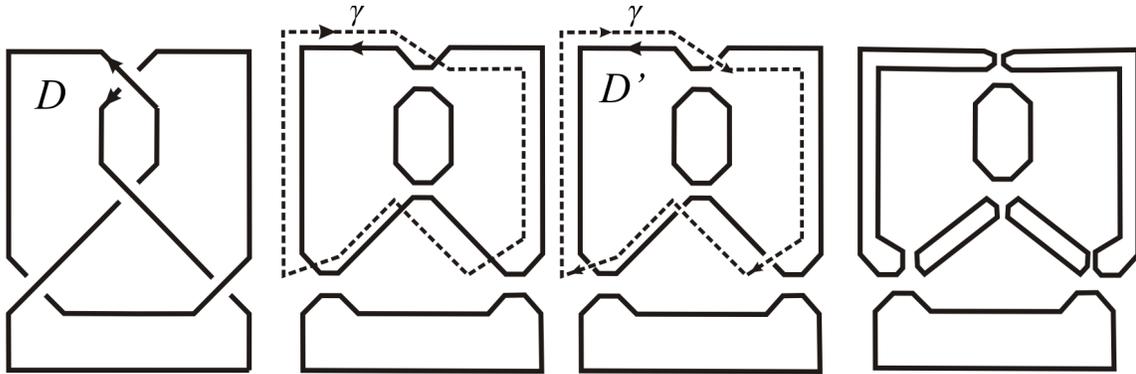


Figura 3-27: Método de Kauffman para desanidar los círculos de Seifert en el nudo ocho.

Definición 3.6.1 (Proyección especial) Sea D un diagrama de un nudo K en \mathbb{R}^2 . Coloremos las regiones conexas del diagrama con dos colores α y β como un tablero de ajedrez de tal manera que dos regiones que tengan el mismo color sólo se tocan en cruces. Llamaremos a las regiones α y β -regiones de acuerdo con el color que estén pintadas. También garantizamos que la región no acotada del diagrama sea una α -región. D es llamado una proyección (o diagrama) especial si la unión de las β -regiones es la imagen de una superficie de Seifert canónica de K para el diagrama D .

Fácilmente notamos que si D es un diagrama especial entonces D es un diagrama que no tiene círculos de Seifert anidados, pues como cada círculo corresponde a una β -región, entonces si existiera un círculo dentro de otro (anidado) una de las aristas que forma el círculo de adentro sería frontera de dos β -regiones adyacentes (la región acotada por el círculo interno y la acotada por círculo externo) y esto viola la regla de coloración.

Sea F una superficie de Seifert canónica, de género h , construida a partir de un diagrama especial D . Notemos que la importancia de tener un diagrama especial se refleja en poder escoger una base $\{a_i\}_{i=1, \dots, 2h}$ de $H_1(F)$, donde cada a_i será la frontera de cada α -región con $\{\alpha_i \mid 1 \leq i \leq 2h\}$, orientadas en el sentido contrario a las manecillas del reloj. (α_0 es la región no acotada del diagrama). Esta escogencia de la base coincide con los pasos explicados en la Sección 3.1.2. Como F es una superficie que está embebida en el plano excepto en la vecindades de los cruces, decimos que el lado de F que corresponde a la parte superior del plano es F^+ , y a la parte de abajo, F^- . Las curvas a_i se separan en a_i^+ y a_i^- .

3.6.1 Fórmula de Kauffman

Recordemos que las fronteras de las α -regiones son una base para $H_1(F)$, y para calcular la matriz de Seifert en éste caso basta determinar cómo contribuye cada cruce al número de enlace, pues los ciclos generados en este caso sólo se intersectarán en las vecindades de los cruces. En [14, Capítulo 7], se define la función $\theta(a, b) = \text{Link}(a^-, b)$, donde a y b denotarán dos α -regiones adyacentes y los ciclos correspondientes a ellas. Notemos que la definición que dimos en la Sección 1.3.2 es $\theta(a, b) = \text{Link}(a, b^+)$, pero es claro que éstas dos definiciones son equivalentes, pues a^+, a^-, b^+, b^- son homológicamente equivalentes. Resumimos entonces todos los posibles enlaces entre ciclos frontera en cada tipo de cruce positivo o negativo en la Figura 3-28.

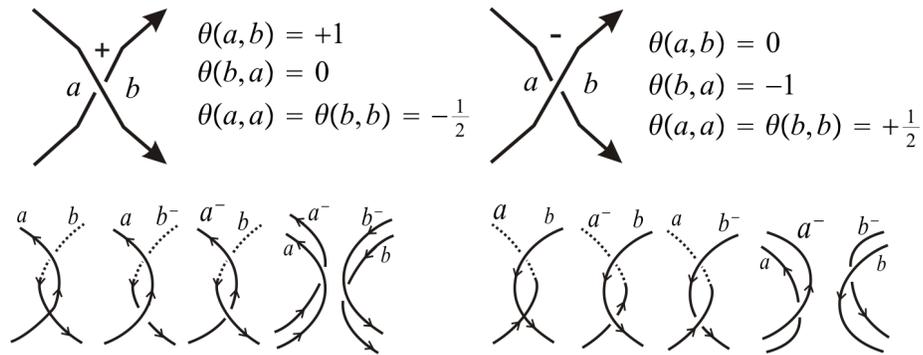


Figura 3-28: Fórmula para hallar los números de enlace en cada cruce de un diagrama especial.

Claramente, aquí se usa nuestra definición original de Matriz de Seifert, por tanto coincide con los resultados del algoritmo presentado, en el caso de los diagramas especiales.

3.6.2 Fórmula de Burde y Zieschang.

En el capítulo 13 de [2], se presenta una fórmula para hallar una “matriz de Seifert”, pero sólo funciona si usamos un diagrama del nudo que no tenga círculos de Seifert anidados.

