Suite III - Die Elementare

Teil 1: Essays 155 -170

x induktiv. Menge der natürlichen Zahlen. $\mathbb{N}$. Menge der ganzen Zahlen. $\mathbb{Z}$. VerschiebungsRegeln $\leq, <$. LückenSatz $\mathbb{N}$. LückenSatz $\mathbb{Z}$. $\{x, \ldots, y\}$. $\{x, \ldots\}$. $\{\ldots, y\}$. InduktionsSatz $\mathbb{N}$. InduktionsSatz $\mathbb{Z}$.

Andreas Unterreiter

22. August 2013

In **Suite I** ist mit der Einführung der Parameter $-\infty$ und ∞ eine ärgerliche Ungenauigkeit geschehen, die nun rückgängig gemacht werden soll, indem an Stelle "∞" ab sofort ein anderes Symbol - nämlich "infty" - verwendet werden soll. In den Formelsammlungen wird diese Ersetzung vorgenommen, in der bereits als Preprint erschienenen **Suite I** ist eine derartige Ersetzung nicht mehr möglich. Der Grund, die Mühen der Korrektur auf mich zu nehmen, ist einfach: würde ∞ als eigenständiger Parameter beibehalten werden, dann wäre der Term "$-\infty$" unter Beibehaltung der **RECH-Notation** mehrdeutig, denn dann wäre "$-\infty$" als $\mathsf{mns}(\infty)$ gleich $\mathcal{U}$ - ∞ ist *keine Zahl* - *und* gleich dem Parameter $-\infty$, der eine Zahl ist. Das kann so nicht bleiben. Ich wähle den Ausweg, für ∞ ein eigenes Symbol zu verwenden, so dass nun $-\mathsf{infty} = \mathsf{mns}(\mathsf{infty}) = \mathcal{U} \neq -\infty$ gelassen zur Kenntnis genommen werden kann.

Am Beginn der Arbeit an **Suite III** steht die Intention rasch zu Folgen vorzudringen. So ist der anfängliche Arbeitstitel von **Suite III** "Die Folgen-Reiche" .

Die Arbeit schreitet anfangs gut in Richtung Folgen voran. So werden in **#159** induktive Klassen und die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen gleich dem kanonischen Definitions-Bereich von Folgen in die Essays eingebracht. Es folgen Beweise grundlegender Eigenschaften natürlicher Zahlen, die Definition von $\mathbb{Z}$ in **#164** und Lücken-, Induktions- und Minimum/Maximum-Sätze in $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$. Auch wird der bekannte Satz von Archimedes in Form von **Archimedes I,II** in die Essays eingebracht.

Dann stellt sich heraus, dass auch die Klassen $\{x, \ldots, y\} = \mathbb{Z} \cap [x|y]$, $\{x, \ldots\} = \mathbb{Z} \cap [x| + \infty[$, $\{\ldots, y\} = \mathbb{Z} \cap] - \infty|y]$ im Zuge allgemeiner Induktions-Sätze betrachtet werden sollten. Als dies geschehen ist erheischen die als Spezialisierung allgemeinerer Definitionen die zumindest von `matlab` her vertrauten Rundungs-Funktionen $\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}, \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}$ mein Interesse. Spätestens hier treten Zweifel auf, ob der Bogen zu Folgen noch gespannt werden kann.

Im dritten Teil von **Suite III** ergibt sich die Antwort "Nein" von selbst, indem ich mir eingestehe, dass es wenig sinnvoll ist auf Folgen loszugehen, wenn noch nicht das elementare Rechnen mit Ziffern etabliert ist. Dies sind die Initialzündungen sowohl der Namensgebung "**Suite III - Die Elementare**" als auch diverser ...**schola**-Tafeln, in denen der nun wirklich elementare Schulstoff über $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \mathsf{ten}$ und deren mns-Werte zusammengefasst wird. Wie am Beginn der Arbeit an den Essays befürchtet tun sich an dieser elementaren Schnittstelle der "rechnenden" und "beweisenden" Mathematik Abgründe in Form enormen Volumens auf.

Ist der Titel "**Suite III - Die Elementare**" erst einmal gewählt, sollen nach dem dritten Teil weitere "elementare" Konzepte in die Essays eingebracht werden. In der Tat werden unter anderem konstante Funktionen definiert und mit eigenen Namen versehen und es werden in nicht mehr ganz so elementarer Weise ungeordnete und geordnete Tupel via "Zur-Verfügung-Stellung" meta-sprachlicher Regeln in die Essays aufgenommen.

Danach beginnen breit angelegte Vorbereitungen zur Einführung der "Zählfunktion" , die endlichen Mengen die Anzahl ihrer Elemente und unendlichen Mengen die Zahl $+\infty$ zuordnet. Die tatsächliche Einführung der Zählfunktion erfolgt in einer späteren Suite, vermutlich in **Suite IV**.

Es überrascht die lange, mehr als ein Jahr dauernde Arbeit an **Suite III - Die Elementare**. Die neue Darstellungsweise sollte doch nach zwei erfolgreich zu Ende gebrachten Suiten gut eingeübt sein und entsprechend rasch sollte - so hoffte ich - das LebensWerk nach einer langgezogenen Einführungsphase voranschreiten.

In der Tat geht die "eigentliche Arbeit" an **Suite III - Die Elementare** ohne viel Hürden effizient voran. Das zeitkonsumierende Problem besteht darin, sich auf eine effiziente Weise einen Überblick über die Ziffern-Codes der bereits verfügbaren Resultate - es sind mittlerweile wohl mehr als zweitausend - zu verschaffen. Die anfangs gewählte Strategie, eine fortlaufende Sammlung verfügbarer Resultate anzulegen stellt sich bei der Arbeit an der vorliegenden Suite als nicht mehr hilfreich heraus. Zu divergierend sind die Aussagen der einzelnen Essays um in halbwegs kurzer Zeit die gefragten Ziffern-Codes zu finden. So muss wohl oder übel erst eine, dann mehrere um verschiedene Themen wie "Mengenlehre" oder "Zahlentheorie" oder auch "Funktionen" gruppierte Sammlung von Resultaten - eine "Formelsammlung " - angelegt und mit den Einzelergebnissen (auch noch von **Suite I- Die StrukturGebende**) kontinuierlich ergänzt werden.

Wie zu Beginn der Arbeit am LebensWerk ist auch hier die Suche nach einer geeigneten Form und - erschwerend hinzukommend - einem geeigneten Sortierungsverfahren ein langwieriger, zeitkonsumierender Prozess. Wenn nun am Ende der Arbeit an **Suite III - Die Elementare** halbwegs geeignet erscheinde Formelsammlungen vorliegen, so ist in diesen sicher mehr als ein Drittel der Gesamt-Arbeitszeit gebunden.

Neuerlich gebe ich mich der Hoffnung hin, dass, da die Form gefunden ist, die Erweiterungen und Ergänzungen der Formelsammlungen bei der Arbeit an zukünftigen Suiten rascher und effizienter als im gegenwärtigen Fall vonstatten geht.

In der folgenden Übersicht werden typische Resultate der einzelnen Essays umgangssprachlich dargestellt:

#155. Falls r Relation in x, dann ist jede untere r_Schranke von x auch ein r_Minimum von $\mathsf{dom}\, r$ und $\mathsf{ran}\, r$. Ähnliches gilt für obere r_Schranken von x.

#156. Wie bei der Diskussion von $\le$ _Intervalle fest gestellt, gilt unter anderem $[a| + \infty] = [a \overset{\le}{|} \cdot\rangle$, so dass für $[a \overset{\le}{|} \cdot\rangle$ keine spezielle Bezeichnung verwendet werden muss. Im vorliegenden Essay wird diese Situation dahingehend verallgemeinert, dass wenn max ein M_Maximum von $\mathsf{ran}\, M$ ist, unter anderem $[a \overset{M}{|} max] = [a \overset{M}{|} \cdot\rangle$ gilt. Ähnliches gilt, wenn min ein M_Minimum von $\mathsf{dom}\, M$ ist.

#157. Bei der Arbeit an **Suite II** verliere ich den Blick für die zentralen ordnungstheoretischen Begriffe - unter anderem für Minimum und Maximum - von **Suite I**. Dies wird hier etwas korrigiert, indem unter anderem fest gestellt wird, dass $-\infty$ ein $\le$ _Minimum von $\mathbb{S}$ und $+\infty$ ein $\le$ _Maximum von $\mathbb{S}$ ist. Auch wird fest gestellt, dass genau die TeilKlassen von $\mathbb{S}$ die Klassen mit $\le$ _Infimum sind und dies sind genau jene Klassen, die ein $\le$ _Supremum haben. Ähnlich sind die $\le$ _Ketten genau die TeilKlassen von $\mathbb{S}$. $+\infty$ ist genau dann $\le$ _Supremum von E, wenn E eine TeilKlasse von $\mathbb{S}$ ist, deren *einzige* obere $\le$ _Schranke gleich $+\infty$ ist. Ähnlich ist $-\infty$ ist genau dann $\le$ _Infimum von E, wenn E eine TeilKlasse von $\mathbb{S}$ ist, deren *einzige* untere $\le$ _Schranke gleich $-\infty$ ist. Falls $-\infty$ ein

$\leq$ _Infimum von E ist, dann ist $-\infty$ auch $\leq$ _Infimum von jeder E umfassenden TeilKlasse von $\mathbb{S}$. Falls $+\infty$ ein $\leq$ _Supremum von E ist, dann ist $+\infty$ auch $\leq$ _Supremum von jeder E umfassenden TeilKlasse von $\mathbb{S}$. Ähnliches gilt, wenn $-\infty$ ein $\leq$ _Minimum von E ist und wenn $+\infty$ ein $\leq$ _Maximum von E ist.

#158. Es wird unter anderem die Äquivalenz von $x \subseteq y$ und $x \subseteq x \cap y$ und $x \cup y \subseteq y$ bewiesen.

#159. Essay **#159** ist der erste, der der Zahlentheorie zugeordnet wird. Als Novum wird eine Aussage, die einem anderen Bereich zuzuordnen ist - es handelt sich um **158-4**, wo unter anderem $0 \in [0| + \infty]$ fest gestellt wird - aufgenommen. Diese Vorgehensweise entwickelt ein Prinzip, wonach um neue Resultate altbekannte gruppiert sind, weiter und wirkt beschleunigend, da nun bei der Erstellung eines Essays nicht alle Hilfs-Resultate vorab zusammengestellt werden müssen. Klarer Weise besteht bei der neuen Vorgehensweise die Gefahr der Unauffindbarkeit bereits gewonnener Resultate. Dieser Gefahr wird begegnet, indem die Sätze nach wie vor entsprechend der Bereiche, denen sie zuzuordnen sind, in die jeweiligen Formelsammlungen aufgenommen werden. Auch werden bei allzu vielen Hilfs-Resultaten weiterhin vorangehende Essays verfasst. Eine Klasse x ist genau dann **induktiv**, wenn $0 \in x$ und wenn für alle $\alpha \in x$ die Summe $1 + \alpha$ ebenfalls in x ist. Jede induktive Klasse ist als TeilKlasse von $\mathbb{A}$ eine Menge. Da $\mathbb{A}$ induktiv ist und da der Durchschnitt einer nichtleeren Klasse induktiver Mengen induktiv ist, ist $\mathbb{N}$ als Durchschnitt *aller* induktiver Klassen(=Mengen) eine induktive Menge. $\mathbb{N}$ ist die **Menge der natürlichen Zahlen**. Für jede induktive Klasse x gilt $\mathbb{N} \subseteq x \subseteq \mathbb{A}$, so dass jede induktive Klasse, die TeilKlasse von $\mathbb{N}$ ist gleich $\mathbb{N}$ ist. Falls $\mathbb{N} \cap x$ induktiv ist, dann ist $\mathbb{N}$ eine TeilKlasse von x. Summe und Produkt natürlicher Zahlen sind natürliche Zahlen.

#160. Die **VerschiebungsRegeln**$\leq, <$, wonach unter anderem aus $x < y$ und $a \in \mathbb{R}$ die Ungleichung $x + a < y + a$ folgt, hätten wesentlich besser in **Suite II - Die Arithmetische** gepasst. Warum diese Regeln dort *nicht* bewiesen wurden, ist mir nicht erklärlich. Vermutlich hatte ich zu guter Letzt den Überblick verloren. Ich erinnere mich aber, dass ich diese Regeln in **Suite II - Die Arithmetische** aufnehmen wollte. In diesem Lapsus sehe ich ein wenig den Ausdruck meiner zunehmenden Intention, nur gerade so viel zu beweisen, wie ich für das Weitere benötige. Diese Intention ist bislang noch nicht sehr ausgeprägt und im Wachstum begriffen.

#161. In vermutlich längst überfälliger Erweiterung des **Binären Schubfachprinzips** wird unter anderem gezeigt, dass aus $x \cap y = 0$ und $p \in x$ die Aussagen $p \notin y$ folgt.

#162. Der **LückenSatz** $\mathbb{N}$ besagt unter anderem, dass aus $n \in \mathbb{N}$ und $n < x < 1 + n$ folgt, dass x *keine* natürliche Zahl ist.

#163. Falls $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \leq m$, dann ist $m - n$ eine natürliche Zahl.

#164. Die **Menge** $\mathbb{Z}$ **der ganzen Zahlen** erscheint erstmals in den Essays. Summe, Differenz und Produkt ganzer Zahlen sind ganze Zahlen.

#165. In kondensierter Weise wird unter anderem thematisiert, unter welchen zusätzlichen Bedingungen aus $x \leq y$ auf die Existenz von Ω mit $0 \leq \Omega$ und $x + \Omega = y$ und $x = y - \Omega$ geschlossen werden kann.

#166. Unter anderem wird gezeigt, dass für ganze Zahlen l, m entweder $l = m$ gilt *oder* dass es eine natürliche Zahl Ω ungleich 0 gibt, so dass $m = l + \Omega$ oder $m = l - \Omega$.

#167. Es wird im Fall $a \in \mathbb{R}$ unter anderem ein Kriterium dafür formuliert, dass eine Klasse x zu $[c + a|d + a]$ gehört.

#168. Der **LückenSatz** $\mathbb{Z}$ ist das Analagon zum **LückenSatz** $\mathbb{N}$ und besagt unter anderem, dass aus $l \in \mathbb{Z}$ und $l < x < 1 + l$ folgt, dass x *keine* ganze Zahl ist.

#169. Die Klasse $\{x, \ldots, y\}$ wird als $\mathbb{Z} \cap [x|y]$ in die Essays eingeführt. Ähnlich gilt $\{x, \ldots\} = \mathbb{Z} \cap [x| + \infty[$ und $\{\ldots, y\} = \mathbb{Z} \cap] - \infty|y]$. Ausdrücklich wird *nicht* von $x \in \mathbb{Z}$ oder $y \in \mathbb{Z}$ ausgegangen.

#170. Wie bereits in **159-1** fest gestellt, folgt aus $0 \in x$ und aus $\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N} \cap x) \Rightarrow (1 + \alpha \in x)$, dass $\mathbb{N}$ eine TeilKlasse von x ist. Diese Aussage wird nun mit dem Namen **InduktionsSatz** $\mathbb{N}$ versehen. Im **InduktionsSatz** $\mathbb{Z}$ werden hinreichende Bedingungen angegeben, um auf $\{l, \ldots\} \subseteq x$, auf $\{\ldots, m\} \subseteq x$, auf $\mathbb{Z} \subseteq x$, auf $\{l, \ldots y\} \subseteq x$ und auf $\{z, \ldots, m\} \subseteq x$ mit ganzzahligen l, m schliessen zu können.

#171. Entsprechend $\leq$**Satz vom Minimum** und $\leq$**Satz vom Maximum** hat jede nichtleere, endliche TeilMenge von $\mathbb{S}$ ein $\leq$ _Minimum und ein $\leq$ _Maximum. Wie im $\leq$**InfZwischenWertSatz** fest gestellt, gilt für jedes Element p von E, das *echt größer* als ein $\leq$ _Infimum inf von E ist, dass es ein $\xi \in E$ mit $inf \leq \xi < p$ gibt. Der $\leq$**SupZwischenWertSatz** ist das Analgon hierzu für $\leq$ _Suprema.

#172. Hat eine Klasse ein Infimum, aber kein Minimum, so ist jedes Infimum *kein* Element dieser Klasse und nicht nur in diesem Fall kommt eine Folgerung aus dem **InfZwischenWertSatz** zum Tragen, wonach für jedes $p \in K$, wobei K eine M _Kette mit antiSymmetrischem M ist und für jedes M _Infimum inf von K, das *kein* Element von K ist ein $\xi \in K$ mit $inf\,\_\,\overset{\mathbf{ir}}{M}\,\_\xi\_\,\overset{\mathbf{ir}}{M}\,\_p$ existiert. Eine ähnliche Modifikation gilt für den **SupZwischenWertSatz**.

#173. Falls E ein *reelles* $\leq$ _Infimum hat, das *nicht* in E ist, dann gibt es zu jedem positiven a zwei Elemente ξ, η von E für die $0 < \xi - \eta < a$ gilt. Ähnliches gilt für $\leq$ _Suprema. Wird hier speziell $a = 1$ gewählt, so ergibt sich in Verbindung mit dem **LS**$\mathbb{Z}$, dass jede Klasse E mit reellem $\leq$ _Infimum, das *nicht* zu E gehört, keine TeilKlasse von $\mathbb{Z}$ sein kann. Analoges gilt für $\leq$ _Suprema.

#174. Aus $q \in x$ und $q \neq p$ folgt $0 \neq x \neq \{p\}$.

#175. Jede nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$ die eine untere $\leq$ _Schranke ungleich $-\infty$ hat, hat ein reelles $\leq$ _Infimum. Ähnliches gilt für obere $\leq$ _Schranken.

#176. 0 ist das $\leq$ _Minimum von $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ hat kein $\leq$ _Minimum. Weder $\mathbb{N}$ noch $\mathbb{Z}$ haben ein $\leq$ _Maximum. $-\infty$ ist das $\leq$ _Infimum von $\mathbb{Z}$. $+\infty$ ist das $\leq$ _Supremum von $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$.

#177. Via **MinimumMaximumSatz** $\mathbb{N}$ hat jede nichtleere TeilKlasse von $\mathbb{N}$ ein $\leq$ _Minimum, das eo ipso eine natürliche Zahl ist. Auch gilt, dass jede nichtleere TeilKlasse von $\mathbb{N}$, die eine obere $\leq$ _Schranke$\neq +\infty$ hat, ein $\leq$ _Maximum besitzt. Im **MinimumMaximumSatz** $\mathbb{Z}$ wird fest gestellt, dass jede nichtleere TeilKlasse von $\mathbb{Z}$, die eine untere $\leq$ _Schranke$\neq -\infty$ hat, ein $\leq$ _Minimum aufweist. Ein Analogon vom **MMS**$\mathbb{N}$ für $\leq$ _Maxima von TeiKlassen von $\mathbb{Z}$ ist via **MMS**$\mathbb{Z}$ ebenfalls verfügbar.

#178. Falls eine sreelle Zahl x *keine* untere $\leq$ _Schranke einer TeilKlasse E von $\mathbb{S}$ ist, dann gibt es $\Omega \in E$ mit $\Omega < x$ - und E ist konsequenter Weise nichtleer. Ähnliches gilt für sreelle x, die *keine* obere $\leq$ _Schranke von E, $E \subseteq \mathbb{S}$, sind.

#179. Gemäß **Archimedes I** gibt es zu jeder reellen Zahl x ganze Zahlen l, m mit $l < x < m$. Mehr spezifischer wird in **Archimedes II** fest gehalten, dass es zu jedem reellen x mit $0 \leq x$ eine *natürliche* Zahl Ω mit $x < \Omega$ und zu jedem reellen $x \leq 0$ eine *natürliche* Zahl Ψ mit $-\Psi < x$ gibt. Falls $0 < x \in \mathbb{R}$, dann gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $0 < 1 : n < x$ und falls $\mathbb{R} \ni x < 0$, dann gibt es $m \in \mathbb{N}$ mit $x < -1 : m < 0$.

#180. Jede der Klassen $\{x, \ldots, y\}, \{x, \ldots\}, \{\ldots, y\}$ hat ein $\leq$ _Infimum und ein $\leq$ _Supremum. Unter anderem ist x genau dann ein $\leq$ _Minimum von $\{x, \ldots, y\}$, wenn $x \in \mathbb{Z}$ und $x \leq y$. Ähnlich ist unter anderem y ein $\leq$ _Maximum von $\{x, \ldots, y\}$, wenn $y \in \mathbb{Z}$ und $x \leq y$.

#181. Die Klasse aller Mengen, die eine untere M_Schranke hat ist $\overset{M}{\mathsf{eus}}$ und die Relation, die aus allen geordneten Paaren (x, q) mit x Menge und q untere M_Schranke von x besteht, heißt $\overset{M}{\mathsf{us}}$. Die Klassen $\overset{M}{\mathsf{eos}}$ und $\overset{M}{\mathsf{os}}$ für obere M_Schranken sind ähnlich definiert.

#182. Mit Hilfe der Klassen $\overset{M}{\mathsf{einf}}$ und $\overset{M}{\mathsf{esup}}$ läßt sich die unter anderem die (Starke, Totale) Vollständigkeit von M gut dokumentieren. $\overset{M}{\mathsf{inf}}$ ist die Relation der geordneten Paare (x, q), bei denen x eine Menge und q ein M_Infimum von x ist. Falls M antiSymmetrisch ist, dann ist $\overset{M}{\mathsf{inf}} : \overset{M}{\mathsf{einf}} \to (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$. Ähnliche Aussagen gelten für $\overset{M}{\mathsf{sup}}$.

#183. Die Klasse aller Mengen, die ein M_Minimum haben ist $\overset{M}{\mathsf{emin}}$ und die Relation - falls M antiSymmetrisch ist: *Funktion* - die aus allen geordneten Paaren (x, q) mit x Menge und q ist M_Minimum von x besteht, heißt $\overset{M}{\mathsf{min}}$. Die Klassen $\overset{M}{\mathsf{emax}}$ und $\overset{M}{\mathsf{max}}$ für M_Maxima sind mit ähnlichen Eigenschaften analog definiert.

#184. Zwei aus **#39** bekannte Klassen werden mit dem Symbol $\overset{M}{\mathsf{e}\mu\mathsf{in}}$, mit dem Symbol $\overset{M}{\mathsf{e}\mu\mathsf{ax}}$, versehen. Dabei handelt es sich um die *Unmenge* aller Mengen, die ein M_minimales Element, die ein M_maximales Element, haben. Die Unmengen-Eigenschaft resultiert aus der ebenfalls aus **#39** bekannten Tatsache, dass *jede Menge* x als M_minimales, als M_maximales, Element von $\{x\}$ fungiert. Konsequenter Weise ist auch die Relation $\overset{M}{\mu\mathsf{in}}$, die Relation $\overset{M}{\mu\mathsf{ax}}$, die aus geordneten Paaren (x, q) mit Menge x und M_minimalen Element q, M_maximalen Element q, von x, besteht, eine Unmenge mit Bild-Bereich$=\mathcal{U}$.

#185. Mit $\overset{M,E}{\mathsf{floor}}$ und $\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$ betreten `matlab`-basierte "numerische" Relationen - falls M antiSymmetrisch ist, sind beide Klassen Funktionen - die Essays. $\overset{M,E}{\mathsf{floor}}$ und $\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$ werden hier zunächst in allgemeinem Rahmen dargestellt und halten die erste Überraschung parat: Falls M Total Vollständig ist, dann ist via $\overset{M,E}{\mathsf{efl}} = \overset{M,E}{\mathsf{ecl}} = \mathcal{U}$ der Definitions-Bereich von $\overset{M,E}{\mathsf{floor}}$, von $\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$, gleich dem Universum. Unabhängig weiterer Voraussetzungen ist $\overset{M,E}{\mathsf{floor}}$ stets M_verringernd auf $(\mathsf{ran}\, M) \cap \overset{M,E}{\mathsf{efl}}$, ist $\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$ stets M_vermehrend auf $(\mathsf{dom}\, M) \cap \overset{M,E}{\mathsf{ecl}}$.

#186. Falls M transitiv ist, dann folgt aus b_M_c unter anderem $[a \overset{M}{\mid} b] \subseteq [a \overset{M}{\mid} c]$.

#187. Bei transitivem M sind $\overset{M,E}{\mathsf{floor}}$ und $\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$ auf ihren jeweiligen Definitions-Bereichen M_isoton.

#188. Falls f eine Funktion ist, dann ist $f(x)$ unter anderem genau dann eine Menge, wenn $(x, f(x)) \in f$. Gilt $f : D \to B$, so gilt für alle $x \in D$ die Aussage $(x, f(x)) \in f$.

#189. Falls $\overset{M}{\mathsf{inf}}$ eine Funktion ist, dann erscheinen einige vorab gewonnenen Resultate in neuem Licht. Ähnliches gilt, wenn $\overset{M}{\mathsf{sup}}$, $\overset{M}{\mathsf{min}}$, $\overset{M}{\mathsf{max}}$, $\overset{M,E}{\mathsf{floor}}$, $\overset{M,E}{\mathsf{ceil}}$ Funktionen sind.

#190. Es gilt $\overset{\leq}{\mathsf{inf}}: \mathcal{P}(\mathbb{S}) \to \mathbb{S}$ und $\overset{\leq}{\mathsf{sup}}: \mathcal{P}(\mathbb{S}) \to \mathbb{S}$.

#191. Falls $p, q \in \mathbb{S}$, dann ist $\overset{\leq}{\mathsf{min}}\ \{p, q\}$ das $\leq$ _Minimum von $\{p, q\}$, ist $\overset{\leq}{\mathsf{max}}$ $\{p, q\}$ das $\leq$ _Maximum von $\{p, q\}$.

#192. In **#39** wird bewiesen, dass aus $E \cap \mathsf{dom}\, M = 0$, aus $E \cap \mathsf{ran}\, M = 0$, folgt, dass jedes Element aus E ein M_minimales Element von E ist, ein M_maximales Element von E ist. Diese Aussage wird nun ergänzt, indem gezeigt wird, dass jedes Element aus $E \setminus \mathsf{ran}\, M$ ein M_minimales Element von E ist, dass jedes Element aus $E \setminus \mathsf{dom}\, M$ ein M_maximales Element von E ist.

#193. Für TeilKlassen von $\mathbb{S}$ sind $\leq$ _minimale Elemente und $\leq$ _Minima, sind $\leq$ _maximale Elemente und $\leq$ _Maxima, identisch.

#194. Die Ungleichungen $\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}\ (p) \leq p \leq \overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}\ (p)$ gelten genau dann, wenn $p \in \mathbb{S}$. p ist genau dann Fixpunkt von $\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{floor}}$, wenn $p \in \{+\infty, -\infty\} \cup \mathbb{Z}$ und dies ist genau dann der Fall, wenn p ein Fixpunkt von $\overset{\leq,\mathbb{Z}}{\mathsf{ceil}}$ ist.

#195. Falls M transitiv *und* antiSymmetrisch ist, dann sind sowohl $]a \overset{M}{|} a[$ als auch $]a \overset{M}{|} a]$ und $[a \overset{M}{|} a[$ leer.

#196. Die Intervalle $]a|a[$, $]a|a]$ und $[a|a[$ sind leer. Ohne weitere Anforderung an a, b gilt unter anderem $[a|b] \subseteq [a|1+b]$. Aus $b \leq c$ folgt unter anderem $[a|b] \subseteq [a|c]$ und aus $b < c$ folgt $[a|b] \subseteq [a|c[$ und $]a|b] \subseteq]a|c[$.

#197. Im A$\mathbb{N}$**Axiom** wird $1 + n = \{n\} \cup n$ für jede *natürliche Zahl* n fest gelegt. Hieraus folgt $n = \mathbb{N} \cap [0|n[$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $n \leq m$ ist für $n, m \in \mathbb{N}$ äquivalent zu $n \subseteq m$ und dies ist äquivalent zu $(n \in m) \vee (n = m)$.

#198. Die **Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen** erscheint erstmals in den Essays. $\mathbb{Q}$ kann durch die Grundrechenarten nicht verlassen werden.

#199. Die Zahlen $3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \mathsf{ten}$ werden als Parameter in die Essays eingebracht. In $\in$**schola** wird die Zugehörigkeit von $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \mathsf{ten}$ und deren mns-Werten zu $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{S}, \mathbb{T}, \mathbb{C}, \mathbb{A}$ diskutiert.

#200. In $<$**schola** werden die alle $<$-Aussagen mit $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \mathsf{ten}$ und deren mns-Werten zusammengefasst.

#201. Dass in der Tat jeder der Parameter $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \mathsf{ten}$ ungleich jedem anderen der hier angeführten Parameter ist, wird - unter anderem - in $\neq$**schola** erfasst. Die Aussagen von $\neq$**schola** sind entsprechend wenig überraschend - und sind doch gefährlich, denn wenn sie *unzulässig verallgemeinert* werden, käme die unbedarfte - und falsche - Schlussfolgerung zu Stande, dass ungleiche “Terme” *stets* ungleiche Klassen bezeichnen.

#202. In $\leq$**schola** sind alle $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \mathsf{ten}$ und deren mns-Werte involvierenden "$\leq$-Aussagen" dargestellt.

#203. In $+$**schola** sind alle Summen der Zahlen $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \mathsf{ten}$ und deren mns-Werten aufgelistet.

#204. Gemäß $--$**schola** bleiben die Zahlen $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \mathsf{ten}$ und deren mns-Werte unter doppeltem Vorzeichenwechsel invariant. In $-$**schola** werden alle Differenzen der Zahlen $0, 1.2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \mathsf{ten}$ und deren mns-Werten dargestellt.

#205. Die Aussagen $3 \cdot x = x + 2 \cdot x$, $-\mathsf{ten} \cdot x = -x - 9 \cdot x$ und so weiter sind an der Schnittstelle der Arithmetik und der Zahlentheorie angesiedelt und werden im Rahmen der Essays der Arithmetik zugeordnet. Dies geschieht nicht zuletzt deswegen, weil mit der vorab bewiesenen Gleichung $2 \cdot x = x + x$ genau so umgegangen wird. Auch wird gezeigt, dass $(-1) \cdot (-x) = x$ genau dann gilt, wenn x Zahl oder $= \mathcal{U}$. Hingegen ist via **FundamentalSatz Division**-1 die Gleichung $x : (-1) = -x$ *stets* gültig. Im **AssoziativGesetz Multiplikation*** $\mathbb{T}$ wird nachgewiesen, dass wenn mindestens zwei der Klassen x, y, z treelle Zahlen sind, die Gleichung $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ gilt. Dieses Resultat geht über **AGM**$\mathbb{T}$ hinaus, da dort in speziellerer Weise $x, z \in \mathbb{T}$ vorausgesetzt wird. Somit wird hier ein an anderer Stelle bereits mit einem eigenem Kürzel versehenes Resultat - noch dazu auf nahe liegende Weise - verallgemeinert. Das ist real und nicht schön. Der Verallgemeinerung wird Rechnung getragen indem das ursprüngliche Kürzel beibehlaten und mit einem $*$ versehen wird. Auch wird über die über **DKR**$\mathbb{T}$ hinausgehenden **Divisions-KürzungsRegeln*** $\mathbb{R}$ - hier steht $*$ nicht nur für Verallgemeinerung sondern auch für die Verschiebung $\mathbb{T} \to \mathbb{R}$ in der Abkürzungs-Notation - gezeigt, dass aus $0 \neq a \in \mathbb{R}$ die Gleichungen $a : (a \cdot x) = 1 : x$ und $(a \cdot x) : (a \cdot y) = x : y$ *ohne weitere Voraussetzungen an* x, y folgen und aus $0 \neq a \in \mathbb{R}$ und $(x \text{ Zahl}) \vee (x = \mathcal{U})$ die Gleichung $(a \cdot x) : a = x$ folgt.

#206. In $\cdot$**schola** sind alle Produkte der Zahlen $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \mathsf{ten}$ und deren mns-Werten aufgelistet.

#207. Via **DKR***$\mathbb{R}$ stehen interessanter Weise die Gleichungen $((-\mathsf{ten}) \cdot x) : (-\mathsf{ten}) = x$, $((-9) \cdot x) : (-9) = x$ und so weiter - hier ist 0 ausgenommen - genau dann zur Verfügung, wenn x eine Zahl oder$= \mathcal{U}$ ist. Dagegen sind die Gleichungen $(-\mathsf{ten}) : ((-\mathsf{ten}) \cdot x) = 1 : x$, $(-9) : ((-9) \cdot x) = 1 : x$ und so weiter - auch hier ist 0 ausgenommen - für *alle* Klassen x gültig. Ähnlich gilt $((-\mathsf{ten}) \cdot x) : ((-\mathsf{ten}) \cdot y) = x : y$, $((-9) \cdot x) : ((-9) \cdot y) = x : y$ und so weiter - die 0 ist hier ausgenommen - für *alle* Klassen x, y. Im Speziellen gilt stets $(1 \cdot x) : (1 \cdot y) = x : y$ ohne dass $1 \cdot x = x$ oder $1 \cdot y = y$ gelten müsste. Die Gleichung $x : 1 = x \cdot 1$ trifft stets zu und in :**schola** werden die Möglichkeiten, $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \mathsf{ten}$ durch diese Zahlen - inclusive mns-Versionen - zu "kürzen" zusammengefasst.

#208. o ist genau dann $\square$**neutral in** Q, wenn o ein Element von Q ist und wenn für alle $\alpha \in Q$ die Gleichungen $o\_\Box\_\alpha = \alpha\_\Box\_o = \alpha$ gilt. Es wird *nicht* gefordert, dass $\Box$ eine Algebra auf Q ist.

#209. In meta-sprachlicher Weise werden Klassen-Sequenzen, ungeordnete Tupel und geordnete Tupel in die Essays eingebracht. Handelt es sich bei Klassen-Sequenzen *auch* um Hilfsmittel, sich einige " Quasi-Wiederholungen " zu ersparen und sind ungeordnete Tupel eine nahe liegende, konservative Erweiterung von Singeltons und ungeordneten Paaren, so sind *geordnete* Tupel in den am meisten interessierenden Fällen *Funktionen* und es ist im Speziellen strikt zwischen dem geordneten *Paar* (x, y) und dem geordneten *Tupel* $[x, y]$ zu unterscheiden. Sind x, y Mengen, so handelt es sich bei $[x, y]$ um die Funktion $\{(0, x), (1, y)\}$, die *mit Hilfe geordneter Paare* definiert ist. Eine Gleichsetzung von (x, y) und $[x, y]$ würde zu unerwünschten, unendlich vielen, ineineinander verschachtelten Gleichungen führen.

#210. Unabhängig davon, ob $\Box$ eine Algebra auf Q ist, wird $\Box$ **kommutativ auf** Q genannt, wenn für alle $\alpha, \beta \in Q$ die Gleichung $\alpha\_\Box\_\beta = \beta\_\Box\_\alpha$ gilt.

#211. Unabhängig davon, ob $\Box$ eine Algebra auf Q ist, wird $\Box$ **assoziativ auf** Q genannt, wenn für alle $\alpha, \beta, \gamma \in Q$ die Gleichung $\alpha\_\Box\_(\beta\_\Box\_\gamma) = (\alpha\_\Box\_\beta)\_\Box\_\gamma$ gilt.

#212. Die Funktions-Klassen func, ${}^{\mathbf{?}}B$, ${}^{D\supseteq\mathbf{?}}B$ und ${}^{D}B$ betreten die Essays. func ist die Klasse *aller* Funktionen, ${}^{\mathbf{?}}B$ ist die Klasse der Funktionen, deren Bild-Bereich eine TeilKlasse von B ist, ${}^{D\supseteq\mathbf{?}}B$ ist die Klasse all jener Funktionen, deren Definitions-Bereich eine TeilKlasse von D ist und deren Bild-Bereich eine TeilKlasse von B ist und ${}^{D}B$ besteht aus den Mengen f, für die $f : D \to B$ gilt:

#213. Als Zwischen-Resultat wird fest gehalten, dass keine Funktion gleich dem Universum ist. In später Verallgemeinerung von **1-8** wird gezeigt, dass $p \in x$ *genau dann* gilt, wenn p Menge und $\{p\} \subseteq x$. Das $\cup$**Axiom** wird zu einem Kriterium erweitert. Einige für Elemente von $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}$ verfügbare Aussagen werden für endliche Klassen re-formuliert. Für $(x \cup y) \cup (z \cup w)$ und $(x \cap y) \cap (z \cap w)$ werden andere Darstellungen gefunden. Die Inklusion $x \subseteq \{p\} \cup (x \setminus \{p\})$ wird bewiesen. $x^{-1}[E]$ ist genau dann leer, wenn $E \cap \mathsf{ran}\, x = 0$. Es gilt $0 \neq x^{-1}[E]$ genau dann, wenn $0 \neq E \cap \mathsf{ran}\, x$. (Un)Mengen-Eigenschaften binärer Klassen-Differenzen werden diskutiert. Es gilt $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x) \subseteq \mathcal{P}(x)$. Als erstes ungeordnetes Tupel wird das ungeordnete Tripel $\{p, q, r\}$ genauer untersucht. Unter anderem werden die Gleichungen $\{p, q, r\} = \{q, p, r\} = \{p, q\} \cup \{r\} = \{p\} \cup \{q, r\}$ etabliert.

#214. Die Funktion $c^{\mathbf{on}}D$, die den konstanten Wert c auf D annimmt, wird in das LebensWerk eingeführt. Die erwartete Aussage $c^{\mathbf{on}}D : D \to \{c\}$ gilt genau dann, wenn $D = 0$ oder c eine Menge ist. Im Speziellen gilt $\mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D) = D$ genau dann, wenn $D = 0$ oder c eine Menge ist und $\mathsf{ran}\,(c^{\mathbf{on}}D) = \{c\}$ gilt interessanter Weise genau dann, wenn $0 \neq D$ oder c eine Unmenge ist. Es gilt stets $\mathsf{dom}\,(c^{\mathbf{on}}D) \subseteq D$ und $\mathsf{ran}\,(c^{\mathbf{on}}D) \subseteq \{c\}$.

#215. Die Klasse $\mathsf{215.0}(K, D)$ ist eine Funktion, deren Funktions-Wert in c genau dann gleich der konstanten Funktion $c^{\mathbf{on}}D$ auf D ist, wenn D eine Menge ist und $c \in K$ gilt. Der Bild-Bereich von $\mathsf{215.0}(K, D)$ ist $\{\lambda^{\mathbf{on}}D : \lambda \in K\}$. Falls D eine nicht-leere Menge ist, so ist $\mathsf{215.0}(K, D) : K \to \{\lambda^{\mathbf{on}}D : \lambda \in K\}$ bijektiv und in diesem Fall ist K *genau dann* eine Menge, wenn die Klasse der konstanten Funktionen auf D mit Funktions-Werten aus K eine Menge ist.

#216. Es werden Kriterien für die Zugehörigkeit von $c^{\mathbf{on}}E$ zu den Funktions-Klassen $\mathsf{func}, {}^{\mathbf{?}}B, {}^{D\supseteq\mathbf{?}}B, {}^{D}B$ angegeben. Es wird untersucht, inwieweit $\{\lambda^{\mathbf{on}}E : \lambda \in K\}$ eine Teil-Klasse dieser Funktions-Klassen ist.

#217. Bei $c^{\mathbf{on}}\{p\}$ handelt es sich um die konstante Funktion mit Wert c, deren Definitions-Bereich gleich $\{p\}$ ist. Variiert p in D, so ensteht die Klasse $\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}$, die der Bild-Bereich der Funktion $\mathsf{217.0}(D, c) = \{(\lambda, c^{\mathbf{on}}\{\lambda\}) : \lambda \in D\}$ ist. Mit Hilfe von $\mathsf{217.0}(D, c)$ kann unter anderem gezeigt werden, dass für Mengen c die Klasse D genau dann eine Menge ist, wenn die Klasse $\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}$ aller konstanten Funktionen (mit Wert c), deren Definitions-Bereich alle $\{p\}$ mit $p \in D$ durchläuft, eine Menge ist.

#218. Es werden - teilweise in direkter Anwendung der Resultate von **#216** - Kriterien für die Zugehörigkeit von $c^{\mathbf{on}}\{p\}$ zu $\mathsf{func}, {}^{\mathbf{?}}B, {}^{E\supseteq\mathbf{?}}B, {}^{E}B$ angegeben und es werden Kriterien für die TeilKlassen-Eigenschaft von $\{c^{\mathbf{on}}\{\lambda\} : \lambda \in D\}$ in diesen Klassen präsentiert.

#219. func ist eine Unmenge und ${}^{\mathbf{?}}B$ ist genau dann eine Unmenge, wenn $0 \neq B$. Nicht unerwarteter Weise ist ${}^{D\supseteq\mathbf{?}}B$ genau dann eine Unmenge, wenn $(0 \neq D) \wedge (B$ Unmenge$)$ oder $(0 \neq D) \wedge (B$ Unmenge$)$. Die Klasse ${}^{D}B$ ist genau dann eine Unmenge, wenn $(0 \neq D) \wedge (B$ Unmenge$)$. Falls D Unmenge, so ist ${}^{D}B$ eine Menge, nämlich, wie in **#212** gesagt, gleich der leeren Menge. Falls B eine Menge ist, dann ist auch ${}^{D}B$ eine Menge.

#220. Es werden $E\ {}_{\mathtt{ni}}\!\setminus x$ und ähnliche Klassen in die Essays eingebracht. Beispielsweise ist $E\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} D$ gleich $\{\lambda \cup \mu : (\lambda \in E) \wedge (\mu \in D)\}$.

#221. $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} \mathcal{P}(y)$ wird untersucht.

#222. $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(y^{-1}[Q \setminus \{o\}])\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} \mathcal{P}(y^{-1}[\{o\}])$ wird untersucht.

#223. Aus $p, q \in x$ folgt $\{p, q\} \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)$ und aus $p, q, r \in x$ folgt $\{p, q, r\} \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)$. Unter anderem folgt aus $z \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)$ und $w \in \mathcal{P}(y)$ mit $x \cap y = 0$ die Gleichung $z \cap w = 0$. Aus $x \subseteq y \cup z$ folgt unter anderem $x = (x \cap y) \cup (x \cap z)$ und es gilt $x \setminus y \subseteq z$.

#224. χ ist $(\Box, P, Z)$**alg1** von f genau dann, wenn χ, f Funktionen mit $\mathsf{dom}\,\chi = \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(P)\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} \mathcal{P}(Z)$ und $P \cap Z = 0$ sind, wenn für alle $\alpha \in P \cup Z$ die bemerkenswerte Gleichung $\chi(\{\alpha\}) = f(\alpha)$ gilt, wenn für alle $\epsilon, \delta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(P \cup Z)$ die "rechnerische Grundformel" $\chi(\epsilon \cup \delta)_{-}\Box_{-}\chi(\epsilon \cap \delta) = \chi(\epsilon)_{-}\Box_{-}\chi(\delta)$ gilt und wenn alle $\nu \in \mathcal{P}(Z)$ in Bezug auf $\epsilon \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(P)$ bei Auswertung durch χ via $\chi(\epsilon \cup \nu) =$

$\chi(\epsilon)\_\Box\_\chi(\nu) = \chi(\epsilon)$ vernachlässigt werden können. Falls χ ist $(\Box, P, Z)$**alg1** von f, dann ist $\chi(0)$ $\Box$neutral auf $\{\chi(0)\} \cup f[P \cup Z]$ und $\Box$ ist dort kommutativ. Es gelten darüber hinausgehend einige an Assoziativität erinnernde Rechenregeln für $\Box$ auf $\{\chi(0)\} \cup f[P \cup Z]$.

#225. Falls χ ist $(\Box, P, Z)$**alg1** von f, dann $f[Z] \subseteq \{\chi(0)\}$ und hieraus folgt unter anderem die Gleichung $\{\chi(0)\} \cup f[P \cup Z] = \{\chi(0)\} \cup f[P]$.

#226. In Annäherung an die endliche Summation reell- oder, allgemeiner, $\mathbb{A}$-wertiger Funktionen wird fest gelegt, was es heißt, dass χ die $(\Box, Q)$**alg2** von f ist. In Spezialisierung der Begriffsbildung **alg1** sind hier die in der "**alg1**-Phrase" auftretenden Klassen P, Z durch f, Q und $\chi(0)$ fest gelegt. Interessanter Weise tritt hier eine Selbstbezüglichkeit von χ auf.

#227. Motiviert durch die Form von $\mathsf{dom}\,\chi$, wenn χ die $(\Box, Q)$**alg2** von f ist, wird unter anderem Einiges über TeilKlassen oder Elemente von $f^{-1}[E]$ und ähnliche Klassen für Funktionen f ausgesagt.

#228. Das "punktweise (Nicht-)ElementSein" wird ebenso wie das "punktweise (Nicht-)GleichSein" wird in die Essays eingebracht. Das Konzept entspricht den einschlägigen `matlab`-Notationen.

#229. Es wird das "punktweise Verhalten " von Funktionen f thematisiert.

#230. Unscheinbare Inklusionen wie $x \setminus y \subseteq x \cup y$ und daraus resultierende Aussagen der Art $w[x \setminus y] \subseteq w[x \cup y]$ werden den Formeln der Mengenlehre hinzugefügt.

#231. Aus χ ist $(\Box, Q)$**alg2** von f folgt $\mathsf{dom}\,\chi = \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]) \;{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\; \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}]$. Um diese unhandliche Darstellung zu umgehen werden etliche Resultate über $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]) \;{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\; \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}]$ unter ausschließlicher Verwendung von $\mathsf{dom}\,\chi$ re-formuliert.

#232. $(p,\mathcal{U}), (\mathcal{U}, q), (\mathcal{U},\mathcal{U})$ sind als Unmengen kein Element von E. Zu jeder Klasse gibt es eine ungleiche Menge(Unmenge,Klasse).

#233. Die Formeln $q\_\Box\_\mathcal{U} = \mathcal{U} = \mathcal{U}\_\Box\_p$ haben in Bezug auf $\Box$neutrale Elemente und Kommutativität und Assoziativität weitreichende Konsequenzen. So folgt etwa aus $x(\alpha)\_\Box\_x(\beta) = x(\beta)\_\Box\_x(\alpha)$ für alle $\alpha, \beta \in \mathsf{dom}\,x$ die Gültigkeit von $x(p)\_\Box\_x(q) = x(q)\_\Box\_x(p)$ für *beliebige* p, q. Ähnliches taucht in der Arithmetik zum ersten Mal auf.

#234. Aus χ ist $(\Box, Q)$**alg2** von f folgen die ansonsten voraussetzungsfreien Formeln $\chi(0)\_\Box\_\chi(E) = \chi(E) = \chi(E)\_\Box\_\chi(0)$ und $\chi(E)\_\Box\_\chi(D) = \chi(D)\_\Box\_\chi(E)$. Unter der gleichen Voraussetzung wird die sperrige Formel $N \in \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}])$ durch die äquivalente Aussage $f. = \chi(0)$ auf N und N Menge ersetzt und für diese N wird unter anderem $\chi(E)\_\Box\_\chi(N) = \chi(E)$ bewiesen.

#235. Die Terme $x \cup_{\mathtt{in}} E$, $E \,_{\mathtt{ni}}\!\cup x$, $E \,_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} D$ werden in speziellen, die Klassen $0, \{0\}$ berücksichtigenden Fällen untersucht. Unter anderem wird $E \,_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} \{0\} = E$ etabliert.

#236. Falls $x \in E \subseteq \mathbb{N}$, so folgt aus "$\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (1 + \alpha \in E)$" erwarteter Weise $\{x, \ldots\} \subseteq \mathbb{N}$ und aus $p \in \{x, \ldots\}$ folgt noch $x \leq p \in \mathbb{N}$. Auch gilt $\mathbb{N} = \{0, \ldots\}$ und es wird der " klassische " InduktionsSatz, wonach aus $0 \in E \subseteq \mathbb{N}$ und aus $\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (1 + \alpha \in E)$ die Gleichung $E = \mathbb{N}$ (sowie $\mathbb{N} \subseteq E$) folgt, etabliert.

#237. Aus $n \in \mathbb{N}$ folgt $n = \{0, \ldots, -1 + n\}$ und $1 + n = \{0, \ldots, n\}$. Für jede Zahl x gilt $1 + (-1 + x) = x$ und $-1 + (1 + x) = x$.

#238. In Fortsetzung der eigentlich nicht zur Mathematik gehörenden Festlegungen ungeordnete Tupel betreffend wird unter anderem die Gleichung $\{\#\} \cup \{@\} = \{\#, @\}$ für Klassen-Sequenzen $\#, @$ in die Essays aufgenommen. Aus $q \neq p$ folgt $(\{p\} \cup x) \setminus \{q\} = \{p\} \cup (x \setminus \{q\})$.

#239. $2 = \{0, 1\}$ und $3 = \{0, 1, 2\}$ und $4 = \{0, 1, 2, 3\}$ und $5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ und $6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ und $7 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. $8 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ und $9 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ und $\mathsf{ten} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Aus $x \in \mathbb{N}$ und $x < 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \mathsf{ten}$ folgt $x \leq 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ und $x = 0$, $x = 0, 1$, $x = 0, 1, 2$, $x = 0.1, 2, 3$, $x = 0, 1, 2, 3, 4$, $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$, $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$, $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Aus $n \in \mathbb{N}$ folgt $n = (1 + n) \setminus \{n\}$.

#240. Die Klassen $\mathcal{U}_n$, $n \in \mathbb{N}$, werden durch eine erstmalig zum Einsatz kommende **Rekursive Parameter Definition** in die Essays eingebracht. Es gilt $\mathcal{U}_0 = \{0\}$ und $\mathcal{U}_1 = \{0\} \cup \mathcal{U}_{\text{sngltn}}$ und $\mathcal{U}_{1+n} = \mathcal{U}_1 \,_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} \mathcal{U}_n$, $n \in \mathbb{N}$. Für $n \in \{1, \ldots\}$ ist $\mathcal{U}_n$ eine Unmenge. Es gilt $n \in \mathcal{U}_n \subset \mathcal{U}_{1+n}$ und $1 + n \notin \mathcal{U}_n$ sowie $\mathcal{U}_n \neq \mathcal{U}$, $n \in \mathbb{N}$. Aus $x \in \mathcal{U}_n$, $n \in \mathbb{N}$, folgt, dass x endlich ist. Aus x endlich folgt die Existenz von $n \in \mathbb{N}$ mit $x \in \mathcal{U}_n$. $\mathcal{P}_{\text{endl}}$ ist die Klasse all jender ω, für die es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\omega \in \mathcal{U}_n$ gibt.

#241. Jede natürliche Zahl ist endlich. $\mathbb{N}$ ist unendlich. Damit ist die Existenz unendlicher Mengen nachgewiesen.

#242. Die Relation $\mathsf{paar}(x, y)$ wird in die Essays eingebracht. Eine charakteristische Eigenschaft von $\mathsf{paar}(x, y)$ ist durch die Aussage " $(p, r) \in x$" und " $(p, s) \in y$" impliziert " $(p, (r, s)) \in \mathsf{paar}(x, y)$" beschrieben. $\mathsf{dom}\,(\mathsf{paar}(x, y)) = (\mathsf{dom}\,x) \cap (\mathsf{dom}\,y)$ und - vor allem - $\mathsf{ran}\,(\mathsf{paar}(x, y)) = y \circ x^{-1}$ sind bemerkenswert. Sind f, g Funktionen, so ist auch $\mathsf{paar}(f, g)$ eine Funktion.

#243. Die Relationen $p\_E.x, x.E\_p$ und $x.E.y$ werden unabhängig weiterer Eigenschaften von p, E, x oder von y definiert. So gilt etwa, dass aus $(q, s) \in x$ und $((p, s), r) \in E$ die Aussage $(q, r) \in p\_E.x$ folgt. Auch folgt aus $(q, r) \in x$ und $(q, s) \in y$ und $((r, s), t) \in E$ die Aussage $(q, t) \in x.E.y$. Es gilt $x.E.y =$

$E \circ \mathsf{paar}(x,y)$. Sind f, E Funktionen, so sind $p\_E.f$ und $f.E\_p$ Funktionen. Sind E, f, g Funktionen, so ist $f.E.g$ eine Funktion.

#244. Die Subtrakton S und die Division D werden auf kanonische Weise definiert. Sind p, q Zahlen, so gilt $\mathsf{S}(p,q) = p - q$ und $\mathsf{D}(p,q) = p : q$.

#245. Wenn E, f Funktionen sind, dann gilt für $q \in \mathsf{dom}\,(p\_E.f)$ die Gleichung $(p\_E.f)(q) = E(p, f(q))$. Ähnlich gilt für Funktionen E, f, g und für $q \in \mathsf{dom}\,(f.E.g)$ die Gleichung $(f.E.g)(q) = E(f(q), g(q))$.

#246. Im Zuge der ergänzenden Überarbeitung der Formelsammlung wird **13-5** verallgemeinert, indem die Voraussetzung "x Relation" als überflüssig erkannt wird. In der Tat folgt aus x^{-1} injektiv und $E \subseteq \mathsf{ran}\,x$ ohne Weiteres $E = x[x^{-1}[E]]$.

#247. Die Klassen $p\_\Box.x$, $x.\Box\_p$ und $x.\Box.y$ werden für eine Algebra $\Box$ in A untersucht. In diesem Kontext gilt unter anderem $\mathsf{dom}\,(p\_\Box.x) = \mathsf{dom}\,(x.\Box\_p)$ und $\mathsf{dom}\,(x.\Box.y) = \mathsf{dom}\,(y.\Box.x)$ und wenn f, g Funktionen sind, so gilt erwarteter Weise $(f.\Box.g)(q) = f(q)\_\Box\_(g(q))$ für alle $q \in \mathsf{dom}\,(f.\Box.g) = f^{-1}[A] \cap g^{-1}[A]$.

#248. Die punktweisen Summen $p+.\ x, x\ .+p, x\ .+.\ y$, die punktweisen Produkte $p\cdot.\ x, x\ .\cdot p, x\ .\cdot.\ y$, die punktweisen Differenzen $p-.\ x, x\ .-p, x\ .-.\ y$ und die punktweisen Divisionen $p:.\ x, x\ .:p, x\ .:.\ y$ erscheinen in den Essays. Die Notationen sind an `matlab` angelehnt.

Schranken und Relationen in x.

Ersterstellung: 25/10/10 **Letzte Änderung: 17/05/12**

155-1. Falls r eine Relation in x ist, dann ist jede untere r_Schranke von x ein r_Minumum sowohl von $\mathsf{dom}\, r$ als auch von $\mathsf{ran}\, r$:

155-1(Satz)

Es gelte:

→) *r Relation in x.*

→) *u untere r_Schranke von x.*

Dann folgt:

a) *u ist r_Minimum von $\mathsf{dom}\, r$.*

b) *u ist r_Minimum von $\mathsf{ran}\, r$.*

Beweis **155-1**

`1.1:` Aus →) “r Relation in x”
folgt via **10-17**: $\mathsf{dom}\, r \subseteq x$.

`1.2:` Aus →) “r Relation in x”
folgt via **10-17**: $\mathsf{ran}\, r \subseteq x$.

`1.3:` Aus →) “r Relation in x” und
aus →) “u untere r_Schranke von x”
folgt via **38-25**: u ist r_Minimum von x.

`2.1:` Aus `1.1` “$\mathsf{dom}\, r \subseteq x$” und
aus →) “u untere r_Schranke von x”
folgt via **35-6**: u untere r_Schranke von $\mathsf{dom}\, r$.

`2.2:` Aus `1.2` “$\mathsf{ran}\, r \subseteq x$” und
aus →) “u untere r_Schranke von x”
folgt via **35-6**: u untere r_Schranke von $\mathsf{ran}\, r$.

`2.3:` Aus `1.3` “u ist r_Minimum von x”
folgt via **38-3**: $u \in (\mathsf{dom}\, r) \cap (\mathsf{ran}\, r)$.

`3.1:` Aus `2.3` “$u \in (\mathsf{dom}\, r) \cap (\mathsf{ran}\, r)$”
folgt via **2-2**: $u \in \mathsf{dom}\, r$.

`3.2:` Aus `2.3` “$u \in (\mathsf{dom}\, r) \cap (\mathsf{ran}\, r)$”
folgt via **2-2**: $u \in \mathsf{ran}\, r$.

`4.a):` Aus `2.1` “u untere r_Schranke von $\mathsf{dom}\, r$” und
aus `3.1` “$u \in \mathsf{dom}\, r$”
folgt via **38-6**: u ist r_Minimum von $\mathsf{dom}\, r$.

`4.b):` Aus `2.2` “u untere r_Schranke von $\mathsf{ran}\, r$” und
aus `3.2` “$u \in \mathsf{ran}\, r$”
folgt via **38-6**: u ist r_Minimum von $\mathsf{ran}\, r$.

□

155-2. Falls r eine Relation in x ist, dann ist jede obere r_Schranke von x ein r_Maximum sowohl von $\mathsf{dom}\, r$ als auch von $\mathsf{ran}\, r$:

155-2(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) *r Relation in x.*

$\rightarrow$) *o obere r_Schranke von x.*

Dann folgt:

a) *o ist r_Maximum von* $\mathsf{dom}\, r$.

b) *o ist r_Maximum von* $\mathsf{ran}\, r$.

Beweis **155-2**

`1.1:` Aus →) " r Relation in x "
folgt via **10-17**: $\mathsf{dom}\, r \subseteq x$.

`1.2:` Aus →) " r Relation in x "
folgt via **10-17**: $\mathsf{ran}\, r \subseteq x$.

`1.3:` Aus →) " r Relation in x " und
aus →) " o obere r_Schranke von x "
folgt via **38-26**: o ist r_Maximum von x.

`2.1:` Aus `1.1` " $\mathsf{dom}\, r \subseteq x$ " und
aus →) " o obere r_Schranke von x "
folgt via **35-6**: o obere r_Schranke von $\mathsf{dom}\, r$.

`2.2:` Aus `1.2` " $\mathsf{ran}\, r \subseteq x$ " und
aus →) " o obere r_Schranke von x "
folgt via **35-6**: o obere r_Schranke von $\mathsf{ran}\, r$.

`2.3:` Aus `1.3` " o ist r_Maximum von x "
folgt via **38-4**: $o \in (\mathsf{dom}\, r) \cap (\mathsf{ran}\, r)$.

`3.1:` Aus `2.3` " $o \in (\mathsf{dom}\, r) \cap (\mathsf{ran}\, r)$ "
folgt via **2-2**: $o \in \mathsf{dom}\, r$.

`3.2:` Aus `2.3` " $o \in (\mathsf{dom}\, r) \cap (\mathsf{ran}\, r)$ "
folgt via **2-2**: $o \in \mathsf{ran}\, r$.

`4.a):` Aus `2.1` " o obere r_Schranke von $\mathsf{dom}\, r$ " und
aus `3.1` " $o \in \mathsf{dom}\, r$ "
folgt via **38-7**: o ist r_Maximum von $\mathsf{dom}\, r$.

`4.b):` Aus `2.2` " o obere r_Schranke von $\mathsf{ran}\, r$ " und
aus `3.2` " $o \in \mathsf{ran}\, r$ "
folgt via **38-7**: o ist r_Maximum von $\mathsf{ran}\, r$.

□

155-3. Falls M reflexiv in x ist, dann gibt es einen einfacheren Zugang zu M_Schranken als via **35-1(Def)**:

<u>**155-3(Satz)**</u>

Aus "M reflexiv in x" und "$p \in x$" und ...

a) *... und "$\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (p\_M\_\alpha)$"*
folgt "p untere M_Schranke von E".

b) *... und "$\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\alpha\_M\_p)$"*
folgt "p obere M_Schranke von E".

<u>Beweis **155-3**</u> a)
VS gleich $(M \text{ reflexiv in } x) \wedge (p \in x) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (p\_M\_\alpha))$.

1: Aus VS gleich "M reflexiv in x..."
folgt via **30-18**: $x \subseteq \mathsf{dom}\, M$.

2: Aus VS gleich "...$p \in x$..." und
aus 1"$x \subseteq \mathsf{dom}\, M$"
folgt via **0-4**: $p \in \mathsf{dom}\, M$.

3: Aus 2"$p \in \mathsf{dom}\, M$" und
aus VS gleich "...$\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (p\_M\_\alpha)$"
folgt via **35-1(Def)**: p untere M_Schranke von E.

b) VS gleich $(M \text{ reflexiv in } x) \wedge (p \in x) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\alpha\_M\_p))$.

1: Aus VS gleich "M reflexiv in x..."
folgt via **30-18**: $x \subseteq \mathsf{ran}\, M$.

2: Aus VS gleich "...$p \in x$..." und
aus 1"$x \subseteq \mathsf{ran}\, M$"
folgt via **0-4**: $p \in \mathsf{ran}\, M$.

3: Aus 2"$p \in \mathsf{ran}\, M$" und
aus VS gleich "...$\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\alpha\_M\_p)$"
folgt via **35-1(Def)**: p obere M_Schranke von E.

□

155-4. Falls $0 \neq E$, kann bei der Suche nach M-Schranken von E auf die Verifikation, dass untere M-Schranken in $\mathsf{dom}\, M$ und obere M-Schranken in $\mathsf{ran}\, M$ zu suchen sind, verzichtet werden:

155-4(Satz)

a) *Aus* "$0 \neq E$" *und* "$\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (u\_M\_\alpha)$"
folgt "*u untere M-Schranke von E*".

b) *Aus* "$0 \neq E$" *und* "$\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\alpha\_M\_o)$"
folgt "*o obere M-Schranke von E*".

Beweis **155-4** a) VS gleich $(0 \neq E) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (u\_M\_\alpha))$.

1: Aus VS gleich "$0 \neq E \ldots$"
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in E$.

2: Aus 1"$\ldots \Omega \in E$" und
aus VS gleich "$\ldots \forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (u\_M\_\alpha)$"
folgt: u_M_Ω.

3: Aus 2"u_M_Ω"
folgt via **30-2**: $u \in \mathsf{dom}\, M$.

4: Aus 3"$u \in \mathsf{dom}\, M$" und
aus VS gleich "$\ldots \forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (u\_M\_\alpha)$"
folgt via **35-1(Def)**: u untere M-Schranke von E.

b) VS gleich $(0 \neq E) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\alpha\_M\_o))$.

1: Aus VS gleich "$0 \neq E \ldots$"
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in E$.

2: Aus 1"$\ldots \Omega \in E$" und
aus VS gleich "$\ldots \forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\alpha\_M\_o)$"
folgt: Ω_M_o.

3: Aus 2"Ω_M_o"
folgt via **30-2**: $o \in \mathsf{ran}\, M$.

4: Aus 3"$o \in \mathsf{ran}\, M$" und
aus VS gleich "$\ldots \forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\alpha\_M\_o)$"
folgt via **35-1(Def)**: o obere M-Schranke von E.

$\square$

155-5. Warum *diese* Aussagen *nicht* in **Suite I** zu finden sind, ist im Nachhineine schwer nachvollziehbar. Vermutlich dachte ich bei der Erstellung von **Suite I** daran, dass der Beweis via Infimum, via Supremum bei Bedarf ohne Weiteres geführt werden kann:

155-5(Satz)

a) *Aus "M antiSymmetrisch"*
und "min ist M_Minimum von E"
und "p ist M_Minimum von E" *folgt "$min = p$".*

b) *Aus "M antiSymmetrisch"*
und "max ist M_Maximum von E"
und "q ist M_Maximum von E" *folgt "$max = q$".*

Beweis **155-5** `a)` `VS` gleich (M antiSymmetrisch)
$\wedge$(min ist M_Minimum von E)
$\wedge$(p ist M_Minimum von E).

`1.1:` Aus `VS` gleich "…min ist M_Minimum von E…"
folgt via **38-6**: min ist M_Infimum von E.

`1.2:` Aus `VS` gleich "…p ist M_Minimum von E"
folgt via **38-6**: p ist M_Infimum von E.

`2:` Aus `VS` gleich "M antiSymmetrisch…",
aus `1.1` "min ist M_Infimum von E" und
aus `1.2` "p ist M_Infimum von E"
folgt via **46-2**: $min = p$.

`b)` `VS` gleich (M antiSymmetrisch)
$\wedge$(max ist M_Maximum von E)
$\wedge$(q ist M_Maximum von E).

`1.1:` Aus `VS` gleich "…max ist M_Maximum von E…"
folgt via **38-7**: max ist M_Supremum von E.

`1.2:` Aus `VS` gleich "…q ist M_Maximum von E"
folgt via **38-7**: q ist M_Supremum von E.

`2:` Aus `VS` gleich "M antiSymmetrisch…",
aus `1.1` "max ist M_Supremum von E" und
aus `1.2` "q ist M_Supremum von E"
folgt via **46-3**: $max = q$.

□

Einiges über M_Intervalle, wenn $\mathsf{dom}\, M$ ein M_Minimum hat.
Einiges über M_Intervalle, wenn $\mathsf{ran}\, M$ ein M_Maximum hat.

Ersterstellung: 25/10/10 **Letzte Änderung: 26/04/12**

156-1. Falls min ein M_Minimum von $\mathsf{dom}\, M$ ist, dann sind die M_Intervalle bis b durch M_Intervalle von min bis b ersetzbar:

156-1(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) *min ist M_Minimum von $\mathsf{dom}\, M$.*

Dann folgt:

a) $\langle \cdot \overset{M}{|} b[= [min \overset{M}{|} b[.$

b) $\langle \cdot \overset{M}{|} b] = [min \overset{M}{|} b].$

Beweis **156-1** `a)`

`Thema1.1`	$\alpha \in \langle\cdot \overset{M}{\mid} b[$.
`2:` Aus `Thema1.1`"$\alpha \in \langle\cdot \overset{M}{\mid} b[$" folgt via **41-25**:	$\alpha_- \overset{\mathbf{ir}}{M}{}_- b$.
`3:` Aus `2`"$\alpha_- \overset{\mathbf{ir}}{M}{}_- b$" folgt via **41-6**:	$\alpha \in \mathsf{dom}\, M$.
`4:` Aus →) "min ist M_Minimum von $\mathsf{dom}\, M$" und aus `3`"$\alpha \in \mathsf{dom}\, M$" folgt via **38-6**:	min_M_α.
`5:` Aus `2`"min_M_α" und aus `2`"$\alpha_- \overset{\mathbf{ir}}{M}{}_- b$" folgt via **41-25**:	$\alpha \in [b \overset{M}{\mid} min[$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \langle\cdot \overset{M}{\mid} b[) \Rightarrow (\alpha \in [min \overset{M}{\mid} b[)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$\langle\cdot \overset{M}{\mid} b[\subseteq [min \overset{M}{\mid} b[$"

`1.2:` Via **41-27** gilt: $[min \overset{M}{\mid} b[\subseteq \langle\cdot \overset{M}{\mid} b[$.

`2:` Aus `A1` gleich "$\langle\cdot \overset{M}{\mid} b[\subseteq [min \overset{M}{\mid} b[$" und
aus `1.2`"$[min \overset{M}{\mid} b[\subseteq \langle\cdot \overset{M}{\mid} b[$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\langle\cdot \overset{M}{\mid} b[= [min \overset{M}{\mid} b[$.

Beweis **156-1** b)

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in \langle\cdot \overset{M}{|} b]$.

2: Aus Thema1.1 "$\alpha \in \langle\cdot \overset{M}{|} b]$"
folgt via **41-25**: α_M_b.

3: Aus 2 "α_M_b"
folgt via **30-2**: $\alpha \in \mathsf{dom}\, M$.

4: Aus →) "min ist M_Minimum von $\mathsf{dom}\, M$" und
aus 3 "$\alpha \in \mathsf{dom}\, M$"
folgt via **38-6**: min_M_α.

5: Aus 4 "min_M_α" und
aus 2 "α_M_b"
folgt via **41-25**: $\alpha \in [min \overset{M}{|} b]$.

Ergo Thema1.1: $\forall\alpha : (\alpha \in \langle\cdot \overset{M}{|} b]) \Rightarrow (\alpha \in [min \overset{M}{|} b])$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{"}\langle\cdot \overset{M}{|} b] \subseteq [min \overset{M}{|} b]\text{"}}$

1.2: Via **41-27** gilt: $[min \overset{M}{|} b] \subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} b]$.

2: Aus A1 gleich "$\langle\cdot \overset{M}{|} b] \subseteq [min \overset{M}{|} b]$" und
aus 1.2 "$[min \overset{M}{|} b] \subseteq \langle\cdot \overset{M}{|} b]$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\langle\cdot \overset{M}{|} b] = [min \overset{M}{|} b]$.

□

156-2. Falls max ein M_Maximum von $\mathsf{ran}\,M$ ist, dann sind die M_Intervalle ab a durch M_Intervalle von a bis max ersetzbar:

156-2(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) max *ist* M_*Maximum von* $\mathsf{ran}\,M$.

Dann folgt:

a) $]a \overset{M}{|} \cdot\rangle =]a \overset{M}{|} max]$.

b) $[a \overset{M}{|} \cdot\rangle = [a \overset{M}{|} max]$.

<u>Beweis</u> **156-2** `a)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$	$\beta \in \,]a \overset{M}{\mid} \cdot\rangle.$
`2:` Aus `Thema1.1` "$\beta \in \,]a \overset{M}{\mid} \cdot\rangle$"	
folgt via **41-25**:	$a \_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_ \beta.$
`3:` Aus `2` "$a \_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_ \beta$"	
folgt via **41-6**:	$\beta \in \mathsf{ran}\, M.$
`4:` Aus →) "max ist M_Maximum von $\mathsf{ran}\, M$" und	
aus `3` "$\beta \in \mathsf{ran}\, M$"	
folgt via **38-7**:	$\beta \_ M \_ max.$
`5:` Aus `2` "$a \_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_ \beta$" und	
aus `4` "$\beta \_ M \_ max$"	
folgt via **41-25**:	$\beta \in \,]a \overset{M}{\mid} max].$

Ergo `Thema1.1`: $\forall \beta : (\beta \in \,]a \overset{M}{\mid} \cdot\rangle) \Rightarrow (\beta \in \,]a \overset{M}{\mid} max]).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A1} \Big| \text{"}\,]a \overset{M}{\mid} \cdot\rangle \subseteq \,]a \overset{M}{\mid} max]\,\text{"}}$

`1.2:` Via **41-27** gilt: $]a \overset{M}{\mid} max] \subseteq \,]a \overset{M}{\mid} \cdot\rangle.$

`2:` Aus `A1` gleich "$]a \overset{M}{\mid} \cdot\rangle \subseteq \,]a \overset{M}{\mid} max]$" und
aus `1.2` "$]a \overset{M}{\mid} max] \subseteq \,]a \overset{M}{\mid} \cdot\rangle$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $]a \overset{M}{\mid} \cdot\rangle = \,]a \overset{M}{\mid} max].$

<u>Beweis</u> **156-2** `b)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$	$\beta \in [a \overset{M}{\mid} \cdot\rangle$.
`2:` Aus `Thema1.1`"$\beta \in [a \overset{M}{\mid} \cdot\rangle$" folgt via **41-25**:	a_M_β.
`3:` Aus 2"a_M_β" folgt via **30-2**:	$\beta \in \mathsf{ran}\, M$.
`4:` Aus →) "max ist M_Maximum von $\mathsf{ran}\, M$" und aus 3"$\beta \in \mathsf{ran}\, M$" folgt via **38-7**:	β_M_max.
`5:` Aus 2"a_M_β" und aus 4"β_M_max" folgt via **41-25**:	$\beta \in [a \overset{M}{\mid} max]$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \beta : (\beta \in [a \overset{M}{\mid} \cdot\rangle) \Rightarrow (\beta \in [a \overset{M}{\mid} max])$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A1} \,\Big|\, \text{“} [a \overset{M}{\mid} \cdot\rangle \subseteq [a \overset{M}{\mid} max] \text{”}}$

`1.2:` Via **41-27** gilt: $[a \overset{M}{\mid} max] \subseteq [a \overset{M}{\mid} \cdot\rangle$.

`2:` Aus `A1` gleich "$[a \overset{M}{\mid} \cdot\rangle \subseteq [a \overset{M}{\mid} max]$" und
aus `1.2`"$[a \overset{M}{\mid} max] \subseteq [a \overset{M}{\mid} \cdot\rangle$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $[a \overset{M}{\mid} \cdot\rangle = [a \overset{M}{\mid} max]$.

□

156-3. Falls r eine Relation in x ist und falls u eine untere r_Schranke von x ist, dann sind die r_Intervalle bis b durch r_Intervalle von u bis b ersetzbar:

<u>**156-3(Satz)**</u>

Es gelte:

$\rightarrow)$ *r Relation in x.*

$\rightarrow)$ *u untere r_Schranke von x.*

Dann folgt:

a) $\langle\cdot \overset{r}{|} b[= [u \overset{r}{|} b[$.

b) $\langle\cdot \overset{r}{|} b] = [u \overset{r}{|} b]$.

<u>Beweis **156-3**</u>

1: Aus $\rightarrow)$ "r Relation in x" und
aus $\rightarrow)$ "u untere r_Schranke von x"
folgt via **155-1**: u ist r_Minimum von $\mathsf{dom}\, r$.

2.a): Aus 1 "u ist r_Minimum von $\mathsf{dom}\, r$"
folgt via **156-1**: $\langle\cdot \overset{r}{|} b[= [u \overset{r}{|} b[$.

2.b): Aus 1 "u ist r_Minimum von $\mathsf{dom}\, r$"
folgt via **156-1**: $\langle\cdot \overset{r}{|} b] = [u \overset{r}{|} b]$.

$\square$

156-4. Falls r eine Relation in x ist und falls o eine obere r_Schranke von x ist, dann sind die r_Intervalle ab a durch r_Intervalle von a bis o ersetzbar:

156-4(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow\!)$ *r Relation in x.*

$\rightarrow\!)$ *o obere r_Schranke von x.*

Dann folgt:

a) $]a \overset{r}{|} \cdot\rangle = \,]a \overset{r}{|} o]$.

b) $[a \overset{r}{|} \cdot\rangle = [a \overset{r}{|} o]$.

Beweis **156-4**

1: Aus $\rightarrow\!)$ "r Relation in x" und
aus $\rightarrow\!)$ "o obere r_Schranke von x"
folgt via **155-2**: o ist r_Maximum von $\mathsf{ran}\, r$.

