Suite V - Die den Weg Weisende

Teil 6: Essays 365-374

$\square$ kommutativ. $\square$ assoziativ. $\square$ tunnelt rechts/links.

InversionsFunktion E, D. $\mathsf{inv}_{E,D}$.
universelle InversionsFunktion. inv.

R ist ana3 von q, E, x.

$\mathtt{rf}3qEx$.

$\mathbf{IS}\{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

bigcup. bigcap.

$(q, E|_{\mathsf{to}}\, x)$. $(q, E|_{\mathsf{to}\, n}\, x)$.

Grid0. Grid1.

MSC2010: 03E75. 11B99. 08A99.

Andreas Unterreiter

30. September 2016

Algebra: $\square$ kommutativ. $\square$ assoziativ. $\square$ tunnelt rechts. $\square$ tunnelt links.

Ersterstellung: 14/12/15 **Letzte Änderung: 15/12/15**

365-1. Hätte ich früher den Mut gehabt, hätte ich vorliegende Definitionen bereits früher gebracht. So musste erst der Umweg - etwa - über allgemeine Kommutativ-Gesetze für A, M gegangen werden.

365-1(Definition)

1) "$\square$ **kommutativ**" genau dann, wenn
$$\forall\alpha,\beta : \alpha\_\square\_\beta = \beta\_\square\_\alpha.$$

2) "$\square$ **assoziativ**" genau dann, wenn
$$\forall\alpha,\beta,\gamma : \alpha\_\square\_(\beta\_\square\_\gamma) = (\alpha\_\square\_\beta)\_\square\_\gamma.$$

3) "$\square$ **tunnelt rechts**" genau dann, wenn
$$\forall\alpha,\beta,\gamma : (\alpha\_\square\_\beta)\_\square\_\gamma = (\alpha\_\square\_\gamma)\_\square\_\beta.$$

4) "$\square$ **tunnelt links**" genau dann, wenn
$$\forall\alpha,\beta,\gamma : \alpha\_\square\_(\beta\_\square\_\gamma) = \beta\_\square\_(\alpha\_\square\_\gamma).$$

ALG-**Notation**.

365-2. Generelle Kommutativität gilt bereits unter einschränkenden Voraussetzungen.

365-2(Satz) *Die Aussagen* `i)`, `ii)` `iii)`, `iv)` *sind äquivalent:*

`i)` $\square$ *kommutativ.*

`ii)` $\square_{\mathsf{fkt}}$ *kommutativ.*

`iii)` $\square$ *kommutativ auf* $\mathcal{U}$.

`iv)` $\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta) \in \mathsf{dom}\,\square) \Rightarrow (\alpha{}_{-}\square{}_{-}\beta = \beta{}_{-}\square{}_{-}\alpha)$.

`ALG`-**Notation**.

Beweis **365-2** `i)` $\Rightarrow$ `ii)` `VS` gleich $\square$ kommutativ.

`Thema0` α, β.

`1:` Aus `VS` gleich "$\square$ kommutativ"
folgt via **365-1(Def)**: $\alpha{}_{-}\square{}_{-}\beta = \beta{}_{-}\square{}_{-}\alpha$.

`2:` Aus `1`
folgt: $\square((\alpha, \beta)) = \square((\beta, \alpha))$.

`3.1:` Via **258-14** gilt: $\square_{\mathsf{fkt}}((\alpha, \beta)) = \square((\alpha, \beta))$.

`3.2:` Via **258-14** gilt: $\square_{\mathsf{fkt}}((\beta, \alpha)) = \square((\beta, \alpha))$.

`4:` Aus `2`,
aus `3.1` und
aus `3.2`
folgt: $\square_{\mathsf{fkt}}((\alpha, \beta)) = \square_{\mathsf{fkt}}((\beta, \alpha))$.

`5:` Aus `4`
folgt: $\alpha{}_{-}\square_{\mathsf{fkt}}{}_{-}\beta = \beta{}_{-}\square_{\mathsf{fkt}}{}_{-}\alpha$.

Ergo `Thema0`: $\forall \alpha, \beta : \alpha{}_{-}\square_{\mathsf{fkt}}{}_{-}\beta = \beta{}_{-}\square_{\mathsf{fkt}}{}_{-}\alpha$.

Konsequenz via **365-1(Def)**: $\square_{\mathsf{fkt}}$ kommutativ.

Beweis **365-2** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $\Box_{\mathsf{fkt}}$ kommutativ.

$\boxed{\texttt{Thema0}}$ $\alpha, \beta \in \mathcal{U}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\Box_{\mathsf{fkt}}$ kommutativ"
folgt via **365-1(Def)**: $\alpha{\_}\Box_{\mathsf{fkt}}{\_}\beta = \beta{\_}\Box_{\mathsf{fkt}}{\_}\alpha$.

`2:` Aus `1`
folgt: $\Box_{\mathsf{fkt}}((\beta, \alpha)) = \Box((\beta, \alpha))$.

`3.1:` Via **258-14** gilt: $\Box_{\mathsf{fkt}}((\alpha, \beta)) = \Box((\alpha, \beta))$.

`3.2:` Via **258-14** gilt: $\Box_{\mathsf{fkt}}((\beta, \alpha)) = \Box((\beta, \alpha))$.

`4:` Aus `2`,
aus `3.1` und
aus `3.2`
folgt: $\Box((\alpha, \beta)) = \Box((\beta, \alpha))$.

`5:` Aus `4`
folgt: $\alpha{\_}\Box{\_}\beta = \beta{\_}\Box{\_}\alpha$.

Ergo `Thema0`: $\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathcal{U}) \Rightarrow (\alpha{\_}\Box{\_}\beta = \beta{\_}\Box{\_}\alpha)$.

Konsequenz via **210-1(Def)**: $\Box$ kommutativ auf $\mathcal{U}$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{iv)}}}$ `VS` gleich $\Box$ kommutativ auf $\mathcal{U}$.

$\boxed{\texttt{Thema0}}$ $(\alpha, \beta) \in \mathsf{dom}\,\Box$.

`1:` Aus `Thema0`"$(\alpha, \beta) \in \mathsf{dom}\,\Box$"
folgt via **folk**: α, β Menge.

`2:` Aus `1`"α, β Menge"
folgt via **folk**: $\alpha, \beta \in \mathcal{U}$.

`3:` Aus `VS` gleich "$\Box$ kommutativ auf $\mathcal{U}$" und
aus `2`"$\alpha, \beta \in \mathcal{U}$"
folgt via **210-1(Def)**: $\alpha{\_}\Box{\_}\beta = \beta{\_}\Box{\_}\alpha$.

Ergo `Thema0`: $\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta) \in \mathsf{dom}\,\Box) \Rightarrow (\alpha{\_}\Box{\_}\beta = \beta{\_}\Box{\_}\alpha)$.

Beweis **365-2**

$\boxed{\texttt{iv)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich $\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta) \in \mathsf{dom}\,\Box) \Rightarrow (\alpha \_\Box\_ \beta = \beta \_\Box\_ \alpha)$.

`Thema0` γ, ϵ.

1: Es gilt: $((\gamma, \epsilon) \in \mathsf{dom}\,\Box) \vee ((\gamma, \epsilon) \notin \mathsf{dom}\,\Box)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $(\gamma, \epsilon) \in \mathsf{dom}\,\Box$.

Aus `VS` und
aus `1.1.Fall`"$(\gamma, \epsilon) \in \mathsf{dom}\,\Box$"
folgt: $\gamma \_\Box\_ \epsilon = \epsilon \_\Box\_ \gamma$.

`1.2.Fall` $(\gamma, \epsilon) \notin \mathsf{dom}\,\Box$.

2: Es gilt: $((\epsilon, \gamma) \in \mathsf{dom}\,\Box) \vee ((\epsilon, \gamma) \notin \mathsf{dom}\,\Box)$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $(\epsilon, \gamma) \in \mathsf{dom}\,\Box$.

3.1: Aus `2.1.Fall`"$(\epsilon, \gamma) \in \mathsf{dom}\,\Box$"
folgt via **folk**: $\Box((\epsilon, \gamma))$ Menge.

3.2: Aus `VS` und
aus `2.1.Fall`"$(\epsilon, \gamma) \in \mathsf{dom}\,\Box$"
folgt: $\epsilon \_\Box\_ \gamma = \gamma \_\Box\_ \epsilon$.

4: Aus 3.2
folgt: $\Box((\epsilon, \gamma)) = \Box((\gamma, \epsilon))$.

5: Aus 4 und
aus 3.1
folgt: $\Box((\gamma, \epsilon))$ Menge.

6: Aus 5"$\Box((\gamma, \epsilon))$ Menge"
folgt via **folk**: $(\gamma, \epsilon) \in \mathsf{dom}\,\Box$.

7: Nach `1.2.Fall` gilt: $(\gamma, \epsilon) \notin \mathsf{dom}\,\Box$.

...

...

...

Beweis **365-2**

$\boxed{\boxed{\texttt{iv)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ VS gleich $\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta) \in \mathsf{dom}\,\square) \Rightarrow (\alpha\_\square\_\beta = \beta\_\square\_\alpha)$.

...

`Thema0` γ, ϵ.

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.2.Fall` $(\gamma, \epsilon) \notin \mathsf{dom}\,\square$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.2.Fall` $(\epsilon, \gamma) \notin \mathsf{dom}\,\square$.

`3.1:` Aus `1.2.Fall` "$(\gamma, \epsilon) \notin \mathsf{dom}\,\square$"
folgt via **folk**: $\square((\gamma, \epsilon)) = \mathcal{U}$.

`3.2:` Aus `2.2.Fall` "$(\epsilon, \gamma) \notin \mathsf{dom}\,\square$"
folgt via **folk**: $\square((\epsilon, \gamma)) = \mathcal{U}$.

`4:` $\gamma\_\square\_\epsilon = \square((\gamma, \epsilon)) \stackrel{3.1}{=} \mathcal{U} \stackrel{3.2}{=} \square((\epsilon, \gamma))$
$= \epsilon\_\square\_\gamma$.

`Ende Fallunterscheidung`
In beiden Fällen gilt: $\gamma\_\square\_\epsilon = \epsilon\_\square\_\gamma$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\gamma\_\square\_\epsilon = \epsilon\_\square\_\gamma$.

Ergo `Thema0`: $\forall \gamma, \epsilon ; \gamma\_\square\_\epsilon = \epsilon\_\square\_\gamma$.

