

**Technische Universität Berlin**  
**Institut für Mathematik**

**Kalibrierverfahren für hybride Parallelkinematiken**

**B. Denkena, G. Günther, V. Mehrmann, H.-C. Möhring, A. Steinbrecher**

**Preprint 02-2008**

**Preprint-Reihe des Instituts für Mathematik**  
**Technische Universität Berlin**

**Report 02-2008**

**February 2008**

### Abstract

Der Einsatz parallel- oder hybridkinematischer Maschinen in der Fertigung hat gegenüber dem Einsatz serieller Maschinen Vorteile. So können Roboter mit Parallelkinematik wegen ihrer höheren Steifigkeit bei geringerer Gesamtmasse eine bessere Wiederholgenauigkeit erreichen und größere Kräfte aufbringen als konventionelle Knickarmroboter. Jedoch herrscht nach wie vor Zurückhaltung hinsichtlich ihres industriellen Einsatzes. Bisher mangelt es im Bereich der parallel- und hybridkinematischen Strukturen insbesondere an universell einsetzbaren, standardisierten Verfahren, mit denen eine Kalibrierung durchgeführt werden kann.

In diesem Artikel werden Methoden zur parametrischen Kalibrierung hybrider Parallelkinematiken vorgestellt. Grundlage jeder parametrischen Kalibrierung solcher Kinematiken bildet ein kinematisches Modell der zu kalibrierenden Maschine, welches alle einwirkenden Fehlereinflüsse berücksichtigen soll. Diesbezüglich wird eine allgemeine Vorgehensweise zur kinematischen Modellbildung entwickelt. Das Verfahren stützt sich auf homogene Transformationen und die Denavit-Hartenberg-Konvention, die entsprechend den Anforderungen für die Modellbildung hybrider Parallelkinematiken erweitert wird. Basierend auf dem entwickelten kinematischen Modell wird das Identifikationsproblem der Fehlereinflüsse formuliert. Aufgrund der parallelen Strukturen sind einige Fehlereinflüsse redundant zueinander oder haben gar keinen Einfluss auf die Endeffektorpose und sind somit nicht identifizierbar. Mittels einer Sensitivitätsanalyse wird das entwickelte Modell reduziert wodurch gerade solche Fehlereinflüsse aus dem Modell eliminiert werden. Grundlage der Identifikation der Fehlereinflüsse sind Messungen der Endeffektorpose. In der vorliegenden Arbeit kommt ein Einfreiheitsgrad-Messgerät zum Einsatz. Der Aufwand der Trilateration zur Bestimmung der vollen Position ist jedoch sehr hoch, so dass in den vorliegenden Untersuchungen die Pose des Endeffektors nur teilweise bestimmt wird. Dabei ist die Wahl der optimalen Messorte hinsichtlich der Effizienz des Kalibrierungsprozesses von entscheidender Bedeutung. Aus diesem Grund werden Methoden zur Optimierung der Messstrategie entwickelt und diskutiert. Abschliessend werden die entwickelten Methoden und gewonnenen Erkenntnisse an Beispielen verschiedener Kinematiken angewandt und diskutiert.

### Authors address:

Berend Denkena  
IFW - Institut für Fertigungstechnik und Werkzeugmaschinen  
Leibniz Universität Hannover  
Produktionstechnisches Zentrum Hannover (PZH)  
An der Universität 2  
30823 Garbsen, Germany  
[denkena@ifw.uni-hannover.de](mailto:denkena@ifw.uni-hannover.de)

Gero Günther  
Dr. Johannes Heidenhain GmbH  
Dr.-Johannes-Heidenhain-Straße 5  
83301 Traunreut, Germany  
[guenther.gero@heidenhain.de](mailto:guenther.gero@heidenhain.de)

Volker Mehrmann  
Institut für Mathematik, MA 4-5  
Technische Universität Berlin  
Str. des 17. Juni 136, D-10623 Berlin, Germany  
[mehrmann@math.tu-berlin.de](mailto:mehrmann@math.tu-berlin.de)

Hans-Christian Möhring  
IFW - Institut für Fertigungstechnik und Werkzeugmaschinen  
Leibniz Universität Hannover  
Produktionstechnisches Zentrum Hannover (PZH)  
An der Universität 2  
30823 Garbsen, Germany  
[moehring@ifw.uni-hannover.de](mailto:moehring@ifw.uni-hannover.de)

Andreas Steinbrecher  
Weierstrass Institute for Applied Analysis and Stochastics  
Forschungsverbund Berlin e.V.  
RG4: Nonlinear optimization and inverse problems  
Mohrenstr. 39  
10117 Berlin  
[steinbrecher@wias-berlin.de](mailto:steinbrecher@wias-berlin.de)

# 1 Kalibrierverfahren für hybride Parallelkinematiken

B. Denkena, V. Mehrmann, G. Günther, A. Steinbrecher,  
H.-C. Möhring

## Einleitung

Während in den vergangenen Jahren immer neue parallel- und hybridkinematische Maschinenstrukturen für Werkzeugmaschinen und Produktionsanlagen konzipiert und realisiert wurden, herrscht nach wie vor Zurückhaltung hinsichtlich ihres industriellen Einsatzes. Ein grundlegendes Hemmnis besteht in den Schwierigkeiten bei der Beherrschung der Komplexität des gekoppelten kinematischen Positionier- und Bewegungsverhaltens. Geometrische Fehler (aufgrund von Fertigungs-Ungenauigkeiten der Maschinenelemente bzw. Montagefehlern), Gravitations- und Trägheitseinflüsse sowie thermisch bedingte Deformationen der Strukturelemente bewirken Abweichungen zwischen dem theoretischen, durch die Konstruktion vorgegebenen kinematischen Übertragungsverhalten und dem tatsächlichen. Die Identifikation, rechnerische Abbildung und Kompensation dieser Störeffekte ist Aufgabe der Kalibrierung. Im Bereich der parallel- und hybridkinematischen Strukturen mangelt es an universell einsetzbaren, standardisierten Verfahren, mit denen eine Kalibrierung durchgeführt werden kann. Da sich Verfahren zur direkten Erfassung der Pose (Position und Orientierung) des Endeffektors (auch tool centre point, TCP) einer Bearbeitungsmaschine oder eines Roboters noch immer im Forschungsstadium befinden (siehe z.B. [Schu99]), stützen sich Maschinensteuerungen noch immer auf die direkte oder indirekte Messung der Positionen der einzelnen Vorschubachsen. Für die Positionsregelung müssen die Maschinenkoordinaten in Endeffektor- (oder Werkzeug-) Koordinaten transformiert werden (und umgekehrt). Im Hinblick auf ein universelles Kalibrierverfahren besteht Bedarf an einer allgemein anwendbaren Transformationsvorschrift.

Das Forschungsprojekt „Kalibrierverfahren für hybride Parallelkinematiken“ hatte zum Ziel, ein allgemeingültiges Verfahren zur parametrischen Kalibrierung von Parallel- und Hybridkinematiken bereit zu stellen. Die innerhalb dieses Projektes entwickelten Methoden werden in diesem Beitrag vorgestellt. Zunächst wird die allgemeine Vorgehensweise zur Kalibrierung beschrieben. Anschließend werden Anforderungen an die der Kalibrierung zugrunde liegende Modellbildung aufgezeigt und die hier entwickelte Modellbildungsmethode erläutert. Außerdem werden Messstrategien vorgestellt, die einer gezielten Identifikation der Modellparameter dienen.

## 1.1 Vorgehensweise zur Kalibrierung

Es bestehen verschiedenen Möglichkeiten zur Kompensation systematischer Posefehler.

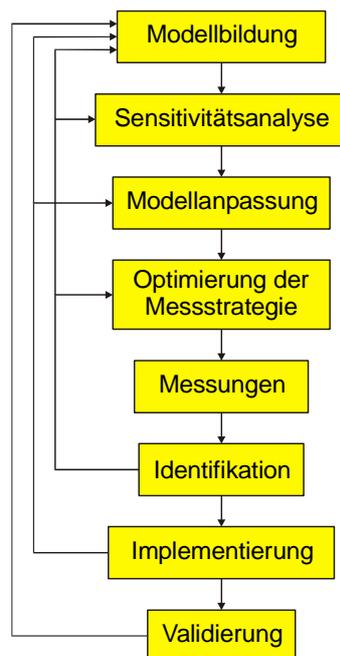
Bei der *Nichtparametrischen Kalibrierung* werden die Abweichungen zwischen Soll- und Ist-Koordinaten in allen interessierenden Freiheitsgraden an verschiedenen Stützstellen im Arbeitsraum gemessen, aber nicht auf Ursachen zurückgeführt. Fährt die Maschine entlang einer beliebigen Solltrajektorie, wird der Bewegung eine Korrekturbewegung überlagert, die sich aus der Interpolation des Fehlers zwischen den gemessenen Stützstellen ergibt. Für das Vorgehen nach dieser Methode ist kein Vorwissen über das System notwendig. Allerdings ergeben sich auch einige Nachteile. Es sind aufwendige Messungen in allen interessierenden Freiheitsgraden erforderlich, die zu verarbeitende Datenmenge steigt exponentiell mit der Anzahl der betrachteten Freiheitsgrade und wird somit für mehrachsige Maschinen sehr groß. Außerdem werden keine Erkenntnisse über die Ursachen der Posefehler gewonnen. Die ermittelten Korrekturwerte gelten daher nur für die während der Kalibrierung wirkenden Randbedingungen und sind aufgrund von fehlenden Modellen nicht übertragbar.

Eine direkte, eindeutige Zuordnung der Fehlerursachen ist aber wünschenswert, um Verbesserungsmaßnahmen (konstruktiv, fertigungstechnisch, kompensatorisch) zu ermöglichen. Dies gelingt bei der *Parametrischen Kalibrierung*. Für diese wird ein Modell aufgestellt, welches die Ursachen für die Poseabweichungen abbildet. Diese Poseabweichungen können dann für alle im Modell berücksichtigten Bedingungen rekonstruiert und somit kompensiert werden. Die Ursachen der Abweichungen sind einer direkten Erfassung oft nur schwer zugänglich. Aus diesem Grund sollen die Parameter des Modells mit Hilfe einer Parameterschätzung aus gemessenen Poseabweichungen identifiziert werden. Das Parameteridentifikationsproblem, bei dem die Parameter nichtlinear eingehen, lässt sich in die allgemeine Klasse der inversen Probleme einordnen. Bei solchen Problemen sind auf Basis der Kenntnis von konkreten Lösungen (hier gemessene Posefehler für bestimmte Sollposen) bestimmte Parameter des Ausgangsproblems zu bestimmen (hier z.B. Geometriefehler). Dieser inverse Zusammenhang ist jedoch schwierig zu lösen. Die Inverse der Abbildung, welche konkreten Parametern eine konkrete Lösung zuordnet, ist im allgemeinen ein schlecht konditioniertes, nichtlineares Problem. Kleine Störungen führen mitunter zu großen Parameteränderungen. Häufig ist das System überbestimmt. Die konkreten Lösungen werden durch Messungen bestimmt und sind somit mit Messfehlern behaftet.

Die zu bildenden kinematischen Modelle sollten demnach möglichst einfach gehalten werden. Je mehr Parameter ein Modell enthält, desto schwieriger wird es, eine akzeptable Kondition des Identifikationsproblems zu erreichen und desto schlechter gelingt die Parameteridentifikation. Andererseits sollten alle wesentlichen Fehlereinflüsse auf die Pose bei der Modellbildung berücksichtigt werden, um eine Kompensation zu ermöglichen [ArnMS01, Ste02]. Die identifizierten Parameter geben ansonsten die physikalischen Eigenschaften des betrachteten Mechanismus nur unzureichend wieder [ViC198]. Es ist zunächst zu prüfen, welche die Pose beeinflussenden Größen vernachlässigt, eliminiert oder während der Identi-

fikation konstant gehalten werden können. So werden z.B. bei quasistatischen Messungen dynamische Trägheitseinflüsse vermieden. Findet die Messung im Anschluss an einen ausreichenden Warmlauf der Maschine oder innerhalb sehr kurzer Zeit statt, so kann von einem vernachlässigbaren thermischen Einfluss ausgegangen werden. Ob Gravitationseinflüsse bzw. Gewichtskräfte berücksichtigt werden müssen, hängt von dem Verhältnis der Massen der bewegten Komponenten zu den Steifigkeiten ab.

Zur Erfassung von Abweichungen zwischen den Soll- und Ist-Koordinaten verschiedener Posen muss eine geeignete Messstrategie ausgewählt werden. Im Gegensatz zur Nichtparametrischen Kalibrierung, ist es nicht zwingend erforderlich, alle relevanten Freiheitsgrade (FHG) des Endeffektors simultan zu vermessen. Bei Verwendung der direkten Kinematik (diese beschreibt den Übergang vom Maschinenkoordinatensystem zum Basis- bzw. Werkstückkoordinatensystem) ist für die Parameteridentifikation ein Gleichungssystem aufzustellen und zu lösen. Hierbei vereinfacht die Messung der vollen Pose (3 Koordinaten für die Position und 3 weitere für die Orientierung) den Identifikationsprozess und verlangt weniger Messpunkte. Demgegenüber kann die Vermessung eines einzelnen Freiheitsgrades verhältnismäßig einfach und mit kostengünstigeren Messgeräten durchgeführt werden. Da der Informationsgehalt einer Einzelmessung in diesem Fall deutlich geringer ist, wird eine größere Anzahl an Messposen erforderlich. Bei der Auswahl geeigneter Messposen ist wiederum die von der Pose abhängige Sensitivität der Modellparameter zu berücksichtigen. Grundsätzlich ist die Genauigkeit und Auflösung des verwendeten Messsystems zu beachten.



415/28329 © IFW

Bild 1-1: Ablauf der Kalibrierung

Es zeigt sich, dass die Modellbildung, die Messstrategie und die Identifikationsmethode voneinander abhängig sind und eine integrierte Betrachtung erfordern. Mit Hilfe einer Konditionsanalyse kann die Messstrategie dahingehend optimiert werden, dass eine ausreichende Sensitivität der Modellparameter vorliegt. In Bild 1-1 ist der prinzipielle Ablauf einer parametrischen Kalibrierung dargestellt. In einem ersten Schritt wird ein Modell gebildet, das die zu berücksichtigenden Fehlerquellen enthält. Anschließend wird eine Sensitivitätsanalyse durchgeführt, die den Einfluss der Fehlerparameter quantifiziert und so eine Modellreduktion (im Sinne einer Reduzierung der Parameter des Modells) ermöglicht. Nachdem eine für die Anregung der Fehlerparameter günstige Messstrategie gefunden ist, erfolgt die eigentliche Messung. Mit den ermittelten Fehlerdaten werden die Modellparameter identifiziert. Das Fehlermodell wird mit seinen Parametern implementiert. Abschließend muss die Wirksamkeit der Kalibrierung überprüft werden.

Den hier vorgestellten Arbeiten liegt das Bestreben zugrunde, eine allgemein anwendbare Systembeschreibung zu entwickeln, die die physikalischen Gegebenheiten möglichst vollständig abbildet. Unterschiedliche Effekte (Fertigungs- und Montagefehler, Gravitationseinflüsse, thermisch bedingte Verlagerungen) sollen voneinander getrennt werden können. Hierzu kann ein zeitkontinuierlicher Modellansatz mit physikalischen Parametern gewählt werden. Für die Modellbildung ergeben sich die folgenden Anforderungen:

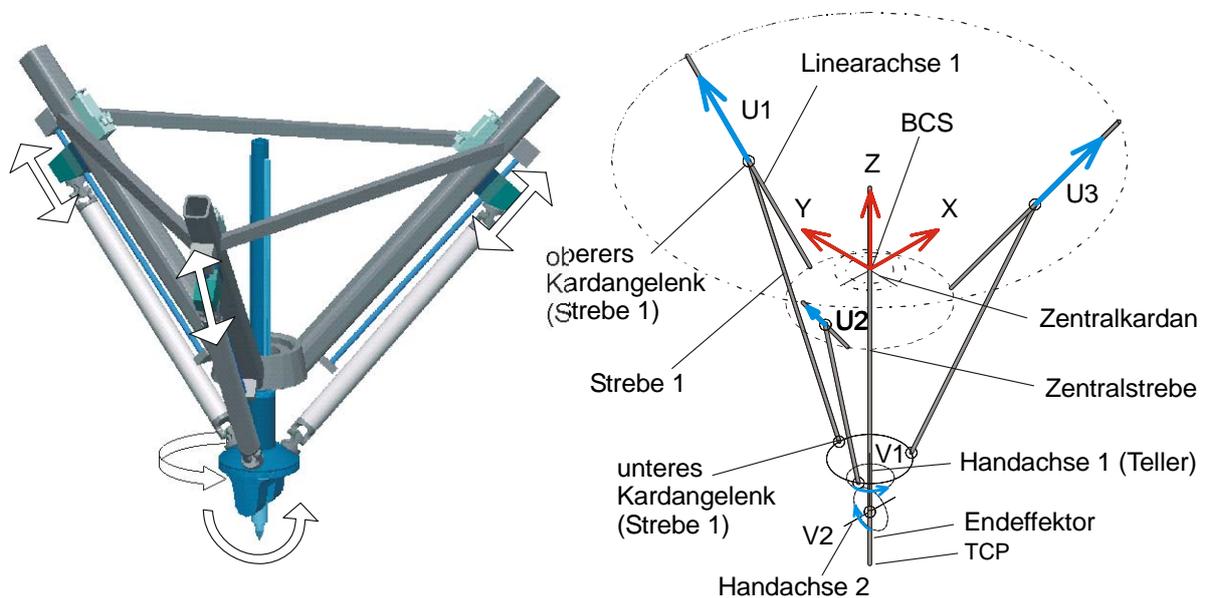
- Die kinematische Abbildung sollte alle möglichen bzw. relevanten Fehlereinflüsse berücksichtigen.
- Zur Erhöhung der Identifikationsgüte und Minimierung des nötigen Messaufwandes sollte das Modell eine möglichst geringe Parameteranzahl enthalten.
- Für die Identifikation ist es notwendig, dass die zu identifizierenden Parameter im Bereich der nominalen Geometrie stetig sind.
- Für die Implementierung in eine Maschinesteuerung darf die Rechenzeit zur Lösung der inversen Kinematik (diese beschreibt den Übergang vom Basiskoordinatensystem zum Maschinenkoordinatensystem) nicht zu groß werden; in Abhängigkeit des Modellumfangs muss alternativ eine „offline“-Kompensation stattfinden.

## **1.2 Standardmodellbildung hybrider Kinematiken**

Das hier beschriebene Kalibrierverfahren wurde zunächst anhand der hybridkinematischen Struktur der Laserbearbeitungsmaschine „Georg V.“ (siehe Bild 1-2) entwickelt.

Der parallelkinematische Maschinenteil besteht aus einem Dreibein. Die Fußpunkte der drei Streben können entlang der Hauptstreben des Gestells verschoben werden. Dabei sind die Streben über Gelenke mit drei rotatorischen Freiheitsgraden an die Schlitten angekoppelt. An der unteren Seite sind die Streben über Kardangelenke mit einem Teller verbunden. Dieser wiederum ist starr mit der passiven Mittelstrebe verbunden, die im Gestell kard-

nisch und axial verschiebbar gelagert ist. Die Orientierung des Tellers ist von seiner Position abhängig. Er ist immer zum Mittelpunkt des Zentralkardangelenks ausgerichtet. Am Teller ist ein zweiachsiges Handgelenk befestigt. Die erste Achse fluchtet mit der Mittelstrebe. Die zweite Achse steht senkrecht zur ersten und trägt den Endeffektor, der somit frei orientiert werden kann. Die drei Linearachsen tragen die Bezeichnungen U1, U2 und U3. Die Handgelenkachsen die Bezeichnungen V1 und V2. Der Nullpunkt des Basiskoordinatensystems liegt im Mittelpunkt des Zentralkardangelenks. Die z-Achse zeigt nach oben, die x-Achse entspricht der äußeren Achse des Zentralkardans.