2.a): Aus 1 "o ist r_Maximum von $\mathsf{ran}\, r$"
folgt via **156-2**: $]a \overset{r}{|} \cdot\rangle = \,]a \overset{r}{|} o]$.

2.b): Aus 1 "o ist r_Maximum von $\mathsf{ran}\, r$"
folgt via **156-2**: $[a \overset{r}{|} \cdot\rangle = [a \overset{r}{|} o]$.

$\square$

$-\infty$ ist $\leq$ _Minimum von $\mathbb{S}$.
$+\infty$ ist $\leq$ _Maximum von $\mathbb{S}$.
Die $\leq$ _Ketten sind genau die TeilKlassen von $\mathbb{S}$.
Einiges über $\leq$ _Schranken.
Einiges über $\leq$ _Infima.
Einiges über $\leq$ _Suprema.
Einiges über $\leq$ _Minima.
Einiges über $\leq$ _Maxima.

Ersterstellung: 08/10/10 **Letzte Änderung: 13/06/12**

157-1. $-\infty$ ist "das" $\leq$ _Minimum und $+\infty$ ist "das" $\leq$ _Maximum von $\mathbb{S}$:

157-1(Satz)

a) $-\infty$ *ist* $\leq$ *_Minimum von* $\mathbb{S}$.

b) *Aus* "u *untere* $\leq$ *_Schranke von* $\mathbb{S}$" *folgt* "$u = -\infty$".

c) $+\infty$ *ist* $\leq$ *_Maximum von* $\mathbb{S}$.

d) *Aus* "o *obere* $\leq$ *_Schranke von* $\mathbb{S}$" *folgt* "$o = +\infty$".

Beweis **157-1**

$\leq$**-Notation**.

---

a)

`Thema1.1` $\alpha \in \mathbb{S}$.

Aus `Thema1.1` "$\alpha \in \mathbb{S}$"
folgt via **107-5**: $-\infty \leq \alpha$.

Ergo `Thema1.1`: `A1` "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{S}) \Rightarrow (-\infty \leq \alpha)$"

`1.2`: Aus **95-11** "$-\infty \in \mathbb{S}$" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{S}) \Rightarrow (-\infty \leq \alpha)$"
folgt via **38-6**: $-\infty$ ist $\leq$ _Minimum von $\mathbb{S}$.

Beweis **157-1** `b)` `VS` gleich u untere $\leq$ _Schranke von $\mathbb{S}$.

`1.1:` Aus **AAVII**"$\leq$ antiSymmetrische Halbordnung in $\mathbb{S}$"
folgt via **34-13**: $\leq$ Relation in $\mathbb{S}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "u untere $\leq$ _Schranke von $\mathbb{S}$" und
aus **95-11**"$-\infty \in \mathbb{S}$"
folgt via **35-1(Def)**: $u \leq -\infty$.

`2:` Aus `1.1`"$\leq$ Relation in $\mathbb{S}$" und
aus `VS` gleich "u untere $\leq$ _Schranke von $\mathbb{S}$"
folgt via **37-1**: $u \in \mathbb{S}$.

`3:` Aus `2`"$u \in \mathbb{S}$"
folgt via **107-5**: $-\infty \leq u$.

`4:` Aus `1.2`"$u \leq -\infty$" und
aus `3`"$-\infty \leq u$"
folgt via **107-13**: $u = -\infty$.

`c)`

`Thema1.1`	$\alpha \in \mathbb{S}$.
Aus `Thema1.1`"$\alpha \in \mathbb{S}$" folgt via **107-5**:	$\alpha \leq +\infty$.

Ergo `Thema1.1`: `A1` | "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{S}) \Rightarrow (\alpha \leq +\infty)$"

`1.2:` Aus **95-11**"$+\infty \in \mathbb{S}$" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{S}) \Rightarrow (\alpha \leq +\infty)$"
folgt via **38-7**: $+\infty$ ist $\leq$ _Maximum von $\mathbb{S}$.

<u>Beweis **157-1**</u> `d)` `VS` gleich $\qquad o$ obere $\le$ _Schranke von $\mathbb{S}$.

`1.1:` Aus **AAVII**"$\le$ antiSymmetrische Halbordnung in $\mathbb{S}$"
folgt via **34-13**: $\qquad \le$ Relation in $\mathbb{S}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "o obere $\le$ _Schranke von $\mathbb{S}$" und
aus **95-11**"$+\infty \in \mathbb{S}$"
folgt via **35-1(Def)**: $\qquad +\infty \le o$.

`2:` Aus `1.1`"$\le$ Relation in $\mathbb{S}$" und
aus `VS` gleich "o obere $\le$ _Schranke von $\mathbb{S}$"
folgt via **37-1**: $\qquad o \in \mathbb{S}$.

`3:` Aus `2`"$o \in \mathbb{S}$"
folgt via **107-5**: $\qquad o \le +\infty$.

`4:` Aus `3`"$u \le +\infty$" und
aus `1.2`"$+\infty \le o$"
folgt via **107-13**: $\qquad o = +\infty$.

$\square$

157-2. Wenig überraschend sind die $\leq$ _Ketten *genau* die TeilKlassen von $\mathbb{S}$:

157-2(Satz)

"*E ist $\leq$ _Kette" genau dann, wenn "$E \subseteq \mathbb{S}$".*

Beweis **157-2** $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich E ist $\leq$ _Kette.

1: Aus **AAVII**"$\leq$ antiSymmetrische Halbordnung in $\mathbb{S}$"
folgt via **34-13**: $\leq$ Relation in $\mathbb{S}$.

2: Aus 1"$\leq$ Relation in $\mathbb{S}$" und
aus `VS` gleich "E ist $\leq$ _Kette"
folgt via **34-4**: $E \subseteq \mathbb{S}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $E \subseteq \mathbb{S}$.

Aus **AAVII**"$\mathbb{S}$ ist $\leq$ _Kette" und
aus `VS` gleich "$E \subseteq \mathbb{S}$"
folgt via **30-73**: E ist $\leq$ _Kette.

□

157-3. Mit den vorliegenden Aussagen werden spätere Beweise verkürzt:

157-3(Satz)

a) *Aus "u untere $\leq$ _Schranke von E" folgt "$u \in \mathbb{S}$" und "$E \subseteq \mathbb{S}$".*

b) *Aus "o obere $\leq$ _Schranke von E" folgt "$o \in \mathbb{S}$" und "$E \subseteq \mathbb{S}$".*

c) *Aus "inf ist $\leq$ _Infimum von E" folgt "$inf \in \mathbb{S}$" und "$E \subseteq \mathbb{S}$".*

d) *Aus "sup ist $\leq$ _Supremum von E" folgt "$sup \in \mathbb{S}$" und "$E \subseteq \mathbb{S}$".*

e) *Aus "min ist $\leq$ _Minimum von E" folgt "$min \in \mathbb{S}$" und "$E \subseteq \mathbb{S}$".*

f) *Aus "max ist $\leq$ _Maximum von E" folgt "$max \in \mathbb{S}$" und "$E \subseteq \mathbb{S}$".*

<u>Beweis</u> **157-3** `a)` `VS` gleich u untere $\leq$ _Schranke von E.

`1:` Aus **AAVII**"$\leq$ antiSymmetrische Halbordnung in $\mathbb{S}$"
folgt via **34-13**: $\leq$ Relation in $\mathbb{S}$.

`2:` Aus `1`"$\leq$ Relation in $\mathbb{S}$" und
aus `VS` gleich "u untere $\leq$ _Schranke von E"
folgt via **37-1**: $(u \in \mathbb{S}) \wedge (E \subseteq \mathbb{S})$.

`b)` `VS` gleich o obere $\leq$ _Schranke von E.

`1:` Aus **AAVII**"$\leq$ antiSymmetrische Halbordnung in $\mathbb{S}$"
folgt via **34-13**: $\leq$ Relation in $\mathbb{S}$.

`2:` Aus `1`"$\leq$ Relation in $\mathbb{S}$" und
aus `VS` gleich "o obere $\leq$ _Schranke von E"
folgt via **37-1**: $(o \in \mathbb{S}) \wedge (E \subseteq \mathbb{S})$.

`c)` `VS` gleich inf ist $\leq$ _Infimum von E.

`1:` Aus `VS` gleich "inf ist $\leq$ _Infimum von E"
folgt via **36-1(Def)**: inf untere $\leq$ _Schranke von E.

`2:` Aus `1`"inf untere $\leq$ _Schranke von E"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $(inf \in \mathbb{S}) \wedge (E \subseteq \mathbb{S})$.

`d)` `VS` gleich sup ist $\leq$ _Supremum von E.

`1:` Aus `VS` gleich "sup ist $\leq$ _Supremum von E"
folgt via **36-1(Def)**: sup obere $\leq$ _Schranke von E.

`2:` Aus `1`"sup obere $\leq$ _Schranke von E"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $(sup \in \mathbb{S}) \wedge (E \subseteq \mathbb{S})$.

`e)` `VS` gleich min ist $\leq$ _Minimum von E.

`1:` Aus `VS` gleich "min ist $\leq$ _Minimum von E"
folgt via **38-6**: min untere $\leq$ _Schranke von E.

`2:` Aus `1`"min untere $\leq$ _Schranke von E"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $(min \in \mathbb{S}) \wedge (E \subseteq \mathbb{S})$.

`f)` `VS` gleich max ist $\leq$ _Maximum von E.

`1:` Aus `VS` gleich "max ist $\leq$ _Maximum von E"
folgt via **38-6**: max obere $\leq$ _Schranke von E.

`2:` Aus `1`"max obere $\leq$ _Schranke von E"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $(max \in \mathbb{S}) \wedge (E \subseteq \mathbb{S})$.

$\square$

157-4. Da es sich bei $\leq$ um eine Total Vollständige, antiSymmetrische Halbordnung in $\mathbb{S}$ handelt, sind genau die TeilKlassen von $\mathbb{S}$ jene Klassen, die ein $\leq$ _Infimum haben und Analoges gilt für die Klassen mit $\leq$ _Supremum:

157-4(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` $E \subseteq \mathbb{S}$.

`ii)` $\exists \Omega : \Omega$ *ist* $\leq$ *_Infimum von* E.

`iii)` $\exists \Psi : \Psi$ *ist* $\leq$ *_Supremum von* E.

Beweis **157-4** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $E \subseteq \mathbb{S}$.

`1:` Aus **AAVII**"$\leq$ antiSymmetrische Halbordnung in $\mathbb{S}$"
folgt via **34-13**: $(\leq \text{Relation in } \mathbb{S}) \wedge (\leq \text{reflexiv in } \mathbb{S})$.

`2:` Aus `1`"$\leq$ Relation in $\mathbb{S}\ldots$",
aus `1`"$\ldots \leq$ reflexiv in $\mathbb{S}$",
aus **AAVII**"$\leq$ Total Vollständig" und
aus `VS` gleich "$E \subseteq \mathbb{S}$"
folgt via **52-5**: $\exists \Omega : \Omega$ ist $\leq$ _Infimum von E.

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}$ `VS` gleich $\exists \Omega : \Omega$ ist $\leq$ _Infimum von E.

`1.1:` Aus **AAVII**"$\leq$ antiSymmetrische Halbordnung in $\mathbb{S}$"
folgt via **34-13**: $(\leq \text{Relation in } \mathbb{S}) \wedge (\leq \text{reflexiv in } \mathbb{S})$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots \Omega$ ist $\leq$ _Infimum von E"
folgt via **157-3**: $E \subseteq \mathbb{S}$.

`2:` Aus `1.1`"$\leq$ Relation in $\mathbb{S}\ldots$",
aus `1.1`"$\ldots \leq$ reflexiv in $\mathbb{S}$",
aus **AAVII**"$\leq$ Total Vollständig" und
aus `1.2`"$E \subseteq \mathbb{S}$"
folgt via **52-5**: $\exists \Psi : \Psi$ ist $\leq$ _Supremum von E.

$\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich $\exists \Psi : \Psi$ ist $\leq$ _Supremum von E.

Aus `VS` gleich "$\ldots \Psi$ ist $\leq$ _Supremum von E"
folgt via **157-3**: $E \subseteq \mathbb{S}$.

$\square$

157-5. Nachdem in **157-1** $\leq$ _Minimum und $\leq$ _Maximum von $\mathbb{S}$ thematisiert wird geht es nun um $\leq$ _Infimum und $\leq$ _Supremum von 0:

157-5(Satz)

a) $+\infty$ *ist* $\leq$ *_Infimum von* 0.

b) $-\infty$ *ist* $\leq$ *_Supremum von* 0.

Beweis **157-5** a)

1.1: Aus **AAVII** "$\leq$ antiSymmetrische Halbordnung in $\mathbb{S}$"
folgt via **34-13**: $(\leq \text{ Relation in } \mathbb{S}) \wedge (\leq \text{ reflexiv in } \mathbb{S})$.

1.2: Aus **157-1** "$+\infty$ ist $\leq$ _Maximum von $\mathbb{S}$"
folgt via **38-7**: $+\infty$ ist $\leq$ _Supremum von $\mathbb{S}$.

2: Aus 1.1 "$\leq$ Relation in $\mathbb{S} \ldots$",
aus 1.1 "$\ldots \leq$ reflexiv in $\mathbb{S}$" und
aus 1.2 "$+\infty$ ist $\leq$ _Supremum von $\mathbb{S}$"
folgt via **43-7**: $+\infty$ ist $\leq$ _Infimum von 0.

b)

1.1: Aus **AAVII** "$\leq$ antiSymmetrische Halbordnung in $\mathbb{S}$"
folgt via **34-13**: $(\leq \text{ Relation in } \mathbb{S}) \wedge (\leq \text{ reflexiv in } \mathbb{S})$.

1.2: Aus **157-1** "$-\infty$ ist $\leq$ _Minimum von $\mathbb{S}$"
folgt via **38-6**: $-\infty$ ist $\leq$ _Infimum von $\mathbb{S}$.

2: Aus 1.1 "$\leq$ Relation in $\mathbb{S} \ldots$",
aus 1.1 "$\ldots \leq$ reflexiv in $\mathbb{S}$" und
aus 1.2 "$-\infty$ ist $\leq$ _Infimum von $\mathbb{S}$"
folgt via **43-8**: $-\infty$ ist $\leq$ _Supremum von 0.

$\square$

157-6. Eine Klasse p ist genau dann $\leq$ _Minimum von $\{p\}$, wenn $p \in \mathbb{S}$ gilt und dies ist genau dann der Fall, wenn p ein $\leq$ _Maximum von $\{p\}$ ist:

157-6(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` $p \in \mathbb{S}$.

`ii)` p *ist* $\leq$ _*Minimum von* $\{p\}$.

`iii)` p *ist* $\leq$ _*Maximum von* $\{p\}$.

Beweis **157-6**

$\leq$-Notation.

`i) ⇒ ii)` `VS` gleich $p \in \mathbb{S}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p \in \mathbb{S}$"
folgt via **107-5**: $p \leq p$.

`2:` Aus `1`"$p \leq p$"
folgt via **38-23**: p ist $\leq$ _Minimum von $\{p\}$.

`ii) ⇒ iii)` `VS` gleich p ist $\leq$ _Minimum von $\{p\}$.

`1:` Aus `VS` gleich "p ist $\leq$ _Minimum von $\{p\}$"
folgt via **157-3**: $p \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `1`"$p \in \mathbb{S}$"
folgt via **107-5**: $p \leq p$.

`3:` Aus `2`"$p \leq p$"
folgt via **38-23**: p ist $\leq$ _Maximum von $\{p\}$.

`iii) ⇒ i)` `VS` gleich p ist $\leq$ _Maximum von $\{p\}$.

Aus `VS` gleich "p ist $\leq$ _Maximum von $\{p\}$"
folgt via **157-3**: $p \in \mathbb{S}$.

□

157-7. Mit den hier zur Verfügung gestellten Aussagen werden Untersuchungen von $\leq$ _Schranken erleichtert:

157-7(Satz)

a) *Aus* "$u \in \mathbb{S}$" *und* "$\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (u \leq \alpha)$"
folgt "u *untere* $\leq$ *_Schranke von* E".

b) *Aus* "$o \in \mathbb{S}$" *und* "$\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\alpha \leq o)$"
folgt "o *obere* $\leq$ *_Schranke von* E".

Beweis **157-7** a) VS gleich $(u \in \mathbb{S}) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (u \leq \alpha))$.

1: Aus **AAVII**"$\leq$ antiSymmetrische Halbordnung in $\mathbb{S}$"
folgt via **34-13**: $\leq$ reflexiv in $\mathbb{S}$.

2: Aus 1"$\leq$ reflexiv in $\mathbb{S}$",
aus VS gleich "$u \in \mathbb{S} \ldots$" und
aus VS gleich "$\ldots \forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (u \leq \alpha)$"
folgt via **155-3**: u untere $\leq$ _Schranke von E.

b) VS gleich $(o \in \mathbb{S}) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\alpha \leq o))$.

1: Aus **AAVII**"$\leq$ antiSymmetrische Halbordnung in $\mathbb{S}$"
folgt via **34-13**: $\leq$ reflexiv in $\mathbb{S}$.

2: Aus 1"$\leq$ reflexiv in $\mathbb{S}$",
aus VS gleich "$o \in \mathbb{S} \ldots$" und
aus VS gleich "$\ldots \forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\alpha \leq o)$"
folgt via **155-3**: o obere $\leq$ _Schranke von E.

$\square$

157-8. Nun wird untersucht, unter welchen Bedingungen $+\infty$ und $-\infty$ untere oder obere $\leq$ _Schranken von E sind:

157-8(Satz)

a) *"$+\infty$ untere $\leq$ _Schranke von E" genau dann, wenn "$E = 0$" oder "$E = \{+\infty\}$".*

b) *"$-\infty$ untere $\leq$ _Schranke von E" genau dann, wenn "$E \subseteq \mathbb{S}$".*

c) *"$+\infty$ obere $\leq$ _Schranke von E" genau dann, wenn "$E \subseteq \mathbb{S}$".*

d) *"$-\infty$ obere $\leq$ _Schranke von E" genau dann, wenn "$E = 0$" oder "$E = \{-\infty\}$".*

Beweis **157-8**

$\leq$-Notation.

Beweis **157-8** a) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich $+\infty$ untere $\leq$ _Schranke von E.

Thema1 $\alpha \in E$.

2: Aus VS gleich "$+\infty$ untere $\leq$ _Schranke von E" und
aus Thema1"$\alpha \in E$"
folgt via **35-1(Def)**: $+\infty \leq \alpha$.

3: Aus 2"$+\infty \leq \alpha$"
folgt via **107-7**: $\alpha = +\infty$.

Ergo Thema1: $\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\alpha = +\infty)$.

Konsequenz via **1-10**: $(E = 0) \vee (E = \{+\infty\})$.

a) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich $(E = 0) \vee (E = \{+\infty\})$.

1: Nach VS gilt: $(E = 0) \vee (E = \{+\infty\})$.

Fallunterscheidung

1.1.Fall $E = 0$.

2: Aus **157-5**"$+\infty$ ist $\leq$ _Infimum von 0" und
aus 1.1.Fall"$E = 0$"
folgt: $+\infty$ ist $\leq$ _Infimum von E.

3: Aus 2"$+\infty$ ist $\leq$ _Infimum von E"
folgt via **36-1(Def)**: $+\infty$ untere $\leq$ _Schranke von E.

1.2.Fall $E = \{+\infty\}$.

2: Aus **95-11**"$+\infty \in \mathbb{S}$"
folgt via **157-6**: $+\infty$ ist $\leq$ _Minimum von $\{+\infty\}$.

3: Aus 2"$+\infty$ ist $\leq$ _Minimum von $\{+\infty\}$"
folgt via **38-6**: $+\infty$ untere $\leq$ _Schranke von $\{+\infty\}$.

4: Aus 3"$+\infty$ untere $\leq$ _Schranke von $\{+\infty\}$" und
aus 1.2.Fall"$E = \{+\infty\}$"
folgt: $+\infty$ untere $\leq$ _Schranke von E.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt:
$+\infty$ untere $\leq$ _Schranke von E.

<u>Beweis</u> **157-8** `b)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $\qquad -\infty$ untere $\leq$ _Schranke von E.

Aus `VS` gleich "$-\infty$ untere $\leq$ _Schranke von E"
folgt via **157-3**: $\qquad E \subseteq \mathbb{S}$.

`b)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $\qquad E \subseteq \mathbb{S}$.

`Thema1.1` $\qquad \alpha \in E$.

`2:` Aus `Thema1.1`"$\alpha \in E$" und
aus `VS` gleich "$E \subseteq \mathbb{S}$"
folgt via **0-4**: $\qquad \alpha \in \mathbb{S}$.

`3:` Aus 2"$\alpha \in \mathbb{S}$"
folgt via **107-5**: $\qquad -\infty \leq \alpha$.

Ergo `Thema1.1`: $\qquad$ `A1` | "$\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (-\infty \leq \alpha)$"

`1.2:` Aus **95-11**"$-\infty \in \mathbb{S}$" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (-\infty \leq \alpha)$"
folgt via **157-7**: $\qquad -\infty$ untere $\leq$ _Schranke von E.

Beweis **157-8** `c)` $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ `VS` gleich $+\infty$ obere $\leq$ -Schranke von E.

Aus `VS` gleich "$+\infty$ obere $\leq$ -Schranke von E"
folgt via **157-3**: $E \subseteq \mathbb{S}$.

`c)` $\boxed{\boxed{\Leftarrow}}$ `VS` gleich $E \subseteq \mathbb{S}$.

`Thema1.1` $\alpha \in E$.

`2:` Aus `Thema1.1` "$\alpha \in E$" und
aus `VS` gleich "$E \subseteq \mathbb{S}$"
folgt via **0-4**: $\alpha \in \mathbb{S}$.

`3:` Aus 2 "$\alpha \in \mathbb{S}$"
folgt via **107-5**: $\alpha \leq +\infty$.

Ergo `Thema1.1`: `A1` | "$\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\alpha \leq +\infty)$"

`1.2:` Aus **95-11** "$+\infty \in \mathbb{S}$" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\alpha \leq +\infty)$"
folgt via **157-7**: $+\infty$ obere $\leq$ -Schranke von E.

Beweis **157-8** `d)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $-\infty$ obere $\leq$ _Schranke von E.

`Thema1` $\alpha \in E$.

`2:` Aus `VS` gleich "$-\infty$ obere $\leq$ _Schranke von E" und
aus `Thema1` "$\alpha \in E$"
folgt via **35-1(Def)**: $\alpha \leq -\infty$.

`3:` Aus 2 "$\alpha \leq -\infty$"
folgt via **107-7**: $\alpha = -\infty$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\alpha = -\infty)$.

Konsequenz via **1-10**: $(E = 0) \vee (E = \{-\infty\})$.

`a)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $(E = 0) \vee (E = \{-\infty\})$.

`1:` Nach `VS` gilt: $(E = 0) \vee (E = \{-\infty\})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $E = 0$.

`2:` Aus **157-5** "$-\infty$ ist $\leq$ _Supremum von 0" und
aus `1.1.Fall` "$E = 0$"
folgt: $-\infty$ ist $\leq$ _Supremum von E.

`3:` Aus 2 "$-\infty$ ist $\leq$ _Supremum von E"
folgt via **36-1(Def)**: $-\infty$ obere $\leq$ _Schranke von E.

`1.2.Fall` $E = \{-\infty\}$.

`2:` Aus **95-11** "$-\infty \in \mathbb{S}$"
folgt via **157-6**: $-\infty$ ist $\leq$ _Maximum von $\{-\infty\}$.

`3:` Aus 2 "$-\infty$ ist $\leq$ _Maximum von $\{-\infty\}$"
folgt via **38-7**: $-\infty$ obere $\leq$ _Schranke von $\{-\infty\}$.

`4:` Aus 3 "$-\infty$ obere $\leq$ _Schranke von $\{-\infty\}$" und
aus `1.2.Fall` "$E = \{-\infty\}$"
folgt: $-\infty$ obere $\leq$ _Schranke von E.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$-\infty$ obere $\leq$ _Schranke von E.

$\square$

157-9. Nun wird thematisiert, wann $+\infty$ und $-\infty$ als $\leq$ _Infimum oder $\leq$ _Supremum auftreten:

157-9(Satz)

a) *"$+\infty$ ist $\leq$ _Infimum von E"*
genau dann, wenn "$E = 0$" oder "$E = \{+\infty\}$".

b) *"$-\infty$ ist $\leq$ _Infimum von E" genau dann, wenn "$E \subseteq \mathbb{S}$"*
und "$\forall \alpha : (\alpha$ untere $\leq$ _Schranke von $E) \Rightarrow (\alpha = -\infty)$".

c) *"$+\infty$ ist $\leq$ _Supremum von E" genau dann, wenn "$E \subseteq \mathbb{S}$"*
und "$\forall \alpha : (\alpha$ obere $\leq$ _Schranke von $E) \Rightarrow (\alpha = +\infty)$".

d) *"$-\infty$ ist $\leq$ _Supremum von E"*
genau dann, wenn "$E = 0$" oder "$E = \{-\infty\}$".

Beweis **157-9**

$\leq$-Notation.

Beweis **157-9** a) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich $+\infty$ ist $\le$ _Infimum von E.

1: Aus VS gleich "$+\infty$ ist $\le$ _Infimum von E"
folgt via **36-1(Def)**: $+\infty$ untere $\le$ _Schranke von E.

2: Aus 1"$+\infty$ untere $\le$ _Schranke von E"
folgt via **157-8**: $(E = 0) \vee (E = \{+\infty\})$.

a) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich $(E = 0) \vee (E = \{+\infty\})$.

1: Nach VS gilt: $(E = 0) \vee (E = \{+\infty\})$.

Fallunterscheidung

1.1.Fall $E = 0$.

Aus **157-5**"$+\infty$ ist $\le$ _Infimum von 0" und
aus 1.1.Fall"$E = 0$"
folgt: $+\infty$ ist $\le$ _Infimum von E.

1.2.Fall $E = \{+\infty\}$.

2: Aus **95-11**"$+\infty \in \mathbb{S}$"
folgt via **157-6**: $+\infty$ ist $\le$ _Minimum von $\{+\infty\}$.

3: Aus 2"$+\infty$ ist $\le$ _Minimum von $\{+\infty\}$"
folgt via **38-6**: $+\infty$ ist $\le$ _Infimum von $\{+\infty\}$.

4: Aus 3"$+\infty$ ist $\le$ _Infimum von $\{+\infty\}$" und
aus 1.2.Fall"$E = \{+\infty\}$"
folgt: $+\infty$ ist $\le$ _Infimum von E.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt:
$+\infty$ ist $\le$ _Infimum von E.

Beweis **157-9** `b)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $-\infty$ ist $\le$ _Infimum von E.

`1.1:` Aus `VS` gleich “$-\infty$ ist $\le$ _Infimum von E”
folgt via **157-3**: | `A1` | “$E \subseteq \mathbb{S}$” |

`Thema1.2`	α untere $\le$ _Schranke von E

`2:` Aus `VS` gleich “$-\infty$ ist $\le$ _Infimum von E” und
aus `Thema1.2`“α untere $\le$ _Schranke von E”
folgt via **36-1(Def)**: $\alpha \le -\infty$.

`3:` Aus 2“$\alpha \le -\infty$”
folgt via **107-7**: $\alpha = -\infty$.

Ergo `Thema1.2`: | `A2` | “$\forall \alpha : (\alpha$ untere $\le$ _Schranke von $E) \Rightarrow (\alpha = -\infty)$” |

`1.3:` Aus `A1` gleich “$E \subseteq \mathbb{S}$” und
aus `A2` gleich “$\forall \alpha : (\alpha$ untere $\le$ _Schranke von $E) \Rightarrow (\alpha = -\infty)$”
folgt: $(E \subseteq \mathbb{S}) \wedge (\forall \alpha : (\alpha$ untere $\le$ _Schranke von $E) \Rightarrow (\alpha = -\infty))$.

`b)` $\boxed{\Leftarrow}$
`VS` gleich $(E \subseteq \mathbb{S}) \wedge (\forall \alpha : (\alpha$ untere $\le$ _Schranke von $E) \Rightarrow (\alpha = -\infty))$.

`1:` Aus `VS` gleich “$E \subseteq \mathbb{S} \ldots$”
folgt via **157-4**: $\exists \Omega : \Omega$ ist $\le$ _Infimum von E.

`2:` Aus 1“$\ldots \Omega$ ist $\le$ _Infimum von E”
folgt via **36-1(Def)**: Ω untere $\le$ _Schranke von E.

`3:` Aus 2“Ω untere $\le$ _Schranke von E” und
aus `VS` gleich “$\ldots \forall \alpha : (\alpha$ untere $\le$ _Schranke von $E) \Rightarrow (\alpha = -\infty)$”
folgt: $\Omega = -\infty$.

`4:` Aus 2“$\ldots \Omega$ ist $\le$ _Infimum von E” und
aus 3“$\Omega = -\infty$”
folgt: $-\infty$ ist $\le$ _Infimum von E.

Beweis **157-9** `c)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $\qquad$ $+\infty$ ist $\leq$ _Supremum von E.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$+\infty$ ist $\leq$ _Supremum von E"
folgt via **157-3**: $\qquad$ `A1` | "$E \subseteq \mathbb{S}$"

`Thema1.2` $\qquad$ α obere $\leq$ _Schranke von E

`2:` Aus `VS` gleich "$+\infty$ ist $\leq$ _Supremum von E" und
aus `Thema1.2`"α obere $\leq$ _Schranke von E"
folgt via **36-1(Def)**: $\qquad$ $+\infty \leq \alpha$.

`3:` Aus `2`"$+\infty \leq \alpha$"
folgt via **107-7**: $\qquad$ $\alpha = +\infty$.

Ergo `Thema1.2`: $\qquad$ `A2` | "$\forall \alpha : (\alpha$ obere $\leq$ _Schranke von $E) \Rightarrow (\alpha = +\infty)$"

`1.3:` Aus `A1` gleich "$E \subseteq \mathbb{S}$" und
aus `A2` gleich "$\forall \alpha : (\alpha$ obere $\leq$ _Schranke von $E) \Rightarrow (\alpha = +\infty)$"
folgt: $\qquad$ $(E \subseteq \mathbb{S}) \wedge (\forall \alpha : (\alpha$ obere $\leq$ _Schranke von $E) \Rightarrow (\alpha = +\infty))$.

`c)` $\boxed{\Leftarrow}$
`VS` gleich $\qquad$ $(E \subseteq \mathbb{S}) \wedge (\forall \alpha : (\alpha$ obere $\leq$ _Schranke von $E) \Rightarrow (\alpha = +\infty))$.

`1:` Aus `VS` gleich "$E \subseteq \mathbb{S} \ldots$"
folgt via **157-4**: $\qquad$ $\exists \Omega : \Omega$ ist $\leq$ _Supremum von E.

`2:` Aus `1`"$\ldots \Omega$ ist $\leq$ _Supremum von E"
folgt via **36-1(Def)**: $\qquad$ Ω obere $\leq$ _Schranke von E.

`3:` Aus `2`"Ω obere $\leq$ _Schranke von E" und
aus `VS` gleich "$\ldots \forall \alpha : (\alpha$ obere $\leq$ _Schranke von $E) \Rightarrow (\alpha = +\infty)$"
folgt: $\qquad$ $\Omega = +\infty$.

`4:` Aus `2`"$\ldots \Omega$ ist $\leq$ _Supremum von E" und
aus `3`"$\Omega = +\infty$"
folgt: $\qquad$ $+\infty$ ist $\leq$ _Supremum von E.

Beweis **157-9** `d)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $\qquad -\infty$ ist $\le$ _Supremum von E.

`1:` Aus `VS` gleich "$-\infty$ ist $\le$ _Supremum von E"
folgt via **36-1(Def)**: $\qquad -\infty$ obere $\le$ _Schranke von E.

`2:` Aus `1` "$-\infty$ obere $\le$ _Schranke von E"
folgt via **157-8**: $\qquad (E = 0) \vee (E = \{-\infty\})$.

`d)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $\qquad (E = 0) \vee (E = \{-\infty\})$.

`1:` Nach `VS` gilt: $\qquad (E = 0) \vee (E = \{-\infty\})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $\qquad E = 0$.

Aus **157-5** "$-\infty$ ist $\le$ _Supremum von 0" und
aus `1.1.Fall` "$E = 0$"
folgt: $\qquad -\infty$ ist $\le$ _Supremum von E.

`1.2.Fall` $\qquad E = \{-\infty\}$.

`2:` Aus **95-11** "$-\infty \in \mathbb{S}$"
folgt via **157-6**: $\qquad -\infty$ ist $\le$ _Maximum von $\{-\infty\}$.

`3:` Aus `2` "$-\infty$ ist $\le$ _Maximum von $\{-\infty\}$"
folgt via **38-7**: $\qquad -\infty$ ist $\le$ _Supremum von $\{-\infty\}$.

`4:` Aus `3` "$-\infty$ ist $\le$ _Supremum von $\{-\infty\}$" und
aus `1.2.Fall` "$E = \{-\infty\}$"
folgt: $\qquad -\infty$ ist $\le$ _Supremum von E.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$-\infty$ ist $\le$ _Supremum von E.

□

157-10. Nun wird untersucht, wann $+\infty$ und $-\infty$ als $\leq$ _Minimum oder $\leq$ _Maximum auftreten:

157-10(Satz)

a) "$+\infty$ *ist* $\leq$ *_Minimum von* E" *genau dann, wenn* "$E = \{+\infty\}$".

b) "$-\infty$ *ist* $\leq$ *_Minimum von* E" *genau dann, wenn* "$-\infty \in E \subseteq \mathbb{S}$".

c) "$+\infty$ *ist* $\leq$ *_Maximum von* E" *genau dann, wenn* "$+\infty \in E \subseteq \mathbb{S}$".

d) "$-\infty$ *ist* $\leq$ *_Maximum von* E" *genau dann, wenn* "$E = \{-\infty\}$".

Beweis **157-10** a) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich $+\infty$ ist $\leq$ _Minimum von E.

1: Aus VS gleich "$+\infty$ ist $\leq$ _Minimum von E"
folgt via **38-6**: $(+\infty \in E) \wedge (+\infty$ untere $\leq$ _Schranke von $E)$.

2.1: Aus 1"$+\infty \in E \ldots$"
folgt via **0-20**: $0 \neq E$.

2.2: Aus 1"$\ldots + \infty$ untere $\leq$ _Schranke von E"
folgt via **157-8**: $(E = 0) \vee (E = \{+\infty\})$.

3: Aus 2.2"$(E = 0) \vee (E = \{+\infty\})$" und
aus 2.1"$0 \neq E$"
folgt: $E = \{+\infty\}$.

a) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich $E = \{+\infty\}$.

1: Aus **95-11**"$+\infty \in \mathbb{S}$"
folgt via **157-6**: $+\infty$ ist $\leq$ _Minimum von $\{+\infty\}$.

2: Aus 1"$+\infty$ ist $\leq$ _Minimum von $\{+\infty\}$" und
aus VS gleich "$E = \{+\infty\}$"
folgt: $+\infty$ ist $\leq$ _Minimum von E.

b) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich $-\infty$ ist $\leq$ _Minimum von E.

1.1: Aus VS gleich "$-\infty$ ist $\leq$ _Minimum von E"
folgt via **38-6**: $-\infty \in E$.

1.2: Aus VS gleich "$-\infty$ ist $\leq$ _Minimum von E"
folgt via **157-3**: $E \subseteq \mathbb{S}$.

2: Aus 1.1"$-\infty \in E$" und
aus 1.2"$E \subseteq \mathbb{S}$"
folgt: $-\infty \in E \subseteq \mathbb{S}$.

Beweis **157-10** `b)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $-\infty \in E \subseteq \mathbb{S}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots E \subseteq \mathbb{S}$"
folgt via **157-8**: $-\infty$ untere $\leq$ _Schranke von E.

`2:` Aus `VS` gleich "$-\infty \in E \ldots$" und
aus `1` "$-\infty$ untere $\leq$ _Schranke von E"
folgt via **38-6**: $-\infty$ ist $\leq$ _Minimum von E.

`c)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $+\infty$ ist $\leq$ _Maximum von E.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$+\infty$ ist $\leq$ _Maximum von E"
folgt via **38-7**: $+\infty \in E$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$+\infty$ ist $\leq$ _Maximum von E"
folgt via **157-3**: $E \subseteq \mathbb{S}$.

`2:` Aus `1.1` "$+\infty \in E$" und
aus `1.2` "$E \subseteq \mathbb{S}$"
folgt: $+\infty \in E \subseteq \mathbb{S}$.

`c)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $+\infty \in E \subseteq \mathbb{S}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots E \subseteq \mathbb{S}$"
folgt via **157-8**: $+\infty$ obere $\leq$ _Schranke von E.

`2:` Aus `VS` gleich "$+\infty \in E \ldots$" und
aus `1` "$+\infty$ obere $\leq$ _Schranke von E"
folgt via **38-7**: $+\infty$ ist $\leq$ _Maximum von E.

`d)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $-\infty$ ist $\leq$ _Maximum von E.

`1:` Aus `VS` gleich "$-\infty$ ist $\leq$ _Maximum von E"
folgt via **38-7**: $(-\infty \in E) \wedge (-\infty$ obere $\leq$ _Schranke von $E)$.

`2.1:` Aus `1` "$-\infty \in E \ldots$"
folgt via **0-20**: $0 \neq E$.

`2.2:` Aus `1` "$\ldots -\infty$ obere $\leq$ _Schranke von E"
folgt via **157-8**: $(E = 0) \vee (E = \{-\infty\})$.

`3:` Aus `2.2` "$(E = 0) \vee (E = \{-\infty\})$" und
aus `2.1` "$0 \neq E$"
folgt: $E = \{-\infty\}$.

Beweis **157-10** `d)` $\boxed{\boxed{\Leftarrow}}$ `VS` gleich $E = \{-\infty\}$.

`1:` Aus **95-11** "$-\infty \in \mathbb{S}$"
folgt via **157-6**: $-\infty$ ist $\leq$ _Maximum von $\{-\infty\}$.

`2:` Aus `1` "$-\infty$ ist $\leq$ _Maximum von $\{-\infty\}$" und
aus `VS` gleich "$E = \{-\infty\}$"
folgt: $-\infty$ ist $\leq$ _Maximum von E.

$\square$

157-11. Hier wird untersucht, wie sich $+\infty$ und $-\infty$ als $\leq$ _Infimum oder $\leq$ _Supremum verhalten, wenn TeilKlassen berücksichtigt werden:

157-11(Satz)

a) *Aus "$+\infty$ ist $\leq$ _Infimum von E" und "$y \subseteq E$" folgt "$+\infty$ ist $\leq$ _Infimum von y".*

b) *Aus "$-\infty$ ist $\leq$ _Infimum von E" und "$E \subseteq z \subseteq \mathbb{S}$" folgt "$-\infty$ ist $\leq$ _Infimum von z".*

c) *Aus "$+\infty$ ist $\leq$ _Supremum von E" und "$E \subseteq z \subseteq \mathbb{S}$" folgt "$+\infty$ ist $\leq$ _Supremum von z".*

d) *Aus "$-\infty$ ist $\leq$ _Supremum von E" und "$y \subseteq E$" folgt "$-\infty$ ist $\leq$ _Supremum von y".*

Beweis **157-11**

$\leq$-Notation.

---

a) VS gleich $(+\infty \text{ ist } \leq \text{\_Infimum von } E) \wedge (y \subseteq E)$.

1: Aus VS gleich "$+\infty$ ist $\leq$ _Infimum von $E\ldots$"
folgt via **157-9**: $(E = 0) \vee (E = \{+\infty\})$.

2: Aus 1"$(E = 0) \vee (E = \{+\infty\})$"
folgt via **1-10**: $E \subseteq \{+\infty\}$.

3: Aus VS gleich "$\ldots y \subseteq E$" und
aus 2"$E \subseteq \{+\infty\}$"
folgt via **0-6**: $y \subseteq \{+\infty\}$.

4: Aus 3"$y \subseteq \{+\infty\}$"
folgt via **1-10**: $(y = 0) \vee (y = \{+\infty\})$.

5: Aus 4"$(y = 0) \vee (y = \{+\infty\})$"
folgt via **157-9**: $+\infty$ ist $\leq$ _Infimum von y.

<u>Beweis **157-11**</u> `b)` `VS` gleich $(-\infty \text{ ist } \leq \text{\_Infimum von } E) \wedge (E \subseteq z \subseteq \mathbb{S})$.

`Thema1.1` $\qquad\qquad$ α untere $\leq$ _Schranke von z
`2:` Aus `Thema1.1` "α untere $\leq$ _Schranke von z" und aus `VS` gleich "$\ldots E \subseteq z \ldots$" folgt via **35-6**: α untere $\leq$ _Schranke von E.
`3:` Aus `VS` gleich "$-\infty$ ist $\leq$ _Infimum von $E \ldots$" und aus 2 "α untere $\leq$ _Schranke von E" folgt via **36-1(Def)**: $\alpha \leq -\infty$.
`4:` Aus 3 "$\alpha \leq -\infty$" folgt via **107-7**: $\alpha = -\infty$.

Ergo `Thema1.1`: $\quad$ `A1` | "$\forall \alpha : (\alpha$ untere $\leq$ _Schranke von $z) \Rightarrow (\alpha = -\infty)$"

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots z \subseteq \mathbb{S}$" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha : (\alpha$ untere $\leq$ _Schranke von $z) \Rightarrow (\alpha = -\infty)$"
folgt via **157-9**: $-\infty$ ist $\leq$ _Infimum von z.

`c)` `VS` gleich $(+\infty \text{ ist } \leq \text{\_Supremum von } E) \wedge (E \subseteq z \subseteq \mathbb{S})$.

`Thema1.1` $\qquad\qquad$ α obere $\leq$ _Schranke von z
`2:` Aus `Thema1.1` "α obere $\leq$ _Schranke von z" und aus `VS` gleich "$\ldots E \subseteq z \ldots$" folgt via **35-6**: α obere $\leq$ _Schranke von E.
`3:` Aus `VS` gleich "$+\infty$ ist $\leq$ _Supremum von $E \ldots$" und aus 2 "α obere $\leq$ _Schranke von E" folgt via **36-1(Def)**: $+\infty \leq \alpha$.
`4:` Aus 3 "$+\infty \leq \alpha$" folgt via **107-7**: $\alpha = +\infty$.

Ergo `Thema1.1`: $\quad$ `A1` | "$\forall \alpha : (\alpha$ obere $\leq$ _Schranke von $z) \Rightarrow (\alpha = +\infty)$"

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots z \subseteq \mathbb{S}$" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha : (\alpha$ obere $\leq$ _Schranke von $z) \Rightarrow (\alpha = +\infty)$"
folgt via **157-9**: $+\infty$ ist $\leq$ _Supremum von z.

<u>Beweis</u> **157-11** `d)` `VS` gleich $(-\infty \text{ ist } \leq \_\text{Supremum von } E) \wedge (y \subseteq E)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$-\infty$ ist $\leq$ _Supremum von $E\ldots$"
folgt via **157-9**: $(E = 0) \vee (E = \{-\infty\})$.

`2:` Aus `1`"$(E = 0) \vee (E = \{-\infty\})$"
folgt via **1-10**: $E \subseteq \{-\infty\}$.

`3:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \subseteq E$" und
aus `2`"$E \subseteq \{-\infty\}$"
folgt via **0-6**: $y \subseteq \{-\infty\}$.

`4:` Aus `3`"$y \subseteq \{-\infty\}$"
folgt via **1-10**: $(y = 0) \vee (y = \{-\infty\})$.

`5:` Aus `4`"$(y = 0) \vee (y = \{-\infty\})$"
folgt via **157-9**: $-\infty$ ist $\leq$ _Supremum von y.

$\square$

157-12. Nun wird untersucht, wie sich $+\infty$ und $-\infty$ als $\leq$ _Minimum oder $\leq$ _Maximum verhalten, wenn TeilKlassen berücksichtigt werden:

<u>**157-12(Satz)**</u>

a) *Aus "$+\infty$ ist $\leq$ _Minimum von E" und "$0 \neq y \subseteq E$" folgt "$+\infty$ ist $\leq$ _Minimum von y.*

b) *Aus "$-\infty$ ist $\leq$ _Minimum von E" und "$E \subseteq z \subseteq \mathbb{S}$" folgt "$-\infty$ ist $\leq$ _Minimum von y.*

c) *Aus "$+\infty$ ist $\leq$ _Maximum von E" und "$E \subseteq z \subseteq \mathbb{S}$" folgt "$+\infty$ ist $\leq$ _Maximum von y.*

d) *Aus "$-\infty$ ist $\leq$ _Maximum von E" und "$0 \neq y \subseteq E$" folgt "$-\infty$ ist $\leq$ _Maximum von y.*

<u>Beweis **157-12**</u> a) VS gleich $(+\infty$ ist $\leq$ _Minimum von $E) \wedge (0 \neq y \subseteq E)$.

1: Aus VS gleich "$+\infty$ ist $\leq$ _Minimum von $E \ldots$"
folgt via **157-10**: $E = \{+\infty\}$.

2: Aus VS gleich "$\ldots y \subseteq E$" und
aus 1"$E = \{+\infty\}$"
folgt: $y \subseteq \{+\infty\}$.

3: Aus 2"$y \subseteq \{+\infty\}$"
folgt via **1-10**: $(y = 0) \vee (y = \{+\infty\})$.

4: Aus 3"$(y = 0) \vee (y = \{+\infty\})$" und
aus VS gleich "$\ldots 0 \neq y \ldots$"
folgt: $y = \{+\infty\}$.

5: Aus 4"$y = \{+\infty\}$"
folgt via **157-10**: $+\infty$ ist $\leq$ _Minimum von y.

Beweis **157-12** `b)` `VS` gleich $(-\infty \text{ ist } \leq \_\text{Minimum von } E) \wedge (E \subseteq z \subseteq \mathbb{S})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$-\infty$ ist $\leq$ _Minimum von $E \ldots$"
folgt via **157-10**: $-\infty \in E \subseteq \mathbb{S}$.

`2:` Aus `1` "$-\infty \in E \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots E \subseteq z \ldots$"
folgt via **0-4**: $-\infty \in z$.

`3:` Aus `2` "$-\infty \in z$" und
aus `VS` gleich "$\ldots z \subseteq \mathbb{S}$"
folgt: $-\infty \in z \subseteq \mathbb{S}$.

`4:` Aus `3` "$-\infty \in z \subseteq \mathbb{S}$"
folgt via **157-10**: $-\infty$ ist $\leq$ _Minimum von z.

`c)` `VS` gleich $(+\infty \text{ ist } \leq \_\text{Maximum von } E) \wedge (E \subseteq z \subseteq \mathbb{S})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$+\infty$ ist $\leq$ _Maximum von $E \ldots$"
folgt via **157-10**: $+\infty \in E \subseteq \mathbb{S}$.

`2:` Aus `1` "$+\infty \in E \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots E \subseteq z \ldots$"
folgt via **0-4**: $+\infty \in z$.

`3:` Aus `2` "$+\infty \in z$" und
aus `VS` gleich "$\ldots z \subseteq \mathbb{S}$"
folgt: $+\infty \in z \subseteq \mathbb{S}$.

`4:` Aus `3` "$+\infty \in z \subseteq \mathbb{S}$"
folgt via **157-10**: $+\infty$ ist $\leq$ _Maximum von z.

Beweis **157-12** `d)` `VS` gleich $(-\infty \text{ ist } \leq \text{\_Maximum von } E) \wedge (0 \neq y \subseteq E)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$-\infty$ ist $\leq$ _Maximum von $E\ldots$"
folgt via **157-10**: $E = \{-\infty\}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \subseteq E$" und
aus `1` "$E = \{-\infty\}$"
folgt: $y \subseteq \{-\infty\}$.

`3:` Aus `2` "$y \subseteq \{-\infty\}$"
folgt via **1-10**: $(y = 0) \vee (y = \{-\infty\})$.

`4:` Aus `3` "$(y = 0) \vee (y = \{-\infty\})$" und
aus `VS` gleich "$\ldots 0 \neq y \ldots$"
folgt: $y = \{-\infty\}$.

`5:` Aus `4` "$y = \{-\infty\}$"
folgt via **157-10**: $-\infty$ ist $\leq$ _Maximum von y.

$\square$

Einiges über $\subseteq$, über $x \cap y$ und über $x \cup y$.
Einiges über $\not\subseteq$.

Ersterstellung: 26/04/12 **Letzte Änderung: 08/06/12**

158-1. Besser spät als nie wird eine stellenweise schwächere Aussagen involvierende Version von **2-10** etabliert:

158-1(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)`, `iv)`, `v)`, `vi)`, `vii)`, `viii)`, `ix)` *sind äquivalent:*

`i)` $x \subseteq y$.

`ii)` $x \subseteq x \cap y$.

`iii)` $x \subseteq y \cap x$.

`iv)` $x \cap y = x$.

`v)` $y \cap x = x$.

`vi)` $x \cup y \subseteq y$.

`vii)` $y \cup x \subseteq y$.

`viii)` $x \cup y = y$.

`ix)` $y \cup x = y$.

Beweis **158-1** `i)` $\Rightarrow$ `ii)` `VS` gleich $x \subseteq y$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \subseteq y$" folgt via **2-15**: $x \cap x \subseteq y \cap x$.

`2.1:` Via **2-14** gilt: $x \cap x = x$.

`2.2:` Via **KG**$\cap$ gilt: $y \cap x = x \cap y$.

`3:` Aus `2.1`"$x \cap x = x$" und aus `1`"$x \cap x \subseteq y \cap x$" folgt: $x \subseteq y \cap x$.

`4:` Aus `3`"$x \subseteq y \cap x$" und aus `2.2`"$y \cap x = x \cap y$" folgt: $x \subseteq x \cap y$.

<u>Beweis</u> **158-1** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $x \subseteq x \cap y$.

`1:` Via **KG**$\cap$ gilt: $x \cap y = y \cap x$.

`2:` Aus `VS` gleich “$x \subseteq x \cap y$” und
aus `1`“$x \cap y = y \cap x$”
folgt: $x \subseteq y \cap x$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{iv)}}}$ `VS` gleich $x \subseteq y \cap x$.

`1.1:` Via **2-7** gilt: $y \cap x \subseteq x$.

`1.2:` Via **KG**$\cap$ gilt: $x \cap y = y \cap x$.

`2:` Aus `1.1`“$y \cap x \subseteq x$” und
aus `VS` gleich “$x \subseteq y \cap x$”
folgt via **GleichheitsAxiom**: $y \cap x = x$.

`3:` Aus `1.2`“$x \cap y = y \cap x$” und
aus `2`“$y \cap x = x$”
folgt: $x \cap y = x$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iv)} \Rightarrow \texttt{v)}}}$ `VS` gleich $x \cap y = x$.

Aus `VS` gleich “$x \cap y = x$”
folgt via **2-10**: $y \cap x = x$.

$\boxed{\boxed{\texttt{v)} \Rightarrow \texttt{vi)}}}$ `VS` gleich $y \cap x = x$.

`1:` Aus `VS` gleich “$y \cap x = x$”
folgt via **2-10**: $x \subseteq y$.

`2:` Aus `1`“$x \subseteq y$”
folgt via **2-15**: $x \cup y \subseteq y \cup y$.

`3:` Via **2-14** gilt: $y \cup y = y$.

`4:` Aus `3`“$x \cup y \subseteq y \cup y$” und
aus `3`“$y \cup y = y$”
folgt: $x \cup y \subseteq y$.

$\boxed{\boxed{\texttt{vi)} \Rightarrow \texttt{vii)}}}$ `VS` gleich $x \cup y \subseteq y$.

`1:` Via **KG**$\cup$ gilt: $y \cup x = x \cup y$.

`2:` Aus `1`“$y \cup x = x \cup y$” und
aus `VS` gleich “$x \cup y \subseteq y$”
folgt: $y \cup x \subseteq y$.

Beweis **158-1** $\boxed{\boxed{\texttt{vii)} \Rightarrow \texttt{viii)}}}$ `VS` gleich $y \cup x \subseteq y$.

`1.1:` Via **2-7** gilt: $y \subseteq y \cup x$.

`1.2:` Via **KG**$\cup$ gilt: $x \cup y = y \cup x$.

`2:` Aus `VS` gleich "$y \cup x \subseteq y$" und
aus `1.1`"$y \subseteq y \cup x$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $y \cup x = y$.

`3:` Aus `1.2`"$x \cup y = y \cup x$" und
aus `2`"$y \cup x = y$"
folgt: $x \cup y = y$.

$\boxed{\boxed{\texttt{viii)} \Rightarrow \texttt{ix)}}}$ `VS` gleich $x \cup y = y$.

Aus `VS` gleich "$x \cup y = y$"
folgt via **2-10**: $y \cup x = y$.

$\boxed{\boxed{\texttt{ix)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $y \cup x = y$.

Aus `VS` gleich "$y \cup x = y$"
folgt via **2-10**: $x \subseteq y$.

$\square$

158-2. Ist x *keine* TeilKlasse von z, dann ist x keine TeilKlasse von TeilKlassen von z. Aus $x \notin \mathcal{P}(y)$ folgt $x \not\subseteq y$ oder x Unmenge. Falls $x \not\subseteq y$ dann ist x kein Element von $\mathcal{P}(y)$:

158-2(Satz)

a) *Aus "$x \not\subseteq z$" und "$y \subseteq z$" folgt "$x \not\subseteq y$".*

b) *Aus "$x \notin \mathcal{P}(y)$" folgt "$x \not\subseteq y$" oder "x Unmenge".*

c) *Aus "$x \not\subseteq y$" folgt "$x \notin \mathcal{P}(y)$".*

d) *"$x \in (\mathcal{P}(y))^C$" genau dann, wenn "x Menge" und "$x \not\subseteq y$".*

Beweis **158-2** a) VS gleich $(x \not\subseteq z) \wedge (y \subseteq z)$.

1: Es gilt: $(x \subseteq y) \vee (\neg(x \subseteq y))$.

Fallunterscheidung

1.1.Fall $x \subseteq y$.

2: Aus 1.1.Fall "$x \subseteq y$" und aus VS gleich "$\ldots y \subseteq z$" folgt via **0-6**: $x \subseteq z$.

3: Aus VS gleich "$x \not\subseteq z$" folgt via **0-3**: $\neg(x \subseteq z)$.

4: Es gilt 2 "$x \subseteq z$". Es gilt 3 "$\neg(x \subseteq z)$". Ex falso quodlibet folgt: $x \not\subseteq y$.

1.2.Fall $\neg(x \subseteq y)$.

Aus 1.2.Fall "$\neg(x \subseteq y)$" folgt via **0-3**: $x \not\subseteq y$.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt: $x \not\subseteq y$.

Beweis **158-2** `b)` `VS` gleich $x \notin \mathcal{P}(y)$.

`1:` Es gilt: $((x \subseteq y) \wedge (x \text{ Menge})) \vee (\neg((x \subseteq y) \wedge (x \text{ Menge})))$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $(x \subseteq y) \wedge (x \text{ Menge})$.

`2:` Aus `1.1.Fall` "$x \subseteq y \ldots$" und
aus `1.1.Fall` "$\ldots x$ Menge"
folgt via **0-26**: $x \in \mathcal{P}(y)$.

`3:` Es gilt `2` "$x \in \mathcal{P}(y)$" .
Es gilt `VS` gleich "$x \notin \mathcal{P}(y)$" .
Ex falso quodlibet folgt: $(x \not\subseteq y) \vee (x \text{ Unmenge})$.

`1.2.Fall` $\neg((x \subseteq y) \wedge (x \text{ Menge}))$.

`2:` Aus `1.2.Fall`
folgt: $(\neg(x \subseteq y)) \vee (\neg(x \text{ Menge}))$.

`3.1:` Aus `2`
folgt: $(\neg(x \subseteq y)) \vee (x \text{ Unmenge})$.

`3.2:` Via **0-3** gilt: $(\neg(x \subseteq y)) \Leftrightarrow (x \not\subseteq y)$.

`4:` Aus `3.1` und
aus `3.2`
folgt: $(x \not\subseteq y) \vee (x \text{ Unmenge})$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $(x \not\subseteq y) \vee (x \text{ Unmenge})$.

Beweis **158-2** `c)` `VS` gleich $x \not\subseteq y$.

`1:` Es gilt: $(x \in \mathcal{P}(y)) \vee (x \notin \mathcal{P}(y))$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x \in \mathcal{P}(y)$.

`2:` Aus `1.1.Fall`"$x \in \mathcal{P}(y)$"
folgt via **0-26**: $x \subseteq y$.

`3:` Aus `VS` gleich "$x \not\subseteq y$"
folgt via **0-3**: $\neg(x \subseteq y)$.

`4:` Es gilt `2`"$x \subseteq y$".
Es gilt `3`"$\neg(x \subseteq y)$".
Ex falso quodlibet folgt: $x \notin \mathcal{P}(y)$.

`1.2.Fall` $x \notin \mathcal{P}(y)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $x \notin \mathcal{P}(y)$.

Beweis **158-2** `d)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $x \in (\mathcal{P}(y))^C$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x \in (\mathcal{P}(y))^C$"
folgt via **ElementAxiom**: x Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$x \in (\mathcal{P}(y))^C$"
folgt via **3-2**: $x \notin \mathcal{P}(y)$.

`2:` Aus `1.2`"$x \notin \mathcal{P}(y)$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $(x \not\subseteq y) \vee (x \text{ Unmenge})$.

`3:` Aus `2`"$(x \not\subseteq y) \vee (x \text{ Unmenge})$" und
aus `1.1`"x Menge"
folgt: $x \not\subseteq y$.

`4:` Aus `1.1`"x Menge" und
aus `3`"$x \not\subseteq y$"
folgt: $(x \text{ Menge}) \wedge (x \not\subseteq y)$.

`d)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $(x \text{ Menge}) \wedge (x \not\subseteq y)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \not\subseteq y$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $x \notin \mathcal{P}(y)$.

`2:` Aus `1`"$x \notin \mathcal{P}(y)$" und
aus `VS` gleich "x Menge"
folgt via **3-2**: $x \in (\mathcal{P}(y))^C$.

□

158-3. Ähnlich verursacht wie **158-1** wird eine "symmetrisierte Version" eines Resultats aus **Suite I** nachgereicht:

158-3(Satz)

a) *Aus "$x \subseteq y$" folgt "$x \cap z \subseteq y$" und "$z \cap x \subseteq y$".*

b) *Aus "$x \subseteq y$" folgt "$x \subseteq y \cup z$" und "$x \subseteq z \cup y$".*

Beweis **158-3** a) VS gleich $x \subseteq y$.

1: Aus VS gleich "$x \subseteq y$"
folgt via **2-16**: $x \cap z \subseteq y$.

2: Via **KG**$\cap$ gilt: $z \cap x = x \cap z$.

3: Aus 2"$z \cap x = x \cap z$" und
aus 1"$x \cap z \subseteq y$"
folgt: $z \cap x \subseteq y$.

4: Aus 1"$x \cap z \subseteq y$" und
aus 3"$z \cap x \subseteq y$"
folgt: $(x \cap z \subseteq y) \wedge (z \cap x \subseteq y)$.

b) VS gleich $x \subseteq y$.

1: Aus VS gleich "$x \subseteq y$"
folgt via **2-16**: $x \subseteq y \cup z$.

2: Via **KG**$\cup$ gilt: $y \cup z = z \cup y$.

3: Aus 1"$x \subseteq y \cup z$" und
aus 2"$y \cup z = z \cup y$"
folgt: $x \subseteq z \cup y$.

4: Aus 1"$x \subseteq y \cup z$" und
aus 3"$x \subseteq z \cup y$"
folgt: $(x \subseteq y \cup z) \wedge (x \subseteq z \cup y)$.

□

158-4. Hier wird eine weitere "symmetrisierte Version" eines Resultats aus **Suite I** bewiesen:

158-4(Satz)

a) *Aus* "$x \subseteq y$" *folgt* "$x \cup z \subseteq y \cup z$" *und* "$z \cup x \subseteq z \cup y$".

b) *Aus* "$x \subseteq y$" *folgt* "$x \cap z \subseteq y \cap z$" *und* "$z \cap x \subseteq z \cap y$".

Beweis **158-4** `a)` `VS` gleich $x \subseteq y$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \subseteq y$"
folgt via **2-15**: $x \cup z \subseteq y \cup z$.

`2.1:` Via **KG**$\cup$ gilt: $z \cup x = x \cup z$.

`2.2:` Via **KG**$\cup$ gilt: $y \cup z = z \cup y$.

`3:` Aus `2.1`"$z \cup x = x \cup z$" und
aus `1`"$x \cup z \subseteq y \cup z$"
folgt: $z \cup x \subseteq y \cup z$.

`4:` Aus `3`"$z \cup x \subseteq y \cup z$" und
aus `2.2`"$y \cup z = z \cup y$"
folgt: $z \cup x \subseteq z \cup y$.

`5:` Aus `1`"$x \cup z \subseteq y \cup z$" und
aus `4`"$z \cup x \subseteq z \cup y$"
folgt: $(x \cup z \subseteq y \cup z) \wedge (z \cup x \subseteq z \cup y)$.

`b)` `VS` gleich $x \subseteq y$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \subseteq y$"
folgt via **2-15**: $x \cap z \subseteq y \cap z$.

`2.1:` Via **KG**$\cap$ gilt: $z \cap x = x \cap z$.

`2.2:` Via **KG**$\cap$ gilt: $y \cap z = z \cap y$.

`3:` Aus `2.1`"$z \cap x = x \cap z$" und
aus `1`"$x \cap z \subseteq y \cap z$"
folgt: $z \cap x \subseteq y \cap z$.

`4:` Aus `3`"$z \cap x \subseteq y \cap z$" und
aus `2.2`"$y \cap z = z \cap y$"
folgt: $z \cap x \subseteq z \cap y$.

`5:` Aus `1`"$x \cap z \subseteq y \cap z$" und
aus `4`"$z \cap x \subseteq z \cap y$"
folgt: $(x \cap z \subseteq y \cap z) \wedge (z \cap x \subseteq z \cap y)$.

$\square$

x induktiv.
Menge der natürlichen Zahlen. $\mathbb{N}$.

Ersterstellung: 08/10/10 **Letzte Änderung: 02/05/12**

159-1. Am Beginn der Zahlentheorie steht die Definition der induktiven Klasse. Im Ausdruck "induktive Klasse" erscheint nicht die Addition. Dennoch ist die Addition - es wird die Eins addiert - involviert. Der Verzicht auf eine Erwähnung der Addition ist durch die dadurch einfacher werdenden Notation begründet. Das Attribut "induktiv" wird bereits im Zusammenhang mit der Begriffsbildung "endliche Klasse " bereits in **#28** eingeführt. Dort ist von "$\cup$induktiven Klassen" die Rede. Es ist kaum zu entscheiden, ob das "induktive Prinzip" ursprünglich bei den natürlichen Zahlen oder bei den endlichen Klassen aufgetaucht ist:

159-1(Definition)

"x **induktiv**" genau dann, wenn gilt:

$$0 \in x.$$

$$\wedge$$

$$\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (1 + \alpha \in x).$$

RECH-**Notation**.

159-2. Jede induktive Klasse ist eine TeilKlasse von $\mathbb{A}$ und somit ist, da $\mathbb{A}$ eine Menge ist, jede induktive Klasse eine Menge:

159-2(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) x *induktiv.*

Dann folgt:

a) $x \subseteq \mathbb{A}$.

b) x *Menge.*

Beweis **159-2**

`RECH`-**Notation**.

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$	$\alpha \in x$.
`2:` Aus →) "x induktiv" und aus `Thema1.1` "$\alpha \in x$" folgt via **159-1(Def)**:	$1 + \alpha \in x$.
`3:` Aus `2` "$1 + \alpha \in x$" folgt via **ElementAxiom**:	$1 + \alpha$ Menge.
`4:` Aus `3` "$1 + \alpha$ Menge" folgt via **96-13**:	$(1 \text{ Zahl}) \wedge (\alpha \text{ Zahl})$.
`5:` Aus `4` "$\ldots \alpha$ Zahl" folgt via **95-4(Def)**:	$\alpha \in \mathbb{A}$.

Ergo `Thema1.1`: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{"}\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha \in \mathbb{A})\text{"}}$

`1.a):` Aus `A1` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha \in \mathbb{A})$"
folgt via **0-2(Def)**: $x \subseteq \mathbb{A}$.

`2.b):` Aus `1.a)` "$x \subseteq \mathbb{A}$" und
aus **AAI** "$\mathbb{A}$ Menge"
folgt via **TeilMengenAxiom**: x Menge.

□

159-3. Falls $0, 1 \in x$ und falls für alle $\alpha, \beta \in x$ die Summe $\alpha+\beta$ in x ist, dann ist x induktiv. Spezieller gilt: Falls $0, 1 \in x$ und falls x **AD** ist, dann ist x induktiv:

<u>**159-3(Satz)**</u>

a) *Aus* "$0 \in x$" *und* "$1 \in x$"
und "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in x) \wedge (\beta \in x)) \Rightarrow (\alpha+\beta \in x)$"
folgt "*x induktiv*".

b) *Aus* "$0 \in x$" *und* "$1 \in x$" *und* "*x ist* **AD**" *folgt* "*x induktiv*".

<u>`RECH`-**Notation**</u>.

<u>Beweis **159-3**</u> `a)`
`VS` gleich $(0 \in x) \wedge (1 \in x) \wedge (\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in x) \wedge (\beta \in x)) \Rightarrow (\alpha+\beta \in x))$.

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\gamma \in x$.

Aus `VS` gleich "$\ldots 1 \in x \ldots$",
aus `Thema1.1` "$\gamma \in x$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \forall \alpha, \beta : ((\alpha \in x) \wedge (\beta \in x)) \Rightarrow (\alpha+\beta \in x)$"
folgt: $1+\gamma \in x$.

Ergo `Thema1.1`: `A1` | "$\forall \gamma : (\gamma \in x) \Rightarrow (1+\gamma \in x)$"

`1.2:` Aus `VS` gleich "$0 \in x \ldots$" und
aus `A1` gleich "$\forall \gamma : (\gamma \in x) \Rightarrow (1+\gamma \in x)$"
folgt via **159-1(Def)**: x induktiv.

`b)` `VS` gleich $(0 \in x) \wedge (1 \in x) \wedge (x \text{ ist } \mathbf{AD})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots x$ ist **AD**"
folgt via **143-1(Def)**: $\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in x) \wedge (\beta \in x)) \Rightarrow (\alpha+\beta \in x)$.

`2:` Aus `VS` gleich "$0 \in x \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots 1 \in x \ldots$" und
aus `1` "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in x) \wedge (\beta \in x)) \Rightarrow (\alpha+\beta \in x)$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: x induktiv.

$\square$

159-4. Vorbereitend zum Beweis, dass $[0|+\infty]$ und $[0|+\infty[$ induktiv sind, wird $0, 1 \in [0|+\infty]$ und $0, 1 \in [0|+\infty[$ fest gestellt. Die Beweis-Reihenfolge ist `b) - a) - d) - c)`:

> **159-4(Satz)**
>
> `a)` $0 \in [0|+\infty]$.
>
> `b)` $0 \in [0|+\infty[$.
>
> `c)` $1 \in [0|+\infty]$.
>
> `d)` $1 \in [0|+\infty[$.

Beweis **159-4** `ab)`

`1.b):` Aus **107-6**"$0 \leq 0$" und
aus **107-6**"$0 < +\infty$"
folgt via **142-3**: $0 \in [0|+\infty[$.

`1.1:` Via **142-5** gilt: $[0|+\infty[\subseteq [0|+\infty]$.

`2.a):` Aus `1.b)`"$0 \in [0|+\infty[$" und
aus `1.1`"$[0|+\infty[\subseteq [0|+\infty]$"
folgt via **0-4**: $0 \in [0|+\infty]$.

`cd)`

`1:` Aus **107-6**"$0 < 1$"
folgt via **41-3**: $0 \leq 1$.

`2.d):` Aus `1.2`"$0 \leq 1$" und
aus **107-6**"$1 < +\infty$"
folgt via **142-3**: $1 \in [0|+\infty[$.

`2.1:` Via **142-5** gilt: $[0|+\infty[\subseteq [0|+\infty]$.

`3.c):` Aus `2.d)`"$1 \in [0|+\infty[$" und
aus `2.1`"$[0|+\infty[\subseteq [0|+\infty]$"
folgt via **0-4**: $1 \in [0|+\infty]$.

□

159-5. Jede der Mengen $[0|+\infty]$, $[0|+\infty[$, $\mathbb{R}, \mathbb{S}, \mathbb{T}, \mathbb{C}, \mathbb{B}, \mathbb{A}$ ist induktiv:

<u>**159-5(Satz)**</u>

a) $[0|+\infty]$ *induktiv.*

b) $[0|+\infty[$ *induktiv.*

c) $\mathbb{R}$ *induktiv.*

d) $\mathbb{S}$ *induktiv.*

e) $\mathbb{T}$ *induktiv.*

f) $\mathbb{C}$ *induktiv.*

g) $\mathbb{B}$ *induktiv.*

h) $\mathbb{A}$ *induktiv.*

<u>Beweis **159-5**</u> a)

Aus **159-4**"$0 \in [0|+\infty]$",
aus **159-4**"$1 \in [0|+\infty]$" und
aus **143-3**"$[0|+\infty]$ ist **AD**"
folgt via **159-3**: $[0|+\infty]$ ist induktiv.

b)

Aus **159-4**"$0 \in [0|+\infty[$",
aus **159-4**"$1 \in [0|+\infty[$" und
aus **143-3**"$[0|+\infty[$ ist **AD**"
folgt via **159-3**: $[0|+\infty[$ ist induktiv.

c)

Aus **AAI**"$0 \in \mathbb{R}$",
aus **AAI**"$1 \in \mathbb{R}$" und
aus **143-3**"$\mathbb{R}$ ist **AD**"
folgt via **159-3**: $\mathbb{R}$ ist induktiv.

Beweis **159-5** `d)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$	$\alpha \in \mathbb{S}$.
Aus **AAI**"$1 \in \mathbb{R}$" und aus `Thema1.1`"$\alpha \in \mathbb{S} \ldots$" folgt via +**SZ**:	$1 + \alpha \in \mathbb{S}$.

Ergo `Thema1.1`: $\quad$ `A1` | "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{S}) \Rightarrow (1 + \alpha \in \mathbb{S})$"

`1.2:` Aus **95-11**"$0 \in \mathbb{S}$" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{S}) \Rightarrow (1 + \alpha \in \mathbb{S})$"
folgt via **159-1(Def)**: $\quad$ $\mathbb{S}$ induktiv.

`e)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$	$\alpha \in \mathbb{T}$.
Aus **AAI**"$1 \in \mathbb{R}$" und aus `Thema1.1`"$\alpha \in \mathbb{T} \ldots$" folgt via +**SZ**:	$1 + \alpha \in \mathbb{T}$.

Ergo `Thema1.1`: $\quad$ `A1` | "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{T}) \Rightarrow (1 + \alpha \in \mathbb{T})$"

`1.2:` Aus **95-12**"$0 \in \mathbb{T}$" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{T}) \Rightarrow (1 + \alpha \in \mathbb{T})$"
folgt via **159-1(Def)**: $\quad$ $\mathbb{T}$ induktiv.

`f)`

Aus **101-5**"$0 \in \mathbb{C}$",
aus **101-5**"$1 \in \mathbb{C}$" und
aus **143-3**"$\mathbb{C}$ ist **AD**"
folgt via **159-3**: $\quad$ $\mathbb{C}$ ist induktiv.

Beweis **159-5** g)

`Thema1.1` $\alpha \in \mathbb{B}$.

Aus **AAI**"$1 \in \mathbb{R}$" und
aus `Thema1.1`"$\alpha \in \mathbb{B} \ldots$"
folgt via +**SZ**: $1 + \alpha \in \mathbb{B}$.

Ergo `Thema1.1`: `A1` | "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{B}) \Rightarrow (1 + \alpha \in \mathbb{B})$"

`1.2`: Aus **101-7**"$0 \in \mathbb{B}$" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{B}) \Rightarrow (1 + \alpha \in \mathbb{B})$"
folgt via **159-1(Def)**: $\mathbb{B}$ induktiv.

h)

`Thema1.1` $\alpha \in \mathbb{A}$.

`2`: Aus `Thema1.1`"$\alpha \in \mathbb{A}$"
folgt via **95-4(Def)**: α Zahl.

`3`: Aus **95-5**"1 Zahl" und
aus `2`"α Zahl"
folgt via **96-13**: $1 + \alpha$ Zahl.

`4`: Aus `3`"$1 + \alpha$ Zahl"
folgt via **95-4(Def)**: $1 + \alpha \in \mathbb{A}$.

Ergo `Thema1.1`: `A1` | "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{A}) \Rightarrow (1 + \alpha \in \mathbb{A})$"

`1.2`: Aus **95-5**"0 Zahl"
folgt via **95-4(Def)**: $0 \in \mathbb{A}$.

`2`: Aus `1.2`"$0 \in \mathbb{A}$" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{A}) \Rightarrow (1 + \alpha \in \mathbb{A})$"
folgt via **159-1(Def)**: $\mathbb{A}$ induktiv.

$\square$

159-6. Vorbereitend für das Weitere - insbesondere für die Definition der Menge der natürlichen Zahlen - werden nun einige Eigenschaften induktiver Klassen gesammelt:

159-6(Satz)

a) *Aus "x induktiv" und "y induktiv" folgt "$x \cap y$ induktiv".*

b) *Aus "x induktiv" folgt "$x \cap [0, +\infty[$ induktiv".*

c) *Aus "$0 \neq E$" und "$\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\alpha$ induktiv$)$" folgt "$\bigcap E$ induktiv".*

Beweis **159-6**

`RECH`-**Notation**.

`a)` `VS` gleich $(x \text{ induktiv}) \wedge (y \text{ induktiv})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "x induktiv..."
folgt via **159-1(Def)**: $0 \in x$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "...y induktiv"
folgt via **159-1(Def)**: $0 \in y$.

$\boxed{\texttt{Thema1.3}}$ $\beta \in x \cap y$.