Konsequenz via **365-1(Def)**: $\square$ kommutativ.

$\square$

365-3. Kommutativität und Kommutativität auf Q hängen zusammen.

365-3(Satz)

a) *Aus "$\Box$ kommutativ" folgt "$\Box$ kommutativ auf Q".*

b) *Aus "$\Box$ kommutativ auf Q" und "$\mathsf{dom}\,\Box \subseteq Q \times Q$" folgt "$\Box$ kommutativ".*

c) *Aus "$\Box$ kommutativ auf Q" und "$\mathsf{dom}\,\Box = Q \times Q$" folgt "$\Box$ kommutativ".*

d) *"$\Box$ kommutativ auf Q" genau dann, wenn "$(\Box \restriction Q \times Q)$ kommutativ".*

e) *Aus "$\Box$ Algebra in A" und "$\Box$ kommutativ auf A" folgt "$\Box$ kommutativ".*

Beweis **365-3**

`ALG`-**Notation**.

---

a) `VS` gleich $\Box$ kommutativ.

$\boxed{\texttt{Thema0}}$ $\alpha, \beta \in Q$.

Aus `VS` gleich "$\Box$ kommutativ"
folgt via **365-1(Def)**: $\alpha \_ \Box \_ \beta = \beta \_ \Box \_ \alpha$.

Ergo `Thema0`: $\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in Q) \Rightarrow (\alpha \_ \Box \_ \beta = \beta \_ \Box \_ \alpha)$.

Konsequenz via **210-1(Def)**: $\Box$ kommutativ auf Q.

<u>Beweis **365-3**</u> `b)` `VS` gleich $(\square \text{ kommutativ auf } Q) \wedge (\mathsf{dom}\,\square \subseteq Q \times Q)$.

`Thema0` α, β.

`1:` Es gilt: $(\alpha, \beta \in Q) \vee (\alpha \notin Q) \vee (\beta \notin Q)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $\alpha, \beta \in Q$.

Aus `VS` gleich "$\square$ kommutativ auf $Q \ldots$" und
aus `1.1.Fall` "$\alpha, \beta \in Q$"
folgt via **210-1(Def)**: $\alpha\_\square\_\beta = \beta\_\square\_\alpha$.

`1.2.Fall` $(\alpha \notin Q) \vee (\beta \notin Q)$.

`2.1:` Aus `1.2.Fall` "$(\alpha \notin Q) \vee (\beta \notin Q)$"
folgt via **folk**: $(\alpha, \beta) \notin Q \times Q$.

`2.2:` Aus `1.2.Fall`
folgt: $(\beta \notin Q) \vee (\alpha \notin Q)$.

`3.1:` Aus `2.1` "$(\alpha, \beta) \notin Q \times Q$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \mathsf{dom}\,\square \subseteq Q \times Q$"
folgt via **folk**: $(\alpha, \beta) \notin \mathsf{dom}\,\square$.

`3.2:` Aus `2.2` "$(\beta \notin Q) \vee (\alpha \notin Q)$"
folgt via **folk**: $(\beta, \alpha) \notin Q \times Q$.

`4.1:` Aus `3.1` "$(\alpha, \beta) \notin \mathsf{dom}\,\square$"
folgt via **folk**: $\square((\alpha, \beta)) = \mathcal{U}$.

`4.2:` Aus `3.2` "$(\beta, \alpha) \notin Q \times Q$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \mathsf{dom}\,\square \subseteq Q \times Q$"
folgt via **folk**: $(\beta, \alpha) \notin \mathsf{dom}\,\square$.

`5:` Aus `4.2` $(\beta, \alpha) \notin \mathsf{dom}\,\square$
folgt via **folk**: $\square((\beta, \alpha)) = \mathcal{U}$.

`6:` $\alpha\_\square\_\beta = \square((\alpha, \beta)) \stackrel{4.1}{=} \mathcal{U} \stackrel{5}{=} \square((\beta, \alpha)) = \beta\_\square\_\alpha$.

`Ende Fallunterscheidung`

In beiden Fällen gilt: $\alpha\_\square\_\beta = \beta\_\square\_\alpha$.

Ergo `Thema0`: $\forall \alpha, \beta : \alpha\_\square\_\beta = \beta\_\square\_\alpha$.

Konsequenz via **365-1(Def)**: $\square$ kommutativ.

<u>Beweis **365-3**</u> `c)` `VS` gleich $(\square \text{ kommutativ auf } Q) \wedge (\mathsf{dom}\, \square = Q \times Q)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots \mathsf{dom}\, \square = Q \times Q$"
folgt via **folk**: $\mathsf{dom}\, \square \subseteq Q \times Q$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\square$ kommutativ auf $Q \ldots$" und
aus `1`"$\mathsf{dom}\, \square \subseteq Q \times Q$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $\square$ kommutativ.

`d)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $\square$ kommutativ auf Q.

`Thema0` $\alpha, \beta \in Q$.

`1.1:` Aus `Thema0`"$\alpha, \beta \in Q$"
folgt via **folk**: $(\alpha, \beta) \in Q \times Q$.

`1.2:` Aus `Thema0`"$\ldots \beta \in Q$" und
aus `Thema0`"$\alpha \in Q \ldots$"
folgt via **folk**: $(\beta, \alpha) \in Q \times Q$.

`1.3:` Aus `Thema0`"$\alpha, \beta \in Q$" und
aus `VS` gleich "$\square$ kommutativ auf Q"
folgt via **210-1(Def)**: $\alpha_\text{-}\square_\text{-}\beta = \beta_\text{-}\square_\text{-}\alpha$.

`2.1:` Aus `1.1`"$(\alpha, \beta) \in Q \times Q$"
folgt via **258-11**: $(\square \upharpoonright Q \times Q)\,((\alpha, \beta)) = \square((\alpha, \beta))$.

`2.2:` Aus `1.2`"$(\beta, \alpha) \in Q \times Q$"
folgt via **258-11**: $(\square \upharpoonright Q \times Q)\,((\beta, \alpha)) = \square((\beta, \alpha))$.

`3:`
$$\alpha_\text{-}(\square \upharpoonright Q \times Q)_\text{-}\beta = (\square \upharpoonright Q \times Q)\,((\alpha, \beta)) \stackrel{2.1}{=} \square((\alpha, \beta)) = \alpha_\text{-}\square_\text{-}\beta \stackrel{1.3}{=} \beta_\text{-}\square_\text{-}\alpha = \square((\beta, \alpha)) \stackrel{2.2}{=} (\square \upharpoonright Q \times Q)\,((\beta, \alpha)) = \beta_\text{-}(\square \upharpoonright Q \times Q)_\text{-}\alpha.$$

Ergo `Thema0`: $\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in Q) \Rightarrow (\alpha_\text{-}(\square \upharpoonright Q \times Q)_\text{-}\beta = \beta_\text{-}(\square \upharpoonright Q \times Q)_\text{-}\alpha)$.

Konsequenz via **210-1(Def)**: `A1` | "$(\square \upharpoonright Q \times Q)$ kommutativ auf Q"

`1:` Via **351-1** gilt: $\mathsf{dom}\, (\square \upharpoonright Q \times Q) \subseteq Q \times Q$.

`2:` Aus `A1` gleich "$(\square \upharpoonright Q \times Q)$ kommutativ auf Q" und
aus `1`"$\mathsf{dom}\, (\square \upharpoonright Q \times Q) \subseteq Q \times Q$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $(\square \upharpoonright Q \times Q)$ kommutativ.

<u>Beweis **365-3**</u> `d)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $(\square \restriction Q \times Q)$ kommutativ.

$\boxed{\texttt{Thema0}}$ $\alpha, \beta \in Q$.

`1.1:` Aus `Thema0`“$\alpha, \beta \in Q$”
folgt via **folk**: $(\alpha, \beta) \in Q \times Q$.

`1.2:` Aus `Thema0`“$\ldots \beta \in Q$” und
aus `Thema0`“$\alpha \in Q \ldots$”
folgt via **folk**: $(\beta, \alpha) \in Q \times Q$.

`1.3:` Aus `VS` gleich “$(\square \restriction Q \times Q)$ kommutativ”
folgt via **365-1(Def)**:
$$\alpha_{-}(\square \restriction Q \times Q)_{-}\beta = \beta_{-}(\square \restriction Q \times Q)_{-}\alpha.$$

`2.1:` Aus `1.1`“$(\alpha, \beta) \in Q \times Q$”
folgt via **258-11**: $(\square \restriction Q \times Q)((\alpha, \beta)) = \square((\alpha, \beta))$.

`2.2:` Aus `1.2`“$(\beta, \alpha) \in Q \times Q$”
folgt via **258-11**: $(\square \restriction Q \times Q)((\beta, \alpha)) = \square((\beta, \alpha))$.

`3:` $$\alpha_{-}\square_{-}\beta = \square((\alpha, \beta)) \stackrel{2.1}{=} (\square \restriction Q \times Q)((\alpha, \beta))$$
$$= \alpha_{-}(\square \restriction Q \times Q)_{-}\beta \stackrel{1.3}{=} \beta_{-}(\square \restriction Q \times Q)_{-}\alpha$$
$$= (\square \restriction Q \times Q)((\beta, \alpha)) \stackrel{2.2}{=} \square((\beta, \alpha)) = \beta_{-}\square_{-}\alpha.$$

Ergo `Thema0`: $\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in Q) \Rightarrow (\alpha_{-}\square_{-}\beta = \beta_{-}\square_{-}\alpha)$.

Konsequenz via **210-1(Def)**: $\square$ kommutativ auf Q.

`e)` `VS` gleich $(\square$ Algebra in $A) \wedge (\square$ kommutativ auf $A)$.

`1:` Aus `VS` gleich “$\square$ Algebra in $A \ldots$”
folgt via **93-6**: $\mathsf{dom}\, \square = A \times A$.

`2:` Aus `VS` gleich “$\ldots \square$ kommutativ auf A” und
aus `1`“$\mathsf{dom}\, \square = A \times A$”
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $\square$ kommutativ.

$\square$

365-4. Generelle Assoziativität gilt bereits unter einschränkenden Voraussetzungen.

365-4(Satz) *Die Aussagen* `i)`, `ii)` `iii)`, `iv)` *sind äquivalent:*

`i)` $\Box$ *assoziativ.*

`ii)` $\Box_{\mathsf{fkt}}$ *assoziativ.*

`iii)` $\Box$ *assoziativ auf* $\mathcal{U}$.