415/28331 © IFW

Bild 1-2: Achsanordnung der Hybridkinematik „Georg V.“

Im Folgenden sei zunächst die Bildung des konventionellen Kinematikmodells beschrieben, wie es in der Maschinensteuerung der meisten parallelkinematischen Maschinen zum Einsatz kommt.

Für die Modellbildung werden verschiedene Koordinatensysteme verwendet (siehe Bild 1-3): das Basiskoordinatensystem (BKS)  ${}^B\mathcal{B} = ({}^Bx, {}^By, {}^Bz)$ , das Zentralstrebenkoordinatensystem (ZKS)  ${}^Z\mathcal{B} = ({}^Zx, {}^Zy, {}^Zz)$ , das Toolkoordinatensystem (TKS)  ${}^T\mathcal{B} = ({}^Tx, {}^Ty, {}^Tz)$ , das Maschinenkoordinatensystem (MKS)  $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$  bzw.  $(U_1, U_2, U_3, V_1, V_2)$  und das Weltkoordinatensystem (WKS)  $(x_1, x_2, x_3, \psi_1, \psi_2)$ . Es ist zu beachten, dass das Basiskoordinatensystem, das Zentralstrebenkoordinatensystem und das Toolkoordinatensystem Basissysteme im 3-dimensionalen Beobachtungsraum sind und ineinander überführt werden können. Das

Maschinenkoordinatensystem und das Weltkoordinatensystem jedoch sind Basissysteme im 5-dimensionalen Arbeitsraum der Maschine, da diese den Freiheitsgrad 5 hat.

Bezüglich welches Koordinatensystems ein Vektor  $\vec{r}$  in Parameterdarstellung dargestellt wird, wird durch den linken unteren Index beschrieben. So beschreibt  ${}_z\vec{r}$  den Vektor bzgl. des Zentralstrebenkoordinatensystems.

Linke obere Indizes bezeichnen die Zugehörigkeit zu gewissen (Bau-) Teilen der Kinematik. So bezeichnen  ${}^i e$  den oberen und  ${}^i f$  den unteren Hardwareendschalter des  $i$ -ten Seitenzweigs zwischen denen der obere Kardanmittelpunkt liegt und  ${}^i d = \|\mathbf{{}^i e} - \mathbf{{}^i f}\|_2$  die Entfernung beider Endschalter voneinander. Bild 1-3 beschreibt den kinematischen Aufbau der Maschine. Die Seitenstrebe wird durch den Vektor  ${}^i \vec{s} = \mathbf{{}^i b} - \mathbf{{}^i a}$  repräsentiert wobei  ${}^i b$  den unteren Kardanpunkt beschreibt. Der Vektor  ${}^i \vec{c}$  verdeutlicht die Lage des unteren Kardanmittelpunktes relativ zum Ursprung des ZKS. Der normierte Vektor  $\vec{k}$  beschreibt die Orientierung der Zentralstrebe und  $l$  die Länge der Zentralstrebe (genauer: den Abstand des Ursprungs des Zentralkoordinatensystems vom Basiskoordinatensystem). Das Zentralkoordinatensystem ist fest auf der Zentralstrebe eingepägt, so dass der Vektor  $\vec{k}$  senkrecht auf der  ${}^z x^z y$ -Ebene steht und entgegen der  ${}^z z$ -Richtung zeigt.

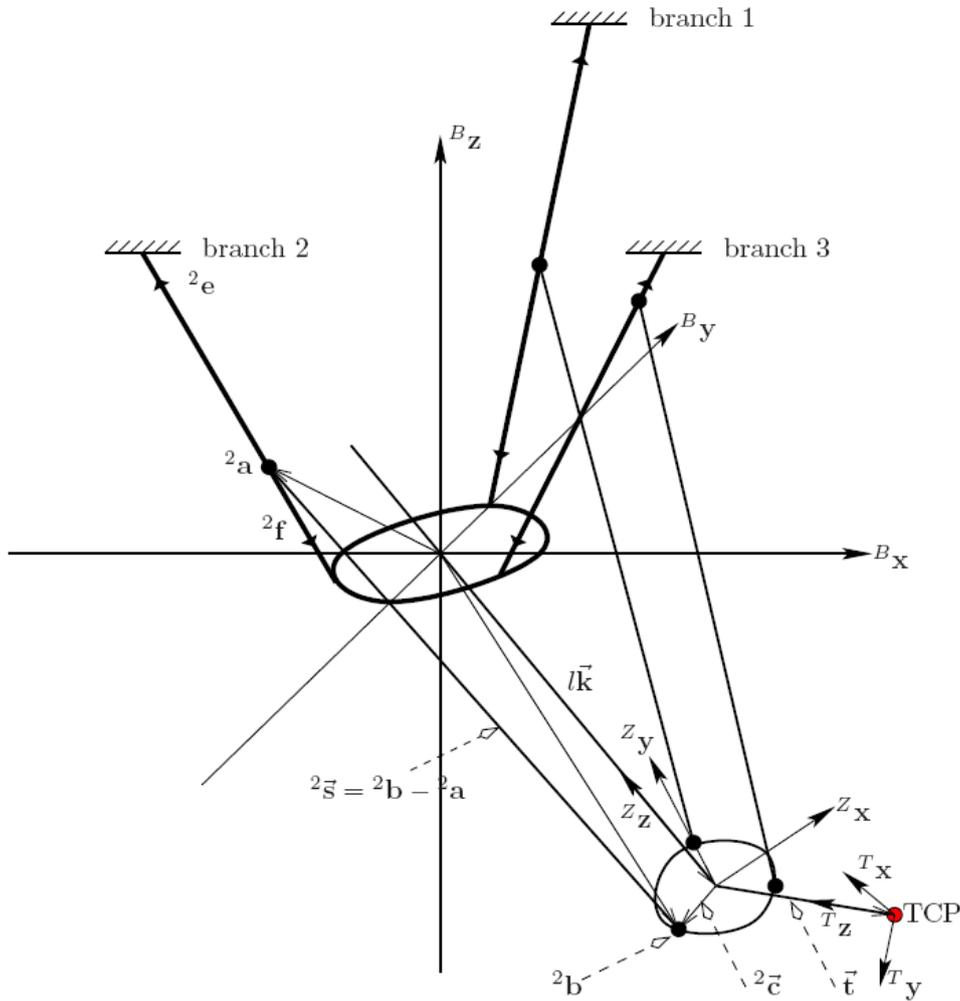


Bild 1-3: Notationen des zweiten kinematischen Zweiges

Demnach ist die Parameterdarstellung des Vektors  $\vec{k}$  bzgl. des Zentralkoordinatensystems durch

$${}^z\vec{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{Gl. 1}$$

konstant vorgegeben. Ebenfalls sind die Parameterdarstellungen  ${}^z\vec{c}^i$  der Vektoren  ${}^i\vec{c}$  für  $i = 1, 2, 3$  bzgl. des Zentralkoordinatensystems konstant gegeben. Die Maschine wird durch die Steuergröße  $\vec{u} \in U$  gesteuert. Dabei ist der Steuerraum wie folgt definiert:

$$\mathcal{U} = \left\{ \vec{u} \in \mathbb{R}^5 : u_i \in \left[ -\frac{i d}{2}, \frac{i d}{2} \right], i = 1, 2, 3; u_4 \in \left[ \frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2} \right]; u_5 \in \left[ 0, \frac{\pi}{2} \right] \right\} \quad \text{Gl. 2}$$

### 1.2.1 Transformation von Weltkoordinaten in Maschinenkoordinaten

Berechnung der Maschinenschlittenpositionen  $u_i$  mit  $i = 1 \dots 3$  und den Winkeln  $u_4$  und  $u_5$ :

Zunächst erfolgt die Berechnung des Handachsenschnittpunktes aus der Orientierung und dem Ort des Endeffektors:

$$\mathbf{R}_x(\psi_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\psi_1) & -\sin(\psi_1) \\ 0 & \sin(\psi_1) & \cos(\psi_1) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_y(\psi_2) = \begin{pmatrix} \cos(\psi_2) & 0 & \sin(\psi_2) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\psi_2) & 0 & \cos(\psi_2) \end{pmatrix} \quad \text{Gl. 3}$$

$${}_B\vec{k} = \vec{x} - \mathbf{R}_y(\psi_2) \mathbf{R}_x(\psi_1) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -L_E \end{pmatrix}$$

Der Endeffektor ist in der Ruhelage mit der Orientierung  $[0 \ 0 \ -1]^T$  und mit der Länge  $L_{\text{Endeffektor}} = L_E = (L_{\text{Kopf}} + L_{\text{Werkzeug}})$  vorgegeben. Der Vektor  $\vec{x} = [x_1, x_2, x_3]^T$  bezeichnet die Position des Endeffektors und die Winkel  $\psi_1$  und  $\psi_2$  dessen Orientierung bzgl. des Basiskoordinatensystems. Zusammen werden diese Parameter als Weltkoordinaten  $[x_1, x_2, x_3, \psi_1, \psi_2]$  bezeichnet. Der Winkel  $\psi_3$  ist dabei die Rotation des Endeffektors um seine Symmetrieachse und kann somit als Null  $\psi_3 = 0$  angenommen werden. Anschließend wird die Orientierung der Zentralstrebe aus dem Handachsenschnittpunkt berechnet:  $\vec{l}\vec{k}$  ist hierbei der Vektor zwischen dem Zentralkardangelenk und dem Handachsenschnittpunkt und entspricht somit in seiner Orientierung der Zentralstrebe. Dadurch können die Kardanwinkel  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  im Kardangelenk berechnet werden.  $\varphi_1$  beschreibt dabei die 1. Rotation um die  $x$ -Achse des BKS und  $\varphi_2$  die 2. Rotation um die neue  $y$ -Achse.

$$\varphi_1 = \arctan\left(\frac{{}_B k_2}{{}_B k_3}\right), \varphi_2 = \arcsin\left(\frac{{}_B k_1}{\|{}_B k\|}\right) \quad \text{Gl. 4}$$

Es schließt sich die Berechnung der Verbindungspunkte von Zentralstrebe und den unteren Kardangelenken an: Der Verbindungsvektor  ${}^1\vec{c}$  vom Ort  $\vec{l}\vec{k}$  zum Ort des unteren Kardangelenks der Strebe 1 kann nun konstruiert werden; er ist konstant im ZKS.

$${}^1\vec{c} = \begin{pmatrix} {}^1c_1 \\ {}^1c_2 \\ {}^1c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ LPR \\ LPR + LPH \end{pmatrix} \quad \text{Gl. 5}$$

Die Längen LPR und LPH folgen aus der Konstruktion. Zur Konstruktion der Ortsvektoren der unteren Kardangelenke der anderen beiden Streben  ${}^2\vec{c}$  und  ${}^3\vec{c}$  wird der Vektor  ${}^1\vec{c}$  um die z-Achse des ZKS mit  $120^\circ$  bzw.  $240^\circ$  rotiert. Jetzt wird der Teller entsprechend der Orientierung der Zentralstrebe, d.h. um  $\varphi_1$  und  $\varphi_1$  geneigt und der Orientierung der Zentralstrebe angepasst. Die Verbindungspunkte zu den Seitenstreben  ${}^i s$  sind nun die  ${}^i b$  mit  $i=1, \dots, 3$ . Mit  ${}^{BZ}\mathbf{T}$  erfolgt der Übergang vom Zentralstreben- ins Basiskoordinatensystem.

$$\begin{aligned} {}^{BZ}\mathbf{T} &= \mathbf{R}_x(\varphi_1) \cdot \mathbf{R}_y(\varphi_2) \\ {}^1\vec{b} &= {}_B\vec{k} + {}^{BZ}\mathbf{T} \cdot {}^1\vec{c}, \quad {}^2\vec{b} = {}_B\vec{k} + {}^{BZ}\mathbf{T} \cdot {}^2\vec{c}, \quad {}^3\vec{b} = {}_B\vec{k} + {}^{BZ}\mathbf{T} \cdot {}^3\vec{c} \end{aligned} \quad \text{Gl. 6}$$

Zur Berechnung von  $u_i$  mit  $i=1, \dots, 3$  wird die Bahn des Schnittpunktes der oberen Kardangelenckachsen betrachtet: Das Kardangelenk befindet sich auf einem Schlitten, der sich auf einer Führung zwischen dem Ort  ${}^i\vec{f}$  und dem Ort  ${}^i\vec{e}$  bewegt. Daraus folgt:

$${}^i\vec{a} = {}^i\vec{f} + \lambda_i \cdot ({}^i\vec{e} - {}^i\vec{f}), \quad \lambda \in [0, 1] \quad \text{Gl. 7}$$

Aus der Länge  ${}^i L_s$  der Zentralstrebe folgt zusätzlich die Bedingung  ${}^i L_s = \|{}^i\vec{a} - {}^i\vec{b}\|$ . Werden diese beiden Bedingungen ineinander eingesetzt, so folgt eine quadratische Gleichung, aus der  $\lambda_i$  bestimmt werden kann:

$$0 = \lambda_i^2 ({}^i\vec{e} - {}^i\vec{f})^2 + 2\lambda_i ({}^i\vec{e} - {}^i\vec{f})({}^i\vec{f} - {}^i\vec{b}) + ({}^i\vec{f} - {}^i\vec{b})^2 - {}^i L_s^2 \quad \text{Gl. 8}$$

Nach  $\lambda_i$  entwickelt ergibt sich:

$$\begin{aligned} 0 &= p \cdot \lambda_i^2 + q \cdot \lambda_i + r, \quad \lambda_{1,2} = \alpha \pm \sqrt{\beta} \quad \text{mit} \quad \alpha = -\frac{q}{2p}, \quad \beta = \frac{q^2}{4p^2} - \frac{r}{p} \\ \alpha &= -\frac{\langle ({}^i\vec{f} - {}^i\vec{b}), ({}^i\vec{e} - {}^i\vec{f}) \rangle}{\|{}^i\vec{e} - {}^i\vec{f}\|^2} \\ \beta &= \frac{\langle ({}^i\vec{f} - {}^i\vec{b}), ({}^i\vec{e} - {}^i\vec{f}) \rangle^2}{\|{}^i\vec{e} - {}^i\vec{f}\|^4} - \frac{\|{}^i\vec{f} - {}^i\vec{b}\|^2 - {}^i L_s^2}{\|{}^i\vec{e} - {}^i\vec{f}\|^2} \end{aligned} \quad \text{Gl. 9}$$

Mit der Bedingung  $\lambda_i \in [0, 1]$  und einer Korrektur der Nulllage (die Nullstellung von  $u_i$  befindet sich in der Mitte zwischen  ${}^i\vec{e}$  und  ${}^i\vec{f}$ ) folgt:

$$u_i = \lambda_i \cdot \left\| {}^i_B \vec{e} - {}^i_B \vec{f} \right\| - \frac{\left\| {}^i_B \vec{e} - {}^i_B \vec{f} \right\|}{2} \quad \text{Gl. 10}$$

Berechnung von  $u_4$ , dem Rotationswinkel der 1. Handgelenkachse um die  $z$ -Achse des ZKS:

$$\tilde{u}_4 = \arccos \left( \frac{\left\langle {}^B \vec{k} \times ({}^B \vec{x} - {}^B \vec{k}), ({}^B \vec{b} \times {}^B \vec{k}) \right\rangle}{\left\| {}^B \vec{k} \times ({}^B \vec{x} - {}^B \vec{k}) \right\| \cdot \left\| {}^B \vec{b} \times {}^B \vec{k} \right\|} \right) \quad \text{Gl. 11}$$

$\tilde{u}_4$  ist der zwischen den Kreuzprodukten eingeschlossene Winkel. Zur Berechnung des Vorzeichens wird die  $z$ -Komponente des Kreuzproduktes der Kreuzprodukte betrachtet:

$$u_4 = -\text{sign} \left[ \left[ {}^B \vec{k} \times ({}^B \vec{x} - {}^B \vec{k}) \right] \times ({}^B \vec{b} \times {}^B \vec{k}) \right]_3 \cdot \tilde{u}_4 \quad \text{Gl. 12}$$

Berechnung von  $u_5$ , dem Winkel der 2. Handachse bzgl. des ZKS:

$$u_5 = -\arccos \left( \frac{\left\langle {}^B \vec{k}, ({}^B \vec{x} - {}^B \vec{k}) \right\rangle}{\left\| {}^B \vec{k} \right\| \cdot \left\| ({}^B \vec{x} - {}^B \vec{k}) \right\|} \right) \quad \text{Gl. 13}$$

Aus den Gleichungen lässt sich erkennen, dass sich der Mechanismus, wenn die Vektoren  $\vec{t}$  (Richtungsvektor des Endeffektors) und  $\vec{k}$  parallel sind, in einer singulären Stellung befindet. Das Kreuzprodukt  $\vec{t} \times \vec{k}$  wird zu Null und  $u_4$  ist nicht mehr definiert.

## 1.2.2 Transformation von Maschinenkoordinaten in Weltkoordinaten

Zunächst ist der parallelkinematische Teil zu berechnen:

Entsprechend Bild 1-3 ergibt sich für die  $i$ -te Seitenstrebe mit  $\|\vec{k}\| = 1$ :

$${}^i \vec{b} = {}^i \vec{a} + {}^i \vec{s} = l \vec{k} + {}^i \vec{c} \quad \text{Gl. 14}$$

bzw. in Parameterdarstellung des Basiskoordinatensystems

$${}^i_B \vec{b} = {}^i_B \vec{a} + {}^i_B \vec{s} = l {}^i_B \vec{k} + {}^i_B \vec{c} \quad \text{Gl. 15}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
{}_B\bar{k}(\varphi_1, \varphi_2, l) &= l {}_B\bar{k}(\varphi_1, \varphi_2) = l \mathbf{R}_x(\varphi_1) \mathbf{R}_y(\varphi_2) {}_Z\bar{k} \\
{}_B\bar{c}(\varphi_1, \varphi_2) &= \mathbf{R}_x(\varphi_1) \mathbf{R}_y(\varphi_2) {}_Z\bar{c} \\
{}_B\bar{a}(u_i) &= {}_B\bar{f} + \delta(u_i)({}_B\bar{e} - {}_B\bar{f})
\end{aligned} \tag{Gl. 16}$$

Hierbei entspricht

$$\delta(u_i) : \left[-\frac{1}{2} {}^i d, \frac{1}{2} {}^i d\right] \rightarrow [0, 1] \quad \text{mit} \quad \delta(u_i) = \frac{1}{2} + \frac{1}{i d} u_i \tag{Gl. 17}$$

dem konvexen Linearkombinationskoeffizienten in Abhängigkeit von der Koordinate  $u_i$ . Außerdem gilt

$$\|{}_B\bar{s}\| = {}^i L \tag{Gl. 18}$$

Durch Ersetzen von  ${}_B\bar{s}$  mittels Gl.15 und Gl.16 folgt

$$\left\| \mathbf{R}_x(\varphi_1) \mathbf{R}_y(\varphi_2) (l {}_Z\bar{k} + {}_Z\bar{c}) - {}_B\bar{f} + \delta(u_i)({}_B\bar{e} - {}_B\bar{f}) \right\| = {}^i L \tag{Gl. 19}$$

für jeden Seitenzweig  $i=1,2,3$ . Somit hat das nichtlineare Gleichungssystem zur Bestimmung der Unbekannten  $\varphi_1, \varphi_2$  und  $l$  bei gegebenen Steuergrößen  $u_1, u_2$  und  $u_3$  die Form

$$0 = \mathbf{F}(\varphi_1, \varphi_2, l) := \begin{bmatrix} \left\| \mathbf{R}_x(\varphi_1) \mathbf{R}_y(\varphi_2) (l {}_Z\bar{k} + {}_Z\bar{c}) - {}_B\bar{f} + \delta(u_1)({}_B\bar{e} - {}_B\bar{f}) \right\| - {}^1 L \\ \left\| \mathbf{R}_x(\varphi_1) \mathbf{R}_y(\varphi_2) (l {}_Z\bar{k} + {}_Z\bar{c}) - {}_B\bar{f} + \delta(u_2)({}_B\bar{e} - {}_B\bar{f}) \right\| - {}^2 L \\ \left\| \mathbf{R}_x(\varphi_1) \mathbf{R}_y(\varphi_2) (l {}_Z\bar{k} + {}_Z\bar{c}) - {}_B\bar{f} + \delta(u_3)({}_B\bar{e} - {}_B\bar{f}) \right\| - {}^3 L \end{bmatrix} \tag{Gl. 20}$$

Mit den Größen  $\varphi_1, \varphi_2$  und  $l$  ist dann die Orientierung durch  ${}^Z\mathcal{B} = {}^B\mathcal{B} \mathbf{R}_x(\varphi_1) \mathbf{R}_y(\varphi_2)$  und die Lage des Zentralstrebenkoordinatensystems durch  ${}_B\bar{k}(\varphi_1, \varphi_2, l)$  eindeutig festgelegt und der serielle Teil der Maschine kann bestimmt werden.