`2:` Aus `Thema1.3`"$\beta \in x \cap y$"
folgt via **2-2**: $(\beta \in x) \wedge (\beta \in y)$.

`3.1:` Aus `VS` gleich "x induktiv..." und
aus 2"$\beta \in x \ldots$"
folgt via **159-1(Def)**: $1 + \beta \in x$.

`3.2:` Aus `VS` gleich "...y induktiv" und
aus 2"...$\beta \in x$"
folgt via **159-1(Def)**: $1 + \beta \in y$.

`4:` Aus `3.1`"$1 + \beta \in x$" und
aus `3.2`"$1 + \beta \in y$"
folgt via **2-2**: $1 + \beta \in x \cap y$.

Ergo `Thema1.3`: `A1` | "$\forall \beta : (\beta \in x \cap y) \Rightarrow (1 + \beta \in x \cap y)$"

`2:` Aus `1.1`"$0 \in x$" und
aus `1.2`"$0 \in y$"
folgt via **2-2**: $0 \in x \cap y$.

`3:` Aus 2"$0 \in x \cap y$" und
aus `A1` gleich "$\forall \beta : (\beta \in x \cap y) \Rightarrow (1 + \beta \in x \cap y)$"
folgt via **159-1(Def)**: $x \cap y$ induktiv.

`b)` `VS` gleich x induktiv.

Aus `VS` gleich "x induktiv" und
aus **159-5**"$[0| + \infty[$ induktiv"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $x \cap [0| + \infty[$ induktiv.

<u>Beweis</u> **159-6** `c)` `VS` gleich $(0 \neq E) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\alpha \text{ induktiv}))$.

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\beta \in E$.

`2:` Aus `Thema1.1`"$\beta \in E$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\alpha \text{ induktiv})$"
folgt: β induktiv.

`3:` Aus `2`"β induktiv"
folgt via **159-1(Def)**: $0 \in \beta$.

Ergo `Thema1.1`: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{“}\forall \beta : (\beta \in E) \Rightarrow (0 \in \beta)\text{”}}$

...

Beweis **159-6** `c)` `VS` gleich $(0 \neq E) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\alpha \text{ induktiv}))$.

...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\gamma \in \bigcap E$.

$\boxed{\texttt{Thema1.2.1}}$ $\delta \in E$.

`2.1:` Aus `Thema1.2`“$\gamma \in \bigcap E$” und
aus `Thema1.2.1`“$\delta \in E$”
folgt via **1-13**: $\gamma \in \delta$.

`2.2:` Aus `Thema1.2.1`“$\delta \in E$” und
aus `VS` gleich
“$\ldots \forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\alpha \text{ induktiv})$”
folgt: δ induktiv.

`3:` Aus `2.2`“δ induktiv” und
aus `2.1`“$\gamma \in \delta$”
folgt via **159-1(Def)**: $1 + \gamma \in \delta$.

Ergo `Thema1.2.1`: `A2` | “$\forall \delta : (\delta \in E) \Rightarrow (1 + \gamma \in \delta)$”

`2:` Aus `A2` gleich “$\forall \delta : (\delta \in E) \Rightarrow (1 + \gamma \in \delta)$” und
aus `VS` gleich “$0 \neq E$”
folgt via **1-13**: $1 + \gamma \in \bigcap E$.

Ergo `Thema1.2`: `A3` | “$\forall \gamma : (\gamma \in \bigcap E) \Rightarrow (1 + \gamma \in \bigcap E)$”

`2:` Aus `A1` gleich “$\forall \beta : (\beta \in E) \Rightarrow (0 \in \beta)$” und
aus `VS` gleich “$0 \neq E \ldots$”
folgt via **1-13**: $0 \in \bigcap E$.

`3:` Aus 2“$0 \in \bigcap E$” und
aus `A3` gleich “$\forall \gamma : (\gamma \in \bigcap E) \Rightarrow (1 + \gamma \in \bigcap E)$”
folgt via **159-1(Def)**: $\bigcap E$ induktiv.

$\square$

159-7. Wie in **159-6** gesagt ist $\mathbb{A}$ eine induktive Klasse ist und da gemäß **159-2** jede induktive Klasse eine TeilKlasse von $\mathbb{A}$ ist, ist $\mathbb{A}$ die "$\subseteq$größte induktive Klasse" . Nun wird $\mathbb{N}$ als die "$\subseteq$kleinste induktive Klasse" in die Essays eingeführt:

159-7(Definition)

1) $\mathtt{159.0}() = \{\omega : \omega \text{ induktiv}\}$.

2) $\mathbb{N} = \bigcap\{\omega : \omega \text{ induktiv}\}$.

3) "$\mathfrak{C}$ **Menge der natürlichen Zahlen**" genau dann, wenn gilt:

$$\mathfrak{C} = \mathbb{N}.$$

159-8. Wenig überraschend gilt unter anderem, dass $\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen ist. Dass es sich bei $\mathbb{N}$ in der Tat um eine Menge handelt, wird in **159-9** bewiesen:

159-8(Satz)

a) $\mathbb{N}$ *Menge der natürlichen Zahlen.*

b) *Aus "$\mathfrak{C}$ Menge der natürlichen Zahlen"*
und "$\mathfrak{D}$ Menge der natürlichen Zahlen"
folgt "$\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$".

Beweis **159-8** a)

Aus "$\mathbb{N} = \mathbb{N}$"
folgt via **159-7(Def)**: $\mathbb{N}$ Menge der natürlichen Zahlen.

b)
VS gleich ($\mathfrak{C}$ Menge der natürlichen Zahlen) $\wedge$ ($\mathfrak{D}$ Menge der natürlichen Zahlen).

1.1: Aus VS gleich "$\mathfrak{C}$ Menge der natülichen Zahlen… "
folgt via **159-7(Def)**: $\mathfrak{C} = \mathbb{N}$.

1.2: Aus VS gleich "… $\mathfrak{D}$ Menge der natülichen Zahlen"
folgt via **159-7(Def)**: $\mathfrak{D} = \mathbb{N}$.

2: Aus 1.1 und
aus 1.2
folgt: $\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$.

□

159-9. Die Menge der natürlichen Zahlen ist eine Menge, $\mathbb{N}$ ist induktiv und $\mathbb{N}$ ist eine TeilKlasse von $\mathbb{A}$:

159-9(Satz)

a) $\mathbb{N}$ *induktiv.*

b) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{A}$.

c) $\mathbb{N}$ *Menge.*

Beweis **159-9**

159-7(Def) $\{\omega : \omega \text{ induktiv}\}$.

`1.1:` Aus **159-5**"$\mathbb{A}$ induktiv" und
aus **AAI**"$\mathbb{A}$ Menge"
folgt: $\mathbb{A} \in \{\omega : \omega \text{ induktiv}\}$.

> `Thema1.2` $\alpha \in \{\omega : \omega \text{ induktiv}\}$.
>
> Aus `Thema1.2`"$\alpha \in \{\omega : \omega \text{ induktiv}\}$"
> folgt: α induktiv.

Ergo `Thema1.2`: `A1` | "$\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : \omega \text{ induktiv}\}) \Rightarrow (\alpha \text{ induktiv})$"

`2:` Aus `1.1`"$\mathbb{A} \in \{\omega : \omega \text{ induktiv}\}$"
folgt via **0-20**: $0 \neq \{\omega : \omega \text{ induktiv}\}$.

`3:` Aus 2"$0 \neq \{\omega : \omega \text{ induktiv}\}$" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : \omega \text{ induktiv}\}) \Rightarrow (\alpha \text{ induktiv})$"
folgt via **159-6**: $\bigcap\{\omega : \omega \text{ induktiv}\}$ induktiv.

`4.a):` Aus **159-7(Def)**"$\mathbb{N} = \bigcap\{\omega : \omega \text{ induktiv}\}$" und
aus 3"$\bigcap\{\omega : \omega \text{ induktiv}\}$ induktiv"
folgt: $\mathbb{N}$ induktiv.

`5.b):` Aus `4.a)`"$\mathbb{N}$ induktiv"
folgt via **159-2**: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{A}$.

`5.c):` Aus `4.a)`"$\mathbb{N}$ induktiv"
folgt via **159-2**: $\mathbb{N}$ Menge.

$\square$

159-10. Nun werden erste Folgerungen aus der Tatsache, dass $\mathbb{N}$ die "$\subseteq$kleinste induktive Klasse" ist, gezogen:

<u>**159-10(Satz)**</u>

a) *Aus "x induktiv" folgt "$\mathbb{N} \subseteq x \subseteq \mathbb{A}$".*

b) *Aus "x induktiv" und "$x \subseteq \mathbb{N}$" folgt "$x = \mathbb{N}$".*

c) *Aus "$\mathbb{N} \cap x$ induktiv" folgt "$\mathbb{N} \subseteq x$".*

d) *Aus "$0 \in x$" und "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N} \cap x) \Rightarrow (1 + \alpha \in x)$" folgt "$\mathbb{N} \subseteq x$".*

e) *Aus "$n \in \mathbb{N}$" folgt "$1 + n \in \mathbb{N}$".*

f) *"$0 \in \mathbb{N}$" und "$1 \in \mathbb{N}$" und "$2 \in \mathbb{N}$".*

g) $\mathbb{N} \subseteq [0| + \infty]$.

h) $\mathbb{N} \subseteq [0| + \infty[$.

i) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$.

j) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{S}$.

k) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{T}$.

l) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{C}$.

m) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{B}$.

n) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{A}$.

Beweis **159-10**

159-7(Def) $\{\omega : \omega \text{ induktiv}\}$.

---

a) VS gleich x induktiv.

1: Aus VS gleich "x induktiv"
folgt via **159-2**: $(x \subseteq \mathbb{A}) \wedge (x \text{ Menge})$.

2: Aus VS gleich "x induktiv" und
aus 1"$\ldots x$ Menge"
folgt: $x \in \{\omega : \omega \text{ induktiv}\}$.

3: Aus 2"$x \in \{\omega : \omega \text{ induktiv}\}$"
folgt via **1-15**: $\bigcap\{\omega : \omega \text{ induktiv}\} \subseteq x$.

4: Aus **159-7(Def)**"$\mathbb{N} = \bigcap\{\omega : \omega \text{ induktiv}\}$" und
aus 3"$\bigcap\{\omega : \omega \text{ induktiv}\} \subseteq x$"
folgt via **0-6**: $\mathbb{N} \subseteq x$.

5: Aus 4"$\mathbb{N} \subseteq x$" und
aus 1"$x \subseteq \mathbb{A} \ldots$"
folgt: $\mathbb{N} \subseteq x \subseteq \mathbb{A}$.

b) VS gleich $(x \text{ induktiv}) \wedge (x \subseteq \mathbb{N})$.

1: Aus VS gleich "x induktiv..."
folgt via des bereits bewiesenen a): $\mathbb{N} \subseteq x$.

2: Aus VS gleich "$\ldots x \subseteq \mathbb{N}$" und
aus 1"$\mathbb{N} \subseteq x$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $x = \mathbb{N}$.

c) VS gleich $\mathbb{N} \cap x$ induktiv.

1: Aus VS gleich "$\mathbb{N} \cap x$ induktiv"
folgt via des bereits bewiesenen a): $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N} \cap x$.

2: Aus 1"$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N} \cap x$"
folgt via **158-1**: $\mathbb{N} \subseteq x$.

Beweis **159-10** `d)` `VS` gleich $(0 \in x) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N} \cap x) \Rightarrow (1 + \alpha \in x))$.

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\beta \in \mathbb{N} \cap x$.

`2:` Aus `Thema1.1`“$\beta \in \mathbb{N} \cap x$”
folgt via **2-2**: $(\beta \in \mathbb{N}) \wedge (\beta \in x)$.

`3.1:` Aus **159-9**“$\mathbb{N}$ induktiv” und
aus 2“$\beta \in \mathbb{N} \ldots$”
folgt via **159-1(Def)**: $1 + \beta \in \mathbb{N}$.

`3.2:` Aus `Thema1.1`“$\beta \in \mathbb{N} \cap x$” und
aus `VS` gleich “$\ldots \forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N} \cap x) \Rightarrow (1 + \alpha \in x)$”
folgt: $1 + \beta \in x$.

`4:` Aus `3.1`“$1 + \beta \in \mathbb{N}$” und
aus `3.2`“$1 + \beta \in x$”
folgt via **2-2**: $1 + \beta \in \mathbb{N} \cap x$.

Ergo `Thema1.1`: `A1` | “$\forall \beta : (\beta \in \mathbb{N} \cap x) \Rightarrow (1 + \beta \in \mathbb{N} \cap x)$”

`1.2:` Aus **159-9**“$\mathbb{N}$ induktiv”
folgt via **159-1(Def)**: $0 \in \mathbb{N}$.

`2:` Aus `1.2`“$0 \in \mathbb{N}$” und
aus `VS` gleich “$0 \in x \ldots$”
folgt via **2-3**: $0 \in \mathbb{N} \cap x$.

`3:` Aus 2“$0 \in \mathbb{N} \cap x \ldots$” und
aus `A1` gleich “$\forall \beta : (\beta \in \mathbb{N} \cap x) \Rightarrow (1 + \beta \in \mathbb{N} \cap x)$”
folgt via **159-1(Def)**: $\mathbb{N} \cap x$ induktiv.

`4:` Aus 3“$\mathbb{N} \cap x$ induktiv”
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $\mathbb{N} \subseteq x$.

`e)` `VS` gleich $n \in \mathbb{N}$.

Aus **159-9**“$\mathbb{N}$ induktiv” und
aus `VS` gleich “$n \in \mathbb{N}$”
folgt via **159-1(Def)**: $1 + n \in \mathbb{N}$.

Beweis **159-10** `f)`

`1:` Aus **159-9**“$\mathbb{N}$ induktiv”
folgt via **159-1(Def)**: $0 \in \mathbb{N}$.

`2:` Aus **159-9**“$\mathbb{N}$ induktiv” und
aus `1`“$0 \in \mathbb{N}$”
folgt via **159-1(Def)**: $1 + 0 \in \mathbb{N}$.

`3:` Aus `2`“$1 + 0 \in \mathbb{N}$” und
aus **98-10**“$1 + 0 = 1$”
folgt: $1 \in \mathbb{N}$.

`4:` Aus **159-9**“$\mathbb{N}$ induktiv” und
aus `3`“$1 \in \mathbb{N}$”
folgt via **159-1(Def)**: $1 + 1 \in \mathbb{N}$.

`5:` Aus **109-25(Def)**“$2 = 1 + 1$” und
aus `4`“$1 + 1 \in \mathbb{N}$”
folgt: $2 \in \mathbb{N}$.

`6:` Aus `1`“$0 \in \mathbb{N}$”,
aus `3`“$1 \in \mathbb{N}$” und
aus `5`“$2 \in \mathbb{N}$”
folgt: $(0 \in \mathbb{N}) \wedge (1 \in \mathbb{N}) \wedge (2 \in \mathbb{N})$.

`g)`

Aus **159-5**“$[0| + \infty]$ induktiv”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\mathbb{N} \subseteq [0| + \infty]$.

`h)`

Aus **159-5**“$[0| + \infty[$ induktiv”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\mathbb{N} \subseteq [0| + \infty[$.

`i)`

Aus **159-5**“$\mathbb{R}$ induktiv”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$.

`j)`

Aus **159-5**“$\mathbb{S}$ induktiv”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{S}$.

`k)`

Aus **159-5**“$\mathbb{T}$ induktiv”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{T}$.

Beweis **159-10** `l)`

Aus **159-5**"$\mathbb{C}$ induktiv"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{C}$.

`m)`

Aus **159-5**"$\mathbb{B}$ induktiv"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{B}$.

`n)`

Aus **159-5**"$\mathbb{A}$ induktiv"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{A}$.

$\square$

159-11. Nun werden die “ $\subseteq$-Aussagen” von **159-10** als “ $\in$-Aussagen” re-formuliert:

159-11(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $n \in \mathbb{N}$.

Dann folgt:

a) $0 \leq n < +\infty$.

b) $n \in \mathbb{R}$.

c) $n \in \mathbb{S}$.

d) $n \in \mathbb{T}$.

e) $n \in \mathbb{C}$.

f) $n \in \mathbb{B}$.

g) n *Zahl.*

Beweis **159-11**

`1:` Aus →) "$n \in \mathbb{N}$"
folgt via **159-10**: $n \in [0| + \infty[$.

`2.a):` Aus `1` "$n \in [0| + \infty[$"
folgt via **142-3**: $0 \leq n < +\infty$.

`2.b):` Aus →) "$n \in \mathbb{N}$" und
aus **159-10** "$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$"
folgt via **0-4**: $n \in \mathbb{R}$.

`2.c):` Aus →) "$n \in \mathbb{N}$" und
aus **159-10** "$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{S}$"
folgt via **0-4**: $n \in \mathbb{S}$.

`2.d):` Aus →) "$n \in \mathbb{N}$" und
aus **159-10** "$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{T}$"
folgt via **0-4**: $n \in \mathbb{T}$.

`2.e):` Aus →) "$n \in \mathbb{N}$" und
aus **159-10** "$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{C}$"
folgt via **0-4**: $n \in \mathbb{C}$.

`2.f):` Aus →) "$n \in \mathbb{N}$" und
aus **159-10** "$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{B}$"
folgt via **0-4**: $n \in \mathbb{B}$.

`2.1:` Aus →) "$n \in \mathbb{N}$" und
aus **159-10** "$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{A}$"
folgt via **0-4**: $n \in \mathbb{A}$.

`3.g):` Aus `2.1` "$n \in \mathbb{A}$"
folgt via **95-4(Def)**: n Zahl.

□

159-12. Da via **159-11** jede natürliche Zahl n größer oder gleich Null ist, ist jede Klasse $x < 0$ *keine* natürliche Zahl. Auch werden $n \in \mathbb{N}$ und $-n \in \mathbb{N}$ in Bezug auf Vorzeichen-Wechsel untersucht:

159-12(Satz)

a) *Aus* "$x < 0$" *folgt* "$x \notin \mathbb{N}$".

b) *Aus* "$n \in \mathbb{N}$" *folgt* "$(n = 0) \vee (-n \notin \mathbb{N})$".

c) *Aus* "$-n \in \mathbb{N}$" *folgt* "$(n = 0) \vee (n \notin \mathbb{N})$".

d) "$n \in \mathbb{N}$" *genau dann, wenn* "$-(-n) \in \mathbb{N}$".

$\leq$-Notation.

Beweis **159-12** a) VS gleich $x < 0$.

1: Es gilt: $(x \in \mathbb{N}) \vee (x \notin \mathbb{N})$.

Fallunterscheidung

1.1.Fall $x \in \mathbb{N}$.

2: Aus 1.1.Fall "$x \in \mathbb{N}$" folgt via **159-11**: $0 \leq x$.

3: Aus 2 "$0 \leq x$" folgt via **107-13**: $\neg(x < 0)$.

4: Es gilt 3 "$\neg(x < 0)$".
Es gilt VS gleich "$x < 0$".
Ex falso quodlibet folgt: $x \notin \mathbb{N}$.

1.2.Fall $x \notin \mathbb{N}$.

In beiden Fällen gilt: $x \notin \mathbb{N}$.

<u>Beweis</u> **159-12** `b)` `VS` gleich $n \in \mathbb{N}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$n \in \mathbb{N}$"
folgt via **159-11**: $0 \leq n$.

`2:` Aus `1`"$0 \leq n$"
folgt via **41-5**: $(0 = n) \vee (0 < n)$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $0 = n$.

`3:` Aus `2.1.Fall`"$0 = n$"
folgt: $n = 0$.

`4:` Aus `3`"$n = 0$"
folgt: $(n = 0) \vee (-n \notin \mathbb{N})$.

`2.2.Fall` $0 < n$.

`3:` Aus `2.2.Fall`"$0 < n$"
folgt via **109-16**: $-n < 0$.

`4:` Aus `3`"$-n < 0$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $-n \notin \mathbb{N}$.

`5:` Aus `4`
folgt: $(n = 0) \vee (-n \notin \mathbb{N})$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $(n = 0) \vee (-n \notin \mathbb{N})$.

Beweis **159-12** `c)` `VS` gleich $-n \in \mathbb{N}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$-n \in \mathbb{N}$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $(-n = 0) \vee (-(-n) \notin \mathbb{N})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $-n = 0$.

`2:` Aus `1.1.Fall` "$-n = 0$"
folgt via **100-13**: $n = 0$.

`3:` Aus `2`
folgt: $(n = 0) \vee (n \notin \mathbb{N})$.

`1.2.Fall` $-(-n) \notin \mathbb{N}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$-n \in \mathbb{N}$"
folgt via **159-11**: $-n$ Zahl.

`3:` Aus `2` "$-n$ Zahl"
folgt via **96-11**: n Zahl.

`4:` Aus `3` "n Zahl"
folgt via **FS**−−: $-(-n) = n$.

`5:` Aus `1.2.Fall` "$-(-n) \notin \mathbb{N}$" und
aus `4` "$-(-n) = n$"
folgt: $n \notin \mathbb{N}$.

`6:` Aus `5`
folgt: $(n = 0) \vee (n \notin \mathbb{N})$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $(n = 0) \vee (n \notin \mathbb{N})$.

Beweis **159-12** `d)` $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ `VS` gleich $n \in \mathbb{N}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$n \in \mathbb{N}$"
folgt via **159-11**: n Zahl.

`2:` Aus `1`"n Zahl"
folgt via **FS**$--$: $-(-n) = n$.

`3:` Aus `2`"$-(-n) = n$" und
aus `VS` gleich "$n \in \mathbb{N}$"
folgt: $-(-n) \in \mathbb{N}$.

`d)` $\boxed{\boxed{\Leftarrow}}$ `VS` gleich $-(-n) \in \mathbb{N}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$-(-n) \in \mathbb{N}$"
folgt via **159-11**: $-(-n)$ Zahl.

`2:` Aus `1`"$-(-n)$ Zahl"
folgt via **100-6**: n Zahl.

`3:` Aus `2`"n Zahl"
folgt via **FS**$--$: $-(-n) = n$.

`4:` Aus `VS` gleich "$-(-n) \in \mathbb{N}$" und
aus `3`"$-(-n) = n$"
folgt: $n \in \mathbb{N}$.

$\square$

159-13. Als Vorbereitung für **159-14** werden nun die Klassen $\mathsf{159.1}(x)$ und $\mathsf{159.2}(x)$ in die Essays eingeführt:

159-13(Definition)

1) $\mathsf{159.1}(x) = \{\omega : \omega + x \in \mathbb{N}\}$.

2) $\mathsf{159.2}(x) = \{\omega : \omega \cdot x \in \mathbb{N}\}$.

RECH-**Notation**.

159-14. Summe und Produkt natürlicher Zahlen sind natürliche Zahlen:

159-14(Satz)

a) *Aus* "$n \in \mathbb{N}$" *und* "$m \in \mathbb{N}$" *folgt* "$n + m \in \mathbb{N}$".

b) *Aus* "$n \in \mathbb{N}$" *und* "$m \in \mathbb{N}$" *folgt* "$n \cdot m \in \mathbb{N}$".

RECH-**Notation**.

Beweis **159-14**

159-13(Def) $\{\omega : \omega + m \in \mathbb{N}\}$. $\{\omega : \omega \cdot m \in \mathbb{N}\}$.

`a)` `VS` gleich $(n \in \mathbb{N}) \wedge (m \in \mathbb{N})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots m \in \mathbb{N}$"
folgt via **159-10**: m Zahl.

> `Thema1.2` $\alpha \in \{\omega : \omega + m \in \mathbb{N}\}$.
>
> `2:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in \{\omega : \omega + m \in \mathbb{N}\}$"
> folgt: $\alpha + m \in \mathbb{N}$.
>
> `3:` Aus `2`"$\alpha + m \in \mathbb{N}$"
> folgt via **159-10**: $1 + (\alpha + m) \in \mathbb{N}$.
>
> `4:` Via **FSA** gilt: $(1 + \alpha) + m = 1 + (\alpha + m)$.
>
> `5:` Aus `4`"$(1 + \alpha) + m = 1 + (\alpha + m)$" und
> aus `3`"$1 + (\alpha + m) \in \mathbb{N}$"
> folgt: $(1 + \alpha) + m \in \mathbb{N}$.
>
> `6:` Aus `5`"$(1 + \alpha) + m \in \mathbb{N}$"
> folgt via **159-11**: $(1 + \alpha) + m$ Zahl.
>
> `7:` Aus `6`"$(1 + \alpha) + m$ Zahl"
> folgt via **96-13**: $1 + \alpha$ Zahl.
>
> `8:` Aus `7`"$1 + \alpha$ Zahl"
> folgt via **95-6**: $1 + \alpha$ Menge.
>
> `9:` Aus `5`"$(1 + \alpha) + m \in \mathbb{N}$" und
> aus `8`"$1 + \alpha$ Menge"
> folgt: $1 + \alpha \in \{\omega : \omega + m \in \mathbb{N}\}$.

Ergo `Thema1.2`:

`A1`	"$\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : \omega + m \in \mathbb{N}\}) \Rightarrow (1 + \alpha \in \{\omega : \omega + m \in \mathbb{N}\})$"

`2:` Aus `1.1`"m Zahl"
folgt via **FSA**0: $0 + m = m$.

...

<u>Beweis</u> **159-14** `a)` `VS` gleich $(n \in \mathbb{N}) \wedge (m \in \mathbb{N})$.

...

`3:` Aus `2`"$0 + m = m$" und
aus `VS` gleich "$\ldots m \in \mathbb{N}$"
folgt: $0 + m \in \mathbb{N}$.

`4:` Aus `3`"$0 + m \in \mathbb{N}$" und
aus $0\mathcal{U}$**Axiom**"0 Menge"
folgt: $0 \in \{\omega : \omega + m \in \mathbb{N}\}$.

`5:` Aus `4`"$0 \in \{\omega : \omega + m \in \mathbb{N}\}$" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : \omega + m \in \mathbb{N}\}) \Rightarrow (1 + \alpha \in \{\omega : \omega + m \in \mathbb{N}\})$"
folgt via **159-1(Def)**: $\{\omega : \omega + m \in \mathbb{N}\}$ induktiv.

`6:` Aus `5`"$\{\omega : \omega + m \in \mathbb{N}\}$ induktiv"
folgt via **159-10**: $\mathbb{N} \subseteq \{\omega : \omega + m \in \mathbb{N}\}$.

`7:` Aus `VS` gleich "$n \in \mathbb{N} \ldots$" und
aus `6`"$\mathbb{N} \subseteq \{\omega : \omega + m \in \mathbb{N}\}$"
folgt via **0-4**: $n \in \{\omega : \omega + m \in \mathbb{N}\}$.

`8:` Aus `7`"$n \in \{\omega : \omega + m \in \mathbb{N}\}$"
folgt: $n + m \in \mathbb{N}$.

<u>Beweis **159-14**</u> `b)` `VS` gleich $(n \in \mathbb{N}) \wedge (m \in \mathbb{N})$.

`1:` Aus →) “$m \in \mathbb{N}$”
folgt via **159-10**: $(m \in \mathbb{R}) \wedge (m \text{ Zahl})$.

`2.1:` Aus `1`“$\ldots m$ Zahl”
folgt via **FSM**0: $0 \cdot m = 0$.

`2.2:` Aus `1`“$\ldots m$ Zahl”
folgt via **FSM**1: $m \cdot 1 = m$.

`Thema2.3` $\alpha \in \{\omega : \omega \cdot m \in \mathbb{N}\}$.

`3:` Aus `Thema2.3`“$\alpha \in \{\omega : \omega \cdot m \in \mathbb{N}\}$”
folgt: $\alpha \cdot m \in \mathbb{N}$.

`4.1:` Aus →) “$m \in \mathbb{N}$” und
aus `3`“$\alpha \cdot m \in \mathbb{N}$”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $m + \alpha \cdot m \in \mathbb{N}$.

`4.2:` Aus `1`“$m \in \mathbb{R} \ldots$”
folgt via **DG**$\mathbb{R}$: $m \cdot (1 + \alpha) = m \cdot 1 + m \cdot \alpha$.

`5:`
$$(1+\alpha) \cdot m \overset{\textbf{KGM}}{=} m \cdot (1+\alpha) \overset{4.2}{=} m \cdot 1 + m \cdot \alpha \overset{2.2}{=} m + m \cdot \alpha \overset{\textbf{KGM}}{=} m + \alpha \cdot m.$$

`6:` Aus `5`“$(1+\alpha) \cdot m = \ldots = m + \alpha \cdot m$” und
aus `4.1`“$m + \alpha \cdot m \in \mathbb{N}$”
folgt: $(1+\alpha) \cdot m \in \mathbb{N}$.

`7:` Aus `6`“$(1+\alpha) \cdot m \in \mathbb{N}$”
folgt via **159-11**: $(1+\alpha) \cdot m$ Zahl.

`8:` Aus `7`“$(1+\alpha) \cdot m$ Zahl”
folgt via **96-15**: $1 + \alpha$ Zahl.

`9:` Aus `8`“$1 + \alpha$ Zahl”
folgt via **95-6**: $1 + \alpha$ Menge.

...

...

Beweis **159-14** `b)` `VS` gleich $(n \in \mathbb{N}) \wedge (m \in \mathbb{N})$.

...

`Thema2.3` $\alpha \in \{\omega : \omega \cdot m \in \mathbb{N}\}$.

...

`10:` Aus `6`“$(1+\alpha) \cdot m \in \mathbb{N}$” und
aus `9`“$1+\alpha$ Menge”
folgt: $1+\alpha \in \{\omega : \omega \cdot m \in \mathbb{N}\}$.

Ergo `Thema2.3`:

`A1` | “$\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : \omega \cdot m \in \mathbb{N}\}) \Rightarrow (1+\alpha \in \{\omega : \omega \cdot m \in \mathbb{N}\})$”

`3:` Aus `2.1`“$0 \cdot m = 0$” und
aus **159-10**“$0 \in \mathbb{N}$”
folgt: $0 \cdot m \in \mathbb{N}$.

`4:` Aus `3`“$0 \cdot m \in \mathbb{N}$” und
aus $0\mathcal{U}$**Axiom**“0 Menge”
folgt: $0 \in \{\omega : \omega \cdot m \in \mathbb{N}\}$.

`5:` Aus `4`“$0 \in \{\omega : \omega \cdot m \in \mathbb{N}\}$” und
aus `A1` gleich “$\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : \omega \cdot m \in \mathbb{N}\}) \Rightarrow (1+\alpha \in \{\omega : \omega \cdot m \in \mathbb{N}\})$”
folgt via **159-1(Def)**: $\{\omega : \omega \cdot m \in \mathbb{N}\}$ induktiv.

`6:` Aus `5`“$\{\omega : \omega \cdot m \in \mathbb{N}\}$ induktiv”
folgt via **159-10**: $\mathbb{N} \subseteq \{\omega : \omega \cdot m \in \mathbb{N}\}$.

`7:` Aus →)“$n \in \mathbb{N}$” und
aus `6`“$\mathbb{N} \subseteq \{\omega : \omega \cdot m \in \mathbb{N}\}$”
folgt via **0-4**: $n \in \{\omega : \omega \cdot m \in \mathbb{N}\}$.

`8:` Aus `7`“$n \in \{\omega : \omega \cdot m \in \mathbb{N}\}$”
folgt: $n \cdot m \in \mathbb{N}$.

□

VR$\leq$: VerschiebungsRegeln$\leq$.
VR$<$: VerschiebungsRegeln$<$.

Ersterstellung: 27/04/12 **Letzte Änderung: 04/04/13**

160-1. Mit den vorliegenden Formeln verkürzen sich manche Beweise:

160-1(Satz)

a) $0+(x-y)=(x-y)+0=x-y.$

b) $0+(-x+y)=(-x+y)+0=-x+y.$

c) $0+(-x-y)=(-x-y)+0=-x-y.$

`RECH`-**Notation**.

Beweis **160-1** `a)`

`1.1:` $0+(x-y)=0+(x+(-y))\overset{\mathbf{98-12}}{=}x+(-y)=x-y.$

`1.2:` $(x-y)+0=(x+(-y))+0\overset{\mathbf{98-12}}{=}x+(-y)=x-y.$

`2:` Aus `1.1`“$0+(x-y)=\ldots=x-y$” und
aus `1.2`“$(x-y)+0=\ldots=x-y$”
folgt: $0+(x-y)=(x-y)+0=x-y.$

`b)`

`1.1:` $0+(-x+y)=0+((-x)+y)\overset{\mathbf{98-12}}{=}(-x)+y=-x+y.$

`1.2:` $(-x+y)+0=((-x)+y)+0\overset{\mathbf{98-12}}{=}(-x)+y=-x+y.$

`2:` Aus `1.1`“$0+(-x+y)=\ldots=-x+y$” und
aus `1.2`“$(-x+y)+0=\ldots=-x+y$”
folgt: $0+(-x+y)=(-x+y)+0=-x+y.$

`c)`

`1.1:` $0+(-x-y)=0+(-x+(-y))=0+((-x)+(-y))\overset{\mathbf{98-12}}{=}(-x)+(-y)=-x+(-y)=-x-y.$

`1.2:` $(-x-y)+0=(x+(-y))+0=((-x)+(-y))+0\overset{\mathbf{98-12}}{=}(-x)+(-y)=-x+(-y)=-x-y.$

`2:` Aus `1.1`“$0+(-x-y)=\ldots=-x-y$” und
aus `1.2`“$(-x-y)+0=\ldots=-x-y$”
folgt: $0+(-x-y)=(-x-y)+0=-x-y.$

$\square$

160-2. Mit den nunmehrigen Aussagen können einige Gleichungen vereinfacht werden:

160-2(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow\!)$ $a \in \mathbb{C}$.

Dann folgt:

a) $-a + (a + x) = 0 + x$.

b) $a + (-a + x) = 0 + x$.

RECH-**Notation**.

Beweis **160-2**

1: Aus $\rightarrow\!)$ "$a \in \mathbb{C}$"
folgt via **102-5**: $a - a = 0$.

2.1:
$$-a + (a + x)$$
$$= (-a) + (a + x)$$
$$\stackrel{\textbf{FSA}}{=} ((-a) + a) + x$$
$$\stackrel{\textbf{FSA}}{=} (a + (-a)) + x$$
$$= (a - a) + x$$
$$\stackrel{1}{=} 0 + x.$$

2.2: $a + (-a + x) = a + ((-a) + x) \stackrel{\textbf{FSA}}{=} (a + (-a)) + x = (a - a) + x \stackrel{1}{=} 0 + x$.

3.a): Aus 2.1
folgt: $-a + (a + x) = 0 + x$.

3.b): Aus 2.2
folgt: $a + (-a + x) = 0 + x$.

□

160-3. Falls x eine Zahl ist, so kann **160-2** auf die vorliegende Weise verschärft werden:

160-3(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow)$ $a \in \mathbb{C}$.

$\rightarrow)$ x *Zahl.*

Dann folgt:

`a)` $-a + (a + x) = x$.

`b)` $a + (-a + x) = x$.

`RECH`-**Notation**.

Beweis **160-3**

`1.1:` Aus $\rightarrow)$ "$a \in \mathbb{C}$"
folgt via **160-2**: $$-a + (a + x) = 0 + x.$$

`1.2:` Aus $\rightarrow)$ "$a \in \mathbb{C}$"
folgt via **160-2**: $$a + (-a + x) = 0 + x.$$

`1.3:` Aus $\rightarrow)$ "x Zahl"
folgt via **FSA**0: $$0 + x = x.$$

`2.a):` Aus `1.1` "$-a + (a + x) = 0 + x$" und
aus `1.3` "$0 + x = x$"
folgt: $$-a + (a + x) = x.$$

`2.b):` Aus `1.2` "$a + (-a + x) = 0 + x$" und
aus `1.3` "$0 + x = x$"
folgt: $$a + (-a + x) = x.$$

□

160-4. Die **VR$\le$: VerschiebungsRegeln$\le$** gestatten es unter anderem aus $x < y$ und $a \in \mathbb{R}$ auf $x + a < y + a$ zu schließen. Darauf aufbauende Resultate runden die Darstellung ab:

160-4(Satz) (VR$\le$: VerschiebungsRegeln$\le$)

a) *Aus* "$x \le y$" *und* "$a \in \mathbb{R}$" *folgt* "$a + x \le a + y$".

b) *Aus* "$x \le y$" *und* "$a \in \mathbb{R}$" *folgt* "$-a + x \le -a + y$".

c) *Aus* "$x \le y$" *und* "$a \in \mathbb{R}$" *folgt* "$a - y \le a - x$".

d) *Aus* "$x \le y$" *und* "$a \in \mathbb{R}$" *folgt* "$-a - y \le -a - y$".

e) *Aus* "$x \le y$" *und* "$x \in \mathbb{R}$" *und* "$y \in \mathbb{R}$" *und* "$a \in \mathbb{S}$" *folgt* "$a + x \le a + y$".

f) *Aus* "$x \le y$" *und* "$x \in \mathbb{R}$" *und* "$y \in \mathbb{R}$" *und* "$a \in \mathbb{S}$" *folgt* "$-a + x \le -a + y$".

g) *Aus* "$x \le y$" *und* "$x \in \mathbb{R}$" *und* "$y \in \mathbb{R}$" *und* "$a \in \mathbb{S}$" *folgt* "$a - y \le a - x$".

h) *Aus* "$x \le y$" *und* "$x \in \mathbb{R}$" *und* "$y \in \mathbb{R}$" *und* "$a \in \mathbb{S}$" *folgt* "$-a - y \le -a - x$".

i) *Aus* "$a + x \le a + y$" *und* "$a \in \mathbb{R}$" *folgt* "$x \le y$".

j) *Aus* "$-a + x \le -a + y$" *und* "$a \in \mathbb{R}$" *folgt* "$x \le y$".

k) *Aus* "$a - y \le a - x$" *und* "$a \in \mathbb{R}$" *folgt* "$x \le y$".

l) *Aus* "$-a - y \le -a - x$" *und* "$a \in \mathbb{R}$" *folgt* "$x \le y$".

`RECH.`$\le$-**Notation**.

Beweis **160-4** `a)` `VS` gleich $(x \le y) \wedge (a \in \mathbb{R})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \le y \ldots$"
folgt via **109-10**: $(x = y = +\infty) \vee (x = y = -\infty) \vee (0 \le y - x)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x = y = +\infty$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots a \in \mathbb{R}$"
folgt via **97-3**: $a + (+\infty) = +\infty$.

`3:` Aus **107-6**"$+\infty \le +\infty$" und
aus `2`"$a + (+\infty) = +\infty$"
folgt: $a + (+\infty) \le a + (+\infty)$.

`4:` Aus `3`"$a + (+\infty) \le a + (+\infty)$" und
aus `1.1.Fall`"$x = \ldots = +\infty$"
folgt: $a + x \le a + (+\infty)$.

`5:` Aus `4`"$a + x \le a + (+\infty)$" und
aus `1.1.Fall`"$\ldots y = +\infty$"
folgt: $a + x \le a + y$.

`1.2.Fall` $x = y = -\infty$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots a \in \mathbb{R}$"
folgt via **97-3**: $a + (-\infty) = -\infty$.

`3:` Aus **107-6**"$-\infty \le -\infty$" und
aus `2`"$a + (-\infty) = -\infty$"
folgt: $a + (-\infty) \le a + (-\infty)$.

`4:` Aus `3`"$a + (-\infty) \le a + (-\infty)$" und
aus `1.2.Fall`"$x = \ldots = -\infty$"
folgt: $a + x \le a + (-\infty)$.

`5:` Aus `4`"$a + x \le a + (-\infty)$" und
aus `1.2.Fall`"$\ldots y = -\infty$"
folgt: $a + x \le a + y$.

...

Beweis **160-4** `a)` `VS` gleich $(x \leq y) \wedge (a \in \mathbb{R})$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.3.Fall` $0 \leq y - x$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "$x \leq y \dots$"
folgt via **107-3**: $x \in \mathbb{S}$.

`2.2:` Aus `VS` gleich "$\dots a \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAV**: $a - a = 0$.

`3.1:` Aus `VS` gleich "$\dots a \in \mathbb{R}$" und
aus `2.1`"$x \in \mathbb{S}$"
folgt via **+SZ**: $a + x \in \mathbb{S}$.

`3.2:` $y - x \overset{\mathbf{160-1}}{=} 0 + (y - x) \overset{2.2}{=} (a - a) + (y - x) \overset{\mathbf{103-6}}{=} (a + y) - (a + x)$.

`4.1:` Aus `3.1`"$a + x \in \mathbb{S}$"
folgt via **∈SZ**: $a + x \in \mathbb{T}$.

`4.2:` Aus `1.3.Fall`"$0 \leq y - x$" und
aus `3.2`"$y - x = \dots = (a + y) - (a + x)$"
folgt: $0 \leq (a + y) - (a + x)$.

`5:` Aus `4.2`"$0 \leq (a + y) - (a + x)$" und
aus `4.1`"$a + x \in \mathbb{T}$"
folgt via **109-13**: $a + x \leq a + y$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $a + x \leq a + y$.

`b)` `VS` gleich $(x \leq y) \wedge (a \in \mathbb{R})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\dots a \in \mathbb{R}$"
folgt via **117-4**: $-a \in \mathbb{R}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$x \leq y \dots$" und
aus `1`"$-a \in \mathbb{R}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $(-a) + x \leq (-a) + y$.

`3:` Aus `2`
folgt: $-a + x \leq -a + y$.

Beweis **160-4** `c)` `VS` gleich $(x \le y) \wedge (a \in \mathbb{R})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \le y \ldots$"
folgt via **109-15**: $-y \le -x$.

`2:` Aus `1`"$-y \le -x$" und
aus `VS` gleich "$\ldots a \in \mathbb{R}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $a + (-y) \le a + (-x)$.

`3:` Aus `2`
folgt: $a - y \le a - x$.

`d)` `VS` gleich $(x \le y) \wedge (a \in \mathbb{R})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \le y \ldots$"
folgt via **109-15**: $-y \le -x$.

`2:` Aus `1`"$-y \le -x$" und
aus `VS` gleich "$\ldots a \in \mathbb{R}$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $-a + (-y) \le -a + (-x)$.

`3:` Aus `2`
folgt: $-a - y \le -a - x$.

`e)` `VS` gleich $(x \le y) \wedge (x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{R}) \wedge (a \in \mathbb{S})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots a \in \mathbb{S}$"
folgt via **95-15**: $(a \in \mathbb{R}) \vee (a = +\infty) \vee (a = -\infty)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $a \in \mathbb{R}$.

Aus `VS` gleich "$x \le y \ldots$" und
aus `1.1.Fall`"$a \in \mathbb{R}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $a + x \le a + y$.

...

Beweis **160-4** `e)` `VS` gleich $(x \le y) \wedge (x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{R}) \wedge (a \in \mathbb{S})$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.2.Fall` $a = +\infty$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via **97-3**: $(+\infty) + x = +\infty$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via **97-3**: $(+\infty) + y = +\infty$.

`2:` Aus `1.1`"$(+\infty) + x = +\infty$" und
aus **107-6**"$+\infty \le +\infty$"
folgt: $(+\infty) + x \le +\infty$.

`3:` Aus `2`"$(+\infty) + x \le +\infty$" und
aus `1.2`"$(+\infty) + y = +\infty$"
folgt: $(+\infty) + x \le (+\infty) + y$.

`4:` Aus `3`"$(+\infty) + x \le (+\infty) + y$" und
aus `1.2.Fall`$a = +\infty$
folgt: $a + x \le a + y$.

`1.3.Fall` $a = -\infty$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via **97-3**: $(-\infty) + x = -\infty$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via **97-3**: $(-\infty) + y = -\infty$.

`2:` Aus `1.1`"$(-\infty) + x = -\infty$" und
aus **107-6**"$-\infty \le -\infty$"
folgt: $(-\infty) + x \le -\infty$.

`3:` Aus `2`"$(-\infty) + x \le -\infty$" und
aus `1.2`"$(-\infty) + y = -\infty$"
folgt: $(-\infty) + x \le (-\infty) + y$.

`4:` Aus `3`"$(-\infty) + x \le (-\infty) + y$" und
aus `1.2.Fall`$a = -\infty$
folgt: $a + x \le a + y$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $a + x \le a + y$.

Beweis **160-4** `f)` `VS` gleich $(x \leq y) \wedge (x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{R}) \wedge (a \in \mathbb{S})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots a \in \mathbb{S}$"
folgt via **117-4**: $-a \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$x \leq y \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots x \in \mathbb{R} \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{R} \ldots$" und
aus `1`"$-a \in \mathbb{S}$"
folgt via des bereits bewiesenen `e)`: $(-a) + x \leq (-a) + y$.

`3:` Aus `2`
folgt: $-a + x \leq -a + y$.

`g)` `VS` gleich $(x \leq y) \wedge (x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{R}) \wedge (a \in \mathbb{S})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x \leq y \ldots$"
folgt via **109-15**: $-y \leq -x$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via **117-4**: $-x \in \mathbb{R}$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via **117-4**: $-y \in \mathbb{R}$.

`2:` Aus `1.1`"$-y \leq -x$",
aus `1.3`"$-y \in \mathbb{R}$",
aus `1.2`"$-x \in \mathbb{R}$" und
aus `VS` gleich "$\ldots a \in \mathbb{S}$"
folgt via des bereits bewiesenen `e)`: $a + (-y) \leq a + (-x)$.

`3:` Aus `2`
folgt: $a - y \leq a - x$.

`h)` `VS` gleich $(x \leq y) \wedge (x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{R}) \wedge (a \in \mathbb{S})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots a \in \mathbb{S}$"
folgt via **117-4**: $-a \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$x \leq y \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots x \in \mathbb{R} \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{R} \ldots$" und
aus `1`"$-a \in \mathbb{S}$"
folgt via des bereits bewiesenen `g)`: $(-a) - y \leq (-a) - x$.

`3:` Aus `2`
folgt: $-a - y \leq -a - x$.

Beweis **160-4** `i)` `VS` gleich $(a + x \leq a + y) \wedge (a \in \mathbb{R})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$a + x \leq a + y$"
folgt via **107-3**: $(a + x \in \mathbb{S}) \wedge (a + y \in \mathbb{S})$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots a \in \mathbb{R}$"
folgt via $\in$**SZ**: $a \in \mathbb{C}$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$a + x \leq a + y \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots a \in \mathbb{R}$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)` : $-a + (a + x) \leq -a + (a + y)$.

`2.1:` Aus `1.1`"$a + x \in \mathbb{S} \ldots$"
folgt via $\in$**SZ**: $a + x$ Zahl.

`2.2:` Aus `1.1`"$\ldots a + y \in \mathbb{S}$"
folgt via $\in$**SZ**: $a + y$ Zahl.

`3.1:` Aus `2.1`"$a + x$ Zahl"
folgt via **96-13**: x Zahl.

`3.2:` Aus `2.2`"$a + y$ Zahl"
folgt via **96-13**: y Zahl.

`4.1:` Aus `1.2`"$a \in \mathbb{C}$" und
aus `3.1`"x Zahl"
folgt via **160-3**: $-a + (a + x) = x$.

`4.2:` Aus `1.2`"$a \in \mathbb{C}$" und
aus `3.2`"y Zahl"
folgt via **160-3**: $-a + (a + y) = y$.

`5:` Aus `1.3`"$-a + (a + x) \leq -a + (a + y)$" und
aus `4.1`"$-a + (a + x) = x$"
folgt: $x \leq -a + (a + y)$.

`6:` Aus `5`"$x \leq -a + (a + y)$" und
aus `4.2`"$-a + (a + y) = y$"
folgt: $x \leq y$.

<u>Beweis</u> **160-4** `j)` `VS` gleich $(-a+x \leq -a+y) \wedge (a \in \mathbb{R})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$-a+x \leq -a+y\ldots$"
folgt: $(-a)+x \leq (-a)+y$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots a \in \mathbb{R}$"
folgt via **117-4**: $-a \in \mathbb{R}$.

`2:` Aus `1.1`"$(-a)+x \leq (-a)+y$" und
aus `1.2`"$-a \in \mathbb{R}$"
folgt via des bereits bewiesenen `i)`: $x \leq y$.

`k)` `VS` gleich $(a-y \leq a-x) \wedge (a \in \mathbb{R})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$a-y \leq a-x\ldots$"
folgt: $a+(-y) \leq a+(-x)$.

`2:` Aus `1`"$a+(-y) \leq a+(-x)$" und
aus `VS` gleich "$\ldots a \in \mathbb{R}$"
folgt via des bereits bewiesenen `i)`: $-y \leq -x$.

`3:` Aus `2`"$-y \leq -x$"
folgt via **109-15**: $x \leq y$.

`l)` `VS` gleich $(-a-y \leq -a-x) \wedge (a \in \mathbb{R})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$-a-y \leq -a-x\ldots$"
folgt: $(-a)-y \leq (-a)-x$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots a \in \mathbb{R}$"
folgt via **117-4**: $-a \in \mathbb{R}$.

`2:` Aus `1.1`"$(-a)-y \leq (-a)-x$" und
aus `1.2`"$-a \in \mathbb{R}$"
folgt via des bereits bewiesenen `k)`: $x \leq y$.

$\square$

160-5. Die **VerschiebungsRegeln**$<$ sind in `efgh)` *kein Analogon* zu **VR**$\leq$:

160-5(Satz) **(VR$<$: VerschiebungsRegeln$<$)**

`a)` *Aus* "$x < y$" *und* "$a \in \mathbb{R}$" *folgt* "$a + x < a + y$".

`b)` *Aus* "$x < y$" *und* "$a \in \mathbb{R}$" *folgt* "$-a + x < -a + y$".

`c)` *Aus* "$x < y$" *und* "$a \in \mathbb{R}$" *folgt* "$a - y < a - x$".

`d)` *Aus* "$x < y$" *und* "$a \in \mathbb{R}$" *folgt* "$-a - y < -a - x$".

`e)` *Aus* "$x < y$" *und* "$x \in \mathbb{R}$" *und* "$y \in \mathbb{R}$" *und* "$a \in \mathbb{S}$" *folgt* "$a + x \leq a + y$".

`f)` *Aus* "$x < y$" *und* "$x \in \mathbb{R}$" *und* "$y \in \mathbb{R}$" *und* "$a \in \mathbb{S}$" *folgt* "$-a + x \leq -a + y$".

`g)` *Aus* "$x < y$" *und* "$x \in \mathbb{R}$" *und* "$y \in \mathbb{R}$" *und* "$a \in \mathbb{S}$" *folgt* "$a - y \leq a - x$".

`h)` *Aus* "$x < y$" *und* "$x \in \mathbb{R}$" *und* "$y \in \mathbb{R}$" *und* "$a \in \mathbb{S}$" *folgt* "$-a - y \leq -a - xy$".

`i)` *Aus* "$a + x < a + y$" *und* "$a \in \mathbb{R}$" *folgt* "$x < y$".

`j)` *Aus* "$-a + x < -a + y$" *und* "$a \in \mathbb{R}$" *folgt* "$x < y$".

`k)` *Aus* "$a - y < a - x$" *und* "$a \in \mathbb{R}$" *folgt* "$x < y$".

`l)` *Aus* "$-a - y < -a - x$" *und* "$a \in \mathbb{R}$" *folgt* "$x < y$".

`RECH.`$\leq$**-Notation**.

<u>Beweis **160-5**</u> `a)` `VS` gleich $(x < y) \wedge (a \in \mathbb{R})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x < y \ldots$"
folgt via **41-3**: $(x \leq y) \wedge (x \neq y)$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$x < y \ldots$"
folgt via **107-9**: $x \in \mathbb{S}$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots a \in \mathbb{R}$"
folgt via $\in$**SZ**: $a \in \mathbb{C}$.

`2.1:` Aus `1`"$x \leq y \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots a \in \mathbb{R}$"
folgt via **VR**$\leq$: $a + x \leq a + y$.

`2.2:` Aus `1.2`"$x \in \mathbb{S}$"
folgt via $\in$**SZ**: x Zahl.

`3:` Es gilt: $(a + x = a + y) \vee (a + x \neq a + y)$.

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` $a + x = a + y$.

`4:` $x + a \overset{\mathbf{FSA}}{=} a + x \overset{\texttt{3.1.Fall}}{=} a + y \overset{\mathbf{FSA}}{=} y + a$.

`5:` Aus `4`"$x + a = \ldots = y + a$",
aus `2.2`"x Zahl" und
aus `1.3`"$a \in \mathbb{C}$"
folgt via **AKR**: $x = y$.

`6:` Es gilt `5`"$x = y$".
Es gilt `1.1`"$\ldots x \neq y$".
Ex falso quodlibet folgt: $a + x < a + y$.

`3.2.Fall` $a + x \neq a + y$.

Aus `2.1`"$a + x \leq a + y$" und
aus `3.2.Fall`"$a + x \neq a + y$"
folgt via **41-3**: $a + x < a + y$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $a + x < a + y$.

Beweis **160-5** `b)` `VS` gleich $(x < y) \wedge (a \in \mathbb{R})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots a \in \mathbb{R}$"
folgt via **117-4**: $-a \in \mathbb{R}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$x < y \ldots$" und
aus `1`"$-a \in \mathbb{R}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $(-a) + x < (-a) + y$.

`3:` Aus `2`
folgt: $-a + x < -a + y$.

`c)` `VS` gleich $(x < y) \wedge (a \in \mathbb{R})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x < y \ldots$"
folgt via **109-14**: $-y < -x$.

`2:` Aus `1`"$-y < -x$" und
aus `VS` gleich "$\ldots a \in \mathbb{R}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $a + (-y) < a + (-x)$.

`3:` Aus `2`
folgt: $a - y < a - x$.

`d)` `VS` gleich $(x < y) \wedge (a \in \mathbb{R})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x < y \ldots$"
folgt via **109-14**: $-y < -x$.

`2:` Aus `1`"$-y < -x$" und
aus `VS` gleich "$\ldots a \in \mathbb{R}$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $-a + (-y) < -a + (-x)$.

`3:` Aus `2`
folgt: $-a - y < -a - x$.

Beweis **160-5** `efgh)` `VS` gleich $(x < y) \wedge (x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{R}) \wedge (a \in \mathbb{S})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x < y \ldots$"
folgt via **41-3**: $x \leq y$.

`2:` Aus `1`"$x \leq y$",
aus `VS` gleich "$\ldots x \in \mathbb{R} \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{R} \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots a \in \mathbb{S}$"
folgt via **VR**$\leq$: $(a + x \leq a + y) \wedge (-a + x \leq -a + y)$
$\wedge (a - y \leq a - x) \wedge (-a - y \leq -a - x)$.

`3.e):` Aus 2
folgt: $a + x \leq a + y$.

`3.f):` Aus 2
folgt: $-a + x \leq -a + y$.

`3.g):` Aus 2
folgt: $a - y \leq a - x$.

`3.h):` Aus 2
folgt: $-a - y \leq -a - x$.

Beweis **160-5** `i)` `VS` gleich $(a + x < a + y) \wedge (a \in \mathbb{R})$.

`1`: Aus `VS` gleich "$a + x < a + y \ldots$"
folgt via **41-3**: $(a + x \leq a + y) \wedge (a + x \neq a + y)$.

`2`: Aus `1`"$a + x \leq a + y \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots a \in \mathbb{R}$"
folgt via **VR**$\leq$: $x \leq y$.

`3`: Es gilt: $(x = y) \vee (x \neq y)$.

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` $x = y$.

`4`: Aus `3.1.Fall`"$x = y$"
folgt: $a + x = a + y$.

`5`: Es gilt `4`"$a + x = a + y$".
Es gilt `1`"$\ldots a + x \neq a + y$".
Ex falso quodlibet folgt: $x < y$.

`3.2.Fall` $x \neq y$.

Aus `2`"$x \leq y$" und
aus `3.2.Fall`"$x \neq y$"
folgt via **41-3**: $x < y$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $x < y$.

<u>Beweis</u> **<u>160-5</u>** `j)` `VS` gleich $(-a+x<-a+y)\wedge(a\in\mathbb{R})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich “$-a+x<-a+y\ldots$”
folgt: $(-a)+x<(-a)+y$.

`1.2:` Aus `VS` gleich “$\ldots a\in\mathbb{R}$”
folgt via **117-4**: $-a\in\mathbb{R}$.

`2:` Aus `1.1`“$(-a)+x<(-a)+y$” und
aus `1.2`“$-a\in\mathbb{R}$”
folgt via des bereits bewiesenen `i)`: $x<y$.

`k)` `VS` gleich $(a-y<a-x)\wedge(a\in\mathbb{R})$.

`1:` Aus `VS` gleich “$a-y<a-x\ldots$”
folgt: $a+(-y)\leq a+(-x)$.

`2:` Aus `1`“$a+(-y)<a+(-x)$” und
aus `VS` gleich “$\ldots a\in\mathbb{R}$”
folgt via des bereits bewiesenen `i)`: $-y<-x$.

`3:` Aus `2`“$-y<-x$”
folgt via **109-14**: $x<y$.

`l)` `VS` gleich $(-a-y<-a-x)\wedge(a\in\mathbb{R})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich “$-a-y<-a-x\ldots$”
folgt: $(-a)-y<(-a)-x$.

`1.2:` Aus `VS` gleich “$\ldots a\in\mathbb{R}$”
folgt via **117-4**: $-a\in\mathbb{R}$.

`2:` Aus `1.1`“$(-a)-y<(-a)-x$” und
aus `1.2`“$-a\in\mathbb{R}$”
folgt via des bereits bewiesenen `k)`: $x<y$.

$\square$

160-6. Als Anwendung von **VR**$\leq, <$ ergeben sich die vorliegenden, vertraut erscheinenden Aussagen:

160-6(Satz)

a) *Aus "$x \leq y$" und "$a \leq b$" und "$a \in \mathbb{R}$" und "$b \in \mathbb{R}$" folgt "$a + x \leq b + y$".*

b) *Aus "$x < y$" und "$a \leq b$" und "$a \in \mathbb{R}$" und "$b \in \mathbb{R}$" folgt "$a + x < b + y$".*

`RECH.`$\leq$-**Notation**.

Beweis **160-6** `a)` `VS` gleich $(x \leq y) \wedge (a \leq b) \wedge (a \in \mathbb{R}) \wedge (b \in \mathbb{R})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x \leq y \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots a \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via **VR**$\leq$: $a + x \leq a + y$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$x \leq y \ldots$"
folgt via **107-3**: $y \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots a \leq b \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots a \in \mathbb{R} \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots b \in \mathbb{R}$" und
aus `1.2`"$y \in \mathbb{S}$"
folgt via **VR**$\leq$: $y + a \leq y + b$.

`3:` Via **FSA** gilt: $a + y = y + a$.

`4:` Aus `3`"$a + y = y + a$" und
aus `2`"$y + a \leq y + b$"
folgt: $a + y \leq y + b$.

`5:` Aus `1.1`"$a + x \leq a + y$" und
aus `4`"$a + y \leq y + b$"
folgt via **107-8**: $a + x \leq y + b$.

`6:` Via **FSA** gilt: $y + b = b + y$.

`7:` Aus `5`"$a + x \leq y + b$" und
aus `6`"$y + b = b + y$"
folgt: $a + x \leq b + y$.

Beweis **160-6** `b)` `VS` gleich $(x < y) \wedge (a \leq b) \wedge (a \in \mathbb{R}) \wedge (b \in \mathbb{R})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x < y \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots a \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via **VR**<: $a + x < a + y$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$x < y \ldots$"
folgt via **107-9**: $y \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots a \leq b \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots a \in \mathbb{R} \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots b \in \mathbb{R}$" und
aus `1.2`"$y \in \mathbb{S}$"
folgt via **VR**≤: $y + a \leq y + b$.

`3:` Via **FSA** gilt: $a + y = y + a$.

`4:` Aus `3`"$a + y = y + a$" und
aus `2`"$y + a \leq y + b$"
folgt: $a + y \leq y + b$.

`5:` Aus `1.1`"$a + x < a + y$" und
aus `4`"$a + y \leq y + b$"
folgt via **107-8**: $a + x < y + b$.

`6:` Via **FSA** gilt: $y + b = b + y$.

`7:` Aus `5`"$a + x < y + b$" und
aus `6`"$y + b = b + y$"
folgt: $a + x < b + y$.

□

160-7. Vorbereitend für weitere Konsequenzen aus **VR**$\leq, <$ werden nun einige "dreistellige" Manipulationen mit $+$ und $-$ etabliert:

160-7(Satz)

a) $x + (y + z) = (x + y) + z$.

b) $x + (y - z) = (x + y) - z$.

c) $x + (-y + z) = (x - y) + z$.

d) $-x + (y + z) = (y - x) + z$.

e) $x + (-y - z) = (x - y) - z$.

f) $-x + (y - z) = (y - x) - z$.

g) $-x + (-y + z) = -(x + y) + z$.

h) $-x + (-y - z) = -(x + y) - z$.

RECH-**Notation**.

Beweis **160-7** a)

Via **FSA** gilt: $$x + (y + z) = (x + y) + z.$$

b)

1: $$x + (y - z) = x + (y + (-z)) \stackrel{\textbf{FSA}}{=} (x + y) + (-z) = (x + y) - z.$$

2: Aus 1 folgt: $$x + (y - z) = (x + y) - z.$$

c)

1: $$x + (-y + z) = x + ((-y) + z) \stackrel{\textbf{FSA}}{=} (x + (-y)) + z = (x - y) + z.$$

2: Aus 1 folgt: $$x + (-y + z) = (x - y) + z.$$

<u>Beweis</u> **160-7** `d)`

`1:` $-x+(y+z) = (-x)+(y+z) \overset{\textbf{FSA}}{=} ((-x)+y)+z \overset{\textbf{FSA}}{=} (y+(-x))+z = (y-x)+z.$

`2:` Aus `1`
folgt: $$-x+(y+z) = (y-x)+z.$$

`e)`

`1:`
$$\begin{aligned} & x+(-y-z) \\ &= x+((-y)-z) \\ &= x+((-y)+(-z)) \\ &\overset{\textbf{FSA}}{=} (x+(-y))+(-z) \\ &= (x-y)+(-z) \\ &= (x-y)-z. \end{aligned}$$

`2:` Aus `1`
folgt: $$x+(-y-z) = (x-y)-z.$$

`f)`

`1:`
$$\begin{aligned} & -x+(y-z) \\ &= (-x)+(y-z) \\ &= (-x)+(y+(-z)) \\ &\overset{\textbf{FSA}}{=} ((-x)+y)+(-z) \\ &\overset{\textbf{FSA}}{=} (y+(-x))+(-z) \\ &= (y-x)+(-z) \\ &= (y-x)-z. \end{aligned}$$

`2:` Aus `1`
folgt: $$-x+(y-z) = (y-x)-z.$$

Beweis **160-7** g)

1:
$$
\begin{aligned}
&-x+(-y+z)\\
&=(-x)+(-y+z)\\
&=(-x)+((-y)+z)\\
&\stackrel{\textbf{FSA}}{=}((-x)+(-y))+z\\
&=(-x+(-y))+z\\
&=(-x-y)+z\\
&\stackrel{\textbf{FS}-+}{=}-(x+y)+z.
\end{aligned}
$$

2: Aus 1
folgt:
$$-x+(-y+z)=-(x+y)+z.$$

h)

1:
$$
\begin{aligned}
&-x+(-y-z)\\
&=(-x)+(-y-z)\\
&=(-x)+((-y)-z)\\
&=(-x)+((-y)+(-z))\\
&\stackrel{\textbf{FSA}}{=}((-x)+(-y))+(-z)\\
&=(-x+(-y))+(-z)\\
&=(-x-y)+(-z)\\
&\stackrel{\textbf{FS}-+}{=}-(x+y)+(-z)\\
&=-(x+y)-z.
\end{aligned}
$$

2: Aus 1
folgt:
$$-x+(-y-z)=-(x+y)-z.$$

□

160-8. Die nun vorliegenden Resultate ergeben sich ohne allzu viel Mühe aus **VR**$\le$:

160-8(Satz)

a) *Aus* "$a+x\le y$" *und* "$a\in\mathbb{R}$" *folgt* "$x\le -a+y$".

b) *Aus* "$-a+x\le y$" *und* "$a\in\mathbb{R}$" *folgt* "$x\le a+y$".

c) *Aus* "$x\le b+y$" *und* "$b\in\mathbb{R}$" *folgt* "$-b+x\le y$".

d) *Aus* "$x\le -b+y$" *und* "$b\in\mathbb{R}$" *folgt* "$b+x\le y$".

e) *Aus* "$a+x\le b+y$" *und* "$a\in\mathbb{R}$" *folgt* "$x\le (b-a)+y$".

f) *Aus* "$a+x\le -b+y$" *und* "$a\in\mathbb{R}$" *folgt* "$x\le -(a+b)+y$".

g) *Aus* "$-a+x\le b+y$" *und* "$a\in\mathbb{R}$" *folgt* "$x\le (a+b)+y$".

h) *Aus* "$-a+x\le -b+y$" *und* "$a\in\mathbb{R}$" *folgt* "$x\le (a-b)+y$".

i) *Aus* "$a+x\le b+y$" *und* "$b\in\mathbb{R}$" *folgt* "$(a-b)+x\le y$".

j) *Aus* "$a+x\le -b+y$" *und* "$b\in\mathbb{R}$" *folgt* "$(a+b)+x\le y$".

k) *Aus* "$-a+x\le b+y$" *und* "$b\in\mathbb{R}$" *folgt* "$-(a+b)+x\le y$".

l) *Aus* "$-a+x\le -b+y$" *und* "$b\in\mathbb{R}$" *folgt* "$(b-a)+x\le y$".

`RECH.`$\le$-**Notation**.

Beweis **160-8** `a)` `VS` gleich $(a+x \le y) \wedge (a \in \mathbb{R})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$a+x \le y \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots a \in \mathbb{R}$"
folgt via **VR**$\le$: $-a+(a+x) \le -a+y$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "$a+x \le y \ldots$"
folgt via **107-3**: $a+x \in \mathbb{S}$.

`2.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots a \in \mathbb{R}$"
folgt via $\in$**SZ**: $a \in \mathbb{C}$.

`3:` Aus `2.1`"$a+x \in \mathbb{S}$"
folgt via $\in$**SZ**: $a+x$ Zahl.

`4:` Aus `3`"$a+x$ Zahl"
folgt via **96-13**: x Zahl.

`5:` Aus `2.2`"$a \in \mathbb{C}$" und
aus `4`"x Zahl"
folgt via **160-3**: $-a+(a+x)=x$.

`6:` Aus `1`"$-a+(a+x) \le -a+y$" und
aus `5`"$-a+(a+x)=x$"
folgt: $x \le -a+y$.

`b)` `VS` gleich $(-a+x \le y) \wedge (a \in \mathbb{R})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$-a+x \le y \ldots$"
folgt: $(-a)+x \le y$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots a \in \mathbb{R}$"
folgt via **117-4**: $-a \in \mathbb{R}$.

`2:` Aus `1.1`"$(-a)+x \le y$" und
aus `1.2`"$-a \in \mathbb{R}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $x \le -(-a)+y$.

`3:` Via **FS**$-+$ gilt: $-(-a)+y = a+y$.

`4:` Aus `2`"$x \le -(-a)+y$" und
aus `3`"$-(-a)+y = a+y$"
folgt: $x \le a+y$.

<u>Beweis</u> **160-8** `c)` `VS` gleich $(x \le b+y) \wedge (b \in \mathbb{R})$.

`1:` Aus `VS` gleich “$x \le b+y\ldots$” und
aus `VS` gleich “$\ldots b \in \mathbb{R}$”
folgt via **VR**$\le$: $-b+x \le -b+(b+y)$.

`2.1:` Aus `VS` gleich “$x \le b+y\ldots$”
folgt via **107-3**: $b+y \in \mathbb{S}$.

`2.2:` Aus `VS` gleich “$\ldots b \in \mathbb{R}$”
folgt via $\in$**SZ**: $b \in \mathbb{C}$.

`3:` Aus `2.1`“$b+y \in \mathbb{S}$”
folgt via $\in$**SZ**: $b+y$ Zahl.

`4:` Aus `3`“$b+y$ Zahl”
folgt via **96-13**: y Zahl.

`5:` Aus `2.2`“$b \in \mathbb{C}$” und
aus `4`“y Zahl”
folgt via **160-3**: $-b+(b+y)=y$.

`6:` Aus `1`“$-b+x \le -b+(b+y)$” und
aus `5`“$-b+(b+y)=y$”
folgt: $-b+x \le y$.

`d)` `VS` gleich $(x \le -b+y) \wedge (b \in \mathbb{R})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich “$x \le -b+y\ldots$”
folgt: $x \le (-b)+y$.

`1.2:` Aus `VS` gleich “$\ldots b \in \mathbb{R}$”
folgt via **117-4**: $-b \in \mathbb{R}$.

`2:` Aus `1.1`“$x \le (-b)+y$” und
aus `1.2`“$-b \in \mathbb{R}$”
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $-(-b)+x \le y$.

`3:` Via **FS**$-+$ gilt: $-(-b)+x = b+x$.

`4:` Aus `3`“$-(-b)+x=b+x$” und
aus `2`“$-(-b)+x \le -y$”
folgt: $b+x \le y$.

Beweis **160-8** `e)` `VS` gleich $(a + x \le b + y) \wedge (a \in \mathbb{R})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$a + x \le b + y \dots$" und
aus `VS` gleich "$\dots a \in \mathbb{R}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $x \le -a + (b + y)$.

`2:` Via **160-7** gilt: $-a + (b + y) = (b - a) + y$.

`3:` Aus `1`"$x \le -a + (b + y)$" und
aus `2`"$-a + (b + y) = (b - a) + y$"
folgt: $x \le (b - a) + y$.

`f)` `VS` gleich $(a + x \le -b + y) \wedge (a \in \mathbb{R})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$a + x \le -b + y \dots$" und
aus `VS` gleich "$\dots a \in \mathbb{R}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $x \le -a + (-b + y)$.

`2:` Via **160-7** gilt: $-a + (-b + y) = -(a + b) + y$.

`3:` Aus `1`"$x \le -a + (-b + y)$" und
aus `2`"$-a + (-b + y) = -(a + b) + y$"
folgt: $x \le -(a + b) + y$.

`g)` `VS` gleich $(-a + x \le b + y) \wedge (a \in \mathbb{R})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$-a + x \le b + y \dots$" und
aus `VS` gleich "$\dots a \in \mathbb{R}$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $x \le a + (b + y)$.

`2:` $a + (b + y) \stackrel{\textbf{FSA}}{=} (a + b) + y$.

`3:` Aus `1`"$x \le a + (b + y)$" und
aus `2`"$a + (b + y) = \dots = (a + b) + y$"
folgt: $x \le (a + b) + y$.

Beweis **160-8** `h)` `VS` gleich $(-a+x\le -b+y)\wedge(a\in\mathbb{R})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$-a+x\le -b+y\ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots a\in\mathbb{R}$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $x\le a+(-b+y)$.

`2:` Via **160-7** gilt: $a+(-b+y)=(a-b)+y$.

`3:` Aus `1`"$x\le a+(-b+y)$" und
aus `2`"$a+(-b+y)=(a-b)+y$"
folgt: $x\le (a-b)+y$.

`i)` `VS` gleich $(a+x\le b+y)\wedge(b\in\mathbb{R})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$a+x\le b+y\ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots b\in\mathbb{R}$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $-b+(a+x)\le y$.

`2:` Via **160-7** gilt: $-b+(a+x)=(a-b)+x$.

`3:` Aus `1`"$-b+(a+x)\le y$" und
aus `2`"$-b+(a+x)=(a-b)+x$"
folgt: $(a-b)+x\le y$.

`j)` `VS` gleich $(a+x\le -b+y)\wedge(b\in\mathbb{R})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$a+x\le -b+y\ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots b\in\mathbb{R}$"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $b+(a+x)\le y$.

`2:` $$(a+b)+x\stackrel{\textbf{FSA}}{=}(b+a)+x\stackrel{\textbf{FSA}}{=}b+(a+x).$$

`3:` Aus `2`"$(a+b)+x=\ldots=b+(a+x)$" und
aus `1`"$b+(a+x)\le y$"
folgt: $(a+b)+x\le y$.

`k)` `VS` gleich $(-a+x\le b+y)\wedge(b\in\mathbb{R})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$-a+x\le b+y\ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots b\in\mathbb{R}$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $-b+(-a+x)\le y$.

`2:` $$-b+(-a+x)\stackrel{\textbf{160-7}}{=}-(b+a)+x\stackrel{\textbf{FSA}}{=}-(a+b)+x.$$

`3:` Aus `1`"$b+(-a+x)\le y$" und
aus `2`"$-b+(-a+x)=\ldots=-(a+b)+x$"
folgt: $-(a+b)+x\le y$.

Beweis **160-8** `1)` `VS` gleich $(-a+x \leq -b+y) \wedge (b \in \mathbb{R})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$-a+x \leq -b+y \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots b \in \mathbb{R}$"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $b+(-a+x) \leq y$.

`2:` Via **160-7** gilt: $b+(-a+x) = (b-a)+x$.

`3:` Aus `1`"$b+(-a+x) \leq y$" und
aus `2`"$b+(-a+x) = (b-a)+x$"
folgt: $(b-a)+x \leq y$.

□

160-9. Ähnlich wie **160-8** ergeben sich die vorliegenden Resultate ohne allzu viel Mühe aus **VR**$<$:

160-9(Satz)

a) *Aus* "$a + x < y$" *und* "$a \in \mathbb{R}$" *folgt* "$x < -a + y$".

b) *Aus* "$-a + x < y$" *und* "$a \in \mathbb{R}$" *folgt* "$x < a + y$".

c) *Aus* "$x < b + y$" *und* "$b \in \mathbb{R}$" *folgt* "$-b + x < y$".

d) *Aus* "$x < -b + y$" *und* "$b \in \mathbb{R}$" *folgt* "$b + x < y$".

e) *Aus* "$a + x < b + y$" *und* "$a \in \mathbb{R}$" *folgt* "$x < (b - a) + y$".

f) *Aus* "$a + x < -b + y$" *und* "$a \in \mathbb{R}$" *folgt* "$x < -(a + b) + y$".

g) *Aus* "$-a + x < b + y$" *und* "$a \in \mathbb{R}$" *folgt* "$x < (a + b) + y$".

h) *Aus* "$-a + x < -b + y$" *und* "$a \in \mathbb{R}$" *folgt* "$x < (a - b) + y$".

i) *Aus* "$a + x < b + y$" *und* "$b \in \mathbb{R}$" *folgt* "$(a - b) + x < y$".

j) *Aus* "$a + x < -b + y$" *und* "$b \in \mathbb{R}$" *folgt* "$(a + b) + x < y$".

k) *Aus* "$-a + x < b + y$" *und* "$b \in \mathbb{R}$" *folgt* "$-(a + b) + x < y$".

l) *Aus* "$-a + x < -b + y$" *und* "$b \in \mathbb{R}$" *folgt* "$(b - a) + x < y$".