Definición 3.6.2 (Funciones índice de un cruce) *Sea P un cruce de un diagrama especial. Definimos el índice θ de P de acuerdo con la Figura 3-29. Ahora si P está en la frontera de*

una región α_i , definimos el índice $\varepsilon_i(P)$ así:

$$\varepsilon_i(P) = \begin{cases} 1, & \text{si } \alpha_i \text{ está a la izquierda de la arista} \\ & \text{que pasa por debajo de } P, \\ 0, & \text{si está a la derecha} \end{cases}$$

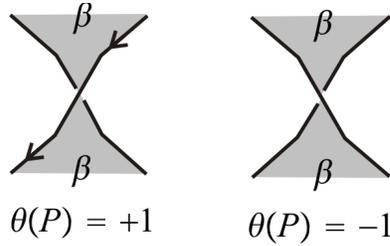


Figura 3-29: Índice $\theta(P)$

Haremos la siguiente convención para distinguir a_i^+ y a_i^- : si en una vecindad de un cruce, a_i recorre la frontera de α_i paralela a la arista que pasa por debajo de $\partial\alpha_i$, entonces a_i^+ atravesará por encima del plano proyección, de lo contrario lo recorrerá por debajo.

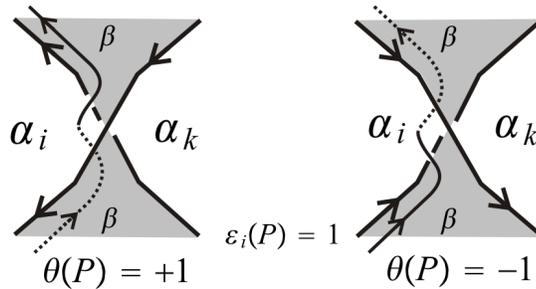


Figura 3-30: Cómo recorre a_i^+ la superficie en la vecindad de un cruce P .

Proposición 3.6.2 Sea D un diagrama especial de un nudo K con α -regiones α_i y funciones índices $\theta(P)$ y $\varepsilon_i(P)$ como en la definición anterior. Entonces una matriz de Seifert (v_{ik}) de K

está definida por la siguiente fórmula:

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{ii} = \sum_{P \in \partial \alpha_i} \theta(P) \varepsilon_i(P) \\ v_{ik} = \sum_{P \in \partial \alpha_i \cap \partial \alpha_k} \theta(P) \varepsilon_k(P) \end{array} \right. \quad (1)$$

En la Figura 3-31 analizamos la construcción geométrica siguiendo los 4 posibles casos que nos permite las definiciones de los índices de un cruce.

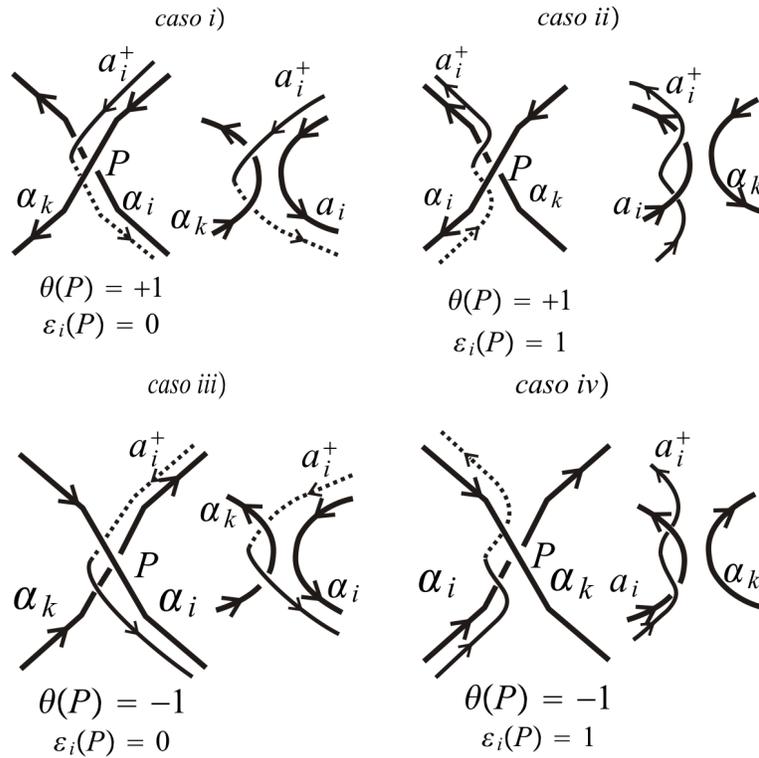


Figura 3-31: Configuraciones de a_i y a_i^+ en los posibles cruces de un diagrama.

Resumimos entonces en la siguiente tabla los resultados para cada caso del número de enlace calculado geoméricamente y la contribución con la fórmula en el cruce.

	$Lk(a_i^+, a_i)$	$Lk(a_i^+, a_k)$	$P \in \partial\alpha_i$ $\theta(P)\varepsilon_i(P)$	$P \in \partial\alpha_i \cap \partial\alpha_k$ $\theta(P)\varepsilon_k(P)$
caso i)	0	-1	0	+1
caso ii)	+1	0	+1	0
caso iii)	0	+1	0	-1
caso iv)	-1	0	-1	0

(3.2)

Los números en las columnas $Lk(a_i^+, a_k)$ y $\theta(P)\varepsilon_k(P)$ para $P \in \partial\alpha_i \cap \partial\alpha_k$ de la tabla 3.2 difieren en el signo, lo que nos permite concluir que si $M = [w_{ij}]$ es la matriz de Seifert calculada por la definición habitual (con el número de enlace) y $M' = [v_{ij}]$ es la matriz de Seifert calculada por la fórmula entonces, $w_{ij} = -v_{ji}$, si $i \neq j$, y $w_{ii} = v_{ii}$.

Notemos que si cambiamos la definición del índice $\varepsilon_i(P)$ por

$$\varepsilon_i(P) = \begin{cases} 0, & \text{si está a la izquierda} \\ 1, & \text{si } \alpha_i \text{ está a la derecha de la arista que pasa por debajo de } P \end{cases}$$

la relación entre las matrices es $w_{ij} = -v_{ij}$ si $i \neq j$, y $w_{ii} = v_{ii}$. Este cambio es simplemente un cambio de convención, por tanto no afecta la definición de la matriz con la Fórmula 1. Así, con esta última definición, probamos que si la matriz es de orden 2, es decir, el género de F es 1, entonces las matrices M y M' son S-equivalentes, pues la matriz $P = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ es tal que $PMPT = M'$.