Die Lage und die Orientierung des Toolkoordinatensystems gegenüber der Zentralstrebe wird durch die beiden Steuerwinkel  $u_4$  und  $u_5$  beschrieben, wobei das Toolkoordinatensystem durch Drehung mit  $u_4$  um die  ${}^Z z$ -Achse und anschließender Drehung mit  $u_5$  um die neue  $x$ -Achse aus dem Zentralstrebenkoordinatensystem hervorgeht. Demnach wird der Basisübergang durch

$${}^T\mathcal{B} = {}^Z\mathcal{B} \mathbf{R}_z(u_4) \mathbf{R}_x(u_5) = {}^Z\mathcal{B} {}^Z\mathbf{T}(u_4, u_5) \tag{Gl. 21}$$

beschrieben und somit die Transformation der Parameterdarstellung des Vektors  $\bar{t}$  durch

$${}_Z\bar{\mathbf{t}} = \mathbf{R}_z(u_4)\mathbf{R}_x(u_5){}_T\bar{\mathbf{t}} \quad \text{Gl. 22}$$

Da jedoch die Darstellung von  $\bar{\mathbf{t}}$  im Basiskoordinatensystem benötigt wird, muss dieser noch entsprechend transformiert werden:

$${}_B\bar{\mathbf{t}} = \mathbf{R}_x(\varphi_1)\mathbf{R}_y(\varphi_2){}_Z\bar{\mathbf{t}} = \mathbf{R}_x(\varphi_1)\mathbf{R}_y(\varphi_2)\mathbf{R}_z(u_4)\mathbf{R}_x(u_5){}_T\bar{\mathbf{t}} = {}^{BZ}\mathbf{T}^{ZT}\mathbf{T}_T\bar{\mathbf{t}} \quad \text{Gl. 23}$$

Der Vektor  $\bar{\mathbf{t}}$  ist fest mit dem Toolkoordinatensystem verbunden und somit ist der Parametervektor  ${}_T\bar{\mathbf{t}}$  konstant und durch

$${}_T\bar{\mathbf{t}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -L_E \end{bmatrix} \quad \text{Gl. 24}$$

beschrieben. Letztendlich ergibt sich die Position  ${}_B\bar{\mathbf{x}}$

$$\begin{aligned} {}_B\bar{\mathbf{x}} &= l_B\bar{\mathbf{k}} + {}_B\bar{\mathbf{t}} \\ &= l\mathbf{R}_x(\varphi_1)\mathbf{R}_y(\varphi_2){}_Z\bar{\mathbf{k}} + \mathbf{R}_x(\varphi_1)\mathbf{R}_y(\varphi_2)\mathbf{R}_z(u_4)\mathbf{R}_x(u_5){}_T\bar{\mathbf{t}} \end{aligned} \quad \text{Gl. 25}$$

Die Orientierung des TCP bestimmt sich aus dem Vergleich der Parameterdarstellung des Vektors  $\bar{\mathbf{t}}$ . Hier gilt:

$${}_B\bar{\mathbf{t}} = {}^{BT}\mathbf{T}_T\bar{\mathbf{t}} = {}^{BZ}\mathbf{T}^{ZT}\mathbf{T}_T\bar{\mathbf{t}} \quad \text{Gl. 26}$$

Die direkte Transformation  ${}^{BT}\mathbf{T}$  des Basis- in das Toolkoordinatensystem ist durch eine Rotation mit  $u_4$  um die  ${}^T x$ -Achse und anschließende Rotation mit  $u_5$  um die neue y-Achse definiert.

$$\begin{aligned} {}^{BT}\mathbf{T} &= \begin{bmatrix} \cos\psi_2 & 0 & \sin\psi_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\psi_2 & 0 & \cos\psi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi_1 & -\sin\psi_1 \\ 0 & \sin\psi_1 & \cos\psi_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\psi_2 & \sin\psi_1 \sin\psi_2 & \cos\psi_1 \sin\psi_2 \\ 0 & \cos\psi_1 & -\sin\psi_1 \\ -\sin\psi_2 & \sin\psi_1 \cos\psi_2 & \cos\psi_1 \cos\psi_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad \text{Gl. 27}$$

Durch den Vergleich der Elemente von  ${}^{BT}\mathbf{T}$  und  ${}^{BZ}\mathbf{T}^{ZT}\mathbf{T}$  erhält man  $\psi_1$  und  $\psi_2$ :

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \arcsin(-{}^{BT}\mathbf{T}_{23}) \\ &= \arcsin((- \sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2)\sin(u_4) + \cos(\varphi_1)\cos(u_4))\sin(u_5) + \sin(\varphi_1)\cos(\varphi_2)\cos(u_5)) \end{aligned} \quad \text{Gl. 28}$$

$$\begin{aligned}\psi_2 &= \arccos\left(\frac{{}^B\Gamma\mathbf{T}_{33}}{\cos(x_4)}\right) \\ &= \arccos\left(\frac{-(\cos(\varphi_1)\sin(\varphi_2)\sin(u_4) + \sin(\varphi_1)\cos(u_4))\sin(u_5) + \cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2)\cos(u_5)}{\cos(x_4)}\right)\end{aligned}\quad \text{Gl. 29}$$

Das zu lösende nichtlineare Gleichungssystem hat letztendlich die Form:

$$\begin{aligned}0 &= \mathbf{F}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p}, \bar{u}) \\ &= \begin{bmatrix} \left\| \mathbf{R}_x(\varphi_1)\mathbf{R}_y(\varphi_2)(l_z\bar{k} + {}^1\bar{c}) - {}^1\bar{f} + \delta(u_1)\left({}^1\bar{e} - {}^1\bar{f}\right) \right\| - {}^1L \\ \left\| \mathbf{R}_x(\varphi_1)\mathbf{R}_y(\varphi_2)(l_z\bar{k} + {}^2\bar{c}) - {}^2\bar{f} + \delta(u_2)\left({}^2\bar{e} - {}^2\bar{f}\right) \right\| - {}^2L \\ \left\| \mathbf{R}_x(\varphi_1)\mathbf{R}_y(\varphi_2)(l_z\bar{k} + {}^3\bar{c}) - {}^3\bar{f} + \delta(u_3)\left({}^3\bar{e} - {}^3\bar{f}\right) \right\| - {}^3L \\ \frac{{}^B\bar{x} - l\mathbf{R}_x(\varphi_1)\mathbf{R}_y(\varphi_2){}_z\bar{k} + \mathbf{R}_x(\varphi_1)\mathbf{R}_y(\varphi_2)\mathbf{R}_z(u_4)\mathbf{R}_x(u_5){}_T\bar{t}}{\psi_1 - \arcsin\left(\left(-\sin\varphi_1\sin\varphi_2\sin u_4 + \cos\varphi_1\cos u_4\right)\sin u_5 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2\cos u_5\right)} \\ \psi_2 - \arccos\left(\frac{-(\cos\varphi_1\sin\varphi_2\sin u_4 + \sin\varphi_1\cos u_4)\sin u_5 + \cos\varphi_1\cos\varphi_2\cos u_5}{\cos x_4}\right) \end{bmatrix}\end{aligned}\quad \text{Gl. 30}$$

mit

$$\begin{aligned}\bar{x} &= [x_1, x_2, x_3]^T \in \mathbb{R}^3, \bar{\psi} = [\psi_1, \psi_2] \in \mathbb{R}^2 \\ \bar{y} &= [\varphi_1, \varphi_2, l]^T \in \mathbb{R}^3 \\ \bar{p} &= [{}_z\bar{k}^T, {}^1\bar{c}^T, {}^2\bar{c}^T, {}^3\bar{c}^T, {}^1\bar{e}^T, {}^2\bar{e}^T, {}^3\bar{e}^T, {}^1\bar{f}^T, {}^2\bar{f}^T, {}^3\bar{f}^T, {}^1L, {}^2L, {}^3L, {}_T\bar{t}^T]^T \in \mathbb{R}^{36} \\ \bar{u} &= [u_1, u_2, u_3, u_4, u_5]^T \in \mathbb{R}^5\end{aligned}\quad \text{Gl. 31}$$

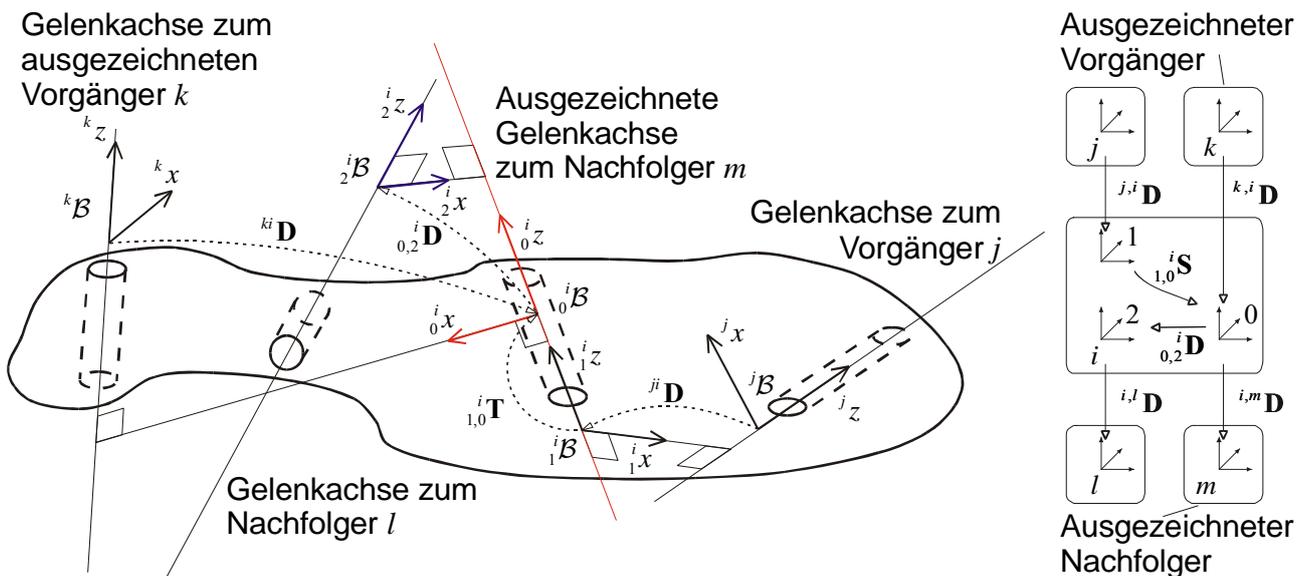
Hierbei bezeichnet  $[\bar{x}, \bar{\psi}]$  die Pose der Maschine im Weltkoordinatensystem,  $\bar{y}$  die Stellungen der betrachteten passiven Gelenke,  $\bar{p}$  die zu kalibrierenden Geometrieparameter der Maschine und  $\bar{u}$  die Stellung der Maschinenachsen. Mit diesen 8 nichtlinearen Gleichungen können die 8 Unbekannten  $\varphi_1, \varphi_2, l$  und  $x_1, x_2, x_3, \psi_1, \psi_2$  bei bekannter Stellung der Maschinenachsen  $\bar{u}$  bestimmt werden.

Das hier vorgestellte Modell geht von idealen Gelenken aus. So wird davon ausgegangen, dass die Achsen der Kardangelenke senkrecht aufeinander stehen und sich schneiden. Weiterhin werden bei der Modellierung z.T. Symmetrien ausgenutzt. Beides führt dazu, dass in dieser Art von Modellen nicht alle möglichen Fehlerparameter enthalten sind. Eine solche Modellierungsweise wird z.Z. auf fast allen Maschinen mit parallelen Kinematiken verwendet. Diese Vorgehensweise wird i.A. für eine genaue Kalibrierung nicht ausreichen. Sie bietet aber deutliche Vorteile bei der Rechenzeit.

### 1.2.3 Erweitertes kinematisches Modell für hybride Kinematiken

In der Mechanismenmechanik und vor allem in der Robotik hat sich zur Beschreibung der relativen Lage benachbarter Körper und der Transformation von Maschinen- in Weltkoordinaten die von Denavit und Hartenberg 1955 angegebene Matrizendarstellung [DeHa55] durchgesetzt. Für die Erstellung kalibrierfähiger Modelle von hybriden Parallelkinematiken ist sie aber in der Grundform nicht geeignet. Es wird eine Modifikation benötigt, die im Folgenden beschrieben wird (siehe auch [GüSt01]).

In der Grundform erlaubt die DH-Konvention ausschließlich offene kinematische Ketten. Jeder Körper darf höchstens einen Vorgänger und einen Nachfolger haben. Parallele Kinematiken enthalten aber per Definition geschlossene kinematische Schleifen und damit Körper mit mehreren Vorgängern und/oder Nachfolgern. Die DH-Konvention wird nun dahingehend erweitert, dass in Körpern mit mehreren Vorgängern und/oder Nachfolgern zusätzliche Koordinatensysteme eingepägt werden. Dabei wird in einem Körper  $i$  die Gelenkachse zu einem Nachfolger ausgezeichnet und in diese Achse ein körperfestes Koordinatensystem  ${}^i_0\mathcal{B}$  eingepägt, welches bezüglich eines ausgezeichneten Vorgängers der DH-Konvention genügt. Alle Basistransformationen zu Vorgängern oder Nachfolgern erfolgen immer bezüglich dieses Koordinatensystems. Für den Basisübergang von den anderen Vorgängern auf  ${}^i_0\mathcal{B}$  muss die DH-Transformation (mit vier Parametern) um zwei geometrische (konstante) Parameter erweitert werden. Der Basisübergang von  ${}^i_0\mathcal{B}$  zum (ausgezeichneten) Nachfolger genügt der DH-Konvention. Für den Basisübergang von  ${}^i_0\mathcal{B}$  auf die anderen Nachfolger muss die DH-Transformation um vier geometrische (konstante) Parameter erweitert werden. Der Zusammenhang wird in Bild 1-4 verdeutlicht.



*Bild 1-4: Konvention für Körper mit mehreren Vorgängern und/oder Nachfolgern*

Für die Identifikation der Geometrieparameter ist es notwendig, dass das Modell in einem hinreichend großen Bereich um die Nenngeometrie herum stetig in den Parametern ist. Bei der DH-Transformation, die durch

$${}^{i-1,i}\mathbf{D} = \mathbf{R}_z(\theta_i) \cdot \mathbf{V}_z(d_i) \cdot \mathbf{V}_x(a_i) \cdot \mathbf{R}_x(\alpha_i) \quad \text{Gl. 32}$$

gegeben ist, ist dies aber für parallele Achsen nicht der Fall (siehe [DeHa55]). Diese Unstetigkeit erschwert die Identifikation der Parameter erheblich. Von Hayati und Mirmirani wurde eine modifizierte DH-Transformation der Gestalt

$${}^{i-1,i}\mathbf{D} = \mathbf{R}_z(\theta_i) \cdot \mathbf{V}_x(a_i) \cdot \mathbf{R}_x(\alpha_i) \cdot \mathbf{R}_y(\beta_i) \quad \text{Gl. 33}$$

eingeführt, die diese Unstetigkeit für parallele Achsen vermeidet [Haya83, HaMi85]. Diese Darstellung ist aber für zwei aufeinander folgende Achsen, die nahezu identisch sind, noch immer nicht stetig. Dieser Fall kommt aber bei hybriden Parallelkinematiken häufig vor, da hier oft ein Schub und ein Drehgelenk mit gleicher Achsrichtung hintereinander liegen (siehe z.B. die Mittelstrebe von „Georg V.“ oder die Strebe eines Hexapoden). Daher wird für parallele Achsen eine eigene Konvention angewandt. Sie beruht auf der selben Lage der Koordinatensysteme wie die modifizierte DH-Konvention. Allerdings wird der Schnittpunkt der  $z_i$ -Achse mit der  $x_{i-1}y_{i-1}$ -Ebene durch Translationen entlang der  $x_{i-1}$ - bzw.  $y_{i-1}$ -Achse dargestellt. Um die Bewegung abzubilden wird, je nach dem ob es sich um eine Schub- oder Drehachse handelt, eine Translations- bzw. Rotationsmatrix  $\mathbf{A}(\tilde{p})$  vormultipliziert. Damit wird allerdings ein zusätzlicher redundanter Parameter  $\tilde{p}$  eingeführt. Die Transformation ergibt sich dann zu

$${}^{i-1,i}\mathbf{D} = \mathbf{A}(\tilde{p}) \cdot \mathbf{V}_x(b_i) \cdot \mathbf{V}_y(c_i) \cdot \mathbf{R}_x(\alpha_i) \cdot \mathbf{R}_y(\beta_i) \quad \text{Gl. 34}$$

Im Rahmen der hier beschriebenen Arbeiten entstand ein Computer-Programm, das aus der Lage der aktiven und passiven Achsen einer Kinematik, dem Basis- und dem Endeffektorkoordinatensystem automatisch ein Modell nach der oben beschriebenen Vorgehensweise aufstellt. Dabei wird in Abhängigkeit der Lage zwischen zwei aufeinander folgenden Achsen die jeweils sinnvolle Darstellungsform gewählt.

#### 1.2.4 Modellierung allgemeiner hybrider Strukturen

Jede hybride Kinematik kann in mehrere serielle und parallele kinematische Stufen zerlegt werden (Bild 1-5). Die Freiheitsgrade der seriellen Stufen werden durch Steuergrößen definiert und als aktive Gelenkvariablen  $u$  bezeichnet, so dass der Zustand der seriellen Stufen durch die Steuerung festgelegt ist. In den parallelen Stufen gibt es neben einigen aktiven

Gelenkvariablen  $\bar{u}$ , passive Gelenkvariablen  $\bar{y}$ , die sich aus der Topologie und der Geometrie der Maschine definieren. Diese sind zu bestimmen.

Die Einteilung der hybriden Kinematik in die einzelnen Stufen und somit in einen parallelen Teil und einen seriellen Teil erlaubt es, die direkte Kinematik, d.h. die Berechnung der Zustandskoordinaten  $[\bar{x}, \bar{\psi}]$  des Endeffektors im Basiskoordinatensystem  ${}^B\mathcal{B}$  aus der Steuerung  $\bar{u} \in \mathcal{U}$ , in zwei Schritten, zugehörig zum parallelen und zum seriellen Teil der Kinematik durchzuführen. Der Schritt bzgl. des seriellen Teils zerfällt wiederum in zwei Schritte. In einen expliziten Schritt, zur Berechnung der Position des Endeffektors und einen impliziten Schritt zur Bestimmung der Orientierung des Endeffektors. Diese drei Schritte werden dem entsprechend als paralleler (impliziter) Schritt, serieller expliziter Schritt und als serieller impliziter Schritt bezeichnet.