`RECH.`$\leq$-**Notation**.

<u>Beweis **160-9**</u> `a)` `VS` gleich $(a + x < y) \wedge (a \in \mathbb{R})$.

`1:` Aus `VS` gleich “$a + x < y \ldots$” und
aus `VS` gleich “$\ldots a \in \mathbb{R}$”
folgt via **VR**$<$: $-a + (a + x) \leq -a + y$.

`2.1:` Aus `VS` gleich “$a + x < y \ldots$”
folgt via **107-9**: $a + x \in \mathbb{S}$.

`2.2:` Aus `VS` gleich “$\ldots a \in \mathbb{R}$”
folgt via $\in$**SZ**: $a \in \mathbb{C}$.

`3:` Aus `2.1`“$a + x \in \mathbb{S}$”
folgt via $\in$**SZ**: $a + x$ Zahl.

`4:` Aus `3`“$a + x$ Zahl”
folgt via **96-13**: x Zahl.

`5:` Aus `2.2`“$a \in \mathbb{C}$” und
aus `4`“x Zahl”
folgt via **160-3**: $-a + (a + x) = x$.

`6:` Aus `1`“$-a + (a + x) < -a + y$” und
aus `5`“$-a + (a + x) = x$”
folgt: $x < -a + y$.

`b)` `VS` gleich $(-a + x < y) \wedge (a \in \mathbb{R})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich “$-a + x < y \ldots$”
folgt: $(-a) + x \leq y$.

`1.2:` Aus `VS` gleich “$\ldots a \in \mathbb{R}$”
folgt via **117-4**: $-a \in \mathbb{R}$.

`2:` Aus `1.1`“$(-a) + x < y$” und
aus `1.2`“$-a \in \mathbb{R}$”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $x < -(-a) + y$.

`3:` Via **FS**$-+$ gilt: $-(-a) + y = a + y$.

`4:` Aus `2`“$x < -(-a) + y$” und
aus `3`“$-(-a) + y = a + y$”
folgt: $x < a + y$.

<u>Beweis</u> **160-9** `c)` `VS` gleich $(x < b + y) \wedge (b \in \mathbb{R})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x < b + y \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots b \in \mathbb{R}$"
folgt via **VR**$<$: $-b + x < -b + (b + y)$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "$x < b + y \ldots$"
folgt via **107-9**: $b + y \in \mathbb{S}$.

`2.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots b \in \mathbb{R}$"
folgt via $\in$**SZ**: $b \in \mathbb{C}$.

`3:` Aus `2.1`"$b + y \in \mathbb{S}$"
folgt via $\in$**SZ**: $b + y$ Zahl.

`4:` Aus `3`"$b + y$ Zahl"
folgt via **96-13**: y Zahl.

`5:` Aus `2.2`"$b \in \mathbb{C}$" und
aus `4`"y Zahl"
folgt via **160-3**: $-b + (b + y) = y$.

`6:` Aus `1`"$-b + x < -b + (b + y)$" und
aus `5`"$-b + (b + y) = y$"
folgt: $-b + x < y$.

`d)` `VS` gleich $(x < -b + y) \wedge (b \in \mathbb{R})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x < -b + y \ldots$"
folgt: $x < (-b) + y$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots b \in \mathbb{R}$"
folgt via **117-4**: $-b \in \mathbb{R}$.

`2:` Aus `1.1`"$x < (-b) + y$" und
aus `1.2`"$-b \in \mathbb{R}$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $-(-b) + x < y$.

`3:` Via **FS**$-+$ gilt: $-(-b) + x = b + x$.

`4:` Aus `3`"$-(-b) + x = b + x$" und
aus `2`"$-(-b) + x < -y$"
folgt: $b + x < y$.

Beweis **160-9** `e)` `VS` gleich $(a+x<b+y)\wedge(a\in\mathbb{R})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$a+x<b+y\ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots a\in\mathbb{R}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $x<-a+(b+y)$.

`2:` Via **160-7** gilt: $-a+(b+y)=(b-a)+y$.

`3:` Aus `1`"$x<-a+(b+y)$" und
aus `2`"$-a+(b+y)=(b-a)+y$"
folgt: $x<(b-a)+y$.

`f)` `VS` gleich $(a+x<-b+y)\wedge(a\in\mathbb{R})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$a+x<-b+y\ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots a\in\mathbb{R}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $x<-a+(-b+y)$.

`2:` Via **160-7** gilt: $-a+(-b+y)=-(a+b)+y$.

`3:` Aus `1`"$x<-a+(-b+y)$" und
aus `2`"$-a+(-b+y)=-(a+b)+y$"
folgt: $x<-(a+b)+y$.

`g)` `VS` gleich $(-a+x<b+y)\wedge(a\in\mathbb{R})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$-a+x<b+y\ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots a\in\mathbb{R}$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $x<a+(b+y)$.

`2:` $a+(b+y)\stackrel{\mathbf{FSA}}{=}(a+b)+y$.

`3:` Aus `1`"$x<a+(b+y)$" und
aus `2`"$a+(b+y)=\ldots=(a+b)+y$"
folgt: $x<(a+b)+y$.

Beweis **160-9** `h)` `VS` gleich $(-a+x<-b+y)\wedge(a\in\mathbb{R})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$-a+x<-b+y\ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots a\in\mathbb{R}$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $x<a+(-b+y)$.

`2:` Via **160-7** gilt: $a+(-b+y)=(a-b)+y$.

`3:` Aus `1`"$x<a+(-b+y)$" und
aus `2`"$a+(-b+y)=(a-b)+y$"
folgt: $x<(a-b)+y$.

`i)` `VS` gleich $(a+x<b+y)\wedge(b\in\mathbb{R})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$a+x<b+y\ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots b\in\mathbb{R}$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $-b+(a+x)<y$.

`2:` Via **160-7** gilt: $-b+(a+x)=(a-b)+x$.

`3:` Aus `1`"$-b+(a+x)<y$" und
aus `2`"$-b+(a+x)=(a-b)+x$"
folgt: $(a-b)+x<y$.

`j)` `VS` gleich $(a+x<-b+y)\wedge(b\in\mathbb{R})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$a+x<-b+y\ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots b\in\mathbb{R}$"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $b+(a+x)<y$.

`2:` $$(a+b)+x\stackrel{\mathbf{FSA}}{=}(b+a)+x\stackrel{\mathbf{FSA}}{=}b+(a+x).$$

`3:` Aus `2`"$(a+b)+x=\ldots=b+(a+x)$" und
aus `1`"$b+(a+x)<y$"
folgt: $(a+b)+x<y$.

`k)` `VS` gleich $(-a+x<b+y)\wedge(b\in\mathbb{R})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$-a+x<b+y\ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots b\in\mathbb{R}$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $-b+(-a+x)<y$.

`2:` $$-b+(-a+x)\stackrel{\mathbf{160-7}}{=}-(b+a)+x\stackrel{\mathbf{FSA}}{=}-(a+b)+x.$$

`3:` Aus `1`"$b+(-a+x)<y$" und
aus `2`"$-b+(-a+x)=\ldots=-(a+b)+x$"
folgt: $-(a+b)+x<y$.

Beweis **160-9** `1)` `VS` gleich $(-a+x<-b+y)\wedge(b\in\mathbb{R})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$-a+x<-b+y\ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots b\in\mathbb{R}$"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $b+(-a+x)<y$.

`2:` Via **160-7** gilt: $b+(-a+x)=(b-a)+x$.

`3:` Aus `1`"$b+(-a+x)<y$" und
aus `2`"$b+(-a+x)=(b-a)+x$"
folgt: $(b-a)+x<y$.

□

160-10. In Kombination bisheriger Aussagen ergibt sich ohne viel Mühe das vorliegende, die Parameter $2, 1, 0, -1, -2$ involvierende Kriterium für $x \leq y$:

160-10(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)`, `iv)`, `v)`, `vi)` *sind äquivalent:*

`i)` $x \leq y$.

`ii)` $2 + x \leq 2 + y$.

`iii)` $1 + x \leq 1 + y$.

`iv)` $0 + x \leq 0 + y$.

`v)` $-1 + x \leq -1 + y$.

`vi)` $-2 + x \leq -2 + y$.

RECH.$\leq$**-Notation**.

Beweis **160-10** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $x \leq y$.

Aus `VS` gleich "$x \leq y$" und
aus **109-26**"$2 \in \mathbb{R}$"
folgt via **VR**$\leq$: $2 + x \leq 2 + y$.

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}$ `VS` gleich $2 + x \leq 2 + y$.

`1:` Aus `VS` gleich "$2 + x \leq 2 + y$" und
aus **AAI**"$1 \in \mathbb{R}$"
folgt via **VR**$\leq$: $-1 + (2 + x) \leq -1 + (2 + y)$.

`2.1:` $-1 + (2 + x) \overset{\textbf{FSA}}{=} (-1 + 2) + x \overset{\textbf{FS}-+}{=} (2 - 1) + x \overset{\textbf{109-26}}{=} 1 + x$.

`2.2:` $-1 + (2 + y) \overset{\textbf{FSA}}{=} (-1 + 2) + y \overset{\textbf{FS}-+}{=} (2 - 1) + y \overset{\textbf{109-26}}{=} 1 + y$.

`3:` Aus `1`"$-1 + (2 + x) \leq -1 + (2 + y)$" und
aus `2.1`"$-1 + (2 + x) = \ldots = 1 + x$"
folgt: $1 + x \leq -1 + (2 + y)$.

`4:` Aus `3`"$1 + x \leq -1 + (2 + y)$" und
aus `2.2`"$-1 + (2 + y) = \ldots = 1 + y$"
folgt: $1 + x \leq 1 + y$.

Beweis **160-10** $\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{iv)}}}$ VS gleich $1+x \le 1+y$.

1: Aus VS gleich "$1+x \le 1+y$" und
aus **AAI**"$1 \in \mathbb{R}$"
folgt via **VR**$\le$: $-1+(1+x) \le -1+(1+y)$.

2.1: $-1+(1+x) \stackrel{\textbf{FSA}}{=} (-1+1)+x \stackrel{\textbf{FS}-+}{=} (1-1)+x \stackrel{\textbf{102-10}}{=} 0+x$.

2.2: $-1+(1+y) \stackrel{\textbf{FSA}}{=} (-1+1)+y \stackrel{\textbf{FS}-+}{=} (1-1)+y \stackrel{\textbf{102-10}}{=} 0+y$.

3: Aus 1"$-1+(1+x) \le -1+(1+y)$" und
aus 2.1"$-1+(1+x) = \ldots = 0+x$"
folgt: $0+x \le -1+(1+y)$.

4: Aus 3"$0+x \le -1+(1+y)$" und
aus 2.2"$-1+(1+y) = \ldots = 0+y$"
folgt: $0+x \le 0+y$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iv)} \Rightarrow \texttt{v)}}}$ VS gleich $0+x \le 0+y$.

1: Aus VS gleich "$0+x \le 0+y$" und
aus **AAI**"$1 \in \mathbb{R}$"
folgt via **VR**$\le$: $-1+(0+x) \le -1+(0+y)$.

2.1: $-1+(0+x) \stackrel{\textbf{FSA}}{=} (-1+0)+x \stackrel{\textbf{114-11}}{=} -1+x$.

2.2: $-1+(0+y) \stackrel{\textbf{FSA}}{=} (-1+0)+y \stackrel{\textbf{114-11}}{=} -1+y$.

3: Aus 1"$-1+(0+x) \le -1+(0+y)$" und
aus 2.1"$-1+(0+x) = \ldots = -1+x$"
folgt: $-1+x \le -1+(0+y)$.

4: Aus 3"$-1+x \le -1+(0+y)$" und
aus 2.2"$-1+(0+y) = \ldots = -1+y$"
folgt: $-1+x \le -1+y$.

Beweis **160-10** $\boxed{\texttt{v)} \Rightarrow \texttt{vi)}}$ VS gleich $-1+x \le -1+y$.

1: Aus VS gleich "$-1+x \le -1+y$" und
aus **AAI**"$1 \in \mathbb{R}$"
folgt via **VR**$\le$: $-1+(-1+x) \le -1+(-1+y)$.

2.1: $-1+(-1+x) \stackrel{\textbf{FSA}}{=} (-1+(-1))+x = (-1-1)+x \stackrel{\textbf{109-26}}{=} -2+x$.

2.2: $-1+(-1+y) \stackrel{\textbf{FSA}}{=} (-1+(-1))+y = (-1-1)+y \stackrel{\textbf{109-26}}{=} -2+y$.

3: Aus 1"$-1+(-1+x) \le -1+(-1+y)$" und
aus 2.1"$-1+(-1+x) = \ldots = -2+x$"
folgt: $-2+x \le -1+(-1+y)$.

4: Aus 3"$-2+x \le -1+(-1+y)$" und
aus 2.2"$-1+(-1+y) = \ldots = -2+y$"
folgt: $-2+x \le -2+y$.

$\boxed{\texttt{vi)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ VS gleich $-2+x \le -2+y$.

Aus VS gleich "$-2+x \le -2+y$" und
aus **109-26**"$2 \in \mathbb{R}$"
folgt via **VR**$\le$: $x \le y$.

$\square$

160-11. In Kombination bisheriger Aussagen ergibt sich ohne viel Mühe das vorliegende, die Parameter $2, 1, 0, -1, -2$ involvierende Kriterium für $x < y$:

160-11(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)`, `iv)`, `v)`, `vi)` *sind äquivalent:*

`i)` $x < y$.

`ii)` $2 + x < 2 + y$.

`iii)` $1 + x < 1 + y$.

`iv)` $0 + x < 0 + y$.

`v)` $-1 + x < -1 + y$.

`vi)` $-2 + x < -2 + y$.

`RECH.`**≤-Notation**.

Beweis **160-11** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $x < y$.

Aus `VS` gleich "$x < y$" und
aus **109-26**"$2 \in \mathbb{R}$"
folgt via **VR**<: $2 + x < 2 + y$.

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}$ `VS` gleich $2 + x < 2 + y$.

`1:` Aus `VS` gleich "$2 + x < 2 + y$" und
aus **AAI**"$1 \in \mathbb{R}$"
folgt via **VR**<: $-1 + (2 + x) < -1 + (2 + y)$.

`2.1:` $-1 + (2 + x) \stackrel{\mathbf{FSA}}{=} (-1 + 2) + x \stackrel{\mathbf{FS-+}}{=} (2 - 1) + x \stackrel{\mathbf{109-26}}{=} 1 + x$.

`2.2:` $-1 + (2 + y) \stackrel{\mathbf{FSA}}{=} (-1 + 2) + y \stackrel{\mathbf{FS-+}}{=} (2 - 1) + y \stackrel{\mathbf{109-26}}{=} 1 + y$.

`3:` Aus `1`"$-1 + (2 + x) < -1 + (2 + y)$" und
aus `2.1`"$-1 + (2 + x) = \ldots = 1 + x$"
folgt: $1 + x < -1 + (2 + y)$.

`4:` Aus `3`"$1 + x < -1 + (2 + y)$" und
aus `2.2`"$-1 + (2 + y) = \ldots = 1 + y$"
folgt: $1 + x < 1 + y$.

Beweis **160-11** $\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{iv)}}}$ `VS` gleich $$1+x<1+y.$$

`1:` Aus `VS` gleich "$1+x<1+y$" und
aus **AAI**"$1\in\mathbb{R}$"
folgt via **VR**<: $$-1+(1+x)<-1+(1+y).$$

`2.1:` $$-1+(1+x)\stackrel{\textbf{FSA}}{=}(-1+1)+x\stackrel{\textbf{FS}-+}{=}(1-1)+x\stackrel{\textbf{102-10}}{=}0+x.$$

`2.2:` $$-1+(1+y)\stackrel{\textbf{FSA}}{=}(-1+1)+y\stackrel{\textbf{FS}-+}{=}(1-1)+y\stackrel{\textbf{102-10}}{=}0+y.$$

`3:` Aus `1`"$-1+(1+x)<-1+(1+y)$" und
aus `2.1`"$-1+(1+x)=\ldots=0+x$"
folgt: $$0+x<-1+(1+y).$$

`4:` Aus `3`"$0+x<-1+(1+y)$" und
aus `2.2`"$-1+(1+y)=\ldots=0+y$"
folgt: $$0+x<0+y.$$

$\boxed{\boxed{\texttt{iv)} \Rightarrow \texttt{v)}}}$ `VS` gleich $$0+x<0+y.$$

`1:` Aus `VS` gleich "$0+x<0+y$" und
aus **AAI**"$1\in\mathbb{R}$"
folgt via **VR**<: $$-1+(0+x)<-1+(0+y).$$

`2.1:` $$-1+(0+x)\stackrel{\textbf{FSA}}{=}(-1+0)+x\stackrel{\textbf{114-11}}{=}-1+x.$$

`2.2:` $$-1+(0+y)\stackrel{\textbf{FSA}}{=}(-1+0)+y\stackrel{\textbf{114-11}}{=}-1+y.$$

`3:` Aus `1`"$-1+(0+x)<-1+(0+y)$" und
aus `2.1`"$-1+(0+x)=\ldots=-1+x$"
folgt: $$-1+x<-1+(0+y).$$

`4:` Aus `3`"$-1+x<-1+(0+y)$" und
aus `2.2`"$-1+(0+y)=\ldots=-1+y$"
folgt: $$-1+x<-1+y.$$

Beweis **160-11** $\boxed{\boxed{\texttt{v)} \Rightarrow \texttt{vi)}}}$ `VS` gleich $$-1+x<-1+y.$$

`1:` Aus `VS` gleich "$-1+x<-1+y$" und
aus **AAI**"$1\in\mathbb{R}$"
folgt via **VR**$<$: $$-1+(-1+x)<-1+(-1+y).$$

`2.1:` $$-1+(-1+x)\stackrel{\textbf{FSA}}{=}(-1+(-1))+x=(-1-1)+x\stackrel{\textbf{109-26}}{=}-2+x.$$

`2.2:` $$-1+(-1+y)\stackrel{\textbf{FSA}}{=}(-1+(-1))+y=(-1-1)+y\stackrel{\textbf{109-26}}{=}-2+y.$$

`3:` Aus `1`"$-1+(-1+x)<-1+(-1+y)$" und
aus `2.1`"$-1+(-1+x)=\ldots=-2+x$"
folgt: $$-2+x<-1+(-1+y).$$

`4:` Aus `3`"$-2+x<-1+(-1+y)$" und
aus `2.2`"$-1+(-1+y)=\ldots=-2+y$"
folgt: $$-2+x<-2+y.$$

$\boxed{\boxed{\texttt{vi)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $$-2+x<-2+y.$$

Aus `VS` gleich "$-2+x<-2+y$" und
aus **109-26**"$2\in\mathbb{R}$"
folgt via **VR**$\leq$: $$x<y.$$

$\square$

160-12. Aus dem bisher bewiesenen folgen für $x \in \mathbb{S}$ die nunmehrigen Aussagen:

160-12(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $x \in \mathbb{S}$.

Dann folgt:

a) $-2 + x \leq -1 + x$.

b) $-1 + x \leq x$.

c) $x \leq 1 + x$.

d) $1 + x \leq 2 + x$.

RECH.**$\leq$-Notation**.

Beweis **160-12** a)

1: Via **109-26** gilt: $-2 < -1$.

2: Aus 1 "$-2 < -1$",
aus **109-26** "$-2 \in \mathbb{R}$",
aus **100-7** "$-1 \in \mathbb{R}$" und
aus VS gleich "$x \in \mathbb{S}$"
folgt via **VR**<: $x + (-2) \leq x + (-1)$.

3.1: $x + (-2) = x - 2 \overset{\textbf{FS}-+}{=} -2 + x$.

3.2: $x + (-1) = x - 1 \overset{\textbf{FS}-+}{=} -1 + x$.

4: Aus 2 "$x + (-2) \leq x + (-1)$" und
aus 3.1 "$x + (-2) = \ldots = -2 + x$"
folgt: $-2 + x \leq x + (-1)$.

5: Aus 4 "$-2 + x \leq x + (-1)$" und
aus 3.2 "$x + (-1) = \ldots = -1 + x$"
folgt: $-2 + x \leq -1 + x$.

Beweis **160-12** `b)`

`1:` Via **109-24** gilt: $-1 < 0.$

`2:` Aus `1` "$-1 < 0$",
aus **100-7** "$-1 \in \mathbb{R}$",
aus **AAI** "$0 \in \mathbb{R}$" und
aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{S}$"
folgt via **VR**$<$: $x + (-1) \leq x + 0.$

`3.1:` $x + (-1) = x - 1 \stackrel{\textbf{FS}-+}{=} -1 + x.$

`3.2:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{S}$"
folgt via $\in$**SZ**: x Zahl.

`4:` Aus `3.2` "x Zahl"
folgt via **FSA**0: $x + 0 = x.$

`5:` Aus `2` "$x + (-1) \leq x + 0$" und
aus `3.1` "$x + (-1) = \ldots = -1 + x$"
folgt: $-1 + x \leq x + 0.$

`6:` Aus `5` "$-1 + x \leq x + 0$" und
aus `4` "$x + 0 = \ldots = x$"
folgt: $-1 + x \leq x.$

`c)`

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{S}$"
folgt via **117-4**: $-x \in \mathbb{S}.$

`2:` Aus `1` "$-x \in \mathbb{S}$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $-1 + (-x) \leq -x.$

`3:` $-(1 + x) \stackrel{\textbf{FS}-+}{=} -1 - x = -1 + (-x).$

`4:` Aus `3` "$-(1 + x) = \ldots = -1 + (-x)$" und
aus `2` "$-1 + (-x) \leq -x$"
folgt: $-(1 + x) \leq -x.$

`5:` Aus `4` "$-(1 + x) \leq -x$"
folgt via **109-15**: $x \leq 1 + x.$

Beweis **160-12** `d)`

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{S}$"
folgt via **117-4**: $-x \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `1` "$-x \in \mathbb{S}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $-2 + (-x) \leq -1 + (-x)$.

`3.1:` $-(2 + x) \stackrel{\mathbf{FS}-+}{=} -2 - x = -2 + (-x)$.

`3.2:` $-1 + (-x) = -1 - x \stackrel{\mathbf{FS}-+}{=} -(1 + x)$.

`4:` Aus `3.1` "$-(2 + x) = \ldots = -2 + (-x)$" und
aus `2` "$-2 + (-x) \leq -1 + (-x)$"
folgt: $-(2 + x) \leq -1 + (-x)$.

`5:` Aus `4` "$-(2 + x) \leq -1 + (-x)$" und
aus `3.2` "$-1 + (-x) = \ldots = -(1 + x)$"
folgt: $-(2 + x) \leq -(1 + x)$.

`6:` Aus `5` "$-(2 + x) \leq -(1 + x)$"
folgt via **109-15**: $1 + x \leq 2 + x$.

$\square$

Eine Ergänzung des **Binären SchubfachPrinzips**.
Aus $z \subseteq x$ und $x \cap y = 0$ folgt $z \cap y = 0$.
Aus $z \subseteq y$ und $x \cap y = 0$ folgt $x \cap z = 0$.

Ersterstellung: 29/04/12 **Letzte Änderung: 08/05/12**

161-1. Mit der vorliegenden Ergänzung zum **Binären SchubfachPrinzip**, insbesondere mit `cd)`, können einige Beweise verkürzt werden. Aussagen `ef)` sind die "symmetrischen" Versionen des **Binären SchubfachPrinzips**:

161-1(Satz)

`a)` *Aus "$x \cup y = \mathcal{U}$" und "$p \notin x$" und "p Menge" folgt "$p \in y$".*

`b)` *Aus "$x \cup y = \mathcal{U}$" und "$p \notin y$" und "p Menge" folgt "$p \in x$".*

`c)` *Aus "$x \cap y = 0$" und "$p \in x$" folgt "$p \notin y$".*

`d)` *Aus "$x \cap y = 0$" und "$p \in y$" folgt "$p \notin x$".*

`e)` *Aus "$p \in x \cup y$" und "$p \notin y$" folgt "$p \in x$".*

`f)` *Aus "$p \notin x \cap y$" und "$p \in y$" folgt "$p \notin x$".*

Beweis **161-1** `a)` `VS` gleich $(x \cup y = \mathcal{U}) \wedge (p \notin x) \wedge (p \text{ Menge})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots p$ Menge"
folgt via **0-22**: $p \in \mathcal{U}$.

`2:` Aus `1`"$p \in \mathcal{U}$" und
aus `VS` gleich "$x \cup y = \mathcal{U}$"
folgt: $p \in x \cup y$.

`3:` Aus `2`"$p \in x \cup y$" und
aus `VS` gleich "$\ldots p \notin x \ldots$"
folgt via **Binäres SchubfachPrinzip**: $p \in y$.

`b)` `VS` gleich $(x \cup y = \mathcal{U}) \wedge (p \notin y) \wedge (p \text{ Menge})$.

`1:` Via **KG**$\cup$ gilt: $y \cup x = x \cup y$.

`2:` Aus `1`"$y \cup x = x \cup y$" und
aus `VS` gleich "$x \cup y = \mathcal{U}$"
folgt: $y \cup x = \mathcal{U}$.

`3:` Aus `2`"$y \cup x = \mathcal{U}$",
aus `VS` gleich "$\ldots p \notin y \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots p$ Menge"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $p \in x$.

Beweis **161-1** `c)` `VS` gleich $(x \cap y = 0) \wedge (p \in x)$.

`1:` Via **0-19** gilt: $p \notin 0$.

`2:` Aus `1`“$p \notin 0$” und
aus `VS` gleich “$x \cap y = 0 \ldots$”
folgt: $p \notin x \cap y$.

`3:` Aus `2`“$p \notin x \cap y$” und
aus `VS` gleich “$\ldots p \in x$”
folgt via **Binäres SchubfachPrinzip**: $p \notin y$.

`d)` `VS` gleich $(x \cap y = 0) \wedge (p \in y)$.

`1:` Via **KG**$\cap$ gilt: $x \cap y = y \cap x$.

`2:` Aus `VS` gleich “$x \cap y = 0 \ldots$” und
aus `1`“$x \cap y = y \cap x$”
folgt: $y \cap x = 0$.

`3:` Aus `2`“$y \cap x = 0$” und
aus `VS` gleich “$\ldots p \in y$”
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $p \notin x$.

`e)` `VS` gleich $(p \in x \cup y) \wedge (p \notin y)$.

`1:` Via **KG**$\cup$ gilt: $x \cup y = y \cup x$.

`2:` Aus `VS` gleich “$p \in x \cup y \ldots$” und
aus `1`“$x \cup y = y \cup x$”
folgt: $p \in y \cup x$.

`3:` Aus `2`“$p \in y \cup x$” und
aus `VS` gleich “$\ldots p \notin y$”
folgt via **Binäres SchubfachPrinzip**: $p \in x$.

`f)` `VS` gleich $(p \notin x \cap y) \wedge (p \in y)$.

`1:` Via **KG**$\cap$ gilt: $x \cap y = y \cap x$.

`2:` Aus `VS` gleich “$p \notin x \cap y \ldots$” und
aus `1`“$x \cap y = y \cap x$”
folgt: $p \notin y \cap x$.

`3:` Aus `2`“$p \notin y \cap x$” und
aus `VS` gleich “$\ldots p \in y$”
folgt via **Binäres SchubfachPrinzip**: $p \notin x$.

$\square$

161-2. Die folgenden, wenig verblüffenden Aussagen vereinfachen manchen Beweis:

161-2(Satz)

a) *Aus* "$z \subseteq x$" *und* "$x \cap y = 0$" *folgt* "$z \cap y = 0$".

b) *Aus* "$z \subseteq y$" *und* "$x \cap y = 0$" *folgt* "$x \cap z = 0$".

Beweis **161-2** a) VS gleich $(z \subseteq x) \wedge (x \cap y = 0)$.

1: Aus VS gleich "$z \subseteq x \ldots$"
folgt via **2-15**: $z \cap y \subseteq x \cap y$.

2: Aus 1"$z \cap y \subseteq x \cap y$" und
aus VS gleich "$\ldots x \cap y = 0$"
folgt: $z \cap y \subseteq 0$.

3: Aus 2"$z \cap y \subseteq 0$"
folgt via **0-18**: $z \cap y = 0$.

b) VS gleich $(z \subseteq y) \wedge (x \cap y) = 0$.

1: Via **KG**$\cap$ gilt: $y \cap x = x \cap y$.

2: Aus 1"$y \cap x = x \cap y$" und
aus VS gleich "$\ldots x \cap y = 0$"
folgt: $y \cap x = 0$.

3: Aus VS gleich "$z \subseteq y \ldots$" und
aus 2"$y \cap x = 0$"
folgt via des bereits bewiesenen a): $z \cap x = 0$.

4: Via **KG**$\cap$ gilt: $x \cap z = z \cap x$.

5: Aus 4"$x \cap z = z \cap x$" und
aus 4"$z \cap x = 0$"
folgt: $x \cap z = 0$.

□

LS$\mathbb{N}$: LückenSatz $\mathbb{N}$.

Ersterstellung: 27/04/12 **Letzte Änderung: 19/06/12**

162-1. Mit der nunmehrigen Definition wird **162-2** vorbereitet, der seinerseits den **LS$\mathbb{N}$: LückenSatz** $\mathbb{N}$ vorbereitet:

162-1(Definition)

$$\mathsf{162.0}() = \{\omega : (\omega = 0) \vee (-1 + \omega \in \mathbb{N})\}.$$

`RECH`-**Notation**.

162-2. Jede natürliche Zahl n ist gleich Null oder $-1+n$ ist eine natürliche Zahl:

162-2(Satz)

a) *Aus* "$n \in \mathbb{N}$" *folgt* "$n = 0$" *oder* "$-1 + n \in \mathbb{N}$".

b) *Aus* "$n \in \mathbb{N}$" *folgt* "$n = 0$" *oder* "$0 < n$".

c) "$0 \neq n \in \mathbb{N}$" *genau dann, wenn* "$0 < n \in \mathbb{N}$".

`RECH.`$\leq$-**Notation**.

Beweis **162-2**

162-1(Def) $\{\omega : (\omega = 0) \vee (-1+\omega \in \mathbb{N})\}$.

---

a) `VS` gleich $n \in \mathbb{N}$.

`1.1:` Aus "$0 = 0$"
folgt: $(0 = 0) \vee (-1+0 \in \mathbb{N})$.

`Thema1.2` $\alpha \in \mathbb{N} \cap \{\omega : (\omega = 0) \vee (-1+\omega \in \mathbb{N})\}$.

`2:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in \mathbb{N} \cap \{\omega : (\omega = 0) \vee (-1+\omega \in \mathbb{N})\}$"
folgt via **2-3**:
$(\alpha \in \mathbb{N}) \wedge (\alpha \in \{\omega : (\omega = 0) \vee (-1+\omega \in \mathbb{N})\}$.

`3:` Aus `2`"$\ldots \alpha \in \{\omega : (\omega = 0) \vee (-1+\omega \in \mathbb{N})\}$"
folgt: $(\alpha = 0) \vee (-1+\alpha \in \mathbb{N})$.

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` $\alpha = 0$.

`4:` Aus **98-10**"$1+0=1$" und
aus `3.1.Fall`"$\alpha = 0$"
folgt: $1+\alpha = 1$.

`5.1:` Aus `4`"$1+\alpha = 1$" und
aus **159-10**"$1 \in \mathbb{N}$"
folgt: $1+\alpha \in \mathbb{N}$.

`5.2:` $-1+(1+\alpha) \stackrel{\mathbf{4}}{=} -1+1 \stackrel{\mathbf{FS-+}}{=} 1-1 \stackrel{\mathbf{102-10}}{=} 0$.

`6:` Aus `5.2`"$-1+(1+\alpha) = \ldots = 0$" und
aus **159-10**"$0 \in \mathbb{N}$"
folgt: $-1+(1+\alpha) \in \mathbb{N}$.

`7.1:` Aus `6`"$-1+(1+\alpha) \in \mathbb{N}$"
folgt: $(1+\alpha = 0) \vee (-1+(1+\alpha) \in \mathbb{N})$.

`7.2:` Aus `5`"$1+\alpha = 1$" und
aus **95-2**"1 Menge"
folgt: $1+\alpha$ Menge.

`8:` Aus `7.1`"$(1+\alpha = 0) \vee (-1+(1+\alpha) \in \mathbb{N})$" und
aus `6.2`"$1+\alpha$ Menge"
folgt: $1+\alpha \in \{\omega : (\omega = 0) \vee (-1+\omega \in \mathbb{N})\}$.

...

...

Beweis **162-2** `a) VS` gleich $n \in \mathbb{N}$.

...

`Thema1.2` $\alpha \in \mathbb{N} \cap \{\omega : (\omega = 0) \vee (-1 + \omega \in \mathbb{N})\}$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`3.2.Fall` $-1 + \alpha \in \mathbb{N}$.

`4:` Aus `3.2.Fall` "$-1 + \alpha \in \mathbb{N}$" folgt via **159-11**: $-1 + \alpha$ Zahl.

`5:` Aus `4` "$-1 + \alpha$ Zahl" folgt via **96-13**: α Zahl.

`6.1:` Aus **95-5** "1 Zahl" und aus `5` "α Zahl" folgt via **96-13**: $1 + \alpha$ Menge.

`6.2:` Aus `5` "α Zahl" folgt via **FSA**0: $0 + \alpha = \alpha$.

`7:` $-1 + (1 + \alpha) = (-1) + (1 + \alpha) \stackrel{\textbf{FSA}}{=} ((-1) + 1) + \alpha \stackrel{\textbf{FSA}}{=} (1 + (-1)) + \alpha = (1 - 1) + \alpha \stackrel{\textbf{102-10}}{=} 0 + \alpha \stackrel{6.2}{=} \alpha$.

`8:` Aus `7` "$-1 + (1 + \alpha) = \ldots = \alpha$" und aus `2` "$\alpha \in \mathbb{N} \ldots$" folgt: $-1 + (1 + \alpha) \in \mathbb{N}$.

`9:` Aus `8` folgt: $(1 + \alpha = 0) \vee (-1 + (1 + \alpha) \in \mathbb{N})$.

`10:` Aus `9` "$(1 + \alpha = 0) \vee (-1 + (1 + \alpha) \in \mathbb{N})$" und aus `6.1` "$1 + \alpha$ Menge" folgt: $1 + \alpha \in \{\omega : (\omega = 0) \vee (-1 + \omega \in \mathbb{N})\}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

$1 + \alpha \in \{\omega : (\omega = 0) \vee (-1 + \omega \in \mathbb{N})\}$.

Ergo `Thema1.2`:

`A1` | "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N} \cap \{\omega : (\omega = 0) \vee (-1 + \omega \in \mathbb{N})\}) \Rightarrow (1 + \alpha \in \{\omega : (\omega = 0) \vee (-1 + \omega \in \mathbb{N})\})$"

...

Beweis **162-2** `a)` `VS` gleich $n \in \mathbb{N}$.

...

`2:` Aus `1.1`"$(0 = 0) \vee (-1 + 0 \in \mathbb{N})$" und
aus $0\mathcal{U}$**Axiom**"0 Menge"
folgt: $0 \in \{\omega : (\omega = 0) \vee (-1 + \omega \in \mathbb{N})\}$.

`3:` Aus `2`"$0 \in \{\omega : (\omega = 0) \vee (-1 + \omega \in \mathbb{N})\}$" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N} \cap \{\omega : (\omega = 0) \vee (-1 + \omega \in \mathbb{N})\})$
$\Rightarrow (1 + \alpha \in \{\omega : (\omega = 0) \vee (-1 + \omega \in \mathbb{N})\})$"
folgt via **159-10**: $\mathbb{N} \subseteq \{\omega : (\omega = 0) \vee (-1 + \omega \in \mathbb{N})\}$.

`4:` Aus `VS` gleich "$n \in \mathbb{N}$" und
aus `3`"$\mathbb{N} \subseteq \{\omega : (\omega = 0) \vee (-1 + \omega \in \mathbb{N})\}$"
folgt via **0-4**: $n \in \{\omega : (\omega = 0) \vee (-1 + \omega \in \mathbb{N})\}$.

`5:` Aus `4`"$n \in \{\omega : (\omega = 0) \vee (-1 + \omega \in \mathbb{N})\}$"
folgt: $(n = 0) \vee (-1 + n \in \mathbb{N})$.

`b)` `VS` gleich $n \in \mathbb{N}$.

`1:` Es gilt: $(n = 0) \vee (0 \neq n)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $n = 0$.

Aus `1.1.Fall`
folgt: $(n = 0) \vee (0 < n)$.

`1.2.Fall` $0 \neq n$.

`2:` Aus `VS` gleich "$n \in \mathbb{N}$"
folgt via **159-11**: $0 \leq n$.

`3:` Aus `2`"$0 \leq n$" und
aus `1.2.Fall`"$0 \neq n$"
folgt via **41-3**: $0 < n$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $(n = 0) \vee (0 < n)$.

Beweis **162-2** `c)` $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ `VS` gleich $0 \neq n \in \mathbb{N}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots n \in \mathbb{N}$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $(n = 0) \vee (0 < n)$.

`2:` Aus `1`"$(n = 0) \vee (0 < n)$" und
aus `VS` gleich "$0 \neq n \ldots$"
folgt: $0 < n$.

`3:` Aus `2`"$0 < n$" und
aus `VS` gleich "$\ldots n \in \mathbb{N}$"
folgt: $0 < n \in \mathbb{N}$.

`c)` $\boxed{\boxed{\Leftarrow}}$ `VS` gleich $0 < n \in \mathbb{N}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$0 < n \ldots$"
folgt via **41-3**: $0 \neq n$.

`2:` Aus `1`"$0 \neq n$" und
aus `VS` gleich "$\ldots n \in \mathbb{N}$"
folgt: $0 \neq n \in \mathbb{N}$.

$\square$

162-3. Auch das nunmehrige Resultat bereitet den **LückenSatz** $\mathbb{N}$ vor. Unschwer sind `bc)` als Vorbereitung zu einem "Induktions-Beweis" zu erkennen:

162-3(Satz)

`a)` $\mathbb{N} \cap \,]-1|0[\, = 0$.

`b)` $\mathbb{N} \cap \,]0|1[\, = 0$.

`c)` *Aus* "$0 \le x$" *und* "$\mathbb{N} \cap \,]x|1+x[\, = 0$" *folgt* "$\mathbb{N} \cap \,]1+x|2+x[\, = 0$".

`RECH`-**Notation**.

Beweis **162-3** `a)`

`1:` Es gilt: $(0 \neq \mathbb{N} \cap \,]-1|0[) \vee (\mathbb{N} \cap \,]-1|0[\, = 0)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $0 \neq \mathbb{N} \cap \,]-1|0[$.

`2:` Aus `1.1.Fall`"$0 \neq \mathbb{N} \cap \,]-1|0[$"
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in \mathbb{N} \cap \,]-1|0[$.

`3:` Aus `2`"$\Omega \in \mathbb{N} \cap \,]-1|0[$"
folgt via **2-2**: $(\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (\Omega \in \,]-1|0[)$.

`4.1:` Aus `3`"$\Omega \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **159-11**: $0 \le \Omega$.

`4.2:` Aus `3`"$\ldots \Omega \in \,]-1|0[$"
folgt via **142-3**: $-1 < \Omega < 0$.

`5:` Aus `4.1`"$0 \le \Omega$"
folgt via **107-13**: $\neg(\Omega < 0)$.

`6:` Es gilt `5`"$\neg(\Omega < 0)$".
Es gilt `4.2`"$\ldots \Omega < 0$".
Ex falso quodlibet folgt: $\mathbb{N} \cap \,]-1|0[\, = 0$.

`1.2.Fall` $\mathbb{N} \cap \,]-1|0[\, = 0$.

In beiden Fällen gilt: $\mathbb{N} \cap \,]-1|0[\, = 0$.

Beweis **162-3** `b)`

`1:` Es gilt: $(0 \neq \mathbb{N} \cap]0|1[) \vee (\mathbb{N} \cap]0|1[= 0)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $0 \neq \mathbb{N} \cap]0|1[$.

`2:` Aus `1.1.Fall` "$0 \neq \mathbb{N} \cap]0|1[$"
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in \mathbb{N} \cap]0|1[$.

`3:` Aus `2` "$\ldots \Omega \in \mathbb{N} \cap]0|1[$"
folgt via **2-2**: $(\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (\Omega \in]0|1[)$.

`4.1:` Aus `3` "$\Omega \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **162-2**: $(\Omega = 0) \vee (-1 + \Omega \in \mathbb{N})$.

`4.2:` Aus `3` "$\ldots \Omega \in]0|1[$"
folgt via **142-3**: $0 < \Omega < 1$.

`5:` Aus `4.2` "$0 < \Omega \ldots$"
folgt via **41-3**: $0 \neq \Omega$.

`6:` Aus `4.1` "$(\Omega = 0) \vee (-1 + \Omega \in \mathbb{N})$" und
aus `5` "$0 \neq \Omega$"
folgt: $-1 + \Omega \in \mathbb{N}$.

`7.1:` Aus `6` "$-1 + \Omega \in \mathbb{N}$"
folgt via **159-11**: $0 \leq -1 + \Omega$.

`7.2:` Aus `4.2` "$\ldots \Omega < 1$" und
aus **100-7** "$-1 \in \mathbb{R}$"
folgt via **VR**$<$: $-1 + \Omega < -1 + 1$.

`8.1:` Aus `7.1` "$0 \leq -1 + \Omega$"
folgt via **107-13**: $\neg(-1 + \Omega < 0)$.

`8.2:` $-1 + 1 \stackrel{\mathbf{FS}-+}{=} 1 - 1 \stackrel{\mathbf{102-10}}{=} 0$.

`9:` Aus `7.2` "$-1 + \Omega < -1 + 1$" und
aus `8.2` "$-1 + 1 = \ldots = 0$"
folgt: $-1 + \Omega < 0$.

`10:` Es gilt `9` "$-1 + \Omega < 0$".
Es gilt `8.1` "$\neg(-1 + \Omega < 0)$".
Ex falso quodlibet folgt: $\mathbb{N} \cap]0|1[= 0$.

`1.2.Fall` $\mathbb{N} \cap]0|1[= 0$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\mathbb{N} \cap]0|1[= 0$.

Beweis **162-3** `c)` `VS` gleich $(0 \le x) \wedge (\mathbb{N} \cap \,]x|1+x[\, = 0)$.

`1:` Es gilt: $(0 \ne \mathbb{N} \cap \,]1+x|2+x[) \vee (\mathbb{N} \cap \,]1+x|2+x[\, = 0)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $0 \ne \mathbb{N} \cap \,]1+x|2+x[$.

`2:` Aus `1.1.Fall`“$0 \ne \mathbb{N} \cap \,]1+x|2+x[$”
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in \mathbb{N} \cap \,]1+x|2+x[$.

`3:` Aus `2`“$\ldots \Omega \in \mathbb{N} \cap \,]1+x|2+x[$”
folgt via **2-2**: $(\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (\Omega \in \,]1+x|2+x[)$.

`4.1:` Aus `3`“$\Omega \in \mathbb{N} \ldots$”
folgt via **162-2**: $(\Omega = 0) \vee (-1+\Omega \in \mathbb{N})$.

`4.2:` Aus `3`“$\ldots \Omega \in \,]1+x|2+x[$”
folgt via **142-3**: $1+x < \Omega < 2+x$.

`5.1:` Aus **109-24**“$0 < 1$” und
aus `VS` gleich “$0 \le x$”
folgt via **FS**$\le +$: $0 < 1+x$.

`5.2:` Aus `4.2`“$1+x < \Omega \ldots$” und
aus **AAI**“$1 \in \mathbb{R}$”
folgt via **160-9**: $x < -1+\Omega$.

`5.3:` Aus `4.2`“$\ldots \Omega < 2+x$” und
aus **AAI**“$1 \in \mathbb{R}$”
folgt via **VR**$<$: $-1+\Omega < -1+(2+x)$.

`6.1:` Aus `5.1`“$0 < 1+x$” und
aus `4.2`“$1+x < \Omega$”
folgt via **107-8**: $0 < \Omega$.

`6.2:` $-1+(2+x) \stackrel{\mathbf{160-7}}{=} (2-1)+x \stackrel{\mathbf{109-26}}{=} 1+x$.

`7.1:` Aus `6.1`“$0 < \Omega$”
folgt via **41-3**: $0 \ne \Omega$.

`7.2:` Aus `5.3`“$-1+\Omega \le -1+(2+x)$” und
aus `6.2`“$-1+(2+x) = \ldots = 1+x$”
folgt: $-1+\Omega < 1+x$.

...

...

<u>Beweis</u> **162-3** `c)` `VS` gleich $(0 \leq x) \wedge (\mathbb{N} \cap]x|1+x[= 0)$.

...

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $0 \neq \mathbb{N} \cap]1+x|2+x[$.

...

`8.1:` Aus `5.2`"$x < -1+\Omega$" und
aus `7.2`"$-1+\Omega < 1+x$"
folgt via **142-3**: $-1+\Omega \in]x|1+x[$.

`8.2:` Aus `4.1`"$(\Omega = 0) \vee (-1+\Omega \in \mathbb{N})$" und
aus `7.1`"$0 \neq \Omega$"
folgt: $-1+\Omega \in \mathbb{N}$.

`9:` Aus `8.2`"$-1+\Omega \in \mathbb{N}$" und
aus `8.1`"$-1+\Omega \in]x|1+x[$"
folgt via **2-2**: $-1+\Omega \in \mathbb{N} \cap]x|1+x[$.

`10:` Aus `9`"$-1+\Omega \in \mathbb{N} \cap]x|1+x[$"
folgt via **0-20**: $0 \neq \mathbb{N} \cap]x|1+x[$.

`11:` Es gilt `10`"$0 \neq \mathbb{N} \cap]x|1+x[$".
Es gilt `VS` gleich "$\ldots \mathbb{N} \cap]x|1+x[= 0$".
Ex falso quodlibet folgt: $\mathbb{N} \cap]1+x|2+x[= 0$.

`1.2.Fall` $\mathbb{N} \cap]1+x|2+x[= 0$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\mathbb{N} \cap]1+x|2+x[= 0$.

$\square$

162-4. Die nun in die Essays eingebrachte Klasse wird beim Beweis des **Lücken-Satzes** $\mathbb{N}$ verwendet:

162-4(Definition)

$$\texttt{162.1}() = \{\omega : (0 \leq \omega) \wedge (\mathbb{N} \cap \,]\omega|1+\omega[\, = 0)\}.$$

`RECH.`**-Notation**

162-5. Im **LS$\mathbb{N}$: LückenSatz** $\mathbb{N}$ wird unter anderem fest gestellt, dass für natürliche n, m mit $n < m$ die Aussage $1 + n \leq m$ folgt:

162-5(Satz) **(LS$\mathbb{N}$: LückenSatz $\mathbb{N}$)**

a) *Aus* "$n \in \mathbb{N}$" *folgt* "$\mathbb{N} \cap]n|1+n[= 0$".

b) *Aus* "$n \in \mathbb{N}$" *folgt* "$\mathbb{N} \cap]-1+n|n[= 0$".

c) *Aus* "$n \in \mathbb{N}$" *und* "$m \in \mathbb{N}$" *und* "$n < m$" *folgt* "$1 + n \leq m$".

d) *Aus* "$n \in \mathbb{N}$" *und* "$m \in \mathbb{N}$" *und* "$n < m$" *folgt* "$n \leq -1 + m$".

e) *Aus* "$n \in \mathbb{N}$" *und* "$m \in \mathbb{N}$"
folgt "$n \leq -1 + m$" *oder* "$n = m$" *oder* "$1 + m \leq n$".

f) *Aus* "$n \in \mathbb{N}$" *und* "$n < x < 1 + n$" *folgt* "$x \notin \mathbb{N}$".

g) *Aus* "$n \in \mathbb{N}$" *und* "$-1 + n < x < n$" *folgt* "$x \notin \mathbb{N}$".

RECH.$\leq$-**Notation**.

Beweis **162-5**

162-4 $\{\omega : (0 \leq \omega) \wedge (\mathbb{N} \cap]\omega|1+\omega[= 0)\}$.

---

a) VS gleich $n \in \mathbb{N}$.

1.1: $\mathbb{N} \cap]0|1+0[\stackrel{\textbf{98-10}}{=} \mathbb{N} \cap]0|1[\stackrel{\textbf{162-3}}{=} 0$.

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\alpha \in \{\omega : (0 \leq \omega) \wedge (\mathbb{N} \cap]\omega|1+\omega[= 0)\}$.

2: Aus Thema1.2 "$\alpha \in \{\omega : (0 \leq \omega) \wedge (\mathbb{N} \cap]\omega|1+\omega[= 0)\}$"
folgt: $(0 \leq \alpha) \wedge (\mathbb{N} \cap]\alpha|1+\alpha[= 0)$.

3.1: Aus **109-24** "$0 < 1$" und
aus 2 "$0 \leq \alpha \ldots$"
folgt via **FS**$\leq +$: $0 < 1+\alpha$.

3.2: Aus 2 "$0 \leq \alpha \ldots$" und
aus 2 "$\ldots \mathbb{N} \cap]\alpha|1+\alpha[= 0$"
folgt via **162-3**: $\mathbb{N} \cap]1+\alpha|2+\alpha[= 0$.

4.1: Aus 3.1 "$0 < 1+\alpha$"
folgt via **41-3**: $0 \leq 1+\alpha$.

4.2: Aus 3.1 "$0 < 1+\alpha$"
folgt via **107-9**: $1+\alpha \in \mathbb{S}$.

4.3: $2+\alpha \stackrel{\textbf{109-25(Def)}}{=} (1+1)+\alpha \stackrel{\textbf{FSA}}{=} 1+(1+\alpha)$.

5.1: Aus 4.2 "$1+\alpha \in \mathbb{S}$"
folgt via **ElementAxiom**: $1+\alpha$ Menge.

5.2: Aus 4.3 "$2+\alpha = \ldots = 1+(1+\alpha)$" und
aus 3.2 "$\mathbb{N} \cap]1+\alpha|2+\alpha[= 0$"
folgt: $\mathbb{N} \cap]1+\alpha|1+(1+\alpha)[= 0$.

6: Aus 4.1 "$0 \leq 1+\alpha$" und
aus 5.2 "$\mathbb{N} \cap]1+\alpha|1+(1+\alpha)[= 0$"
folgt: $(0 \leq 1+\alpha) \wedge (\mathbb{N} \cap]1+\alpha|1+(1+\alpha)[= 0)$.

7: Aus 6 "$(0 \leq 1+\alpha) \wedge (\mathbb{N} \cap]1+\alpha|1+(1+\alpha)[= 0)$" und
aus 5.1 "$1+\alpha$ Menge"
folgt: $1+\alpha \in \{\omega : (0 \leq \omega) \wedge (\mathbb{N} \cap]\omega|1+\omega[= 0)\}$.

...

Beweis **162-5** `a)` `VS` gleich $n \in \mathbb{N}$.

...

Ergo `Thema1.2`:

`A1`	"$\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : (0 \le \omega) \wedge (\mathbb{N} \cap]\omega|1+\omega[= 0)\}) \Rightarrow (1+\alpha \in \{\omega : (0 \le \omega) \wedge (\mathbb{N} \cap]\omega|1+\omega[= 0)\})$"

`2:` Aus **107-6**"$0 \le 0$" und
aus `1.1`"$\mathbb{N} \cap]0|1+0[= \ldots = 0$"
folgt: $(0 \le 0) \wedge (\mathbb{N} \cap]0|1+0[= 0)$.

`3:` Aus `2`"$(0 \le 0) \wedge (\mathbb{N} \cap]0|1+0[= 0)$" und
aus $0\mathcal{U}$**Axiom**"0 Menge"
folgt: $0 \in \{\omega : (0 \le \omega) \wedge (\mathbb{N} \cap]\omega|1+\omega[= 0)\}$.

`4:` Aus `3`"$0 \in \{\omega : (0 \le \omega) \wedge (\mathbb{N} \cap]\omega|1+\omega[= 0)\}$" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : (0 \le \omega) \wedge (\mathbb{N} \cap]\omega|1+\omega[= 0)\})$
$\Rightarrow (1+\alpha \in \{\omega : (0 \le \omega) \wedge (\mathbb{N} \cap]\omega|1+\omega[= 0)\})$"
folgt via **159-1(Def)**: $\{\omega : (0 \le \omega) \wedge (\mathbb{N} \cap]\omega|1+\omega[= 0)\}$ induktiv.

`5:` Aus `4`"$\{\omega : (0 \le \omega) \wedge (\mathbb{N} \cap]\omega|1+\omega[= 0)\}$ induktiv"
folgt via **159-10**: $\mathbb{N} \subseteq \{\omega : (0 \le \omega) \wedge (\mathbb{N} \cap]\omega|1+\omega[= 0)\}$.

`6:` Aus `VS` gleich "$n \in \mathbb{N}$" und
aus `5`"$\mathbb{N} \subseteq \{\omega : (0 \le \omega) \wedge (\mathbb{N} \cap]\omega|1+\omega[= 0)\}$"
folgt via **0-4**: $n \in \{\omega : (0 \le \omega) \wedge (\mathbb{N} \cap]\omega|1+\omega[= 0)\}$.

`7:` Aus `6`"$n \in \{\omega : (0 \le \omega) \wedge (\mathbb{N} \cap]\omega|1+\omega[= 0)\}$"
folgt: $(0 \le n) \wedge (\mathbb{N} \cap]n|1+n[= 0)$.

`8:` Aus `7`
folgt: $\mathbb{N} \cap]n|1+n[= 0$.

Beweis **162-5** `b)` `VS` gleich $\qquad n \in \mathbb{N}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$n \in \mathbb{N}$"
folgt via **162-2**: $\qquad (n = 0) \vee (-1 + n \in \mathbb{N})$.

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

$\boxed{\texttt{1.1.Fall}}$ $\qquad n = 0$.

`2:` Aus **114-11** "$-1 + 0 = -1$" und
aus `1.1.Fall` "$n = 0$"
folgt: $\qquad -1 + n = -1$.

`3:` Aus `2` "$-1 + n = -1$"
folgt: $\qquad]-1 + n|n[=]-1|n[$.

`4:` Aus `3` "$]-1 + n|n[=]-1|n[$" und
aus `1.1.Fall` "$n = 0$"
folgt: $\qquad]-1 + n|n[=]-1|0[$.

`5:` Aus **162-3** "$\mathbb{N} \cap]-1|0[= 0$" und
aus `4` "$]-1 + n|n[=]-1|0[$"
folgt: $\qquad \mathbb{N} \cap]-1 + n|n[= 0$.

$\boxed{\texttt{1.2.Fall}}$ $\qquad -1 + n \in \mathbb{N}$.

`2:` Aus `1.2.Fall` "$-1 + n \in \mathbb{N}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$\qquad \mathbb{N} \cap]-1 + n|1 + (-1 + n)[= 0$.

`3:` Aus `VS` gleich "$n \in \mathbb{N}$"
folgt via **159-11**: $\qquad n$ Zahl.

`4:` Aus `3` "n Zahl"
folgt via **FSA**0: $\qquad 0 + n = n$.

`5:` $$1 + (-1 + n) \overset{\textbf{160-7}}{=} (1 - 1) + n \overset{\textbf{102-10}}{=} 0 + n \overset{4}{=} n.$$

`6:` Aus `2` "$\mathbb{N} \cap]-1 + n|1 + (-1 + n)[= 0$" und
aus `5` "$1 + (-1 + n) = \ldots = n$"
folgt: $\qquad \mathbb{N} \cap]-1 + n|n[= 0$.

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In beiden Fällen gilt: $\qquad \mathbb{N} \cap]-1 + n|n[= 0$.

Beweis **162-5** `c)` `VS` gleich $(n \in \mathbb{N}) \wedge (m \in \mathbb{N}) \wedge (n < m)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$n \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **159-10**: $1 + n \in \mathbb{N}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots m \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **159-11**: $m \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `1.1`"$1 + n \in \mathbb{N}$"
folgt via **159-11**: $1 + n \in \mathbb{S}$.

`3:` Aus `2`"$1 + n \in \mathbb{S}$" und
aus `1.2`"$m \in \mathbb{S}$"
folgt via **107-14**: $(m < 1 + n) \vee (1 + n \leq m)$.

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` $m < 1 + n$.

`4.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots n < m$" und
aus `3.1.Fall`"$m < 1 + n$"
folgt via **142-3**: $m \in \,]n|1 + n[$.

`4.2:` Aus `VS` gleich "$n \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\mathbb{N} \cap \,]n|1 + n[\, = 0$.

`5:` Aus `VS` gleich "$\ldots m \in \mathbb{N} \ldots$" und
aus `4.1`"$m \in \,]n|1 + n[$"
folgt via **2-2**: $m \in \mathbb{N} \cap \,]n|1 + n[$.

`6:` Aus `5`"$m \in \mathbb{N} \cap \,]n|1 + n[$"
folgt via **0-20**: $0 \neq \mathbb{N} \cap \,]n|1 + n[$.

`7:` Es gilt `6`"$0 \neq \mathbb{N} \cap \,]n|1 + n[$".
Es gilt `4.2`"$\mathbb{N} \cap \,]n|1 + n[\, = 0$".
Ex falso quodlibet folgt: $1 + n \leq m$.

`3.2.Fall` $1 + n \leq m$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $1 + n \leq m$.

Beweis **162-5** `d)` `VS` gleich $(n \in \mathbb{N}) \wedge (m \in \mathbb{N}) \wedge (n < m)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$n \in \mathbb{N} \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots m \in \mathbb{N} \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots n < m$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $1 + n \leq m$.

`2:` Aus `1`"$1 + n \leq m$" und
aus **AAI**"$1 \in \mathbb{R}$"
folgt via **106-8**: $n \leq -1 + m$.

Beweis **162-5** `e)` `VS` gleich $(n \in \mathbb{N}) \wedge (m \in \mathbb{N})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$n \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **159-11**: $n \in \mathbb{S}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots m \in \mathbb{N}$"
folgt via **159-11**: $m \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `1.1`"$n \in \mathbb{S}$" und
aus `1.2`"$m \in \mathbb{S}$"
folgt via **107-14**: $(n < m) \vee (n = m) \vee (m < n)$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $n < m$.

`3:` Aus `VS` gleich "$n \in \mathbb{N} \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots m \in \mathbb{N}$" und
aus `2.1.Fall`"$n < m$"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $n \leq -1 + m$.

`4:` Aus `3`
folgt: $(n \leq -1 + m) \vee (n = m) \vee (1 + m \leq n)$.

`2.2.Fall` $n = m$.

Aus `2.2.Fall`
folgt: $(n \leq -1 + m) \vee (n = m) \vee (1 + m \leq n)$.

`2.3.Fall` $m < n$.

`3:` Aus `VS` gleich "$\ldots m \in \mathbb{N}$",
aus `VS` gleich "$n \in \mathbb{N} \ldots$" und
aus `2.3.Fall`"$m < n$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $1 + m \leq n$.

`4:` Aus `3`
folgt: $(n \leq -1 + m) \vee (n = m) \vee (1 + m \leq n)$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt:

$$(n \leq -1 + m) \vee (n = m) \vee (1 + m \leq n).$$

<u>Beweis</u> **162-5** `f)` `VS` gleich $(n \in \mathbb{N}) \wedge (n < x < 1+n)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots n < x < 1+n$"
folgt via **142-3**: $x \in \,]n|1+n[$.

`2:` Aus `VS` gleich "$n \in \mathbb{N}\ldots$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\mathbb{N} \cap \,]n|1+n[\, = 0$.

`3:` Aus 2"$\mathbb{N} \cap \,]n|1+n[\, = 0$" und
aus `1`"$x \in \,]n|1+n[$"
folgt via **161-1**: $x \notin \mathbb{N}$.

`g)` `VS` gleich $(n \in \mathbb{N}) \wedge (-1+n < x < n)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots -1+n < x < n$"
folgt via **142-3**: $x \in \,]-1+n|n[$.

`2:` Aus `VS` gleich "$n \in \mathbb{N}\ldots$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $\mathbb{N} \cap \,]-1+n|n[\, = 0$.

`3:` Aus 2"$\mathbb{N} \cap \,]-1+n|n[\, = 0$" und
aus `1`"$x \in \,]-1+n|n[$"
folgt via **161-1**: $x \notin \mathbb{N}$.

□

162-6. Für späteren Einsatz werden nun einige Konsequenzen aus dem **Lücken-Satz** $\mathbb{N}$ gezogen:

<u>**162-6(Satz)**</u>

a) *Aus* "$n \in \mathbb{N}$" *und* "$m \in \mathbb{N}$" *und* "$n < 1 + m$" *folgt* "$n \leq m$".

b) *Aus* "$n \in \mathbb{N}$" *und* "$m \in \mathbb{N}$" *und* "$n \leq m$"
folgt "$n = m$" *oder* "$n \leq -1 + m$".

c) *Aus* "$n \in \mathbb{N}$" *und* "$m \in \mathbb{N}$" *und* "$-1 + n < m$" *folgt* "$n \leq m$".

d) *Aus* "$n \in \mathbb{N}$" *und* "$m \in \mathbb{N}$" *und* "$n \leq m$"
folgt "$n = m$" *oder* "$1 + n \leq m$".

<u>RECH.$\leq$-**Notation**</u>.

<u>Beweis **162-6**</u> a) VS gleich $(n \in \mathbb{N}) \wedge (m \in \mathbb{N}) \wedge (n < 1 + m)$.

1: Aus VS gleich "$\ldots m \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **159-10**: $1 + m \in \mathbb{N}$.

2: Aus VS gleich "$n \in \mathbb{N} \ldots$",
aus 1"$1 + m \in \mathbb{N}$" und
aus VS gleich "$n < 1 + m$"
folgt via **LS**$\mathbb{N}$: $1 + n \leq 1 + m$.

3: Aus 2"$1 + n \leq 1 + m$" und
aus **AAI**"$1 \in \mathbb{R}$"
folgt via **VR**$\leq$: $n \leq m$.

Beweis **162-6** `b)` `VS` gleich $(n\in\mathbb{N})\wedge(m\in\mathbb{N})\wedge(n\le m)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots n\le m$"
folgt via **41-5**: $(n=m)\vee(n<m)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $n=m$.

`1.2.Fall` $n<m$.

Aus `VS` gleich "$n\in\mathbb{N}\ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots m\in\mathbb{N}\ldots$" und
aus `1.2.Fall` "$n<m$"
folgt via **LS**$\mathbb{N}$: $n\le -1+m$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $(n=m)\vee(n\le -1+m)$.

`c)` `VS` gleich $(n\in\mathbb{N})\wedge(m\in\mathbb{N})\wedge(-1+n<m)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$n\in\mathbb{N}\ldots$"
folgt via **162-2**: $(n=0)\vee(-1+n\in\mathbb{N})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $n=0$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots m\in\mathbb{N}\ldots$"
folgt via **159-11**: $0\le m$.

`3:` Aus `1.1.Fall` "$n=0$" und
aus 2 "$0\le m$"
folgt: $n\le m$.

`1.2.Fall` $-1+n\in\mathbb{N}$.

`2:` Aus `1.2.Fall` "$-1+n\in\mathbb{N}$",
aus `VS` gleich "$\ldots m\in\mathbb{N}\ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots -1+n<m$"
folgt via **LS**$\mathbb{N}$: $-1+n\le -1+m$.

`3:` Aus 2 "$-1+n\le -1+m$" und
aus **100-7** "$-1\in\mathbb{R}$"
folgt via **VR**$\le$: $n\le m$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $n\le m$.

Beweis **162-6** `d)` `VS` gleich $(n \in \mathbb{N}) \wedge (m \in \mathbb{N}) \wedge (n \leq m)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots n \leq m$"
folgt via **41-5**: $(n = m) \vee (n < m)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $n = m$.

`1.2.Fall` $n < m$.

Aus `VS` gleich "$n \in \mathbb{N} \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots m \in \mathbb{N} \ldots$" und
aus `1.2.Fall` "$n < m$"
folgt via **LS**$\mathbb{N}$: $1 + n \leq m$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $(n = m) \vee (1 + n \leq m)$.

$\square$

Falls $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \leq m$, dann $m - n \in \mathbb{N}$.

Ersterstellung: 30/04/12 **Letzte Änderung: 30/04/12**

163-1. Zur Vorbereitung des Beweises von **163-2** wird die Klasse $\mathsf{163.0}(x)$ in die Esssays eingeführt:

163-1(Definition)

$$\mathsf{163.0}(x) = \{\omega : (\omega < x) \vee (\exists\Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (\omega = x + \Omega))\}.$$

`RECH.`$\leq$`.`-Notation

163-2. Nun wird unter anderem gezeigt, dass für $n, m \in \mathbb{N}$ und $n \leq m$ die Differenz $m - n$ eine natürliche Zahl ist:

163-2(Satz)

a) *Aus* "$n \in \mathbb{N}$" *und* "$m \in \mathbb{N}$"
folgt "$m < n$" *oder* "$\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (m = n + \Omega)$".

b) *Aus* "$n \in \mathbb{N}$" *und* "$m \in \mathbb{N}$" *und* "$n \leq m$"
folgt "$\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (m = n + \Omega)$".

c) *Aus* "$n \in \mathbb{N}$" *und* "$m \in \mathbb{N}$" *und* "$n \leq m$" *folgt* "$m - n \in \mathbb{N}$".

`RECH.`$\leq$-**Notation**.

Beweis **163-2**

163-1 $\{\omega : (\omega < n) \vee (\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (\omega = n + \Omega))\}$.

...

Beweis **163-2** `a)` `VS` gleich $(n \in \mathbb{N}) \wedge (m \in \mathbb{N})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$n \in \mathbb{N} \dots$"
folgt via **162-2**: $(n = 0) \vee (0 < n)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.1.Fall` $n = 0$.

`2:` Aus `1.1.1.Fall` "$n = 0$" und
aus **98-10** "$0 + 0 = 0$"
folgt: $n + 0 = 0$.

`3.1:` Aus 2
folgt: $0 = n + 0$.

`3.2:` Es gilt: $\exists \Omega : \Omega = 0$.

`4.1:` Aus `3.1` "$0 = n + 0$" und
aus `3.2` "$\dots \Omega = 0$"
folgt: $0 = n + \Omega$.

`4.2:` Aus **159-10** "$0 \in \mathbb{N}$" und
aus `3.2` "$\dots \Omega = 0$"
folgt: $\Omega \in \mathbb{N}$.

`5:` Aus `3.2` "$\exists \Omega \dots$",
aus `4.2` "$\Omega \in \mathbb{N}$" und
aus `4.1` "$0 = n + \Omega$"
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (0 = n + \Omega)$.

`6:` Aus 5
folgt: $(0 < n) \vee (\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (0 = n + \Omega))$.

`7:` Aus 6 "$(0 < n) \vee (\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (0 = n + \Omega)$" und
aus $0\mathcal{U}$**-Axiom** "0 Menge"
folgt: $0 \in \{\omega : (\omega < n) \vee (\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (\omega = n + \Omega))\}$.

`1.1.2.Fall` $0 < n$

`2:` Aus `1.1.2.Fall`
folgt: $(0 < n) \vee (\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (0 = n + \Omega))$.

`3:` Aus 6 "$(0 < n) \vee (\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (0 = n + \Omega)$" und
aus $0\mathcal{U}$**-Axiom** "0 Menge"
folgt: $0 \in \{\omega : (\omega < n) \vee (\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (\omega = n + \Omega))\}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

`A1`	"$0 \in \{\omega : (\omega < n) \vee (\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (\omega = n + \Omega))\}$"

Beweis **163-2** `a)` `VS` gleich $(n \in \mathbb{N}) \wedge (m \in \mathbb{N})$.

...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\alpha \in \mathbb{N} \cap \{\omega : (\omega < n) \vee (\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (\omega = n + \Omega))\}$.

`2:` Aus `Thema1.2`“$\alpha \in \mathbb{N} \cap \{\omega : (\omega < n) \vee (\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (\omega = n + \Omega))\}$”
folgt via **2-2**: $(\alpha \in \mathbb{N}) \wedge (\alpha \in \{\omega : (\omega < n) \vee (\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (\omega = n + \Omega))\})$.

`3:` Aus 2“$\ldots \alpha \in \{\omega : (\omega < n) \vee (\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (\omega = n + \Omega))\}$”
folgt: $(\alpha < n) \vee (\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (\alpha = n + \Omega))\}$.

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

$\boxed{\texttt{3.1.Fall}}$ $\alpha < n$.

`4:` Aus 2“$\alpha \in \mathbb{N} \ldots$”,
aus `VS` gleich “$n \in \mathbb{N} \ldots$” und
aus `3.1.Fall`“$\alpha < n$”
folgt via **LS**$\mathbb{N}$: $1 + \alpha \leq n$.

`5:` Aus 4“$1 + \alpha \leq n$”
folgt via **41-5**: $(1 + \alpha < n) \vee (1 + \alpha = n)$.

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

$\boxed{\texttt{5.1.Fall}}$ $1 + \alpha < n$.

Aus `5.1.Fall`
folgt: $(1 + \alpha < n) \vee (\exists \Psi : (\Psi \in \mathbb{N}) \wedge (1 + \alpha = n + \Psi))$.

...

...

...

Beweis **163-2** `a)` `VS` gleich $(n \in \mathbb{N}) \wedge (m \in \mathbb{N})$.

...

`Thema1.2` $\alpha \in \mathbb{N} \cap \{\omega : (\omega < n) \vee (\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (\omega = n + \Omega))\}$.

...

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` $\alpha < n$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`5.2.Fall` $1 + \alpha = n$.

`6:` Aus `VS` gleich "$n \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **159-11**: n Zahl.

`7:` Aus `6`"n Zahl"
folgt via **FSA**0: $n + 0 = n$.

`8.1:` Es gilt: $\exists \Psi : \Psi = 0$.

`8.2:` Aus `5.2.Fall`"$1 + \alpha = n$" und
aus `7`"$n + 0 = n$"
folgt: $1 + \alpha = n + 0$.

`9.1:` Aus `8.1`"$\ldots \Psi = 0$" und
aus **159-10**"$0 \in \mathbb{N}$"
folgt: $\Psi \in \mathbb{N}$.

`9.2:` Aus `8.2`"$1 + \alpha = n + 0$" und
aus `8.1`"$\ldots \Psi = 0$"
folgt: $1 + \alpha = n + \Psi$.

`10:` Aus `8.1`"$\exists \Psi \ldots$",
aus `9.1`"$\Psi \in \mathbb{N}$" und
aus `9.2`"$1 + \alpha = n + \Psi$"
folgt: $\exists \Psi : (\Psi \in \mathbb{N}) \wedge (1 + \alpha = n + \Psi)$.

`11:` Aus `10`
folgt: $(1 + \alpha < n) \vee (\exists \Psi : (\Psi \in \mathbb{N}) \wedge (1 + \alpha = n + \Psi))$.

...

...

...

<u>Beweis</u> **163-2** `a)` `VS` gleich $(n \in \mathbb{N}) \wedge (m \in \mathbb{N})$.

...

`Thema1.2` $\alpha \in \mathbb{N} \cap \{\omega : (\omega < n) \vee (\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (\omega = n + \Omega))\}$.

...

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` $\alpha < n$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`Ende Fallunterscheidung`

In beiden Fällen gilt: $(1 + \alpha < n)$
$\vee (\exists \Psi : (\Psi \in \mathbb{N}) \wedge (1 + \alpha = n + \Psi))$.

...

...

Beweis **163-2** `a)` `VS` gleich $(n \in \mathbb{N}) \wedge (m \in \mathbb{N})$.

...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\alpha \in \mathbb{N} \cap \{\omega : (\omega < n) \vee (\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (\omega = n + \Omega))\}$.

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{3.2.Fall}}$ $\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (\alpha = n + \Omega)$.

`4.1:` Aus `3.2.Fall`"$\ldots \alpha = n + \Omega$"
folgt: $1 + \alpha = 1 + (n + \Omega)$.

`4.2:` Aus `3.2.Fall`"$\ldots \Omega \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **159-10**: $1 + \Omega \in \mathbb{N}$.

`5.1:`
$$1 + \alpha \stackrel{4.1}{=} 1 + (n + \Omega) \stackrel{\textbf{FSA}}{=} (1 + n) + \Omega \stackrel{\textbf{FSA}}{=} (n + 1) + \Omega \stackrel{\textbf{FSA}}{=} n + (1 + \Omega).$$

`5.2:` Es gilt: $\exists \Psi : \Psi = 1 + \Omega$.

`6.1:` Aus `5.2`"$\ldots \Psi = 1 + \Omega$" und
aus `4.2`"$1 + \Omega \in \mathbb{N}$"
folgt: $\Psi \in \mathbb{N}$.

`6.2:` Aus `5.1`"$1 + \alpha = \ldots = n + (1 + \Omega)$" und
aus `5.2.Fall`$\ldots \Psi = 1 + \Omega$
folgt: $1 + \alpha = n + \Psi$.

`7:` Aus `5.2`"$\exists \Psi \ldots$",
aus `6.1`"$\Psi \in \mathbb{N}$" und
aus `6.2`"$1 + \alpha = n + \Psi$"
folgt: $\exists \Psi : (\Psi \in \mathbb{N}) \wedge (1 + \alpha = n + \Psi)$.

`8:` Aus `7`
folgt: $(1 + \alpha < n) \vee (\exists \Psi : (\Psi \in \mathbb{N}) \wedge (1 + \alpha = n + \Psi))$.

...

...

Beweis **163-2** `a)` `VS` gleich $(n \in \mathbb{N}) \wedge (m \in \mathbb{N})$.