Para géneros mayores estrictamente a 1 encontramos problemas con la afirmación de que las matrices construidas con ambos métodos son S-equivalentes. Por ejemplo, al calcular la matriz V empleando la Fórmula 1 y la matriz W usando el método descrito en este capítulo (o la fórmula de Kauffman) del nudo 8_{20} , cuyo diagrama especial fue tomado del libro [2, Capítulo

13], obtenemos:

$$V = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad W = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Si calculamos el polinomio de Alexander a partir de la matriz W obtenemos el correcto para el nudo 8_{20}

$$\Delta_{8_{20}}(x) = x^{-4} - 2x^{-2} + 3 - 2x^2 + x^4$$

pero si calculamos el polinomio de Alexander a partir de la matriz V obtenemos $x^{-4} + 2x^{-2} - 5 + 2x^2 + x^4$. Los polinomios no son iguales, y esto significa que las matrices V y W no pueden ser S-equivalentes. Creemos que el problema es un error de imprenta en el libro [2].

Capítulo 4

Nudos Virtuales

Recientemente, se ha estado estudiando una categoría de embebimientos del círculo en 3-variedades de la forma $\Sigma_g \times [0, 1]$, donde Σ_g es una superficie orientable, esta categoría se conoce como la teoría de los nudos virtuales, y es una extensión no trivial de la teoría de nudos clásicos.

Usando el lenguaje de los grafos, un diagrama de un nudo clásico es un grafo planar 4-valente y orientado con vértices clasificados de acuerdo a la Figura 1-8 a). Con base en esto extendemos el concepto de diagrama de un nudo a lo que se conoce como diagrama de un nudo virtual. Un *diagrama de un nudo virtual* es un grafo planar 4-valente y orientado, con vértices clasificados de acuerdo a la Figura 1-8 a) y un nuevo tipo de cruce, denominado *cruce virtual*, el cual se muestra en la Figura 4-1.

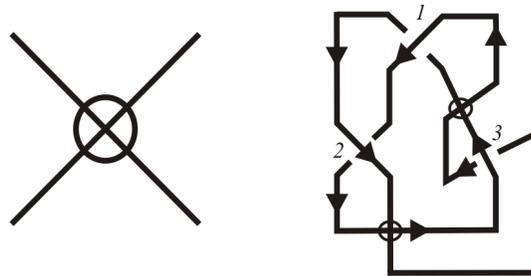


Figura 4-1: Cruce virtual y diagrama de un nudo virtual.

Un *nudo virtual* es una clase de equivalencia de diagramas de nudos virtuales, es decir, dos diagramas virtuales pueden corresponder a una misma clase de equivalencia. Dicha relación se llama: *equivalencia virtual*. Dos diagramas de nudos virtuales se dicen virtualmente equivalentes, si uno puede ser transformado en otro por medio de un número finito de *movimientos generalizados de Reidemeister*. Igualmente, en [28], se explican dichos movimientos.

Motivados por el siguiente teorema, probado en [28], queremos usar las herramientas de la

teoría de los nudos clásicos para determinar cuándo un nudo combinatorio cualquiera es realizable. Además determinar si existen superficies análogas a las superficies de Seifert asociadas a los nudos virtuales que no sean clásicos.

Teorema 4.0.3 *Todo nudo combinatorio $K = \{\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2m}\}, \{s_1, s_2, \dots, s_m\}\}$ representa un único nudo virtual.*

Antes de continuar queremos enfatizar la siguiente definición:

Definición 4.0.3 *Un nudo combinatorio K que tenga un diagrama en el plano, sin cruces virtuales se dice que es realizable. Claramente todo nudo clásico admite un nudo combinatorio realizable.*

En este trabajo nos concentraremos en encontrar condiciones para que un nudo combinatorio particular K sea realizable. Hay un problema más sutil, que no trataremos aquí, que consiste en determinar si en la clase de equivalencia de K existe un nudo realizable.

4.1 Cuándo un nudo combinatorio no trivial es realizable

Utilizaremos el lenguaje y los procedimientos descritos en el algoritmo de la matriz de Seifert con el fin de dar condiciones necesarias y suficientes para determinar si un nudo combinatorio no trivial es *realizable* o no. Pero resaltemos que, de antemano estamos suponiendo que el nudo combinatorio es *no trivial*, pues no abordaremos el problema de distinguir la trivialidad.

Teorema 4.1.1 *Sea K un nudo combinatorio no trivial. K no es realizable si y sólo si al seguir los pasos del algoritmo de la matriz de Seifert ocurre alguna de las siguientes situaciones:*

1. *Sólo aparece un círculo de Seifert.*
2. *Al determinar la posición relativa de los círculos de Seifert se tiene que dos círculos están a la derecha y a la izquierda al mismo tiempo.*
3. *En la representación de los círculos de Seifert por secuencias de aristas aparecen en un mismo círculo aristas de la forma $[x_-, c]$, $[-c, y_-]$ y $[z_-, -c]$, $[c, w_-]$.*