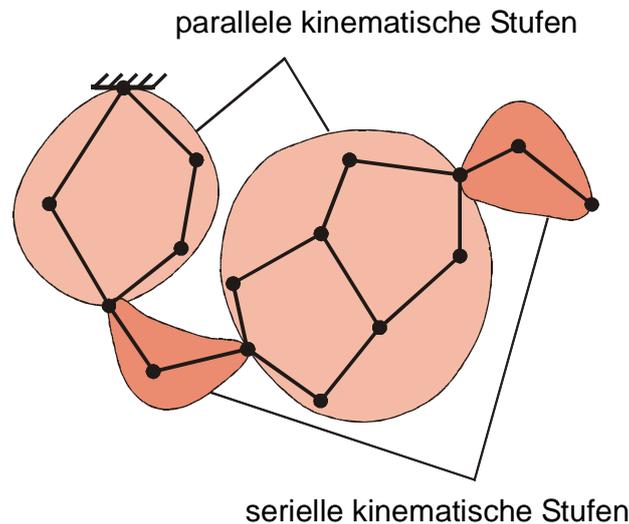


Bild 1-5: Kinematische Stufen einer hybriden Kinematik

Der Basisübergang mittels affiner Koordinatentransformation von einem körperfesten System in ein benachbartes körperfestes System erfolgt durch eine Transformationsmatrix, die vorzugsweise der DH-Konvention genügen soll. Folgt man nun einer kinematischen Schleife in der Maschine, so ergibt sich aus den hintereinander folgenden Basistransformationen (beginnend bei einem Referenzsystem durch die Schleife zu diesem System zurück) eine Matrixgleichung mit 12 Gleichungen. D.h. jede kinematische Schleife erzeugt eine 4x4 Matrixgleichung wobei die letzte Zeile bereits identisch  $[0 \ 0 \ 0 \ 1]$  ist. Dies folgt aus der Definition affiner Koordinaten. Beispiele solcher Wahl der kinematischen Schleifen zeigt Bild 1-6.

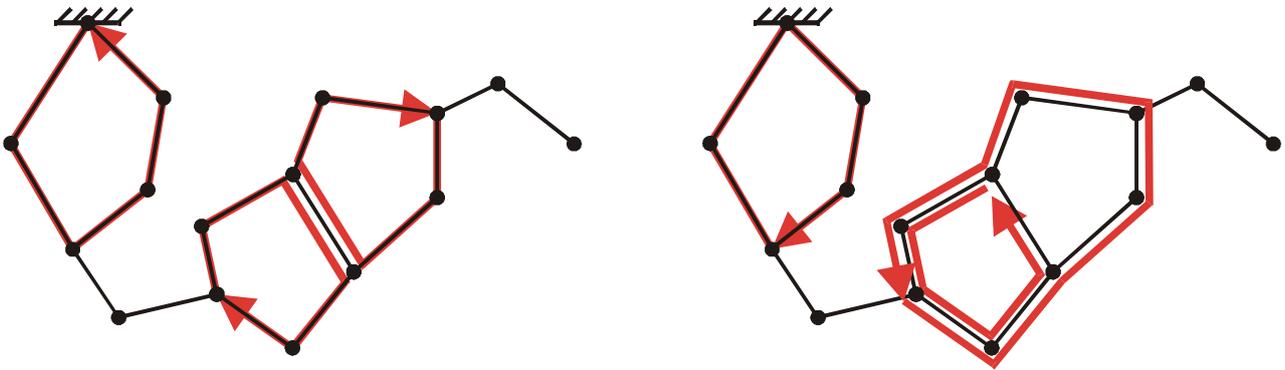


Bild 1-6: Aufteilung der parallelen Stufen in kinematische Schleifen

Es verbleiben demnach pro kinematischer Schleife 12 Gleichungen. Fast man die Gleichungen aller kinematischen Schleifen der parallelen kinematischen Stufen zusammen, führt das zu einer impliziten nichtlinearen Gleichung

$$\mathbf{0} = \mathbf{F}_1(\bar{y}, \bar{p}, \bar{u}) \quad \text{Gl. 35}$$

die überbestimmt ist und mit deren Hilfe iterativ die passiven Gelenkvariablen  $\bar{y}$  der parallelen Stufen bei gegebener Steuerung  $\bar{u}$  und angenommenen bekannten Parametern  $\bar{p}$  zu bestimmen sind (paralleler implizierter Schritt). Nach der Bestimmung der passiven Gelenkvariablen  $\bar{y}$  folgt man einer kinematischen Kette vom Fundament bis zum Endeffektor. Beispiele solcher kinematischer Ketten zeigt Bild 1-7.

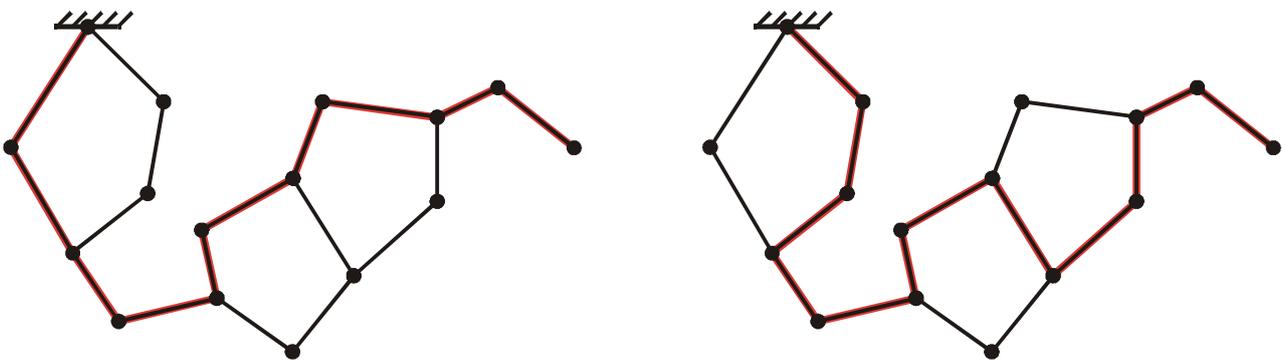


Bild 1-7: Serielle Kette

Da alle Gelenkvariablen vorgegeben (aktive Gelenkvariablen) oder nun bestimmt worden sind (passive Gelenkvariablen) ist der Zustand dieser kinematischen Kette definiert. Dies bedeutet, dass das in den Endeffektor eingeprägte körperfeste Koordinatensystem  ${}^T\mathcal{B}$  bestimmt wird durch eine Kette von Basistransformationen des Basiskoordinatensystems  ${}^B\mathcal{B}$ .

$${}^T\mathcal{B} = {}^B\mathcal{B} \mathbf{T}^{B_i}(\bar{y}, \bar{p}, \bar{u}) \mathbf{T}^{i_2}(\bar{y}, \bar{p}, \bar{u}) \cdots \mathbf{T}^{i_n}(\bar{y}, \bar{p}, \bar{u}) \quad \text{Gl. 36}$$

Das Koordinatensystem des Endeffektors ist jedoch auch durch die Zustandsvariablen  $\bar{x}$  bzgl. des Basiskoordinatensystems definiert durch

$${}^T\mathcal{B} = {}^B\mathcal{B} {}^{BT}\mathbf{T}(\bar{x}, \bar{\psi}) \quad \text{mit} \quad {}^{BT}\mathbf{T}(\bar{x}, \bar{\psi}) = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{R}(\psi_1, \psi_2, \psi_3) & \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix} \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right] \quad \text{Gl. 37}$$

Hierbei ist  ${}^{BT}\mathbf{T}(\bar{x})$  eine affine Transformationsmatrix die in einer 3x3 Rotationsmatrix  $\mathbf{R}$  implizit die Orientierung des Endeffektors und explizit den Vektor der Endeffektor-Position  $[x_1, x_2, x_3]^T$  enthält. Aus der Gleichheit der Transformationen in Gl.36 und Gl.37 sowie der Struktur von  ${}^{BT}\mathbf{T}(\bar{x})$  folgt die explizite Berechnung der Position des Endeffektors (serieller explizierter Schritt) und die implizite Berechnung der Orientierung (serieller implizierter Schritt)

$$\bar{x} = \mathbf{F}_2(\bar{y}, \bar{p}, \bar{u}) \quad \text{Gl. 38}$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{F}_3(\bar{\psi}, \bar{y}, \bar{p}, \bar{u}) \quad \text{Gl. 39}$$

### 1.2.5 Erweitertes kinematisches Modell am Beispiel von „Georg V.“

Als Beispiel für die Anwendung der oben erläuterten Vorgehensweise, wurde für der Kinetik „Georg V.“ ein detailliertes Modell erstellt, das geometrische Abweichungen in allen Bauteilen zulässt. Aus Bild 1-8 und Bild 1-9 gehen die Nummerierung und die topologische Beziehung der Körper sowie die Basisübergänge zwischen den einzelnen Basissystemen hervor. In das Gestell werden fünf verschiedene Basissysteme eingepägt. Zum einen das Basiskoordinatensystem  ${}^0\mathcal{B} = {}^0_0\mathcal{B}$ , die drei Basissysteme auf den Seitenführungen  ${}^1_1\mathcal{B}$ ,  ${}^2_2\mathcal{B}$  und  ${}^3_3\mathcal{B}$  sowie das zu Beginn des Mittelzweiges  ${}^4_4\mathcal{B}$ . Der Übergang vom Basiskoordinatensystem kann jeweils mittels einer DH-Matrix beschrieben werden:

$${}^0_k\mathcal{B} = {}^0_0\mathcal{B} {}^0_{0k}\mathbf{D}, \quad k = 1, \dots, 4 \quad \text{Gl. 40}$$

Da die Zentralstrebe (18) vier Vorgänger und einen Nachfolger, also fünf Gelenkachsen hat, werden in die Zentralstrebe vier körperfeste Basissysteme eingepägt. Der Basisübergang von einem Körper zur Zentralstrebe erfolgt mittels DH-Matrizen  ${}^{i,18}\mathbf{D}$ ,  $i = 5, 10, 15$  und der Übergang von den einzelnen körperfesten Basissystemen  ${}^{18}_k\mathcal{B}$ ,  $k = 1, 2, 3$  zum Basissystem  ${}^{18}_0\mathcal{B}$  mittels Rotation um und Translation entlang der ausgezeichneten Achse  ${}^{18}_{k,0}\mathbf{S}$ ,  $k = 1, 2, 3$ .

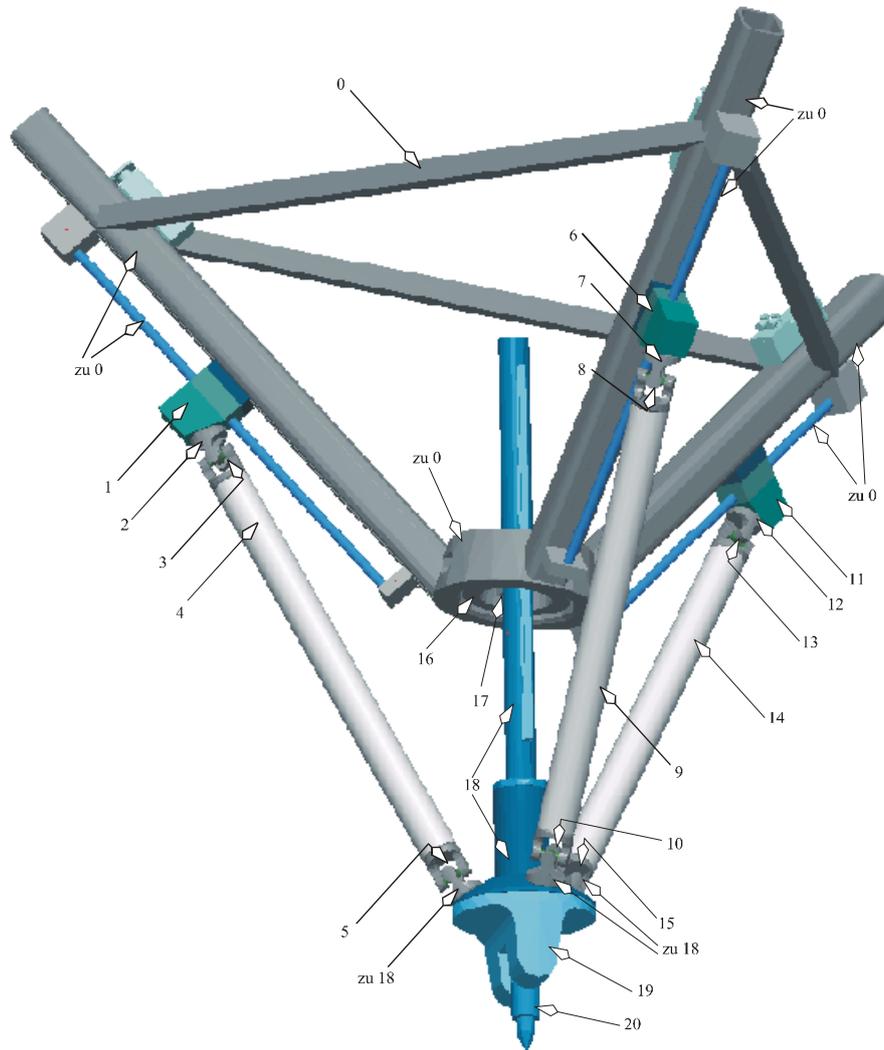


Bild 1-8: Topologie des erweiterten Modells von „Georg V.“

Für den parallelen (impliziten) Teil der Maschine gilt:

$$\begin{aligned}
 {}^0_{0,4} \mathbf{D}^{0,16} \mathbf{D}^{16,17} \mathbf{D}^{17,18} \mathbf{D} &= {}^0_{0,1} \mathbf{D}^{0,1} \mathbf{D}^{1,2} \mathbf{D}^{2,3} \mathbf{D}^{3,4} \mathbf{D}^{4,5} \mathbf{D}^{5,18} \mathbf{D}^{18} \mathbf{S}_1, \\
 {}^0_{0,4} \mathbf{D}^{0,16} \mathbf{D}^{16,17} \mathbf{D}^{17,18} \mathbf{D} &= {}^0_{0,2} \mathbf{D}^{0,6} \mathbf{D}^{6,7} \mathbf{D}^{7,8} \mathbf{D}^{8,9} \mathbf{D}^{9,10} \mathbf{D}^{10,18} \mathbf{D}^{18} \mathbf{S}_2, \\
 {}^0_{0,4} \mathbf{D}^{0,16} \mathbf{D}^{16,17} \mathbf{D}^{17,18} \mathbf{D} &= {}^0_{0,3} \mathbf{D}^{0,11} \mathbf{D}^{11,12} \mathbf{D}^{12,13} \mathbf{D}^{13,14} \mathbf{D}^{14,15} \mathbf{D}^{15,18} \mathbf{D}^{18} \mathbf{S}_3.
 \end{aligned} \tag{Gl. 41}$$

Die letztendlich gesuchte Weltkoordinatendarstellung  $[\bar{x}, \bar{y}]$  erhält man mit den nun bestimmten passiven Gelenkvariablen  $\bar{y}$  durch den Übergang vom Basiskoordinatensystem  ${}^0\mathcal{B}$  zum körperfesten Koordinatensystem des Endeffektors  ${}^{20}\mathcal{B}$

$${}^{20}\mathcal{B} = {}^0\mathcal{B} {}^{0,20} \mathbf{T}(\bar{x}) = {}^0\mathcal{B} {}^0_{0,4} \mathbf{D}^{0,16} \mathbf{D}^{16,17} \mathbf{D}^{17,18} \mathbf{D}^{18,19} \mathbf{D}^{19,20} \mathbf{D} \tag{Gl. 42}$$

Dabei entspricht  ${}^{0,20} \mathbf{T}(\bar{x})$  der Transformationsmatrix  ${}^{BT} \mathbf{T}(\bar{x})$  aus Gl.37.

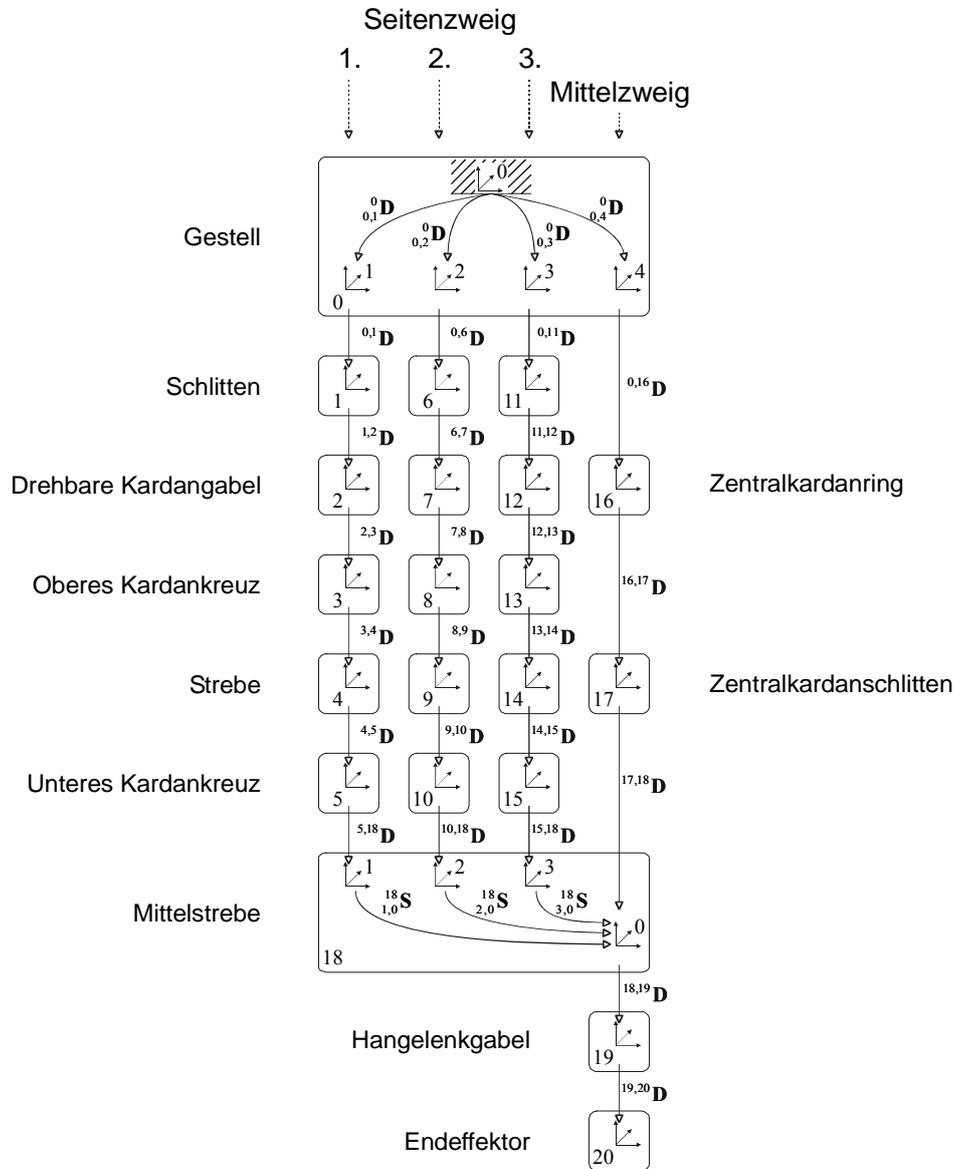


Bild 1-9: Graph des erweiterten Modells von „Georg V.“

Mit dem Operator  $\text{vec} : \mathbb{R}^{m,n} \rightarrow \mathbb{R}^{mn}$

$$\text{vec}(\mathbf{A}) = [\mathbf{A}_{11} \ \cdots \ \mathbf{A}_{m1} \ | \ \cdots \ | \ \mathbf{A}_{1n} \ \cdots \ \mathbf{A}_{mn}]^T \in \mathbb{R}^{mn}, \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n} \quad \text{Gl. 43}$$

hat das letztendlich zu lösende nichtlineare Gleichungssystem die folgende Form:

$$0 = \mathbf{F}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p}, \bar{u}) = \left[ \begin{array}{c} \text{vec} \left( {}^0_{0,4} \mathbf{D}^{0,16} \mathbf{D}^{16,17} \mathbf{D}^{17,18} \mathbf{D} - {}^0_{0,1} \mathbf{D}^{0,1} \mathbf{D}^{1,2} \mathbf{D}^{2,3} \mathbf{D}^{3,4} \mathbf{D}^{4,5} \mathbf{D}^{5,18} \mathbf{D}_{1,0}^{18} \mathbf{S} \right) \\ \text{vec} \left( {}^0_{0,4} \mathbf{D}^{0,16} \mathbf{D}^{16,17} \mathbf{D}^{17,18} \mathbf{D} - {}^0_{0,2} \mathbf{D}^{0,6} \mathbf{D}^{6,7} \mathbf{D}^{7,8} \mathbf{D}^{8,9} \mathbf{D}^{9,10} \mathbf{D}^{10,18} \mathbf{D}_{2,0}^{18} \mathbf{S} \right) \\ \text{vec} \left( {}^0_{0,4} \mathbf{D}^{0,16} \mathbf{D}^{16,17} \mathbf{D}^{17,18} \mathbf{D} - {}^0_{0,3} \mathbf{D}^{0,11} \mathbf{D}^{11,12} \mathbf{D}^{12,13} \mathbf{D}^{13,14} \mathbf{D}^{14,15} \mathbf{D}^{15,18} \mathbf{D}_{3,0}^{18} \mathbf{S} \right) \\ \hline \bar{x} - \left[ {}^0_{0,4} \mathbf{D}^{0,16} \mathbf{D}^{16,17} \mathbf{D}^{17,18} \mathbf{D}^{18,19} \mathbf{D}^{19,20} \mathbf{D} \right]_{1:3,4} \\ \hline \text{vec} \left( \mathbf{R}(\psi_1, \psi_2, \psi_3) - \left[ {}^0_{0,4} \mathbf{D}^{0,16} \mathbf{D}^{16,17} \mathbf{D}^{17,18} \mathbf{D}^{18,19} \mathbf{D}^{19,20} \mathbf{D} \right]_{1:3,1:3} \right) \end{array} \right] \quad \text{Gl. 44}$$

mit  $[\bar{x}, \bar{\psi}] = [x_1, x_2, x_3, \psi_1, \psi_2, \psi_3]^T \in \mathbb{R}^6$ ,  $\bar{y} \in \mathbb{R}^{18}$ ,  $\bar{p} \in \mathbb{R}^{91}$ ,  $\bar{u} = [u_1, u_2, u_3, u_4, u_5]^T \in \mathbb{R}^5$