`iv)` $\forall\alpha,\beta,\gamma : ((\alpha,\beta{}_{\_}\Box{}_{\_}\gamma)\in\mathsf{dom}\,\Box)\vee((\alpha{}_{\_}\Box{}_{\_}\beta,\gamma)\in\mathsf{dom}\,\Box)$
$$\Rightarrow (\alpha{}_{\_}\Box{}_{\_}(\beta{}_{\_}\Box{}_{\_}\gamma) = (\alpha{}_{\_}\Box{}_{\_}\beta){}_{\_}\Box{}_{\_}\gamma).$$

`ALG`-**Notation**.

<u>Beweis **365-4**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $\square$ assoziativ.

`Thema0` α, β, γ.

1: Aus `VS` gleich "$\square$ assoziativ"
folgt via **365-1(Def)**: $\alpha\_\square\_(\beta\_\square\_\gamma) = (\alpha\_\square\_\beta)\_\square\_\gamma$.

2: Aus 1
folgt: $\square((\alpha, \square((\beta, \gamma)))) = \square((\square((\alpha, \beta)), \gamma))$.

3.1: Via **258-14** gilt: $\square_{\mathsf{fkt}}((\alpha, \beta)) = \square((\alpha, \beta))$.

3.2: Via **258-14** gilt: $\square_{\mathsf{fkt}}((\beta, \gamma)) = \square((\beta, \gamma))$.

3.3: Via **258-14** gilt: $\square_{\mathsf{fkt}}((\alpha, \square((\beta, \gamma)))) = \square((\alpha, \square((\beta, \gamma))))$.

3.4: Via **258-14** gilt: $\square_{\mathsf{fkt}}((\square((\alpha, \beta)), \gamma)) = \square((\square((\alpha, \beta)), \gamma))$.

4: $\alpha\_\square_{\mathsf{fkt}}\_(\beta\_\square_{\mathsf{fkt}}\_\gamma) = \alpha\_\square_{\mathsf{fkt}}\_\square_{\mathsf{fkt}}((\beta, \gamma))$

$$\stackrel{3.2}{=} \alpha\_\square_{\mathsf{fkt}}\_\square((\beta, \gamma)) = \square_{\mathsf{fkt}}((\alpha, \square((\beta, \gamma))))$$

$$\stackrel{3.3}{=} \square((\alpha, \square((\beta, \gamma)))) \stackrel{2}{=} \square((\square((\alpha, \beta)), \gamma))$$

$$\stackrel{3.4}{=} \square_{\mathsf{fkt}}((\square((\alpha, \beta)), \gamma)) = \square((\alpha, \beta))\_\square_{\mathsf{fkt}}\_\gamma$$

$$\stackrel{3.1}{=} \square_{\mathsf{fkt}}((\alpha, \beta))\_\square_{\mathsf{fkt}}\_\gamma = (\alpha\_\square_{\mathsf{fkt}}\_\beta)\_\square_{\mathsf{fkt}}\_\gamma.$$

Ergo `Thema0`: $\forall \alpha, \beta, \gamma : \alpha\_\square_{\mathsf{fkt}}\_(\beta\_\square_{\mathsf{fkt}}\_\gamma) = (\alpha\_\square_{\mathsf{fkt}}\_\beta)\_\square_{\mathsf{fkt}}\_\gamma$.

Konsequenz via **365-1(Def)**: $\square_{\mathsf{fkt}}$ assoziativ.

<u>Beweis **365-4**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $\qquad \square_{\mathsf{fkt}}$ assoziativ.

$\boxed{\texttt{Thema0}}$ $\qquad \alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{U}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\square_{\mathsf{fkt}}$ assoziativ"
folgt via **365-1(Def)**:
$$\alpha \,{}_-\square_{\mathsf{fkt}}{}_-\, (\beta \,{}_-\square_{\mathsf{fkt}}{}_-\, \gamma) = (\alpha \,{}_-\square_{\mathsf{fkt}}{}_-\, \beta) \,{}_-\square_{\mathsf{fkt}}{}_-\, \gamma.$$

`2:` Aus `1`
folgt: $\square_{\mathsf{fkt}}((\alpha, \square_{\mathsf{fkt}}((\beta, \gamma)))) = \square_{\mathsf{fkt}}((\square_{\mathsf{fkt}}((\alpha, \beta)), \gamma))$.

`3.1:` Via **258-14** gilt: $\square_{\mathsf{fkt}}((\alpha, \beta)) = \square((\alpha, \beta))$.

`3.2:` Via **258-14** gilt: $\square_{\mathsf{fkt}}((\beta, \gamma)) = \square((\beta, \gamma))$.

`3.3:` Via **258-14** gilt: $\square_{\mathsf{fkt}}((\alpha, \square((\beta, \gamma)))) = \square((\alpha, \square((\beta, \gamma))))$.

`3.4:` Via **258-14** gilt: $\square_{\mathsf{fkt}}((\square((\alpha, \beta)), \gamma)) = \square((\square((\alpha, \beta)), \gamma))$.

`4:` $\alpha \,{}_-\square_-\, (\beta \,{}_-\square_-\, \gamma) = \alpha \,{}_-\square_-\, \square((\beta, \gamma))$
$$= \square((\alpha, \square((\beta, \gamma)))) \stackrel{3.3}{=} \square_{\mathsf{fkt}}((\alpha, \square((\beta, \gamma))))$$
$$\stackrel{3.2}{=} \square_{\mathsf{fkt}}((\alpha, \square_{\mathsf{fkt}}((\beta, \gamma)))) \stackrel{2}{=} \square_{\mathsf{fkt}}((\square_{\mathsf{fkt}}((\alpha, \beta)), \gamma))$$
$$\stackrel{3.1}{=} \square_{\mathsf{fkt}}((\square((\alpha, \beta)), \gamma)) \stackrel{3.3}{=} \square((\alpha, \square((\beta, \gamma))))$$
$$= \alpha \,{}_-\square_-\, \square((\beta, \gamma)) = \alpha \,{}_-\square_-\, (\beta \,{}_-\square_-\, \gamma).$$

Ergo `Thema0`: $\qquad \forall \alpha, \beta, \gamma : (\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{U}) \Rightarrow (\alpha \,{}_-\square_-\, (\beta \,{}_-\square_-\, \gamma) = (\alpha \,{}_-\square_-\, \beta) \,{}_-\square_-\, \gamma)$.

Konsequenz via **211-1(Def)**: $\qquad \square$ assoziativ auf $\mathcal{U}$.

Beweis **365-4** $\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{iv)}}}$ `VS` gleich $\square$ assoziativ auf $\mathcal{U}$.

$\boxed{\texttt{Thema0}}$ $((\alpha\_\square\_\beta, \gamma) \in \mathsf{dom}\,\square) \vee ((\alpha, \beta\_\square\_\gamma) \in \mathsf{dom}\,\square)$.

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

$\boxed{\texttt{0.1.Fall}}$ $(\alpha\_\square\_\beta, \gamma) \in \mathsf{dom}\,\square$.

`1:` Aus `0.1.Fall` "$(\alpha\_\square\_\beta, \gamma) \in \mathsf{dom}\,\square$"
folgt via **folk**: $\alpha\_\square\_\beta, \gamma$ Menge.

`2.1:` Aus `1` "$\alpha\_\square\_\beta \ldots$ Menge"
folgt via **93-2**: $(\alpha, \beta) \in \mathsf{dom}\,\square$.

`2.2:` Aus `1` "$\ldots \gamma$ Menge"
folgt via **folk**: $\gamma \in \mathcal{U}$.

`3:` Aus `2.1` "$(\alpha, \beta) \in \mathsf{dom}\,\square$"
folgt via **folk**: α, β Menge.

`4:` Aus `3` "α, β Menge"
folgt via **folk**: $\alpha, \beta \in \mathcal{U}$.

`5:` Aus `VS` gleich "$\square$ assoziativ auf $\mathcal{U}$",
aus `4` "$\alpha, \beta \in \mathcal{U}$" und
aus `2.2` "$\gamma \in \mathcal{U}$"
folgt via **211-1(Def)**: $\alpha\_\square\_(\beta\_\square\_\gamma) = (\alpha\_\square\_\beta)\_\square\_\gamma$.

...

...

Beweis **365-4** $\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{iv)}}}$ VS gleich $\square$ assoziativ auf $\mathcal{U}$.

...

$\boxed{\texttt{Thema0}}$ $((\alpha{}_{-}\square_{-}\beta, \gamma) \in \mathsf{dom}\,\square) \vee ((\alpha, \beta{}_{-}\square_{-}\gamma) \in \mathsf{dom}\,\square)$.

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{0.2.Fall}}$ $(\alpha, \beta{}_{-}\square_{-}\gamma) \in \mathsf{dom}\,\square$.

`1:` Aus `0.2.Fall`“$(\alpha, \beta{}_{-}\square_{-}\gamma) \in \mathsf{dom}\,\square$”
folgt via **folk**: $\alpha, \beta{}_{-}\square_{-}\gamma$ Menge.

`2.1:` Aus `1`“$\ldots \beta{}_{-}\square_{-}\gamma$ Menge”
folgt via **93-2**: $(\beta, \gamma) \in \mathsf{dom}\,\square$.

`2.2:` Aus `1`“$\alpha \ldots$ Menge”
folgt via **folk**: $\alpha \in \mathcal{U}$.

`3:` Aus `2.1`“$(\beta, \gamma) \in \mathsf{dom}\,\square$”
folgt via **folk**: β, γ Menge.

`4:` Aus `3`“β, γ Menge”
folgt via **folk**: $\beta, \gamma \in \mathcal{U}$.

`5:` Aus `VS` gleich “$\square$ assoziativ auf $\mathcal{U}$”,
aus `2.2`“$\alpha \in \mathcal{U}$” und
aus `4`“$\beta, \gamma \in \mathcal{U}$”
folgt via **211-1(Def)**: $\alpha{}_{-}\square_{-}(\beta{}_{-}\square_{-}\gamma) = (\alpha{}_{-}\square_{-}\beta){}_{-}\square_{-}\gamma$.

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$

In beiden Fällen gilt: $\alpha{}_{-}\square_{-}(\beta{}_{-}\square_{-}\gamma) = (\alpha{}_{-}\square_{-}\beta){}_{-}\square_{-}\gamma$.