Prueba. Supongamos que K no es realizable en el plano, por tanto al intentar dibujar un diagrama para K en el plano aparecen cruces virtuales. Comenzamos formando las aristas y los círculos de Seifert con el procedimiento descrito en el Capítulo 3 a partir del nudo combinatorio. Si no ocurre ninguna de las situaciones a), b) ó c) entonces fácilmente vemos que podemos continuar el algoritmo y reconstruir los grafos del nudo (el grafo anidado y grafo de Seifert) y así es posible dibujar en el plano los círculos de Seifert disjuntos, como aparecen cuando aplicamos el algoritmo de Seifert. Por tanto se construye la superficie canónica para K cuya frontera es precisamente K . Luego el nudo es claramente realizable en el plano, lo que contradice nuestra hipótesis. Recíprocamente, veamos que si tenemos a), b) ó c) entonces K no puede ser realizable. Claramente, el único nudo realizable con un sólo círculo de Seifert es el trivial, por tanto si ocurre a), K no es clásico, pues K no es trivial. Ahora, en el caso clásico cada círculo de Seifert es frontera de exactamente dos regiones (componentes conexas) y los cruces en común entre dos círculos (los cruces correspondientes a las bandas que los conectan) están en una misma región. Si al determinar la posición relativa de los círculos, encontramos que dos círculos, digamos C_i y C_j ; están al mismo tiempo a derecha e izquierda, entonces existen al menos dos cruces c y q en común entre ellos que están a la vez a derecha e izquierda de C_i y de C_j , y esto implica que los cruces c y q están en distintas componentes, es decir, el caso b) implica que K no es realizable. Por último, si en la representación de los círculos por secuencias de aristas aparecen en un mismo círculo las aristas $[x_-, c]$, $[-c, y_-]$ y $[z_-, -c]$, $[c, w_-]$ significa que la banda correspondiente al cruce c une el círculo con sí mismo, pero fácilmente se ve que al modificar los cruces del diagrama de un nudo clásico como en la Figura 1-4, cada banda une dos círculos adyacentes y distintos. ■

4.2 Superficies y nudos virtuales

En ésta sección hablaremos de dos superficies relacionadas con los nudos virtuales, la primera, conocida como la *superficie de Carter*, construida por Scott Carter en [3] que, es importante porque todo nudo combinatorio K se puede realizar en una Superficie de Carter. La segunda, es la *superficie canónica asociada a un nudo virtual*, y es una superficie que hemos construido dando un algoritmo a partir del nudo combinatorio. Su nombre es debido a que es una analogía

con la superficie canónica asociada a un nudo clásico.

Para abordar ambas superficies hablaremos de superficies trianguladas, por tanto cabe recordar aquí la definición tomada de [18]:

Definición 4.2.1 *Una superficie triangulada es un 2-complejo simplicial tal que*

1. *Cada arista es identificada con a lo sumo otra arista.*
2. *Los triángulos que se tocan en un vértice pueden ser etiquetados con una secuencia T_1, T_2, \dots, T_n , identificados a lo largo de una arista y T_n puede estar pegado con T_1 a lo largo de una arista o T_n y T_1 tienen cada uno una arista en la frontera.*
3. *Ninguna arista que no esté en la frontera puede tener ambos vértices en la frontera.*

4.2.1 Superficie de Carter

Dado un nudo combinatorio K , la *superficie de Carter*, creada con el algoritmo que implementó Carter en [3], es una superficie cerrada, orientable de género mínimo donde podemos realizar a K , es decir, una superficie donde podemos dibujar a K sin cruces virtuales. Sea $K = \{\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2m}\}, \{s_1, s_2, \dots, s_m\}\}$, un nudo combinatorio. La superficie será un 2-complejo donde los vértices son nombrados con $1, 2, \dots, m$. Los lados son las aristas:

$$[\alpha_1, \alpha_2], [\alpha_2, \alpha_3], \dots, [\alpha_i, \alpha_{i+1}], [\alpha_{i+1}, \alpha_{i+2}], \dots, [\alpha_{2m}, \alpha_1].$$

Si recorremos el lado de α_{t+1} a α_t diremos que se está recorriendo en dirección negativa y lo denotaremos por $-[\alpha_t, \alpha_{t+1}]$. Las caras son polígonos cuyas fronteras están formados por los lados que cumplan algunas de las siguientes reglas. Sea $j = i_t$ para algún $t = 1, 2, \dots, m$ y $-j = i_s$ para algún $s \neq t$, $s = 1, 2, \dots, m$, j un entero positivo.

Regla 1: si estamos recorriendo el lado $[\alpha_{t-1}, j]$ al llegar al vértice j seguimos por $-\alpha_{s-1}, -j]$, si $s_j = -1$, o por $[-j, \alpha_{s+1}]$, si $s_j = +1$

Regla 2: si estamos recorriendo el lado $-[j, \alpha_{t+1}]$ al llegar al vértice j seguimos por $[-j, \alpha_{s+1}]$, si $s_j = -1$, o por $-\alpha_{s-1}, -j]$, si $s_j = +1$

Regla 3: si estamos recorriendo el lado $[\alpha_{s-1}, -j]$ al llegar al vértice j seguimos por $[j, \alpha_{t+1}]$, si $s_j = -1$, o por $-\alpha_{t-1}, j]$, si $s_j = +1$

Regla 4: si estamos recorriendo el lado $[-j, \alpha_{s+1}]$ al llegar al vértice j seguimos por $-\alpha_{t-1}, j]$, si $s_j = -1$, o por $[j, \alpha_{t+1}]$, si $s_j = +1$

Para recordar fácilmente estas reglas es útil tener en cuenta la estructura que se muestra en la Figura 4-2, cuando llegamos al vértice j .

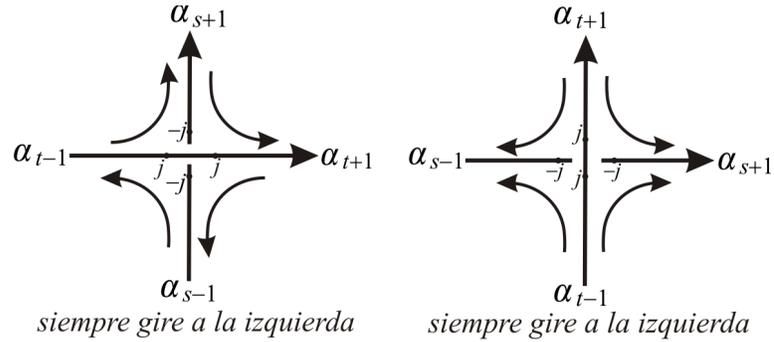


Figura 4-2: Cómo recordar las reglas de Carter

Esta construcción garantiza que las caras del complejo sólo se intersecten en los lados definidos, por tanto sí se construye una superficie. Además se usa un número finito de polígonos y la superficie sólo tiene una componente, luego ella es compacta y conexa, [18, Teoremas 4.12 y 4.13].