Hierbei bezeichnet  $[\bar{x}, \bar{\psi}]$  die Pose der Maschine im Weltkoordinatensystem,  $\bar{y}$  passive Gelenkvariablen,  $\bar{p}$  die zu identifizierenden Parameter der Maschine und  $\bar{u}$  die Position der Maschinenachsen.

### 1.3 Das Identifikationsproblem

Wie beschrieben lässt sich die kinematische Struktur hybrider Parallelkinematiken durch die nichtlineare Transformationsgleichung  $\mathbf{0} = \mathbf{F}(\bar{x}, \bar{\psi}, \bar{y}, \bar{p}, \bar{u})$  oder bei Ausnutzung der Struktur bzgl. paralleler und serieller Regionen mittels der folgenden Ausdrücke beschreiben:

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \mathbf{F}_1(\bar{y}, \bar{p}, \bar{u}), \\ \bar{x} &= \mathbf{F}_2(\bar{y}, \bar{p}, \bar{u}), \\ \mathbf{0} &= \mathbf{F}_3(\bar{\psi}, \bar{y}, \bar{p}, \bar{u}). \end{aligned} \quad \text{Gl. 45}$$

Hinsichtlich des Identifikationsprozesses sind ein Satz von Steuerungen  $u_i, i=1, \dots, m_u$ , und die realen Posen  $\tilde{x}_i, i=1, \dots, m_u$  des Endeffektors, die sich an der Maschine zu jeder Steuerung  $u_i$  bzgl. gestörter aber realer Parameter  $\tilde{p} = \bar{p} + \Delta\bar{p}$  einstellen, vorgegeben, bzw. aus Messungen bekannt. Mit Tilde werden im weiteren Daten bezeichnet, die real existieren, gemessen oder identifiziert werden können und von der Nominalgeometrie abweichen. Des weiteren sind die hinsichtlich des ungestörten Modells bestimmten, ungestörten Positionen  $\bar{x}_i, i=1, \dots, m_u$  des Endeffektors zu jeder Steuerung  $u_i$  mit ungestörten, nominalen Parametern  $\bar{p}$  berechenbar. Dabei bestimmen sich die reale Pose des Endeffektors  $\tilde{x}$  und die realen passiven Gelenkvariablen  $\tilde{y}$  aus der nichtlinearen Transformationsgleichung hinsichtlich der zu bestimmenden gestörten Parameter  $\tilde{p}$ .

$$\tilde{s} = \bar{s} + \Delta\bar{s}, \quad \tilde{x} = \bar{x} + \Delta\bar{x}, \quad \tilde{\psi} = \bar{\psi} + \Delta\bar{\psi}, \quad \tilde{y} = \bar{y} + \Delta\bar{y}, \quad \tilde{p} = \bar{p} + \Delta\bar{p} \quad \text{Gl. 46}$$

Demnach ist die reale Position des Endeffektors gleich der berechneten Pose mit gestörten Parametern

$$\mathbf{0} = \mathbf{F}(\tilde{x}, \tilde{\psi}, \tilde{y}, \tilde{p}, \tilde{u}) \Leftrightarrow \mathbf{0} = \mathbf{F}(\bar{x} + \Delta\bar{x}, \bar{\psi} + \Delta\bar{\psi}, \bar{y} + \Delta\bar{y}, \bar{p} + \Delta\bar{p}, \bar{u}) \quad \text{Gl. 47}$$

Die Verwendung eines Einfreiheitsgrad-Messgerätes (z.B. Double Ball Bar, DBB) erlaubt es nicht ohne weiteres, die gesamte Pose des Endeffektors zu vermessen. Deswegen beschränken sich die folgenden Beschreibungen auf die Messung nur eines Freiheitsgrades der Pose. Nur der Abstand  $\tilde{d}_i$  zwischen der Position des Endeffektors  $\tilde{x}_i$  und dem Fußpunkt des Messgerätes  $\bar{z}$  kann gemessen werden;  $\tilde{d}_i = \|\bar{z} - \tilde{x}_i\|_2$  bzw.  $d_i(\tilde{p}, \tilde{u}_i) = \|\bar{z} - \bar{x}(\tilde{p}, \tilde{u}_i)\|_2$ .

Ziel des Kalibrierungsprozesses ist die Identifikation der Störungen  $\Delta\bar{p}$  der Parameter  $\bar{p}$  so, dass der reale, gemessene Abstand zwischen Messfußpunkt  $\bar{z}$  und der Endeffektorposition  $\tilde{x}_i$  mit dem berechneten Abstand hinsichtlich der gestörten Parameter  $\tilde{p} = \bar{p} + \Delta\bar{p}$  für alle Messungen  $i = 1, \dots, m_u$  übereinstimmt:  $\tilde{d}_i = d(\bar{p} + \Delta\bar{p}, \tilde{u}_i)$ .

Daraus folgt ein nichtlineares Gleichungssystem zur Bestimmung der Parameterstörungen in der Form:

$$\tilde{d}_i = \|\bar{z} - \bar{x}(\bar{p} + \Delta\bar{p}, \tilde{u}_i)\|_2 \quad \forall i = 1, \dots, m_u \quad \text{Gl. 48}$$

Aus Gründen der Einfachheit wird die Gleichung in der Form

$$\tilde{d}_i^2 = \|\bar{z} - \bar{x}(\bar{p} + \Delta\bar{p}, \tilde{u}_i)\|_2^2 \quad \forall i = 1, \dots, m_u \quad \text{Gl. 49}$$

verwendet. Die in diesem Gleichungssystem benötigte berechnete Position  $\bar{x}(\bar{p} + \Delta\bar{p}, \tilde{u}_i)$  ist jedoch nicht explizit berechenbar, sondern nur durch die implizite Transformationsgleichung  $\mathbf{0} = \mathbf{F}(\bar{x}, \bar{\psi}, \bar{y}, \bar{p}, \bar{u})$  bestimmbar. Durch Erweiterung des Systems (Gl.49) erhält man

$$\begin{bmatrix} 0 = \tilde{d}_i^2 - \|\bar{z} - \bar{x}_i\|_2^2 \\ 0 = \mathbf{F}(\bar{x}_i, \bar{\psi}_i, \bar{y}_i, \bar{p} + \Delta\bar{p}, \tilde{u}_i) \end{bmatrix} \quad \forall i = 1, \dots, m_u \quad \text{Gl. 50}$$

Es ergibt sich das zu lösende nichtlineare Parameteridentifikationsproblem in der Form

$$\mathbf{0} = \mathbf{G}(\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\Psi}, \tilde{\mathbf{Y}}, \tilde{\mathbf{p}} + \Delta\tilde{\mathbf{p}}, \mathbf{U}, \tilde{\mathbf{z}}, \tilde{\mathbf{D}}) = \begin{bmatrix} \frac{\tilde{d}_1^2 - \|\tilde{\mathbf{z}} - \tilde{\mathbf{x}}_1\|_2^2}{\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\psi}_1, \tilde{\mathbf{y}}_1, \tilde{\mathbf{p}} + \Delta\tilde{\mathbf{p}}, \tilde{\mathbf{u}}_1)} \\ \frac{\tilde{d}_2^2 - \|\tilde{\mathbf{z}} - \tilde{\mathbf{x}}_2\|_2^2}{\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{x}}_2, \tilde{\psi}_2, \tilde{\mathbf{y}}_2, \tilde{\mathbf{p}} + \Delta\tilde{\mathbf{p}}, \tilde{\mathbf{u}}_2)} \\ \vdots \\ \frac{\tilde{d}_{m_u}^2 - \|\tilde{\mathbf{z}} - \tilde{\mathbf{x}}_{m_u}\|_2^2}{\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{x}}_{m_u}, \tilde{\psi}_{m_u}, \tilde{\mathbf{y}}_{m_u}, \tilde{\mathbf{p}} + \Delta\tilde{\mathbf{p}}, \tilde{\mathbf{u}}_{m_u})} \end{bmatrix} \quad \text{Gl. 51}$$

$$\tilde{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \vdots \\ \tilde{x}_{m_u} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\Psi} = \begin{bmatrix} \tilde{\psi}_1 \\ \tilde{\psi}_2 \\ \vdots \\ \tilde{\psi}_{m_u} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \\ \vdots \\ \tilde{y}_{m_u} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{m_u} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} \tilde{d}_1 \\ \tilde{d}_2 \\ \vdots \\ \tilde{d}_{m_u} \end{bmatrix}. \quad \text{Gl. 52}$$

Ausgehend von dieser Identifikationsgleichung können nun bei vorgegebenen  $\tilde{\mathbf{z}}$ ,  $\mathbf{U}$  und  $\tilde{\mathbf{D}}$  die gestörten Parameter  $\tilde{\mathbf{p}} = \tilde{\mathbf{p}} + \Delta\tilde{\mathbf{p}}$  identifiziert werden. Weiterhin werden  $\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\Psi}, \tilde{\mathbf{Y}}$  und somit  $\tilde{x}_i, \tilde{\psi}_i$  und  $\tilde{y}_i$  berechnet.

Bei Ausnutzung der Struktur hinsichtlich serieller und paralleler Teile kann das System

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \mathbf{F}_1(\tilde{\mathbf{y}}, \tilde{\mathbf{p}}, \tilde{\mathbf{u}}) \\ \tilde{\mathbf{x}} &= \mathbf{F}_2(\tilde{\mathbf{y}}, \tilde{\mathbf{p}}, \tilde{\mathbf{u}}), \\ \mathbf{0} &= \mathbf{F}_3(\tilde{\psi}, \tilde{\mathbf{y}}, \tilde{\mathbf{p}}, \tilde{\mathbf{u}}). \end{aligned} \quad \text{Gl. 53}$$

als nichtlineare Transformation genutzt werden. Hiervon ausgehend nimmt die Identifikationsgleichung (Gl.51) die folgende Form an:

$$0 = \mathbf{G}(\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\Psi}, \tilde{\mathbf{Y}}, \bar{\mathbf{p}} + \Delta\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{U}, \bar{\mathbf{z}}, \tilde{\mathbf{D}}) = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{d}}_1^2 - \|\bar{\mathbf{z}} - \tilde{\mathbf{x}}_1\|_2^2 \\ F_1(\tilde{\mathbf{y}}_1, \bar{\mathbf{p}} + \Delta\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{u}}_1) \\ \tilde{\mathbf{x}}_1 - F_2(\tilde{\mathbf{y}}_1, \bar{\mathbf{p}} + \Delta\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{u}}_1) \\ F_3(\tilde{\psi}_1, \tilde{\mathbf{y}}_1, \bar{\mathbf{p}} + \Delta\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{u}}_1) \\ \hline \tilde{\mathbf{d}}_2^2 - \|\bar{\mathbf{z}} - \tilde{\mathbf{x}}_2\|_2^2 \\ F_1(\tilde{\mathbf{y}}_2, \bar{\mathbf{p}} + \Delta\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{u}}_2) \\ \tilde{\mathbf{x}}_2 - F_2(\tilde{\mathbf{y}}_2, \bar{\mathbf{p}} + \Delta\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{u}}_2) \\ F_3(\tilde{\psi}_2, \tilde{\mathbf{y}}_2, \bar{\mathbf{p}} + \Delta\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{u}}_2) \\ \hline \vdots \\ \hline \tilde{\mathbf{d}}_{m_u}^2 - \|\bar{\mathbf{z}} - \tilde{\mathbf{x}}_{m_u}\|_2^2 \\ F_1(\tilde{\mathbf{y}}_{m_u}, \bar{\mathbf{p}} + \Delta\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{u}}_{m_u}) \\ \tilde{\mathbf{x}}_{m_u} - F_2(\tilde{\mathbf{y}}_{m_u}, \bar{\mathbf{p}} + \Delta\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{u}}_{m_u}) \\ F_3(\tilde{\psi}_{m_u}, \tilde{\mathbf{y}}_{m_u}, \bar{\mathbf{p}} + \Delta\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{u}}_{m_u}) \end{bmatrix} \quad \text{Gl. 54}$$

Da Interesse in erster Linie an der Bestimmung der gestörten Parameter  $\tilde{\mathbf{p}} = \bar{\mathbf{p}} + \Delta\bar{\mathbf{p}}$  besteht, ist es nicht nötig die Orientierungen  $\tilde{\psi}_i$  des Endeffektors zu bestimmen. Somit kann auf die dritte Gleichung der nichtlinearen Transformation verzichtet werden. Des weiteren bestimmen sich die Positionen  $\tilde{\mathbf{x}}_i$  explizit aus der zweiten Gleichung der Transformation. Die Identifikationsgleichung (Gl.51) besitzt somit die folgende strukturausnutzende Form

$$0 = \mathbf{G}(\tilde{\mathbf{Y}}, \bar{\mathbf{p}} + \Delta\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{U}, \bar{\mathbf{z}}, \tilde{\mathbf{D}}) = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{d}}_1^2 - \|\bar{\mathbf{z}} - F_2(\tilde{\mathbf{y}}_1, \bar{\mathbf{p}} + \Delta\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{u}}_1)\|_2^2 \\ F_1(\tilde{\mathbf{y}}_1, \bar{\mathbf{p}} + \Delta\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{u}}_1) \\ \hline \tilde{\mathbf{d}}_2^2 - \|\bar{\mathbf{z}} - F_2(\tilde{\mathbf{y}}_2, \bar{\mathbf{p}} + \Delta\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{u}}_2)\|_2^2 \\ F_1(\tilde{\mathbf{y}}_2, \bar{\mathbf{p}} + \Delta\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{u}}_2) \\ \hline \vdots \\ \hline \tilde{\mathbf{d}}_{m_u}^2 - \|\bar{\mathbf{z}} - F_2(\tilde{\mathbf{y}}_{m_u}, \bar{\mathbf{p}} + \Delta\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{u}}_{m_u})\|_2^2 \\ F_1(\tilde{\mathbf{y}}_{m_u}, \bar{\mathbf{p}} + \Delta\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{u}}_{m_u}) \end{bmatrix} \quad \text{Gl. 55}$$

Bei gegebenen  $\bar{\mathbf{z}}$ ,  $\mathbf{U}$  und  $\tilde{\mathbf{D}}$  werden die gestörten Parameter  $\tilde{\mathbf{p}} = \bar{\mathbf{p}} + \Delta\bar{\mathbf{p}}$  berechenbar. Weiterhin werden zusätzlich nur die passiven Gelenkvariablen  $\tilde{\mathbf{y}}_i$  berechnet.

Das Lösen der Identifikationsgleichung erfolgt mit dem Gauß-Newton-Verfahren. Ausgehend von den nominalen Daten als Startnäherung, d.h.

$$\tilde{\mathbf{X}}^0 = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1^0 \\ \dots \\ \tilde{x}_{m_u}^0 \end{bmatrix}, \tilde{\Psi}^0 = \begin{bmatrix} \tilde{\psi}_1^0 \\ \dots \\ \tilde{\psi}_{m_u}^0 \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{Y}}^0 = \begin{bmatrix} \tilde{y}_1^0 \\ \dots \\ \tilde{y}_{m_u}^0 \end{bmatrix}, \Delta \tilde{\mathbf{p}}^0 = 0 \quad \text{Gl. 56}$$

die durch die ungestörten, nominalen Parameter  $\bar{p}$  zu jeder Steuerung  $\bar{u}_i$  mittels der Transformationsgleichung

$$0 = \mathbf{F}(\bar{x}_i, \bar{\psi}_i, \bar{y}_i, \bar{p}, \bar{u}_i) \quad \forall i = 1, \dots, m_u \quad \text{Gl. 57}$$

bestimmt wird, wird eine Folge mittels dem Gauß-Newton-Verfahren nach der folgenden Vorschrift bestimmt:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{X}} \\ \tilde{\Psi} \\ \tilde{\mathbf{Y}} \\ \tilde{p} \end{bmatrix}^{k+1} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{X}} \\ \tilde{\Psi} \\ \tilde{\mathbf{Y}} \\ \tilde{p} \end{bmatrix}^k - \left[ \frac{\partial \mathbf{G}(\tilde{\mathbf{X}}^k, \tilde{\Psi}^k, \tilde{\mathbf{Y}}^k, \tilde{p}^k, \mathbf{U}, \bar{z}, \tilde{\mathbf{D}})}{\partial [\tilde{\mathbf{X}}^T, \tilde{\Psi}^T, \tilde{\mathbf{Y}}^T, \tilde{p}^T]^T} \right]^+ \mathbf{G}(\tilde{\mathbf{X}}^k, \tilde{\Psi}^k, \tilde{\mathbf{Y}}^k, \tilde{p}^k, \mathbf{U}, \bar{z}, \tilde{\mathbf{D}}) \quad \text{Gl. 58}$$

Mit  $[\ ]^+$  wird hier die Pseudo-Inverse bezeichnet. Die Kondition des Identifikationsproblems und somit das Lösungs- und Konvergenzverhalten ist abhängig von den Steuerungen  $\bar{u}_i, i = 1, \dots, m_u$ , die die Messpositionen festlegen und dem Messfußpunkt  $\bar{z}$ .