Ergo `Thema0`: $\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha{}_{-}\square_{-}\beta, \gamma) \in \mathsf{dom}\,\square) \vee ((\alpha, \beta{}_{-}\square_{-}\gamma) \in \mathsf{dom}\,\square)$
$\Rightarrow (\alpha{}_{-}\square_{-}(\beta{}_{-}\square_{-}\gamma) = (\alpha{}_{-}\square_{-}\beta){}_{-}\square_{-}\gamma)$.

Beweis **365-4**

$\boxed{\texttt{iv)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ VS gleich $\forall\alpha,\beta\gamma : ((\alpha{}_{-}\square{}_{-}\beta,\gamma) \in \mathsf{dom}\,\square) \vee ((\alpha,\beta{}_{-}\square{}_{-}\gamma) \in \mathsf{dom}\,\square)$
$\Rightarrow ((\alpha{}_{-}\square{}_{-}\beta){}_{-}\square{}_{-}\gamma = \alpha{}_{-}\square{}_{-}(\beta{}_{-}\square{}_{-}\gamma))$.

`Thema0` η,ϵ,δ.

1: Es gilt: $((\eta{}_{-}\square{}_{-}\epsilon,\delta),(\eta,\epsilon{}_{-}\square{}_{-}\delta) \notin \mathsf{dom}\,\square)$
$\vee((\eta{}_{-}\square{}_{-}\epsilon,\delta) \in \mathsf{dom}\,\square) \vee ((\eta,\epsilon{}_{-}\square{}_{-}\delta) \in \mathsf{dom}\,\square)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $(\eta{}_{-}\square{}_{-}\epsilon,\delta),(\eta,\epsilon{}_{-}\square{}_{-}\delta) \notin \mathsf{dom}\,\square$.

2.1: Aus `1.1.Fall`“$(\eta{}_{-}\square{}_{-}\epsilon,\delta)\ldots \notin \mathsf{dom}\,\square$”
folgt via **93-3**: $(\eta{}_{-}\square{}_{-}\epsilon){}_{-}\square{}_{-}\delta = \mathcal{U}$.

2.2: Aus `1.1.Fall`“$\ldots(\eta,\epsilon{}_{-}\square{}_{-}\delta) \notin \mathsf{dom}\,\square$”
folgt via **93-3**: $\eta{}_{-}\square{}_{-}(\epsilon{}_{-}\square{}_{-}\delta) = \mathcal{U}$.

3: Aus 2.1 und
aus 2.2
folgt: $(\eta{}_{-}\square{}_{-}\epsilon){}_{-}\square{}_{-}\delta = \eta{}_{-}\square{}_{-}(\epsilon{}_{-}\square{}_{-}\delta)$.

`1.2.Fall` $((\eta{}_{-}\square{}_{-}\epsilon,\delta) \in \mathsf{dom}\,\square) \vee ((\eta,\epsilon{}_{-}\square{}_{-}\delta) \in \mathsf{dom}\,\square)$.

Aus `1.2.Fall` und
aus VS
folgt: $(\eta{}_{-}\square{}_{-}\epsilon){}_{-}\square{}_{-}\delta = \eta{}_{-}\square{}_{-}(\epsilon{}_{-}\square{}_{-}\delta)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$(\eta{}_{-}\square{}_{-}\epsilon){}_{-}\square{}_{-}\delta = \eta{}_{-}\square{}_{-}(\epsilon{}_{-}\square{}_{-}\delta)$.

Ergo `Thema0`: $\forall\eta,\epsilon,\delta : (\eta{}_{-}\square{}_{-}\epsilon){}_{-}\square{}_{-}\delta = \eta{}_{-}\square{}_{-}(\epsilon{}_{-}\square{}_{-}\delta)$.

Konsequenz via **365-1(Def)**: $\square$ assoziativ.

$\square$

365-5. Ist $\square$ eine Algebra in A, die auf A assoziativ ist, so ist $\square$ assoziativ.

365-5(Satz)

a) *Aus "$\square$ assoziativ" folgt "$\square$ assoziativ auf Q".*

b) *Aus "$\square$ assoziativ auf Q" und "$\mathsf{dom}\,\square \subseteq Q \times Q$" folgt "$\square$ assoziativ".*

c) *Aus "$\square$ assoziativ auf Q" und "$\mathsf{dom}\,\square = Q \times Q$" folgt "$\square$ assoziativ".*

d) *Aus "$\square$ Algebra in A" und "$\square$ assoziativ auf A" folgt "$\square$ assoziativ".*

Beweis **365-5**

`ALG`-**Notation**.

---

a) `VS` gleich $\square$ assoziativ.

`Thema0` $\alpha, \beta, \gamma \in Q$.

Aus `VS` gleich "$\square$ assoziativ"
folgt via **365-1(Def)**: $(\alpha_{-}\square_{-}\beta)_{-}\square_{-}\gamma = \alpha_{-}\square_{-}(\beta_{-}\square_{-}\gamma)$.

Ergo `Thema0`: $\forall \alpha, \beta, \gamma : (\alpha, \beta, \gamma \in Q) \Rightarrow ((\alpha_{-}\square_{-}\beta)_{-}\square_{-}\gamma = \alpha_{-}\square_{-}(\beta_{-}\square_{-}\gamma))$.

Konsequenz via **211-1(Def)**: $\square$ assoziativ auf Q.

Beweis **365-5** `b)` `VS` gleich $(\Box \text{ assoziativ auf } Q) \wedge (\mathsf{dom}\,\Box \subseteq Q \times Q)$.

`Thema0` α, β, γ.

`1:` Es gilt: $(\alpha, \beta, \gamma \in Q) \vee (\alpha \notin Q) \vee (\beta \notin Q) \vee (\gamma \notin Q)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $\alpha, \beta, \gamma \in Q$.

Aus `VS` gleich "$\Box$ assoziativ auf $Q\ldots$" und
aus `1.1.Fall` "$\alpha, \beta, \gamma \in Q$"
folgt via **211-1(Def)**: $(\alpha\_\Box\_\beta)\_\Box\_\gamma = \alpha\_\Box\_(\beta\_\Box\_\gamma)$.

`1.2.Fall` $\alpha \notin Q$.

`2.1:` Aus `1.2.Fall` "$\alpha \notin Q$"
folgt via **folk**: $(\alpha, \beta) \notin Q \times Q$.

`2.2:` Aus `1.2.Fall` "$\alpha \notin Q$"
folgt via **folk**: $(\alpha, \beta\_\Box\_\gamma) \notin Q \times Q$.

`3.1:` Aus `2.1` "$(\alpha, \beta) \notin Q \times Q$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \mathsf{dom}\,\Box \subseteq Q \times Q$"
folgt via **folk**: $(\alpha, \beta) \notin \mathsf{dom}\,\Box$.

`3.2:` Aus `2.2` "$(\alpha, \beta\_\Box\_\gamma) \notin Q \times Q$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \mathsf{dom}\,\Box \subseteq Q \times Q$"
folgt via **folk**: $(\alpha, \beta\_\Box\_\gamma) \notin \mathsf{dom}\,\Box$.

`4.1:` Aus `3.1` "$(\alpha, \beta) \notin \mathsf{dom}\,\Box$"
folgt via **93-3**: $\alpha\_\Box\_\beta = \mathcal{U}$.

`4.2:` Aus `3.2` "$(\alpha, \beta\_\Box\_\gamma) \notin \mathsf{dom}\,\Box$"
folgt via **93-3**: $\alpha\_\Box\_(\beta\_\Box\_\gamma) = \mathcal{U}$.

`5:` $(\alpha\_\Box\_\beta)\_\Box\_\gamma \stackrel{4.1}{=} \mathcal{U}\_\Box\_\gamma \stackrel{\mathbf{233-1}}{=} \mathcal{U} \stackrel{4.2}{=} \alpha\_\Box\_(\beta\_\Box\_\gamma)$.

...

...

<u>Beweis **365-5**</u> `b)` `VS` gleich $(\Box \text{ assoziativ auf } Q) \wedge (\mathsf{dom}\,\Box \subseteq Q \times Q)$.

...

`Thema0` α, β, γ.

`1:` Es gilt: $(\alpha, \beta, \gamma \in Q) \vee (\alpha \notin Q) \vee (\beta \notin Q) \vee (\gamma \notin Q)$.

`Fallunterscheidung`

...

`1.3.Fall` $\beta \notin Q$.

`2.1:` Aus `1.3.Fall`“$\beta \notin Q$”
folgt via **folk**: $(\alpha, \beta) \notin Q \times Q$.

`2.2:` Aus `1.3.Fall`“$\beta \notin Q$”
folgt via **folk**: $(\beta, \gamma) \notin Q \times Q$.

`3.1:` Aus `2.1`“$(\alpha, \beta) \notin Q \times Q$” und
aus `VS` gleich “$\ldots \mathsf{dom}\,\Box \subseteq Q \times Q$”
folgt via **folk**: $(\alpha, \beta) \notin \mathsf{dom}\,\Box$.

`3.2:` Aus `2.2`“$(\beta, \gamma) \notin Q \times Q$” und
aus `VS` gleich “$\ldots \mathsf{dom}\,\Box \subseteq Q \times Q$”
folgt via **folk**: $(\beta, \gamma) \notin \mathsf{dom}\,\Box$.

`4.1:` Aus `3.1`“$(\alpha, \beta) \notin \mathsf{dom}\,\Box$”
folgt via **93-3**: $\alpha\_\Box\_\beta = \mathcal{U}$.

`4.2:` Aus `3.2`“$(\beta, \gamma) \notin \mathsf{dom}\,\Box$”
folgt via **93-3**: $\beta\_\Box\_\gamma = \mathcal{U}$.

`5:` $(\alpha\_\Box\_\beta)\_\Box\_\gamma \stackrel{4.1}{=} \mathcal{U}\_\Box\_\gamma \stackrel{\mathbf{233-1}}{=} \mathcal{U} \stackrel{\mathbf{233-1}}{=} \alpha\_\Box\_\mathcal{U}$
$\stackrel{4.2}{=} \alpha\_\Box\_(\beta\_\Box\_\gamma)$.

...

...

Beweis **365-5** `b) VS` gleich $(\square \text{ assoziativ auf } Q) \wedge (\mathsf{dom}\,\square \subseteq Q \times Q)$.

...

`Thema0` α, β, γ.

`1:` Es gilt: $(\alpha, \beta, \gamma \in Q) \vee (\alpha \notin Q) \vee (\beta \notin Q) \vee (\gamma \notin Q)$.