...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\alpha \in \mathbb{N} \cap \{\omega : (\omega < n) \vee (\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (\omega = n + \Omega))\}$.

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In beiden Fällen gilt:

$\boxed{\texttt{A2} \mid \text{“} (1 + \alpha < n) \vee (\exists \Psi : (\Psi \in \mathbb{N}) \wedge (1 + \alpha = n + \Psi)) \text{”}}$

`4:` Aus 2“$\alpha \in \mathbb{N} \ldots$”
folgt via **159-10**: $1 + \alpha \in \mathbb{N}$.

`5:` Aus 4“$1 + \alpha \in \mathbb{N}$”
folgt via **ElementAxiom**: $1 + \alpha$ Menge.

`6:` Aus `A2` gleich “$(1 + \alpha < n)$
$\vee (\exists \Psi : (\Psi \in \mathbb{N}) \wedge (1 + \alpha = n + \Psi))$” und
aus `5`“$1 + \alpha$ Menge”
folgt:
$1 + \alpha \in \{\omega : (\omega < n) \vee (\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (\omega = n + \Omega))\}$.

Ergo `Thema1.2`:

$$\boxed{\begin{array}{l|l} \texttt{A3} & \text{“}\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N} \cap \{\omega : (\omega < n) \vee (\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (\omega = n + \Omega))\}) \\ & \quad \Rightarrow (1 + \alpha \in \{\omega : (\omega < n) \vee (\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (\omega = n + \Omega))\})\text{”} \end{array}}$$

`2:` Aus `A1` gleich “$0 \in \{\omega : (\omega < n) \vee (\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (\omega = n + \Omega))\}$” und
aus `A3` gleich
“$\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N} \cap \{\omega : (\omega < n) \vee (\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (\omega = n + \Omega))\})$
$\Rightarrow (1 + \alpha \in \{\omega : (\omega < n) \vee (\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (\omega = n + \Omega))\})$”
folgt via **159-10**: $\mathbb{N} \subseteq \{\omega : (\omega < n) \vee (\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (\omega = n + \Omega))\}$.

`3:` Aus `VS` gleich “$\ldots m \in \mathbb{N}$” und
aus 2“$\mathbb{N} \subseteq \{\omega : (\omega < n) \vee (\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (\omega = n + \Omega))\}$”
folgt: $m \in \{\omega : (\omega < n) \vee (\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (\omega = n + \Omega))\}$.

`4:` Aus 3“$m \in \{\omega : (\omega < n) \vee (\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (\omega = n + \Omega))\}$”
folgt: $(m < n) \vee (\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (m = n + \Omega))$.

Beweis **163-2** `bc)` `VS` gleich $(n \in \mathbb{N}) \wedge (m \in \mathbb{N}) \wedge (n \leq m)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$n \in \mathbb{N} \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots m \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$$(m < n) \vee (\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (m = n + \Omega)).$$

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots n \leq m$"
folgt via **107-13**: $\neg(m < n)$.

`2.b):` Aus `1.1`"$(m < n) \vee (\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (m = n + \Omega))$" und
aus `1.2`"$\neg(m < n)$"
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (m = n + \Omega)$.

`3.1:` Aus `VS` gleich "$n \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **159-11**: $n \in \mathbb{C}$.

`3.2:` Aus `2.b)`"$\ldots \Omega \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **159-11**: Ω Zahl.

`3.3:` Aus `2.b)`
folgt: $m = n + \Omega$.

`4:` Aus `3.2`"$n \in \mathbb{C}$" und
aus `3.2`"Ω Zahl"
folgt via **160-3**: $-n + (n + \Omega) = \Omega$.

`5:`
$$m - n \stackrel{3.3}{=} (n + \Omega) - n \stackrel{\mathbf{FS}-+}{=} -n + (n + \Omega) \stackrel{4}{=} \Omega.$$

`6.c):` Aus `5`"$m - n = \ldots = \Omega$" und
aus `2.b)`"$\ldots \Omega \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt: $m - n \in \mathbb{N}$.

$\square$

Menge der ganzen Zahlen. $\mathbb{Z}$.
Summe, Differenz und Produkt ganzer Zahlen sind ganze Zahlen.

Ersterstellung: 01/05/12 **Letzte Änderung: 12/05/12**

164-1. Hiermit wird $\mathbb{Z}$ in die Essays eingeführt:

164-1(Definition)

$\mathbb{Z}$

$$= \mathsf{164.0}() = \{\omega : (\exists\Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge ((\omega = \Omega) \vee (\omega = -\Omega)))\}.$$

`RECH`-**Notation**.

164-2. Traditioneller Weise handelt es sich bei $\mathbb{Z}$ um die **Menge der ganzen Zahlen**. Dass es sich bei $\mathbb{Z}$ in der Tat um eine Menge handelt, wird in **164-4** thematisiert:

164-2(Definition)

"$\mathfrak{C}$ **Menge der ganzen Zahlen**" genau dann, wenn gilt:

$$\mathfrak{C} = \mathbb{Z}.$$

164-3. Klarer Weise handelt es sich bei $\mathbb{Z}$ um die **Menge der ganzen Zahlen** und wenn $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ jeweils **Menge der ganzen Zahlen** sind, dann ist $\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$:

<u>**164-3(Satz)**</u>

a) *$\mathbb{Z}$ Menge der ganzen Zahlen.*

b) *Aus "$\mathfrak{C}$ Menge der ganzen Zahlen"*
und "$\mathfrak{D}$ Menge der ganzen Zahlen"

folgt $\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$.

<u>Beweis **164-3**</u> `a)`

Aus "$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$"
folgt via **164-1(Def)**: $\mathbb{Z}$ Menge der ganzen Zahlen.

`b)` `VS` gleich ($\mathfrak{C}$ Menge der ganzen Zahlen) $\wedge$ ($\mathfrak{D}$ Menge der ganzen Zahlen).

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\mathfrak{C}$ Menge der ganzen Zahlen…"
folgt via **164-2(Def)**: $\mathfrak{C} = \mathbb{Z}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "…$\mathfrak{D}$ Menge der ganzen Zahlen"
folgt via **164-2(Def)**: $\mathfrak{D} = \mathbb{Z}$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$.

$\square$

164-4. Bei $\mathbb{Z}$ handelt es sich um eine $\mathbb{N}$ umfassende Menge, die TeilKlasse von $\mathbb{R}, \mathbb{S}, \mathbb{T}, \mathbb{C}, \mathbb{B}, \mathbb{A}$ ist. Die Beweis-Reihenfolge ist `b) - c) - a) - d) - e) - f) - g) - h)`:

164-4(Satz)

a) $\mathbb{Z}$ *Menge.*

b) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$.

c) $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$.

d) $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{S}$.

e) $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{T}$.

f) $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{C}$.

g) $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{B}$.

h) $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{A}$.

Beweis **164-4**

164-1(Def) $\{\omega : (\exists\Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge ((\omega = \Omega) \vee (\omega = -\Omega)))\}$.

---

b)

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in \mathbb{N}$.

`2.1`: Es gilt: $\exists\Omega : \Omega = \alpha$.

`2.2`: Aus `Thema1`“$\alpha \in \mathbb{N}$”
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`3.1`: Aus `2.1`“$\ldots\Omega = \alpha$” und
aus `Thema1`“$\alpha \in \mathbb{N}$”
folgt: $\Omega \in \mathbb{N}$.

`3.2`: Aus `2.1`“$\ldots\Omega = \alpha$”
folgt: $\alpha = \Omega$.

`4`: Aus `3.2`
folgt: $(\alpha = \Omega) \vee (\alpha = -\Omega)$.

`5`: Aus `2.1`“$\exists\Omega\ldots$”,
aus `3.1`“$\Omega \in \mathbb{N}$” und
aus `4`“$(\alpha = \Omega) \vee (\alpha = -\Omega)$”
folgt: $\exists\Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge ((\alpha = \Omega) \vee (\alpha = -\Omega))$.

`6`: Aus `5`“$\exists\Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge ((\alpha = \Omega) \vee (\alpha = -\Omega))$” und
aus `2.2`“α Menge”
folgt: $\alpha \in \{\omega : (\exists\Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge ((\omega = \Omega) \vee (\omega = -\Omega)))\}$.

`7`: Aus `6`“$\alpha \in \{\omega : (\exists\Omega : (\Omega \in \mathbb{N})$
$\wedge((\omega = \Omega) \vee (\omega = -\Omega)))$” und
aus “$\{\omega : (\exists\Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge ((\omega = \Omega) \vee (\omega = -\Omega)))\} = \mathbb{Z}$”
folgt: $\alpha \in \mathbb{Z}$.

Ergo `Thema1`: $\forall\alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\alpha \in \mathbb{Z})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$.

Beweis **164-4** `c)`

`Thema1` $\alpha \in \mathbb{Z}$.

1: Aus `Thema1` "$\alpha \in \mathbb{Z}$" und
aus "$\{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge ((\omega = \Omega) \vee (\omega = -\Omega)))\} = \mathbb{Z}$"
folgt: $\alpha \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge ((\omega = \Omega) \vee (\omega = -\Omega)))\}$.

2: Aus 1 "$\alpha \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge ((\omega = \Omega) \vee (\omega = -\Omega)))\}$"
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge ((\alpha = \Omega) \vee (\alpha = -\Omega)))\}$.

3: Aus 2 "$\ldots \Omega \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **159-11**: $\Omega \in \mathbb{R}$.

4: Aus 3 "$\Omega \in \mathbb{R}$"
folgt via **117-4**: $-\Omega \in \mathbb{R}$.

5: Aus 2
folgt: $(\alpha = \Omega) \vee (\alpha = -\Omega)$.

`Fallunterscheidung`

`5.1.Fall` $\alpha = \Omega$.

Aus `5.1.Fall` "$\alpha = \Omega$" und
aus 3 "$\Omega \in \mathbb{R}$"
folgt: $\alpha \in \mathbb{R}$.

`5.2.Fall` $\alpha = -\Omega$.

Aus `5.2.Fall` "$\alpha = -\Omega$" und
aus 4 "$-\Omega \in \mathbb{R}$"
folgt: $\alpha \in \mathbb{R}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\alpha \in \mathbb{R}$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{Z}) \Rightarrow (\alpha \in \mathbb{R})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$.

<u>Beweis</u> **164-4** `adefgh)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `c)` gilt: $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$.

`2.a):` Aus `1` "$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$" und
aus **95-3** "$\mathbb{R}$ Menge"
folgt via **TeilMengenAxiom**: $\mathbb{Z}$ Menge.

`2.d):` Aus `1` "$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$" und
aus $\subseteq$**SZ** "$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{S}$"
folgt via **0-6**: $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{S}$.

`2.e):` Aus `1` "$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$" und
aus $\subseteq$**SZ** "$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{T}$"
folgt via **0-6**: $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{T}$.

`2.f):` Aus `1` "$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$" und
aus $\subseteq$**SZ** "$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$"
folgt via **0-6**: $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{C}$.

`2.g):` Aus `1` "$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$" und
aus $\subseteq$**SZ** "$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{B}$"
folgt via **0-6**: $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{B}$.

`2.h):` Aus `1` "$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$" und
aus $\subseteq$**SZ** "$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{A}$"
folgt via **0-6**: $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{A}$.

$\square$

164-5. Jede ganze Zahl ist reelle, sreelle, treelle, komplexe, bkomplexe Zahl und Zahl:

164-5(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $l \in \mathbb{Z}$.

Dann folgt:

a) $l \in \mathbb{R}$.

b) $l \in \mathbb{S}$.

c) $l \in \mathbb{T}$.

d) $l \in \mathbb{C}$.

e) $l \in \mathbb{B}$.

f) l *Zahl.*

Beweis **164-5** `VS` gleich $l \in \mathbb{Z}$.

`1.a):` Aus `VS` gleich "$l \in \mathbb{Z}$" und
aus **164-4**"$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$"
folgt via **0-4**: $l \in \mathbb{R}$.

`1.b):` Aus `VS` gleich "$l \in \mathbb{Z}$" und
aus **164-4**"$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{S}$"
folgt via **0-4**: $l \in \mathbb{S}$.

`1.c):` Aus `VS` gleich "$l \in \mathbb{Z}$" und
aus **164-4**"$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{T}$"
folgt via **0-4**: $l \in \mathbb{T}$.

`1.d):` Aus `VS` gleich "$l \in \mathbb{Z}$" und
aus **164-4**"$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{C}$"
folgt via **0-4**: $l \in \mathbb{C}$.

`1.e):` Aus `VS` gleich "$l \in \mathbb{Z}$" und
aus **164-4**"$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{B}$"
folgt via **0-4**: $l \in \mathbb{B}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$l \in \mathbb{Z}$" und
aus **164-4**"$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{A}$"
folgt via **0-4**: $l \in \mathbb{A}$.

`2:` Aus `1.1`"$l \in \mathbb{A}$"
folgt via **95-4(Def)**: l Zahl.

$\square$

164-6. Nun werden $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ bezüglich ihrer Elemente gegenüber gestellt. Die Beweis-Reihenfolge ist `b) - a) - c)`:

164-6(Satz)

`a)` *"$n \in \mathbb{N}$" genau dann, wenn "$n \in \mathbb{Z}$" und "$0 \leq n$".*

`b)` *"$l \in \mathbb{Z}$" genau dann, wenn "$(l \in \mathbb{N}) \vee (-l \in \mathbb{N})$".*

`c)` *"$-l \in \mathbb{Z}$" genau dann, wenn "$(l \in \mathbb{N}) \vee (-l \in \mathbb{N})$"*

`RECH.`$\leq$**-Notation**.

Beweis **164-6**

164-1(Def) $\{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge ((\omega = \Omega) \vee (\omega = -\Omega)))\}$.

<u>Beweis</u> **164-6** `b)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $\qquad l \in \mathbb{Z}.$

`1:` Aus `VS` gleich "$l \in \mathbb{Z} \ldots$" und
aus "$\mathbb{Z} = \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge ((\omega = \Omega) \vee (\omega = -\Omega)))\}$"
folgt: $\qquad l \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge ((\omega = \Omega) \vee (\omega = -\Omega)))\}.$

`2:` Aus `1`
folgt: $\qquad \exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge ((l = \Omega) \vee (l = -\Omega)).$

`3:` Aus `2`
folgt: $\qquad (l = \Omega) \vee (l = -\Omega).$

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` $\qquad l = \Omega.$

`4:` Aus `3.2.Fall`"$l = \Omega$" und
aus `2`"$\ldots \Omega \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt: $\qquad l \in \mathbb{N}.$

`5:` Aus `4`
folgt: $\qquad (l \in \mathbb{N}) \vee (-l \in \mathbb{N}).$

`3.2.Fall` $\qquad l = -\Omega.$

`4:` Aus `2`"$\ldots \Omega \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **159-11**: $\qquad \Omega$ Zahl.

`5:` Aus `4`"Ω Zahl"
folgt via **FS**$--$: $\qquad -(-\Omega) = \Omega.$

`6:` Aus `3.2.Fall`"$l = -\Omega$" und
aus `5`"$-(-\Omega) = \Omega$"
folgt: $\qquad -l = \Omega.$

`7:` Aus `6`"$-l = \Omega$" und
aus `2`"$\ldots \Omega \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt: $\qquad -l \in \mathbb{N}.$

`8:` Aus `7`
folgt: $\qquad (l \in \mathbb{N}) \vee (-l \in \mathbb{N}).$

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\qquad (l \in \mathbb{N}) \vee (-l \in \mathbb{N}).$

Beweis **164-6** `b)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $(l \in \mathbb{N}) \vee (-l \in \mathbb{N})$.

`1:` Nach `VS` gilt: $(l \in \mathbb{N}) \vee (-l \in \mathbb{N})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $l \in \mathbb{N}$.

Aus `1.1.Fall` "$l \in \mathbb{N}$" und
aus **164-4** "$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$"
folgt via **0-4**: $l \in \mathbb{Z}$.

`1.2.Fall` $-l \in \mathbb{N}$.

`2:` Aus `1.2.Fall` "$-l \in \mathbb{N}$"
folgt via **ElementAxiom**: $-l$ Menge.

`3:` Aus `2` "$-l$ Menge"
folgt via **96-11**: l Zahl.

`4:` Aus `3` "l Zahl"
folgt via **95-6**: l Menge.

`5:` Aus `VS` gleich "$(l \in \mathbb{N}) \vee (-l \in \mathbb{N})$" und
aus `4` "l Menge"
folgt: $l \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge ((\omega = \Omega) \vee (\omega = -\Omega)))\}$.

`6:` Aus `5` "$l \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge ((\omega = \Omega) \vee (\omega = -\Omega)))\}$" und
aus "$\{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge ((\omega = \Omega) \vee (\omega = -\Omega)))\} = \mathbb{Z}$"
folgt: $l \in \mathbb{Z}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $l \in \mathbb{Z}$.

Beweis **164-6** `a)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $n \in \mathbb{N}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$n \in \mathbb{N}$" und
aus **164-4**"$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$"
folgt via **0-4**: $n \in \mathbb{Z}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$n \in \mathbb{N}$"
folgt via **159-11**: $0 \leq n$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $(n \in \mathbb{Z}) \wedge (0 \leq n)$.

`a)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $(n \in \mathbb{Z}) \wedge (0 \leq n)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$n \in \mathbb{Z} \ldots$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $(n \in \mathbb{N}) \vee (-n \in \mathbb{N})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $n \in \mathbb{N}$.

Aus `1.1.Fall`
folgt: $n \in \mathbb{N}$.

`1.2.Fall` $-n \in \mathbb{N}$.

`2:` Aus `1.2.Fall`"$-n \in \mathbb{N}$"
folgt via **159-11**: $0 \leq -n$.

`3:` Aus `VS` gleich "$\ldots 0 \leq n$" und
aus `2`"$0 \leq -n$"
folgt via **109-18**: $n = 0$.

`4:` Aus `3`"$n = 0$" und
aus **159-10**"$0 \in \mathbb{N}$"
folgt: $n \in \mathbb{N}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $n \in \mathbb{N}$.

Beweis **164-6** `c)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $-l \in \mathbb{Z}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$-l \in \mathbb{Z}$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $(-l \in \mathbb{N}) \vee (-(-l) \in \mathbb{N})$.

`1.2:` Via **159-12** gilt: $(l \in \mathbb{N}) \Leftrightarrow (-(-l) \in \mathbb{N})$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $(-l \in \mathbb{N}) \vee (l \in \mathbb{N})$.

`3:` Aus `2`
folgt: $(l \in \mathbb{N}) \vee (-l \in \mathbb{N})$.

`c)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $(l \in \mathbb{N}) \vee (-l \in \mathbb{N})$.

`1:` Via **159-12** gilt: $(l \in \mathbb{N}) \Leftrightarrow (-(-l) \in \mathbb{N})$.

`2:` Aus `VS` gleich "$(l \in \mathbb{N}) \vee (-l \in \mathbb{N})$" und
aus `1`"$(l \in \mathbb{N}) \Leftrightarrow (-(-l) \in \mathbb{N})$"
folgt: $(-(-l) \in \mathbb{N}) \vee (-l \in \mathbb{N})$.

`3:` Aus `2`
folgt: $(-l \in \mathbb{N}) \vee (-(-l) \in \mathbb{N})$.

`4:` Aus `3`
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $-l \in \mathbb{Z}$.

$\square$

164-7. Nun wird die Zugehörigkeit zu $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ thematisiert:

164-7(Satz)

Die Aussagen `i)` - `ii)` - `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` $l \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$.

`ii)` "$l \in \mathbb{Z}$" *und* "$l < 0$".

`iii)` "$-l \in \mathbb{N}$" *und* "$0 \neq l$".

`RECH.`$\leq$-**Notation**.

<u>Beweis **164-7**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $\qquad l \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}.$

`1:` Aus `VS` gleich "$l \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$"
folgt via **5-3**: $\qquad (l \in \mathbb{Z}) \wedge (l \notin \mathbb{N}).$

`2:` Aus `1`"$l \in \mathbb{Z} \ldots$"
folgt via **164-5**: $\qquad l \in \mathbb{S}.$

`3.1:` Aus `2`"$l \in \mathbb{S}$"
folgt via **107-18**: $\qquad (l < 0) \vee (0 \leq l).$

`Fallunterscheidung`

`3.1.1.Fall` $\qquad l < 0.$

`3.1.2.Fall` $\qquad 0 \leq l.$

`4:` Aus `1`"$l \in \mathbb{Z} \ldots$" und
aus `3.1.2.Fall`"$0 \leq l$"
folgt via **164-6**: $\qquad l \in \mathbb{N}.$

`5:` Es gilt `4`"$l \in \mathbb{N}$".
Es gilt `1`"$\ldots l \notin \mathbb{N}$".
Ex falso quodlibet folgt: $\qquad l < 0.$

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\qquad$ `A1` | "$l < 0$"

`3.2:` Aus `1`"$l \in \mathbb{Z} \ldots$" und
aus `A1` gleich "$l < 0$"
folgt: $\qquad (l \in \mathbb{Z}) \wedge (l < 0).$

Beweis **164-7** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ VS gleich $(l \in \mathbb{Z}) \wedge (l < 0)$.

1.1: Aus VS gleich "$l \in \mathbb{Z} \ldots$"
folgt via **164-6**: $(l \in \mathbb{N}) \vee (-l \in \mathbb{N})$.

1.2: Aus VS gleich "$\ldots l < 0$"
folgt via **41-3**: $l \neq 0$.

1.3: Aus VS gleich "$\ldots l < 0$"
folgt via **159-12**: $l \notin \mathbb{N}$.

2.1: Aus 1.1"$(l \in \mathbb{N}) \vee (-l \in \mathbb{N})$" und
aus 1.3"$l \notin \mathbb{N}$"
folgt: $-l \in \mathbb{N}$.

2.2: Aus 1.2
folgt: $0 \neq l$.

3: Aus 2.1 und
aus 2.2
folgt: $(-l \in \mathbb{N}) \wedge (0 \neq l)$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ VS gleich $(-l \in \mathbb{N}) \wedge (0 \neq l)$.

1.1: Aus VS gleich "$-l \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **159-11**: $0 \leq -l$.

1.2: Aus VS gleich "$-l \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **164-6**: $l \in \mathbb{Z}$.

1.3: Aus VS gleich "$\ldots 0 \neq l$"
folgt: $l \neq 0$.

2: Aus 1.1"$0 \leq -l$"
folgt via **109-16**: $l \leq 0$.

3: Aus 2"$l \leq 0$" und
aus 1.3"$l \neq 0$"
folgt via **41-3**: $l < 0$.

4: Aus 3"$l < 0$"
folgt via **159-12**: $l \notin \mathbb{N}$.

5: Aus 1.2"$l \in \mathbb{Z}$" und
aus 4"$l \notin \mathbb{N}$"
folgt via **5-3**: $l \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$.

$\square$

164-8. Es gilt eine zu **100-6** analoge Aussage für $\mathbb{Z}$. Eine korrespondierende Aussage für $\mathbb{N}$ ist nicht verfügbar, siehe **159-12**:

164-8(Satz)

"$l \in \mathbb{Z}$" genau dann, wenn "$-l \in \mathbb{Z}$" genau dann, wenn "$-(-l) \in \mathbb{Z}$".

`RECH`-**Notation**.

Beweis **164-8** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $l \in \mathbb{Z}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$l \in \mathbb{Z}$" folgt via **164-6**: $(l \in \mathbb{N}) \vee (-l \in \mathbb{N})$.

`2:` Aus `1`"$(l \in \mathbb{N}) \vee (-l \in \mathbb{N})$" folgt via **164-6**: $-l \in \mathbb{Z}$.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $-l \in \mathbb{Z}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$-l \in \mathbb{Z}$" folgt via **164-6**: $(-l \in \mathbb{N}) \vee (-(-l) \in \mathbb{N})$.

`2:` Aus `1`"$(-l \in \mathbb{N}) \vee (-(-l) \in \mathbb{N})$" folgt via **164-6**: $-(-l) \in \mathbb{Z}$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $-(-l) \in \mathbb{Z}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$-(-l) \in \mathbb{Z}$" folgt via **164-5**: $-(-l)$ Zahl.

`2:` Aus `1`"$-(-l)$ Zahl" folgt via **100-6**: l Zahl.

`3:` Aus `2`"l Zahl" folgt via **FS**$--$: $-(-l) = l$.

`4:` Aus `VS` gleich "$-(-l) \in \mathbb{Z}$" und aus `3`"$-(-l) = l$" folgt: $l \in \mathbb{Z}$.

□

164-9. Die Menge der ganzen Zahlen kann weder durch Addition noch durch Subtraktion noch durch Multiplikation verlassen werden:

164-9(Satz)

Es gelte:

→) $l \in \mathbb{Z}$.

→) $m \in \mathbb{Z}$.

Dann folgt:

a) $l + m \in \mathbb{Z}$.

b) $l - m \in \mathbb{Z}$.

c) $-l + m \in \mathbb{Z}$.

d) $-l - m \in \mathbb{Z}$.

e) $l \cdot m \in \mathbb{Z}$.

f) $l \cdot (-m) \in \mathbb{Z}$.

g) $(-l) \cdot m \in \mathbb{Z}$.

h) $(-l) \cdot (-m) \in \mathbb{Z}$.

RECH-**Notation**.

Beweis **164-9** `a)`

`1.1:` Aus $\rightarrow\!)$ "$l \in \mathbb{Z}$"
folgt via **164-6**: $(l \in \mathbb{N}) \vee (-l \in \mathbb{N})$.

`1.2:` Aus $\rightarrow\!)$ "$m \in \mathbb{Z}$"
folgt via **164-6**: $(m \in \mathbb{N}) \vee (-m \in \mathbb{N})$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt:

$$\begin{aligned} & (l \in \mathbb{N}) \wedge (m \in \mathbb{N}) \\ \vee\quad & (l \in \mathbb{N}) \wedge (-m \in \mathbb{N}) \\ \vee\quad & (-l \in \mathbb{N}) \wedge (m \in \mathbb{N}) \\ \vee\quad & (-l \in \mathbb{N}) \wedge (-m \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $(l \in \mathbb{N}) \wedge (m \in \mathbb{N})$.

`3:` Aus `2.1.Fall`"$l \in \mathbb{N} \ldots$" und
aus `2.1.Fall`"$\ldots m \in \mathbb{N}$"
folgt via **159-13**: $l + m \in \mathbb{N}$.

`4:` Aus `3`"$l + m \in \mathbb{N}$"
folgt via **164-6**: $l + m \in \mathbb{Z}$.

...

Beweis **164-9** `a)`

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.2.Fall` $(l \in \mathbb{N}) \wedge (-m \in \mathbb{N})$.

`3.1:` Aus `2.2.Fall`"$l \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **159-11**: $l \in \mathbb{S}$.

`3.2:` Aus `2.2.Fall`"$\ldots - m \in \mathbb{N}$"
folgt via **159-11**: $-m \in \mathbb{S}$.

`4:` Aus `3.1`"$l \in \mathbb{S}$" und
aus `3.2`"$-m \in \mathbb{S}$"
folgt via **107-14**: $(l \leq -m) \vee (-m \leq l)$.

`Fallunterscheidung`

`4.1.Fall` $l \leq -m$

`5:` Aus `2.2.Fall`"$l \in \mathbb{N} \ldots$",
aus `2.2.Fall`"$\ldots - m \in \mathbb{N}$" und
aus `4.1.Fall`"$l \leq -m$"
folgt via **163-2**: $(-m) - l \in \mathbb{N}$.

`6:` Aus `5`"$(-m) - l \in \mathbb{N}$"
folgt via **164-6**: $-((-m) - l) \in \mathbb{Z}$.

`7:` $l + m \overset{\textbf{FS}-+}{=} -(-m - l) = -((-m) - l)$.

`8:` Aus `7`"$l + m = \ldots = -((-m) - l)$" und
aus `6`"$-((-m) - l) \in \mathbb{Z}$"
folgt: $l + m \in \mathbb{Z}$.

...

...

Beweis **164-9** a)

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{2.2.Fall}}$ $(l \in \mathbb{N}) \wedge (-m \in \mathbb{N})$.

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{4.2.Fall}}$ $-m \leq l$

5: Aus 2.2.Fall“$\ldots - m \in \mathbb{N}$”,
aus 2.2.Fall“$l \in \mathbb{N} \ldots$” und
aus 4.2.Fall“$-m \leq l$”
folgt via **163-2**: $l - (-m) \in \mathbb{N}$.

6: Aus 5“$l - (-m) \in \mathbb{N}$”
folgt via **164-6**: $l - (-m) \in \mathbb{Z}$.

7: Via **FS**$-+$ gilt: $l - (-m) = l + m$.

8: Aus 6“$l - (-m) \in \mathbb{Z}$” und
aus 7“$l - (-m) = l + m$”
folgt: $l + m \in \mathbb{Z}$.

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In beiden Fällen gilt: $l + m \in \mathbb{Z}$.

...

Beweis **164-9** `a)`

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.3.Fall` $(-l \in \mathbb{N}) \wedge (m \in \mathbb{N})$.

`3.1:` Aus `2.3.Fall` "$-l \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **159-11**: $-l \in \mathbb{S}$.

`3.2:` Aus `2.3.Fall` "$\ldots m \in \mathbb{N}$"
folgt via **159-11**: $m \in \mathbb{S}$.

`4:` Aus `3.1` "$-l \in \mathbb{S}$" und
aus `3.2` "$m \in \mathbb{S}$"
folgt via **107-14**: $(-l \leq m) \vee (m \leq -l)$.

`Fallunterscheidung`

`4.1.Fall` $-l \leq m$

`5:` Aus `2.3.Fall` "$-l \in \mathbb{N} \ldots$",
aus `2.3.Fall` "$\ldots m \in \mathbb{N}$" und
aus `4.1.Fall` "$-l \leq m$"
folgt via **163-2**: $m-(-l) \in \mathbb{N}$.

`6:` Aus `5` "$m-(-l) \in \mathbb{N}$"
folgt via **164-6**: $m-(-l) \in \mathbb{Z}$.

`7:` Via **FS**$-+$ gilt: $m-(-l) = l+m$.

`8:` Aus `6` "$m-(-l) \in \mathbb{Z}$" und
aus `7` "$m-(-l) = l+m$"
folgt: $l+m \in \mathbb{Z}$.

...

...

Beweis **164-9** a)

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{2.3.Fall}}$ $(-l \in \mathbb{N}) \wedge (m \in \mathbb{N})$.

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{4.2.Fall}}$ $m \leq -l$

5: Aus 2.3.Fall "$\ldots m \in \mathbb{N}$",
aus 2.3.Fall "$-l \in \mathbb{N} \ldots$" und
aus 4.2.Fall "$m \leq -l$"
folgt via **163-2**: $(-l) - m \in \mathbb{N}$.

6: Aus 5 "$(-l) - m \in \mathbb{N}$"
folgt via **164-6**: $-((-l) - m) \in \mathbb{Z}$.

7: $l + m \stackrel{\mathbf{FS}-+}{=} -(-l - m) = -((-l) - m)$.

8: Aus 7 "$l + m = \ldots = -((-l) - m)$" und
aus 6 "$-((-l) - m) \in \mathbb{Z}$"
folgt: $l + m \in \mathbb{Z}$.

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In beiden Fällen gilt: $l + m \in \mathbb{Z}$.

$\boxed{\texttt{2.4.Fall}}$ $(-l \in \mathbb{N}) \wedge (-m \in \mathbb{N})$.

3: Aus 2.4.Fall "$-l \in \mathbb{N} \ldots$" und
aus 2.4.Fall "$\ldots - m \in \mathbb{N}$"
folgt via **159-13**: $(-l) + (-m) \in \mathbb{N}$.

4: Aus 3 "$(-l) + (-m) \in \mathbb{N}$"
folgt via **164-6**: $-((-l) + (-m)) \in \mathbb{Z}$.

5: $l + m \stackrel{\mathbf{FS}-+}{=} -(-l - m) = -((-l) - m) = -((-l) + (-m))$.

6: Aus 5 "$l + m = \ldots = -((-l) + (-m))$" und
aus 4 "$-((-l) + (-m)) \in \mathbb{Z}$"
folgt: $l + m \in \mathbb{Z}$.

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In allen Fällen gilt: $l + m \in \mathbb{Z}$.

<u>Beweis **164-9** `bcd)`</u>

`1.1:` Aus →) "$l \in \mathbb{Z}$" und
aus →) "$m \in \mathbb{Z}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $l + m \in \mathbb{Z}$.

`1.2:` Aus →) "$m \in \mathbb{Z}$"
folgt via **164-8**: $-m \in \mathbb{Z}$.

`2.1:` Aus `1.1` "$l + m \in \mathbb{Z}$"
folgt via **164-8**: $-(l + m) \in \mathbb{Z}$.

`2.2:` Aus →) "$l \in \mathbb{Z}$" und
aus `1.2` "$-m \in \mathbb{Z}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $l + (-m) \in \mathbb{Z}$.

`3.1:` Via **FS**−+ gilt: $-(l + m) = -l - m$.

`3.b):` Aus "$l - m = l + (-m)$" und
aus `2.2` "$l + (-m) \in \mathbb{Z}$"
folgt: $l - m \in \mathbb{Z}$.

`4:` Aus `3.b)` "$l - m \in \mathbb{Z}$"
folgt via **164-8**: $-(l - m) \in \mathbb{Z}$.

`5:` Via **FS**−+ gilt: $-(l - m) = -l + m$.

`6.c):` Aus `4` "$-(l - m) \in \mathbb{Z}$" und
aus `5` "$-(l - m) = -l + m$"
folgt: $-l + m \in \mathbb{Z}$.

`6.d):` Aus `2.1` "$-(l + m) \in \mathbb{Z}$" und
aus `3.1` "$-(l + m) = -l - m$"
folgt: $-l - m \in \mathbb{Z}$.

Beweis **164-9** `e)`

`1.1:` Aus →) "$l \in \mathbb{Z}$"
folgt via **164-6**: $(l \in \mathbb{N}) \vee (-l \in \mathbb{N})$.

`1.2:` Aus →) "$m \in \mathbb{Z}$"
folgt via **164-6**: $(m \in \mathbb{N}) \vee (-m \in \mathbb{N})$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt:

$$(l \in \mathbb{N}) \wedge (m \in \mathbb{N})$$
$$\vee \quad (l \in \mathbb{N}) \wedge (-m \in \mathbb{N})$$
$$\vee \quad (-l \in \mathbb{N}) \wedge (m \in \mathbb{N})$$
$$\vee \quad (-l \in \mathbb{N}) \wedge (-m \in \mathbb{N}).$$

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $(l \in \mathbb{N}) \wedge (m \in \mathbb{N})$.

`3:` Aus `2.1.Fall`"$l \in \mathbb{N} \ldots$" und
aus `2.1.Fall`"$\ldots m \in \mathbb{N}$"
folgt via **159-13**: $l \cdot m \in \mathbb{N}$.

`4:` Aus `3`"$l \cdot m \in \mathbb{N}$"
folgt via **164-6**: $l \cdot m \in \mathbb{Z}$.

`2.2.Fall` $(l \in \mathbb{N}) \wedge (-m \in \mathbb{N})$.

`3:` Aus `2.2.Fall`"$l \in \mathbb{N} \ldots$" und
aus `2.2.Fall`"$\ldots -m \in \mathbb{N}$"
folgt via **159-13**: $l \cdot (-m) \in \mathbb{N}$.

`4:` Aus `3`"$l \cdot (-m) \in \mathbb{N}$"
folgt via **164-6**: $-l \cdot (-m) \in \mathbb{Z}$.

`5:` $l \cdot m \stackrel{\mathbf{100-4}}{=} -(-l \cdot m) \stackrel{\mathbf{FS}-\cdot}{=} -(l \cdot (-m))$.

`6:` Aus `5`"$l \cdot m = \ldots = -(l \cdot (-m))$" und
aus `4`"$-l \cdot (-m) \in \mathbb{Z}$"
folgt: $l \cdot m \in \mathbb{Z}$.

...

Beweis **164-9** `e)`

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{2.3.Fall}}$ $(-l \in \mathbb{N}) \wedge (m \in \mathbb{N})$.

`3:` Aus `2.3.Fall` "$-l \in \mathbb{N} \ldots$" und
aus `2.3.Fall` "$\ldots m \in \mathbb{N}$"
folgt via **159-13**: $(-l) \cdot m \in \mathbb{N}$.

`4:` Aus `3` "$(-l) \cdot m \in \mathbb{N}$"
folgt via **164-6**: $-(-l) \cdot m \in \mathbb{Z}$.

`5:` $l \cdot m \stackrel{\textbf{100-4}}{=} -(-l \cdot m) \stackrel{\textbf{FS}-\cdot}{=} -((-l) \cdot m)$.

`6:` Aus `5` "$l \cdot m = \ldots = -((-l) \cdot m)$" und
aus `4` "$-((-l) \cdot m) \in \mathbb{Z}$"
folgt: $l \cdot m \in \mathbb{Z}$.

$\boxed{\texttt{2.4.Fall}}$ $(-l \in \mathbb{N}) \wedge (-m \in \mathbb{N})$.

`3:` Aus `2.4.Fall` "$-l \in \mathbb{N} \ldots$" und
aus `2.4.Fall` "$\ldots - m \in \mathbb{N}$"
folgt via **159-13**: $(-l) \cdot (-m) \in \mathbb{N}$.

`4.1:` Via **FS**$-\cdot$ gilt: $(-l) \cdot (-m) = l \cdot m$.

`4.2:` Aus `3` "$(-l) \cdot (-m) \in \mathbb{N}$"
folgt via **164-6**: $(-l) \cdot (-m) \in \mathbb{Z}$.

`5:` Aus `4.2` "$(-l) \cdot (-m) \in \mathbb{Z}$" und
aus `4.1` "$(-l) \cdot (-m) = l \cdot m$"
folgt: $l \cdot m \in \mathbb{Z}$.

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In allen Fällen gilt: $l \cdot m \in \mathbb{Z}$.

<u>Beweis</u> **164-9** `fgh)`

`1.1:` Aus →) "$l \in \mathbb{Z}$"
folgt via **164-8**: $-l \in \mathbb{Z}$.

`1.2:` Aus →) "$m \in \mathbb{Z}$"
folgt via **164-8**: $-m \in \mathbb{Z}$.

`2.f):` Aus →) "$l \in \mathbb{Z}$" und
aus `1.2` "$-m \in \mathbb{Z}$"
folgt via des bereits bewiesenen `e)`: $l \cdot (-m) \in \mathbb{Z}$.

`2.g):` Aus `1.1` "$-l \in \mathbb{Z}$" und
aus →) "$m \in \mathbb{Z}$"
folgt via des bereits bewiesenen `e)`: $(-l) \cdot m \in \mathbb{Z}$.

`2.h):` Aus `1.1` "$-l \in \mathbb{Z}$" und
aus `1.2` "$-m \in \mathbb{Z}$"
folgt via des bereits bewiesenen `e)`: $(-l) \cdot (-m) \in \mathbb{Z}$.

□

Einiges über $-x \leq y$ und $x \leq -y$ und $-x < y$ und $x < -y$.
Einiges über $+\infty$, $-\infty$.
Einiges über $+\infty$, $-\infty$ und $\leq$.
Einiges über $\leq, <$ und $+, -$.

Ersterstellung: 02/05/12 **Letzte Änderung: 14/05/13**

165-1. Die nunmehrigen Aussagen ergänzen **109-14,15**:

165-1(Satz)

a) *"$-x \leq y$" genau dann, wenn "$-y \leq x$".*

b) *"$x \leq -y$" genau dann, wenn "$y \leq -x$".*

c) *"$-x < y$" genau dann, wenn "$-y < x$".*

d) *"$x < -y$" genau dann, wenn "$y < -x$".*

e) *"$0 \leq x$" genau dann, wenn "$-x \leq x$".*

f) *"$x \leq 0$" genau dann, wenn "$x \leq -x$".*

g) *"$0 < x$" genau dann, wenn "$-x < x$".*

h) *"$x < 0$" genau dann, wenn "$x < -x$".*

RECH.**≤-Notation**.

Beweis **165-1** `a)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $-x \leq y$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$-x \leq y$"
folgt via **107-3**: $-x \in \mathbb{S}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$-x \leq y$"
folgt via **109-15**: $-y \leq -(-x)$.

`2:` Aus `1.1`"$-x \in \mathbb{S}$"
folgt via **117-4**: $x \in \mathbb{S}$.

`3:` Aus `2`"$x \in \mathbb{S}$"
folgt via $\in$**SZ**: x Zahl.

`4:` Aus `3`"x Zahl"
folgt via **FS**$--$: $-(-x) = x$.

`5:` Aus `1.2`"$-y \leq -(-x)$" und
aus `4`"$-(-x) = x$"
folgt: $-y \leq x$.

`a)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $-y \leq x$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$-y \leq x$"
folgt via **107-3**: $-y \in \mathbb{S}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$-y \leq x$"
folgt via **109-15**: $-x \leq -(-y)$.

`2:` Aus `1.1`"$-y \in \mathbb{S}$"
folgt via **117-4**: $y \in \mathbb{S}$.

`3:` Aus `2`"$y \in \mathbb{S}$"
folgt via $\in$**SZ**: y Zahl.

`4:` Aus `3`"y Zahl"
folgt via **FS**$--$: $-(-y) = y$.

`5:` Aus `1.2`"$-x \leq -(-y)$" und
aus `4`"$-(-y) = y$"
folgt: $-x \leq y$.

<u>Beweis</u> **165-1** `b)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $x \leq -y$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x \leq -y$"
folgt via **107-3**: $-y \in \mathbb{S}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$x \leq -y$"
folgt via **109-15**: $-(-y) \leq -x$.

`2:` Aus `1.1`"$-y \in \mathbb{S}$"
folgt via **117-4**: $y \in \mathbb{S}$.

`3:` Aus `2`"$y \in \mathbb{S}$"
folgt via $\in$**SZ**: y Zahl.

`4:` Aus `3`"y Zahl"
folgt via **FS**$--$: $-(-y) = y$.

`5:` Aus `1.2`"$-(-y) \leq -x$" und
aus `4`"$-(-y) = y$"
folgt: $y \leq -x$.

`b)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $y \leq -x$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$y \leq -x$"
folgt via **107-3**: $-x \in \mathbb{S}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$y \leq -x$"
folgt via **109-15**: $-(-x) \leq -y$.

`2:` Aus `1.1`"$-x \in \mathbb{S}$"
folgt via **117-4**: $x \in \mathbb{S}$.

`3:` Aus `2`"$x \in \mathbb{S}$"
folgt via $\in$**SZ**: x Zahl.

`4:` Aus `3`"x Zahl"
folgt via **FS**$--$: $-(-x) = x$.

`5:` Aus `1.2`"$-(-x) \leq -y$" und
aus `4`"$-(-x) = x$"
folgt: $x \leq -y$.

<u>Beweis **165-1**</u> `c)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $-x < y$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$-x < y$"
folgt via **107-9**: $-x \in \mathbb{S}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$-x < y$"
folgt via **109-14**: $-y < -(-x)$.

`2:` Aus `1.1`"$-x \in \mathbb{S}$"
folgt via **117-4**: $x \in \mathbb{S}$.

`3:` Aus `2`"$x \in \mathbb{S}$"
folgt via $\in$**SZ**: x Zahl.

`4:` Aus `3`"x Zahl"
folgt via **FS**$--$: $-(-x) = x$.

`5:` Aus `1.2`"$-y < -(-x)$" und
aus `4`"$-(-x) = x$"
folgt: $-y < x$.

`c)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $-y < x$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$-y < x$"
folgt via **107-9**: $-y \in \mathbb{S}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$-y < x$"
folgt via **109-14**: $-x < -(-y)$.

`2:` Aus `1.1`"$-y \in \mathbb{S}$"
folgt via **117-4**: $y \in \mathbb{S}$.

`3:` Aus `2`"$y \in \mathbb{S}$"
folgt via $\in$**SZ**: y Zahl.

`4:` Aus `3`"y Zahl"
folgt via **FS**$--$: $-(-y) = y$.

`5:` Aus `1.2`"$-x < -(-y)$" und
aus `4`"$-(-y) = y$"
folgt: $-x < y$.

Beweis **165-1** `d)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $x < -y$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x < -y$" folgt via **107-9**: $-y \in \mathbb{S}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$x < -y$" folgt via **109-14**: $-(-y) < -x$.

`2:` Aus `1.1`"$-y \in \mathbb{S}$" folgt via **117-4**: $y \in \mathbb{S}$.

`3:` Aus `2`"$y \in \mathbb{S}$" folgt via $\in$**SZ**: y Zahl.

`4:` Aus `3`"y Zahl" folgt via **FS**$--$: $-(-y) = y$.

`5:` Aus `1.2`"$-(-y) < -x$" und aus `4`"$-(-y) = y$" folgt: $y < -x$.

`d)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $y < -x$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$y < -x$" folgt via **107-9**: $-x \in \mathbb{S}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$y < -x$" folgt via **109-14**: $-(-x) < -y$.

`2:` Aus `1.1`"$-x \in \mathbb{S}$" folgt via **117-4**: $x \in \mathbb{S}$.

`3:` Aus `2`"$x \in \mathbb{S}$" folgt via $\in$**SZ**: x Zahl.

`4:` Aus `3`"x Zahl" folgt via **FS**$--$: $-(-x) = x$.

`5:` Aus `1.2`"$-(-x) < -y$" und aus `4`"$-(-x) = x$" folgt: $x < -y$.

Beweis **165-1** `e)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $0 \le x$.

`1:` Aus `VS` gleich "$0 \le x$"
folgt via **109-16**: $-x \le 0$.

`2:` Aus `1`"$-x \le 0$" und
aus `VS` gleich "$0 \le x$"
folgt via **107-8**: $-x \le x$.

`e)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $-x \le x$.

`1:` Aus `VS` gleich "$-x \le x$"
folgt via **107-3**: $x \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `1`"$x \in \mathbb{S}$"
folgt via **107-18**: $(x < 0) \vee (0 \le x)$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $x < 0$.

`3:` Aus `2.1.Fall`"$x < 0$"
folgt via **109-16**: $0 < -x$.

`4:` Aus `3`"$0 < -x$" und
aus `VS` gleich "$-x \le x$"
folgt via **107-8**: $0 < x$.

`5:` Aus `4`"$0 < x$"
folgt via **107-13**: $\neg(x < 0)$.

`6:` Es gilt `5`"$\neg(x < 0)$".
Es gilt `2.1.Fall`"$x < 0$".
Ex falso quodlibet folgt: $0 \le x$.

`2.2.Fall` $0 \le x$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $0 \le x$.

Beweis **165-1** `f)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $x \leq 0$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \leq 0$"
folgt via **109-16**: $0 \leq -x$.

`2:` Aus `VS` gleich "$x \leq 0$" und
aus `1` "$0 \leq -x$"
folgt via **107-8**: $x \leq -x$.

`f)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $x \leq -x$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \leq -x$"
folgt via **107-3**: $x \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `1` "$x \in \mathbb{S}$"
folgt via $\in$**SZ**: x Zahl.

`3:` Aus `2` "x Zahl"
folgt via **FS**$--$: $-(-x) = x$.

`4:` Aus `3` "$-(-x) = x$" und
aus `VS` gleich "$x \leq -x$"
folgt: $-(-x) \leq -x$.

`5:` Aus `4` "$-(-x) \leq -x$"
folgt via des bereits bewiesenen `e)`: $0 \leq -x$.

`6:` Aus `5` "$0 \leq -x$"
folgt via **109-16**: $x \leq 0$.

Beweis **165-1** g) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich $0 < x$.

1: Aus VS gleich "$0 < x$"
folgt via **109-16**: $-x < 0$.

2: Aus 1"$-x < 0$" und
aus VS gleich "$0 < x$"
folgt via **107-8**: $-x < x$.

g) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich $-x < x$.

1: Aus VS gleich "$-x < x$"
folgt via **107-9**: $x \in \mathbb{S}$.

2: Aus 1"$x \in \mathbb{S}$"
folgt via **107-18**: $(x \leq 0) \vee (0 < x)$.

Fallunterscheidung

2.1.Fall $x \leq 0$.

3: Aus 2.1.Fall"$x \leq 0$"
folgt via **109-16**: $0 \leq -x$.

4: Aus 3"$0 \leq -x$" und
aus VS gleich "$-x < x$"
folgt via **107-8**: $0 < x$.

5: Aus 4"$0 < x$"
folgt via **107-13**: $\neg(x \leq 0)$.

6: Es gilt 5"$\neg(x \leq 0)$".
Es gilt 2.1.Fall"$x \leq 0$".
Ex falso quodlibet folgt: $0 < x$.

2.2.Fall $0 < x$.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt: $0 < x$.

Beweis **165-1** `h)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $x<0.$

`1:` Aus `VS` gleich "$x<0$"
folgt via **109-16**: $0<-x.$

`2:` Aus `VS` gleich "$x<0$" und
aus `1` "$0<-x$"
folgt via **107-8**: $x<-x.$

`h)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $x<-x.$

`1:` Aus `VS` gleich "$x<-x$"
folgt via **107-9**: $x\in\mathbb{S}.$

`2:` Aus `1` "$x\in\mathbb{S}$"
folgt via $\in$**SZ**: x Zahl.

`3:` Aus `2` "x Zahl"
folgt via **FS**$--$: $-(-x)=x.$

`4:` Aus `3` "$-(-x)=x$" und
aus `VS` gleich "$x<-x$"
folgt: $-(-x)<-x.$

`5:` Aus `4` "$-(-x)<-x$"
folgt via des bereits bewiesenen `g)`: $0<-x.$

`6:` Aus `5` "$0<-x$"
folgt via **109-16**: $x<0.$

□

165-2. Ergänzend zu den Untersuchungen von Ungleichungen in **Suite II** wird nun unter anderem ausgesagt, dass aus $-\infty \neq x \in \mathbb{S}$ und $0 \leq y$ in erwarteter Weise die Ungleichung $x \leq x + y$ folgt:

165-2(Satz)

a) *Aus* "$-\infty \neq x \in \mathbb{S}$" *und aus* "$0 \leq y$" *folgt* "$x \leq x + y$".

b) *Aus* "$+\infty \neq x \in \mathbb{S}$" *und aus* "$0 \leq y$" *folgt* "$x - y \leq x$".

c) *Aus* "$+\infty \neq x \in \mathbb{S}$" *und aus* "$y \leq 0$" *folgt* "$x + y \leq x$".

d) *Aus* "$-\infty \neq x \in \mathbb{S}$" *und aus* "$y \leq 0$" *folgt* "$x \leq x - y$".

e) *Aus* "$x \in \mathbb{S}$" *und aus* "$0 \leq y \in \mathbb{R}$" *folgt* "$x \leq x + y$".

f) *Aus* "$x \in \mathbb{S}$" *und aus* "$0 \leq y \in \mathbb{R}$" *folgt* "$x - y \leq x$".

g) *Aus* "$x \in \mathbb{S}$" *und aus* "$\mathbb{R} \ni y \leq 0$" *folgt* "$x + y \leq x$".

h) *Aus* "$x \in \mathbb{S}$" *und aus* "$\mathbb{R} \ni y \leq 0$" *folgt* "$x \leq x - y$".

i) *Aus* "$x \in \mathbb{R}$" *und aus* "$0 < y$" *folgt* "$x < x + y$".

j) *Aus* "$x \in \mathbb{R}$" *und aus* "$0 < y$" *folgt* "$x - y < x$".

k) *Aus* "$x \in \mathbb{R}$" *und aus* "$y < 0$" *folgt* "$x + y < x$".

l) *Aus* "$x \in \mathbb{R}$" *und aus* "$y < 0$" *folgt* "$x < x - y$".

RECH.$\leq$-**Notation**.

Beweis **165-2** `a)` `VS` gleich $(-\infty \neq x \in \mathbb{S}) \wedge (0 \le y)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\dots x \in \mathbb{S} \dots$"
folgt via **95-15**: $(x \in \mathbb{R}) \vee (x = +\infty) \vee (x = -\infty)$.

`2:` Aus `1`"$(x \in \mathbb{R}) \vee (x = +\infty) \vee (x = -\infty)$" und
aus `VS` gleich "$-\infty \neq x \dots$"
folgt: $(x \in \mathbb{R}) \vee (x = +\infty)$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $x \in \mathbb{R}$.

`3:` Aus `VS` gleich "$\dots 0 \le y$" und
aus `2.1.Fall`"$x \in \mathbb{R}$"
folgt via **VR**$\le$: $x + 0 \le x + y$.

`4:` Aus `2.1.Fall`"$x \in \mathbb{R}$"
folgt via $\in$**SZ**: x Zahl.

`5:` Aus `4`"x Zahl"
folgt via **FSA**0: $x + 0 = x$.

`6:` Aus `3`"$x + 0 \le x + y$" und
aus `5`"$x + 0 = x$"
folgt: $x \le x + y$.

`2.2.Fall` $x = +\infty$.

`3:` Aus `VS` gleich "$\dots 0 \le y$"
folgt via **109-23**: $(+\infty) + y = +\infty$.

`4:` Aus `2.2.Fall`"$x = +\infty$" und
aus `3`"$(+\infty) + y = +\infty$"
folgt: $x + y = x$.

`5:` Aus `VS` gleich "$\dots x \in \mathbb{S} \dots$"
folgt via **107-5**: $x \le x$.

`6:` Aus `5`"$x \le x$" und
aus `4`"$x + y = x$"
folgt: $x \le x + y$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $x \le x + y$.

Beweis **165-2** `b)` `VS` gleich $(+\infty \neq x \in \mathbb{S}) \wedge (0 \leq y)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$+\infty \neq x \ldots$"
folgt: $x \neq +\infty$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \in \mathbb{S} \ldots$"
folgt via **117-4**: $-x \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `1.1`"$x \neq +\infty$"
folgt via **100-13**: $-x \neq -\infty$.

`3:` Aus `2`
folgt: $-\infty \neq -x$.

`4:` Aus `3`"$-\infty \neq -x$",
aus `1.2`"$-x \in \mathbb{S}$" und
aus `VS` gleich "$\ldots 0 \leq y$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $-x \leq -x + y$.

`5:` Aus `4`"$-x \leq -x + y$"
folgt via **165-1**: $-(-x + y) \leq x$.

`6:` Via **FS**$-+$ gilt: $x - y = -(-x + y)$.

`7:` Aus `5`"$-(-x + y) \leq x$" und
aus `6`"$x - y = -(-x + y)$"
folgt: $x - y \leq x$.

`c)` `VS` gleich $(+\infty \neq x \in \mathbb{S}) \wedge (y \leq 0)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \leq 0$"
folgt via **109-16**: $0 \leq -y$.

`2:` Aus `VS` gleich "$+\infty \neq x \in \mathbb{S} \ldots$" und
aus `1`"$0 \leq -y$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $x - (-y) \leq x$.

`3:` Via **FS**$-+$ gilt: $x + y = x - (-y)$.

`4:` Aus `3`"$x + y = x - (-y)$" und
aus `2`"$x - (-y) \leq x$"
folgt: $x + y \leq x$.

<u>Beweis **165-2**</u> `d)` `VS` gleich $(-\infty \neq x \in \mathbb{S}) \wedge (y \leq 0)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \leq 0$"
folgt via **109-16**: $0 \leq -y$.

`2:` Aus `VS` gleich "$-\infty \neq x \in \mathbb{S} \ldots$" und
aus `1`"$0 \leq -y$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $x \leq x + (-y)$.

`3:` Aus `2`"$x \leq x + (-y)$" und
aus "$x + (-y) = x - y$"
folgt: $x \leq x - y$.

`e)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{S}) \wedge (0 \leq y \in \mathbb{R})$.

`1:` Es gilt: $(x = -\infty) \vee (x \neq -\infty)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x = -\infty$.

`3:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAVI**: $(-\infty) + y = -\infty$.

`4:` Aus `1.1.Fall`"$x = -\infty$" und
aus `3`"$(-\infty) + y = -\infty$"
folgt: $x + y = x$.

`5:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{S} \ldots$"
folgt via **107-5**: $x \leq x$.

`6:` Aus `5`"$x \leq x$" und
aus `4`"$x + y = x$"
folgt: $x \leq x + y$.

`1.2.Fall` $x \neq -\infty$.

`2:` Aus `1.2.Fall`
folgt: $-\infty \neq x$.

`3:` Aus `2`"$-\infty \neq x$",
aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{S} \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots 0 \leq y \ldots$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $x \leq x + y$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $x \leq x + y$.

Beweis **165-2** `f)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{S}) \wedge (0 \leq y \in \mathbb{R})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{S} \ldots$"
folgt via **117-4**: $-x \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `1`"$-x \in \mathbb{S}$" und
aus `VS` gleich "$\ldots 0 \leq y \in \mathbb{R}$"
folgt via des bereits bewiesenen `e)`: $-x \leq -x + y$.

`3:` Aus `2`"$-x \leq -x + y$"
folgt via **165-1**: $-(-x + y) \leq x$.

`4:` Via **FS**$-+$ gilt: $x - y = -(-x + y)$.

`5:` Aus `4`"$-(-x + y) \leq x$" und
aus `4`"$x - y = -(-x + y)$"
folgt: $x - y \leq x$.

`g)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{S}) \wedge (\mathbb{R} \ni y \leq 0)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots \mathbb{R} \ni y \ldots$"
folgt: $y \in \mathbb{R}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \leq 0$"
folgt via **109-16**: $0 \leq -y$.

`2:` Aus `1.1`"$y \in \mathbb{R}$"
folgt via **117-4**: $-y \in \mathbb{R}$.

`3:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{S} \ldots$",
aus `1.2`"$0 \leq -y$" und
aus `2`"$-y \in \mathbb{R}$"
folgt via des bereits bewiesenen `f)`: $x - (-y) \leq x$.

`4:` Via **FS**$-+$ gilt: $x + y = x - (-y)$.

`5:` Aus `4`"$x + y = x - (-y)$" und
aus `3`"$x - (-y) \leq x$"
folgt: $x + y \leq x$.

<u>Beweis</u> **165-2** `h)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{S}) \wedge (\mathbb{R} \ni y \leq 0)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots \mathbb{R} \ni y \ldots$"
folgt: $y \in \mathbb{R}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \leq 0$"
folgt via **109-16**: $0 \leq -y$.

`2:` Aus `1.1`"$y \in \mathbb{R}$"
folgt via **117-4**: $-y \in \mathbb{R}$.

`3:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{S} \ldots$",
aus `1.2`"$0 \leq -y$" und
aus `2`"$-y \in \mathbb{R}$"
folgt via des bereits bewiesenen `e)`: $x \leq x + (-y)$.

`4:` Aus `3`"$x \leq x + (-y)$" und
aus "$x + (-y) = x - y$"
folgt: $x \leq x - y$.

`i)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{R}) \wedge (0 < y)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots 0 < y$" und
aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via **VR**$<$: $x + 0 < x + y$.

`2:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via $\in$**SZ**: x Zahl.

`3:` Aus `2`"x Zahl"
folgt via **FSA**0: $x + 0 = x$.

`4:` Aus `1`"$x + 0 < x + y$" und
aus `3`"$x + 0 = x$"
folgt: $x < x + y$.

<u>Beweis</u> **165-2** `j)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{R}) \wedge (0 < y)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via **117-4**: $-x \in \mathbb{R}$.

`2:` Aus `1`"$-x \in \mathbb{R}$" und
aus `VS` gleich "$\ldots 0 < y$"
folgt via des bereits bewiesenen `i)`: $-x < -x + y$.

`3:` Aus `2`"$-x < -x + y$"
folgt via **165-1**: $-(-x + y) < x$.

`4:` Via **FS**$-+$ gilt: $x - y = -(-x + y)$.

`5:` Aus `4`"$-(-x + y) < x$" und
aus `4`"$x - y = -(-x + y)$"
folgt: $x - y < x$.

`k)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y < 0)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots y < 0$"
folgt via **109-16**: $0 < -y$.

`2:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{R} \ldots$" und
aus `1`"$0 < -y$"
folgt via des bereits bewiesenen `j)`: $x - (-y) < x$.

`3:` Via **FS**$-+$ gilt: $x + y = x - (-y)$.

`4:` Aus `3`"$x + y = x - (-y)$" und
aus `2`"$x - (-y) < x$"
folgt: $x + y < x$.

`l)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y < 0)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots y < 0$"
folgt via **109-16**: $0 < -y$.

`2:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{R} \ldots$" und
aus `1`"$0 < -y$"
folgt via des bereits bewiesenen `i)`: $x < x + (-y)$.

`3:` Aus `2`"$x < x + (-y)$" und
aus "$x + (-y) = x - y$"
folgt: $x < x - y$.

$\square$

165-3. Nun wird Einiges zum Rechnen mit $+\infty, -\infty$ ergänzt:

165-3(Satz)

a) $0 \le +\infty$.

b) $-\infty \le 0$.

c) $x - (+\infty) = -(+\infty) + x = x + (-\infty) = (-\infty) + x$.

d) $x - (-\infty) = -(-\infty) + x = x + (+\infty) = (+\infty) + x$.

e) $-x - (+\infty) = -(+\infty) - x = -x + (-\infty) = (-\infty) - x$.

f) $-x - (-\infty) = -(-\infty) - x = -x + (+\infty) = (+\infty) - x$.

`RECH`-**Notation**.

Beweis **165-3** `a)`

Aus **107-6**"$0 < +\infty$"
folgt via **41-3**: $\qquad 0 \le +\infty$.

`b)`

Aus **107-6**"$-\infty < 0$"
folgt via **41-3**: $\qquad -\infty \le 0$.

Beweis **165-3** c)

1.1: $$x-(+\infty) \stackrel{\textbf{FS}-+}{=} -(+\infty)+x.$$

1.2: $$-(+\infty)+x \stackrel{\textbf{FS}-+}{=} x-(+\infty) = x+(-(+\infty)) \stackrel{\textbf{AAVI}}{=} x+(-\infty).$$

1.3: $$x+(-\infty) \stackrel{\textbf{FSA}}{=} (-\infty)+x.$$

2: Aus 1.1 "$x-(+\infty)=\ldots=-(+\infty)+x$",
aus 1.2 "$-(+\infty)+x=\ldots=x+(-\infty)$" und
aus 1.3 "$x+(-\infty)=\ldots=(-\infty)+x$"
folgt: $$x-(+\infty)=-(+\infty)+x=x+(-\infty)=(-\infty)+x.$$

d)

1.1: $$x-(-\infty) \stackrel{\textbf{FS}-+}{=} -(-\infty)+x.$$

1.2: $$-(-\infty)+x \stackrel{\textbf{FS}-+}{=} x-(-\infty) = x+(-(-\infty)) \stackrel{\textbf{AAVI}}{=} x+(+\infty).$$

1.3: $$x+(+\infty) \stackrel{\textbf{FSA}}{=} (+\infty)+x.$$

2: Aus 1.1 "$x-(-\infty)=\ldots=-(-\infty)+x$",
aus 1.2 "$-(-\infty)+x=\ldots=x+(+\infty)$" und
aus 1.3 "$x+(+\infty)=\ldots=(+\infty)+x$"
folgt: $$x-(-\infty)=-(-\infty)+x=x+(+\infty)=(+\infty)+x.$$

e)

1.1: $$-x-(+\infty) \stackrel{\textbf{98-8}}{=} -(+\infty)-x.$$

1.2: $$-(+\infty)-x \stackrel{\textbf{98-8}}{=} -x-(+\infty) = -x+(-(+\infty)) \stackrel{\textbf{AAVI}}{=} -x+(-\infty).$$

1.3: $$-x+(-\infty) \stackrel{\textbf{FS}-+}{=} (-\infty)-x.$$

2: Aus 1.1 "$-x-(+\infty)=\ldots=-(+\infty)-x$",
aus 1.2 "$-(+\infty)-x=\ldots=-x+(-\infty)$" und
aus 1.3 "$-x+(-\infty)=\ldots=(-\infty)-x$"
folgt: $$-x-(+\infty)=-(+\infty)-x=-x+(-\infty)=(-\infty)-x.$$

Beweis **165-3** `f)`

`1.1:` $$-x-(-\infty) \stackrel{\mathbf{98-8}}{=} -(-\infty)-x.$$

`1.2:` $$-(-\infty)-x \stackrel{\mathbf{98-8}}{=} -x-(-\infty) = -x+(-(-\infty)) \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} -x+(+\infty).$$

`1.3:` $$-x+(+\infty) \stackrel{\mathbf{FS-+}}{=} (+\infty)-x.$$

`2:` Aus `1.1` “$-x-(-\infty) = \ldots = -(-\infty)-x$”,
aus `1.2` “$-(-\infty)-x = \ldots = -x+(+\infty)$” und
aus `1.3` “$-x+(+\infty) = \ldots = (+\infty)-x$”
folgt: $$-x-(-\infty) = -(-\infty)-x = -x+(+\infty) = (+\infty)-x.$$

$\square$

165-4. Mit dem nun vorliegenden Resultat werden **AAVI** und **109-23** zusammengefasst, ergänzt und es wird **165-7** vorbereitet:

165-4(Satz)

a) *Aus* "$-\infty \neq x \in \mathbb{S}$" *folgt* "$x + (+\infty) = (+\infty) + x = +\infty$"
und "$x - (-\infty) = -(-\infty) + x = +\infty$".

b) *Aus* "$-\infty < x$" *folgt* "$x + (+\infty) = (+\infty) + x = +\infty$"
und "$x - (-\infty) = -(-\infty) + x = +\infty$".

c) *Aus* "$+\infty \neq x \in \mathbb{S}$" *folgt* "$x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty$"
und "$x - (+\infty) = -(+\infty) + x = -\infty$".

d) *Aus* "$x < +\infty$" *folgt* "$x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty$"
und "$x - (+\infty) = -(+\infty) + x = -\infty$".

`RECH.`$\leq$-**Notation**.

Beweis **165-4** `a)` `VS` gleich $-\infty \neq x \in \mathbb{S}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \in \mathbb{S}$"
folgt via **95-15**: $(x \in \mathbb{R}) \vee (x = +\infty) \vee (x = -\infty)$.

`2.1:` Aus `1`"$(x \in \mathbb{R}) \vee (x = +\infty) \vee (x = -\infty)$" und
aus `VS` gleich "$-\infty \neq x \ldots$"
folgt: $(x \in \mathbb{R}) \vee (x = +\infty)$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.1.Fall` $x \in \mathbb{R}$.

Aus `2.1.Fall`"$x \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAVI**: $x + (+\infty) = (+\infty) + x = +\infty$.

`2.1.2.Fall` $x = +\infty$.

`3:` Aus **165-3**"$0 \leq +\infty$" und
aus `2.2.Fall`"$x = +\infty$"
folgt: $0 \leq x$.

`4:` Aus `3`"$0 \leq x$"
folgt via **109-23**: $x + (+\infty) = (+\infty) + x = +\infty$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

`A1` | "$x + (+\infty) = (+\infty) + x = +\infty$"

`2.2:` Via **165-3** gilt: $x + (+\infty) = x - (-\infty)$.

`2.3:` Via **165-3** gilt: $(+\infty) + x = -(-\infty) + x$.

`3:` Aus `2.2`"$x + (+\infty) = x - (-\infty)$" und
aus `A1` gleich "$x + (+\infty) = (+\infty) + x = +\infty$"
folgt: $x - (-\infty) = (+\infty) + x = +\infty$.

`4:` Aus `2.3`"$(+\infty) + x = -(-\infty) + x$" und
aus `3`"$x - (-\infty) = (+\infty) + x = +\infty$"
folgt: $x - (-\infty) = -(-\infty) + x = +\infty$.

`5:` Aus `A1` gleich "$x + (+\infty) = (+\infty) + x = +\infty$" und
aus `4`"$x - (-\infty) = -(-\infty) + x = +\infty$"
folgt: $(x + (+\infty) = (+\infty) + x = +\infty)$
$\wedge (x - (-\infty) = -(-\infty) + x = +\infty)$.

<u>Beweis</u> **<u>165-4</u>** `b)` `VS` gleich $-\infty < x$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$-\infty < x$"
folgt via **107-9**: $x \in \mathbb{S}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$-\infty < x$"
folgt via **41-3**: $-\infty \neq x$.

`2:` Aus `1.2`"$-\infty \neq x$" und
aus `1.1`"$x \in \mathbb{S}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $(x + (+\infty) = (+\infty) + x = +\infty)$
$\wedge (x - (-\infty) = -(-\infty) + x = +\infty)$.

Beweis **165-4** `c)` `VS` gleich $+\infty \neq x \in \mathbb{S}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \in \mathbb{S}$"
folgt via **95-15**: $(x \in \mathbb{R}) \vee (x = +\infty) \vee (x = -\infty)$.

`2:` Aus `1`"$(x \in \mathbb{R}) \vee (x = +\infty) \vee (x = -\infty)$" und
aus `VS` gleich "$+\infty \neq x \ldots$"
folgt: $(x \in \mathbb{R}) \vee (x = -\infty)$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $x \in \mathbb{R}$.

Aus `2.1.Fall`"$x \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAVI**: $x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty$.

`2.2.Fall` $x = -\infty$.

`3:` Aus `2.2.Fall`"$x = -\infty$" und
aus **165-3**"$-\infty \leq 0$"
folgt: $x \leq 0$.

`4:` Aus `3`"$x \leq 0$"
folgt via **109-23**: $x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

`A1` | "$x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty$"

`2.2:` Via **165-3** gilt: $x + (-\infty) = x - (+\infty)$.

`2.3:` Via **165-3** gilt: $(-\infty) + x = -(+\infty) + x$.

`3:` Aus `2.2`"$x + (-\infty) = x - (+\infty)$" und
aus `A1` gleich "$x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty$"
folgt: $x - (+\infty) = (-\infty) + x = -\infty$.

`4:` Aus `2.3`"$(-\infty) + x = -(+\infty) + x$" und
aus `3`"$x - (+\infty) = (-\infty) + x = -\infty$"
folgt: $x - (+\infty) = -(+\infty) + x = -\infty$.

`5:` Aus `A1` gleich "$x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty$" und
aus `4`"$x - (+\infty) = -(+\infty) + x = -\infty$"
folgt: $(x - (+\infty) = (-\infty) + x = -\infty)$
$\wedge (x - (+\infty) = -(+\infty) + x = -\infty)$.

<u>Beweis</u> **165-4** `d)` `VS` gleich $x < +\infty$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x < +\infty$"
folgt via **107-9**: $x \in \mathbb{S}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$x < +\infty$"
folgt via **41-3**: $x \neq +\infty$.

`2:` Aus `1.2`
folgt: $+\infty \neq x$.

`3:` Aus `2`"$+\infty \neq x$" und
aus `1.1`"$x \in \mathbb{S}$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`:

$$(x - (+\infty) = (-\infty) + x = -\infty)$$
$$\wedge(x - (+\infty) = -(+\infty) + x = -\infty).$$

□

165-5. Mit dem nunmehrigen Kriterium wird $x \leq y$ und $x, y \in \mathbb{R}$ anderwertig dargestellt:

165-5(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)`, `iv)`, `v)` *sind äquivalent:*

`i)` *"$x \leq y$" und "$x \in \mathbb{R}$" und "$y \in \mathbb{R}$".*

`ii)` $-\infty \neq x \leq y \neq +\infty$.

`iii)` $-\infty < x \leq y < +\infty$.

`iv)` $-\infty \neq x \leq y < +\infty$.

`v)` $-\infty < x \neq +\infty$.

≤-Notation.

Beweis **165-5** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $(x \leq y) \wedge (x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{R})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via **95-17**: $x \neq -\infty$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{R}$"
folgt via **95-17**: $y \neq +\infty$.

`2:` Aus `1.1`
folgt: $-\infty \neq x$.

`3:` Aus `2`"$\infty \neq x$",
aus `VS` gleich "$x \leq y \ldots$" und
aus `1.2`"$y \neq +\infty$"
folgt: $-\infty \neq x \leq y \neq +\infty$.

Beweis **165-5** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $-\infty \neq x \leq y \neq +\infty$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \leq y \ldots$"
folgt via **107-3**: $(x \in \mathbb{S}) \wedge (y \in \mathbb{S})$.

`2.1:` Aus `1`"$x \in \mathbb{S} \ldots$"
folgt via **95-15**: $(x \in \mathbb{R}) \vee (x = +\infty) \vee (x = -\infty)$.

`2.2:` Aus `1`"$\ldots y \in \mathbb{S}$"
folgt via **95-15**: $(y \in \mathbb{R}) \vee (y = +\infty) \vee (y = -\infty)$.

`2.3:` Aus `1`"$x \in \mathbb{S} \ldots$"
folgt via **107-5**: $-\infty \leq x$.

`2.4:` Aus `1`"$\ldots y \in \mathbb{S}$"
folgt via **107-5**: $y \leq +\infty$.

`3.1:` Aus `2.1`"$(x \in \mathbb{R}) \vee (x = +\infty) \vee (x = -\infty)$" und
aus `VS` gleich "$-\infty \neq x \ldots$"
folgt: $(x \in \mathbb{R}) \vee (x = +\infty)$.

`3.2:` Aus `2.2`"$(y \in \mathbb{R}) \vee (y = +\infty) \vee (y = -\infty)$" und
aus `VS` gleich "$\ldots y \neq +\infty$"
folgt: $(y \in \mathbb{R}) \vee (y = -\infty)$.

`3.3:` Aus `2.3`"$-\infty \leq x$"
folgt via **41-5**: $(-\infty < x) \vee (-\infty = x)$.

`3.4:` Aus `2.4`"$y \leq +\infty$"
folgt via **41-5**: $(y = +\infty) \vee (y < +\infty)$.

`4.1:` Aus `3.3`"$(-\infty < x) \vee (-\infty = x)$" und
aus `VS` gleich "$-\infty \neq x \ldots$"
folgt: $-\infty < x$.

`4.2:` Aus `3.4`"$(y = +\infty) \vee (y < +\infty)$" und
aus `VS` gleich "$\ldots y \neq +\infty$"
folgt: $y < +\infty$.

`5:` Aus `4.1`"$-\infty < x$",
aus `VS` gleich "$\ldots x \leq y \ldots$" und
aus `4.2`"$y < +\infty$"
folgt: $-\infty < x \leq y < +\infty$.

Beweis **165-5** $\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{iv)}}}$ `VS` gleich $-\infty < x \le y < +\infty$.