## 1.4 Optimierung der Messstrategie

Wie bereits erläutert, kann mit einem Ein-Freiheitsgrad-Messinstrument die gesamte Pose des Endeffektors nicht ohne weiteres gemessen werden. Während einer Messung wird lediglich ein Abstand  $\tilde{d}$  zwischen der Position  $\tilde{x}$  des Endeffektors und dem Messfußpunkt  $\bar{z}$  gemessen. Um die volle Pose messen zu können, müsste das Messinstrument umgesetzt, das bedeutet ein anderer Messfußpunkt im Raum gewählt werden. Da dieses Umsetzen im Verhältnis zum Anfahren verschiedener Messpositionen sehr aufwendig ist, wurde eine Optimierung hinsichtlich der

- Anzahl  $m_u$  der Messpositionen,
- der Wahl der Messpositionen  $\bar{x}_i \in \square^3$ ,  $i = 1, \dots, m_u$  selbst,
- der Anzahl  $m_z$  der Messfußpunkte und
- der Wahl der Messfußpunkte  $\bar{z}_i \in \square^3$ ,  $i = 1, \dots, m_z$  untersucht.

In erster Linie wurde ein Optimierungskriterium bestimmt. Es wurde insbesondere Wert auf die Minimierung der Anzahl der Messfußpunkte gelegt. Die folgenden Untersuchungen

sollen sich auf eine reine Optimierung der Wahl der Messpositionen und der Wahl eines Messfußpunktes stützen. Dabei sei die Anzahl der Messpositionen vorgegeben und nur ein Messfußpunkt zu verwenden.

### 1.4.1 Optimale Kondition der Jacobi-Matrix

Hinsichtlich der Lösbarkeit der Identifikationsgleichungen mittels des Gauß-Newton-Verfahrens ist es notwendig, dass die Jacobi-Matrix von  $\mathbf{G}(\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\Psi}, \tilde{\mathbf{Y}}, \tilde{p}, \mathbf{U}, \bar{z}, \tilde{\mathbf{D}})$  bezüglich  $[\tilde{\mathbf{X}}^T, \tilde{\Psi}^T, \tilde{\mathbf{Y}}^T, \tilde{p}^T]^T$  in einer gewissen Umgebung der Lösung vollen Rang besitzt.

Des weiteren ist es in gewisser Weise optimal, dass die Konditionszahl dieser Jacobi-Matrix ebenfalls in einer gewissen Umgebung der Lösung minimal ist. Da die Lösung nicht bekannt ist, jedoch die ungestörten, nominalen Parameter und die daraus resultierende Startnäherung bereits eine gute Approximation darstellt, sollte die Konditionszahl

$$\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial [\tilde{\mathbf{X}}^T, \tilde{\Psi}^T, \tilde{\mathbf{Y}}^T, \tilde{p}^T]^T}(\tilde{\mathbf{X}}^0, \tilde{\Psi}^0, \tilde{\mathbf{Y}}^0, \tilde{p}^0, \mathbf{U}, \bar{z}, \tilde{\mathbf{D}}) \quad \text{Gl. 59}$$

in Abhängigkeit der Steuerungen  $\bar{u}_i, i=1, \dots, m_u$  und des Messfußpunktes  $\bar{z}$  minimal sein, wobei  $[\tilde{\mathbf{X}}^{0T}, \tilde{\Psi}^{0T}, \tilde{\mathbf{Y}}^{0T}, \tilde{p}^T]^T$  durch

$$0 = \mathbf{F}(\bar{x}_i, \bar{\psi}_i, \bar{y}_i, \bar{p}, \bar{u}_i) \quad \forall i=1, \dots, m_u \quad \text{Gl. 60}$$

bestimmt sind.

Aus der Identifikationsgleichung (Gl. 51) ergibt sich die Jacobi-Matrix mit

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_x(\dots, \bar{u}_i) &:= \mathbf{F}_x(\bar{x}_i^0, \bar{\psi}_i^0, \bar{y}_i^0, \bar{p}, \bar{u}_i) \\ \mathbf{F}_\psi(\dots, \bar{u}_i) &:= \mathbf{F}_\psi(\bar{x}_i^0, \bar{\psi}_i^0, \bar{y}_i^0, \bar{p}, \bar{u}_i) \\ \mathbf{F}_y(\dots, \bar{u}_i) &:= \mathbf{F}_y(\bar{x}_i^0, \bar{\psi}_i^0, \bar{y}_i^0, \bar{p}, \bar{u}_i) \\ \mathbf{F}_p(\dots, \bar{u}_i) &:= \mathbf{F}_p(\bar{x}_i^0, \bar{\psi}_i^0, \bar{y}_i^0, \bar{p}, \bar{u}_i) \end{aligned} \quad \text{Gl. 61}$$

und  $\frac{\partial}{\partial \bar{x}} \|\bar{z} - \bar{x}\|_2^2 = 2(\bar{z} - \bar{x})^T$  in der folgenden Form:

$$\mathbf{J}(\mathbf{U}, \bar{\mathbf{z}}) = \frac{\partial}{\partial \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{Z}}^{0^T} & \bar{\mathbf{p}}^T \end{bmatrix}^T} \mathbf{G}(\tilde{\mathbf{Z}}^{0^T}, \bar{\mathbf{p}}, \mathbf{U}, \bar{\mathbf{z}}, \tilde{\mathbf{D}}) = \frac{\partial}{\partial \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{Z}}^{0^T} & \bar{\mathbf{p}}^T \end{bmatrix}^T} \begin{bmatrix} -\|\bar{\mathbf{z}} - \bar{\mathbf{x}}_1^0\|_2^2 \\ \mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}}_1^0, \bar{\psi}_1^0, \bar{y}_1^0, \bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{u}}_1) \\ \hline -\|\bar{\mathbf{z}} - \bar{\mathbf{x}}_2^0\|_2^2 \\ \mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}}_2^0, \bar{\psi}_2^0, \bar{y}_2^0, \bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{u}}_2) \\ \hline \vdots \\ \hline -\|\bar{\mathbf{z}} - \bar{\mathbf{x}}_{m_u}^0\|_2^2 \\ \mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}}_{m_u}^0, \bar{\psi}_{m_u}^0, \bar{y}_{m_u}^0, \bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{u}}_{m_u}) \end{bmatrix} \quad \text{Gl. 62}$$

$$\tilde{\mathbf{Z}}^{0^T} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{X}}^{0^T} & \tilde{\Psi}^{0^T} & \tilde{\mathbf{Y}}^{0^T} \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{U}, \bar{\mathbf{z}}) = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1(\bar{\mathbf{u}}_1, \bar{\mathbf{z}}) & & & \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_{,p}(\dots, \bar{\mathbf{u}}_1) \end{bmatrix} \\ & \mathbf{J}_2(\bar{\mathbf{u}}_2, \bar{\mathbf{z}}) & & \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_{,p}(\dots, \bar{\mathbf{u}}_2) \end{bmatrix} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \mathbf{J}_{m_u}(\bar{\mathbf{u}}_{m_u}, \bar{\mathbf{z}}) \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_{,p}(\dots, \bar{\mathbf{u}}_{m_u}) \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad \text{Gl. 63}$$

$\in \square^{m_u(n_F+1), n_p+m_u(n_x+n_\psi+n_y)}$

mit

$$\mathbf{J}_i(\bar{\mathbf{u}}_i, \bar{\mathbf{z}}) = \begin{bmatrix} -2(\bar{\mathbf{z}} - \bar{\mathbf{x}}_i^0)^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_{,x_i}(\dots, \bar{\mathbf{u}}_i) & \mathbf{F}_{,\psi_i}(\dots, \bar{\mathbf{u}}_i) & \mathbf{F}_{,y_i}(\dots, \bar{\mathbf{u}}_i) \end{bmatrix} \in \square^{n_F+1, n_x+n_\psi+n_y} \quad \text{Gl. 64}$$

Im Falle von Ausnutzung der Struktur bzgl. des seriellen und parallelen Teils folgt der Identifikationsgleichung die Jacobi-Matrix mit

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{p}}} \left\| \bar{\mathbf{z}} - \mathbf{F}_2(\bar{y}_i^0, \bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{u}}_i) \right\|_2^2 = 2 \left( \bar{\mathbf{z}} - \mathbf{F}_2(\bar{y}_i^0, \bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{u}}_i) \right)^T \mathbf{F}_{2,\bar{p}}(\bar{y}_i^0, \bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{u}}_i) \quad \text{Gl. 65}$$

in der folgenden Form:

$$\mathbf{J}(\mathbf{U}, \bar{\mathbf{z}}) = \frac{\partial}{\partial [\mathbf{Y}^T \quad \bar{\mathbf{p}}^T]^T} \mathbf{G}(\tilde{\mathbf{Y}}^0, \bar{\mathbf{p}}, \mathbf{U}, \bar{\mathbf{z}}, \tilde{\mathbf{D}}) = \frac{\partial}{\partial [\mathbf{Y}^T \quad \bar{\mathbf{p}}^T]^T} \begin{bmatrix} -\|\bar{\mathbf{z}} - \mathbf{F}_2(\bar{\mathbf{y}}_1, \bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{u}}_1)\|_2^2 \\ \mathbf{F}_1(\bar{\mathbf{y}}_1, \bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{u}}_1) \\ -\|\bar{\mathbf{z}} - \mathbf{F}_2(\bar{\mathbf{y}}_2, \bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{u}}_2)\|_2^2 \\ \mathbf{F}_1(\bar{\mathbf{y}}_2, \bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{u}}_2) \\ \vdots \\ -\|\bar{\mathbf{z}} - \mathbf{F}_2(\bar{\mathbf{y}}_{m_u}, \bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{u}}_{m_u})\|_2^2 \\ \mathbf{F}_1(\bar{\mathbf{y}}_{m_u}, \bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{u}}_{m_u}) \end{bmatrix} \quad \text{Gl. 66}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1(\bar{\mathbf{u}}_1, \bar{\mathbf{z}}) & \begin{bmatrix} -2(\bar{\mathbf{z}} - \mathbf{F}_2(\bar{\mathbf{y}}_1, \bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{u}}_1))\mathbf{F}_{2,p}(\bar{\mathbf{y}}_1, \bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{u}}_1) \\ \mathbf{F}_{1,p}(\bar{\mathbf{y}}_1, \bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{u}}_1) \end{bmatrix} \\ \mathbf{J}_2(\bar{\mathbf{u}}_2, \bar{\mathbf{z}}) & \begin{bmatrix} -2(\bar{\mathbf{z}} - \mathbf{F}_2(\bar{\mathbf{y}}_2, \bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{u}}_2))\mathbf{F}_{2,p}(\bar{\mathbf{y}}_2, \bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{u}}_2) \\ \mathbf{F}_{1,p}(\bar{\mathbf{y}}_2, \bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{u}}_2) \end{bmatrix} \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{J}_{m_u}(\bar{\mathbf{u}}_{m_u}, \bar{\mathbf{z}}) & \begin{bmatrix} -2(\bar{\mathbf{z}} - \mathbf{F}_2(\bar{\mathbf{y}}_{m_u}, \bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{u}}_{m_u}))\mathbf{F}_{2,p}(\bar{\mathbf{y}}_{m_u}, \bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{u}}_{m_u}) \\ \mathbf{F}_{1,p}(\bar{\mathbf{y}}_{m_u}, \bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{u}}_{m_u}) \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad \text{Gl. 67}$$

mit

$$\mathbf{J}_i(\bar{\mathbf{u}}_i, \bar{\mathbf{z}}) := \frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{y}}_i} \begin{bmatrix} -\|\bar{\mathbf{z}} - \mathbf{F}_2(\bar{\mathbf{y}}_i, \bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{u}}_i)\|_2^2 \\ \mathbf{F}_1(\bar{\mathbf{y}}_i, \bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{u}}_i) \end{bmatrix} \quad \text{Gl. 68}$$

$$= \begin{bmatrix} -2(\bar{\mathbf{z}} - \mathbf{F}_2(\bar{\mathbf{y}}_i, \bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{u}}_i))\mathbf{F}_{2,y}(\bar{\mathbf{y}}_i, \bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{u}}_i) \\ \mathbf{F}_{1,y}(\bar{\mathbf{y}}_i, \bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{u}}_i) \end{bmatrix}$$

Da die Konditionszahl einer Matrix  $\mathbf{A}$  bzgl. der Spektralnorm durch den maximalen Singulärwert  $\sigma_{\max}(\mathbf{A})$  und den minimalen Singulärwert  $\sigma_{\min}(\mathbf{A})$  durch

$$\text{cond}_2(\mathbf{A}) = \frac{\sigma_{\max}(\mathbf{A})}{\sigma_{\min}(\mathbf{A})} \quad \text{Gl. 69}$$

definiert ist ergibt sich somit das Optimierungsproblem hinsichtlich der Wahl der Steuerungen  $\bar{\mathbf{u}}_i, i=1, \dots, m_u$  und  $\bar{\mathbf{z}}$  als: Minimiere  $\text{cond}_2(\mathbf{J}(\mathbf{U}, \bar{\mathbf{z}}))$  hinsichtlich  $\bar{\mathbf{z}}$  und  $\mathbf{U}$ , wobei  $\mathbf{J}(\mathbf{U}, \bar{\mathbf{z}})$  durch Gl.63 bzw. Gl.67 gegeben ist mit den Nebenbedingungen  $\forall i=1, \dots, m_u$

$$d_{\min}(1-\varepsilon) < \|\bar{z} - \bar{x}_{i0}\|_2 < d_{\max}(1+\varepsilon) \\ \bar{u}_i \in \mathbf{U}, \bar{z} \in \mathbf{S} \quad \text{Gl. 70}$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{F}(\bar{x}_i, \bar{\psi}_i, \bar{y}_i, \bar{p}, \bar{u}_i) \quad \text{Gl. 71}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{F}_1(\bar{y}_i, \bar{p}, \bar{u}_i) \\ \bar{x}_i &= \mathbf{F}_2(\bar{y}_i, \bar{p}, \bar{u}_i) \\ 0 &= \mathbf{F}_3(\bar{\psi}_i, \bar{y}_i, \bar{p}, \bar{u}_i) \end{aligned} \quad \text{Gl. 72}$$

Die Nebenbedingungen ergeben sich dabei zum einen aus der Forderung, dass das Messgerät, mit dem minimal und maximal messbaren Abstand  $d_{\min}$  und  $d_{\max}$ , nicht zerstört wird. Da die Positionen des Endeffektors, die zu den optimierten Steuerungen gehören, durch die realen Parameterstörungen gestört sind, ist hier noch ein Sicherheitskoeffizient  $\varepsilon$  eingefügt, der vorzugeben ist. Des weitern muss die Steuerungen  $\bar{u}_i$  im Steuerraum  $\mathbf{U}$  und der Messfußpunkt im Messbereich  $\mathbf{S}$  liegen.

#### 1.4.2 Poseauslenkungsoptimierung bei Störung der Parameter

Hinsichtlich der Identifikation der Parameter bzw. der Parameterstörungen ist eine Wahl von Messpositionen in gewissem Maße optimal, wenn die Veränderung der Pose, die in einer Messposition  $i$  durch eine Störung im Parameter  $j$  hervorgerufen wurde in Richtung der Messrichtung zeigt, und die durch alle anderen Störungen  $j \neq i$  hervorgerufenen Veränderungen der Position des Endeffektors orthogonal zur Messrichtung verlaufen. Dies würde ein Kriterium der folgenden Form implizieren:

Suche einen Satz von Steuerungen und Messfußpunkten

$$(\mathbf{U}, \mathbf{Z}) = \{(\bar{u}_1, \bar{z}_1), \dots, (\bar{u}_{m_u}, \bar{z}_{m_u})\} \quad \text{Gl. 73}$$

mit

$$\left\| \langle \Delta \bar{x}_{i,i}(\bar{p}, \bar{u}_i), \bar{x}(\bar{p}, \bar{u}_i) - \bar{z}_i \rangle \right\|_2 = \|\Delta \bar{x}_{i,i}(\bar{p}, \bar{u}_i)\|_2 \|\bar{x}(\bar{p}, \bar{u}_i) - \bar{z}_i\|_2 \quad \text{Gl. 74}$$

$$\langle \Delta \bar{x}_{i,j}(\bar{p}, \bar{u}_i), \bar{x}(\bar{p}, \bar{u}_i) - \bar{z}_i \rangle = 0, \quad \text{für } j \neq i \quad \text{Gl. 75}$$

Da dies natürlich ein im allgemeinen nicht zu erreichendes Optimum darstellt, ist der Optimierung der Messstrategie eine Abschwächung der folgenden Form zugrunde zulegen:

Suche einen Satz von Steuerungen und Messfußpunkten (siehe Gl.73) mit

$$\left| \left\langle \Delta \bar{x}_{i,i}(\bar{p}, \bar{u}_i), \bar{x}(\bar{p}, \bar{u}_i) - \bar{z}_i \right\rangle \right| = \max \quad \text{Gl. 76}$$

$$\left| \left\langle \Delta \bar{x}_{i,j}(\bar{p}, \bar{u}_j), \bar{x}(\bar{p}, \bar{u}_j) - \bar{z}_j \right\rangle \right| = \min, \quad \text{für } j \neq i \quad \text{Gl. 77}$$

Letztendlich resultiert ein Optimalitätskriterium der folgenden Form:

Minimiere

$$\sum_{i=1}^{m_u} \left( - \left| \left\langle \Delta \bar{x}_{i,i}(\bar{p}, \bar{u}_i), \bar{x}(\bar{p}, \bar{u}_i) - \bar{z}_i \right\rangle \right| + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m_u} \left( - \left| \left\langle \Delta \bar{x}_{i,j}(\bar{p}, \bar{u}_j), \bar{x}(\bar{p}, \bar{u}_j) - \bar{z}_j \right\rangle \right| \right) \right) \quad \text{Gl. 78}$$

hinsichtlich  $(\mathbf{U}, \mathbf{Z}) = \{(\bar{u}_1, \bar{z}_1), \dots, (\bar{u}_{m_u}, \bar{z}_{m_u})\}$  mit den Nebenbedingungen  $\forall i = 1, \dots, m_u$

$$d_{\min}(1 - \varepsilon) < \|\bar{z} - \bar{x}_i\|_2 < d_{\max}(1 + \varepsilon) \\ \bar{u}_i \in \mathcal{U}, \bar{z} \in \mathcal{S} \quad \text{Gl. 79}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{F}_1(\bar{y}_i, \bar{p}, \bar{u}_i) \\ \bar{x}_i &= \mathbf{F}_2(\bar{y}_i, \bar{p}, \bar{u}_i) \\ 0 &= \mathbf{F}_3(\bar{\psi}_i, \bar{y}_i, \bar{p}, \bar{u}_i) \end{aligned} \quad \text{Gl. 80}$$

### 1.4.3 Optimierung hinsichtlich der Sensitivitätsanalyse

Die Sensitivitätsanalyse stellt in gewissem Maße eine Grundlage der Optimierung der Messstrategie dar, da hier Parameter, deren Auswirkungen auf die Endeffektorpose (aufgrund von Störungen) redundant zu anderen sind bzw. keinen Einfluss haben, erkannt und bzgl. einer Identifizierung ausgesondert werden. Der Sensitivitätsanalyse wird die Störung der gesamten Pose (Position und Orientierung) des Endeffektors hinsichtlich Redundanzuntersuchungen zugrunde gelegt. Dabei werden solche Parameterstörungen als redundant bezeichnet, die keine Auswirkung auf die gesamte Pose des Endeffektors aufweisen, oder deren Auswirkung auch durch andere Parameterstörungen realisiert werden kann. Die numerische Analyse der Sensitivität basiert auf der Matrix

$$\Delta = \begin{bmatrix} \Delta \bar{s}(\bar{u}_1, \Delta p_1) & \Delta \bar{s}(\bar{u}_1, \Delta p_2) & \cdots & \Delta \bar{s}(\bar{u}_1, \Delta p_{n_p}) \\ \Delta \bar{s}(\bar{u}_2, \Delta p_1) & \Delta \bar{s}(\bar{u}_2, \Delta p_2) & \cdots & \Delta \bar{s}(\bar{u}_2, \Delta p_{n_p}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta \bar{s}(\bar{u}_m, \Delta p_1) & \Delta \bar{s}(\bar{u}_m, \Delta p_2) & & \Delta \bar{s}(\bar{u}_m, \Delta p_{n_p}) \end{bmatrix} \quad \text{Gl. 81}$$

wobei  $\Delta \bar{s}(\bar{u}_i, \Delta p_j)$  der durch eine Störung der Endeffektorpose, d.h. Position  $\bar{x}$  und Orientierung  $\bar{\psi}$ , bei der Steuerung  $\bar{u}_i$  entspricht. Als Referenz der Störung wird die Endeffektorpose  $\bar{s}_0 = [\bar{x}_0^T, \bar{\psi}_0^T]^T$  bei den nominalen, vorgegebenen Parametern  $\bar{p}_0$  verwendet. Diese nominalen Parameter und ihr zugehöriger Zustand  $\mathbf{Z}_0$  werden bei der Identifikation als Anfangswert der Gauß-Newton-Iteration verwendet. Die Analyse dieser Matrix  $\Delta$  mittels der Singulärwertzerlegung liefert die gewünschten Aussagen bzgl. der Redundanz der Parameter. Die Ergebnisse geben demnach Aussagen darüber, welche der Parameter (bei Berücksichtigung der vollen Pose) überhaupt identifizierbar sind, und welche nicht. Daraus lässt sich ein Ansatz zur Optimierung der Messstrategie ableiten.