`Fallunterscheidung`

...

`1.4.Fall` $\gamma \notin Q$.

`2.1:` Aus `1.4.Fall`"$\gamma \notin Q$"
folgt via **folk**: $(\alpha\_\square\_\beta, \gamma) \notin Q \times Q$.

`2.2:` Aus `1.4.Fall`"$\gamma \notin Q$"
folgt via **folk**: $(\beta, \gamma) \notin Q \times Q$.

`3.1:` Aus `2.1`"$(\alpha\_\square\_\beta, \gamma) \notin Q \times Q$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \mathsf{dom}\,\square \subseteq Q \times Q$"
folgt via **folk**: $(\alpha\_\square\_\beta, \gamma) \notin \mathsf{dom}\,\square$.

`3.2:` Aus `2.2`"$(\beta, \gamma) \notin Q \times Q$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \mathsf{dom}\,\square \subseteq Q \times Q$"
folgt via **folk**: $(\beta, \gamma) \notin \mathsf{dom}\,\square$.

`4.1:` Aus `3.1`"$(\alpha\_\square\_\beta, \gamma) \notin \mathsf{dom}\,\square$"
folgt via **93-3**: $(\alpha\_\square\_\beta)\_\square\_\gamma = \mathcal{U}$.

`4.2:` Aus `3.2`"$(\beta, \gamma) \notin \mathsf{dom}\,\square$"
folgt via **93-3**: $\beta\_\square\_\gamma = \mathcal{U}$.

`5:` $(\alpha\_\square\_\beta)\_\square\_\gamma \stackrel{4.1}{=} \mathcal{U} \stackrel{\mathbf{233-1}}{=} \alpha\_\square\,\mathcal{U} \stackrel{4.2}{=} \alpha\_\square\_(\beta\_\square\_\gamma)$.

`Ende Fallunterscheidung`
In allen Fällen gilt: $(\alpha\_\square\_\beta)\_\square\_\gamma = \alpha\_\square\_(\beta\_\square\_\gamma)$.

Ergo `Thema0`: $\forall \alpha, \beta, \gamma : (\alpha\_\square\_\beta)\_\square\_\gamma = \alpha\_\square\_(\beta\_\square\_\gamma)$.

Konsequenz via **365-1(Def)**: $\square$ assoziativ.

<u>Beweis</u> **365-5** `c)` `VS` gleich $(\Box \text{ assoziativ auf } Q) \wedge (\mathsf{dom}\,\Box = Q \times Q)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots \mathsf{dom}\,\Box = Q \times Q$"
folgt via **folk**: $\mathsf{dom}\,\Box \subseteq Q \times Q$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\Box$ assoziativ auf $Q \ldots$" und
aus `1`"$\mathsf{dom}\,\Box \subseteq Q \times Q$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $\Box$ assoziativ.

`d)` `VS` gleich $(\Box \text{ Algebra in } A) \wedge (\Box \text{ assoziativ auf } A)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\Box$ Algebra in $A \ldots$"
folgt via **93-6**: $\mathsf{dom}\,\Box = A \times A$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots \Box$ assoziativ auf A" und
aus `1`"$\mathsf{dom}\,\Box = A \times A$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $\Box$ assoziativ.

$\Box$

365-6. Rechts tunneln gilt bereits unter einschränkenden Voraussetzungen.

365-6(Satz) *Die Aussagen* `i)`, `ii)` `iii)`, `iv)` *sind äquivalent:*

`i)` $\Box$ *tunnelt rechts.*

`ii)` $\Box_{\mathsf{fkt}}$ *tunnelt rechts.*

`iii)` $\Box$ *tunnelt rechts auf* $\mathcal{U}$.

`iv)` $$\forall\alpha,\beta,\gamma : ((\alpha_\text{-}\Box_\text{-}\beta,\gamma) \in \mathsf{dom}\,\Box) \vee ((\alpha_\text{-}\Box_\text{-}\gamma,\beta) \in \mathsf{dom}\,\Box) \Rightarrow ((\alpha_\text{-}\Box_\text{-}\beta)_\text{-}\Box_\text{-}\gamma = (\alpha_\text{-}\Box_\text{-}\gamma)_\text{-}\Box_\text{-}\beta).$$

`ALG`-**Notation**.

<u>Beweis **365-6**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $\qquad\qquad$ $\Box$ tunnelt rechts.

$\boxed{\texttt{Thema0}}$ $\qquad\qquad$ α, β, γ.

`1:` Aus `VS` gleich "$\Box$ tunnelt rechts"
folgt via **365-1(Def)**: $\qquad (\alpha\_\Box\_\beta)\_\Box\_\gamma = (\alpha\_\Box\_\gamma)\_\Box\_\beta$.

`2:` Aus `1`
folgt: $\qquad \Box((\Box((\alpha, \beta)), \gamma)) = \Box((\Box((\alpha, \gamma)), \beta))$.

`3.1:` Via **258-14** gilt: $\qquad \Box_{\mathsf{fkt}}((\alpha, \beta)) = \Box((\alpha, \beta))$.

`3.2:` Via **258-14** gilt: $\qquad \Box_{\mathsf{fkt}}((\alpha, \gamma)) = \Box((\alpha, \gamma))$.

`3.3:` Via **258-14** gilt: $\qquad \Box_{\mathsf{fkt}}((\Box((\alpha, \beta)), \gamma)) = \Box((\Box((\alpha, \beta)), \gamma))$.

`3.4:` Via **258-14** gilt: $\qquad \Box_{\mathsf{fkt}}((\Box((\alpha, \gamma)), \beta)) = \Box((\Box((\alpha, \gamma)), \beta))$.

`4:` $$\begin{aligned}(\alpha\_\Box_{\mathsf{fkt}}\_\beta)\_\Box_{\mathsf{fkt}}\_\gamma &= \Box_{\mathsf{fkt}}((\alpha\_\Box_{\mathsf{fkt}}\_\beta, \gamma))\\ &= \Box_{\mathsf{fkt}}((\Box_{\mathsf{fkt}}((\alpha, \beta)), \gamma)) \stackrel{3.1}{=} \Box_{\mathsf{fkt}}((\Box((\alpha, \beta)), \gamma))\\ &\stackrel{3.3}{=} \Box((\Box((\alpha, \beta)), \gamma)) \stackrel{2}{=} \Box((\Box((\alpha, \gamma)), \beta))\\ &\stackrel{3.4}{=} \Box_{\mathsf{fkt}}((\Box((\alpha, \gamma)), \beta)) \stackrel{3.2}{=} \Box_{\mathsf{fkt}}((\Box_{\mathsf{fkt}}((\alpha, \gamma)), \beta))\\ &= \Box_{\mathsf{fkt}}((\alpha\_\Box_{\mathsf{fkt}}\_\gamma), \beta) = (\alpha\_\Box_{\mathsf{fkt}}\_\gamma)\_\Box_{\mathsf{fkt}}\_\beta.\end{aligned}$$

Ergo `Thema0`: $\qquad \forall \alpha, \beta, \gamma : (\alpha\_\Box_{\mathsf{fkt}}\_\beta)\_\Box_{\mathsf{fkt}}\_\gamma = (\alpha\_\Box_{\mathsf{fkt}}\_\gamma)\_\Box_{\mathsf{fkt}}\_\beta$.

Konsequenz via **365-1(Def)**: $\qquad \Box_{\mathsf{fkt}}$ tunnelt rechts.

Beweis **365-6** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $\square_{\mathsf{fkt}}$ tunnelt rechts.

$\boxed{\texttt{Thema0}}$ $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{U}$.

`1`: Aus `VS` gleich "$\square_{\mathsf{fkt}}$ tunnelt rechts"
folgt via **365-1(Def)**:
$$(\alpha{}_{-}\square_{\mathsf{fkt}}{}_{-}\beta){}_{-}\square_{\mathsf{fkt}}{}_{-}\gamma = (\alpha{}_{-}\square_{\mathsf{fkt}}{}_{-}\gamma){}_{-}\square_{\mathsf{fkt}}{}_{-}\beta.$$

`2`: Aus `1`
folgt: $\square_{\mathsf{fkt}}((\square_{\mathsf{fkt}}((\alpha, \beta)), \gamma)) = \square_{\mathsf{fkt}}((\square_{\mathsf{fkt}}((\alpha, \gamma)), \beta))$.

`3.1`: Via **258-14** gilt: $\square_{\mathsf{fkt}}((\alpha, \beta)) = \square((\alpha, \beta))$.

`3.2`: Via **258-14** gilt: $\square_{\mathsf{fkt}}((\alpha, \gamma)) = \square((\alpha, \gamma))$.

`3.3`: Via **258-14** gilt: $\square_{\mathsf{fkt}}((\square((\alpha, \beta)), \gamma)) = \square((\square((\alpha, \beta)), \gamma))$.

`3.4`: Via **258-14** gilt: $\square_{\mathsf{fkt}}((\square((\alpha, \gamma)), \beta)) = \square((\square((\alpha, \gamma)), \beta))$.

`4`: $$(\alpha{}_{-}\square{}_{-}\beta){}_{-}\square{}_{-}\gamma = \square((\alpha{}_{-}\square{}_{-}\beta, \gamma))$$
$$= \square((\square((\alpha, \beta)), \gamma)) \stackrel{3.3}{=} \square_{\mathsf{fkt}}((\square((\alpha, \beta)), \gamma))$$
$$\stackrel{3.1}{=} \square_{\mathsf{fkt}}((\square_{\mathsf{fkt}}((\alpha, \beta)), \gamma)) \stackrel{2}{=} \square_{\mathsf{fkt}}((\square_{\mathsf{fkt}}((\alpha, \gamma)), \beta))$$
$$\stackrel{3.2}{=} \square_{\mathsf{fkt}}((\square((\alpha, \gamma)), \beta)) \stackrel{3.4}{=} \square((\square((\alpha, \gamma)), \beta))$$
$$= \square((\alpha, \gamma)){}_{-}\square{}_{-}\beta = (\alpha{}_{-}\square{}_{-}\gamma){}_{-}\square{}_{-}\beta.$$

Ergo `Thema0`: $\forall \alpha, \beta, \gamma : (\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{U}) \Rightarrow ((\alpha{}_{-}\square{}_{-}\beta){}_{-}\square{}_{-}\gamma = (\alpha{}_{-}\square{}_{-}\gamma){}_{-}\square{}_{-}\beta)$.