4.2.2 Superficies Canónicas

Cómo mencionamos al inicio de la Sección, vamos a construir lo que hemos llamado *superficie canónica de un nudo virtual*, para ello daremos un algoritmo para crear una triangulación de ella, pues sabemos que toda superficie F admite una triangulación, es decir, F puede ser representada como una colección finita de triángulos pegados a lo largo de sus aristas siguiendo la definición anterior. Pero, primero daremos un algoritmo para describir la superficie canónica triangulada de un nudo combinatorio clásico, pues la construcción de la superficie triangulada en el caso virtual será casi idéntica al caso clásico.

4.2.2.1 Triangulación de la superficie canónica de un nudo clásico

A continuación presentaremos un algoritmo para construir, a partir del nudo combinatorio K de un nudo clásico, una triangulación F_K para la superficie canónica asociada a K .

Sea $K = \{\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2m}\}, \{s_1, s_2, \dots, s_m\}\}$ un nudo combinatorio. Entonces como vimos en la definición de nudo combinatorio $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2m}\} = \{\pm 1, \pm 2, \dots, \pm m\}$. Describiremos el 2-complejo F_K en términos de sus vértices, aristas, caras y una regla de pegado. Tendremos en cuenta los procedimientos de las Secciones 3.2.1 y 3.2.2 para lo que sigue.

Recordemos que la superficie canónica es formada pegando los discos de Seifert con bandas B_c giradas positiva o negativamente (dependiendo del cruce c) y en el lugar de c . Digamos que cada círculo de Seifert C_i tiene r_i aristas, (en su representación de aristas), entonces cada disco cuya frontera es C_i , será triangulado con $2r_i$ triángulos y veremos el disco como un polígono de $2r_i$ lados. Cada banda será triangulada con cuatro triángulos, como en la Figura 4-3.

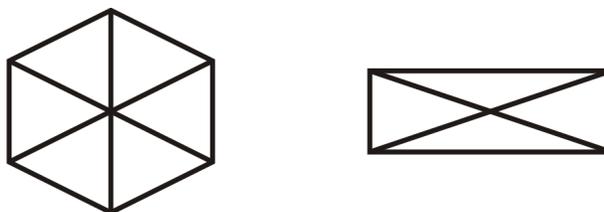


Figura 4-3: Triangulación de un disco de tres aristas, y una banda.

Vértices: estarán nombrados con los números $\pm 1^e, \pm 1^s, \pm 2^e, \pm 2^s, \dots, \pm m^e, \pm m^s$, los cuáles indican cómo se comporta el nudo en cada cruce, los signos $+$ y $-$ indican que pasa por encima o por debajo respectivamente, y las letras e y s indican si entra al cruce o sale de él. Onsevemos que por cada cruce inicial aparecen 4 vértices.

Aristas: Usaremos las aristas del nudo combinatorio K pero con un cambio en la notación: la arista $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ será $[\alpha_i^s, \alpha_{i+1}^e]$. Este cambio lo hacemos porque, si bien nuestra representación original de aristas distingue cómo entran y salen las aristas del cruce, aquí necesitamos distinguir que $\alpha_i^e, -\alpha_i^e, \alpha_i^s, -\alpha_i^s$, indican 4 vértices distintos. Además usaremos las aristas de la forma $[\pm c^e, \pm c^s]$, que corresponden a las aristas de la bandas y los llamaremos *lado-cruce*.

En general, si recorremos la arista $[\alpha_i^s, \alpha_{i+1}^e]$ de α_i^s hasta α_{i+1}^e diremos que el lado está

definido positivo, y si se recorre de α_{t+1}^e hasta α_t^s se dice que el lado se está recorriendo en dirección negativa y se denotará por $-[\alpha_t^s, \alpha_{t+1}^e]$. Análogamente, si recorremos el lado-cruce $[\pm c^e, \pm c^s]$ de $\pm c^e$ hasta $\pm c^s$, diremos que el lado está definido positivo, de lo contrario, si vamos de $\pm c^s$ hasta $\pm c^e$, estamos recorriendo el lado negativamente y escribiremos $-[\pm c^e, \pm c^s]$.

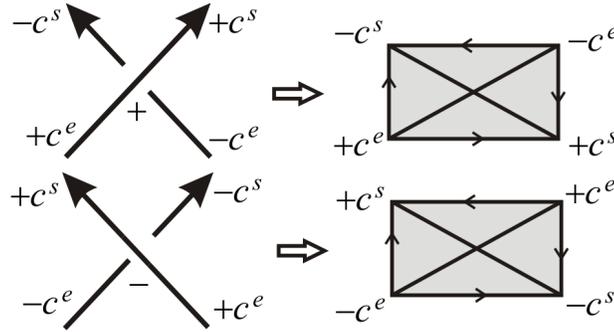


Figura 4-4: Lados en una banda B_c

Caras: Las caras serán los polígonos correspondientes a los discos y los rectángulos correspondientes a las bandas. Veamos cómo se forman las fronteras de los discos. Tomemos el disco (polígono) cuya frontera es C_i y recorremos cualquiera de sus aristas, digamos $[\alpha_t^s, \alpha_{t+1}^e]$, entonces seguimos por el lado $[\alpha_{t+1}^e, -\alpha_{t+1}^s]$, luego por la arista que sigue de $[\alpha_t^s, \alpha_{t+1}^e]$ en C_i , y repetimos lo anterior, hasta llegar a la última arista y el último lado-cruce correspondiente a la segunda componente de ésta arista final.

La frontera de cada banda B_c está dada por: $\partial f_{B_c} = [-c^e, -c^s] - [+c^e, -c^s] + [+c^e, +c^s] - [-c^e, +c^s]$.

Reglas de pegado:

1. Para identificar las caras, claramente debemos hacer coincidir sus lados comunes y orientaciones, y para ello debemos hacer un giro a cada banda B_c . En éste pegado dicho giro no puede ser arbitrario, debemos hacer el giro según el signo de c como mostramos en la Figura 1-6.
2. Todo polígono puede ser orientado coherentemente, es decir, si uno de sus triángulos lo orientamos en alguna dirección, entonces todos los triángulos quedan orientados en el mismo sentido, ésto ocurre ya que la unión de las aristas frontera de dicho polígono

corresponden a un círculo de Seifert. Recordemos entonces que cuando el polígono quede orientado en la dirección de las manecillas del reloj entonces pintaremos la cara superior blanca, en el caso contrario, negra. La Figura 4-5 muestra cómo se orientan las bandas.