`1:` Aus `VS` gleich "$-\infty < x \ldots$"
folgt via **41-3**: $-\infty \neq x$.

`2:` Aus `1`"$-\infty \neq x$" und
aus `VS` gleich "$\ldots x \le y < +\infty$"
folgt: $-\infty \neq x \le y < +\infty$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iv)} \Rightarrow \texttt{v)}}}$ `VS` gleich $-\infty \neq x \le y < +\infty$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \le y \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots y < +\infty$"
folgt via **107-8**: $x < +\infty$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots y < +\infty$"
folgt via **41-3**: $y \neq +\infty$.

`2:` Aus `1.1`"$x < +\infty$"
folgt via **107-11**: $(x \in \mathbb{R}) \vee (x = -\infty)$.

`3:` Aus `2`"$(x \in \mathbb{R}) \vee (x = -\infty)$" und
aus `VS` gleich "$-\infty \neq x \ldots$"
folgt: $x \in \mathbb{R}$.

`4:` Aus `3`"$x \in \mathbb{R}$"
folgt via **107-4**: $-\infty < x$.

`5:` Aus `4`"$-\infty < x$",
aus `VS` gleich "$\ldots x \le y \ldots$" und
aus `1.2`"$y \neq +\infty$"
folgt: $-\infty < x \le y \neq +\infty$.

Beweis **165-5** $\boxed{\boxed{\texttt{v)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $-\infty < x \le y \neq +\infty.$

1: Aus `VS` gleich "$-\infty < x \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots x \le y \ldots$"
folgt via **107-8**: $-\infty < y.$

2: Aus 1"$-\infty < y$"
folgt via **107-10**: $(y \in \mathbb{R}) \vee (y = +\infty).$

3: Aus 2"$(y \in \mathbb{R}) \vee (y = +\infty)$" und
aus `VS` gleich "$\ldots y \neq +\infty$"
folgt: $y \in \mathbb{R}.$

4: Aus 3"$y \in \mathbb{R}$"
folgt via **107-4**: $y < +\infty.$

5: Aus `VS` gleich "$\ldots x \le y \ldots$" und
aus 4"$y < +\infty$"
folgt via **107-8**: $x < +\infty.$

6: Aus `VS` gleich "$-\infty < x \ldots$" und
aus 5"$x < +\infty$"
folgt via **107-4**: $x \in \mathbb{R}.$

7: Aus `VS` gleich "$\ldots x \le y \ldots$",
aus 6"$x \in \mathbb{R}$" und
aus 3"$y \in \mathbb{R}$"
folgt: $(x \le y) \wedge (x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{R}).$

$\square$

165-6. Nun wird unter anderem thematisiert, unter welchen zusätzlichen Voraussetzungen aus $x \leq y$ auf $x + (y - x) = y$ und $x = y - (y - x)$ mit $0 \leq y - x$ geschlossen werden kann:

165-6(Satz)

a) *Aus* "$-\infty \neq x \leq y \neq +\infty$"
folgt "$x \in \mathbb{R}$" *und* "$y \in \mathbb{R}$" *und* "$0 \leq y - x \in \mathbb{R}$"
und "$x + (y - x) = y$" *und* "$x = y - (y - x)$".

b) *Aus* "$x \leq y$" *und* "$x \in \mathbb{R}$" *und* "$y \in \mathbb{R}$" *folgt* "$0 \leq y - x \in \mathbb{R}$"
und "$x + (y - x) = y$" *und* "$x = y - (y - x)$".

c) *Aus* "$-\infty \neq x < y$"
folgt "$x \in \mathbb{R}$" *und* "$0 < y - x$" *und* "$x + (y - x) = y$".

d) *Aus* "$x < y$" *und* "$x \in \mathbb{R}$"
folgt "$0 < y - x$" *und* "$x + (y - x) = y$".

e) *Aus* "$x < y \neq +\infty$"
folgt "$y \in \mathbb{R}$" *und* "$0 < y - x$" *und* "$x = y - (y - x)$".

f) *Aus* "$x < y$" *und* "$y \in \mathbb{R}$"
folgt "$0 < y - x$" *und* "$x = y - (y - x)$".

g) *Aus* "$-\infty \neq x < y \neq +\infty$"
folgt "$x \in \mathbb{R}$" *und* "$y \in \mathbb{R}$" *und* "$0 < y - x \in \mathbb{R}$"
und "$x + (y - x) = y$" *und* "$x = y - (y - x)$".

h) *Aus* "$x < y$" *und* "$x \in \mathbb{R}$" *und* "$y \in \mathbb{R}$" *folgt* "$0 < y - x \in \mathbb{R}$"
und "$x + (y - x) = y$" *und* "$x = y - (y - x)$".

`RECH.`$\leq$`.`-Notation

Beweis **165-6** `a)` `VS` gleich $-\infty \neq x \leq y \neq +\infty$.

`1:` Aus `VS` gleich "$-\infty \neq x \leq y \neq +\infty$"
folgt via **165-5**: $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{R})$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \leq y \ldots$" und
aus `1`"$x \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via **109-11**: $0 \leq y - x$.

`2.2:` Aus `1`"$x \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via **117-4**: $-x \in \mathbb{R}$.

`2.3:` Aus `1`"$x \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via $\in$**SZ**: $x \in \mathbb{C}$.

`2.4:` Aus `1`"$\ldots y \in \mathbb{R}$"
folgt via $\in$**SZ**: $y \in \mathbb{C}$.

`2.5:` Aus `1`"$\ldots y \in \mathbb{R}$"
folgt via $\in$**SZ**: y Zahl.

`3.1:` Aus `1`"$\ldots y \in \mathbb{R}$" und
aus `2.2`"$-x \in \mathbb{R}$"
folgt via $+$**SZ**: $y + (-x) \in \mathbb{R}$.

`3.2:` Aus `2.3`"$x \in \mathbb{C}$" und
aus `2.5`"y Zahl"
folgt via **160-3**: $-x + (x + y) = y$.

`4.1:` Aus "$y - x = y + (-x)$" und
aus `3.1`"$y + (-x) \in \mathbb{R}$"
folgt: $y - x \in \mathbb{R}$.

`4.2:` $x + (y - x) \stackrel{\mathbf{160-7}}{=} (x + y) - x \stackrel{\mathbf{FS-+}}{=} -x + (x + y) \stackrel{3.2}{=} y$.

`5.1:` Aus `2.1`"$0 \leq y - x$" und
aus `4.1`"$y - x \in \mathbb{R}$"
folgt: $0 \leq y - x \in \mathbb{R}$.

`5.2:` Aus `4.2`
folgt: $x + (y - x) = y$.

`6:` $(y - x) + x \stackrel{\mathbf{FSA}}{=} x + (y - x) \stackrel{5.2}{=} y$.

`7:` Aus `6`"$(y - x) + x = \ldots = y$" und
aus `2.4`"$y \in \mathbb{C}$"
folgt via **102-4**: $x = y - (y - x)$.

...

Beweis **165-6** `a)` `VS` gleich $-\infty \neq x \leq y \neq +\infty$.

...

`8:` Aus `1`"$x \in \mathbb{R} \ldots$",
aus `1`"$\ldots y \in \mathbb{R}$",
aus `5.1`"$0 \leq y - x \in \mathbb{R}$",
aus `5.2`"$x + (y - x) = y$" und
aus `7`"$x = y - (y - x)$"
folgt:

$$(x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{R}) \wedge (0 \leq y - x \in \mathbb{R}) \wedge (x + (y - x) = y) \wedge (x = y - (y - x)).$$

`b)` `VS` gleich $(x \leq y) \wedge (x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{R})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via **95-17**: $x \neq -\infty$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{R}$"
folgt via **95-17**: $y \neq +\infty$.

`2:` Aus `1.1`
folgt: $-\infty \neq x$.

`3:` Aus `2`"$-\infty \neq x$",
aus `VS` gleich "$x \leq y \ldots$" und
aus `1.2`"$y \neq +\infty$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:

$$(0 \leq y - x) \wedge (x + (y - x) = y) \wedge (x = y - (y - x)).$$

<u>Beweis **165-6**</u> `c)` `VS` gleich $-\infty \neq x < y$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x < y$"
folgt via **107-9**: $(x \in \mathbb{R}) \vee (x = -\infty)$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots x < y$"
folgt via **109-7**: $0 < y - x$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots x < y$"
folgt via **107-9**: $y \in \mathbb{S}$.

`2.1:` Aus `1.1`"$(x \in \mathbb{R}) \vee (x = -\infty)$" und
aus `VS` gleich "$-\infty \neq x \ldots$"
folgt: $x \in \mathbb{R}$.

`2.2:` Aus `1.3`"$y \in \mathbb{S}$"
folgt via $\in$**SZ**: y Zahl.

`3:` Aus `2.1`"$x \in \mathbb{R}$"
folgt via $\in$**SZ**: $x \in \mathbb{C}$.

`4:` Aus `3`"$x \in \mathbb{C}$" und
aus `2.2`"y Zahl"
folgt via **160-3**: $-x + (x + y) = y$.

`5:` $x + (y - x) \stackrel{\mathbf{160-7}}{=} (x + y) - x \stackrel{\mathbf{FS}-+}{=} -x + (x + y) \stackrel{3.2}{=} y$.

`6:` Aus `2.1`"$x \in \mathbb{R}$",
aus `1.2`"$0 < y - x$" und
aus `5`"$x + (y - x) = \ldots = y$"
folgt: $(x \in \mathbb{R}) \wedge (0 < y - x) \wedge (x + (y - x) = y)$.

`d)` `VS` gleich $(x < y) \wedge (x \in \mathbb{R})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \in \mathbb{R}$"
folgt via **95-17**: $x \neq -\infty$.

`2:` Aus `1`
folgt: $-\infty \neq x$.

`3:` Aus `2`"$-\infty \neq x$" und
aus `VS` gleich "$x < y \ldots$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $(0 < y - x) \wedge (x + (y - x) = y)$.

Beweis **165-6** `e)` `VS` gleich $x < y \neq +\infty$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x < y$"
folgt via **107-9**: $(y \in \mathbb{R}) \vee (y = +\infty)$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots x < y$"
folgt via **109-7**: $0 < y - x$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots x < y$"
folgt via **107-9**: $x \in \mathbb{S}$.

`2.1:` Aus `1.1`"$(y \in \mathbb{R}) \vee (y = +\infty)$" und
aus `VS` gleich "$\ldots y \neq +\infty$"
folgt: $y \in \mathbb{R}$.

`2.2:` Aus `1.3`"$x \in \mathbb{S}$"
folgt via $\in$**SZ**: x Zahl.

`3:` Aus `2.1`"$y \in \mathbb{R}$"
folgt via $\in$**SZ**: $y \in \mathbb{C}$.

`4:` Aus `3`"$y \in \mathbb{C}$" und
aus `2.2`"x Zahl"
folgt via **160-3**: $-y + (y + x) = x$.

`5:`
$$\begin{aligned} & y - (y - x) \\ &= y + (-(y - x)) \\ &\overset{\mathbf{FS}-+}{=} y + (x - y) \\ &\overset{\mathbf{160-7}}{=} (y + x) - y \\ &\overset{\mathbf{FS}-+}{=} -y + (y + x) \\ &\overset{\mathbf{4}}{=} x. \end{aligned}$$

`6:` Aus `5`"$y - (y - x) = \ldots = x$"
folgt: $x = y - (y - x)$.

`7:` Aus `2.1`"$y \in \mathbb{R}$",
aus `1.2`"$0 < y - x$" und
aus `6`"$x = y - (y - x)$"
folgt: $(y \in \mathbb{R}) \wedge (0 < y - x) \wedge (x = y - (y - x))$.

<u>Beweis</u> **165-6** `f)` `VS` gleich $(x<y)\wedge(y\in\mathbb{R})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots y\in\mathbb{R}$"
folgt via **95-17**: $y\neq+\infty$.

`2:` Aus `VS` gleich "$x<y\ldots$" und
aus `1`"$y\neq+\infty$"
folgt via des bereits bewiesenen `e)`: $(0<y-x)\wedge(x=y-(y-x))$.

`g)` `VS` gleich $-\infty\neq x<y\neq+\infty$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$-\infty\neq x<y\ldots$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`:
$(x\in\mathbb{R})\wedge(0<y-x)\wedge(x+(y-x)=y)$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots x<y\neq+\infty$"
folgt via des bereits bewiesenen `e)`:
$(y\in\mathbb{R})\wedge(0<y-x)\wedge(x=y-(y-x))$.

`2:` Aus `1.1`"$x\in\mathbb{R}\ldots$"
folgt via **117-4**: $-x\in\mathbb{R}$.

`3:` Aus `1.2`"$y\in\mathbb{R}$" und
aus `2`"$-x\in\mathbb{R}$"
folgt via $+$**SZ**: $y+(-x)\in\mathbb{R}$.

`4:` Aus "$y-x=y+(-x)$" und
aus `3`"$y+(-x)\in\mathbb{R}$"
folgt: $y-x\in\mathbb{R}$.

`5:` Aus `1.1`"$\ldots 0<y-x\ldots$" und
aus `4`"$y-x\in\mathbb{R}$"
folgt: $0<y-x\in\mathbb{R}$.

`6:` Aus `1.1`"$x\in\mathbb{R}\ldots$",
aus `1.2`"$y\in\mathbb{R}\ldots$",
aus `5`"$0<y-x\in\mathbb{R}$",
aus `1.1`"$\ldots x+(y-x)=y$" und
aus `1.2`"$\ldots x=y-(y-x)$"
folgt:
$(x\in\mathbb{R})\wedge(y\in\mathbb{R})\wedge(0<y-x\in\mathbb{R})\wedge(x+(y-x)=y)\wedge(x=y-(y-x))$.

.

Beweis **165-6** `h)` `VS` gleich $(x < y) \wedge (x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{R})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via **95-17**: $x \neq -\infty$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{R}$"
folgt via **95-17**: $y \neq +\infty$.

`2:` Aus `1.1`
folgt: $-\infty \neq x$.

`3:` Aus `2`"$-\infty \neq x$",
aus `VS` gleich "$x < y \ldots$" und
aus `1.2`"$y \neq +\infty$"
folgt via des bereits bewiesenen `g)`:

$$(0 < y - x \in \mathbb{R}) \wedge (x + (y - x) = y) \wedge (x = y - (y - x)).$$

□

165-7. Das vorliegende Resultat ist *außer in* `ac)` eine "Anonymisierung" von **165-6** bezüglich $y - x$. Die Beweis-Reihenfolge ist `b) - d) - e) - f) - g) - h) - a) - c)`:

165-7(Satz)

`a)` *Aus* "$-\infty \neq x \leq y$" *folgt* "$\exists \Omega : (0 \leq \Omega) \wedge (x + \Omega = y)$".

`b)` *Aus* "$-\infty \neq x < y$" *folgt* "$\exists \Omega : (0 < \Omega) \wedge (x + \Omega = y)$".

`c)` *Aus* "$x \leq y \neq +\infty$" *folgt* "$\exists \Omega : (0 \leq \Omega) \wedge (x = y - \Omega)$".

`d)` *Aus* "$x < y \neq +\infty$" *folgt* "$\exists \Omega : (0 < \Omega) \wedge (x = y - \Omega)$".

`e)` *Aus* "$-\infty \neq x \leq y \neq +\infty$"
folgt "$\exists \Omega : (0 \leq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (x + \Omega = y) \wedge (x = y - \Omega)$".

`f)` *Aus* "$-\infty \neq x < y \neq +\infty$"
folgt "$\exists \Omega : (0 < \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (x + \Omega = y) \wedge (x = y - \Omega)$".

`g)` *Aus* "$x \leq y$" *und* "$x \in \mathbb{R}$" *und* "$y \in \mathbb{R}$"
folgt "$\exists \Omega : (0 \leq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (x + \Omega = y) \wedge (x = y - \Omega)$".

`h)` *Aus* "$x < y$" *und* "$x \in \mathbb{R}$" *und* "$y \in \mathbb{R}$"
folgt "$\exists \Omega : (0 < \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (x + \Omega = y) \wedge (x = y - \Omega)$".

`RECH.`$\leq$-**Notation**.

Beweis **165-7** `b)` `VS` gleich $-\infty \neq x < y$.

`1:` Aus `VS` gleich "$-\infty \neq x < y$"
folgt via **165-6**: $(0 < y - x) \wedge (x + (y - x) = y)$.

`2:` Es gilt: $\exists \Omega : \Omega = y - x$.

`3:` Aus `1`"$(0 < y - x) \wedge (x + (y - x) = y)$" und
aus `2`"$\ldots \Omega = y - x$"
folgt: $(0 < \Omega) \wedge (x + \Omega = y)$.

`4:` Aus `2`"$\exists \Omega \ldots$" und
aus `3`"$(0 < \Omega) \wedge (x + \Omega = y)$"
folgt: $\exists \Omega : (0 < \Omega) \wedge (x + \Omega = y)$.

`d)` `VS` gleich $x < y \neq +\infty$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x < y \neq +\infty$"
folgt via **165-6**: $(0 < y - x) \wedge (x = y - (y - x))$.

`2:` Es gilt: $\exists \Omega : \Omega = y - x$.

`3:` Aus `1`"$(0 < y - x) \wedge (x = y - (y - x))$" und
aus `2`"$\ldots \Omega = y - x$"
folgt: $(0 < \Omega) \wedge (x = y - \Omega)$.

`4:` Aus `2`"$\exists \Omega \ldots$" und
aus `3`"$(0 < \Omega) \wedge (x = y - \Omega)$"
folgt: $\exists \Omega : (0 < \Omega) \wedge (x = y - \Omega)$.

`e)` `VS` gleich $-\infty \neq x \leq y \neq +\infty$.

`1:` Aus `VS` gleich "$-\infty \neq x \leq y \neq +\infty$"
folgt via **165-6**: $(0 \leq y - x \in \mathbb{R}) \wedge (x + (y - x) = y) \wedge (x = y - (y - x))$.

`2:` Es gilt: $\exists \Omega : \Omega = y - x$.

`3:` Aus `1`"$(0 \leq y - x \in \mathbb{R}) \wedge (x + (y - x) = y) \wedge (x = y - (y - x))$" und
aus `2`"$\ldots \Omega = y - x$"
folgt: $(0 \leq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (x + \Omega = y) \wedge (x = y - \Omega)$.

`4:` Aus `2`"$\exists \Omega \ldots$" und
aus `3`"$(0 \leq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (x + \Omega = y) \wedge (x = y - \Omega)$"
folgt: $\exists \Omega : (0 \leq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (x + \Omega = y) \wedge (x = y - \Omega)$.

<u>Beweis</u> **165-7** `f)` `VS` gleich $-\infty \neq x < y \neq +\infty$.

`1:` Aus `VS` gleich "$-\infty \neq x < y \neq +\infty$"
folgt via **165-6**: $(0 < y - x \in \mathbb{R}) \wedge (x + (y - x) = y) \wedge (x = y - (y - x))$.

`2:` Es gilt: $\exists \Omega : \Omega = y - x$.

`3:` Aus `1`"$(0 < y - x \in \mathbb{R}) \wedge (x + (y - x) = y) \wedge (x = y - (y - x))$" und
aus `2`"$\ldots \Omega = y - x$"
folgt: $(0 < \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (x + \Omega = y) \wedge (x = y - \Omega)$.

`4:` Aus `2`"$\exists \Omega \ldots$" und
aus `3`"$(0 < \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (x + \Omega = y) \wedge (x = y - \Omega)$"
folgt: $\exists \Omega : (0 < \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (x + \Omega = y) \wedge (x = y - \Omega)$.

`g)` `VS` gleich $(x \leq y) \wedge (x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{R})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \leq y \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots x \in \mathbb{R} \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{R}$"
folgt via **165-6**: $(0 \leq y - x \in \mathbb{R}) \wedge (x + (y - x) = y) \wedge (x = y - (y - x))$.

`2:` Es gilt: $\exists \Omega : \Omega = y - x$.

`3:` Aus `1`"$(0 \leq y - x \in \mathbb{R}) \wedge (x + (y - x) = y) \wedge (x = y - (y - x))$" und
aus `2`"$\ldots \Omega = y - x$"
folgt: $(0 \leq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (x + \Omega = y) \wedge (x = y - \Omega)$.

`4:` Aus `2`"$\exists \Omega \ldots$" und
aus `3`"$(0 \leq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (x + \Omega = y) \wedge (x = y - \Omega)$"
folgt: $\exists \Omega : (0 \leq \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (x + \Omega = y) \wedge (x = y - \Omega)$.

`h)` `VS` gleich $(x < y) \wedge (x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{R})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x < y \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots x \in \mathbb{R} \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{R}$"
folgt via **165-6**: $(0 < y - x \in \mathbb{R}) \wedge (x + (y - x) = y) \wedge (x = y - (y - x))$.

`2:` Es gilt: $\exists \Omega : \Omega = y - x$.

`3:` Aus `1`"$(0 < y - x \in \mathbb{R}) \wedge (x + (y - x) = y) \wedge (x = y - (y - x))$" und
aus `2`"$\ldots \Omega = y - x$"
folgt: $(0 < \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (x + \Omega = y) \wedge (x = y - \Omega)$.

`4:` Aus `2`"$\exists \Omega \ldots$" und
aus `3`"$(0 < \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (x + \Omega = y) \wedge (x = y - \Omega)$"
folgt: $\exists \Omega : (0 < \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (x + \Omega = y) \wedge (x = y - \Omega)$.

<u>Beweis</u> **165-7** `a)` `VS` gleich $-\infty \neq x \leq y.$

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \leq y$"
folgt via **107-3**: $x \in \mathbb{S}.$

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \leq y$"
folgt via **41-5**: $(x < y) \vee (x = y).$

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $x < y.$

`3:` Aus `VS` gleich "$-\infty \neq x \ldots$" und
aus `2.1.Fall` "$x < y$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`:
$\exists \Omega : (0 < \Omega) \wedge (x + \Omega = y).$

`4:` Aus `3` "$\ldots 0 < \Omega \ldots$"
folgt via **41-3**: $0 \leq \Omega.$

`5:` Aus `3` "$\exists \Omega \ldots$",
aus `4` "$0 \leq \Omega$" und
aus `2` "$\ldots x + \Omega = y$"
folgt: $\exists \Omega : (0 \leq \Omega) \wedge (x + \Omega = y).$

...

Beweis **165-7** `a)` `VS` gleich $-\infty \neq x \leq y$.

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{2.2.Fall}}$ $x = y$.

`3:` Aus `1`"$x \in \mathbb{S}$"
folgt via $\in$**SZ**: x Zahl.

`4:` Aus `3`"x Zahl"
folgt via **FSA**0: $x + 0 = x$.

`5.1:` Es gilt: $\exists \Omega : \Omega = 0$.

`5.2:` Aus `4`"$x + 0 = x$" und
aus `2.2.Fall`"$x = y$"
folgt: $x + 0 = y$.

`6.1:` Aus **107-6**"$0 \leq 0$" und
aus `5.1`"$\ldots \Omega = 0$"
folgt: $0 \leq \Omega$.

`6.2:` Aus `5.2`"$x + 0 = y$" und
aus `5.1`"$\ldots \Omega = 0$"
folgt: $x + \Omega = y$.

`7:` Aus `5.1`"$\exists \Omega \ldots$",
aus `6.1`"$0 \leq \Omega$" und
aus `6.2`"$x + \Omega = y$"
folgt: $\exists \Omega : (0 \leq \Omega) \wedge (x + \Omega = y)$.

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In beiden Fällen gilt:
$\exists \Omega : (0 \leq \Omega) \wedge (x + \Omega = y)$.

Beweis **165-7** `c)` `VS` gleich $x \leq y \neq +\infty$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \leq y$"
folgt via **107-3**: $y \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \leq y$"
folgt via **41-5**: $(x < y) \vee (x = y)$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $x < y$.

`3:` Aus `2.1.Fall`"$x < y$" und
aus `VS` gleich "$\ldots y \neq +\infty$"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`:
$\exists \Omega : (0 < \Omega) \wedge (x = y - \Omega)$.

`4:` Aus `3`"$\ldots 0 < \Omega \ldots$"
folgt via **41-3**: $0 \leq \Omega$.

`5:` Aus `3`"$\exists \Omega \ldots$",
aus `4`"$0 \leq \Omega$" und
aus `2`"$\ldots x = y - \Omega$"
folgt: $\exists \Omega : (0 \leq \Omega) \wedge (x = y - \Omega)$.

...

Beweis **165-7** `c)` `VS` gleich $-\infty \neq x \leq y$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.2.Fall` $x = y$.

`3:` Aus `1` "$y \in \mathbb{S}$"
folgt via $\in$**SZ**: y Zahl.

`4:` Aus `3` "y Zahl"
folgt via **FSA**0: $y = y + 0$.

`5.1:` Es gilt: $\exists \Omega : \Omega = 0$.

`5.2:` Via **98-15** gilt: $y + 0 = y - 0$.

`6.1:` Aus **107-6** "$0 \leq 0$" und
aus `5.1` "$\ldots \Omega = 0$"
folgt: $0 \leq \Omega$.

`6.2:` Aus `4` "$y = y + 0$" und
aus `5.2` "$y + 0 = y - 0$"
folgt: $y = y - 0$.

`7:` Aus `2.2.Fall` "$x = y$" und
aus `6.2` "$y = y - 0$"
folgt: $x = y - 0$.

`8:` Aus `7` "$x = y - 0$" und
aus `5.1` "$\ldots \Omega = 0$"
folgt: $x = y - \Omega$.

`9:` Aus `5.1` "$\exists \Omega \ldots$",
aus `6.1` "$0 \leq \Omega$" und
aus `8` "$x = y - \Omega$"
folgt: $\exists \Omega : (0 \leq \Omega) \wedge (x = y - \Omega)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

$$\exists \Omega : (0 \leq \Omega) \wedge (x = y - \Omega).$$

□

$-2, -1, 0, 1, 2$ sind ganze Zahlen.
$+\infty, -\infty$ sind keine ganzen Zahlen.
Einiges über $\leq$ in $\mathbb{Z}$ und in $\mathbb{N}$.

Ersterstellung: 03/05/12 **Letzte Änderung: 04/05/12**

166-1. Klarer Weise sind $-2, -1, 0, 1, 2$ ganze Zahlen. Da $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ TeilKlassen von $\mathbb{R}$ sind, sind weder $+\infty$ noch $-\infty$ Elemente von $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$:

166-1(Satz)

a) *"$-2 \in \mathbb{Z}$" und "$-1 \in \mathbb{Z}$" und "$0 \in \mathbb{Z}$" und "$1 \in \mathbb{Z}$" und "$2 \in \mathbb{Z}$".*

b) $+\infty \notin \mathbb{N}$.

c) $-\infty \notin \mathbb{N}$.

d) $+\infty \notin \mathbb{Z}$.

e) $-\infty \notin \mathbb{Z}$.

f) *Aus "$p = +\infty$" folgt "$p \notin \mathbb{N}$" und "$p \notin \mathbb{Z}$".*

g) *Aus "$p = -\infty$" folgt "$p \notin \mathbb{N}$" und "$p \notin \mathbb{Z}$".*

h) *Aus "$p \in \mathbb{N}$" folgt "$p \neq +\infty$" und "$p \neq -\infty$".*

i) *Aus "$p \in \mathbb{Z}$" folgt "$p \neq +\infty$" und "$p \neq -\infty$".*

Beweis **166-1** a)

1.1: Aus **159-10**"$2 \in \mathbb{N}$"
folgt via **164-6**: $-2 \in \mathbb{Z}$.

1.2: Aus **159-10**"$1 \in \mathbb{N}$"
folgt via **164-6**: $-1 \in \mathbb{Z}$.

1.3: Aus **159-10**"$0 \in \mathbb{N}$"
folgt via **164-6**: $0 \in \mathbb{Z}$.

1.4: Aus **159-10**"$1 \in \mathbb{N}$"
folgt via **164-6**: $1 \in \mathbb{Z}$.

1.5: Aus **159-10**"$2 \in \mathbb{N}$"
folgt via **164-6**: $2 \in \mathbb{Z}$.

2: Aus 1.1,
aus 1.2,
aus 1.3,
aus 1.4 und
aus 1.5
folgt: $(-2 \in \mathbb{Z}) \wedge (-1 \in \mathbb{Z}) \wedge (0 \in \mathbb{Z}) \wedge (1 \in \mathbb{Z}) \wedge (2 \in \mathbb{Z})$.

Beweis **166-1** `b)`

Aus **AAI**"$+\infty \notin \mathbb{R}$" und
aus **159-10**"$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$"
folgt via **0-4**: $+\infty \notin \mathbb{N}$.

`c)`

Aus **AAI**"$+\infty \notin \mathbb{R}$" und
aus **164-4**"$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$"
folgt via **0-4**: $+\infty \notin \mathbb{Z}$.

`d)`

Aus **AAI**"$-\infty \notin \mathbb{R}$" und
aus **159-10**"$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$"
folgt via **0-4**: $-\infty \notin \mathbb{N}$.

`e)`

Aus **AAI**"$-\infty \notin \mathbb{R}$" und
aus **164-4**"$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$"
folgt via **0-4**: $-\infty \notin \mathbb{Z}$.

`f)` `VS` gleich $p = +\infty$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p = +\infty$"
folgt via **95-18**: $p \notin \mathbb{R}$.

`2.1:` Aus `1`"$p \notin \mathbb{R}$" und
aus **159-10**"$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$"
folgt via **0-4**: $p \notin \mathbb{N}$.

`2.2:` Aus `1`"$p \notin \mathbb{R}$" und
aus **164-4**"$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$"
folgt via **0-4**: $p \notin \mathbb{Z}$.

`3:` Aus `2.1` und
aus `2.2`
folgt: $(p \notin \mathbb{N}) \wedge (p \notin \mathbb{Z})$.

<u>Beweis</u> **166-1** `g)` `VS` gleich $p = -\infty$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p = -\infty$"
folgt via **95-18**: $p \notin \mathbb{R}$.

`2.1:` Aus `1`"$p \notin \mathbb{R}$" und
aus **159-10**"$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$"
folgt via **0-4**: $p \notin \mathbb{N}$.

`2.2:` Aus `1`"$p \notin \mathbb{R}$" und
aus **164-4**"$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$"
folgt via **0-4**: $p \notin \mathbb{Z}$.

`3:` Aus `2.1` und
aus `2.2`
folgt: $(p \notin \mathbb{N}) \wedge (p \notin \mathbb{Z})$.

`h)` `VS` gleich $p \in \mathbb{N}$.

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $+\infty \notin \mathbb{N}$.

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `c)` gilt: $-\infty \notin \mathbb{N}$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "$p \in \mathbb{N}$" und
aus `1.1`"$+\infty \notin \mathbb{N}$"
folgt via **0-1**: $p \neq +\infty$.

`2.2:` Aus `VS` gleich "$p \in \mathbb{N}$" und
aus `1.2`"$-\infty \notin \mathbb{N}$"
folgt via **0-1**: $p \neq -\infty$.

`3:` Aus `2.1` und
aus `2.2`
folgt: $(p \neq +\infty) \wedge (p \neq -\infty)$.

Beweis **166-1** `i)` `VS` gleich $p \in \mathbb{Z}$.

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `d)` gilt: $+\infty \notin \mathbb{Z}$.

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `e)` gilt: $-\infty \notin \mathbb{Z}$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "$p \in \mathbb{Z}$" und
aus `1.1`"$+\infty \notin \mathbb{Z}$"
folgt via **0-1**: $p \neq +\infty$.

`2.2:` Aus `VS` gleich "$p \in \mathbb{Z}$" und
aus `1.2`"$-\infty \notin \mathbb{Z}$"
folgt via **0-1**: $p \neq -\infty$.

`3:` Aus `2.1` und
aus `2.2`
folgt: $(p \neq +\infty) \wedge (p \neq -\infty)$.

□

166-2. Nun werden Resultate von **165-2** für natürliche oder ganze Zahlen spezifiziert:

<u>**166-2(Satz)**</u>

a) *Aus* "$x \in \mathbb{S}$" *und* "$n \in \mathbb{N}$" *folgt* "$x \leq x+n$" *und* "$x-n \leq x$".

b) *Aus* "$l \in \mathbb{Z}$" *und* "$0 \leq y$" *folgt* "$l \leq l+y$" *und* "$l-y \leq l$".

c) *Aus* "$l \in \mathbb{Z}$" *und* "$n \in \mathbb{N}$" *folgt* "$l \leq l+n$" *und* "$l-n \leq l$"

d) *Aus* "$x \in \mathbb{R}$" *und* "$0 \neq n \in \mathbb{N}$" *folgt* "$x < x+n$" *und* "$x-n < x$".

e) *Aus* "$l \in \mathbb{Z}$" *und* "$0 < y$" *folgt* "$l < l+y$" *und* "$l-y < l$".

f) *Aus* "$l \in \mathbb{Z}$" *und* "$0 \neq n \in \mathbb{N}$" *folgt* "$l < l+n$" *und* "$l-n < l$".

<u>`RECH.`$\leq$-**Notation**</u>.

<u>Beweis **166-2**</u> `a)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{S}) \wedge (n \in \mathbb{N})$.

`1.1`: Aus `VS` gleich "$\ldots n \in \mathbb{N}$"
folgt via **159-11**: $0 \leq n$.

`1.2`: Aus `VS` gleich "$\ldots n \in \mathbb{N}$"
folgt via **159-11**: $n \in \mathbb{R}$.

`2`: Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $0 \leq n \in \mathbb{R}$.

`3.1`: Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{S} \ldots$" und
aus 2"$0 \leq n \in \mathbb{R}$"
folgt via **165-2**: $x \leq x+n$.

`3.2`: Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{S} \ldots$" und
aus 2"$0 \leq n \in \mathbb{R}$"
folgt via **165-2**: $x-n \leq x$.

`4`: Aus `3.1` und
aus `3.2`
folgt: $(x \leq x+n) \wedge (x-n \leq x)$.

<u>Beweis</u> **166-2** `b)` `VS` gleich $(l \in \mathbb{Z}) \wedge (0 \leq y)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$l \in \mathbb{Z} \ldots$"
folgt via **166-1**: $(l \neq +\infty) \wedge (l \neq -\infty)$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$l \in \mathbb{Z} \ldots$"
folgt via **164-5**: $l \in \mathbb{S}$.

`2.1:` Aus `1.1`"$l \neq +\infty \ldots$"
folgt: $+\infty \neq l$.

`2.2:` Aus `1.1`"$\ldots l \neq -\infty$"
folgt: $-\infty \neq l$.

`3.1:` Aus `2.2`"$-\infty \neq l$",
aus `1.2`"$l \in \mathbb{S}$" und
aus `VS` gleich "$\ldots 0 \leq y$"
folgt via **165-2**: $l \leq l + y$.

`3.2:` Aus `2.1`"$+\infty \neq l$",
aus `1.2`"$l \in \mathbb{S}$" und
aus `VS` gleich "$\ldots 0 \leq y$"
folgt via **165-2**: $l - y \leq l$.

`4:` Aus `3.1` und
aus `3.2`
folgt: $(l \leq l + y) \wedge (l - y \leq l)$.

`c)` `VS` gleich $(l \in \mathbb{Z}) \wedge (n \in \mathbb{N})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots n \in \mathbb{N}$"
folgt via **159-11**: $0 \leq n$.

`2:` Aus `VS` gleich "$l \in \mathbb{Z} \ldots$" und
aus `1`"$0 \leq n$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $(l \leq l + n) \wedge (l - n \leq l)$.

Beweis **166-2** `d)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{R}) \wedge (0 \neq n \in \mathbb{N})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots 0 \neq n \in \mathbb{N}$"
folgt via **162-2**: $0 < n \in \mathbb{N}$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{R} \ldots$" und
aus `1`"$0 < n$"
folgt via **165-2**: $x < x + n$.

`2.2:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{R} \ldots$" und
aus `1`"$0 < n$"
folgt via **165-2**: $x - n < x$.

`3:` Aus `2.1` und
aus `2.2`
folgt: $(x < x + n) \wedge (x - n < x)$.

`e)` `VS` gleich $(l \in \mathbb{Z}) \wedge (0 < y)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$l \in \mathbb{Z} \ldots$"
folgt via **164-5**: $l \in \mathbb{R}$.

`2.1:` Aus `1`"$l \in \mathbb{R}$" und
aus `VS` gleich "$\ldots 0 < y$"
folgt via **165-2**: $l < l + y$.

`2.2:` Aus `1`"$l \in \mathbb{R}$" und
aus `VS` gleich "$\ldots 0 < y$"
folgt via **165-2**: $l - y < l$.

`3:` Aus `2.1` und
aus `2.2`
folgt: $(l < l + y) \wedge (l - y < l)$.

`f)` `VS` gleich $(l \in \mathbb{Z}) \wedge (0 \neq n \in \mathbb{N})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots 0 \neq n \in \mathbb{N}$"
folgt via **162-2**: $0 < n \in \mathbb{N}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$l \in \mathbb{Z} \ldots$" und
aus `1`"$0 < n \ldots$"
folgt via des bereits bewiesenen `e)`: $(l < l + n) \wedge (l - n < l)$.

$\square$

166-3. Nun werden Resultate von **165-6** für ganze Zahlen spezifiziert:

<u>**166-3(Satz)**</u>

a) *Aus "$l \in \mathbb{Z}$" und "$m \in \mathbb{Z}$" und "$l \leq m$" folgt "$m - l \in \mathbb{N}$"*
und "$l + (m - l) = m$" und "$l = m - (m - l)$".

b) *Aus "$l \in \mathbb{Z}$" und "$m \in \mathbb{Z}$" und "$l < m$" folgt "$0 \neq m - l \in \mathbb{N}$"*
und "$l + (m - l) = m$" und "$l = m - (m - l)$".

<u>`RECH.`$\leq$-**Notation**</u>.

<u>Beweis **166-3**</u> `a)` `VS` gleich $(l \in \mathbb{Z}) \wedge (m \in \mathbb{Z}) \wedge (l \leq m)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$l \in \mathbb{Z} \ldots$"
folgt via **164-5**: $l \in \mathbb{R}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots m \in \mathbb{Z} \ldots$"
folgt via **164-5**: $m \in \mathbb{R}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots l \leq m$",
aus `1.1`"$l \in \mathbb{R}$" und
aus `1.2`"$m \in \mathbb{R}$"
folgt via **165-6**: $(0 \leq m - l \in \mathbb{R}) \wedge (l + (m - l) = m) \wedge (m = l - (l - m))$.

`3:` Aus `VS` gleich "$\ldots m \in \mathbb{Z} \ldots$" und
aus `VS` gleich "$l \in \mathbb{Z} \ldots$"
folgt via **164-9**: $m - l \in \mathbb{Z}$.

`4:` Aus `3`"$m - l \in \mathbb{Z}$" und
aus `2`"$0 \leq m - l \ldots$"
folgt via **164-6**: $m - l \in \mathbb{N}$.

`5:` Aus `4`"$m - l \in \mathbb{N}$",
aus `2`"$\ldots l + (m - l) = m \ldots$" und
aus `2`"$m = l - (l - m)$"
folgt: $(m - l \in \mathbb{N}) \wedge (l + (m - l) = m) \wedge (m = l - (l - m))$.

Beweis **166-3** `b)` `VS` gleich $(l \in \mathbb{Z}) \wedge (m \in \mathbb{Z}) \wedge (l < m)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$l \in \mathbb{Z} \ldots$"
folgt via **164-5**: $l \in \mathbb{R}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots m \in \mathbb{Z} \ldots$"
folgt via **164-5**: $m \in \mathbb{R}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots l < m$",
aus `1.1`"$l \in \mathbb{R}$" und
aus `1.2`"$m \in \mathbb{R}$"
folgt via **165-6**: $(0 < m - l \in \mathbb{R}) \wedge (l + (m - l) = m) \wedge (m = l - (l - m))$.

`3.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots m \in \mathbb{Z} \ldots$" und
aus `VS` gleich "$l \in \mathbb{Z} \ldots$"
folgt via **164-9**: $m - l \in \mathbb{Z}$.

`3.2:` Aus `2`"$0 < m - l \ldots$"
folgt via **41-3**: $0 \leq m - l$.

`4:` Aus `3.1`"$m - l \in \mathbb{Z}$" und
aus `3.2`"$0 \leq m - l \ldots$"
folgt via **164-6**: $m - l \in \mathbb{N}$.

`5:` Aus `2`"$0 < m - l \ldots$" und
aus `4`"$m - l \in \mathbb{N}$"
folgt via **162-2**: $0 \neq m - l \in \mathbb{N}$.

`6:` Aus `5`"$0 \neq m - l \in \mathbb{N}$",
aus `2`"$\ldots l + (m - l) = m \ldots$" und
aus `2`"$m = l - (l - m)$"
folgt: $(0 \neq m - l \in \mathbb{N}) \wedge (l + (m - l) = m) \wedge (m = l - (l - m))$.

$\square$

166-4. Als Folgerung aus **166-3** ergeben sich Resultate, die auch als Spezifikation von Teilen von **165-5** für ganze Zahlen angesehen werden können:

166-4(Satz)

a) *Aus* "$l \in \mathbb{Z}$" *und* "$m \in \mathbb{Z}$" *und* "$l \leq m$"
folgt "$\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (l + \Omega = m) \wedge (l = m - \Omega)$".

b) *Aus* "$l \in \mathbb{Z}$" *und* "$m \in \mathbb{Z}$" *und* "$l < m$"
folgt "$\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{N}) \wedge (l + \Omega = m) \wedge (l = m - \Omega)$".

`RECH.`$\leq$-**Notation**.

Beweis **166-4** `a)` `VS` gleich $(l \in \mathbb{Z}) \wedge (m \in \mathbb{Z}) \wedge (l \leq m)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$l \in \mathbb{Z} \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots m \in \mathbb{Z} \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots l \leq m$"
folgt via **166-3**: $(m - l \in \mathbb{N}) \wedge (l + (m - l) = m) \wedge (m = l - (l - m))$.

`2:` Es gilt: $\exists \Omega : \Omega = m - l$.

`3:` Aus `2`"$\ldots \Omega = m - l$" und
aus `1`"$(m - l \in \mathbb{N}) \wedge (l + (m - l) = m) \wedge (m = l - (l - m))$"
folgt: $(\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (l + \Omega = m) \wedge (m = l - \Omega)$.

`4:` Aus `2`"$\exists \Omega \ldots$" und
aus `3`"$(\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (l + \Omega = m) \wedge (m = l - \Omega)$"
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (l + \Omega = m) \wedge (m = l - \Omega)$.

`b)` `VS` gleich $(l \in \mathbb{Z}) \wedge (m \in \mathbb{Z}) \wedge (l < m)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$l \in \mathbb{Z} \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots m \in \mathbb{Z} \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots l < m$"
folgt via **166-3**: $(0 \neq m - l \in \mathbb{N}) \wedge (l + (m - l) = m) \wedge (m = l - (l - m))$.

`2:` Es gilt: $\exists \Omega : \Omega = m - l$.

`3:` Aus `2`"$\ldots \Omega = m - l$" und
aus `1`"$(0 \neq m - l \in \mathbb{N}) \wedge (l + (m - l) = m) \wedge (m = l - (l - m))$"
folgt: $(0 \neq \Omega \in \mathbb{N}) \wedge (l + \Omega = m) \wedge (m = l - \Omega)$.

`4:` Aus `2`"$\exists \Omega \ldots$" und
aus `3`"$(0 \neq \Omega \in \mathbb{N}) \wedge (l + \Omega = m) \wedge (m = l - \Omega)$"
folgt: $\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{N}) \wedge (l + \Omega = m) \wedge (m = l - \Omega)$.

$\square$

166-5. Da für $l, m \in \mathbb{Z}$ stets $(m < l) \vee (l \leq m)$ oder $(m \leq l) \vee (l < m)$ gilt, ergeben sich aus **166-4** ohne viel Mühe die vorliegenden Resultate. Beim Beweis wird erstmalig bei einer Fallunterscheidung eine abkürzende Argumentationslinie eingesetzt. Ab sofort wird, wenn eine Aussage der Form "$\mathtt{A} \vee \mathtt{B}$" via Fallunterscheidung bewiesen wird und bei einigen Fällen "$\mathtt{A}$" und bei den anderen "$\mathtt{B}$" gefolgert wird, zum Abschluss jeden Falles nur mehr "$\mathtt{A}$" oder "$\mathtt{B}$" notiert und am Ende der Fallunterscheidung wird wie gehabt "In allen(beiden) Fällen gilt $\mathtt{A} \vee \mathtt{B}$" geschrieben. Auch soll ab sofort, wenn sich bei einem oder mehreren Fällen die Aussage "$\mathtt{A} \vee \mathtt{B}$" und bei einem oder mehreren Fällen "$\mathtt{A}$" (oder "$\mathtt{B}$") gefolgert wird, die Fallunterscheidung mit "In allen(beiden) Fällen gilt $\mathtt{A} \vee \mathtt{B}$" zusammengefasst werden. Ähnlich soll ab sofort auch bei Beweisen via Fallunterscheidung von "$\mathtt{A} \vee \mathtt{B} \vee \mathtt{C}$" (oder einer noch mehrstelligeren Oder-Verknüpfung von Aussagen) verfahren werden:

166-5(Satz)

a) *Aus "$l \in \mathbb{Z}$" und "$m \in \mathbb{Z}$" folgt "$m < l$"*
oder "$\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (l + \Omega = m) \wedge (l = m - \Omega)$".

b) *Aus "$l \in \mathbb{Z}$" und "$m \in \mathbb{Z}$" folgt "$m \leq l$"*
oder "$\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{N}) \wedge (l + \Omega = m) \wedge (l = m - \Omega)$".

RECH.$\leq$-**Notation**.

Beweis **166-5** `a)` `VS` gleich $(l \in \mathbb{Z}) \wedge (m \in \mathbb{Z})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$l \in \mathbb{Z} \ldots$"
folgt via **164-5**: $l \in \mathbb{S}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots m \in \mathbb{Z}$"
folgt via **164-5**: $m \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `1.2`"$m \in \mathbb{S}$" und
aus `1.1`"$l \in \mathbb{S}$"
folgt via **107-14**: $(m < l) \vee (l \leq m)$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $m < l$.

`2.2.Fall` $l \leq m$.

Aus `VS` gleich "$l \in \mathbb{Z} \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots m \in \mathbb{Z}$" und
aus `2.2.Fall`"$l \leq m$"
folgt via **166-4**: $\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (l + \Omega = m) \wedge (l = m - \Omega)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

$$(m < l) \vee (\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (l + \Omega = m) \wedge (l = m - \Omega)).$$

Beweis **166-5** `b) a) VS` gleich $(l \in \mathbb{Z}) \wedge (m \in \mathbb{Z})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$l \in \mathbb{Z} \dots$"
folgt via **164-5**: $l \in \mathbb{S}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\dots m \in \mathbb{Z}$"
folgt via **164-5**: $m \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `1.2`"$m \in \mathbb{S}$" und
aus `1.1`"$l \in \mathbb{S}$"
folgt via **107-14**: $(m \leq l) \vee (l < m)$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $m \leq l$.

`2.2.Fall` $l < m$.

Aus `VS` gleich "$l \in \mathbb{Z} \dots$",
aus `VS` gleich "$\dots m \in \mathbb{Z}$" und
aus `2.2.Fall`"$l < m$"
folgt via **166-4**: $\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{N}) \wedge (l + \Omega = m) \wedge (l = m - \Omega)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

$$(m < l) \vee (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{N}) \wedge (l + \Omega = m) \wedge (l = m - \Omega)).$$

□

166-6. Ähnlich gelagert wie **166-5** lässt das vorliegende Resultat die Alternative $m \leq l$ oder $l \leq m$ offen:

166-6(Satz)

a) *Aus* "$l \in \mathbb{Z}$" *und* "$m \in \mathbb{Z}$"
folgt "$\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge ((m = l - \Omega) \vee (m = l + \Omega))$".

b) *Aus* "$l \in \mathbb{Z}$" *und* "$m \in \mathbb{Z}$" *folgt* "$l = m$"
oder "$\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{N}) \wedge ((m = l - \Omega) \vee (m = l + \Omega))$".

`RECH.`$\leq$-**Notation**.

Beweis **166-6** `a)` `VS` gleich $(l \in \mathbb{Z}) \wedge (m \in \mathbb{Z})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$l \in \mathbb{Z} \ldots$"
folgt via **164-5**: $l \in \mathbb{S}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots m \in \mathbb{Z}$"
folgt via **164-5**: $m \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `1.2`"$m \in \mathbb{S}$" und
aus `1.1`"$l \in \mathbb{S}$"
folgt via **107-14**: $(m \le l) \vee (l \le m)$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $m \le l$.

`3:` Aus `VS` gleich "$\ldots m \in \mathbb{Z}$" und
aus `VS` gleich "$l \in \mathbb{Z} \ldots$" und
aus `VS` gleich "$m \le l$"
folgt via **166-4**: $\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (m + \Omega = l) \wedge (m = l - \Omega)$.

`4:` Aus `3`"$\ldots m = l - \Omega$"
folgt: $(m = l - \Omega) \vee (m = l + \Omega)$.

`5:` Aus `3`"$\exists \Omega \ldots$",
aus `3`"$\ldots \Omega \in \mathbb{N} \ldots$" und
aus `4`"$(m = l - \Omega) \vee (m = l + \Omega)$"
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge ((m = l - \Omega) \vee (m = l + \Omega))$.

`2.2.Fall` $l \le m$.

`3:` Aus `VS` gleich "$l \in \mathbb{Z} \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots m \in \mathbb{Z}$" und
aus `VS` gleich "$l \le m$"
folgt via **166-4**: $\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (l + \Omega = m) \wedge (l = m - \Omega)$.

`4:` Aus `3`"$\ldots l + \Omega = m \ldots$"
folgt: $m = l + \Omega$.

`5:` Aus `4`
folgt: $(m = l - \Omega) \vee (m = l + \Omega)$.

`6:` Aus `3`"$\exists \Omega \ldots$",
aus `3`"$\ldots \Omega \in \mathbb{N} \ldots$" und
aus `5`"$(m = l - \Omega) \vee (m = l + \Omega)$"
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge ((m = l - \Omega) \vee (m = l + \Omega))$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge ((m = l - \Omega) \vee (m = l + \Omega))$.

<u>Beweis **166-6**</u> `b)` `VS` gleich $(l \in \mathbb{Z}) \wedge (m \in \mathbb{Z})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$l \in \mathbb{Z} \ldots$"
folgt via **164-5**: $l \in \mathbb{S}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots m \in \mathbb{Z}$"
folgt via **164-5**: $m \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `1.1`"$l \in \mathbb{S}$" und
aus `1.2`"$m \in \mathbb{S}$"
folgt via **107-14**: $(l < m) \vee (l = m) \vee (m < l)$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $l < m$.

`3:` Aus `VS` gleich "$l \in \mathbb{Z} \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots m \in \mathbb{Z}$" und
aus `VS` gleich "$l < m$"
folgt via **166-4**: $\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{N}) \wedge (l + \Omega = m) \wedge (l = m - \Omega)$.

`4:` Aus `3`"$\ldots l + \Omega = m \ldots$"
folgt: $m = l + \Omega$.

`5:` Aus `4`
folgt: $(m = l - \Omega) \vee (m = l + \Omega)$.

`6:` Aus `3`"$\exists \Omega \ldots$",
aus `3`"$\ldots 0 \neq \Omega \in \mathbb{N} \ldots$" und
aus `5`"$(m = l - \Omega) \vee (m = l + \Omega)$"
folgt: $\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{N}) \wedge ((m = l - \Omega) \vee (m = l + \Omega))$.

`2.2.Fall` $l = m$.

...

Beweis **166-6** `b)` `VS` gleich $(l \in \mathbb{Z}) \wedge (m \in \mathbb{Z})$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.3.Fall` $m < l$.

`3:` Aus `VS` gleich "$\ldots m \in \mathbb{Z}$" und
aus `VS` gleich "$l \in \mathbb{Z} \ldots$" und
aus `VS` gleich "$m < l$"
folgt via **166-4**: $\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{N}) \wedge (m + \Omega = l) \wedge (m = l - \Omega)$.

`4:` Aus `3`"$\ldots m = l - \Omega$"
folgt: $(m = l - \Omega) \vee (m = l + \Omega)$.

`5:` Aus `3`"$\exists \Omega \ldots$",
aus `3`"$\ldots 0 \neq \Omega \in \mathbb{N} \ldots$" und
aus `4`"$(m = l - \Omega) \vee (m = l + \Omega)$"
folgt: $\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{N}) \wedge ((m = l - \Omega) \vee (m = l + \Omega))$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt:

$$(l = m) \vee (\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in \mathbb{N}) \wedge ((m = l - \Omega) \vee (m = l + \Omega))).$$

□

Einiges über $\leq$ _Intervalle von $a + c$ bis $a + d$.
Einiges über $\leq$ _Intervalle von $a - c$ bis $a + d$.
Einiges über $\leq$ _Intervalle von a bis $a + d$.
Einiges über $\leq$ _Intervalle von $a - c$ bis a.

Ersterstellung: 04/05/12 **Letzte Änderung: 04/05/12**

167-1. In diesem Satz wird unter anderem die Zugehörigkeit zu $\leq$ _Intervallen von $a+c$ bis $a+d$ mit $a \in \mathbb{R}$ thematisiert:

167-1(Satz)

a) *Aus* "$x \in [a+c|a+d]$" *und* "$a \in \mathbb{R}$"
folgt "$c \leq d$" *und* "$-a+x \in [c|d]$".

b) *Aus* "$x \in]a+c|a+d[$" *und* "$a \in \mathbb{R}$"
folgt "$c < d$" *und* "$-a+x \in]c|d[$".

c) *Aus* "$x \in]a+c|a+d]$" *und* "$a \in \mathbb{R}$"
folgt "$c < d$" *und* "$-a+x \in]c|d]$".

d) *Aus* "$x \in [a+c|a+d[$" *und* "$a \in \mathbb{R}$"
folgt "$c < d$" *und* "$-a+x \in [c|d[$".

e) *Aus* "$x \in [a-c|a+d]$" *und* "$a \in \mathbb{R}$"
folgt "$-c \leq d$" *und* "$-a+x \in [-c|d]$".

f) *Aus* "$x \in]a-c|a+d[$" *und* "$a \in \mathbb{R}$"
folgt "$-c < d$" *und* "$-a+x \in]-c|d[$".

g) *Aus* "$x \in]a-c|a+d]$" *und* "$a \in \mathbb{R}$"
folgt "$-c < d$" *und* "$-a+x \in]-c|d]$".

h) *Aus* "$x \in [a-c|a+d[$" *und* "$a \in \mathbb{R}$"
folgt "$-c < d$" *und* "$-a+x \in [-c|d[$".

RECH.$\leq$-**Notation**.

Beweis **167-1** `a)` `VS` gleich $(x \in [a+c|a+d]) \wedge (a \in \mathbb{R})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in [a+c|a+d]$"
folgt via **142-3**: $a+c \leq x \leq a+d$.

`2.1:` Aus `1`"$a+c \leq x \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots a \in \mathbb{R}$"
folgt via **160-8**: $c \leq -a+x$.

`2.2:` Aus `1`"$\ldots x \leq a+d$" und
aus `VS` gleich "$\ldots a \in \mathbb{R}$"
folgt via **160-8**: $-a+x \leq d$.

`3.1:` Aus `2.1`"$c \leq -a+x$" und
aus `2.2`"$-a+x \leq d$"
folgt via **107-8**: $c \leq d$.

`3.2:` Aus `2.1`"$c \leq -a+x$" und
aus `2.2`"$-a+x \leq d$"
folgt via **142-3**: $-a+x \in [c|d]$.

`4:` Aus `3.1` und
aus `3.2`
folgt: $(c \leq d) \wedge (-a+x \in [c|d])$.

Beweis **167-1** `b)` `VS` gleich $(x \in \,]a+c|a+d[\,) \wedge (a \in \mathbb{R})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \,]a+c|a+d[$"
folgt via **142-3**: $a+c < x < a+d$.

`2.1:` Aus `1`"$a+c < x \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots a \in \mathbb{R}$"
folgt via **160-9**: $c < -a+x$.

`2.2:` Aus `1`"$\ldots x < a+d$" und
aus `VS` gleich "$\ldots a \in \mathbb{R}$"
folgt via **160-9**: $-a+x < d$.

`3.1:` Aus `2.1`"$c < -a+x$" und
aus `2.2`"$-a+x < d$"
folgt via **107-8**: $c < d$.

`3.2:` Aus `2.1`"$c < -a+x$" und
aus `2.2`"$-a+x < d$"
folgt via **142-3**: $-a+x \in \,]c|d[$.

`4:` Aus `3.1` und
aus `3.2`
folgt: $(c < d) \wedge (-a+x \in \,]c|d[\,)$.

Beweis **167-1** `c)` `VS` gleich $(x \in \,]a+c|a+d]\,) \wedge (a \in \mathbb{R})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \,]a+c|a+d]$"
folgt via **142-3**: $a+c < x \leq a+d$.

`2.1:` Aus `1`"$a+c < x \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots a \in \mathbb{R}$"
folgt via **160-9**: $c < -a+x$.

`2.2:` Aus `1`"$\ldots x \leq a+d$" und
aus `VS` gleich "$\ldots a \in \mathbb{R}$"
folgt via **160-8**: $-a+x \leq d$.

`3.1:` Aus `2.1`"$c < -a+x$" und
aus `2.2`"$-a+x \leq d$"
folgt via **107-8**: $c < d$.

`3.2:` Aus `2.1`"$c < -a+x$" und
aus `2.2`"$-a+x \leq d$"
folgt via **142-3**: $-a+x \in \,]c|d]$.

`4:` Aus `3.1` und
aus `3.2`
folgt: $(c < d) \wedge (-a+x \in \,]c|d]\,)$.

<u>Beweis</u> **167-1** `d)` `VS` gleich $(x \in [a+c|a+d[) \wedge (a \in \mathbb{R})$.

`1:` Aus `VS` gleich “$x \in [a+c|a+d[$”
folgt via **142-3**: $a+c \leq x < a+d$.

`2.1:` Aus `1`“$a+c \leq x \ldots$” und
aus `VS` gleich “$\ldots a \in \mathbb{R}$”
folgt via **160-8**: $c \leq -a+x$.

`2.2:` Aus `1`“$\ldots x < a+d$” und
aus `VS` gleich “$\ldots a \in \mathbb{R}$”
folgt via **160-9**: $-a+x < d$.

`3.1:` Aus `2.1`“$c \leq -a+x$” und
aus `2.2`“$-a+x < d$”
folgt via **107-8**: $c < d$.

`3.2:` Aus `2.1`“$c \leq -a+x$” und
aus `2.2`“$-a+x < d$”
folgt via **142-3**: $-a+x \in [c|d[$.

`4:` Aus `3.1` und
aus `3.2`
folgt: $(c < d) \wedge (-a+x \in [c|d[)$.

<u>Beweis</u> **<u>167-1</u>** `e)` `VS` gleich $(x \in [a-c|a+d]) \wedge (a \in \mathbb{R})$.

`1:` Aus "$a-c = a+(-c)$" und
aus `VS` gleich "$(x \in [a-c|a+d]) \wedge (a \in \mathbb{R})$"
folgt: $(x \in [a+(-c)|a+d]) \wedge (a \in \mathbb{R})$.

`2:` Aus `1`"$(x \in [a+(-c)|a+d]) \wedge (a \in \mathbb{R})$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $(-c \le d) \wedge (x \in [-c|d])$.

`f)` `VS` gleich $(x \in]a-c|a+d[) \wedge (a \in \mathbb{R})$.

`1:` Aus "$a-c = a+(-c)$" und
aus `VS` gleich "$(x \in]a-c|a+d[) \wedge (a \in \mathbb{R})$"
folgt: $(x \in]a+(-c)|a+d[) \wedge (a \in \mathbb{R})$.

`2:` Aus `1`"$(x \in]a+(-c)|a+d[) \wedge (a \in \mathbb{R})$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $(-c < d) \wedge (x \in]-c|d[)$.

`g)` `VS` gleich $(x \in]a-c|a+d]) \wedge (a \in \mathbb{R})$.

`1:` Aus "$a-c = a+(-c)$" und
aus `VS` gleich "$(x \in]a-c|a+d]) \wedge (a \in \mathbb{R})$"
folgt: $(x \in]a+(-c)|a+d]) \wedge (a \in \mathbb{R})$.

`2:` Aus `1`"$(x \in]a+(-c)|a+d]) \wedge (a \in \mathbb{R})$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $(-c < d) \wedge (x \in]-c|d])$.

`h)` `VS` gleich $(x \in [a-c|a+d[) \wedge (a \in \mathbb{R})$.

`1:` Aus "$a-c = a+(-c)$" und
aus `VS` gleich "$(x \in [a-c|a+d[) \wedge (a \in \mathbb{R})$"
folgt: $(x \in [a+(-c)|a+d[) \wedge (a \in \mathbb{R})$.

`2:` Aus `1`"$(x \in [a+(-c)|a+d[) \wedge (a \in \mathbb{R})$"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $(-c < d) \wedge (x \in [-c|d[)$.

$\square$

167-2. Nun wird die Umkehrung von **167-1** etabliert:

<u>167-2(Satz)</u>

a) *Aus* "$-a+x\in[c|d]$" *und* "$a\in\mathbb{R}$"
folgt "$c\le d$" *und* "$x\in[a+c|a+d]$".

b) *Aus* "$-a+x\in]c|d[$" *und* "$a\in\mathbb{R}$"
folgt "$c<d$" *und* "$x\in]a+c|a+d[$".

c) *Aus* "$-a+x\in]c|d]$" *und* "$a\in\mathbb{R}$"
folgt "$c<d$" *und* "$x\in]a+c|a+d]$".

d) *Aus* "$-a+x\in[c|d[$" *und* "$a\in\mathbb{R}$"
folgt "$c<d$" *und* "$x\in[a+c|a+d[$".

e) *Aus* "$-a+x\in[-c|d]$" *und* "$a\in\mathbb{R}$"
folgt "$-c\le d$" *und* "$x\in[a-c|a+d]$".

f) *Aus* "$-a+x\in]-c|d[$" *und* "$a\in\mathbb{R}$"
folgt "$-c<d$" *und* "$x\in]a-c|a+d[$".

g) *Aus* "$-a+x\in]-c|d]$" *und* "$a\in\mathbb{R}$"
folgt "$-c<d$" *und* "$x\in]a-c|a+d]$".

h) *Aus* "$-a+x\in[-c|d[$" *und* "$a\in\mathbb{R}$"
folgt "$-c<d$" *und* "$x\in[a-c|a+d[$".

<u>RECH.$\le$-**Notation**</u>.

<u>Beweis</u> **167-2** `a)` `VS` gleich $(-a+x \in [c|d]) \wedge (a \in \mathbb{R})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$-a+x \in [c|d]$"
folgt via **142-3**: $c \leq -a+x \leq d$.

`2.1:` Aus `1`"$c \leq -a+x \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots a \in \mathbb{R}$"
folgt via **160-8**: $a+c \leq x$.

`2.2:` Aus `1`"$\ldots -a+x \leq d$" und
aus `VS` gleich "$\ldots a \in \mathbb{R}$"
folgt via **160-8**: $x \leq a+d$.

`2.3:` Aus `1`"$c \leq -a+x \ldots$" und
aus `1`"$\ldots -a+x \leq d$"
folgt via **107-8**: $c \leq d$.

`3:` Aus `2.1`"$a+c \leq x$" und
aus `2.2`"$x \leq a+d$"
folgt via **142-3**: $x \in [a+c|a+d]$.

`4:` Aus `2.3`"$c \leq d$" und
aus `3`"$x \in [a+c|a+d]$"
folgt: $(c \leq d) \wedge (x \in [a+c|a+d])$.

<u>Beweis</u> **167-2** `b)` `VS` gleich $(-a+x \in \,]c|d[\,) \wedge (a \in \mathbb{R})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$-a+x \in \,]c|d[$"
folgt via **142-3**: $c < -a+x < d$.

`2.1:` Aus `1`"$c < -a+x \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots a \in \mathbb{R}$"
folgt via **160-9**: $a+c < x$.

`2.2:` Aus `1`"$\ldots -a+x < d$" und
aus `VS` gleich "$\ldots a \in \mathbb{R}$"
folgt via **160-9**: $x < a+d$.

`2.3:` Aus `1`"$c < -a+x \ldots$" und
aus `1`"$\ldots -a+x < d$"
folgt via **107-8**: $c < d$.

`3:` Aus `2.1`"$a+c < x$" und
aus `2.2`"$x < a+d$"
folgt via **142-3**: $x \in \,]a+c|a+d[$.

`4:` Aus `2.3`"$c < d$" und
aus `3`"$x \in \,]a+c|a+d[$"
folgt: $(c < d) \wedge (x \in \,]a+c|a+d[\,)$.

<u>Beweis</u> **167-2** `c)` `VS` gleich $(-a+x\in\,]c|d]\,)\wedge(a\in\mathbb{R})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$-a+x\in\,]c|d]$"
folgt via **142-3**: $c<-a+x\le d$.

`2.1:` Aus `1`"$c<-a+x\ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots a\in\mathbb{R}$"
folgt via **160-9**: $a+c<x$.

`2.2:` Aus `1`"$\ldots-a+x\le d$" und
aus `VS` gleich "$\ldots a\in\mathbb{R}$"
folgt via **160-8**: $x\le a+d$.

`2.3:` Aus `1`"$c<-a+x\ldots$" und
aus `1`"$\ldots-a+x\le d$"
folgt via **107-8**: $c<d$.

`3:` Aus `2.1`"$a+c<x$" und
aus `2.2`"$x\le a+d$"
folgt via **142-3**: $x\in\,]a+c|a+d]$.

`4:` Aus `2.3`"$c<d$" und
aus `3`"$x\in\,]a+c|a+d]$"
folgt: $(c<d)\wedge(x\in\,]a+c|a+d]\,)$.

<u>Beweis **167-2**</u> `d)` `VS` gleich $(-a+x \in [c|d[) \wedge (a \in \mathbb{R})$.

`1:` Aus `VS` gleich “$-a+x \in [c|d[$”
folgt via **142-3**: $c \leq -a+x < d$.

`2.1:` Aus `1`“$c \leq -a+x\ldots$” und
aus `VS` gleich “$\ldots a \in \mathbb{R}$”
folgt via **160-8**: $a+c \leq x$.

`2.2:` Aus `1`“$\ldots -a+x < d$” und
aus `VS` gleich “$\ldots a \in \mathbb{R}$”
folgt via **160-9**: $x < a+d$.

`2.3:` Aus `1`“$c \leq -a+x\ldots$” und
aus `1`“$\ldots -a+x < d$”
folgt via **107-8**: $c < d$.

`3:` Aus `2.1`“$a+c \leq x$” und
aus `2.2`“$x < a+d$”
folgt via **142-3**: $x \in [a+c|a+d[$.

`4:` Aus `2.3`“$c < d$” und
aus `3`“$x \in [a+c|a+d[$”
folgt: $(c < d) \wedge (x \in [a+c|a+d[)$.

Beweis **167-2** e) VS gleich $(-a+x \in [\,-c|d\,]) \wedge (a \in \mathbb{R})$.

1: Aus VS gleich "$-a+x \in [\,-c|d\,] \ldots$" und
aus VS gleich "$\ldots a \in \mathbb{R}$"
folgt via des bereits bewiesenen a): $(-c \leq d) \wedge (x \in [a+(-c)|a+d])$.

2: Aus "$a+(-c) = a-c$" und
aus 1 "$(-c \leq d) \wedge (x \in [a+(-c)|a+d])$"
folgt: $(-c \leq d) \wedge (x \in [a-c|a+d])$.

f) VS gleich $(-a+x \in]\,-c|d\,[) \wedge (a \in \mathbb{R})$.

1: Aus VS gleich "$-a+x \in]\,-c|d\,[\ldots$" und
aus VS gleich "$\ldots a \in \mathbb{R}$"
folgt via des bereits bewiesenen b): $(-c \leq d) \wedge (x \in]a+(-c)|a+d[)$.

2: Aus "$a+(-c) = a-c$" und
aus 1 "$(-c \leq d) \wedge (x \in]a+(-c)|a+d[)$"
folgt: $(-c \leq d) \wedge (x \in]a-c|a+d[)$.

g) VS gleich $(-a+x \in]\,-c|d\,]) \wedge (a \in \mathbb{R})$.

1: Aus VS gleich "$-a+x \in]\,-c|d\,] \ldots$" und
aus VS gleich "$\ldots a \in \mathbb{R}$"
folgt via des bereits bewiesenen b): $(-c \leq d) \wedge (x \in]a+(-c)|a+d])$.

2: Aus "$a+(-c) = a-c$" und
aus 1 "$(-c \leq d) \wedge (x \in]a+(-c)|a+d])$"
folgt: $(-c \leq d) \wedge (x \in]a-c|a+d])$.

h) VS gleich $(-a+x \in [\,-c|d\,[) \wedge (a \in \mathbb{R})$.

1: Aus VS gleich "$-a+x \in [\,-c|d\,[\ldots$" und
aus VS gleich "$\ldots a \in \mathbb{R}$"
folgt via des bereits bewiesenen b): $(-c \leq d) \wedge (x \in [a+(-c)|a+d[)$.

2: Aus "$a+(-c) = a-c$" und
aus 1 "$(-c \leq d) \wedge (x \in [a+(-c)|a+d[)$"
folgt: $(-c \leq d) \wedge (x \in [a-c|a+d[)$.

$\square$

167-3. In diesem Satz wird unter anderem die Zugehörigkeit zu $\leq$ _Intervallen von a bis $a+d$ mit $a \in \mathbb{R}$ thematisiert:

167-3(Satz)

a) *Aus* "$x \in [a|a+d]$" *und* "$a \in \mathbb{R}$"
folgt "$0 \leq d$" *und* "$-a+x \in [0|d]$".

b) *Aus* "$x \in]a|a+d[$" *und* "$a \in \mathbb{R}$"
folgt "$0 < d$" *und* "$-a+x \in]0|d[$".

c) *Aus* "$x \in]a|a+d]$" *und* "$a \in \mathbb{R}$"
folgt "$0 < d$" *und* "$-a+x \in]0|d]$".

d) *Aus* "$x \in [a|a+d[$" *und* "$a \in \mathbb{R}$"
folgt "$0 < d$" *und* "$-a+x \in [0|d[$".

e) *Aus* "$x \in [a-c|a]$" *und* "$a \in \mathbb{R}$"
folgt "$0 \leq c$" *und* "$-a+x \in [-c|0]$".

f) *Aus* "$x \in]a-c|a[$" *und* "$a \in \mathbb{R}$"
folgt "$0 < c$" *und* "$-a+x \in]-c|0[$".

g) *Aus* "$x \in]a-c|a]$" *und* "$a \in \mathbb{R}$"
folgt "$0 < c$" *und* "$-a+x \in]-c|0]$".

h) *Aus* "$x \in [a-c|a[$" *und* "$a \in \mathbb{R}$"
folgt "$0 < c$" *und* "$-a+x \in [-c|0[$".

RECH.$\leq$-**Notation**.

Beweis **167-3** a) VS gleich $(x \in [a|a+d]) \wedge (a \in \mathbb{R})$.

1: Aus VS gleich "$\ldots a \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAV**: $a+0=a$.

2: Aus VS gleich "$x \in [a|a+d] \ldots$" und
aus 1 "$a+0=a$"
folgt: $x \in [a+0|a+d]$.

3: Aus 2 "$x \in [a+0|a+d]$" und
aus VS gleich "$\ldots a \in \mathbb{R}$"
folgt via **167-1**: $(0 \leq d) \wedge (-a+x \in [0|d])$.

<u>Beweis</u> **<u>167-3</u>** `b)` `VS` gleich $(x \in]a|a+d[) \wedge (a \in \mathbb{R})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots a \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAV**: $a+0=a$.

`2:` Aus `VS` gleich "$x \in]a|a+d[\ldots$" und
aus `1`"$a+0=a$"
folgt: $x \in]a+0|a+d[$.

`3:` Aus `2`"$x \in]a+0|a+d[$" und
aus `VS` gleich "$\ldots a \in \mathbb{R}$"
folgt via **167-1**: $(0<d) \wedge (-a+x \in]0|d[)$.

`c)` `VS` gleich $(x \in]a|a+d]) \wedge (a \in \mathbb{R})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots a \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAV**: $a+0=a$.

`2:` Aus `VS` gleich "$x \in]a|a+d] \ldots$" und
aus `1`"$a+0=a$"
folgt: $x \in]a+0|a+d]$.

`3:` Aus `2`"$x \in]a+0|a+d]$" und
aus `VS` gleich "$\ldots a \in \mathbb{R}$"
folgt via **167-1**: $(0<d) \wedge (-a+x \in]0|d])$.

`d)` `VS` gleich $(x \in [a|a+d[) \wedge (a \in \mathbb{R})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots a \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAV**: $a+0=a$.

`2:` Aus `VS` gleich "$x \in [a|a+d[\ldots$" und
aus `1`"$a+0=a$"
folgt: $x \in [a+0|a+d[$.

`3:` Aus `2`"$x \in [a+0|a+d[$" und
aus `VS` gleich "$\ldots a \in \mathbb{R}$"
folgt via **167-1**: $(0<d) \wedge (-a+x \in [0|d[)$.

Beweis **167-3** `e)` `VS` gleich $(x \in [a-c|a]) \wedge (a \in \mathbb{R})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots a \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAV**: $a+0=a$.

`2:` Aus `VS` gleich "$x \in [a-c|a] \ldots$" und
aus `1`"$a+0=a$"
folgt: $x \in [a-c|a+0]$.

`3.1:` Aus `2`"$x \in [a-c|a+0]$" und
aus `VS` gleich "$\ldots a \in \mathbb{R}$"
folgt via **167-1**: $(-c \leq 0) \wedge (-a+x \in [-c|0])$.

`3.2:` Via **109-16** gilt: $(-c \leq 0) \Leftrightarrow (0 \leq c)$.

`4:` Aus `3.1` und
aus `3.2`
folgt: $(0 \leq c) \wedge (-a+x \in [-c|0])$.

`f)` `VS` gleich $(x \in]a-c|a[) \wedge (a \in \mathbb{R})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots a \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAV**: $a+0=a$.