Konsequenz via **344-1(Def)**: $\square$ tunnelt rechts auf $\mathcal{U}$.

<u>Beweis **365-6**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{iv)}}}$ `VS` gleich $\qquad\qquad$ $\Box$ tunnelt rechts auf $\mathcal{U}$.

$\boxed{\texttt{Thema0}}$ $\qquad ((\alpha{}_-\Box{}_-\beta, \gamma) \in \mathsf{dom}\,\Box) \vee ((\alpha{}_-\Box{}_-\gamma, \beta) \in \mathsf{dom}\,\Box)$.

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

$\boxed{\texttt{0.1.Fall}}$ $\qquad (\alpha{}_-\Box{}_-\beta, \gamma) \in \mathsf{dom}\,\Box$.

`1:` Aus `0.1.Fall`“ $(\alpha{}_-\Box{}_-\beta, \gamma) \in \mathsf{dom}\,\Box$”
folgt via **folk**: $\qquad \alpha{}_-\Box{}_-\beta, \gamma$ Menge.

`2.1:` Aus `1`“ $\alpha{}_-\Box{}_-\beta\ldots$ Menge”
folgt via **93-2**: $\qquad (\alpha, \beta) \in \mathsf{dom}\,\Box$.

`2.2:` Aus `1`“ $\ldots\gamma$ Menge”
folgt via **folk**: $\qquad \gamma \in \mathcal{U}$.

`3:` Aus `2.1`“ $(\alpha, \beta) \in \mathsf{dom}\,\Box$ ”
folgt via **folk**: $\qquad \alpha, \beta$ Menge.

`4:` Aus `3`“ α, β Menge”
folgt via **folk**: $\qquad \alpha, \beta \in \mathcal{U}$.

`5:` Aus `VS` gleich “ $\Box$ tunnelt rechts auf $\mathcal{U}$ ” ,
aus `4`“ $\alpha, \beta \in \mathcal{U}$ ” und
aus `2.2`“ $\gamma \in \mathcal{U}$ ”
folgt via **344-1(Def)**: $\qquad (\alpha{}_-\Box{}_-\beta){}_-\Box{}_-\gamma = (\alpha{}_-\Box{}_-\gamma){}_-\Box{}_-\beta$.

...

...

Beweis **365-6** $\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{iv)}}}$ `VS` gleich $\square$ tunnelt rechts auf $\mathcal{U}$.

...

$\boxed{\texttt{Thema0}}$ $((\alpha{}_\square{}_\beta, \gamma) \in \mathsf{dom}\,\square) \vee ((\alpha{}_\square{}_\gamma, \beta) \in \mathsf{dom}\,\square)$.

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{0.2.Fall}}$ $(\alpha{}_\square{}_\gamma, \beta) \in \mathsf{dom}\,\square$.

`1:` Aus `0.2.Fall`“$(\alpha{}_\square{}_\gamma, \beta) \in \mathsf{dom}\,\square$”
folgt via **folk**: $\alpha{}_\square{}_\gamma, \beta$ Menge.

`2.1:` Aus `1`“$\alpha{}_\square{}_\gamma \ldots$ Menge”
folgt via **93-2**: $(\alpha, \gamma) \in \mathsf{dom}\,\square$.

`2.2:` Aus `1`“$\ldots \beta$ Menge”
folgt via **folk**: $\beta \in \mathcal{U}$.

`3:` Aus `2.1`“$(\alpha, \gamma) \in \mathsf{dom}\,\square$”
folgt via **folk**: α, γ Menge.

`4:` Aus `3`“α, γ Menge”
folgt via **folk**: $\alpha, \gamma \in \mathcal{U}$.

`5:` Aus `VS` gleich “$\square$ tunnelt rechts auf $\mathcal{U}$”,
aus `4`“$\alpha \ldots \in \mathcal{U}$”,
aus `2.2`“$\beta \in \mathcal{U}$” und
aus `4`“$\ldots \gamma \in \mathcal{U}$”
folgt via **344-1(Def)**: $(\alpha{}_\square{}_\beta){}_\square{}_\gamma = (\alpha{}_\square{}_\gamma){}_\square{}_\beta$.

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$

In beiden Fällen gilt: $(\alpha{}_\square{}_\beta){}_\square{}_\gamma = (\alpha{}_\square{}_\gamma){}_\square{}_\beta$.

Ergo `Thema0`: $\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha{}_\square{}_\beta, \gamma) \in \mathsf{dom}\,\square) \vee ((\alpha{}_\square{}_\gamma, \beta) \in \mathsf{dom}\,\square)$
$\Rightarrow ((\alpha{}_\square{}_\beta){}_\square{}_\gamma = (\alpha{}_\square{}_\gamma){}_\square{}_\beta)$.

Beweis **365-6**

$\boxed{\texttt{iv)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich $\forall \alpha, \beta\gamma : ((\alpha\_\Box\_\beta, \gamma) \in \mathsf{dom}\,\Box) \vee ((\alpha\_\Box\_\gamma, \beta) \in \mathsf{dom}\,\Box)$
$\Rightarrow ((\alpha\_\Box\_\beta)\_\Box\_\gamma = (\alpha\_\Box\_\gamma)\_\Box\_\beta)$.

`Thema0` η, ϵ, δ.

`1:` Es gilt: $((\eta\_\Box\_\epsilon, \delta), (\eta\_\Box\_\delta, \epsilon) \notin \mathsf{dom}\,\Box)$
$\vee((\eta\_\Box\_\epsilon, \delta) \in \mathsf{dom}\,\Box) \vee ((\eta\_\Box\_\delta, \epsilon) \in \mathsf{dom}\,\Box)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $(\eta\_\Box\_\epsilon, \delta), (\eta\_\Box\_\delta, \epsilon) \notin \mathsf{dom}\,\Box$.

`2.1:` Aus `1.1.Fall` "$(\eta\_\Box\_\epsilon, \delta) \ldots \notin \mathsf{dom}\,\Box$"
folgt via **93-3**: $(\eta\_\Box\_\epsilon)\_\Box\_\delta = \mathcal{U}$.

`2.2:` Aus `1.1.Fall` "$\ldots (\eta\_\Box\_\delta, \epsilon) \notin \mathsf{dom}\,\Box$"
folgt via **93-3**: $(\eta\_\Box\_\delta)\_\Box\_\epsilon = \mathcal{U}$.

`3:` Aus `2.1` und
aus `2.2`
folgt: $(\eta\_\Box\_\epsilon)\_\Box\_\delta = (\eta\_\Box\_\delta)\_\Box\_\delta$.

`1.2.Fall` $((\eta\_\Box\_\epsilon, \delta) \in \mathsf{dom}\,\Box) \vee ((\eta\_\Box\_\delta, \epsilon) \in \mathsf{dom}\,\Box)$.

Aus `1.2.Fall` und
aus `VS`
folgt: $(\eta\_\Box\_\epsilon)\_\Box\_\delta = (\eta\_\Box\_\delta)\_\Box\_\epsilon$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$(\eta\_\Box\_\epsilon)\_\Box\_\delta = (\eta\_\Box\_\delta)\_\Box\_\epsilon$.

Ergo `Thema0`: $\forall \eta, \epsilon, \delta : (\eta\_\Box\_\epsilon)\_\Box\_\delta = (\eta\_\Box\_\delta)\_\Box\_\epsilon$.

Konsequenz via **365-1(Def)**: $\Box$ tunnelt rechts.

$\Box$

365-7. Ist $\Box$ eine Algebra in A, die auf A rechts tunnelt, so tunnelt $\Box$ rechts.

365-7(Satz)

a) *Aus "$\Box$ tunnelt rechts" folgt "$\Box$ tunnelt rechts auf Q".*

b) *Aus "$\Box$ tunnelt rechts auf Q" und "$\mathsf{dom}\,\Box \subseteq Q \times Q$" folgt "$\Box$ tunnelt rechts".*

c) *Aus "$\Box$ tunnelt rechts auf Q" und "$\mathsf{dom}\,\Box = Q \times Q$" folgt "$\Box$ tunnelt rechts".*

d) *Aus "$\Box$ Algebra in A" und "$\Box$ tunnelt rechts auf A" folgt "$\Box$ tunnelt rechts".*

Beweis **365-7**

`ALG`-**Notation**.

a) `VS` gleich $\Box$ tunnelt rechts.

$\boxed{\texttt{Thema0}}$ $\alpha, \beta, \gamma \in Q$.

Aus `VS` gleich "$\Box$ tunnelt rechts"
folgt via **365-1(Def)**: $(\alpha\_\Box\_\beta)\_\Box\_\gamma = (\alpha\_\Box\_\gamma)\_\Box\_\beta$.

Ergo `Thema0`: $\forall \alpha, \beta, \gamma : (\alpha, \beta, \gamma \in Q) \Rightarrow ((\alpha\_\Box\_\beta)\_\Box\_\gamma = (\alpha\_\Box\_\gamma)\_\Box\_\beta)$.

Konsequenz via **344-1(Def)**: $\Box$ tunnelt rechts auf Q.

<u>Beweis **365-7**</u> `b)` `VS` gleich $(\Box \text{ tunnelt rechts auf } Q) \wedge (\mathsf{dom}\,\Box \subseteq Q \times Q)$.

`Thema0` α, β, γ.

`1:` Es gilt: $(\alpha, \beta, \gamma \in Q) \vee (\alpha \notin Q) \vee (\beta \notin Q) \vee (\gamma \notin Q)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $\alpha, \beta, \gamma \in Q$.

Aus `VS` gleich "$\Box$ tunnelt rechts auf $Q \ldots$" und
aus `1.1.Fall` "$\alpha, \beta, \gamma \in Q$"
folgt via **344-1(Def)**: $(\alpha \_\Box\_ \beta) \_\Box\_ \gamma = (\alpha \_\Box\_ \gamma) \_\Box\_ \beta$.

`1.2.Fall` $\alpha \notin Q$.

`2.1:` Aus `1.2.Fall` "$\alpha \notin Q$"
folgt via **folk**: $(\alpha, \beta) \notin Q \times Q$.

`2.2:` Aus `1.2.Fall` "$\alpha \notin Q$"
folgt via **folk**: $(\alpha, \gamma) \notin Q \times Q$.

`3.1:` Aus `2.1` "$(\alpha, \beta) \notin Q \times Q$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \mathsf{dom}\,\Box \subseteq Q \times Q$"
folgt via **folk**: $(\alpha, \beta) \notin \mathsf{dom}\,\Box$.