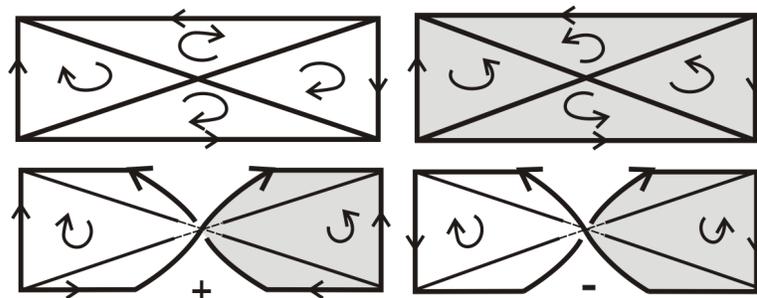


Figura 4-5: Orientaciones en las bandas

- Al identificar los lado-cruces de una banda B_c con los respectivos polígonos adyacentes (que tengan cruces en común), sólo permitimos un *pegado válido*, de tal forma que los dos polígonos adyacentes luzcan como en la Figura 4-6.

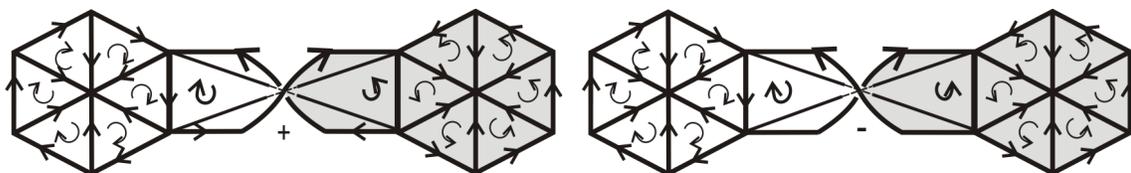


Figura 4-6: Pegado válido de una banda con dos polígonos.

No permitimos situaciones como las mostradas en la Figura 4-7, y tampoco es posible pegar dos lado-cruces de una banda con un mismo polígono, como se muestra en la Figura 4-8

Lema 4.2.1 *El 2-complejo simplicial F_K que acabamos de construir es una superficie triangulada orientable cuya frontera es K .*

Prueba. Fácilmente se ve que la definición de triangulación se cumple. Ahora, sabemos que una superficie triangulada es orientable si podemos orientar todos sus triángulos coherente-

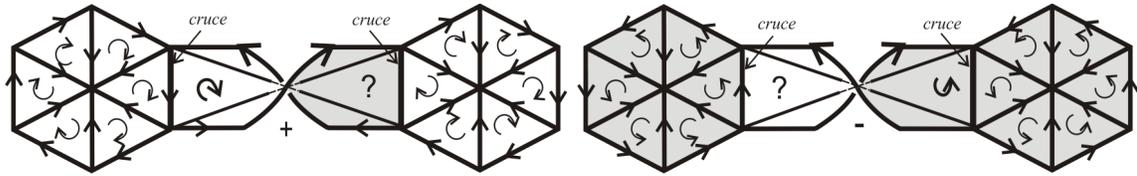


Figura 4-7: Pegado no válido.

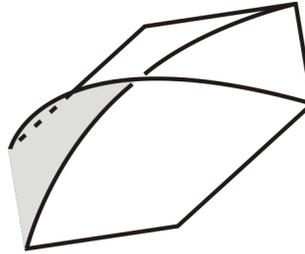


Figura 4-8: Pegado no válido. Una banda pegada de un sólo disco.

mente, ver [10, Capítulo 4]. Escojamos cualquier polígono, y de él elijamos un triángulo y una orientación cualquiera, entonces todo el polígono queda orientado coherentemente. Entonces, si elegimos la orientación de las manecillas del reloj, pegamos las bandas giradas por la parte blanca en la cara superior, y notemos que el giro no cambia la orientación, pues la parte blanca se convierte en la cara inferior y continúa con la orientación de la manecillas. Análogamente ocurre si desde el principio elegimos la orientación en contra de las manecillas. En la Figura 4-6 ilustramos lo que pasa. Como estamos trabajando con un nudo clásico su diagrama es realizable en el plano, entonces estamos bajo las buenas condiciones que nos garantiza el algoritmo de Seifert, es decir, siempre podemos hacer pegados válidos, ya que todos los círculos de Seifert adyacentes sólo tienen dos maneras de configurarse: uno al lado del otro o uno dentro del otro, y ambos casos, al verlos localmente y en el plano se ven como en la Figura 4-6. Además se tiene que los círculos son disjuntos y también podemos determinar posiciones relativas coherentes entre los círculos y los cruces, es decir, siempre podemos determinar cuándo un círculo está a la derecha o izquierda de otro, o cuándo un cruce está a la derecha o izquierda de un círculo. Notemos que en los pegados no válidos un mismo cruce puede estar al mismo lado de dos polígonos adyacentes, o ser parte de uno solo. Así, todos los polígonos y las bandas quedan bien orientados,

por tanto F_K es un superficie orientable. Es fácil ver que la frontera de F_k es precisamente K , pues cuando sumamos las fronteras de las caras obtenemos lo siguiente: $\partial(\sum f_{C_i} + \sum f_{B_j}) = [\alpha_1^s, \alpha_2^e] + [\alpha_2^e, \alpha_2^s] + [\alpha_2^s, \alpha_3^e] + [\alpha_3^e, \alpha_3^s] + \dots + [\alpha_i^s, \alpha_{i+1}^e] + [\alpha_{i+1}^e, \alpha_{i+1}^s] + [\alpha_{i+1}^s, \alpha_{i+1}^e] + \dots + [\alpha_{2m}^s, \alpha_1^e] + [\alpha_1^e, \alpha_1^s]$.