`2:` Aus `VS` gleich "$x \in]a-c|a[\ldots$" und
aus `1`"$a+0=a$"
folgt: $x \in]a-c|a+0[$.

`3.1:` Aus `2`"$x \in]a-c|a+0[$" und
aus `VS` gleich "$\ldots a \in \mathbb{R}$"
folgt via **167-1**: $(-c < 0) \wedge (-a+x \in]-c|0[)$.

`3.2:` Via **109-16** gilt: $(-c < 0) \Leftrightarrow (0 < c)$.

`4:` Aus `3.1` und
aus `3.2`
folgt: $(0 < c) \wedge (-a+x \in]-c|0[)$.

<u>Beweis</u> **167-3** `g)` `VS` gleich $(x \in \rbrack a-c|a\rbrack) \wedge (a \in \mathbb{R})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots a \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAV**: $a+0=a$.

`2:` Aus `VS` gleich "$x \in \rbrack a-c|a\rbrack \ldots$" und
aus `1`"$a+0=a$"
folgt: $x \in \rbrack a-c|a+0\rbrack$.

`3.1:` Aus `2`"$x \in \rbrack a-c|a+0\rbrack$" und
aus `VS` gleich "$\ldots a \in \mathbb{R}$"
folgt via **167-1**: $(-c<0) \wedge (-a+x \in \rbrack -c|0\rbrack)$.

`3.2:` Via **109-16** gilt: $(-c<0) \Leftrightarrow (0<c)$.

`4:` Aus `3.1` und
aus `3.2`
folgt: $(0<c) \wedge (-a+x \in \rbrack -c|0\rbrack)$.

`h)` `VS` gleich $(x \in \lbrack a-c|a\lbrack) \wedge (a \in \mathbb{R})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots a \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAV**: $a+0=a$.

`2:` Aus `VS` gleich "$x \in \lbrack a-c|a\lbrack \ldots$" und
aus `1`"$a+0=a$"
folgt: $x \in \lbrack a-c|a+0\lbrack$.

`3.1:` Aus `2`"$x \in \lbrack a-c|a+0\lbrack$" und
aus `VS` gleich "$\ldots a \in \mathbb{R}$"
folgt via **167-1**: $(-c<0) \wedge (-a+x \in \lbrack -c|0\lbrack)$.

`3.2:` Via **109-16** gilt: $(-c<0) \Leftrightarrow (0<c)$.

`4:` Aus `3.1` und
aus `3.2`
folgt: $(0<c) \wedge (-a+x \in \lbrack -c|0\lbrack)$.

□

167-4. Hier wird die Umkehrung von **167-3** etabliert:

167-4(Satz)

a) *Aus* “$-a+x \in [0|d]$” *und* “$a \in \mathbb{R}$” *folgt* “$0 \leq d$” *und* “$x \in [a|a+d]$”.

b) *Aus* “$-a+x \in]0|d[$” *und* “$a \in \mathbb{R}$” *folgt* “$0 < d$” *und* “$x \in]a|a+d[$”.

c) *Aus* “$-a+x \in]0|d]$” *und* “$a \in \mathbb{R}$” *folgt* “$0 < d$” *und* “$x \in]a|a+d]$”.

d) *Aus* “$-a+x \in [0|d[$” *und* “$a \in \mathbb{R}$” *folgt* “$0 < d$” *und* “$x \in [a|a+d[$”.

e) *Aus* “$-a+x \in [-c|0]$” *und* “$a \in \mathbb{R}$” *folgt* “$0 \leq c$” *und* “$x \in [a-c|a]$”.

f) *Aus* “$-a+x \in]-c|0[$” *und* “$a \in \mathbb{R}$” *folgt* “$0 < c$” *und* “$x \in]a-c|a[$”.

g) *Aus* “$-a+x \in]-c|0]$” *und* “$a \in \mathbb{R}$” *folgt* “$0 < c$” *und* “$x \in]a-c|a]$”.

h) *Aus* “$-a+x \in [-c|0[$” *und* “$a \in \mathbb{R}$” *folgt* “$0 < c$” *und* “$x \in [a-c|a[$”.

RECH.$\leq$-**Notation**.

Beweis **167-4** `a)` `VS` gleich $(-a+x \in [0|d]) \wedge (a \in \mathbb{R})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$-a+x \in [0|d] \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots a \in \mathbb{R}$"
folgt via **167-2**: $(0 \leq d) \wedge (x \in [a+0|a+d])$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots a \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAV**: $a+0=a$.

`3:` Aus `1`"$(0 \leq d) \wedge (x \in [a+0|a+d])$" und
aus `2`"$a+0=a$"
folgt: $(0 \leq d) \wedge (x \in [a|a+d])$.

`b)` `VS` gleich $(-a+x \in]0|d[) \wedge (a \in \mathbb{R})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$-a+x \in]0|d[\ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots a \in \mathbb{R}$"
folgt via **167-2**: $(0 < d) \wedge (x \in]a+0|a+d[)$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots a \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAV**: $a+0=a$.

`3:` Aus `1`"$(0 < d) \wedge (x \in]a+0|a+d[)$" und
aus `2`"$a+0=a$"
folgt: $(0 < d) \wedge (x \in]a|a+d[)$.

`c)` `VS` gleich $(-a+x \in]0|d]) \wedge (a \in \mathbb{R})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$-a+x \in]0|d] \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots a \in \mathbb{R}$"
folgt via **167-2**: $(0 < d) \wedge (x \in]a+0|a+d])$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots a \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAV**: $a+0=a$.

`3:` Aus `1`"$(0 < d) \wedge (x \in]a+0|a+d])$" und
aus `2`"$a+0=a$"
folgt: $(0 < d) \wedge (x \in]a|a+d])$.

<u>Beweis **167-4**</u> `d)` `VS` gleich $(-a+x \in [0|d[) \wedge (a \in \mathbb{R})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$-a+x \in [0|d[\ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots a \in \mathbb{R}$"
folgt via **167-2**: $(0 < d) \wedge (x \in [a+0|a+d[)$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots a \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAV**: $a+0=a$.

`3:` Aus `1`"$(0 < d) \wedge (x \in [a+0|a+d[)$" und
aus `2`"$a+0=a$"
folgt: $(0 < d) \wedge (x \in [a|a+d[)$.

`e)` `VS` gleich $(-a+x \in [-c|0]) \wedge (a \in \mathbb{R})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$-a+x \in [-c|0]\ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots a \in \mathbb{R}$"
folgt via **167-2**: $(-c \leq 0) \wedge (x \in [a+(-c)|a+0])$.

`1.2:` Via **109-16** gilt: $(-c \leq 0) \Leftrightarrow (0 \leq c)$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $(0 \leq c) \wedge (x \in [a+(-c)|a+0])$.

`3.1:` Aus "$a+(-c)=a-c$" und
aus `2.1`"$(0 \leq c) \wedge (x \in [a+(-c)|a+0])$"
folgt: $(0 \leq c) \wedge (x \in [a-c|a+0])$.

`3.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots a \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAV**: $a+0=a$.

`4:` Aus `3.2`"$a+0=a$" und
aus `3.1`"$(0 \leq c) \wedge (x \in [a-c|a+0])$"
folgt: $(0 \leq c) \wedge (x \in [a-c|a])$.

<u>Beweis **167-4**</u> `f)` `VS` gleich $(-a+x \in \,]-c|0[\,) \wedge (a \in \mathbb{R})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$-a+x \in \,]-c|0[\ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots a \in \mathbb{R}$"
folgt via **167-2**: $(-c<0) \wedge (x \in \,]a+(-c)|a+0[\,)$.

`1.2:` Via **109-16** gilt: $(-c<0) \Leftrightarrow (0<c)$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $(0<c) \wedge (x \in \,]a+(-c)|a+0[\,)$.

`3.1:` Aus "$a+(-c)=a-c$" und
aus `2.1` "$(0<c) \wedge (x \in \,]a+(-c)|a+0[\,)$"
folgt: $(0<c) \wedge (x \in \,]a-c|a+0[\,)$.

`3.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots a \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAV**: $a+0=a$.

`4:` Aus `3.2` "$a+0=a$" und
aus `3.1` "$(0<c) \wedge (x \in \,]a-c|a+0[\,)$"
folgt: $(0<c) \wedge (x \in \,]a-c|a[\,)$.

`g)` `VS` gleich $(-a+x \in \,]-c|0]) \wedge (a \in \mathbb{R})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$-a+x \in \,]-c|0]\ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots a \in \mathbb{R}$"
folgt via **167-2**: $(-c<0) \wedge (x \in \,]a+(-c)|a+0])$.

`1.2:` Via **109-16** gilt: $(-c<0) \Leftrightarrow (0<c)$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $(0<c) \wedge (x \in \,]a+(-c)|a+0])$.

`3.1:` Aus "$a+(-c)=a-c$" und
aus `2.1` "$(0<c) \wedge (x \in \,]a+(-c)|a+0])$"
folgt: $(0<c) \wedge (x \in \,]a-c|a+0])$.

`3.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots a \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAV**: $a+0=a$.

`4:` Aus `3.2` "$a+0=a$" und
aus `3.1` "$(0<c) \wedge (x \in \,]a-c|a+0])$"
folgt: $(0<c) \wedge (x \in \,]a-c|a])$.

Beweis **167-4** `h)` `VS` gleich $(-a+x \in \,[\,-c|0\,[\,) \wedge (a \in \mathbb{R})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$-a+x \in \,[\,-c|0\,[\,\ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots a \in \mathbb{R}$"
folgt via **167-2**: $(-c<0) \wedge (x \in \,[\,a+(-c)|a+0\,[\,)$.

`1.2:` Via **109-16** gilt: $(-c<0) \Leftrightarrow (0<c)$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $(0<c) \wedge (x \in \,[\,a+(-c)|a+0\,[\,)$.

`3.1:` Aus "$a+(-c)=a-c$" und
aus `2.1`"$(0<c) \wedge (x \in \,[\,a+(-c)|a+0\,[\,)$"
folgt: $(0<c) \wedge (x \in \,[\,a-c|a+0\,[\,)$.

`3.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots a \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAV**: $a+0=a$.

`4:` Aus `3.2`"$a+0=a$" und
aus `3.1`"$(0<c) \wedge (x \in \,[\,a-c|a+0\,[\,)$"
folgt: $(0<c) \wedge (x \in \,[\,a-c|a\,[\,)$.

$\square$

LS$\mathbb{Z}$: LückenSatz $\mathbb{Z}$.

Ersterstellung: 05/05/12 **Letzte Änderung: 11/05/12**

168-1. In Analogie zum **LS**$\mathbb{N}$ gibt es den **LückenSatz** $\mathbb{Z}$:

168-1(Satz) **(LS$\mathbb{Z}$: LückenSatz $\mathbb{Z}$)**

a) *Aus* "$l \in \mathbb{Z}$" *folgt* "$\mathbb{Z} \cap \,]l|1+l[\, = 0$".

b) *Aus* "$l \in \mathbb{Z}$" *folgt* "$\mathbb{Z} \cap \,]-1+l|l[\, = 0$".

c) *Aus* "$l \in \mathbb{Z}$" *und* "$m \in \mathbb{Z}$" *und* "$l < m$" *folgt* "$1 + l \leq m$".

d) *Aus* "$l \in \mathbb{Z}$" *und* "$m \in \mathbb{Z}$" *und* "$l < m$" *folgt* "$l \leq -1 + m$".

e) *Aus* "$l \in \mathbb{Z}$" *und* "$m \in \mathbb{Z}$"
folgt "$l \leq -1 + m$" *oder* "$l = m$" *oder* "$1 + m \leq l$".

f) *Aus* "$l \in \mathbb{Z}$" *und* "$l < x < 1 + l$" *folgt* "$x \notin \mathbb{Z}$".

g) *Aus* "$l \in \mathbb{Z}$" *und* "$-1 + l < x < l$" *folgt* "$x \notin \mathbb{Z}$".

RECH.**≤-Notation**.

Beweis **168-1** `a)` `VS` gleich $l \in \mathbb{Z}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$l \in \mathbb{Z}$"
folgt via **164-5**: $l \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\texttt{Thema2}}$ $\alpha \in \mathbb{Z} \cap \,]l|1+l[$.

`3:` Via **FSA** gilt: $1+l = l+1$.

`4:` Aus `Thema2`"$\alpha \in \mathbb{Z} \cap \,]l|1+l[$" und
aus `3`"$1+l = l+1$"
folgt: $\alpha \in \mathbb{Z} \cap \,]l|l+1[$.

`5:` Aus `3`"$\alpha \in \mathbb{Z} \cap \,]l|l+1[$"
folgt via **2-2**: $(\alpha \in \mathbb{Z}) \wedge (\alpha \in \,]l|l+1[)$.

`6:` Aus `5`"$\ldots \alpha \in \,]l|l+1[$" und
aus `2`"$l \in \mathbb{R}$"
folgt via **167-3**: $-l+\alpha \in \,]0|1[$.

`7.1:` Aus `6`"$-l+\alpha \in \,]0|1[$"
folgt via **142-3**: $0 < -l+\alpha < 1$.

`7.2:` Aus `VS` gleich "$l \in \mathbb{Z}$" und
aus `5`"$\alpha \in \mathbb{Z} \ldots$"
folgt via **164-9**: $-l+\alpha \in \mathbb{Z}$.

`8:` Aus `7.1`"$0 < -l+\alpha \ldots$"
folgt via **41-3**: $0 \le -l+\alpha$.

`9:` Aus `7.2`"$-l+\alpha \in \mathbb{Z}$" und
aus `8`"$0 \le -l+\alpha$"
folgt via **164-6**: $-l+\alpha \in \mathbb{N}$.

`10:` Aus `9`"$-l+\alpha \in \mathbb{N}$" und
aus `6`"$-l+\alpha \in \,]0|1[$"
folgt via **2-2**: $-l+\alpha \in \mathbb{N} \cap \,]0|1[$.

`11:` Aus `10`"$-l+\alpha \in \mathbb{N} \cap \,]0|1[$" und
aus **162-3**"$\mathbb{N} \cap \,]0|1[\, = 0$"
folgt: $-l+\alpha \in 0$.

`12:` Es gilt `11`"$-l+\alpha \in 0$".
Via **0-19** gilt "$-l+\alpha \notin 0$".
Ex falso quodlibet folgt: $\alpha \notin \mathbb{Z} \cap \,]l|1+l[$.

Ergo `Thema2`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{Z} \cap \,]l|1+l[) \Rightarrow (\alpha \notin \mathbb{Z} \cap \,]l|1+l[)$.

Konsequenz via **0-19**: $\mathbb{Z} \cap \,]l|1+l[\, = 0$.

<u>Beweis</u> **<u>168-1</u>** `b)` `VS` gleich $l \in \mathbb{Z}$.

`1.1:` Aus **166-1**"$1 \in \mathbb{Z}$" und
aus `VS` gleich "$l \in \mathbb{Z}$"
folgt via **164-9**: $-1 + l \in \mathbb{Z}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$l \in \mathbb{Z}$"
folgt via **164-4**: l Zahl.

`2.1:` Aus `1.1`"$-1 + l \in \mathbb{Z}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\mathbb{Z} \cap]-1+l|1+(-1+l)[= 0$.

`2.2:` Aus **101-5**"$1 \in \mathbb{C}$" und
aus `1.2`"l Zahl"
folgt via **160-3**: $1 + (-1 + l) = l$.

`3:` Aus `2.1`"$\mathbb{Z} \cap]-1+l|1+(-1+l)[= 0$" und
aus `2.2`"$1 + (-1 + l) = l$"
folgt: $\mathbb{Z} \cap]-1+l|l[= 0$.

Beweis **168-1** `cd)` `VS` gleich $(l \in \mathbb{Z}) \wedge (m \in \mathbb{Z}) \wedge (l < m)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots l < m$"
folgt via **109-7**: $0 < m - l$.

`2.1:` Aus `1`"$0 < m - l$"
folgt via **41-3**: $0 \leq m - l$.

`2.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots m \in \mathbb{Z} \ldots$" und
aus `VS` gleich "$l \in \mathbb{Z} \ldots$"
folgt via **164-9**: $m - l \in \mathbb{Z}$.

`3:` Aus `2.2`"$m - l \in \mathbb{Z}$" und
aus `2.1`"$0 \leq m - l$"
folgt via **164-6**: $m - l \in \mathbb{N}$.

`4:` Aus **159-10**"$0 \in \mathbb{N}$",
aus `3`"$m - l \in \mathbb{N}$" und
aus `1`"$0 < m - l$"
folgt via **LS**$\mathbb{N}$: $1 + 0 \leq m - l$.

`5.1:` Aus **98-10**"$1 + 0 = 1$" und
aus `4`"$1 + 0 \leq m - l$"
folgt: $1 \leq m - l$.

`5.2:` Via **FS**$-+$ gilt: $m - l = -l + m$.

`5.3:` Aus `VS` gleich "$l \in \mathbb{Z} \ldots$"
folgt via **164-5**: $l \in \mathbb{R}$.

`6:` Aus `5.1`"$1 \leq m - l$" und
aus `5.2`"$m - l = -l + m$"
folgt: $1 \leq -l + m$.

`7:` Aus `6`"$1 \leq -l + m$" und
aus `5.3`"$l \in \mathbb{R}$"
folgt via **160-8**: $l + 1 \leq m$.

`8:` Via **FSA** gilt: $1 + l = l + 1$.

`9.c):` Aus `8`"$1 + l = l + 1$" und
aus `7`"$l + 1 \leq m$"
folgt: $1 + l \leq m$.

`10.d):` Aus `9.c)`"$1 + l \leq m$" und
aus **AAI**"$1 \in \mathbb{R}$"
folgt via **160-8**: $l \leq -1 + m$.

<u>Beweis **168-1**</u> `e)` `VS` gleich $(l \in \mathbb{Z}) \wedge (m \in \mathbb{Z})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$l \in \mathbb{Z} \ldots$"
folgt via **164-5**: $l \in \mathbb{S}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots m \in \mathbb{Z}$"
folgt via **164-5**: $m \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `1.1`"$l \in \mathbb{S}$" und
aus `1.2`"$m \in \mathbb{S}$"
folgt via **107-14**: $(l < m) \vee (l = m) \vee (m < l)$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $l < m$.

Aus `VS` gleich "$l \in \mathbb{Z} \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots m \in \mathbb{Z} \ldots$" und
aus `2.1.Fall`"$l < m$"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $l \leq -1 + m$.

`2.2.Fall` $l = m$.

`2.3.Fall` $m < l$.

Aus `VS` gleich "$\ldots m \in \mathbb{Z}$",
aus `VS` gleich "$l \in \mathbb{Z} \ldots$" und
aus `2.3.Fall`"$m < l$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $1 + m \leq l$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt:

$$(l \leq -1 + m) \vee (l = m) \vee (1 + m \leq l).$$

Beweis **168-1** `f)` `VS` gleich $(l \in \mathbb{Z}) \wedge (l < x < 1 + l)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots l < x < 1 + l$"
folgt via **142-3**: $x \in]l|1 + l[$.

`2:` Aus `VS` gleich "$l \in \mathbb{Z} \ldots$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\mathbb{Z} \cap]l|1 + l[= 0$.

`3:` Aus `2`"$\mathbb{Z} \cap]l|1 + l[= 0$" und
aus `1`"$x \in]l|1 + l[$"
folgt via **161-1**: $x \notin \mathbb{Z}$.

`g)` `VS` gleich $(l \in \mathbb{Z}) \wedge (-1 + l < x < l)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots -1 + l < x < l$"
folgt via **142-3**: $x \in] -1 + l|l[$.

`2:` Aus `VS` gleich "$l \in \mathbb{Z} \ldots$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $\mathbb{Z} \cap] -1 + l|l[= 0$.

`3:` Aus `2`"$\mathbb{Z} \cap] -1 + l|l[= 0$" und
aus `1`"$x \in] -1 + l|l[$"
folgt via **161-1**: $x \notin \mathbb{Z}$.

$\square$

168-2. Nun werden einige Folgerungen aus **LS**$\mathbb{Z}$ gezogen:

168-2(Satz)

a) $\mathbb{Z} \cap \,]-2|-1[\, = 0$.

b) $\mathbb{Z} \cap \,]-1|0[\, = 0$.

c) $\mathbb{Z} \cap \,]0|1[\, = 0$.

d) $\mathbb{Z} \cap \,]1|2[\, = 0$.

`RECH`-**Notation**.

<u>Beweis</u> **168-2** `a)`

`1:` Aus **166-1** "$-1 \in \mathbb{Z}$"
folgt via **LS**$\mathbb{Z}$: $\mathbb{Z} \cap \,]-1+(-1)|-1[\, = 0.$

`2:` Aus `1` "$\mathbb{Z} \cap \,]-1+(-1)|-1[\, = 0$" und
aus "$-1+(-1) = -1-1$"
folgt: $\mathbb{Z} \cap \,]-1-1|-1[\, = 0.$

`3:` Aus `2` "$\mathbb{Z} \cap \,]-1-1|-1[\, = 0$" und
aus **109-26** "$-1-1 = -2$"
folgt: $\mathbb{Z} \cap \,]-2|-1[\, = 0.$

`b)`

`1:` Aus **166-1** "$0 \in \mathbb{Z}$"
folgt via **LS**$\mathbb{Z}$: $\mathbb{Z} \cap \,]-1+0|0[\, = 0.$

`2:` Aus `1` "$\mathbb{Z} \cap \,]-1+0|0[\, = 0$" und
aus **114-11** "$-1+0 = -1$"
folgt: $\mathbb{Z} \cap \,]-1|0[\, = 0.$

`c)`

`1:` Aus **166-1** "$0 \in \mathbb{Z}$"
folgt via **LS**$\mathbb{Z}$: $\mathbb{Z} \cap \,]0|1+0[\, = 0.$

`2:` Aus `1` "$\mathbb{Z} \cap \,]0|1+0[\, = 0$" und
aus **98-10** "$1+0 = 1$"
folgt: $\mathbb{Z} \cap \,]0|1[\, = 0.$

`d)`

`1:` Aus **166-1** "$1 \in \mathbb{Z}$"
folgt via **LS**$\mathbb{Z}$: $\mathbb{Z} \cap \,]1|1+1[\, = 0.$

`2:` Aus `1` "$\mathbb{Z} \cap \,]1|1+1[\, = 0$" und
aus **109-25(Def)** "$1+1 = 2$"
folgt: $\mathbb{Z} \cap \,]1|2[\, = 0.$

$\square$

$\{x, \ldots, y\}$. $\{x, \ldots\}$. $\{\ldots, y\}$.

Ersterstellung: 02/05/12 **Letzte Änderung: 11/06/12**

169-1. Die Klassen $\{x, \dots, y\}$, $\{x, \dots\}$, $\{\dots, y\}$ sind als binärer Durchschnitt von $\mathbb{Z}$ mit speziellen $\leq$ –Intervallen definiert:

169-1(Definition)

a) $\{x, \dots, y\} = \mathbb{Z} \cap [x|y]$.

b) $\{x, \dots\} = \mathbb{Z} \cap [x| + \infty[$.

c) $\{\dots, y\} = \mathbb{Z} \cap]-\infty|y]$.

169-2. Die vorliegenden Kurzcharakterisierungen der Elemente von $\{x, \ldots y\}$, $\{x, \ldots\}$ und $\{\ldots, y\}$ erleichtern im Folgenden Einiges:

169-2(Satz)

a) *"$p \in \{x, \ldots, y\}$" genau dann, wenn "$p \in \mathbb{Z}$" und "$x \leq p \leq y$".*

b) *"$p \in \{x, \ldots\}$" genau dann, wenn "$p \in \mathbb{Z}$" und "$x \leq p$".*

c) *"$p \in \{\ldots, y\}$" genau dann, wenn "$p \in \mathbb{Z}$" und "$p \leq y$".*

$\leq$-Notation.

Beweis **169-2** a) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich $p \in \{x, \ldots, y\}$.

1: Aus VS gleich "$p \in \{x, \ldots, y\}$" und
aus "$\{x, \ldots, y\} = \mathbb{Z} \cap [x|y]$"
folgt via **2-2**: $(p \in \mathbb{Z}) \wedge (p \in [x|y])$.

2: Aus 2"$\ldots p \in [x|y]$"
folgt via **142-3**: $x \leq p \leq y$.

3: Aus 1"$p \in \mathbb{Z} \ldots$" und
aus 2"$x \leq p \leq y$"
folgt: $(p \in \mathbb{Z}) \wedge (x \leq p \leq y)$.

a) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich $(p \in \mathbb{Z}) \wedge (x \leq p \leq y)$.

1: Aus VS gleich "$\ldots x \leq p \leq y$"
folgt via **142-3**: $p \in [x|y]$.

2: Aus VS gleich "$p \in \mathbb{Z} \ldots$" und
aus 1"$p \in [x|y]$"
folgt via **2-2**: $p \in \mathbb{Z} \cap [x|y]$.

3: Aus 2"$p \in \mathbb{Z} \cap [x|y]$" und
aus "$\mathbb{Z} \cap [x|y] = \{x, \ldots, y\}$"
folgt: $p \in \{x, \ldots, y\}$.

Beweis **169-2** `b)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $p \in \{x, \ldots\}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p \in \{x, \ldots\}$" und
aus "$\{x, \ldots\} = \mathbb{Z} \cap [x| + \infty[$"
folgt via **2-2**: $(p \in \mathbb{Z}) \wedge (p \in [x| + \infty[)$.

`2:` Aus `2`"$\ldots p \in [x| + \infty[$"
folgt via **142-3**: $x \leq p < +\infty$.

`3:` Aus `1`"$p \in \mathbb{Z} \ldots$" und
aus `2`"$x \leq p \ldots$"
folgt: $(p \in \mathbb{Z}) \wedge (x \leq p)$.

`b)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $(p \in \mathbb{Z}) \wedge (x \leq p)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \leq p$"
folgt via **107-3**: $p \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `1`"$p \in \mathbb{S}$"
folgt via **107-5**: $p \leq +\infty$.

`3:` Aus `VS` gleich "$p \in \mathbb{Z} \ldots$"
folgt via **166-1**: $p \neq +\infty$.

`4:` Aus `2`"$p \leq +\infty$" und
aus `3`"$p \neq +\infty$"
folgt via **41-3**: $p < +\infty$.

`5:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \leq p$" und
aus `4`"$p < +\infty$"
folgt via **142-3**: $p \in [x| + \infty[$.

`6:` Aus `VS` gleich "$p \in \mathbb{Z} \ldots$" und
aus `5`"$p \in [x| + \infty[$"
folgt via **2-2**: $p \in \mathbb{Z} \cap [x| + \infty[$.

`7:` Aus `6`"$p \in \mathbb{Z} \cap [x| + \infty[$" und
aus "$\mathbb{Z} \cap [x| + \infty[= \{x, \ldots\}$"
folgt: $p \in \{x, \ldots\}$.

<u>Beweis</u> **169-2** `c)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $p \in \{\ldots, y\}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p \in \{\ldots, y\}$" und
aus "$\{\ldots, y\} = \mathbb{Z} \cap \,]-\infty|y]$"
folgt via **2-2**: $(p \in \mathbb{Z}) \wedge (p \in \,]-\infty|y])$.

`2:` Aus `2`"$\ldots p \in \,]-\infty|y]$"
folgt via **142-3**: $-\infty < p \leq y$.

`3:` Aus `1`"$p \in \mathbb{Z} \ldots$" und
aus `2`"$\ldots p \leq y$"
folgt: $(p \in \mathbb{Z}) \wedge (p \leq y)$.

`c)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $(p \in \mathbb{Z}) \wedge (p \leq y)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots p \leq y$"
folgt via **107-3**: $p \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `1`"$p \in \mathbb{S}$"
folgt via **107-5**: $-\infty \leq p$.

`3:` Aus `VS` gleich "$p \in \mathbb{Z} \ldots$"
folgt via **166-1**: $p \neq -\infty$.

`4:` Aus `3`
folgt: $-\infty \neq p$.

`5:` Aus `2`"$-\infty \leq p$" und
aus `4`"$-\infty \neq p$"
folgt via **41-3**: $-\infty < p$.

`6:` Aus `5`"$-\infty < p$" und
aus `VS` gleich "$\ldots p \leq y$"
folgt via **142-3**: $p \in \,]-\infty|y]$.

`7:` Aus `VS` gleich "$p \in \mathbb{Z} \ldots$" und
aus `7`"$p \in \,]-\infty|y]$"
folgt via **2-2**: $p \in \mathbb{Z} \cap \,]-\infty|y]$.

`8:` Aus `6`"$p \in \mathbb{Z} \cap [-\infty|y[$" und
aus "$\mathbb{Z} \cap [-\infty|y[= \{\ldots, y\}$"
folgt: $p \in \{\ldots, y\}$.

$\square$

169-3. Nun werden Charakterisierungen von $\{l,\ldots\}$, $\{\ldots,m\}$ und $\{l,\ldots,m\}$ für $l,m\in\mathbb{Z}$ getroffen. Interessanter Weise kommt der Beweis *ohne* Fallunterscheidung $0\neq\{l,\ldots,m\}$ oder $\{l,\ldots,m\}=0$ aus:

169-3(Satz)

a) *Aus* "$l\in\mathbb{Z}$" *und* "$n\in\mathbb{N}$" *folgt* "$l+n\in\{l,\ldots\}$".

b) *Aus* "$l\in\mathbb{Z}$" *und* "$p\in\{l,\ldots\}$" *folgt* "$\exists\Omega:(\Omega\in\mathbb{N})\wedge(p=l+\Omega)$".

c) *Aus* "$m\in\mathbb{Z}$" *und* "$n\in\mathbb{N}$" *folgt* "$m-n\in\{\ldots,m\}$".

d) *Aus* "$m\in\mathbb{Z}$" *und* "$p\in\{\ldots,m\}$" *folgt* "$\exists\Omega:(\Omega\in\mathbb{N})\wedge(p=m-\Omega)$".

e) *Aus* "$l\in\mathbb{Z}$" *und* "$m\in\mathbb{Z}$" *und* "$n\in\{0,\ldots,m-l\}$" *folgt* "$l+n\in\{l,\ldots,m\}$".

f) *Aus* "$l\in\mathbb{Z}$" *und* "$m\in\mathbb{Z}$" *und* "$n\in\{0,\ldots,m-l\}$" *folgt* "$m-n\in\{l,\ldots,m\}$".

g) *Aus* "$l\in\mathbb{Z}$" *und* "$m\in\mathbb{Z}$" *und* "$p\in\{l,\ldots,m\}$" *folgt* "$\exists\Omega:(\Omega\in\{0,\ldots,m-l\})\wedge(p=l+\Omega)$".

h) *Aus* "$l\in\mathbb{Z}$" *und* "$m\in\mathbb{Z}$" *und* "$p\in\{l,\ldots,m\}$" *folgt* "$\exists\Omega:(\Omega\in\{0,\ldots,m-l\})\wedge(p=m-\Omega)$".

RECH-**Notation**.

Beweis **169-3**

$\leq$-**Notation**.

Beweis **169-3** `a)` `VS` gleich $(l \in \mathbb{Z}) \wedge (n \in \mathbb{N})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots n \in \mathbb{N}$"
folgt via **164-6**: $n \in \mathbb{Z}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$l \in \mathbb{Z} \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots n \in \mathbb{N}$"
folgt via **166-2**: $l \leq l + n$.

`2:` Aus `VS` gleich "$l \in \mathbb{Z} \ldots$" und
aus `1.1`"$n \in \mathbb{Z}$"
folgt via **164-9**: $l + n \in \mathbb{Z}$.

`3:` Aus `2`"$l + n \in \mathbb{Z}$" und
aus `1.2`"$l \leq l + n$"
folgt via **169-2**: $l + n \in \{l, \ldots\}$.

`b)` `VS` gleich $(l \in \mathbb{Z}) \wedge (p \in \{l, \ldots\})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots p \in \{l, \ldots\}$"
folgt via **169-2**: $(p \in \mathbb{Z}) \wedge (l \leq p)$.

`2:` Aus `VS` gleich "$l \in \mathbb{Z} \ldots$",
aus `1`"$p \in \mathbb{Z} \ldots$" und
aus `1`"$\ldots l \leq p$"
folgt via **166-4**: $\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (l + \Omega = p) \wedge (l = p - \Omega)$.

`3:` Aus `2`
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (l + \Omega = p)$.

`4:` Aus `3`
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (p = l + \Omega)$.

`c)` `VS` gleich $(m \in \mathbb{Z}) \wedge (n \in \mathbb{N})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots n \in \mathbb{N}$"
folgt via **164-6**: $n \in \mathbb{Z}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$m \in \mathbb{Z} \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots n \in \mathbb{N}$"
folgt via **166-2**: $m - n \leq m$.

`2:` Aus `VS` gleich "$m \in \mathbb{Z} \ldots$" und
aus `1.1`"$n \in \mathbb{Z}$"
folgt via **164-9**: $m - n \in \mathbb{Z}$.

`3:` Aus `2`"$m - n \in \mathbb{Z}$" und
aus `1.2`"$m - n \leq m$"
folgt via **169-2**: $m - n \in \{\ldots, m\}$.

<u>Beweis **169-3**</u> `d)` `VS` gleich $(m \in \mathbb{Z}) \wedge (p \in \{\ldots, m\})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots p \in \{\ldots, m\}$"
folgt via **169-2**: $(p \in \mathbb{Z}) \wedge (p \le m)$.

`2:` Aus `1`"$p \in \mathbb{Z} \ldots$",
aus `VS` gleich "$m \in \mathbb{Z} \ldots$" und
aus `1`"$\ldots p \le m$"
folgt via **166-4**: $\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (p + \Omega = m) \wedge (p = m - \Omega)$.

`3:` Aus `2`
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (p = m - \Omega)$.

`e)` `VS` gleich $(l \in \mathbb{Z}) \wedge (m \in \mathbb{Z}) \wedge (n \in \{0, \ldots, m - l\})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots n \in \{0, \ldots, m - l\}$"
folgt via **169-2**: $(n \in \mathbb{Z}) \wedge (0 \le n \le m - l)$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "$l \in \mathbb{Z} \ldots$"
folgt via **164-5**: $l \in \mathbb{R}$.

`2.2:` Aus `VS` gleich "$l \in \mathbb{Z} \ldots$"
folgt via **164-5**: l Zahl.

`3.1:` Aus `VS` gleich "$l \in \mathbb{Z} \ldots$" und
aus `1`"$n \in \mathbb{Z} \ldots$"
folgt via **164-9**: $l + n \in \mathbb{Z}$.

`3.2:` Aus `1`"$\ldots 0 \le n \ldots$" und
aus `2.1`"$l \in \mathbb{R}$"
folgt via **VR**$\le$: $l + 0 \le l + n$.

`3.3:` Via **FS**$-+$ gilt: $m - l = -l + m$.

`3.4:` Aus `2.2`"l Zahl"
folgt via **FSA**0: $l + 0 = l$.

`4.1:` Aus `1`"$\ldots n \le m - l$" und
aus `3.3`"$m - l = -l + m$"
folgt: $n \le -l + m$.

`4.2:` Aus `3.2`"$l + 0 \le l + n$" und
aus `3.4`"$l + 0 = l$"
folgt: $l \le l + n$.

...

<u>Beweis</u> **169-3** `e)` `VS` gleich $(l \in \mathbb{Z}) \wedge (m \in \mathbb{Z}) \wedge (n \in \{0, \ldots, m - l\})$.

...

`5:` Aus `4.1`“$n \leq -l + m$” und
aus `2.1`“$l \in \mathbb{R}$”
folgt via **160-8**: $l + n \leq m$.

`6:` Aus `3.1`“$l + n \in \mathbb{Z}$”,
aus `4.2`“$l \leq l + n$” und
aus `5`“$l + n \leq m$”
folgt via **169-2**: $l + n \in \{l, \ldots, m\}$.

`f)` `VS` gleich $(l \in \mathbb{Z}) \wedge (m \in \mathbb{Z}) \wedge (n \in \{0, \ldots, m - l\})$.

`1:` Aus `VS` gleich “$\ldots n \in \{0, \ldots, m - l\}$”
folgt via **169-2**: $(n \in \mathbb{Z}) \wedge (0 \leq n \leq m - l)$.

`2.1:` Aus `VS` gleich “$\ldots m \in \mathbb{Z} \ldots$”
folgt via **164-5**: $m \in \mathbb{R}$.

`2.2:` Aus `VS` gleich “$\ldots m \in \mathbb{Z} \ldots$”
folgt via **164-5**: m Zahl.

`2.3:` Aus `VS` gleich “$\ldots 0 \leq n \ldots$”
folgt via **109-16**: $-n \leq 0$.

`2.4:` Aus `VS` gleich “$\ldots n \leq m - l$”
folgt via **109-15**: $-(m - l) \leq -n$.

`3.1:` Aus `VS` gleich “$\ldots m \in \mathbb{Z} \ldots$” und
aus `1`“$n \in \mathbb{Z} \ldots$”
folgt via **164-9**: $m - n \in \mathbb{Z}$.

`3.2:` Aus `2.3`“$\ldots -n \leq 0 \ldots$” und
aus `2.1`“$m \in \mathbb{R}$”
folgt via **VR**$\leq$: $m + (-n) \leq m + 0$.

`3.3:` Via **FS**$-+$ gilt: $-(m - l) = -m + l$.

`3.4:` Aus `2.2`“m Zahl”
folgt via **FSA**0: $m + 0 = m$.

...

Beweis **169-3** `f) VS` gleich $(l \in \mathbb{Z}) \wedge (m \in \mathbb{Z}) \wedge (n \in \{0, \ldots, m-l\})$.

...

`4.1:` Aus "$m - n = m + (-n)$" und
aus `3.2` "$m + (-n) \le m + 0$"
folgt: $m - n \le m + 0$.

`4.2:` Aus `2.4` "$-(m - l) \le -n$" und
aus `3.3` "$-(m - l) = -m + l$"
folgt: $-m + l \le -n$.

`5.1:` Aus `4.1` "$m - n \le m + 0$" und
aus `3.4` "$m + 0 = m$"
folgt: $m - n \le m$.

`5.2:` Aus `4.2` "$-m + l \le -n$" und
aus `2.1` "$m \in \mathbb{R}$"
folgt via **160-8**: $l \le m + (-n)$.

`6:` Aus `5.2` "$l \le m + (-n)$" und
aus "$m + (-n) = m - n$"
folgt: $l \le m - n$.

`7:` Aus `3.1` "$m - n \in \mathbb{Z}$",
aus `6` "$l \le m - n$" und
aus `5.1` "$m - n \le m$"
folgt via **169-2**: $m - n \in \{l, \ldots, m\}$.

<u>Beweis **169-3**</u> `g)` `VS` gleich $(l \in \mathbb{Z}) \wedge (m \in \mathbb{Z}) \wedge (p \in \{l, \ldots, m\})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$l \in \mathbb{Z} \ldots$"
folgt via **164-5**: $l \in \mathbb{R}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots p \in \{l, \ldots, m\}$"
folgt via **169-2**: $(p \in \mathbb{Z}) \wedge (l \leq p \leq m)$.

`2:` Aus `1.2`"$p \in \mathbb{Z} \ldots$" und
aus `1.2`"$\ldots l \leq p \ldots$"
folgt via **169-2**: $p \in \{l, \ldots\}$.

`3:` Aus `VS` gleich "$l \in \mathbb{Z} \ldots$" und
aus `2`"$p \in \{l, \ldots\}$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (p = l + \Omega)$.

`4.1:` Aus `3`"$\ldots \Omega \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **164-6**: $(\Omega \in \mathbb{Z}) \wedge (0 \leq \Omega)$.

`4.2:` Aus `1.2`"$\ldots p \leq m$" und
aus `3`"$\ldots p = l + \Omega$"
folgt: $l + \Omega \leq m$.

`5:` Aus `4.2`"$l + \Omega \leq m$" und
aus `1.1`"$l \in \mathbb{R}$"
folgt via **160-8**: $\Omega \leq -l + m$.

`6:` Via **FS**$-+$ gilt: $-l + m = m - l$.

`7:` Aus `5`"$\Omega \leq -l + m$" und
aus `6`"$-l + m = m - l$"
folgt: $\Omega \leq m - l$.

`8:` Aus `4.1`"$\Omega \in \mathbb{Z} \ldots$",
aus `4.1`"$\ldots 0 \leq \Omega$" und
aus `7`"$\Omega \leq m - l$"
folgt via **169-2**: $\Omega \in \{0, \ldots, m - l\}$.

`9:` Aus `3`"$\exists \Omega \ldots$",
aus `8`"$\Omega \in \{0, \ldots, m - l\}$" und
aus `3`"$\ldots p = l + \Omega$"
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in \{0, \ldots, m - l\}) \wedge (p = l + \Omega)$.

<u>Beweis **169-3**</u> `h)` `VS` gleich $(l \in \mathbb{Z}) \wedge (m \in \mathbb{Z}) \wedge (p \in \{l, \ldots, m\})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots m \in \mathbb{Z} \ldots$"
folgt via **164-5**: $m \in \mathbb{R}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots p \in \{l, \ldots, m\}$"
folgt via **169-2**: $(p \in \mathbb{Z}) \wedge (l \leq p \leq m)$.

`2:` Aus `1.2`"$p \in \mathbb{Z} \ldots$" und
aus `1.2`"$\ldots p \leq m$"
folgt via **169-2**: $p \in \{\ldots, m\}$.

`3:` Aus `VS` gleich "$\ldots m \in \mathbb{Z} \ldots$" und
aus `2`"$p \in \{\ldots, m\}$"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (p = m - \Omega)$.

`4.1:` Aus `3`"$\ldots \Omega \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **164-6**: $(\Omega \in \mathbb{Z}) \wedge (0 \leq \Omega)$.

`4.2:` Aus `1.2`"$\ldots l \leq p \ldots$" und
aus `3`"$\ldots p = m - \Omega$"
folgt: $l \leq m - \Omega$.

`5:` Aus `4.2`"$l \leq m - \Omega$" und
aus "$m - \Omega = m + (-\Omega)$"
folgt: $l \leq m + (-\Omega)$.

`6:` Aus `5`"$l \leq m + (-\Omega)$" und
aus `1.1`"$m \in \mathbb{R}$"
folgt via **160-8**: $-m + l \leq -\Omega$.

`7:` Via **FS**$-+$ gilt: $-m + l = -(m - l)$.

`8:` Aus `6`"$-m + l \leq -\Omega$" und
aus `7`"$-m + l = -(m - l)$"
folgt: $-(m - l) \leq -\Omega$.

`9:` Aus `8`"$-(m - l) \leq -\Omega$"
folgt via **109-15**: $\Omega \leq m - l$.

`10:` Aus `4.1`"$\Omega \in \mathbb{Z} \ldots$",
aus `4.1`"$\ldots 0 \leq \Omega$" und
aus `9`"$\Omega \leq m - l$"
folgt via **169-2**: $\Omega \in \{0, \ldots, m - l\}$.

$\ldots$

<u>Beweis</u> **169-3** `h)` `VS` gleich $(l \in \mathbb{Z}) \wedge (m \in \mathbb{Z}) \wedge (p \in \{l, \ldots, m\})$.

...

`11:` Aus `3`"$\exists \Omega \ldots$",
aus `10`"$\Omega \in \{0, \ldots, m-l\}$" und
aus `3`"$\ldots p = m - \Omega$"
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in \{0, \ldots, m-l\}) \wedge (p = m - \Omega)$.

$\square$

169-4. Klarer Weise sind die in **169-1(Def)** vorgestellten Klassen TeilMengen von $\mathbb{Z}$:

169-4(Satz)

a) $\{x, \ldots, y\} \subseteq \mathbb{Z}$.

b) $\{x, \ldots\} \subseteq \mathbb{Z}$.

c) $\{\ldots, y\} \subseteq \mathbb{Z}$.

d) $\{x, \ldots, y\}$ *Menge.*

e) $\{x, \ldots\}$ *Menge.*

f) $\{\ldots, y\}$ *Menge.*

Beweis **169-4** a)

1: Via **2-7** gilt: $\mathbb{Z} \cap [x|y] \subseteq \mathbb{Z}$.

2: Aus "$\{x, \ldots, y\} = \mathbb{Z} \cap [x|y]$" und
aus 1"$\mathbb{Z} \cap [x|y] \subseteq \mathbb{Z}$"
folgt: $\{x, \ldots, y\} \subseteq \mathbb{Z}$.

b)

1: Via **2-7** gilt: $\mathbb{Z} \cap [x| + \infty[\subseteq \mathbb{Z}$.

2: Aus "$\{x, \ldots\} = \mathbb{Z} \cap [x| + \infty[$" und
aus 1"$\mathbb{Z} \cap [x| + \infty[\subseteq \mathbb{Z}$"
folgt: $\{x, \ldots\} \subseteq \mathbb{Z}$.

c)

1: Via **2-7** gilt: $\mathbb{Z} \cap] - \infty|y] \subseteq \mathbb{Z}$.

2: Aus "$\{\ldots, y\} = \mathbb{Z} \cap] - \infty|y]$" und
aus 1"$\mathbb{Z} \cap] - \infty|y] \subseteq \mathbb{Z}$"
folgt: $\{\ldots, y\} \subseteq \mathbb{Z}$.

Beweis **169-4** `d)`

1: Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $\{x, \ldots, y\} \subseteq \mathbb{Z}$.

2: Aus 1"$\{x, \ldots, y\} \subseteq \mathbb{Z}$" und
aus **164-4**"$\mathbb{Z}$ Menge"
folgt via **TeilMengenAxiom**: $\{x, \ldots, y\}$ Menge.

`e)`

1: Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $\{x, \ldots\} \subseteq \mathbb{Z}$.

2: Aus 1"$\{x, \ldots\} \subseteq \mathbb{Z}$" und
aus **164-4**"$\mathbb{Z}$ Menge"
folgt via **TeilMengenAxiom**: $\{x, \ldots\}$ Menge.

`f)`

1: Via des bereits bewiesenen `c)` gilt: $\{\ldots, y\} \subseteq \mathbb{Z}$.

2: Aus 1"$\{\ldots, y\} \subseteq \mathbb{Z}$" und
aus **164-4**"$\mathbb{Z}$ Menge"
folgt via **TeilMengenAxiom**: $\{\ldots, y\}$ Menge.

□

169-5. Die beiden nunmehrigen Klassen-Inklusionen liegen auf der Hand:

169-5(Satz)

a) $\{x, \ldots, y\} \subseteq \{x, \ldots\}$.

b) $\{x, \ldots, y\} \subseteq \{\ldots, y\}$.

Beweis **169-5**

$\leq$-Notation.

---

a)

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in \{x, \ldots, y\}$.

2: Aus Thema1 "$\alpha \in \{x, \ldots, y\}$" folgt via **169-2**: $(\alpha \in \mathbb{Z}) \wedge (x \leq \alpha \leq y)$.

3: Aus 2 "$\alpha \in \mathbb{Z} \ldots$" und aus 2 "$\ldots x \leq \alpha \ldots$" folgt via **169-2**: $\alpha \in \{x, \ldots\}$.

Ergo Thema1: $\forall \alpha : (\alpha \in \{x, \ldots, y\}) \Rightarrow (\alpha \in \{x, \ldots\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\{x, \ldots, y\} \subseteq \{x, \ldots\}$.

b)

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in \{x, \ldots, y\}$.

2: Aus Thema1 "$\alpha \in \{x, \ldots, y\}$" folgt via **169-2**: $(\alpha \in \mathbb{Z}) \wedge (x \leq \alpha \leq y)$.

3: Aus 2 "$\alpha \in \mathbb{Z} \ldots$" und aus 2 "$\ldots \alpha \leq y$" folgt via **169-2**: $\alpha \in \{\ldots, y\}$.

Ergo Thema1: $\forall \alpha : (\alpha \in \{x, \ldots, y\}) \Rightarrow (\alpha \in \{\ldots, y\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\{x, \ldots, y\} \subseteq \{\ldots, y\}$.

$\square$

169-6. Erst werden vier "oder"-Aussagen bewiesen. Danach werden diese Aussagen als Implikationen re-formuliert und teilweise mit Zusatzaussagen ergänzt:

169-6(Satz)

a) *"$x \in \mathbb{S}$" oder "$\{x, \ldots, y\} = 0$".*

b) *"$y \in \mathbb{S}$" oder "$\{x, \ldots, y\} = 0$".*

c) *"$x \in \mathbb{S}$" oder "$\{x, \ldots\} = 0$".*

d) *"$y \in \mathbb{S}$" oder "$\{\ldots, y\} = 0$".*

e) *Aus "$x \notin \mathbb{S}$" folgt "$\{x, \ldots, y\} = 0$".*

f) *Aus "$x \notin \mathbb{S}$" folgt "$\{x, \ldots\} = 0$".*

g) *Aus "$y \notin \mathbb{S}$" folgt "$\{x, \ldots, y\} = 0$".*

h) *Aus "$y \notin \mathbb{S}$" folgt "$\{\ldots, y\} = 0$".*

i) *Aus "$0 \neq \{x, \ldots, y\}$" folgt "$x \in \mathbb{S}$" und "$x \neq +\infty$".*

j) *Aus "$0 \neq \{x, \ldots, y\}$" folgt "$y \in \mathbb{S}$" und "$y \neq -\infty$".*

k) *Aus "$0 \neq \{x, \ldots\}$" folgt "$x \in \mathbb{S}$" und "$x \neq +\infty$".*

l) *Aus "$0 \neq \{\ldots, y\}$" folgt "$y \in \mathbb{S}$" und "$y \neq -\infty$".*

Beweis **169-6**

$\leq$-Notation.

Beweis **169-6** a)

1: Es gilt: $(0 \neq \{x, \ldots, y\}) \vee (\{x, \ldots, y\} = 0)$.

Fallunterscheidung

1.1.Fall $0 \neq \{x, \ldots, y\}$.

2: Aus 1.1.Fall"$0 \neq \{x, \ldots, y\}$" folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in \{x, \ldots, y\}$.

3: Aus 2"$\ldots \Omega \in \{x, \ldots, y\}$" folgt via **169-2**: $x \leq \Omega \leq y$.

4: Aus 3"$x \leq \Omega \ldots$" folgt via **107-3**: $x \in \mathbb{S}$.

1.2.Fall $\{x, \ldots, y\} = 0$.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt: $(x \in \mathbb{S}) \vee (\{x, \ldots, y\} = 0)$.

b)

1: Es gilt: $(0 \neq \{x, \ldots, y\}) \vee (\{x, \ldots, y\} = 0)$.

Fallunterscheidung

1.1.Fall $0 \neq \{x, \ldots, y\}$.

2: Aus 1.1.Fall"$0 \neq \{x, \ldots, y\}$" folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in \{x, \ldots, y\}$.

3: Aus 2"$\ldots \Omega \in \{x, \ldots, y\}$" folgt via **169-2**: $x \leq \Omega \leq y$.

4: Aus 3"$\ldots \Omega \leq y$" folgt via **107-3**: $y \in \mathbb{S}$.

1.2.Fall $\{x, \ldots, y\} = 0$.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt: $(y \in \mathbb{S}) \vee (\{x, \ldots, y\} = 0)$.

Beweis **169-6** `c)`

`1:` Es gilt: $$(0 \neq \{x, \ldots\}) \vee (\{x, \ldots\} = 0).$$

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $$0 \neq \{x, \ldots\}.$$

`2:` Aus `1.1.Fall`"$0 \neq \{x, \ldots\}$"
folgt via **0-20**: $$\exists \Omega : \Omega \in \{x, \ldots\}.$$

`3:` Aus `2`"$\ldots \Omega \in \{x, \ldots\}$"
folgt via **169-2**: $$x \leq \Omega.$$

`4:` Aus `3`"$x \leq \Omega$"
folgt via **107-3**: $$x \in \mathbb{S}.$$

`1.2.Fall` $$\{x, \ldots\} = 0.$$

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$$(x \in \mathbb{S}) \vee (\{x, \ldots\} = 0).$$

`d)`

`1:` Es gilt: $$(0 \neq \{y, \ldots\}) \vee (\{\ldots, y\} = 0).$$

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $$0 \neq \{\ldots, y\}.$$

`2:` Aus `1.1.Fall`"$0 \neq \{\ldots, y\}$"
folgt via **0-20**: $$\exists \Omega : \Omega \in \{\ldots, y\}.$$

`3:` Aus `2`"$\ldots \Omega \in \{\ldots, y\}$"
folgt via **169-2**: $$\Omega \leq y.$$

`4:` Aus `3`"$\Omega \leq y$"
folgt via **107-3**: $$y \in \mathbb{S}.$$

`1.2.Fall` $$\{\ldots, y\} = 0.$$

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$$(y \in \mathbb{S}) \vee (\{\ldots, y\} = 0).$$

Beweis **169-6** `e)` `VS` gleich $x \notin \mathbb{S}$.

`1:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $(x \in \mathbb{S}) \vee (\{x, \ldots, y\} = 0)$.

`2:` Aus `VS` gleich "$x \notin \mathbb{S}$" und
aus `1`"$(x \in \mathbb{S}) \vee (\{x, \ldots, y\} = 0)$"
folgt: $\{x, \ldots, y\} = 0$.

`f)` `VS` gleich $y \notin \mathbb{S}$.

`1:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $(y \in \mathbb{S}) \vee (\{x, \ldots, y\} = 0)$.

`2:` Aus `VS` gleich "$y \notin \mathbb{S}$" und
aus `1`"$(y \in \mathbb{S}) \vee (\{x, \ldots, y\} = 0)$"
folgt: $\{x, \ldots, y\} = 0$.

`g)` `VS` gleich $x \notin \mathbb{S}$.

`1:` Via des bereits bewiesenen `c)` gilt: $(x \in \mathbb{S}) \vee (\{x, \ldots\} = 0)$.

`2:` Aus `VS` gleich "$x \notin \mathbb{S}$" und
aus `1`"$(x \in \mathbb{S}) \vee (\{x, \ldots\} = 0)$"
folgt: $\{x, \ldots\} = 0$.

`h)` `VS` gleich $y \notin \mathbb{S}$.

`1:` Via des bereits bewiesenen `d)` gilt: $(y \in \mathbb{S}) \vee (\{\ldots, y\} = 0)$.

`2:` Aus `VS` gleich "$y \notin \mathbb{S}$" und
aus `1`"$(y \in \mathbb{S}) \vee (\{\ldots, y\} = 0)$"
folgt: $\{\ldots, y\} = 0$.

<u>Beweis **169-6**</u> `i)` `VS` gleich $0 \neq \{x, \ldots, y\}$.

`1:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $(x \in \mathbb{S}) \vee (\{x, \ldots, y\} = 0)$.

`2:` Aus `VS` gleich "$0 \neq \{x, \ldots, y\}$" und
aus `1`"$(x \in \mathbb{S}) \vee (\{x, \ldots, y\} = 0)$"
folgt: $x \in \mathbb{S}$.

`3.1:` Es gilt: $(x = +\infty) \vee (x \neq +\infty)$.

`Fallunterscheidung`

`3.1.1.Fall` $x = +\infty$.

`4:` Aus `VS` gleich "$0 \neq \{x, \ldots, y\}$"
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in \{x, \ldots, y\}$.

`5:` Aus `4`"$\ldots \Omega \in \{x, \ldots, y\}$"
folgt via **169-2**: $(\Omega \in \mathbb{Z}) \wedge (x \leq \Omega)$.

`6.1:` Aus `5`"$\Omega \in \mathbb{Z} \ldots$"
folgt via **166-1**: $\Omega \neq +\infty$.

`6.2:` Aus `3.1.1.Fall`"$x = +\infty$" und
aus `5`"$\ldots x \leq \Omega$"
folgt: $+\infty \leq \Omega$.

`7:` Aus `6.2`"$+\infty \leq \Omega$"
folgt via **107-7**: $\Omega = +\infty$.

`8:` Es gilt `7`"$\Omega = +\infty$".
Es gilt `6.1`"$\Omega \neq +\infty$".
Ex falso quodlibet folgt: $x \neq +\infty$.

`3.1.2.Fall` $x \neq +\infty$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: `A1` | "$x \neq +\infty$"

`3.2:` Aus `2`"$x \in \mathbb{S}$" und
aus `A1` gleich "$x \neq +\infty$"
folgt: $(x \in \mathbb{S}) \wedge (x \neq +\infty)$.

Beweis **169-6** `j)` `VS` gleich $0 \neq \{x, \ldots, y\}$.

`1:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $(y \in \mathbb{S}) \vee (\{x, \ldots, y\} = 0)$.

`2:` Aus `VS` gleich "$0 \neq \{x, \ldots, y\}$" und
aus `1`"$(y \in \mathbb{S}) \vee (\{x, \ldots, y\} = 0)$"
folgt: $y \in \mathbb{S}$.

`3.1:` Es gilt: $(y = -\infty) \vee (y \neq -\infty)$.

`Fallunterscheidung`

`3.1.1.Fall` $y = -\infty$.

`4:` Aus `VS` gleich "$0 \neq \{x, \ldots, y\}$"
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in \{x, \ldots, y\}$.

`5:` Aus `4`"$\ldots \Omega \in \{x, \ldots, y\}$"
folgt via **169-2**: $(\Omega \in \mathbb{Z}) \wedge (\Omega \leq y)$.

`6.1:` Aus `5`"$\Omega \in \mathbb{Z} \ldots$"
folgt via **166-1**: $\Omega \neq -\infty$.

`6.2:` Aus `3.1.1.Fall`"$y = -\infty$" und
aus `5`"$\ldots \Omega \leq y$"
folgt: $\Omega \leq -\infty$.

`7:` Aus `6.2`"$\Omega \leq -\infty$"
folgt via **107-7**: $\Omega = -\infty$.

`8:` Es gilt `7`"$\Omega = -\infty$".
Es gilt `6.1`"$\Omega \neq -\infty$".
Ex falso quodlibet folgt: $y \neq -\infty$.

`3.1.2.Fall` $y \neq -\infty$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: `A1` "$y \neq -\infty$"

`3.2:` Aus `2`"$y \in \mathbb{S}$" und
aus `A1` gleich "$y \neq -\infty$"
folgt: $(y \in \mathbb{S}) \wedge (y \neq -\infty)$.

Beweis **169-6** `k)` `VS` gleich $0 \neq \{x, \ldots\}$.

`1:` Via des bereits bewiesenen `c)` gilt: $(x \in \mathbb{S}) \vee (\{x, \ldots\} = 0)$.

`2:` Aus `VS` gleich "$0 \neq \{x, \ldots\}$" und
aus `1`"$(x \in \mathbb{S}) \vee (\{x, \ldots\} = 0)$"
folgt: $x \in \mathbb{S}$.

`3.1:` Es gilt: $(x = +\infty) \vee (x \neq +\infty)$.

`Fallunterscheidung`

`3.1.1.Fall` $x = +\infty$.

`4:` Aus `VS` gleich "$0 \neq \{x, \ldots\}$"
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in \{x, \ldots\}$.

`5:` Aus `4`"$\ldots \Omega \in \{x, \ldots\}$"
folgt via **169-2**: $(\Omega \in \mathbb{Z}) \wedge (x \leq \Omega)$.

`6.1:` Aus `5`"$\Omega \in \mathbb{Z} \ldots$"
folgt via **166-1**: $\Omega \neq +\infty$.

`6.2:` Aus `3.1.1.Fall`"$x = +\infty$" und
aus `5`"$\ldots x \leq \Omega$"
folgt: $+\infty \leq \Omega$.

`7:` Aus `6.2`"$+\infty \leq \Omega$"
folgt via **107-7**: $\Omega = +\infty$.

`8:` Es gilt `7`"$\Omega = +\infty$".
Es gilt `6.1`"$\Omega \neq +\infty$".
Ex falso quodlibet folgt: $x \neq +\infty$.

`3.1.2.Fall` $x \neq +\infty$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: `A1` | "$x \neq +\infty$"

`3.2:` Aus `2`"$x \in \mathbb{S}$" und
aus `A1` gleich "$x \neq +\infty$"
folgt: $(x \in \mathbb{S}) \wedge (x \neq +\infty)$.

Beweis **169-6** `l)` `VS` gleich $0 \neq \{\ldots, y\}$.

`1:` Via des bereits bewiesenen `d)` gilt: $(y \in \mathbb{S}) \vee (\{\ldots, y\} = 0)$.

`2:` Aus `VS` gleich "$0 \neq \{\ldots, y\}$" und
aus `1`"$(y \in \mathbb{S}) \vee (\{\ldots, y\} = 0)$"
folgt: $y \in \mathbb{S}$.

`3.1:` Es gilt: $(y = -\infty) \vee (y \neq -\infty)$.

`Fallunterscheidung`

`3.1.1.Fall` $y = -\infty$.

`4:` Aus `VS` gleich "$0 \neq \{\ldots, y\}$"
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in \{\ldots, y\}$.

`5:` Aus `4`"$\ldots \Omega \in \{\ldots, y\}$"
folgt via **169-2**: $(\Omega \in \mathbb{Z}) \wedge (\Omega \leq y)$.

`6.1:` Aus `5`"$\Omega \in \mathbb{Z} \ldots$"
folgt via **166-1**: $\Omega \neq -\infty$.

`6.2:` Aus `3.1.1.Fall`"$y = -\infty$" und
aus `5`"$\ldots \Omega \leq y$"
folgt: $\Omega \leq -\infty$.

`7:` Aus `6.2`"$\Omega \leq -\infty$"
folgt via **107-7**: $\Omega = -\infty$.

`8:` Es gilt `7`"$\Omega = -\infty$".
Es gilt `6.1`"$\Omega \neq -\infty$".
Ex falso quodlibet folgt: $y \neq -\infty$.

`3.1.2.Fall` $y \neq -\infty$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: `A1` "$y \neq -\infty$"

`3.2:` Aus `2`"$y \in \mathbb{S}$" und
aus `A1` gleich "$y \neq -\infty$"
folgt: $(y \in \mathbb{S}) \wedge (y \neq -\infty)$.

$\square$

169-7. Nun werden die Klassen $\{x, \ldots, y\}$ ansatzweise unter Verwendung von $\leq, <$ untersucht:

169-7(Satz)

a) *Aus* "$y < x$" *folgt* "$\{x, \ldots, y\} = 0$".

b) *Aus* "$0 \neq \{x, \ldots, y\}$" *folgt* "$x \leq y$".

$\leq$-Notation.

Beweis **169-7** `a)` `VS` gleich $y < x$.

`1:` Es gilt: $(0 \neq \{x, \ldots, y\}) \vee (\{x, \ldots, y\} = 0)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $0 \neq \{x, \ldots, y\}$.

`2:` Aus `1.1.Fall` "$0 \neq \{x, \ldots, y\}$"
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in \{x, \ldots, y\}$.

`3:` Aus `2` "$\ldots \Omega \in \{x, \ldots, y\}$"
folgt via **169-2**: $x \leq \Omega \leq y$.

`4:` Aus `3` "$x \leq \Omega \ldots$" und
aus `3` "$\ldots \Omega \leq y$"
folgt via **107-8**: $x \leq y$.

`5:` Aus `4` "$x \leq y$"
folgt via **107-13**: $\neg(y < x)$.

`6:` Es gilt `5` "$\neg(y < x)$".
Es gilt `VS` gleich "$y < x$".
Ex falso quodlibet folgt: $\{x, \ldots, y\} = 0$.

`1.2.Fall` $\{x, \ldots, y\} = 0$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\{x, \ldots, y\} = 0$.

`b)` `VS` gleich $0 \neq \{x, \ldots, y\}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$0 \neq \{x, \ldots, y\}$"
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in \{x, \ldots, y\}$.

`2:` Aus `2` "$\ldots \Omega \in \{x, \ldots, y\}$"
folgt via **169-2**: $x \leq \Omega \leq y$.

`3:` Aus `2` "$x \leq \Omega \ldots$" und
aus `2` "$\ldots \Omega \leq y$"
folgt via **107-8**: $x \leq y$.

$\square$

169-8. Nun wird einiges über die via **169-1(Def)** eingeführten Klassen gesagt, wenn wenigstens eine der "Grenzen" gleich $+\infty$ oder gleich $-\infty$ ist:

169-8(Satz)

a) $\{+\infty, \ldots, y\} = 0$.

b) $\{-\infty, \ldots, y\} = \{\ldots, y\}$.

c) $\{x, \ldots, +\infty\} = \{x, \ldots\}$.

d) $\{x, \ldots, -\infty\} = 0$.

e) $\{+\infty, \ldots, +\infty\} = 0$.

f) $\{+\infty, \ldots, -\infty\} = 0$.

g) $\{-\infty, \ldots, +\infty\} = \mathbb{Z}$.

h) $\{-\infty, \ldots, -\infty\} = 0$.

i) $\{+\infty, \ldots\} = 0$.

j) $\{-\infty, \ldots\} = \mathbb{Z}$.

k) $\{\ldots, +\infty\} = \mathbb{Z}$.

l) $\{\ldots, -\infty\} = 0$.

$\leq$-Notation.

Beweis **169-8**

≤-Notation.

---

a)

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in \{+\infty, \ldots, y\}$.

2: Aus Thema1 "$\alpha \in \{+\infty, \ldots, y\}$"
folgt via **169-2**: $(\alpha \in \mathbb{Z}) \wedge (+\infty \leq \alpha)$.

3: Aus 2 "$\ldots +\infty \leq \alpha$"
folgt via **107-7**: $\alpha = +\infty$.

4: Aus 3 "$\alpha = +\infty$"
folgt via **166-1**: $\alpha \notin \mathbb{Z}$.

5: Es gilt 2 "$\alpha \in \mathbb{Z} \ldots$".
Es gilt 4 "$\alpha \notin \mathbb{Z}$".
Ex falso quodlibet folgt: $\alpha \notin \{+\infty, \ldots, y\}$.

Ergo Thema1: $\forall \alpha : (\alpha \in \{+\infty, \ldots, y\}) \Rightarrow (\alpha \notin \{+\infty, \ldots, y\})$.

Konsequenz via **0-19**: $\{+\infty, \ldots, y\} = 0$.

<u>Beweis **169-8**</u> `b)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$	$\alpha \in \{\ldots, y\}$.
`2:` Aus `Thema1.1` "$\alpha \in \{\ldots, y\}$" folgt via **169-2**:	$(\alpha \in \mathbb{Z}) \wedge (\alpha \leq y)$.
`3:` Aus `2` "$\alpha \in \mathbb{Z} \ldots$" folgt via **164-5**:	$\alpha \in \mathbb{S}$.
`4:` Aus `3` "$\alpha \in \mathbb{S}$" folgt via **107-5**:	$-\infty \leq \alpha$.
`5:` Aus `2` "$\alpha \in \mathbb{Z} \ldots$", aus `4` "$-\infty \leq \alpha$" und aus `2` "$\ldots \alpha \leq y$" folgt via **169-2**:	$\alpha \in \{-\infty, \ldots, y\}$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{\ldots, y\}) \Rightarrow (\alpha \in \{-\infty, \ldots, y\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{“}\{\ldots, y\} \subseteq \{-\infty, \ldots, y\}\text{”}}$

`1.2:` Via **169-5** gilt: $\{-\infty, \ldots, y\} \subseteq \{\ldots, y\}$.

`2:` Aus `1.2` "$\{-\infty, \ldots, y\} \subseteq \{\ldots, y\}$" und
aus `A1` gleich "$\{\ldots, y\} \subseteq \{-\infty, \ldots, y\}$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\{-\infty, \ldots, y\} = \{\ldots, y\}$.

Beweis **169-8** `c)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in \{x, \ldots\}$.

`2:` Aus `Thema1.1`"$\alpha \in \{x, \ldots\}$"
folgt via **169-2**: $(\alpha \in \mathbb{Z}) \wedge (x \leq \alpha)$.

`3:` Aus `2`"$\alpha \in \mathbb{Z} \ldots$"
folgt via **164-5**: $\alpha \in \mathbb{S}$.

`4:` Aus `3`"$\alpha \in \mathbb{S}$"
folgt via **107-5**: $\alpha \leq +\infty$.

`5:` Aus `2`"$\alpha \in \mathbb{Z} \ldots$",
aus `2`"$\ldots x \leq \alpha$" und
aus `4`"$\alpha \leq +\infty$"
folgt via **169-2**: $\alpha \in \{x, \ldots, +\infty\}$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{x, \ldots\}) \Rightarrow (\alpha \in \{x, \ldots, +\infty\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$\{x, \ldots\} \subseteq \{x, \ldots, +\infty\}$"

`1.2:` Via **169-5** gilt: $\{x, \ldots, +\infty\} \subseteq \{x, \ldots\}$.

`2:` Aus `1.2`"$\{x, \ldots, +\infty\} \subseteq \{x, \ldots\}$" und
aus `A1` gleich "$\{x, \ldots\} \subseteq \{x, \ldots, +\infty\}$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\{x, \ldots, +\infty\} = \{x, \ldots\}$.

Beweis **169-8** `d)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$	$\alpha \in \{x, \ldots, -\infty\}$.
`2:` Aus `Thema1` "$\alpha \in \{x, \ldots, -\infty\}$" folgt via **169-2**:	$(\alpha \in \mathbb{Z}) \wedge (x \leq \alpha \leq -\infty)$.
`3:` Aus `2` "$\ldots \alpha \leq -\infty$" folgt via **107-7**:	$\alpha = -\infty$.
`4:` Aus `3` "$\alpha = -\infty$" folgt via **166-1**:	$\alpha \notin \mathbb{Z}$.
`5:` Es gilt `2` "$\alpha \in \mathbb{Z} \ldots$". Es gilt `4` "$\alpha \notin \mathbb{Z}$". Ex falso quodlibet folgt:	$\alpha \notin \{x, \ldots, -\infty\}$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{x, \ldots, -\infty\}) \Rightarrow (\alpha \notin \{x, \ldots, -\infty\})$.

Konsequenz via **0-19**: $\{x, \ldots, -\infty\} = 0$.

`e)`

Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $\{+\infty, \ldots, +\infty\} = 0$.

`f)`

Via des bereits bewiesenen `d)` gilt: $\{+\infty, \ldots, -\infty\} = 0$.

Beweis **169-8** `g)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$	$\alpha \in \mathbb{Z}$.
`2:` Aus `Thema1.1`“$\alpha \in \mathbb{Z}$” folgt via **164-5**:	$\alpha \in \mathbb{S}$.
`3:` Aus `2`“$\alpha \in \mathbb{S}$” folgt via **107-5**:	$-\infty \le \alpha \le +\infty$.
`4:` Aus `Thema1.1`“$\alpha \in \mathbb{Z}$” und aus `3`“$-\infty \le \alpha \le +\infty$” folgt via **169-2**:	$\alpha \in \{-\infty, \ldots, +\infty\}$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{Z}) \Rightarrow (\alpha \in \{-\infty, \ldots, +\infty\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{“}\mathbb{Z} \subseteq \{-\infty, \ldots, +\infty\}\text{”}}$

`1.2:` Via **169-4** gilt: $\{-\infty, \ldots, +\infty\} \subseteq \mathbb{Z}$.

`2:` Aus `1.2`“$\{-\infty, \ldots, +\infty\} \subseteq \mathbb{Z}$” und
aus `A1` gleich “$\mathbb{Z} \subseteq \{-\infty, \ldots, +\infty\}$”
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\{-\infty, \ldots, +\infty\} = \mathbb{Z}$.

`h)`

Via des bereits bewiesenen `d)` gilt: $\{-\infty, \ldots, -\infty\} = 0$.

`i)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `c)` gilt: $\{+\infty, \ldots, +\infty\} = \{+\infty, \ldots\}$.

`2:` Aus `1`“$\{+\infty, \ldots, +\infty\} = \{+\infty, \ldots\}$” und
aus `e)`“$\{+\infty, \ldots, +\infty\} = 0$” folgt: $\{+\infty, \ldots\} = 0$.

`j)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `c)` gilt: $\{-\infty, \ldots, +\infty\} = \{-\infty, \ldots\}$.

`2:` Aus `1`“$\{-\infty, \ldots, +\infty\} = \{-\infty, \ldots\}$” und
aus `g)`“$\{-\infty, \ldots, +\infty\} = \mathbb{Z}$” folgt: $\{-\infty, \ldots\} = \mathbb{Z}$.

Beweis **169-8** `k)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $\{-\infty, \ldots, +\infty\} = \{\ldots, +\infty\}$.

`2:` Aus `1` "$\{-\infty, \ldots, +\infty\} = \{\ldots, +\infty\}$" und
aus `g)` "$\{-\infty, \ldots, +\infty\} = \mathbb{Z}$" folgt: $\{\ldots, +\infty\} = \mathbb{Z}$.

`l)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $\{-\infty, \ldots, -\infty\} = \{\ldots, -\infty\}$.

`2:` Aus `1` "$\{-\infty, \ldots, -\infty\} = \{\ldots, -\infty\}$" und
aus `h)` "$\{-\infty, \ldots, -\infty\} = 0$" folgt: $\{\ldots, -\infty\} = 0$.

□

169-9. Einige der vorliegenden, elementare KlassenAlgebra involvierenden Aussagen sind beim Beweis von **InduktionsSatz** $\mathbb{Z}$ hilfreich:

169-9(Satz)

a) *Aus* "$z < w$" *folgt* "$\{\ldots, z\} \cap \{w, \ldots\} = 0$"

und "$\{x, \ldots, z\} \cap \{w, \ldots\} = 0$"

und "$\{\ldots, z\} \cap \{w, \ldots, y\} = 0$"

und "$\{x, \ldots, z\} \cap \{w, \ldots, y\} = 0$".

b) *Aus* "$0 < a$" *folgt* "$\{\ldots, z\} \cap \{a + z, \ldots\} = 0$"

und "$\{x, \ldots, z\} \cap \{a + z, \ldots\} = 0$"

und "$\{\ldots, z\} \cap \{a + z, \ldots, y\} = 0$"

und "$\{x, \ldots, z\} \cap \{a + z, \ldots, y\} = 0$".

c) *Aus* "$0 < a$" *folgt* "$\{\ldots, -a + z\} \cap \{z, \ldots\} = 0$"

und "$\{x, \ldots, -a + z\} \cap \{z, \ldots\} = 0$"

und "$\{\ldots, -a + z\} \cap \{z, \ldots, y\} = 0$"

und "$\{x, \ldots, -a + z\} \cap \{z, \ldots, y\} = 0$".

d) *Aus* "$x \in \mathbb{S}$" *folgt* "$\{\ldots, x\} \cup \{x, \ldots\} = \mathbb{Z}$".