`3.2:` Aus `2.2` "$(\alpha, \gamma) \notin Q \times Q$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \mathsf{dom}\,\Box \subseteq Q \times Q$"
folgt via **folk**: $(\alpha, \gamma) \notin \mathsf{dom}\,\Box$.

`4.1:` Aus `3.1` "$(\alpha, \beta) \notin \mathsf{dom}\,\Box$"
folgt via **93-3**: $\alpha \_\Box\_ \beta = \mathcal{U}$.

`4.2:` Aus `3.2` "$(\alpha, \gamma) \notin \mathsf{dom}\,\Box$"
folgt via **93-3**: $\alpha \_\Box\_ \gamma = \mathcal{U}$.

`5:` $(\alpha \_\Box\_ \beta) \_\Box\_ \gamma \stackrel{4.1}{=} \mathcal{U} \_\Box\_ \gamma \stackrel{\mathbf{233\text{-}1}}{=} \mathcal{U} \stackrel{\mathbf{233\text{-}1}}{=} \mathcal{U} \_\Box\_ \beta$
$\stackrel{4.2}{=} (\alpha \_\Box\_ \gamma) \_\Box\_ \beta$.

...

...

<u>Beweis **365-7**</u> `b)` `VS` gleich $(\Box \text{ tunnelt rechts auf } Q) \wedge (\mathsf{dom}\,\Box \subseteq Q \times Q)$.

...

`Thema0` α, β, γ.

`1:` Es gilt: $(\alpha, \beta, \gamma \in Q) \vee (\alpha \notin Q) \vee (\beta \notin Q) \vee (\gamma \notin Q)$.

`Fallunterscheidung`

...

`1.3.Fall` $\beta \notin Q$.

`2.1:` Aus `1.3.Fall` "$\beta \notin Q$"
folgt via **folk**: $(\alpha, \beta) \notin Q \times Q$.

`2.2:` Aus `1.3.Fall` "$\beta \notin Q$"
folgt via **folk**: $(\alpha\_\Box\_\gamma, \beta) \notin Q \times Q$.

`3.1:` Aus `2.1` "$(\alpha, \beta) \notin Q \times Q$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \mathsf{dom}\,\Box \subseteq Q \times Q$"
folgt via **folk**: $(\alpha, \beta) \notin \mathsf{dom}\,\Box$.

`3.2:` Aus `2.2` "$(\alpha\_\Box\_\gamma, \beta) \notin Q \times Q$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \mathsf{dom}\,\Box \subseteq Q \times Q$"
folgt via **folk**: $(\alpha\_\Box\_\gamma, \beta) \notin \mathsf{dom}\,\Box$.

`4.1:` Aus `3.1` "$(\alpha, \beta) \notin \mathsf{dom}\,\Box$"
folgt via **93-3**: $\alpha\_\Box\_\beta = \mathcal{U}$.

`4.2:` Aus `3.2` "$(\alpha\_\Box\_\gamma, \beta) \notin \mathsf{dom}\,\Box$"
folgt via **93-3**: $(\alpha\_\Box\_\gamma)\_\Box\_\beta = \mathcal{U}$.

`5:` $(\alpha\_\Box\_\beta)\_\Box\_\gamma \stackrel{4.1}{=} \mathcal{U}\_\Box\_\gamma \stackrel{\mathbf{233-1}}{=} \mathcal{U} \stackrel{4.2}{=} (\alpha\_\Box\_\gamma)\_\Box\_\beta$.

...

...

Beweis **365-7** `b) VS` gleich $(\Box \text{ tunnelt rechts auf } Q) \wedge (\mathsf{dom}\,\Box \subseteq Q \times Q)$.

...

`Thema0` α, β, γ.

1: Es gilt: $(\alpha, \beta, \gamma \in Q) \vee (\alpha \notin Q) \vee (\beta \notin Q) \vee (\gamma \notin Q)$.

`Fallunterscheidung`

...

`1.4.Fall` $\gamma \notin Q$.

2.1: Aus `1.4.Fall` "$\gamma \notin Q$" folgt via **folk**: $(\alpha\_\Box\_\beta, \gamma) \notin Q \times Q$.

2.2: Aus `1.4.Fall` "$\gamma \notin Q$" folgt via **folk**: $(\alpha, \gamma) \notin Q \times Q$.

3.1: Aus `2.1` "$(\alpha\_\Box\_\beta, \gamma) \notin Q \times Q$" und aus `VS` gleich "$\ldots \mathsf{dom}\,\Box \subseteq Q \times Q$" folgt via **folk**: $(\alpha\_\Box\_\beta, \gamma) \notin \mathsf{dom}\,\Box$.

3.2: Aus `2.2` "$(\alpha, \gamma) \notin Q \times Q$" und aus `VS` gleich "$\ldots \mathsf{dom}\,\Box \subseteq Q \times Q$" folgt via **folk**: $(\alpha, \gamma) \notin \mathsf{dom}\,\Box$.

4.1: Aus `3.1` "$(\alpha\_\Box\_\beta, \gamma) \notin \mathsf{dom}\,\Box$" folgt via **93-3**: $(\alpha\_\Box\_\beta)\_\Box\_\gamma = \mathcal{U}$.

4.2: Aus `3.2` "$(\alpha, \gamma) \notin \mathsf{dom}\,\Box$" folgt via **93-3**: $\alpha\_\Box\_\gamma = \mathcal{U}$.

5: $(\alpha\_\Box\_\beta)\_\Box\_\gamma \stackrel{\mathbf{4.1}}{=} \mathcal{U} \stackrel{\mathbf{233-1}}{=} \mathcal{U}\_\Box\_\beta \stackrel{\mathbf{4.2}}{=} (\alpha\_\Box\_\gamma)\_\Box\_\beta$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $(\alpha\_\Box\_\beta)\_\Box\_\gamma = (\alpha\_\Box\_\gamma)\_\Box\_\beta$.

Ergo `Thema0`: $\forall \alpha, \beta, \gamma : (\alpha\_\Box\_\beta)\_\Box\_\gamma = (\alpha\_\Box\_\gamma)\_\Box\_\beta$.

Konsequenz via **365-1(Def)**: $\Box$ tunnelt rechts.

<u>Beweis **365-7**</u> `c)` `VS` gleich $(\Box \text{ tunnelt rechts auf } Q) \wedge (\mathsf{dom}\,\Box = Q \times Q)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots \mathsf{dom}\,\Box = Q \times Q$"
folgt via **folk**: $\mathsf{dom}\,\Box \subseteq Q \times Q$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\Box$ tunnelt rechts auf $Q \ldots$" und
aus `1`"$\mathsf{dom}\,\Box \subseteq Q \times Q$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $\Box$ tunnelt rechts.

`d)` `VS` gleich $(\Box \text{ Algebra in } A) \wedge (\Box \text{ tunnelt rechts auf } A)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\Box$ Algebra in $A \ldots$"
folgt via **93-6**: $\mathsf{dom}\,\Box = A \times A$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots \Box$ tunnelt rechts auf A" und
aus `1`"$\mathsf{dom}\,\Box = A \times A$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $\Box$ tunnelt rechts.

$\Box$

365-8. Einige Anwendungen der Aussagen dieses Essays sind hier gesammelt.

365-8(Satz)

a) *Aus "$\Box$ kommutativ" und "$\Box$ assoziativ" folgt "$\Box$ tunnelt rechts".*

b) $\mathsf{A}, \mathsf{M}, \mathsf{cup}, \mathsf{cap}, \mathsf{Dlt}$ *kommutativ.*

c) $\mathsf{A}, \mathsf{cup}, \mathsf{cap}, \mathsf{Dlt}$ *assoziativ.*

d) $\mathsf{A}, \mathsf{cup}, \mathsf{cap}, \mathsf{Dlt}$ *tunnelt rechts.*

Beweis **365-8**

`ALG`-**Notation**.

---

a) `VS` gleich $(\Box \text{ kommutativ}) \wedge (\Box \text{ assoziativ})$.

1.1: Aus `VS` gleich "$\Box$ kommutativ"
folgt via **365-2**: $\Box$ kommutativ auf $\mathcal{U}$.

1.2: Aus `VS` gleich "$\Box$ assoziativ"
folgt via **365-4**: $\Box$ assoziativ auf $\mathcal{U}$.

2: Aus 1.1 "$\Box$ kommutativ auf $\mathcal{U}$" und
aus 1.2 "$\Box$ assoziativ auf $\mathcal{U}$"
folgt via **344-15**: $\Box$ tunnelt rechts auf $\mathcal{U}$.

3: Aus 2 "$\Box$ tunnelt rechts auf $\mathcal{U}$"
folgt via **365-6**: $\Box$ tunnelt rechts.

b)

1.1: Aus **AAII** "A Algebra in $\mathbb{A}$" und
aus **248-1** "A kommutativ auf $\mathbb{A}$"
folgt via **365-3**: $\boxed{\mathsf{A} \text{ kommutativ}}$

1.2: Aus **AAII** "M Algebra in $\mathbb{A}$" und
aus **248-1** "M kommutativ auf $\mathbb{A}$"
folgt via **365-3**: $\boxed{\mathsf{M} \text{ kommutativ}}$

...

Beweis **365-8** `b)` ...

$\boxed{\texttt{Thema1.3}}$ $(\alpha, \beta) \in \mathsf{dom}\,\mathsf{cup}$.

`2:` Aus `Thema1.3`“$(\alpha, \beta) \in \mathsf{dom}\,\mathsf{cup}$”
folgt via **folk**: α, β Menge.

`3.1:` Aus 2“α, β Menge”
folgt via **298-5**: $\alpha\_\mathsf{cup}\_\beta = \alpha \cup \beta$.

`3.2:` Aus 2“$\ldots \beta$ Menge” und
aus 2“$\alpha \ldots$ Menge”
folgt via **298-5**: $\beta\_\mathsf{cup}\_\alpha = \beta \cup \alpha$.

`4:` $\alpha\_\mathsf{cup}\_\beta \stackrel{3.1}{=} \alpha \cup \beta \stackrel{\mathbf{KG}\cup}{=} \beta \cup \alpha \stackrel{3.2}{=} \beta\_\mathsf{cup}\_\alpha$.

Ergo `Thema1.3`: $\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta) \in \mathsf{dom}\,\mathsf{cup}) \Rightarrow (\alpha\_\mathsf{cup}\_\beta = \beta\_\mathsf{cup}\_\alpha)$.