Bei der Erfassung der vollen Pose würden die Singulärwerte der Matrix  $\Delta$  eine Aussage über die Bestimmbarkeit der einzelnen Parameter bedeuten. So sind die Parameter, denen ein Singulärwert  $\sigma_i = 0$  zuzuordnen ist nicht bestimmbar, wogegen Parameter, denen ein Singulärwert  $\sigma_i \neq 0$  zuzuordnen ist, bestimmbar sind. Je größer der Singulärwert ist, desto dominierender ist die Auswirkung einer Störung auf das Verhalten der Pose. Nachdem die bestimmbar, nichtredundanten Parameter in der Sensitivitätsanalyse bestimmt wurden, sind alle zugehörigen Singulärwerte basierend auf der vollen Pose von Null verschieden. Ein ausgewogener Wertebereich der Singulärwerte würde eine in etwa gleichgute Identifizierbarkeit aller Parameter liefern. Dies bedeutet, dass der maximale und minimale Singulärwert nicht all zu weit auseinander liegen sollten und somit ein minimales Verhältnis von  $\sigma_{\max}/\sigma_{\min}$  wünschenswert ist. Eine Analyse der in der Sensitivitätsanalyse verwendeten Matrix  $\Delta$  würde auch bereits eine Auswahl von Steuerungen ermöglichen, die hinsichtlich einer Identifikation der Parameter basierend auf der vollen Pose brauchbar ist. Jedoch liefert das hier verwendete Ein-Freiheitsgrad-Messsystem nicht die gesamte Pose, sondern nur einen Teil, ggf. insbesondere nur eine Dimension. Somit kann es im ungünstigsten Fall Parameter geben, die bei Nutzung einer unvollständigen Pose nicht oder zumindest nur sehr schwer zu identifizieren sind.

Bei Verwendung einer Störungsmatrix

$$\tilde{\Delta} = \begin{bmatrix} \Delta d(\bar{u}_1, \bar{z}_1, \Delta p_1) & \Delta d(\bar{u}_1, \bar{z}_1, \Delta p_2) & \cdots & \Delta d(\bar{u}_1, \bar{z}_1, \Delta p_{n_p}) \\ \Delta d(\bar{u}_2, \bar{z}_2, \Delta p_1) & \Delta d(\bar{u}_2, \bar{z}_2, \Delta p_2) & \cdots & \Delta d(\bar{u}_2, \bar{z}_2, \Delta p_{n_p}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta d(\bar{u}_m, \bar{z}_m, \Delta p_1) & \Delta d(\bar{u}_m, \bar{z}_m, \Delta p_2) & \cdots & \Delta d(\bar{u}_m, \bar{z}_m, \Delta p_{n_p}) \end{bmatrix} \quad \text{Gl. 82}$$

hinsichtlich der unvollständigen Pose anstatt von  $\Delta$  (basierend auf der vollen Pose) liefert die Sensitivitätsanalyse Aussagen über die Bestimmbarkeit der Parameter hinsichtlich Nutzung der unvollständigen Pose und ermöglicht in analoger Weise wie bei Verwendung der vollen Pose eine (Vor-)Auswahl der Messpositionen, mit einem minimalen Verhältnis von

$\tilde{\sigma}_{\max}/\tilde{\sigma}_{\min}$ ,  $\tilde{\sigma}_{\max}$  und  $\tilde{\sigma}_{\min}$  entsprechend dem maximalen und minimalen Singulärwert der Matrix  $\tilde{\Delta}$ . Weiterhin bezeichnet  $\Delta d(\bar{u}_i, \bar{z}_i, \Delta p_j)$  die durch eine Störung  $\Delta p_j$  des j-ten Parameters hervorgerufene Störung der unvollständigen messbaren Pose, die in unserem Fall dem Abstand  $d_i = \|\bar{z}_i - \bar{x}_i\|_2$  des Endeffektors zum Messfußpunkt  $\bar{z}_i$ , bei der Steuerung  $\bar{u}_i$  entspricht. Basierend auf diesen Ansätzen lässt sich nun ein Optimierungskriterium definieren: Minimiere  $\tilde{\sigma}_{\max}/\tilde{\sigma}_{\min}$  hinsichtlich  $(\mathbf{U}, \mathbf{Z}) = \{(\bar{u}_1, \bar{z}_1), \dots, (\bar{u}_{m_u}, \bar{z}_{m_u})\}$ , wobei  $\tilde{\sigma}_{\max}$  und  $\tilde{\sigma}_{\min}$  dem maximalen und minimalen Singulärwert der Matrix  $\tilde{\Delta}$  entsprechen, mit den Nebenbedingungen  $\forall i = 1, \dots, m_u$

$$\begin{aligned} d_{\min}(1 - \varepsilon) < \|\bar{z} - \bar{x}_i\|_2 < d_{\max}(1 + \varepsilon) \\ \bar{u}_i \in \mathcal{U}, \bar{z} \in \mathcal{S} \end{aligned} \quad \text{Gl. 83}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{F}_1(\bar{y}_i, \bar{p}, \bar{u}_i) \\ \bar{x}_i &= \mathbf{F}_2(\bar{y}_i, \bar{p}, \bar{u}_i) \\ 0 &= \mathbf{F}_3(\bar{\psi}_i, \bar{y}_i, \bar{p}, \bar{u}_i) \end{aligned} \quad \text{Gl. 84}$$

#### 1.4.4 Minimierung der Lipschitz-Konstanten der rechten Seite des Newton-Verfahrens

Die Parameteridentifikationsgleichung ohne bzw. mit Ausnutzung der Struktur wurden in vorangehenden Kapiteln erläutert. Die Parameteridentifikation, d.h. das Lösen der Identifikationsgleichung soll mit einem Gauß-Newton-Verfahren erfolgen. Dieses hat durch die gegebenen (gestörten) Modellparameter und die Transformationsgleichung die Form

$$\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{\psi} \\ \tilde{y} \\ \tilde{p} \end{bmatrix}^{k+1} = \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{\psi} \\ \tilde{y} \\ \tilde{p} \end{bmatrix}^k - \left[ \frac{\partial \mathbf{G}(\tilde{\mathbf{X}}^k, \tilde{\Psi}^k, \tilde{\mathbf{Y}}^k, \tilde{p}^k, \mathbf{U}, \bar{z}, \tilde{\mathbf{D}})}{\partial [\mathbf{X}^T, \Psi^T, \mathbf{Y}^T, \bar{p}^T]^T} \right]^+ \mathbf{G}(\tilde{\mathbf{X}}^k, \tilde{\Psi}^k, \tilde{\mathbf{Y}}^k, \tilde{p}^k, \mathbf{U}, \bar{z}, \tilde{\mathbf{D}})$$

bzw.

$$\begin{aligned} \Delta \bar{p}^0 &= 0 \\ \Delta \bar{p}^{k+1} &= \Delta \bar{p}^k - \left[ \frac{d}{d\Delta \bar{p}} \mathbf{G}(\bar{x}^k, \bar{\psi}^k, \bar{y}^k, \bar{p} + \Delta \bar{p}^k, \mathbf{U}, \bar{z}, \tilde{\mathbf{D}}) \right]^+ \mathbf{G}(\bar{x}^k, \bar{\psi}^k, \bar{y}^k, \bar{p} + \Delta \bar{p}^k, \mathbf{U}, \bar{z}, \tilde{\mathbf{D}}) \end{aligned} \quad \text{Gl. 85}$$

wobei sich die Größen  $\bar{x}^k$ ,  $\bar{\psi}^k$  und  $\bar{y}^k$  aus der Transformationsgleichung bezüglich der i-ten Iterierten  $\bar{p} + \Delta \bar{p}_i$  bestimmen. Zu beachten ist, dass die Ableitung der Identifikationsgleichung

chung nach den Parametern benötigt wird. Da die Größen  $\bar{x}$ ,  $\bar{\psi}$  und  $\bar{y}$  von den Parametern mittels der Transformationsgleichung abhängen ist dies mittels Kettenregel zu beachten. Mit  $[ ]^+$  wird hier die Pseudo-Inverse bezeichnet.

Für den Ansatz über das System ohne Ausnutzung der Struktur ergibt sich eine Fixpunktiteration der Form

$$\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{\psi} \\ \tilde{y} \\ \tilde{p} \end{bmatrix}^{k+1} = \Phi \left( \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{X}} \\ \tilde{\Psi} \\ \tilde{\mathbf{Y}} \\ \tilde{p} \end{bmatrix}^k \right) \quad \text{Gl. 86}$$

mit

$$\Phi \left( \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{X}} \\ \tilde{\Psi} \\ \tilde{\mathbf{Y}} \\ \tilde{p} \end{bmatrix}^k \right) = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{X}} \\ \tilde{\Psi} \\ \tilde{\mathbf{Y}} \\ \tilde{p} \end{bmatrix}^k - \left[ \frac{\partial \mathbf{G}(\tilde{\mathbf{X}}^k, \tilde{\Psi}^k, \tilde{\mathbf{Y}}^k, \tilde{p}^k, \mathbf{U}, \bar{z}, \tilde{\mathbf{D}})}{\partial [\mathbf{X}^T, \Psi^T, \mathbf{Y}^T, \tilde{p}^T]^T} \right]^+ \mathbf{G}(\tilde{\mathbf{X}}^k, \tilde{\Psi}^k, \tilde{\mathbf{Y}}^k, \tilde{p}^k, \mathbf{U}, \bar{z}, \tilde{\mathbf{D}}) \quad \text{Gl. 87}$$

Bei einer Fixpunktiteration der Form  $s^{k+1} = \Phi(s^k)$  gilt für die Konvergenz  $\|s^* - s^k\| \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} \|s^* - s^0\|$  bzw.  $\|s^* - s^k\| \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} \|s^k - s^{k-1}\|$ , wobei  $\alpha$  die Lipschitz-Konstante der Funktion  $\Phi$  ist. Somit wirkt sich eine möglichst kleine Lipschitz-Konstante  $\alpha$  und somit bei differenzierbaren Funktionen  $\Phi$  die Ableitung bzw. die Norm der Jacobi-Matrix konvergenzbeschleunigend aus. Da man leider kein Wissen über die Lösung  $s^*$  besitzt führt dies zu einem Optimalitätskriterium:

$$\text{Minimiere } \left\| \frac{\partial \Phi \left( [\mathbf{X}^0, \Psi^0, \mathbf{Y}^0, \tilde{p}]^{0T} \right)}{\partial [\bar{x}^T, \bar{\psi}^T, \bar{y}^T, \tilde{p}^T]^T} \right\| \text{ hinsichtlich } (\mathbf{U}, \mathbf{Z}) = \{(\bar{u}_1, \bar{z}_1), \dots, (\bar{u}_{m_u}, \bar{z}_{m_u})\}, \text{ wobei } \Phi$$

durch Gl.87 gegeben ist mit den Nebenbedingungen  $\forall i = 1, \dots, m_u$

$$d_{\min} (1 - \varepsilon) < \|\bar{z} - \bar{x}_i\|_2 < d_{\max} (1 + \varepsilon) \\ \bar{u}_i \in \mathbf{U}, \bar{z} \in \mathbf{S} \quad \text{Gl. 88}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{F}_1(\bar{y}_i, \bar{p}, \bar{u}_i) \\ \bar{x}_i &= \mathbf{F}_2(\bar{y}_i, \bar{p}, \bar{u}_i) \\ 0 &= \mathbf{F}_3(\bar{\psi}_i, \bar{y}_i, \bar{p}, \bar{u}_i) \end{aligned} \quad \text{Gl. 89}$$

### 1.4.5 Optimierungsalgorithmus

Bei der Optimierung der Messstrategie wird basierend auf einem der oben eingeführten Optimalitätskriterien ein Gradientenverfahren [Kos89] unter Berücksichtigung der Restriktionen hinsichtlich des Stellraumes und der Einschränkungen eines zulässigen Messfußpunktes verwendet.

Ausgehend von einer initialen Messstrategie, gegeben durch

$$M^0 = \left[ (\bar{u}_1, \bar{z}_1), \dots, (\bar{u}_{m_u}, \bar{z}_{m_u}) \right] \quad \text{Gl. 90}$$

die vorzugeben, bzw. geeignet zu wählen ist, wird beginnend mit  $k=0$  der Gradient

$$\Delta^k = \frac{\partial}{\partial M} \Omega(M^k) \quad \text{Gl. 91}$$

des verwendeten Zielfunktional  $\Omega(M)$  berechnet und in der durch den negativen Gradienten bestimmten Richtung mittels der Schrittweitsuche nach Armijo [Kos89] und [Wil64] ein Minimum des (modifizierten) Optimierungskriteriums  $\tilde{\Omega}$  gesucht, d.h.

$$\tilde{\Omega}(M^k - \lambda^k \Delta^k) = \min_{\lambda \in [0, \lambda_{\max}^k]} \tilde{\Omega}(M^k - \lambda \Delta^k) \quad \text{Gl. 92}$$

wobei die Wahl der Schrittweite  $\lambda^k$  durch die Restriktionen durch den Stellraum und den Messfußpunkt eingeschränkt ist und mittels  $\lambda_{\max}^k$  und der Modifizierung des Optimalitätskriteriums  $\tilde{\Omega}$  berücksichtigt wird. Bei der Wahl der Schrittweite ist darauf zu achten, dass die Restriktionen an die Steuerung und den Messfußpunkt eingehalten werden. Da der Stellraum bei hier untersuchten hybriden Kinematiken konvex und polygonal berandet ist, wird bei der Schrittweitsuche eine maximale Schrittweite  $\lambda_{\max}^k$  bestimmt, die auf den Rand des Stellraumes führt. Ausgehend von dieser maximalen Schrittweite wird durch Verkleinerung eine optimale Schrittweite basierend auf dem modifizierten Optimalitätskriterium  $\tilde{\Omega}$  gefunden. Das Optimalitätskriterium wurde dabei mittels einer Überlagerung einer Barrierefunktion  $b(M) \geq 0$  modifiziert, die ein Einhalten der Restriktionen bzgl. des Messfußpunktes gewährleistet:  $\tilde{\Omega}(M) = b(M) + \Omega(M)$ . Mittels der durch den negativen Gradienten vorgegebenen Richtung  $-\Delta^k$  und der bereits gefundenen optimalen Schrittweite  $\lambda^k$  wird eine neue Iterierte  $M^{k+1} = M^k - \lambda^k \Delta^k$  gefunden, die eine Verbesserung hinsichtlich des Optimierungskriteriums in Bezug auf die vorhergehende Iterierte darstellt. Falls ein vorgegebenes Abbruchkriterium nicht erfüllt ist, so wird mit der Bestimmung des Gradienten an der nun aktuellen Iterierten die Iteration fortgesetzt.

Gradienten- bzw. gradientenähnliche Verfahren zur Optimierung der Messstrategie sind aufgrund der vielen lokalen Optima nur bedingt geeignet. Ein Ansatz zur weiteren Nutzung

liegt im Finden quasioptimaler Startwerte der Iteration innerhalb des Optimierungsalgorithmus. Alternative Ansätze sind Inhalt aktueller Forschungsarbeiten.

## 1.5 Beispiele und Ergebnisse

Zur Untersuchung des Kalibrierprozesses wurden zunächst einfache serielle Strukturen (Doppelpendel und Dreifachpendel, siehe Bild 1-10), eine einfache Parallelkinematik sowie eine vereinfachte Form der Hybridkinematik „Georg V.“ betrachtet.