RECH.$\leq$-**Notation**.

Beweis **169-9** `a)` `VS` gleich $z < w$.

`1.1:` Es gilt: $(0 \neq \{\ldots, z\} \cap \{w, \ldots\}) \vee (\{\ldots, z\} \cap \{w, \ldots = 0\})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.1.Fall` $0 \neq \{\ldots, z\} \cap \{w, \ldots\}$.

`2:` Aus `1.1.1.Fall`"$0 \neq \{\ldots, z\} \cap \{w, \ldots\}$"
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in \{\ldots, z\} \cap \{w, \ldots\}$.

`3:` Aus `2`"$\ldots \Omega \in \{\ldots, z\} \cap \{w, \ldots\}$"
folgt via **2-2**: $(\Omega \in \{\ldots, z\}) \wedge (\Omega \in \{w, \ldots\})$.

`4.1:` Aus `3`"$\Omega \in \{\ldots, z\} \ldots$"
folgt via **169-2**: $(\Omega \in \mathbb{Z}) \wedge (\Omega \leq z)$.

`4.2:` Aus `3`"$\ldots \Omega \in \{w, \ldots\} \ldots$"
folgt via **169-2**: $(\Omega \in \mathbb{Z}) \wedge (w \leq \Omega)$.

`5:` Aus `4.2`"$\ldots w \leq \Omega$" und
aus `4.1`"$\ldots \Omega \leq z$"
folgt via **107-8**: $w \leq z$.

`6:` Aus `5`"$w \leq z$"
folgt via **107-13**: $\neg(z < w)$.

`7:` Es gilt `6`"$\neg(z < w)$".
Es gilt `VS` gleich "$z < w$".
Ex falso quodlibet folgt: $\{\ldots, z\} \cap \{w, \ldots\} = 0$.

`1.1.2.Fall` $\{\ldots, z\} \cap \{w, \ldots\} = 0$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

`A1` | "$\{\ldots, z\} \cap \{w, \ldots\} = 0$"

`1.2:` Via **169-5** gilt: $\{x, \ldots, z\} \subseteq \{\ldots, z\}$.

`1.3:` Via **169-5** gilt: $\{w, \ldots, y\} \subseteq \{w, \ldots\}$.

`2.1:` Aus `1.2`"$\{x, \ldots, z\} \subseteq \{\ldots, z\}$" und
aus `A1` gleich "$\{\ldots, z\} \cap \{w, \ldots\} = 0$"
folgt via **161-2**: $\{x, \ldots, z\} \cap \{w, \ldots\} = 0$.

`2.2:` Aus `1.3`"$\{w, \ldots, y\} \subseteq \{w, \ldots\}$" und
aus `A1` gleich "$\{\ldots, z\} \cap \{w, \ldots\} = 0$"
folgt via **161-2**: $\{\ldots, z\} \cap \{w, \ldots, y\} = 0$.

...

Beweis **169-9** `a)` `VS` gleich $z < w$.

...

`3:` Aus `1.2`"$\{x, \ldots, z\} \subseteq \{\ldots, z\}$" und
aus `2.2`"$\{\ldots, z\} \cap \{w, \ldots, y\} = 0$"
folgt via **161-2**: $\{x, \ldots, z\} \cap \{w, \ldots, y\} = 0$.

`4:` Aus `A1` gleich "$\{\ldots, z\} \cap \{w, \ldots\} = 0$",
aus `2.1`"$\{x, \ldots, z\} \cap \{w, \ldots\} = 0$",
aus `2.2`"$\{\ldots, z\} \cap \{w, \ldots, y\} = 0$" und
aus `3`"$\{x, \ldots, z\} \cap \{w, \ldots, y\} = 0$"
folgt:

$$\{\ldots, z\} \cap \{w, \ldots\} = 0$$
$$\wedge \quad \{x, \ldots, z\} \cap \{w, \ldots\} = 0$$
$$\wedge \quad \{\ldots, z\} \cap \{w, \ldots, y\} = 0$$
$$\wedge \quad \{x, \ldots, z\} \cap \{w, \ldots, y\} = 0.$$

Beweis **169-9** `b)` `VS` gleich $0 < a$.

`1.1:` Es gilt: $(0 \neq \{\ldots, z\} \cap \{a + z, \ldots\}) \vee (\{\ldots, z\} \cap \{a + z, \ldots\} = 0)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.1.Fall` $0 \neq \{\ldots, z\} \cap \{a + z, \ldots\}$.

`2:` Aus `1.1.1.Fall`“$0 \neq \{\ldots, z\} \cap \{a + z, \ldots\}$”
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in \{\ldots, z\} \cap \{a + z, \ldots\}$.

`3:` Aus `2`“$\ldots \Omega \in \{\ldots, z\} \cap \{a + z, \ldots\}$”
folgt via **2-2**: $(\Omega \in \{\ldots, z\}) \wedge (\Omega \in \{a + z, \ldots\})$.

`4.1:` Aus `3`“$\Omega \in \{\ldots, z\} \ldots$”
folgt via **169-2**: $(\Omega \in \mathbb{Z}) \wedge (\Omega \leq z)$.

`4.2:` Aus `3`“$\ldots \Omega \in \{a + z, \ldots\}$”
folgt via **169-2**: $(\Omega \in \mathbb{Z}) \wedge (a + z \leq \Omega)$.

`5.1:` Aus `4.1`“$\Omega \in \mathbb{Z} \ldots$”
folgt via **164-5**: $\Omega \in \mathbb{R}$.

`5.2:` Aus `4.1`“$\ldots \Omega \leq z$”
folgt via **107-3**: $z \in \mathbb{S}$.

`6.1:` Aus `5.1`“$\Omega \in \mathbb{R}$”
folgt via **107-4**: $-\infty < \Omega < +\infty$.

`6.2:` Aus `5.2`“$z \in \mathbb{S}$”
folgt via $\in$**SZ**: z Zahl.

`7.1:` Aus `6.1`“$-\infty < \Omega \ldots$” und
aus `4.1`“$\ldots \Omega \leq z$”
folgt via **107-8**: $-\infty < z$.

`7.2:` Aus `4.2`“$\ldots a + z \leq \Omega$” und
aus `6.1`“$\ldots \Omega < +\infty$”
folgt via **107-8**: $a + z < +\infty$.

`7.3:` Aus `6.2`“z Zahl”
folgt via **FSA**0: $z + 0 = z$.

`8.1:` Aus `VS` gleich “$0 < a$”
folgt via **41-3**: $0 \leq a$.

`8.2:` Aus `7.1`“$-\infty < z$”
folgt via **41-3**: $-\infty \neq z$.

`9.1:` Aus `8.1`“$0 \leq a$”
folgt via **109-23**: $a + (+\infty) = +\infty$.

`9.2:` Aus `7.2`“$a + z < +\infty$”
folgt via **41-3**: $a + z \neq +\infty$.

`9.3:` Aus `8.2`
folgt: $z \neq -\infty$.

...

...

Beweis **169-9** `b)` `VS` gleich $0 < a$.

...

`Fallunterscheidung`

`1.1.1.Fall` $0 \neq \{\ldots, z\} \cap \{a+z, \ldots\}$.

...

`10:` Aus `9.2`"$a + z \neq +\infty$" und
aus `9.1`"$a + (+\infty) = +\infty$"
folgt: $a + z \neq a + (+\infty)$.

`11:` Aus `10`"$a + z \neq a + (+\infty)$"
folgt via **93-1**: $z \neq +\infty$.

`12:` Aus `5.2`"$z \in \mathbb{S}$",
aus `11`"$z \neq +\infty$" und
aus `9.3`"$z \neq -\infty$"
folgt via **95-17**: $z \in \mathbb{R}$.

`13:` Aus `VS` gleich "$0 < a$" und
aus `12`"$z \in \mathbb{R}$"
folgt via **VR**<: $z + 0 < z + a$.

`14.1:` Aus `1.3`"$z + 0 < z + a$" und
aus `7.3`"$z + 0 = z$"
folgt: $z < z + a$.

`14.2:` Via **FSA** gilt: $z + a = a + z$.

`15:` Aus `14.2`"$z < z + a$" und
aus `14.2`"$z + a = a + z$"
folgt: $z < a + z$.

`16:` Aus `15`"$z < a + z$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\{\ldots, z\} \cap \{a+z, \ldots\} = 0$.

`1.1.2.Fall` $\{\ldots, z\} \cap \{a+z, \ldots\} = 0$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

`A1` | "$\{\ldots, z\} \cap \{a+z, \ldots\} = 0$"

...

<u>Beweis</u> **169-9** `b)` `VS` gleich $0 < a$.

...

`1.2:` Via **169-5** gilt: $\{x, \ldots, z\} \subseteq \{\ldots, z\}$.

`1.3:` Via **169-5** gilt: $\{a+z, \ldots, y\} \subseteq \{a+z, \ldots\}$.

`2.1:` Aus `1.2` "$\{x, \ldots, z\} \subseteq \{\ldots, z\}$" und
aus `A1` gleich "$\{\ldots, z\} \cap \{a+z, \ldots\} = 0$"
folgt via **161-2**: $\{x, \ldots, z\} \cap \{a+z, \ldots\} = 0$.

`2.2:` Aus `1.3` "$\{a+z, \ldots, y\} \subseteq \{a+z, \ldots\}$" und
aus `A1` gleich "$\{\ldots, z\} \cap \{a+z, \ldots\} = 0$"
folgt via **161-2**: $\{\ldots, z\} \cap \{a+z, \ldots, y\} = 0$.

`3:` Aus `1.2` "$\{x, \ldots, z\} \subseteq \{\ldots, z\}$" und
aus `2.2` "$\{\ldots, z\} \cap \{a+z, \ldots, y\} = 0$"
folgt via **161-2**: $\{x, \ldots, z\} \cap \{a+z, \ldots, y\} = 0$.

`4:` Aus `A1` gleich "$\{\ldots, z\} \cap \{a+z, \ldots\} = 0$",
aus `2.1` "$\{x, \ldots, z\} \cap \{a+z, \ldots\} = 0$",
aus `2.2` "$\{\ldots, z\} \cap \{a+z, \ldots, y\} = 0$" und
aus `3` "$\{x, \ldots, z\} \cap \{a+z, \ldots, y\} = 0$"
folgt:

$$\begin{aligned} & \{\ldots, z\} \cap \{a+z, \ldots\} = 0 \\ \wedge \quad & \{x, \ldots, z\} \cap \{a+z, \ldots\} = 0 \\ \wedge \quad & \{\ldots, z\} \cap \{a+z, \ldots, y\} = 0 \\ \wedge \quad & \{x, \ldots, z\} \cap \{a+z, \ldots, y\} = 0. \end{aligned}$$

Beweis **169-9** `c)` `VS` gleich $0 < a$.

`1:` Aus `VS` gleich "$0 < a$"
folgt via **107-16**: $(a \in \mathbb{R}) \vee (a = +\infty)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $a \in \mathbb{R}$.

`2:` Es gilt:
$(0 \neq \{\ldots, -a+z\} \cap \{z, \ldots\}) \vee (\{\ldots, -a+z\} \cap \{z, \ldots\} = 0)$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $0 \neq \{\ldots, -a+z\} \cap \{z, \ldots\}$.

`3.1:` Aus `1.1.Fall`"$a \in \mathbb{R}$"
folgt via $\in$**SZ**: $a \in \mathbb{C}$.

`3.2:` Aus `2.1.Fall`"$0 \neq \{\ldots, -a+z\} \cap \{z, \ldots\}$"
folgt via **2-18**: $0 \neq \{z, \ldots\}$.

`4:` Aus `3.2`"$0 \neq \{z, \ldots\}$"
folgt via **169-6**: $z \in \mathbb{S}$.

`5:` Aus `4`"$z \in \mathbb{S}$"
folgt via $\in$**SZ**: z Zahl.

`6:` Aus `3.1`"$a \in \mathbb{C}$" und
aus `5`"z Zahl"
folgt via **160-3**: $a + (-a+z) = z$.

`7:` Aus `VS` gleich "$0 < a$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`:
$\{\ldots, -a+z\} \cap \{a + (-a+z), \ldots\} = 0$.

`8:` Aus `7`"$\{\ldots, -a+z\} \cap \{a + (-a+z), \ldots\} = 0$" und
aus `6`"$a + (-a+z) = z$"
folgt: $\{\ldots, -a+z\} \cap \{z, \ldots\} = 0$.

`2.2.Fall` $\{\ldots, -a+z\} \cap \{z, \ldots\} = 0$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$\{\ldots, -a+z\} \cap \{z, \ldots\} = 0$.

...

Beweis **169-9** `c) VS` gleich $0 < a$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.2.Fall` $a = +\infty$.

`2:` Es gilt: $(0 \neq \{\ldots, -a+z\} \cap \{z, \ldots\}) \vee (\{\ldots, -a+z\} \cap \{z, \ldots\} = 0)$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $0 \neq \{\ldots, -a+z\} \cap \{z, \ldots\}$.

`3.1:` Aus `2.1.Fall`"$0 \neq \{\ldots, -a+z\} \cap \{z, \ldots\}$"
folgt via **2-18**: $0 \neq \{\ldots, -a+z\}$.

`3.2:` Aus `2.1.Fall`"$0 \neq \{\ldots, -a+z\} \cap \{z, \ldots\}$"
folgt via **2-18**: $0 \neq \{z, \ldots\}$.

`4.1:` Aus `3.1`"$0 \neq \{\ldots, -a+z\}$"
folgt via **169-6**: $-a+z \in \mathbb{S}$.

`4.2:` Aus `3.2`"$0 \neq \{z, \ldots\}$"
folgt via **169-6**: $z \in \mathbb{S}$.

`4.3:` Aus `3.1`"$0 \neq \{\ldots, -a+z\}$"
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in \{\ldots, -a+z\}$.

`5.1:` Aus `4.1`"$-a+z \in \mathbb{S}$"
folgt via **95-20**: $-a+z \neq \mathsf{nan}$.

`5.2:` Aus `4.2`"$z \in \mathbb{S}$"
folgt via $\in$**SZ**: $z \in \mathbb{T}$.

`5.3:` Aus `4.3`"$\ldots \Omega \in \{\ldots, -a+z\}$"
folgt via **169-2**: $(\Omega \in \mathbb{Z}) \wedge (\Omega \leq -a+z)$.

`6.1:` Aus `5.2`"$z \in \mathbb{T}$"
folgt via **119-1**: $((-\infty)+z = -\infty) \vee ((-\infty)+z = \mathsf{nan})$.

`6.2:` Aus `5.3`"$\Omega \in \mathbb{Z} \ldots$"
folgt via **166-1**: $\Omega \neq -\infty$.

`7:` Aus `1.2.Fall`"$a = +\infty$"
folgt via **100-13**: $-a = -\infty$.

...

...

...

Beweis **169-9** `c) VS` gleich $0 < a$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.2.Fall` $a = +\infty$.

`2:` Es gilt: $(0 \neq \{\ldots, -a+z\} \cap \{z,\ldots\}) \vee (\{\ldots, -a+z\} \cap \{z,\ldots\} = 0)$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $0 \neq \{\ldots, -a+z\} \cap \{z,\ldots\}$.

...

`8:` Aus `6.1` "$((-\infty)+z = -\infty) \vee ((-\infty)+z = \mathsf{nan})$" und
aus `7` "$-a = -\infty$"
folgt: $(-a+z = -\infty) \vee (-a+z = \mathsf{nan})$.

`9:` Aus `8` "$(-a+z = -\infty) \vee (-a+z = \mathsf{nan})$" und
aus `5.1` "$-a+z \neq \mathsf{nan}$"
folgt: $-a+z = -\infty$.

`10:` Aus `5.3` "$\ldots \Omega \leq -a+z$" und
aus `9` "$-a+z = -\infty$"
folgt: $\Omega \leq -\infty$.

`11:` Aus `10` "$\Omega \leq -\infty$"
folgt via **107-7**: $\Omega = -\infty$.

`12:` Es gilt `11` "$\Omega = -\infty$".
Es gilt `6.2` "$\Omega \neq -\infty$".
Ex falso quodlibet folgt: $\{\ldots, -a+z\} \cap \{z,\ldots\} = 0$.

`2.2.Fall` $\{\ldots, -a+z\} \cap \{z,\ldots\} = 0$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$\{\ldots, -a+z\} \cap \{z,\ldots\} = 0$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

`A1`	"$\{\ldots, -a+z\} \cap \{z,\ldots\} = 0$"

<u>Beweis **169-9**</u> `c)` `VS` gleich $0 < a.$

...

`1.2:` Via **169-5** gilt: $\{x, \ldots, -a+z\} \subseteq \{\ldots, -a+z\}.$

`1.3:` Via **169-5** gilt: $\{z, \ldots, y\} \subseteq \{z, \ldots\}.$

`2.1:` Aus `1.2`"$\{x, \ldots, -a+z\} \subseteq \{\ldots, -a+z\}$" und
aus `A1` gleich "$\{\ldots, -a+z\} \cap \{z, \ldots\} = 0$"
folgt via **161-2**: $\{x, \ldots, -a+z\} \cap \{z, \ldots\} = 0.$

`2.2:` Aus `1.3`"$\{z, \ldots, y\} \subseteq \{z, \ldots\}$" und
aus `A1` gleich "$\{\ldots, -a+z\} \cap \{z, \ldots\} = 0$"
folgt via **161-2**: $\{\ldots, -a+z\} \cap \{z, \ldots, y\} = 0.$

`3:` Aus `1.2`"$\{x, \ldots, -a+z\} \subseteq \{\ldots, -a+z\}$" und
aus `2.2`"$\{\ldots, -a+z\} \cap \{z, \ldots, y\} = 0$"
folgt via **161-2**: $\{x, \ldots, -a+z\} \cap \{z, \ldots, y\} = 0.$

`4:` Aus `A1` gleich "$\{\ldots, -a+z\} \cap \{z, \ldots\} = 0$",
aus `2.1`"$\{x, \ldots, -a+z\} \cap \{z, \ldots\} = 0$",
aus `2.2`"$\{\ldots, -a+z\} \cap \{z, \ldots, y\} = 0$" und
aus `3`"$\{x, \ldots, -a+z\} \cap \{z, \ldots, y\} = 0$"
folgt:

$$\begin{aligned} & \{\ldots, -a+z\} \cap \{z, \ldots\} = 0 \\ \wedge\quad & \{x, \ldots, -a+z\} \cap \{z, \ldots\} = 0 \\ \wedge\quad & \{\ldots, -a+z\} \cap \{z, \ldots, y\} = 0 \\ \wedge\quad & \{x, \ldots, -a+z\} \cap \{z, \ldots, y\} = 0. \end{aligned}$$

<u>Beweis</u> **169-9** `d)` `VS` gleich $x \in \mathbb{S}$.

`1.1:` Via **169-4** gilt: $\{\ldots, x\} \subseteq \mathbb{Z}$.

`1.2:` Via **169-4** gilt: $\{x, \ldots\} \subseteq \mathbb{Z}$.

`Thema1.3` $\alpha \in \mathbb{Z}$.

`2:` Aus `Thema1.3`“$\alpha \in \mathbb{Z}$”
folgt via **164-5**: $\alpha \in \mathbb{S}$.

`3:` Aus `VS` gleich “$x \in \mathbb{S}$” und
aus 2“$\alpha \in \mathbb{S}$”
folgt via **107-14**: $(x \leq \alpha) \vee (\alpha \leq x)$.

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` $x \leq \alpha$.

`4:` Aus `Thema1.3`“$\alpha \in \mathbb{Z}$” und
aus `3.1.Fall`“$x \leq \alpha$”
folgt via **169-2**: $\alpha \in \{x, \ldots\}$.

`5:` Aus 4“$\alpha \in \{x, \ldots\}$”
folgt via **2-2**: $\alpha \in \{\ldots, x\} \cup \{x, \ldots\}$.

`3.2.Fall` $\alpha \leq x$.

`4:` Aus `Thema1.3`“$\alpha \in \mathbb{Z}$” und
aus `3.2.Fall`“$\alpha \leq x$”
folgt via **169-2**: $\alpha \in \{\ldots, x\}$.

`5:` Aus 4“$\alpha \in \{\ldots, x\}$”
folgt via **2-2**: $\alpha \in \{\ldots, x\} \cup \{x, \ldots\}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$\alpha \in \{\ldots, x\} \cup \{x, \ldots\}$.

...

Beweis **169-9** `d)` `VS` gleich $x \in \mathbb{S}$.

...

Ergo `Thema1.3`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{Z}) \Rightarrow (\alpha \in \{\ldots, x\} \cup \{x, \ldots\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$\mathbb{Z} \subseteq \{\ldots, x\} \cup \{x, \ldots\}$"

`2:` Aus `1.1`"$\{\ldots, x\} \subseteq \mathbb{Z}$" und
aus `1.2`"$\{x, \ldots\} \subseteq \mathbb{Z}$"
folgt via **2-12**: $\{\ldots, x\} \cup \{x, \ldots\} \subseteq \mathbb{Z}$.

`3:` Aus `2`"$\{\ldots, x\} \cup \{x, \ldots\} \subseteq \mathbb{Z}$" und
aus `A1` gleich "$\mathbb{Z} \subseteq \{\ldots, x\} \cup \{x, \ldots\}$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\{\ldots, x\} \cup \{x, \ldots\} = \mathbb{Z}$.

$\square$

169-10. Mit Hilfe von **VR**$\le$ sind die vorliegenden Aussagen recht einfach zu beweisen:

169-10(Satz)

a) *Aus* "$p \in \{x, \ldots, y\}$" *und* "$l \in \mathbb{Z}$" *folgt* "$l + p \in \{l + x, \ldots, l + y\}$".

b) *Aus* "$p \in \{x, \ldots, y\}$" *und* "$l \in \mathbb{Z}$"
folgt "$-l + p \in \{-l + x, \ldots, -l + y\}$".

c) *Aus* "$p \in \{x, \ldots\}$" *und* "$l \in \mathbb{Z}$" *folgt* "$l + p \in \{l + x, \ldots\}$".

d) *Aus* "$p \in \{x, \ldots\}$" *und* "$l \in \mathbb{Z}$" *folgt* "$-l + p \in \{-l + x, \ldots\}$".

e) *Aus* "$p \in \{\ldots, y\}$" *und* "$l \in \mathbb{Z}$" *folgt* "$l + p \in \{\ldots, l + y\}$".

f) *Aus* "$p \in \{\ldots, y\}$" *und* "$l \in \mathbb{Z}$" *folgt* "$-l + p \in \{\ldots, -l + y\}$".

RECH-**Notation**.

Beweis **169-10**

$\le$-**Notation**.

Beweis **169-10** `a)` `VS` gleich $(p \in \{x, \ldots, y\}) \wedge (l \in \mathbb{Z})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$p \in \{x, \ldots, y\} \ldots$"
folgt via **169-2**: $(p \in \mathbb{Z}) \wedge (x \le p \le y)$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots l \in \mathbb{Z}$"
folgt via **164-5**: $l \in \mathbb{R}$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots l \in \mathbb{Z}$" und
aus `1.1`"$p \in \mathbb{Z} \ldots$"
folgt via **164-9**: $l + p \in \mathbb{Z}$.

`2.2:` Aus `1.1`"$\ldots x \le p \ldots$" und
aus `1.2`"$l \in \mathbb{R}$"
folgt via **VR**$\le$: $l + x \le l + p$.

`2.3:` Aus `1.1`"$\ldots p \le y$" und
aus `1.2`"$l \in \mathbb{R}$"
folgt via **VR**$\le$: $l + p \le l + y$.

`3:` Aus `2.1`"$l + p \in \mathbb{Z}$",
aus `2.2`"$l + x \le l + p$" und
aus `2.3`"$l + p \le l + y$"
folgt via **169-2**: $l + p \in \{l + x, \ldots, l + y\}$.

`b)` `VS` gleich $(p \in \{x, \ldots, y\}) \wedge (l \in \mathbb{Z})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots l \in \mathbb{Z}$"
folgt via **164-8**: $-l \in \mathbb{Z}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$p \in \{x, \ldots, y\} \ldots$" und
aus `1`"$-l \in \mathbb{Z}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $-l + p \in \{-l + x, \ldots, -l + y\}$.

<u>Beweis **169-10**</u> `c)` `VS` gleich $(p \in \{x, \ldots\}) \wedge (l \in \mathbb{Z})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$p \in \{x, \ldots\} \ldots$"
folgt via **169-2**: $(p \in \mathbb{Z}) \wedge (x \leq p)$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots l \in \mathbb{Z}$"
folgt via **164-5**: $l \in \mathbb{R}$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots l \in \mathbb{Z}$" und
aus `1.1`"$p \in \mathbb{Z} \ldots$"
folgt via **164-9**: $l + p \in \mathbb{Z}$.

`2.2:` Aus `1.1`"$\ldots x \leq p$" und
aus `1.2`"$l \in \mathbb{R}$"
folgt via **VR**$\leq$: $l + x \leq l + p$.

`3:` Aus `2.1`"$l + p \in \mathbb{Z}$" und
aus `2.2`"$l + x \leq l + p$"
folgt via **169-2**: $l + p \in \{l + x, \ldots, l + y\}$.

`d)` `VS` gleich $(p \in \{x, \ldots\}) \wedge (l \in \mathbb{Z})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots l \in \mathbb{Z}$"
folgt via **164-8**: $-l \in \mathbb{Z}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$p \in \{x, \ldots\} \ldots$" und
aus `1`"$-l \in \mathbb{Z}$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $-l + p \in \{-l + x, \ldots\}$.

`e)` `VS` gleich $(p \in \{\ldots, y\}) \wedge (l \in \mathbb{Z})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$p \in \{\ldots, y\} \ldots$"
folgt via **169-2**: $(p \in \mathbb{Z}) \wedge (p \leq y)$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots l \in \mathbb{Z}$"
folgt via **164-5**: $l \in \mathbb{R}$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots l \in \mathbb{Z}$" und
aus `1.1`"$p \in \mathbb{Z} \ldots$"
folgt via **164-9**: $l + p \in \mathbb{Z}$.

`2.2:` Aus `1.1`"$\ldots p \leq y$" und
aus `1.2`"$l \in \mathbb{R}$"
folgt via **VR**$\leq$: $l + p \leq l + y$.

`3:` Aus `2.1`"$l + p \in \mathbb{Z}$" und
aus `2.3`"$l + p \leq l + y$"
folgt via **169-2**: $l + p \in \{\ldots, l + y\}$.

Beweis **169-10** `f)` `VS` gleich $(p \in \{\ldots, y\}) \wedge (l \in \mathbb{Z})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots l \in \mathbb{Z}$"
folgt via **164-8**: $-l \in \mathbb{Z}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$p \in \{\ldots, y\} \ldots$" und
aus `1` "$-l \in \mathbb{Z}$"
folgt via des bereits bewiesenen `e)`: $-l + p \in \{\ldots, -l + p\}$.

$\square$

169-11. Die nunmehrigen Aussagen sind in gewisser Weise die Umkehrung von **169-10**:

<u>**169-11(Satz)**</u>

a) *Aus* "$l+p \in \{l+x, \ldots, l+y\}$" *und* "$l \in \mathbb{Z}$" *folgt* "$p \in \{x, \ldots, y\}$".

b) *Aus* "$-l+p \in \{-l+x, \ldots, -l+y\}$" *und* "$l \in \mathbb{Z}$" *folgt* "$p \in \{x, \ldots, y\}$".

c) *Aus* "$l+p \in \{l+x, \ldots\}$" *und* "$l \in \mathbb{Z}$" *folgt* "$p \in \{x, \ldots\}$".

d) *Aus* "$-l+p \in \{-l+x, \ldots\}$" *und* "$l \in \mathbb{Z}$" *folgt* "$p \in \{x, \ldots\}$".

e) *Aus* "$l+p \in \{\ldots, l+y\}$" *und* "$l \in \mathbb{Z}$" *folgt* "$p \in \{\ldots, y\}$".

f) *Aus* "$-l+p \in \{\ldots, -l+y\}$" *und* "$l \in \mathbb{Z}$" *folgt* "$p \in \{\ldots, y\}$".

<u>RECH-**Notation**</u>.

<u>Beweis **169-11**</u> a) VS gleich $(l+p \in \{l+x, \ldots, l+y\}) \wedge (l \in \mathbb{Z})$.

1.1: Aus VS gleich "$l+p \in \{l+x, \ldots, l+y\} \ldots$"
folgt via **169-10**: $-l+(l+p) \in \{-l+(l+x), \ldots, -l+(l+y)\}$.

1.2: Aus VS gleich "$l+p \in \{l+x, \ldots, l+y\} \ldots$"
folgt via **ElementAxiom**: $l+p$ Menge.

1.3: Aus VS gleich "$l+p \in \{l+x, \ldots, l+y\} \ldots$"
folgt via **0-20**: $0 \neq \{l+x, \ldots, l+y\}$.

1.4: Aus VS gleich "$\ldots l \in \mathbb{Z}$"
folgt via **164-5**: $l \in \mathbb{C}$.

2.1: Aus 1.2 "$l+p$ Menge"
folgt via **96-13**: p Zahl.

2.2: Aus 1.3 "$0 \neq \{l+x, \ldots, l+y\}$"
folgt via **169-6**: $(l+x \in \mathbb{S}) \wedge (l+y \in \mathbb{S})$.

...

Beweis **169-11** `a)` `VS` gleich $(l+p\in\{l+x,\ldots,l+y\})\wedge(l\in\mathbb{Z})$.

...

`3.1:` Aus `1.4`"$l\in\mathbb{C}$" und
aus `2.1`"p Zahl"
folgt via **160-3**: $-l+(l+p)=p$.

`3.2:` Aus `2.2`"$l+x\in\mathbb{S}\ldots$"
folgt via **ElementAxiom**: $l+x$ Menge.

`3.3:` Aus `2.2`"$\ldots l+y\in\mathbb{S}$"
folgt via **ElementAxiom**: $l+y$ Menge.

`3.4:` Aus `1.1`"$-l+(l+p)\in\{-l+(l+x),\ldots,-l+(l+y)\}$" und
aus `3.1`"$-l+(l+p)=p$"
folgt: $p\in\{-l+(l+x),\ldots,-l+(l+y)\}$.

`4.1:` Aus `3.2`"$l+x$ Menge"
folgt via **96-13**: x Zahl.

`4.2:` Aus `3.3`"$l+y$ Menge"
folgt via **96-13**: y Zahl.

`5.1:` Aus `1.4`"$l\in\mathbb{C}$" und
aus `4.1`"x Zahl"
folgt via **160-3**: $-l+(l+x)=x$.

`5.2:` Aus `1.4`"$l\in\mathbb{C}$" und
aus `4.2`"y Zahl"
folgt via **160-3**: $-l+(l+y)=y$.

`6:` Aus `3.4`"$p\in\{-l+(l+x),\ldots,-l+(l+y)\}$" und
aus `5.1`"$-l+(l+x)=x$"
folgt: $p\in\{x,\ldots,-l+(l+y)\}$.

`7:` Aus `6`"$p\in\{x,\ldots,-l+(l+y)\}$" und
aus `5.2`"$-l+(l+y)=y$"
folgt: $p\in\{x,\ldots,y\}$.

`b)` `VS` gleich $(-l+p\in\{-l+x,\ldots,-l+y\})\wedge(l\in\mathbb{Z})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots l\in\mathbb{Z}$"
folgt via **164-8**: $-l\in\mathbb{Z}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$-l+p\in\{-l+x,\ldots,-l+y\}\ldots$" und
aus `1`"$-l\in\mathbb{Z}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $p\in\{x,\ldots,y\}$.

<u>Beweis</u> **<u>169-11</u>** `c)` `VS` gleich $(l+p \in \{l+x,\ldots\}) \wedge (l \in \mathbb{Z})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$l+p \in \{l+x,\ldots\}\ldots$"
folgt via **169-10**: $-l+(l+p) \in \{-l+(l+x),\ldots\}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$l+p \in \{l+x,\ldots\}\ldots$"
folgt via **ElementAxiom**: $l+p$ Menge.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$l+p \in \{l+x,\ldots\}\ldots$"
folgt via **0-20**: $0 \neq \{l+x,\ldots\}$.

`1.4:` Aus `VS` gleich "$\ldots l \in \mathbb{Z}$"
folgt via **164-5**: $l \in \mathbb{C}$.

`2.1:` Aus `1.2`"$l+p$ Menge"
folgt via **96-13**: p Zahl.

`2.2:` Aus `1.3`"$0 \neq \{l+x,\ldots\}$"
folgt via **169-6**: $l+x \in \mathbb{S}$.

`3.1:` Aus `1.4`"$l \in \mathbb{C}$" und
aus `2.1`"p Zahl"
folgt via **160-3**: $-l+(l+p)=p$.

`3.2:` Aus `2.2`"$l+x \in \mathbb{S}$"
folgt via **ElementAxiom**: $l+x$ Menge.

`3.3:` Aus `1.1`"$-l+(l+p) \in \{-l+(l+x),\ldots\}$" und
aus `3.1`"$-l+(l+p)=p$"
folgt: $p \in \{-l+(l+x),\ldots\}$.

`4:` Aus `3.2`"$l+x$ Menge"
folgt via **96-13**: x Zahl.

`5:` Aus `1.4`"$l \in \mathbb{C}$" und
aus `4`"x Zahl"
folgt via **160-3**: $-l+(l+x)=x$.

`6:` Aus `3.3`"$p \in \{-l+(l+x),\ldots\}$" und
aus `5`"$-l+(l+x)=x$"
folgt: $p \in \{x,\ldots\}$.

<u>Beweis</u> **169-11** `d)` `VS` gleich $(-l+p \in \{-l+x, \ldots\}) \wedge (l \in \mathbb{Z})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots l \in \mathbb{Z}$"
folgt via **164-8**: $-l \in \mathbb{Z}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$-l+p \in \{-l+x, \ldots\} \ldots$" und
aus `1`"$-l \in \mathbb{Z}$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $p \in \{x, \ldots\}$.

`e)` `VS` gleich $(l+p \in \{\ldots, l+y\}) \wedge (l \in \mathbb{Z})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$l+p \in \{\ldots, l+y\} \ldots$"
folgt via **169-10**: $-l+(l+p) \in \{\ldots, -l+(l+y)\}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$l+p \in \{\ldots, l+y\} \ldots$"
folgt via **ElementAxiom**: $l+p$ Menge.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$l+p \in \{\ldots, l+y\} \ldots$"
folgt via **0-20**: $0 \neq \{\ldots, l+y\}$.

`1.4:` Aus `VS` gleich "$\ldots l \in \mathbb{Z}$"
folgt via **164-5**: $l \in \mathbb{C}$.

`2.1:` Aus `1.2`"$l+p$ Menge"
folgt via **96-13**: p Zahl.

`2.2:` Aus `1.3`"$0 \neq \{\ldots, l+y\}$"
folgt via **169-6**: $l+y \in \mathbb{S}$.

`3.1:` Aus `1.4`"$l \in \mathbb{C}$" und
aus `2.1`"p Zahl"
folgt via **160-3**: $-l+(l+p) = p$.

`3.2:` Aus `2.2`"$l+y \in \mathbb{S}$"
folgt via **ElementAxiom**: $l+y$ Menge.

`3.3:` Aus `1.1`"$-l+(l+p) \in \{\ldots, -l+(l+y)\}$" und
aus `3.1`"$-l+(l+p) = p$"
folgt: $p \in \{\ldots, -l+(l+y)\}$.

...

Beweis **169-11** `e)` `VS` gleich $(l+p \in \{\dots, l+y\}) \wedge (l \in \mathbb{Z})$.

...

`4:` Aus `3.3`“$l+y$ Menge”
folgt via **96-13**: y Zahl.

`5:` Aus `1.4`“$l \in \mathbb{C}$” und
aus `4`“y Zahl”
folgt via **160-3**: $-l+(l+y)=y$.

`6:` Aus `3.3`“$p \in \{\dots, -l+(l+y)\}$” und
aus `5`“$-l+(l+y)=y$”
folgt: $p \in \{\dots, y\}$.

`f)` `VS` gleich $(-l+p \in \{\dots, -l+y\}) \wedge (l \in \mathbb{Z})$.

`1:` Aus `VS` gleich “$\dots l \in \mathbb{Z}$”
folgt via **164-8**: $-l \in \mathbb{Z}$.

`2:` Aus `VS` gleich “$-l+p \in \{\dots, -l+y\} \dots$” und
aus `1`“$-l \in \mathbb{Z}$”
folgt via des bereits bewiesenen `e)`: $p \in \{\dots, y\}$.

□

169-12. Für den Beweis von **InduktionsSatz** $\mathbb{Z}$ sind die vorliegenden Aussagen hilfreich:

169-12(Satz)

a) *Aus* "$p \in \{x, \ldots\}$" *folgt* "$1 + p \in \{x, \ldots\}$".

b) *Aus* "$p \in \{\ldots, y\}$" *folgt* "$-1 + p \in \{\ldots, y\}$".

`RECH.`**-Notation**

Beweis **169-12**

$\leq$**-Notation**.

---

a) `VS` gleich $p \in \{x, \ldots\}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p \in \{x, \ldots\}$"
folgt via **169-2**: $(p \in \mathbb{Z}) \wedge (x \leq p)$.

`2.1:` Aus **166-1**"$1 \in \mathbb{Z}$" und
aus `1`"$p \in \mathbb{Z} \ldots$"
folgt via **164-9**: $1 + p \in \mathbb{Z}$.

`2.2:` Aus `1`"$\ldots x \leq p$"
folgt via **107-3**: $p \in \mathbb{S}$.

`3:` Aus `2.2`"$p \in \mathbb{S}$"
folgt via **160-12**: $p \leq 1 + p$.

`4:` Aus `1`"$\ldots x \leq p$" und
aus `3`"$p \leq 1 + p$"
folgt via **107-8**: $x \leq 1 + p$.

`5:` Aus `2.1`"$1 + p \in \mathbb{Z}$" und
aus `4`"$x \leq 1 + p$"
folgt via **169-2**: $1 + p \in \{x, \ldots\}$.

Beweis **169-12** `b)` `VS` gleich $p \in \{\ldots, y\}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p \in \{\ldots, y\}$"
folgt via **169-2**: $(p \in \mathbb{Z}) \wedge (p \leq y)$.

`2.1:` Aus **166-1**"$1 \in \mathbb{Z}$" und
aus `1`"$p \in \mathbb{Z} \ldots$"
folgt via **164-9**: $-1 + p \in \mathbb{Z}$.

`2.2:` Aus `1`"$\ldots p \leq y$"
folgt via **107-3**: $p \in \mathbb{S}$.

`3:` Aus `2.2`"$p \in \mathbb{S}$"
folgt via **160-12**: $-1 + p \leq p$.

`4:` Aus `3`"$-1 + p \leq p$" und
aus `1`"$\ldots p \leq y$"
folgt via **107-8**: $-1 + p \leq y$.

`5:` Aus `2.1`"$-1 + p \in \mathbb{Z}$" und
aus `4`"$-1 + p \leq y$"
folgt via **169-2**: $-1 + p \in \{\ldots, y\}$.

$\square$

169-13. Um später Beweise angenehm zu verkürzen werden hier Gleichungen für $\{x,\ldots\}$ und $\{y,\ldots\}$ präsentiert:

169-13(Satz)

a) $\mathbb{Z}\cap[x \overset{\leq}{|} \cdot\rangle=\{x,\ldots\}$.

b) $\mathbb{Z}\cap\langle\cdot \overset{\leq}{|} y]=\{\ldots,y\}$.

Beweis **169-13** a)

1: $$\mathbb{Z}\cap[x \overset{\leq}{|} \cdot\rangle \overset{\mathbf{142-2}}{=} \mathbb{Z}\cap[x|+\infty] \overset{\mathbf{169-1(Def)}}{=} \{x,\ldots,+\infty\} \overset{\mathbf{169-8}}{=} \{x,\ldots\}.$$

2: Aus 1 folgt: $$\mathbb{Z}\cap[x \overset{\leq}{|} \cdot\rangle=\{x,\ldots\}.$$

b)

1: $$\mathbb{Z}\cap\langle\cdot \overset{\leq}{|} y] \overset{\mathbf{142-2}}{=} \mathbb{Z}\cap[-\infty|y] \overset{\mathbf{169-1(Def)}}{=} \{-\infty,\ldots,y\} \overset{\mathbf{169-8}}{=} \{\ldots,y\}.$$

2: Aus 1 folgt: $$\mathbb{Z}\cap\langle\cdot \overset{\leq}{|} y]=\{\ldots,y\}.$$

$\square$

IS$\mathbb{N}$: InduktionsSatz $\mathbb{N}$.
IS$\mathbb{Z}$: InduktionsSatz $\mathbb{Z}$.

Ersterstellung: 02/05/12 **Letzte Änderung: 08/05/12**

170-1. In einem Essay mit dem **InduktionsSatz** $\mathbb{Z}$ darf, wenn es, was der Fall ist, noch nicht geschehen ist, der **InduktionsSatz** $\mathbb{N}$ nicht fehlen. Hierzu muss keine Beweis-Leistung mehr erbracht werden, sondern es kann auf **159-10** zurück gegriffen werden:

170-1(Satz) **(IS$\mathbb{N}$: InduktionsSatz** $\mathbb{N}$**)**

Aus "$0 \in x$" *und* "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N} \cap x) \Rightarrow (1 + \alpha \in x)$" *folgt* "$\mathbb{N} \subseteq x$".

`RECH`-**Notation**.

Beweis **170-1** `VS` gleich $(0 \in x) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N} \cap x) \Rightarrow (1 + \alpha \in x))$.

Aus `VS` gleich "$0 \in x \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N} \cap x) \Rightarrow (1 + \alpha \in x)$"
folgt via **159-1**: $\mathbb{N} \subseteq x$.

$\square$

170-2. Im Beweis von **InduktionsSatz** $\mathbb{Z}$ werden unter anderem die folgenden Klassen verwendet:

170-2(Definition)

1) $\mathtt{170.0}(p, E) = \{\omega : p + \omega \in E\}$.

2) $\mathtt{170.1}(p, E) = \{\omega : p - \omega \in E\}$.

RECH-**Notation**.

170-3. Durch den **InduktionsSatz** $\mathbb{Z}$ wird unter anderem geklärt, dass aus $0 \in x$ und aus $\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{Z} \cap x) \Rightarrow ((1 + \alpha \in x) \wedge (-1 + \alpha \in x))$ folgt, dass x eine TeilKlasse von $\mathbb{Z}$ ist:

170-3(Satz) (IS$\mathbb{Z}$: InduktionsSatz $\mathbb{Z}$)

a) *Aus* "$l \in \mathbb{Z} \cap x$" *und* "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{Z} \cap x) \Rightarrow (1 + \alpha \in x)$"
folgt "$\{l, \ldots\} \subseteq x$".

b) *Aus* "$m \in \mathbb{Z} \cap x$" *und* "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{Z} \cap x) \Rightarrow (-1 + \alpha \in x)$"
folgt "$\{\ldots, m\} \subseteq x$".

c) *Aus* "$l \in \mathbb{Z} \cap x$" *und* "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{Z} \cap x) \Rightarrow (1 + \alpha \in x)$"
und "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{Z} \cap x) \Rightarrow (-1 + \alpha \in x)$"
folgt "$\mathbb{Z} \subseteq x$".

d) *Aus* "$l \in \mathbb{Z} \cap x$" *und* "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{Z} \cap x) \Rightarrow ((1 + \alpha \in x) \vee (y \leq \alpha))$"
folgt "$\{l, \ldots, y\} \subseteq x$".

e) *Aus* "$m \in \mathbb{Z} \cap x$" *und* "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{Z} \cap x) \Rightarrow ((-1 + \alpha \in x) \vee (\alpha \leq z))$"
folgt "$\{z, \ldots, m\} \subseteq x$".

`RECH.`$\leq$-**Notation**.

Beweis **170-3**

170-2(Def) $\{\omega : l + \omega \in x\}$.

170-2(Def) $\{\omega : m - \omega \in x\}$.

---

a) `VS` gleich $(l \in \mathbb{Z} \cap x) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{Z} \cap x) \Rightarrow (1 + \alpha \in x))$.

1: Aus `VS` gleich "$l \in \mathbb{Z} \cap x \ldots$"
folgt via **2-2**: $(l \in \mathbb{Z}) \wedge (l \in x)$.

...

Beweis **170-3** `a)` `VS` gleich $(l \in \mathbb{Z} \cap x) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{Z} \cap x) \Rightarrow (1 + \alpha \in x))$.

...

$\boxed{\texttt{Thema2.1}}$ $\beta \in \mathbb{N} \cap \{\omega : l + \omega \in x\}$.

`3:` Aus `Thema2.1`"$\beta \in \mathbb{N} \cap \{\omega : l + \omega \in x\}$"
folgt via **2-2**: $(\beta \in \mathbb{N}) \wedge (\beta \in \{\omega : l + \omega \in x\})$.

`4.1:` Aus `3`"$\beta \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **164-6**: $\beta \in \mathbb{Z}$.

`4.2:` Aus `3`"$\beta \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **159-10**: $1 + \beta \in \mathbb{N}$.

`4.3:` Aus `3`"$\ldots \beta \in \{\omega : l + \omega \in x\}$"
folgt: $l + \beta \in x$.

`5.1:` Aus `1`"$l \in \mathbb{Z} \ldots$" und
aus `4.1`"$\beta \in \mathbb{Z}$"
folgt via **164-9**: $l + \beta \in \mathbb{Z}$.

`5.2:` Aus `4.2`"$1 + \beta \in \mathbb{N}$"
folgt via **ElementAxiom**: $1 + \beta$ Menge.

`6:` Aus `5.1`"$l + \beta \in \mathbb{Z}$" und
aus `4.3`"$l + \beta \in x$"
folgt via **2-2**: $l + \beta \in \mathbb{Z} \cap x$.

`7:` Aus `6`"$l + \beta \in \mathbb{Z} \cap x$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{Z} \cap x) \Rightarrow (1 + \alpha \in x)$"
folgt: $1 + (l + \beta) \in x$.

...

...

Beweis **170-3** `a)` `VS` gleich $(l \in \mathbb{Z} \cap x) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{Z} \cap x) \Rightarrow (1 + \alpha \in x))$.

...

$\boxed{\texttt{Thema2.1}}$ $\beta \in \mathbb{N} \cap \{\omega : l + \omega \in x\}$.

...

`8:` $l + (1 + \beta) \stackrel{\textbf{FSA}}{=} (l + 1) + \beta \stackrel{\textbf{FSA}}{=} (1 + l) + \beta \stackrel{\textbf{FSA}}{=} 1 + (l + \beta)$.

`9:` Aus `8`"$l + (1 + \beta) = \ldots = 1 + (l + \beta)$" und
aus `7`"$1 + (l + \beta) \in x$"
folgt: $l + (1 + \beta) \in x$.

`10:` Aus `9`"$l + (1 + \beta) \in x$" und
aus `5.2`"$1 + \beta$ Menge"
folgt: $1 + \beta \in \{\omega : l + \omega \in x\}$.

Ergo `Thema2.1`:

`A1`	"$\forall \beta : (\beta \in \{\omega : l + \omega \in x\}) \Rightarrow (1 + \beta \in \{\omega : l + \omega \in x\})$"

`2.2:` Aus `1`"$l \in \mathbb{Z} \ldots$"
folgt via **164-5**: l Zahl.

`3:` Aus `2.2`"l Zahl"
folgt via **FSA**0: $l + 0 = l$.

`4:` Aus `3`"$l + 0 = l$" und
aus `1`"$l \in x$"
folgt: $l + 0 \in x$.

`5:` Aus `4`"$l + 0 \in x$" und
aus $0\mathcal{U}$**Axiom**"0 Menge"
folgt: $0 \in \{\omega : l + \omega \in x\}$.

`6:` Aus `5`"$0 \in \{\omega : l + \omega \in x\}$" und
aus `A1` gleich "$\forall \beta : (\beta \in \{\omega : l + \omega \in x\}) \Rightarrow (1 + \beta \in \{\omega : l + \omega \in x\})$"
folgt via **IS**$\mathbb{N}$: $\mathbb{N} \subseteq \{\omega : l + \omega \in x\}$.

...

Beweis **170-3** `a)` `VS` gleich $$(l \in \mathbb{Z} \cap x) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{Z} \cap x) \Rightarrow (1 + \alpha \in x)).$$

...

$\boxed{\texttt{Thema7}}$ $$\gamma \in \{l, \ldots\}.$$

`8:` Aus `1`“$l \in \mathbb{Z} \ldots$” und
aus `Thema7`“$\gamma \in \{l, \ldots\}$”
folgt via **169-3**: $$\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (\gamma = l + \Omega).$$

`9:` Aus `8`“$\ldots \Omega \in \mathbb{N} \ldots$” und
aus `6`“$\mathbb{N} \subseteq \{\omega : l + \omega \in x\}$”
folgt via **0-4**: $$\Omega \in \{\omega : l + \omega \in x\}.$$

`10:` Aus `9`“$\Omega \in \{\omega : l + \omega \in x\}$”
folgt: $$l + \Omega \in x.$$

`11:` Aus `8`“$\ldots \gamma = l + \Omega$” und
aus `10`“$l + \Omega \in x$”
folgt: $$\gamma \in x.$$

Ergo `Thema7`: $$\forall \gamma : (\gamma \in \{l, \ldots\}) \Rightarrow (\gamma \in x).$$

Konsequenz via **0-2(Def)**: $$\{l, \ldots\} \subseteq x.$$

`b)` `VS` gleich $$(m \in \mathbb{Z} \cap x) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{Z} \cap x) \Rightarrow (-1 + \alpha \in x)).$$

`1:` Aus `VS` gleich “$m \in \mathbb{Z} \cap x \ldots$”
folgt via **2-2**: $$(m \in \mathbb{Z}) \wedge (m \in x).$$

...

Beweis **170-3** `b)` `VS` gleich $(m \in \mathbb{Z} \cap x) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{Z} \cap x) \Rightarrow (-1 + \alpha \in x))$.

...

$\boxed{\texttt{Thema2.1}}$ $\beta \in \mathbb{N} \cap \{\omega : m - \omega \in x\}$.

`3:` Aus `Thema2.1`“$\beta \in \mathbb{N} \cap \{\omega : m - \omega \in x\}$”
folgt via **2-2**: $(\beta \in \mathbb{N}) \wedge (\beta \in \{\omega : m - \omega \in x\})$.

`4.1:` Aus `3`“$\beta \in \mathbb{N} \ldots$”
folgt via **164-6**: $\beta \in \mathbb{Z}$.

`4.2:` Aus `3`“$\beta \in \mathbb{N} \ldots$”
folgt via **159-10**: $1 + \beta \in \mathbb{N}$.

`4.3:` Aus `3`“$\ldots \beta \in \{\omega : m - \omega \in x\}$”
folgt: $m - \beta \in x$.

`5.1:` Aus `1`“$m \in \mathbb{Z} \ldots$” und
aus `4.1`“$\beta \in \mathbb{Z}$”
folgt via **164-9**: $m - \beta \in \mathbb{Z}$.

`5.2:` Aus `4.2`“$1 + \beta \in \mathbb{N}$”
folgt via **ElementAxiom**: $1 + \beta$ Menge.

`6:` Aus `5.1`“$m - \beta \in \mathbb{Z}$” und
aus `4.3`“$m - \beta \in x$”
folgt via **2-2**: $m - \beta \in \mathbb{Z} \cap x$.

`7:` Aus `6`“$m - \beta \in \mathbb{Z} \cap x$” und
aus `VS` gleich “$\ldots \forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{Z} \cap x) \Rightarrow (-1 + \alpha \in x)$”
folgt: $-1 + (m - \beta) \in x$.

...

...

<u>Beweis</u> **170-3** `b)` `VS` gleich $(m \in \mathbb{Z} \cap x) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{Z} \cap x) \Rightarrow (-1 + \alpha \in x))$.

...

`Thema2.1` $\beta \in \mathbb{N} \cap \{\omega : m - \omega \in x\}$.

...

`8:`
$$m - (1+\beta)$$
$$= m + (-(1+\beta))$$
$$\stackrel{\textbf{FS}-+}{=} m + (-1-\beta)$$
$$\stackrel{\textbf{160}-\textbf{7}}{=} (m-1) - \beta$$
$$\stackrel{\textbf{FS}-+}{=} (-1+m) - \beta$$
$$= ((-1)+m) - \beta$$
$$= ((-1)+m) + (-\beta)$$
$$\stackrel{\textbf{FSA}}{=} (-1) + (m + (-\beta))$$
$$= -1 + (m + (-\beta))$$
$$= -1 + (m - \beta).$$

`9:` Aus `8`“$m - (1+\beta) = \ldots = -1 + (m-\beta)$” und
aus `7`“$-1 + (m-\beta) \in x$”
folgt: $m - (1+\beta) \in x$.

`10:` Aus `9`“$m - (1+\beta) \in x$” und
aus `5.2`“$1+\beta$ Menge”
folgt: $1 + \beta \in \{\omega : m - \omega \in x\}$.

Ergo `Thema2.1`:

`A1` | “$\forall \beta : (\beta \in \{\omega : m - \omega \in x\}) \Rightarrow (1 + \beta \in \{\omega : m - \omega \in x\})$”

`2.2:` Aus `1`“$m \in \mathbb{Z} \ldots$”
folgt via **164-5**: m Zahl.

`3:` Aus `2.2`“m Zahl”
folgt via **FSA**0: $m + 0 = m$.

...

Beweis **170-3** `b)` `VS` gleich $(m \in \mathbb{Z} \cap x) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{Z} \cap x) \Rightarrow (1 + \alpha \in x))$.

...

`4:` $m - 0 \stackrel{\mathbf{98-15}}{=} m + 0 \stackrel{3}{=} m$.

`5:` Aus `4`“$m - 0 = \ldots = m$” und
aus `1`“$m \in x$”
folgt: $m - 0 \in x$.

`6:` Aus `5`“$m - 0 \in x$” und
aus $0\mathcal{U}$**Axiom**“0 Menge”
folgt: $0 \in \{\omega : m - \omega \in x\}$.

`7:` Aus `6`“$0 \in \{\omega : m - \omega \in x\}$” und
aus `A1` gleich “$\forall \beta : (\beta \in \{\omega : m - \omega \in x\}) \Rightarrow (1 + \beta \in \{\omega : m - \omega \in x\})$”
folgt via **IS**$\mathbb{N}$: $\mathbb{N} \subseteq \{\omega : m - \omega \in x\}$.

> `Thema8` $\gamma \in \{\ldots, m\}$.
>
> `9:` Aus `1`“$m \in \mathbb{Z} \ldots$” und
> aus `Thema8`“$\gamma \in \{\ldots, m\}$”
> folgt via **169-3**: $\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (\gamma = m - \Omega)$.
>
> `10:` Aus `9`“$\ldots \Omega \in \mathbb{N} \ldots$” und
> aus `7`“$\mathbb{N} \subseteq \{\omega : m - \omega \in x\}$”
> folgt via **0-4**: $\Omega \in \{\omega : m - \omega \in x\}$.
>
> `11:` Aus `10`“$\Omega \in \{\omega : m - \omega \in x\}$”
> folgt: $m - \Omega \in x$.
>
> `12:` Aus `9`“$\ldots \gamma = m - \Omega$” und
> aus `11`“$m - \Omega \in x$”
> folgt: $\gamma \in x$.

Ergo `Thema8`: $\forall \gamma : (\gamma \in \{\ldots, m\}) \Rightarrow (\gamma \in x)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\{\ldots, m\} \subseteq x$.

Beweis **170-3** `c)` `VS` gleich

$$(l \in \mathbb{Z} \cap x)$$
$$\wedge(\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{Z} \cap x) \Rightarrow (1 + \alpha \in x))$$
$$\wedge(\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{Z} \cap x) \Rightarrow (-1 + \alpha \in x)).$$

`1.1:` Aus `VS` gleich "$l \in \mathbb{Z} \cap\ x \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{Z} \cap x) \Rightarrow (1 + \alpha \in x) \ldots$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\{l, \ldots\} \subseteq x.$

`1.2:` Aus `VS` gleich "$l \in \mathbb{Z} \cap\ x \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{Z} \cap x) \Rightarrow (-1 + \alpha \in x)$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $\{\ldots, l\} \subseteq x.$

`1.3:` Aus `VS` gleich "$l \in \mathbb{Z} \cap x$"
folgt via **2-2**: $l \in \mathbb{Z}.$

`2.1:` Aus `1.2`"$\{\ldots, l\} \subseteq x$" und
aus `1.1`"$\{l, \ldots\} \subseteq x$"
folgt via **2-12**: $\{\ldots, l\} \cup \{l, \ldots\} \subseteq x.$

`2.2:` Aus `1.3`"$l \in \mathbb{Z}$"
folgt via **164-5**: $l \in \mathbb{S}.$

`3:` Aus `2.2`"$l \in \mathbb{S}$"
folgt via **169-9**: $\{\ldots, l\} \cup \{l, \ldots\} = \mathbb{Z}.$

`4:` Aus `2.1`"$\{\ldots, l\} \cup \{l, \ldots\} \subseteq x$" und
aus `3`"$\{\ldots, l\} \cup \{l, \ldots\} = \mathbb{Z}$"
folgt: $\mathbb{Z} \subseteq x.$

Beweis **170-3** `d)`

`VS` gleich $(l \in \mathbb{Z} \cap x) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{Z} \cap x) \Rightarrow ((1 + \alpha \in x) \vee (y \leq \alpha)))$.

`1.1:` Aus `VS` gleich “$l \in \mathbb{Z} \cap x \ldots$”
folgt via **2-2**: $l \in (\mathbb{Z} \cap x) \cup \{1 + y, \ldots\}$.

`Thema1.2` $\beta \in (\mathbb{Z} \cap x) \cup \{1 + y, \ldots\}$.

`2:` Aus `Thema1.2`“$\beta \in (\mathbb{Z} \cap x) \cup \{1 + y, \ldots\}$”
folgt via **2-2**: $(\beta \in \mathbb{Z} \cap x) \vee (\beta \in \{1 + y, \ldots\})$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $\beta \in \mathbb{Z} \cap x$.

`3:` Aus `2.1.Fall`“$\beta \in \mathbb{Z} \cap x$” und
aus `VS` gleich “$\ldots \forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{Z} \cap x)$
$\Rightarrow ((1 + \alpha \in \mathbb{Z} \cap x) \vee (y \leq \alpha))$”
folgt: $(1 + \beta \in \mathbb{Z} \cap x) \vee (y \leq \beta)$.

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` $1 + \beta \in \mathbb{Z} \cap x$.

Aus `3.1.Fall`“$1 + \beta \in \mathbb{Z} \cap x$”
folgt via **2-2**: $1 + \beta \in (\mathbb{Z} \cap x) \cup \{1 + y, \ldots\}$.

`3.2.Fall` $y \leq \beta$.

`4:` Aus `2.1.Fall`“$\beta \in \mathbb{Z} \cap x$”
folgt via **2-2**: $\beta \in \mathbb{Z}$.

`5:` Aus `4`“$\beta \in \mathbb{Z}$” und
aus `3.2.Fall`“$y \leq \beta$”
folgt via **169-2**: $\beta \in \{y, \ldots\}$.

`6:` Aus `5`“$\beta \in \{y, \ldots\}$” und
aus **166-1**“$1 \in \mathbb{Z}$”
folgt via **169-10**: $1 + \beta \in \{1 + y, \ldots\}$.

`7:` Aus `6`“$1 + \beta \in \{1 + y, \ldots\}$”
folgt via **2-2**:
$1 + \beta \in (\mathbb{Z} \cap x) \cup \{1 + y, \ldots\}$.

`Ende Fallunterscheidung`

In beiden Fällen gilt: $1 + \beta \in (\mathbb{Z} \cap x) \cup \{1 + y, \ldots\}$.

...

...

Beweis **170-3** `d)`

`VS` gleich $(l \in \mathbb{Z} \cap x) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{Z} \cap x) \Rightarrow ((1 + \alpha \in x) \vee (y \leq \alpha)))$.

...

`Thema1.2` $\beta \in (\mathbb{Z} \cap x) \cup \{1 + y, \ldots\}$.

`2:` Aus `Thema1.2`“$\beta \in (\mathbb{Z} \cap x) \cup \{1 + y, \ldots\}$”
folgt via **2-2**: $(\beta \in \mathbb{Z} \cap x) \vee (\beta \in \{1 + y, \ldots\})$.

`Fallunterscheidung`

...

`2.2.Fall` $\beta \in \{1 + y, \ldots\}$.

`3:` Aus `2.2.Fall`“$\beta \in \{1 + y, \ldots\}$”
folgt via **169-12**: $1 + \beta \in \{1 + y, \ldots\}$.

`4:` Aus `3`“$1 + \beta \in \{1 + y, \ldots\}$”
folgt via **2-2**: $1 + \beta \in (\mathbb{Z} \cap x) \cup \{1 + y, \ldots\}$.

`Ende Fallunterscheidung`

In beiden Fällen gilt: $1 + \beta \in (\mathbb{Z} \cap x) \cup \{1 + y, \ldots\}$.

Ergo `Thema1.2`:

`A1` | “$\forall \beta : (\beta \in (\mathbb{Z} \cap x) \cup \{1 + y, \ldots\}) \Rightarrow (1 + \beta \in (\mathbb{Z} \cap x) \cup \{1 + y, \ldots\})$”

`1.3:` Via **169-4** gilt: $\{1 + y, \ldots\} \subseteq \mathbb{Z}$.

`2:` Aus `1.3`“$\{1 + y, \ldots\} \subseteq \mathbb{Z}$”
folgt via **2-10**: $\mathbb{Z} \cap \{1 + y, \ldots\} = \{1 + y, \ldots\}$.

`3:`

$$(\mathbb{Z} \cap x) \cup \{1 + y, \ldots\} \stackrel{2}{=} (\mathbb{Z} \cap x) \cup (\mathbb{Z} \cap \{1 + y, \ldots\}) \stackrel{\mathbf{DG}\cap\cup}{=} \mathbb{Z} \cap (x \cup \{1 + y, \ldots\}).$$

...

<u>Beweis **170-3** `d)`</u>

`VS` gleich $\qquad (l \in \mathbb{Z} \cap x) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{Z} \cap x) \Rightarrow ((1 + \alpha \in x) \vee (y \leq \alpha))).$

...

`4.1:` Aus `1.1`“$l \in (\mathbb{Z} \cap x) \cup \{1 + y, \ldots\}$” und
aus `3`“$(\mathbb{Z} \cap x) \cup \{1 + y, \ldots\} = \ldots = \mathbb{Z} \cap (x \cup \{1 + y, \ldots\})$”
folgt: $\qquad l \in \mathbb{Z} \cap (x \cup \{1 + y, \ldots\}).$

`4.2:` Aus `A1` gleich “$\forall \beta : (\beta \in (\mathbb{Z} \cap x) \cup \{1 + y, \ldots\})$
$\Rightarrow (1 + \beta \in (\mathbb{Z} \cap x) \cup \{1 + y, \ldots\})$” und
aus `3`“$(\mathbb{Z} \cap x) \cup \{1 + y, \ldots\} = \ldots = \mathbb{Z} \cap (x \cup \{1 + y, \ldots\})$”
folgt:
$$\forall \beta : (\beta \in \mathbb{Z} \cap (x \cup \{1 + y, \ldots\})) \Rightarrow (1 + \beta \in \mathbb{Z} \cap (x \cup \{1 + y, \ldots\})).$$

`5:` Aus `4.1`“$l \in \mathbb{Z} \cap (x \cup \{1 + y, \ldots\})$” und
aus `4.2`“$\forall \beta : (\beta \in \mathbb{Z} \cap (x \cup \{1 + y, \ldots\})) \Rightarrow (1 + \beta \in \mathbb{Z} \cap (x \cup \{1 + y, \ldots\}))$”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\qquad \{l, \ldots\} \subseteq x \cup \{1 + y, \ldots\}.$

`6:` Via **169-5** gilt: $\qquad \{l, \ldots, y\} \subseteq \{l, \ldots\}.$

`7:` Aus `6`“$\{l, \ldots, y\} \subseteq \{l, \ldots\}$” und
aus `5`“$\{l, \ldots\} \subseteq x \cup \{1 + y, \ldots\}$”
folgt via **0-6**: $\qquad \{l, \ldots, y\} \subseteq x \cup \{1 + y, \ldots\}.$

`8:` Via **KG**$\cup$ gilt: $\qquad x \cup \{1 + y, \ldots\} = \{1 + y, \ldots\} \cup x.$

`9.1:` Aus `7`“$\{l, \ldots, y\} \subseteq x \cup \{1 + y, \ldots\}$” und
aus `8`“$x \cup \{1 + y, \ldots\} = \{1 + y, \ldots\} \cup x$”
folgt: $\qquad \{l, \ldots, y\} \subseteq \{1 + y, \ldots\} \cup x.$

`9.2:` Aus **109-24**“$0 < 1$”
folgt via **169-9**: $\qquad \{l, \ldots, y\} \cap \{1 + y, \ldots\} = 0.$

`10:` Aus `9.1`“$\{l, \ldots, y\} \subseteq \{1 + y, \ldots\} \cup x$” und
aus `9.2`“$\{l, \ldots, y\} \cap \{1 + y, \ldots\} = 0$”
folgt via $\cup$**LokalisierungsRegel**: $\qquad \{l, \ldots, y\} \subseteq x.$

Beweis **170-3** `e)`

`VS` gleich $(m \in \mathbb{Z} \cap x) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{Z} \cap x) \Rightarrow ((-1 + \alpha \in x) \vee (\alpha \leq z)))$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$m \in \mathbb{Z} \cap x \ldots$"
folgt via **2-2**: $m \in (\mathbb{Z} \cap x) \cup \{\ldots, -1 + z\}$.

`Thema1.2` $\beta \in (\mathbb{Z} \cap x) \cup \{\ldots, -1 + z\}$.

`2:` Aus `Thema1.2`"$\beta \in (\mathbb{Z} \cap x) \cup \{\ldots, -1 + z\}$"
folgt via **2-2**: $(\beta \in \mathbb{Z} \cap x) \vee (\beta \in \{\ldots, -1 + z\})$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $\beta \in \mathbb{Z} \cap x$.

`3:` Aus `2.1.Fall`"$\beta \in \mathbb{Z} \cap x$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{Z} \cap x)$
$\Rightarrow ((-1 + \alpha \in \mathbb{Z} \cap x) \vee (\alpha \leq z))$"
folgt: $(-1 + \beta \in \mathbb{Z} \cap x) \vee (\beta \leq z)$.

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` $-1 + \beta \in \mathbb{Z} \cap x$.

Aus `3.1.Fall`"$-1 + \beta \in \mathbb{Z} \cap x$"
folgt via **2-2**: $-1 + \beta \in (\mathbb{Z} \cap x) \cup \{\ldots, -1 + z\}$.

`3.2.Fall` $\beta \leq z$.

`4:` Aus `2.1.Fall`"$\beta \in \mathbb{Z} \cap x$"
folgt via **2-2**: $\beta \in \mathbb{Z}$.

`5:` Aus `4`"$\beta \in \mathbb{Z}$" und
aus `3.2.Fall`"$\beta \leq z$"
folgt via **169-2**: $\beta \in \{\ldots, z\}$.

`6:` Aus `5`"$\beta \in \{\ldots, z\}$" und
aus **166-1**"$1 \in \mathbb{Z}$"
folgt via **169-10**: $-1 + \beta \in \{\ldots, -1 + z\}$.

`7:` Aus `6`"$-1 + \beta \in \{\ldots, -1 + z\}$"
folgt via **2-2**:
$-1 + \beta \in (\mathbb{Z} \cap x) \cup \{\ldots, -1 + z\}$.

`Ende Fallunterscheidung`

In beiden Fällen gilt: $-1 + \beta \in (\mathbb{Z} \cap x) \cup \{\ldots, -1 + z\}$.

...

...

Beweis **170-3** `d)`

`VS` gleich $(m \in \mathbb{Z} \cap x) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{Z} \cap x) \Rightarrow ((-1+\alpha \in x) \vee (\alpha \le z)))$.

...

`Thema1.2` $\beta \in (\mathbb{Z} \cap x) \cup \{\ldots, -1+z\}$.

`2:` Aus `Thema1.2` "$\beta \in (\mathbb{Z} \cap x) \cup \{\ldots, -1+z\}$"
folgt via **2-2**: $(\beta \in \mathbb{Z} \cap x) \vee (\beta \in \{\ldots, -1+z\})$.

`Fallunterscheidung`

...

`2.2.Fall` $\beta \in \{\ldots, -1+z\}$.

`3:` Aus `2.2.Fall` "$\beta \in \{\ldots, -1+z\}$"
folgt via **169-12**: $-1+\beta \in \{\ldots, -1+z\}$.

`4:` Aus `3` "$-1+\beta \in \{\ldots, -1+z\}$"
folgt via **2-2**: $-1+\beta \in (\mathbb{Z} \cap x) \cup \{\ldots, -1+z\}$.

`Ende Fallunterscheidung`

In beiden Fällen gilt: $-1+\beta \in (\mathbb{Z} \cap x) \cup \{\ldots, -1+z\}$.

Ergo `Thema1.2`:

`A1` | "$\forall \beta : (\beta \in (\mathbb{Z} \cap x) \cup \{\ldots, -1+\})$
$\Rightarrow (-1+\beta \in (\mathbb{Z} \cap x) \cup \{\ldots, -1+z\})$"

`1.3:` Via **169-4** gilt: $\{\ldots, -1+z\} \subseteq \mathbb{Z}$.

`2:` Aus `1.3` "$\{\ldots, -1+z\} \subseteq \mathbb{Z}$"
folgt via **2-10**: $\mathbb{Z} \cap \{\ldots, -1+z\} = \{\ldots, -1+z\}$.

`3:`
$$(\mathbb{Z} \cap x) \cup \{\ldots, -1+z\}$$
$$\stackrel{2}{=} (\mathbb{Z} \cap x) \cup (\mathbb{Z} \cap \{\ldots, -1+z\})$$
$$\stackrel{\mathbf{DG}\cap\cup}{=} \mathbb{Z} \cap (x \cup \{\ldots, -1+z\}).$$

...

Beweis **170-3** `d)`

`VS` gleich $(m \in \mathbb{Z} \cap x) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{Z} \cap x) \Rightarrow ((-1 + \alpha \in x) \vee (\alpha \leq z)))$.

...

`4.1:` Aus `1.1`"$m \in (\mathbb{Z} \cap x) \cup \{\ldots, -1 + z\}$" und
aus `3`"$(\mathbb{Z} \cap x) \cup \{\ldots, -1 + z\} = \ldots = \mathbb{Z} \cap (x \cup \{\ldots, -1 + z\})$"
folgt: $m \in \mathbb{Z} \cap (x \cup \{\ldots, -1 + z\})$.

`4.2:` Aus `A1` gleich "$\forall \beta : (\beta \in (\mathbb{Z} \cap x) \cup \{\ldots, -1 + z\})$
$\Rightarrow (-1 + \beta \in (\mathbb{Z} \cap x) \cup \{\ldots, -1 + z\})$" und
aus `3`"$(\mathbb{Z} \cap x) \cup \{\ldots, -1 + z\} = \ldots = \mathbb{Z} \cap (x \cup \{\ldots, -1 + z\})$"
folgt:
$\forall \beta : (\beta \in \mathbb{Z} \cap (x \cup \{\ldots, -1 + z\})) \Rightarrow (-1 + \beta \in \mathbb{Z} \cap (x \cup \{\ldots, -1 + z\}))$.

`5:` Aus `4.1`"$m \in \mathbb{Z} \cap (x \cup \{\ldots, -1 + z\})$" und
aus `4.2`"$\forall \beta : (\beta \in \mathbb{Z} \cap (x \cup \{\ldots, -1 + z\}))$
$\Rightarrow (-1 + \beta \in \mathbb{Z} \cap (x \cup \{\ldots, -1 + z\}))$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $\{\ldots, m\} \subseteq x \cup \{\ldots, -1 + z\}$.

`6:` Via **169-5** gilt: $\{z, \ldots, m\} \subseteq \{\ldots, m\}$.

`7:` Aus `6`"$\{z, \ldots, m\} \subseteq \{\ldots, m\}$" und
aus `5`"$\{\ldots, m\} \subseteq x \cup \{\ldots, -1 + z\}$"
folgt via **0-6**: $\{z, \ldots, m\} \subseteq x \cup \{\ldots, -1 + z\}$.

`8:` Via **KG**$\cup$ gilt: $x \cup \{\ldots, -1 + z\} = \{\ldots, -1 + z\} \cup x$.

`9.1:` Aus `7`"$\{z, \ldots, m\} \subseteq x \cup \{\ldots, -1 + z\}$" und
aus `8`"$x \cup \{\ldots, -1 + z\} = \{\ldots, -1 + z\} \cup x$"
folgt: $\{z, \ldots, m\} \subseteq \{\ldots, -1 + z\} \cup x$.

`9.2:` Aus **109-24**"$0 < 1$"
folgt via **169-9**: $\{\ldots, -1 + z\} \cap \{z, \ldots, m\} = 0$.

`10:` Aus `9.2`
folgt: $\{z, \ldots, m\} \cap \{\ldots, -1 + z\} = 0$.

`11:` Aus `9.1`"$\{z, \ldots, m\} \subseteq \{\ldots, -1 + z\} \cup x$" und
aus `10`"$\{z, \ldots, m\} \cap \{\ldots, -1 + z\} = 0$"
folgt via $\cup$**LokalisierungsRegel**: $\{z, \ldots, m\} \subseteq x$.

$\square$

- **F. Erwe**, *Differential- und Integralrechnung. Band 1*, B.I. Mannheim/Wien/Zürich, 1962.
- **J. Kelley**, *General Topology*, Springer, 1961.
- **E. Landau**, *Grundlagen der Analysis*, Wiss. Buchgesellschaft Darmstadt, 1970.
- `matlab Version 7.2.0.294 (R2006a) 27.01.2006`, *Dokumentation.*
- **W. Rudin**, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1987(3).