Notemos que ésta expresión es precisamente el recorrido de las aristas del nudo junto con los lado-cruces, que nos indican que estamos pasando por un cruce, por debajo o por encima. Así, F_k es un 2-complejo cuya frontera es K . ■

Ejemplo 4.2.1 Sea $K = \{\{1, -2, 3, -1, 2, -3\}, \{-1, -1, -1\}\}$, el nudo combinatorio del Trébol. Los vértices son los números $+1^e, -1^s, +2^e, -2^s, +3^e, -3^s$, las aristas son: $[1^s, -2^e], [2^s, -3^e], [3^s, -1^e], [-1^s, 2^e], [-2^s, 3^e], [-3^s, 1^e]$ y $[+1^e, -1^s], [-1^e, +1^s], [+2^e, -2^s], [-2^e, +2^s], [+3^e, -3^s], [-3^e, +3^s]$. Las fronteras de las caras son:

$$\begin{aligned}\partial f_{C_1} &= [1^s, -2^e] + [-2^e, +2^s] + [2^s, -3^e] + [-3^e, +3^s] + [3^s, -1^e] + [-1^e, +1^s], \\ \partial f_{C_2} &= [-1^s, 2^e] + [+2^e, -2^s] + [-2^s, 3^e] + [+3^e, -3^s] + [-3^s, 1^e] + [+1^e, -1^s], \\ \partial f_{B_1} &= [-1^e, -1^s] - [+1^e, -1^s] + [+1^e, +1^s] - [-1^e, +1^s], \\ \partial f_{B_2} &= [-2^e, -2^s] - [+2^e, -2^s] + [+2^e, +2^s] - [-2^e, +2^s], \\ \partial f_{B_3} &= [-3^e, -3^s] - [+3^e, -3^s] + [+3^e, +3^s] - [-3^e, +3^s].\end{aligned}$$

Para pegar $[-1^e, +1^s]$ con $-[-1^e, +1^s]$ y $[+1^e, -1^s]$ con $-[+1^e, -1^s]$ debemos girar la banda B_1 en sentido negativo. Análogamente con los cruces 2 y 3.

4.2.2.2 Triangulación de la superficie canónica de un nudo virtual.

Con lo anterior nos hacemos la siguiente pregunta: *¿Será posible entonces construir una superficie canónica para un nudo K que no sea clásico?* Para responder esto, notemos que dado un nudo combinatorio K , podemos seguir los pasos que acabamos de describir para obtener una triangulación sin ningún inconveniente, hasta que nos encontramos con la regla de pegado. Es posible que al identificar los lado-cruces de las bandas con los polígonos no nos quede posibilidad de hacer pegados válidos, dicho de otra forma, nos encontramos en una situación como las mostradas en la Figura 4-7, o debemos pegar una banda completamente con un mismo polígono (notemos que estas situaciones corresponden a las mencionadas en el Teorema 4.1.1). Entonces

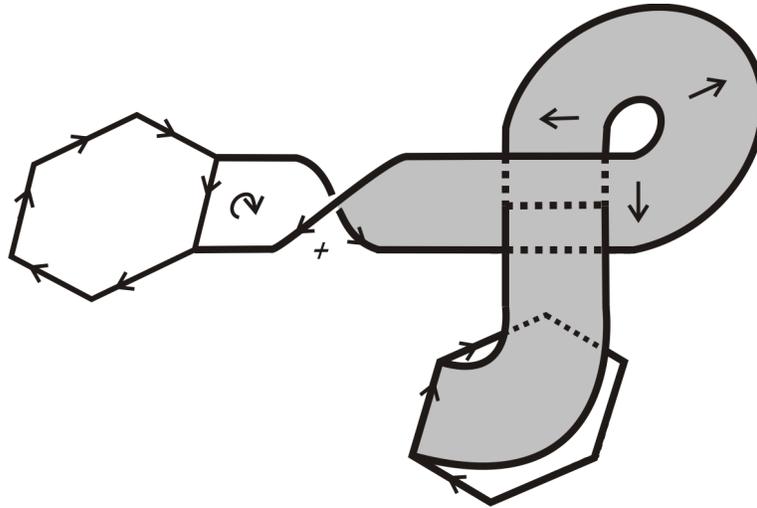


Figura 4-9: Banda intersectándose así misma en \mathbb{R}^4 .

para hacer una buena identificación de las caras en la triangulación no es posible embeber F_K en \mathbb{R}^3 , ya que debemos hacer pasar las bandas a través de sí mismas, pero sin “tocarse”, con el fin de hacer coincidir las flechas, como ocurre en el caso de la *Botella de Klein*, donde no es posible hacerlo en el mundo 3-dimensional, pero es teóricamente correcto en el 4-dimensional. Así, en el caso en que K corresponda a un nudo virtual, aplicamos el mismo algoritmo anterior para construir F_K , la *superficie canónica de K* , pero tenemos en cuenta que aquí la regla de pegado cambia. La Figura 4-9, ilustra una representación abstracta del pegado de una banda con dos polígonos. Así, construimos una superficie canónica, cuya frontera es el nudo virtual K , que queda embebida en \mathbb{R}^4 .

4.3 Conclusiones

El estudio de las superficies ha sido fundamental para enriquecer la teoría clásica de nudos. La clasificación y las propiedades de los nudos se han derivado en gran parte de las superficies asociadas a ellos. Las superficies asociadas a nudos son parte de su complemento, y básicamente las características de un nudo o un enlace se pueden identificar estudiando dicho complemento. Esta es una de las razones por las cuales en esta tesis se examinó uno de los invariantes más directamente relacionado con las superficies, el género de un enlace, y se resaltó que las ca-

racterísticas asociadas al género han permitido descubrir la existencia de nudos o familias de enlaces que cumplen propiedades especiales, como se puede encontrar en [22], [16], [19], entre otros trabajos estudiados en el Capítulo 2.