Die Weltkoordinaten des Doppelpendels sind durch  $\bar{s} = [\bar{x}^T, \bar{\psi}^T]^T$  definiert, wobei  $\bar{x} = [\bar{x}_T, \bar{y}_T]^T$ ;  $\bar{\psi} = [\bar{\psi}_T]^T$  ist. In dieser seriellen Kinematik treten keine passiven Gelenkvariablen auf, da es keine kinematisch geschlossenen Schleifen gibt, d.h.  $\bar{y} = [ ]^T$ . Der Parametervektor  $\bar{p} = [L_1, L_2]^T$  ist durch die beiden Längen der Pendel gegeben und die Steuerungen  $\bar{u} = [\varphi_1, \varphi_2]^T$  beschreiben die Auslenkungen der beiden Pendelarme. Es ergibt sich die folgende Transformationsgleichung:

$$0 = \mathbf{F}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p}, \bar{u}) = \begin{bmatrix} \cos(\psi_T) - \cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2) + \sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2) \\ -\sin(\psi_T) + \sin(\varphi_1)\cos(\varphi_2) + \cos(\varphi_1)\sin(\varphi_2) \\ x_T - (\cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2) - \sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2))L_2 - \cos(\varphi_1)L_1 \\ y_T - (\sin(\varphi_1)\cos(\varphi_2) + \cos(\varphi_1)\sin(\varphi_2))L_2 - \sin(\varphi_1)L_1 \\ \sin(\psi_T) - \cos(\varphi_1)\sin(\varphi_2) - \sin(\varphi_1)\cos(\varphi_2) \end{bmatrix} \quad \text{Gl. 93}$$

Mit den zugehörigen partiellen Ableitungen:

$$\mathbf{F}_{,x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{F}_{,\psi} = \begin{bmatrix} -\sin(\psi_T) \\ -\cos(\psi_T) \\ 0 \\ \cos(\psi_T) \\ -\sin(\psi_T) \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{F}_{,y} = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix}, \mathbf{F}_{,p} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\cos(\varphi_1) & -\cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2) + \sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\sin(\varphi_1) & -\sin(\varphi_1)\cos(\varphi_2) - \cos(\varphi_1)\sin(\varphi_2) \end{bmatrix} \quad \text{Gl. 94}$$

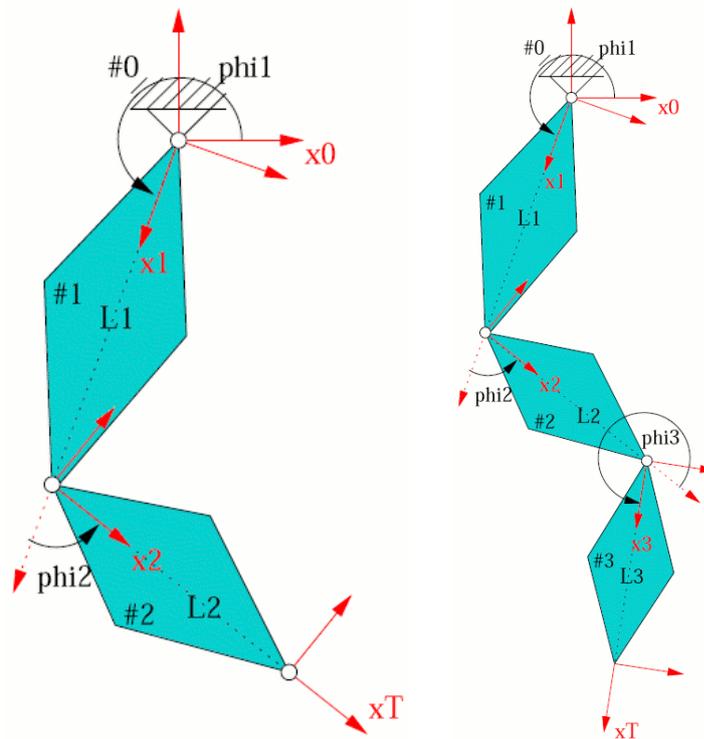


Bild 1-10: Doppelpendel und Dreifachpendel

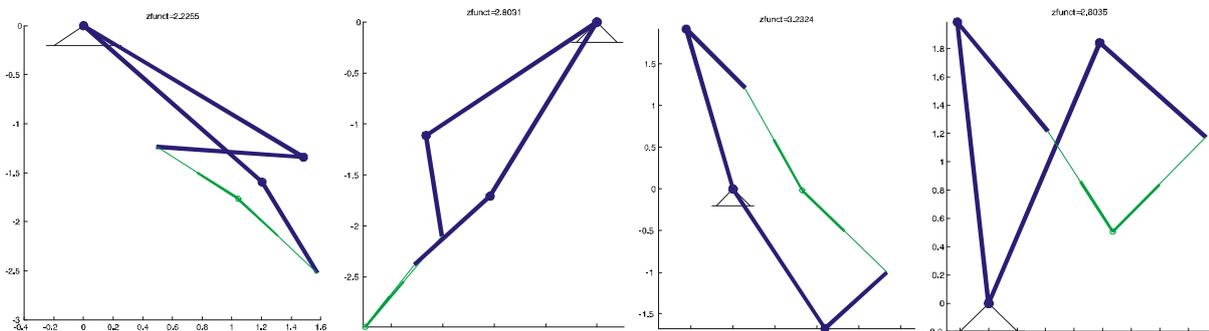
Innerhalb einer Sensitivitätsanalyse werden die Parameter des Doppelpendels (die Längen der beiden Pendelarme) problemlos als nichtredundant, also identifizierbar erkannt. Die Optimierung der Messstrategie hat unter Vorgabe der Anzahl von Messungen (zwei) und der Anzahl der Messfußpunkte (eins) zu erfolgen. Bei Nutzung der Jacobi-Matrizen  $\mathbf{F}_{,x}$ ,  $\mathbf{F}_{,\psi}$ ,  $\mathbf{F}_{,y}$  und  $\mathbf{F}_{,p}$  und einem Satz von zwei Messungen erhalten wir die Jacobi-Matrix der Identifikationsgleichung mit

$$\mathbf{J}_i(\bar{z}, \bar{u}_i) = \begin{bmatrix} -2(\bar{z} - \bar{x}_i)^T & 0 & 0 \\ \mathbf{F}_{,x}(\bar{x}_i, \bar{\psi}_i, \bar{y}_i, \bar{p}, \bar{u}_i) & \mathbf{F}_{,\psi}(\bar{x}_i, \bar{\psi}_i, \bar{y}_i, \bar{p}, \bar{u}_i) & \mathbf{F}_{,y}(\bar{x}_i, \bar{\psi}_i, \bar{y}_i, \bar{p}, \bar{u}_i) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{7,3} \quad \text{Gl. 95}$$

in der nachfolgenden Form:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{J}(\bar{\mathbf{z}}, \mathbf{U}) &= \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{J}_1(\bar{\mathbf{z}}, \bar{\mathbf{u}}_1) \\ \mathbf{F}_{,p}(\dots, \bar{\mathbf{u}}_1) & \\ 0 & \mathbf{J}_2(\bar{\mathbf{z}}, \bar{\mathbf{u}}_2) \\ \mathbf{F}_{,p}(\dots, \bar{\mathbf{u}}_2) & \end{bmatrix} \\
 &= \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 0 & -2(\bar{\mathbf{z}} - \bar{\mathbf{x}}_1)^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{F}_{,p}(\dots, \bar{\mathbf{u}}_1) & \mathbf{F}_{,x}(\dots, \bar{\mathbf{u}}_1) & \mathbf{F}_{,\psi}(\dots, \bar{\mathbf{u}}_1) & \mathbf{F}_{,y}(\dots, \bar{\mathbf{u}}_1) & 0 & 0 \\ 0 & & & & -2(\bar{\mathbf{z}} - \bar{\mathbf{x}}_2)^T & 0 \\ \mathbf{F}_{,p}(\dots, \bar{\mathbf{u}}_2) & & & & \mathbf{F}_{,x}(\dots, \bar{\mathbf{u}}_2) & \mathbf{F}_{,\psi}(\dots, \bar{\mathbf{u}}_2) & \mathbf{F}_{,y}(\dots, \bar{\mathbf{u}}_2) \end{array} \right] \quad \text{Gl. 96} \\
 &\in \square^{m_u(n_F+1), n_p+m_u(n_x+n_\psi+n_y)}
 \end{aligned}$$

Es wurden mehrere Optimierungen der Kondition dieser Jacobi-Matrix durchgeführt, mit zufällig ausgewählten Startwerten für die Iteration zum Finden einer optimalen Vorgabe von Steuerungen und des Messfußpunktes. In Bild 1-11 sind vier Ergebnisse der Optimierung dargestellt. Die Kondition der bei der Identifizierung der Parameter verwendeten Jacobi-Matrix  $\text{cond}_2(\mathbf{J}(\mathbf{U}, \bar{\mathbf{z}}))$  ist vergleichbar gut, jedoch unterscheiden sich die Ergebnisse der optimalen Messstrategie erheblich voneinander.



$$\text{cond}_2(\mathbf{J}(\mathbf{U}, \bar{\mathbf{z}})) = 2.2255 \quad \text{cond}_2(\mathbf{J}(\mathbf{U}, \bar{\mathbf{z}})) = 2.8031 \quad \text{cond}_2(\mathbf{J}(\mathbf{U}, \bar{\mathbf{z}})) = 3.2324 \quad \text{cond}_2(\mathbf{J}(\mathbf{U}, \bar{\mathbf{z}})) = 2.8035$$

Bild 1-11: Ausgewählte Lösungen der Optimierung der Messstrategie

Durch Einschränkungen der Freiheiten kann man die Anzahl der gefundenen Optima stark einschränken. So wurden bei fester Vorgabe einer Messpose und der Orientierung des ersten Pendels der zweiten Messpose die Zahl der gefundenen Optima stark eingeschränkt. Bei 50 Optimierungen mit zufälligen Startwerten der noch verbliebenen drei zu optimierenden Freiheiten, einer Steuerkomponente und des Messfußpunktes, wurden lediglich vier optimale Messstrategien ermittelt. Untersuchungen zeigten, dass selbst beim vergleichsweise einfachen Doppelpendel nur lokale Optima erreicht werden.

Schränkt man bei der Suche nach der optimalen Messstrategie Freiheiten ein (man gibt z.B. beide Messpositionen oder eine Messposition und den Messfußpunkt vor) und optimiert hinsichtlich der noch verbleibenden Freiheiten, so ergibt sich für das Optimalitätskriterium,

d.h. die Kondition der im Gauß-Newton-Verfahren zur Parameteridentifikation verwendeten Jacobi-Matrix, die in Bild 1-12 dargestellte Situation.

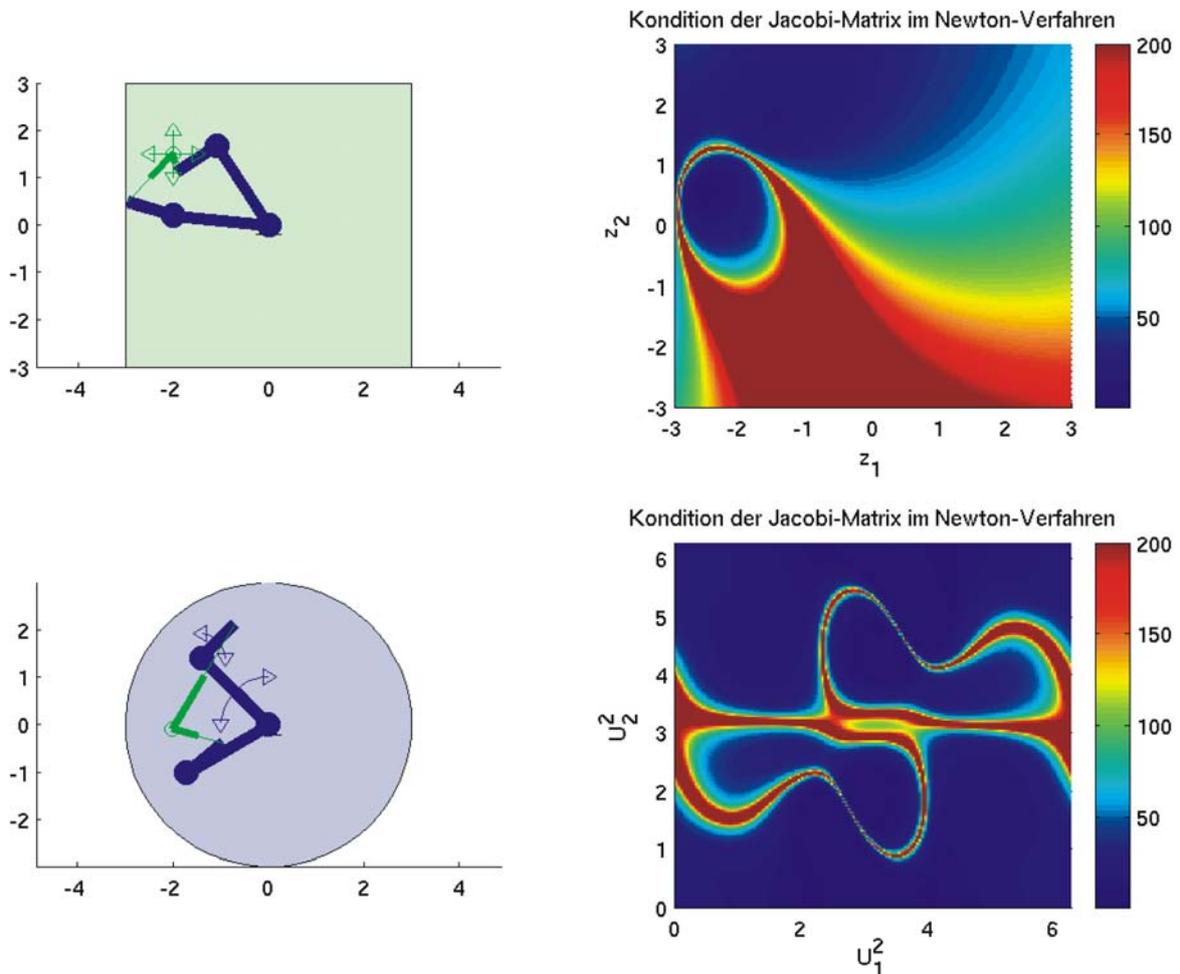


Bild 1-12: Kondition in Abhängigkeit von der Messstrategie

Der obere Teil stellt die Kondition der Jacobi-Matrix bei fest vorgegebenen Steuerungen, d.h. Messpositionen, und frei wählbarer, noch zu optimierender, Wahl des Messfußpunktes dar. Im linken oberen Teil sind die Messpositionen und der für den Messfußpunkt abgetastete Wertebereich dargestellt, im rechten Teil wird die Kondition der Jacobi-Matrix in Abhängigkeit des Messfußpunktes dargestellt. Unterschiedliche Testrechnungen haben gezeigt, dass sich bereits bei nur diesen zwei Freiheiten zwei bis vier lokale Minima einstellen. Der gewählte Skalenbereich von 1 bis 200 ist aus Visualisierungsgründen gewählt. Die Konditionszahlen innerhalb der rot gekennzeichneten Bereiche liegen weit über den aufgezeigten 200. Im unteren Teil ist die Kondition der Jacobi-Matrix bei Vorgabe einer Messposition und des Fußpunktes und einer frei wählbaren Messposition, d.h. zweier Steuervariablen dargestellt. Im linken Teil sind in analoger Weise die vorgegebene Messpose und der feste Messfußpunkt dargestellt. Im rechten Teil wird wiederum die Kondition der Jacobi-Matrix in Abhängigkeit der Freiheit, der zu optimierenden Steuerung der noch freien Messpose





Die Optimierung der Messstrategie fällt bei hybriden Kinematiken komplizierter aus. Zum einen erschwert die Vielzahl lokaler Optima unterschiedlichster Güte die Optimierung hinsichtlich der Wahl der Messpositionen. Bei hybriden Kinematiken kommt die Vielzahl lokaler Optima des Zielfunktionales hinsichtlich des Messfußpunktes hinzu.

Stellvertretend für alle hier untersuchten Beispiel-Kinematiken sollen anhand des zuletzt beschriebenen Mechanismus abschließend die numerischen Resultate der Identifizierung gestörter Parameter dargestellt werden (siehe Tabelle 1).

Beispiel Nr.	Zeit der Identifikation	Posefehler (vor Parameteridentifikation) $\ x_{ex} - x_{pert}\ $	Posefehler (nach Parameteridentifikation) $\ x_{ex} - x_{corr}\ $
1	68.89s	4.5e-04	4.3e-09
2	69.5s	3.3e-04	2.6e-08
3	69.33s	4.2e-04	7.4e-10
4	7.48s	2.6e-04	2.5e-09
5	35.06s	4.1e-04	6.2e-10
6	7.46s	4.6e-04	7.6e-10
7	8.04s	4.5e-04	2.0e-09
8	72.25s	4.2e-04	1.6e-08
9	30.09s	5.4e-04	1.5e-10
10	71.03s	4.9e-04	1.6e-09

Tabelle 1: Numerische Resultate bei 8 idealen Messungen

Die gestörten Parameter der zweidimensionalen Variante von „Georg V.“ wurden basierend auf simulierten Messwerten mit und ohne Rauschen ermittelt.

## 1.6 Zusammenfassung

Grundlage jeder parametrischen Kalibrierung hybrider Parallelkinematiken bildet ein Modell der zu kalibrierenden Maschine, welches alle auf die Endeffektorpose einwirkenden Fehlereinflüsse berücksichtigen soll. Diesbezüglich wurde eine allgemeine Vorgehensweise zur kinematischen Modellbildung entwickelt. Das Verfahren stützt sich auf homogene Transformationen und die Denavit-Hartenberg-Konvention, die entsprechend den Anforderungen für die Modellbildung hybrider Parallelkinematiken erweitert wurde. Die standardisierte Modellbildung wurde automatisiert und in den Kalibrierungsprozess integriert. Für die allgemeine und umfassende Modellbildung lässt sich erwarten, dass enthaltene Parameter in weiten Teilen durch die passiven Gelenke kompensiert werden und daher nicht rele-

vant sind. In weiteren Untersuchungen an der Kinematik „Georg V.“ konnte diese Annahme bestätigt werden [TöGü00]. Mittels einer Sensitivitätsanalyse wird das angepasste und erweiterte Modell reduziert. Dabei können Strukturen, die von der Kinematik der Maschine bestimmt sind, ausgenutzt werden, so dass angepasste Algorithmen verwendet werden können, welche die Rechenzeit senken. Das entwickelte Verfahren wurde in die Kalibrierungssoftware integriert und ist allgemeingültig auf parallele oder serielle Strukturen anwendbar.

Grundlage der Identifikation der Parameter sind Messungen der Endeffektorpose. Als bevorzugtes Messinstrument wurde ein Einfreiheitsgrad-Messgerät und die Messstrategie der Trilateration (siehe [www.tetraprecision.com](http://www.tetraprecision.com)) ausgewählt. Der Aufwand der Trilateration zur Bestimmung der vollen Position ist jedoch sehr hoch, so dass in diesem Projekt die Pose des Endeffektors nur teilweise bestimmt wird. Dabei ist die Wahl der optimalen Messorte hinsichtlich der Effizienz des Kalibrierungsprozesses von entscheidender Bedeutung. Dies gilt insbesondere dann, wenn nicht die gesamte Pose des Werkzeuges der zu kalibrierenden Maschine gemessen wird. Aus diesem Grund wurden Methoden zur Optimierung der Messstrategie entwickelt.

Zur Integration weiterer Fehlereinflüsse (Dynamik, Thermik) in den Kalibrierungs- bzw. Kompensationsprozess wurden weitere Arbeiten durchgeführt, die in [ArnMS01], [Ste02], [DeMö04], [DeMö06] und beschrieben werden.

Wir danken der DFG für die Förderung im Rahmen des Schwerpunktprogramms 1099.

## 1.7 Literatur

- [Schu99] Schulz, H.: Die Fertigungstechnik an der Jahrtausendwende. WB Werkstatt und Betrieb, 132 (1999) 12, S. 18-24
- [DeHa55] Denavit, J.; Hartenberg, R.S.: A Kinematic Notation for Lower-Pair Mechanisms Based on Matrices. ASME Journal of Applied Mechanics, 22(1955), p. 215-221
- [HaMi85] Hayati, S., Mirmirani M.: Improving the Absolute Positioning Accuracy of Robot Manipulators, Journal of Robotic Systems, 2(4), (1985), p. 397-413
- [Haya83] Hayati, S.: Robot Arm Geometric Link Parameter Estimation. Proceedings of the 22nd IEEE Conf. on Decision and Control, (1983), p. 1477-1483
- [ViCl98] Vischer, P.; Clavel, R.: Kinematic calibration of the parallel Delta robot, Robotica, 16(1998), pp. 207-218, 1998
- [Kos89] P. Kosmol. Methoden zur numerischen Behandlung nichtlinearer Gleichungen und Optimierungsaufgaben. Teubner Verlag, 1989.
- [Wil64] D.J. Wilde. Optimum Seeking Methods. Prentice-Hall. Inc., 1964.

- 
- [ArnMS01] Arnold, M.; Mehrmann, V.; Steinbrecher, A.: Index reduction in industrial multibody system simulation. DLR German Aerospace Center, Institute of Aeroelasticity, Vehicle System Dynamics Group, number IB 532--01--01. 2001.
- [GüSt01] Günther, G.; Steinbrecher, A.: Strukturausnutzung hybrider Parallelkinematiken hinsichtlich ihrer Kalibrierung, Tagungsband zum 3. dresd. WZM Fachseminar, TU Dresden 2001
- [Ste02] Steinbrecher, A.: Regularization of nonlinear equations of motion of multibody systems by index reduction with preserving the solution manifold. Institute of Mathematics, Technische Universität Berlin, number 742-02. 2002.
- [TöGü00] Tönshoff, H.K.; Günther, G.; Grendel, H.: Influence of manufacturing and assembly errors on the pose accuracy of hybrid kinematics. Proceedings of the 2000 Parallel Kinematic Machines – International Conference, September 13th-15th 2000, Ann Arbor, Michigan, USA, p. 255-262
- [DeMö04] Denkena, B.; Möhring, H.-C.: Thermisches Einsatzverhalten von Kugelgewindetrieben in Parallelkinematiken; in Antriebstechnik für die Fertigung, Begleitband zum Seminar, Berichte aus dem IFW, Band 06/2004
- [DeMö06] Denkena, B.; Möhring, H.-C.: Erweiterte Strukturmodellbildung für Werkzeugmaschinen mit komplexer Struktur; Seminarberichte (2006): Mechatronik, IWB-München, 21.09.2006