El Capítulo 3 se ocupa del estudio de tres métodos para calcular la matriz de Seifert, pues esta se deriva de una de las superficies más importantes asociadas a un nudo, la superficie canónica. El interés principal fue exponer la idea del algoritmo presentado por K. M. O'Brien en [26], pero este algoritmo fue desarrollado usando el lenguaje de los nudos combinatorios, lo que se tradujo en una considerable simplificación del procedimiento, el cual se implementó usando el programa Mathematica. Usando los resultados en dicho algoritmo, y los nudos combinatorios como herramienta para estudiar nudos virtuales, se presenta en el Capítulo 4 condiciones necesarias y suficientes para determinar cuando un nudo combinatorio no trivial es realizable en el plano. Además, con el fin de continuar el estudio de las superficies asociadas a nudos, se extendieron los resultados de la superficie canónica de un nudo clásico a nudos virtuales, es decir, se construyó una superficie embebida en \mathbb{R}^4 asociada a un nudo virtual. Dicha construcción se hizo presentando una triangulación de tal superficie, para ello primero se desarrolló un algoritmo propio para triangular la superficie canónica de un nudo clásico a partir de su nudo combinatorio.

Bibliografía

- [1] J. S Birman y E. Finkelstein, *Studying surfaces via closed braids*, J. Knot Theory and its Ramifications, **Vol 7**, N 3 (1998).
- [2] G. H Burde y H. Zieschang, *Knots*, Walter de Gruyter, 1985.
- [3] J. Carter, *Classifying Immersed curves*, Proc. Amer. Math. Soc., **Vol 111**, N 1 (1991), 281-287.
- [4] J. S. Carter, *How surfaces intersec in space. An introduccion to topology*, World Scientific, 1995.
- [5] J. Collins, *An algorithm for computing the Seifert matrix of a link from a braid representation*, PDF, University of Edinburgh, School of Mathematics, 2007. Disponible en línea en <http://www.maths.ed.ac.uk/~s0681349/SeifertMatrix/SeifertMatrix.pdf>
- [6] P. Cromwell, *Knots and links*, Cambridge University Press, 2004.
- [7] Do Hoo Choi, *Algorithm reading off a braid word from Yamada-Vogel construction*, Tesis de Maestría, Korea advanced Institute of Science and Technology, Korea.
- [8] G. K. Francis y J. R. Weeks, Conway's ZIP proof, Amer. Math. Monthly, **Vol 106** (1999), 393-399.
- [9] S. Friedl, Algorithm for finding boundary link Seifert matrices, J. Knot Theory and its Ramifications, **Vol 15**, N 5 (2006), 601-612.
- [10] N.D. Gilbert y T. Porter, *Knots and Surfaces*, Oxford University Press, 1994.
- [11] M. Hirasawa, *The flat genus of links*, Kobe J. Math, **Vol. 12**, N 2 (1995), 155-159.

- [12] O. Kakimizu, *Classification of the incompressible spanning surfaces for prime knots of 10 or less crossings*, Hiroshima Math. J. **Vol 35** (2005), 47-92.
- [13] O. Kakimizu, *Finding disjoint incompressible spanning surfaces for a link*, Hiroshima Math. J. **Vol 22** (1992), 225-236.
- [14] L.H. Kauffman, *On Knots*, Princeton University Press, 1987.
- [15] L.H. Kauffman, *Virtual Knot theory*, European J. Combi., **Vol 20** (1999), 663-690.
- [16] A. Kawauchi, *On coefficient polynomials of the skein polynomial of an oriented link*, Kobe J. Math, **Vol. 11** (1994), 49-68.
- [17] A. Kawauchi, *A survey of knot theory*, Birkhäuser Verlag, 1996.
- [18] L.C. Kinsey, *Topology of Surfaces*, Springer-Verlag, 1993.
- [19] M. Kobayashi y T. Kobayashi, *On canonical genus and free genus of knot*, J. Knot Theory and Its Ramifications, **Vol. 5**, N 1 (1996), 77-85.
- [20] H.C. Lyon, *Incompressible surfaces in knot spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., **Vol. 157** (1971), 53-62.
- [21] H.C. Lyon, *Knots without unknotted incompressible spanning surfaces*, Proc. Amer. Math. Soc., **Vol. 35** (1972), 617-620.
- [22] Y. Moriah, *On the free genus of knots*, Proc. Amer. Math. Soc., **Vol. 99** (1986), 107-109.
- [23] K. Murasugi, *Knot theory and its applications*, Birkhäuser, 1996.
- [24] K. Murasugi, *On a Certain Numerical Invariant of Link Types*, Trans. Amer. Math. Soc., **Vol. 117** (1965), 387-422.
- [25] T. Nakamura, *On the crossing number of knot and the canonical genus of its whitehead double*, Proceedings of the East Asian School of Knots, Links, and Related Topics, Febrero 16-20, 2004, Seoul, Korea.
- [26] K. M. O'Brien, *Seifert's Algorithm, Chatelet Bases and the Alexander Ideals of Classical Knots*, Tesis Doctoral, University of Durham, 2002.

- [27] M. Ozawa, Satellite Knots of free genus one, *J. Knot Theory and its Ramifications*, **Vol 8**, N 1 (1999), 27-31.
- [28] J. G. Rodríguez y M.M. Toro, Nudos combinatorios: una nueva visión de los nudos virtuales, Universidad Nacional de Colombia, (2008).
- [29] C.B. Schaefele, *The commutator group of a doble knot*, *Duke Math. J.* **Vol. 34** (1967), 677-681.
- [30] H. Seifert, *Über das Geschlecht von Knoten*, *Math. Ann.* **Vol 110** (1934), 571-592.
- [31] A. Stoimenow, V. Tchernov y A. Vdovina, *The Canonical Genus of a Classical and Virtual Knot*, *Geometriae Dedicata*, **Vol 95** (2002), 215-225.
- [32] P. Vogel, *Representation of links by braids, a new algorithm*, *Comment. Math. Helvetici* **Vol 65** (1990), 104-113.
- [33] D. B. West, *Introduction to the graph Theory*, Prentice Hall, 2001.
- [34] J. V. Wijk y A. M. Cohen, *Visualization of Seifert Surfaces*, *IEEE Trans. on Visualization and Computer Graphics*, **Vol 12**, N 4 (2006), 485-496.