Konsequenz via **365-2**: $\boxed{\mathsf{cup}\text{ kommutativ}}$

$\boxed{\texttt{Thema1.4}}$ $(\alpha, \beta) \in \mathsf{dom}\,\mathsf{cap}$.

`2:` Aus `Thema1.4`“$(\alpha, \beta) \in \mathsf{dom}\,\mathsf{cap}$”
folgt via **folk**: α, β Menge.

`3.1:` Aus 2“α, β Menge”
folgt via **298-8**: $\alpha\_\mathsf{cap}\_\beta = \alpha \cap \beta$.

`3.2:` Aus 2“$\ldots \beta$ Menge” und
aus 2“$\alpha \ldots$ Menge”
folgt via **298-8**: $\beta\_\mathsf{cap}\_\alpha = \beta \cap \alpha$.

`4:` $\alpha\_\mathsf{cap}\_\beta \stackrel{3.1}{=} \alpha \cap \beta \stackrel{\mathbf{KG}\cap}{=} \beta \cap \alpha \stackrel{3.2}{=} \beta\_\mathsf{cap}\_\alpha$.

Ergo `Thema1.4`: $\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta) \in \mathsf{dom}\,\mathsf{cap}) \Rightarrow (\alpha\_\mathsf{cap}\_\beta = \beta\_\mathsf{cap}\_\alpha)$.

Konsequenz via **365-2**: $\boxed{\mathsf{cap}\text{ kommutativ}}$

...

<u>Beweis</u> **365-8** `b)` ...

$\boxed{\texttt{Thema1.5}}$ $(\alpha, \beta) \in \mathsf{dom}\,\mathsf{Dlt}$.

`2:` Aus `Thema1.5`“$(\alpha, \beta) \in \mathsf{dom}\,\mathsf{Dlt}$”
folgt via **folk**: α, β Menge.

`3.1:` Aus `2`“α, β Menge”
folgt via **298-14**: $\alpha\_\mathsf{Dlt}\_\beta = \alpha\Delta\beta$.

`3.2:` Aus `2`“$\ldots\beta$ Menge” und
aus `2`“$\alpha\ldots$ Menge”
folgt via **298-14**: $\beta\_\mathsf{Dlt}\_\alpha = \beta\Delta\alpha$.

`4:` $\alpha\_\mathsf{Dlt}\_\beta \stackrel{3.1}{=} \alpha\Delta\beta \stackrel{\mathbf{FS\Delta}}{=} \beta\Delta\alpha \stackrel{3.2}{=} \beta\_\mathsf{Dlt}\_\alpha$.

Ergo `Thema1.5`: $\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta) \in \mathsf{dom}\,\mathsf{Dlt}) \Rightarrow (\alpha\_\mathsf{Dlt}\_\beta = \beta\_\mathsf{Dlt}\_\alpha)$.

Konsequenz via **365-2**: $\boxed{\mathsf{Dlt} \text{ kommutativ}}$

`c)`

`1.1:` Aus **AAII**“A Algebra in $\mathbb{A}$” und
aus **348-2**“A assoziativ auf $\mathbb{A}$”

folgt via **365-5**: $\boxed{\mathsf{A} \text{ assoziativ}}$

...

Beweis **365-8** `c)` ...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{U}$.

`2:` Aus `Thema1.2`"$\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{U}$"
folgt via **folk**: α, β, γ Menge.

`3.1:` Aus `2`"$\alpha, \beta \ldots$ Menge"
folgt via **298-5**: $\alpha\_\mathsf{cup}\_\beta = \alpha \cup \beta$.

`3.2:` Aus `2`"$\alpha, \beta \ldots$ Menge"
folgt via **213-3**: $\alpha \cup \beta$ Menge.

`3.3:` Aus `2`"$\ldots \beta, \gamma$ Menge"
folgt via **298-5**: $\beta\_\mathsf{cup}\_\gamma = \beta \cup \gamma$.

`3.4:` Aus `2`"$\ldots \beta, \gamma$ Menge"
folgt via **213-3**: $\beta \cup \gamma$ Menge.

`4.1:` Aus `3.2`"$\alpha \cup \beta$ Menge" und
aus `2`"$\ldots \gamma$ Menge"
folgt via **298-5**: $(\alpha \cup \beta)\_\mathsf{cup}\_\gamma = (\alpha \cup \beta) \cup \gamma$.

`4.2:` Aus `2`"$\alpha \ldots$ Menge" und
aus `3.4`"$\beta \cup \gamma$ Menge"
folgt via **298-5**: $\alpha\_\mathsf{cup}\_(\beta \cup \gamma) = \alpha \cup (\beta \cup \gamma)$.

`5:` $\alpha\_\mathsf{cup}\_(\beta\_\mathsf{cup}\_\gamma) \stackrel{\mathsf{3.3}}{=} \alpha\_\mathsf{cup}\_(\beta \cup \gamma) \stackrel{\mathsf{4.2}}{=} \alpha \cup (\beta \cup \gamma)$
$\stackrel{\mathbf{AG}\cup}{=} (\alpha \cup \beta) \cup \gamma \stackrel{\mathsf{4.1}}{=} (\alpha \cup \beta)\_\mathsf{cup}\_\gamma \stackrel{\mathsf{3.1}}{=} (\alpha\_\mathsf{cup}\_\beta)\_\mathsf{cup}\_\gamma$.

Ergo `Thema1.2`:

$$\forall \alpha, \beta, \gamma : (\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{U}) \Rightarrow (\alpha\_\mathsf{cup}\_(\beta\_\mathsf{cup}\_\gamma) = (\alpha\_\mathsf{cup}\_\beta)\_\mathsf{cup}\_\gamma).$$

Konsequenz via **211-1(Def)**: cup assoziativ auf $\mathcal{U}$.

Konsequenz via **365-4**: $\boxed{\mathsf{cup}\text{ assoziativ}}$

<u>Beweis</u> **365-8** `c)` ...

$\boxed{\texttt{Thema1.3}}$ $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{U}$.

`2:` Aus `Thema1.3`“$\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{U}$”
folgt via **folk**: α, β, γ Menge.

`3.1:` Aus 2“$\alpha, \beta \ldots$ Menge”
folgt via **298-8**: $\alpha\_\mathsf{cap}\_\beta = \alpha \cap \beta$.

`3.2:` Aus 2“$\ldots \beta \ldots$ Menge”
folgt via **2-24**: $\alpha \cap \beta$ Menge.

`3.3:` Aus 2“$\ldots \beta, \gamma$ Menge”
folgt via **298-8**: $\beta\_\mathsf{cap}\_\gamma = \beta \cap \gamma$.

`3.4:` Aus 2“$\ldots \beta \ldots$ Menge”
folgt via **2-24**: $\beta \cap \gamma$ Menge.

`4.1:` Aus `3.2`“$\alpha \cap \beta$ Menge” und
aus 2“$\ldots \gamma$ Menge”
folgt via **298-8**: $(\alpha \cap \beta)\_\mathsf{cap}\_\gamma = (\alpha \cap \beta) \cap \gamma$.

`4.2:` Aus 2“$\alpha \ldots$ Menge” und
aus `3.4`“$\beta \cap \gamma$ Menge”
folgt via **298-8**: $\alpha\_\mathsf{cap}\_(\beta \cap \gamma) = \alpha \cap (\beta \cap \gamma)$.

`5:` $\alpha\_\mathsf{cap}\_(\beta\_\mathsf{cap}\_\gamma) \stackrel{3.3}{=} \alpha\_\mathsf{cap}\_(\beta \cap \gamma) \stackrel{4.2}{=} \alpha \cap (\beta \cap \gamma)$
$\stackrel{\mathbf{AG}\cap}{=} (\alpha \cap \beta) \cap \gamma \stackrel{4.1}{=} (\alpha \cap \beta)\_\mathsf{cap}\_\gamma \stackrel{3.1}{=} (\alpha\_\mathsf{cap}\_\beta)\_\mathsf{cap}\_\gamma$.

Ergo `Thema1.3`:

$$\forall \alpha, \beta, \gamma : (\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{U}) \Rightarrow (\alpha\_\mathsf{cap}\_(\beta\_\mathsf{cap}\_\gamma) = (\alpha\_\mathsf{cap}\_\beta)\_\mathsf{cap}\_\gamma).$$

Konsequenz via **211-1(Def)**: cap assoziativ auf $\mathcal{U}$.

Konsequenz via **365-4**: $\boxed{\mathsf{cap}\text{ assoziativ}}$

Beweis **365-8** `c)` ...

`Thema1.4` $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{U}$.

`2:` Aus `Thema1.4` "$\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{U}$"
folgt via **folk**: α, β, γ Menge.

`3.1:` Aus `2` "$\alpha, \beta \ldots$ Menge"
folgt via **298-14**: $\alpha\_\mathsf{Dlt}\_\beta = \alpha\Delta\beta$.

`3.2:` Aus `2` "$\alpha, \beta \ldots$ Menge"
folgt via **213-10**: $\alpha\Delta\beta$ Menge.

`3.3:` Aus `2` "$\ldots \beta, \gamma$ Menge"
folgt via **298-14**: $\beta\_\mathsf{Dlt}\_\gamma = \beta\Delta\gamma$.

`3.4:` Aus `2` "$\ldots \beta, \gamma$ Menge"
folgt via **213-10**: $\beta\Delta\gamma$ Menge.

`4.1:` Aus `3.2` "$\alpha\Delta\beta$ Menge" und
aus `2` "$\ldots \gamma$ Menge"
folgt via **298-14**: $(\alpha\Delta\beta)\_\mathsf{Dlt}\_\gamma = (\alpha\Delta\beta)\Delta\gamma$.

`4.2:` Aus `2` "$\alpha \ldots$ Menge" und
aus `3.4` "$\beta\Delta\gamma$ Menge"
folgt via **298-14**: $\alpha\_\mathsf{Dlt}\_(\beta\Delta\gamma) = \alpha\Delta(\beta\Delta\gamma)$.

`5:` $\alpha\_\mathsf{Dlt}\_(\beta\_\mathsf{Dlt}\_\gamma) \stackrel{3.3}{=} \alpha\_\mathsf{Dlt}\_(\beta\Delta\gamma) \stackrel{4.2}{=} \alpha\Delta(\beta\Delta\gamma)$
$\stackrel{\mathbf{FS\Delta}}{=} (\alpha\Delta\beta)\Delta\gamma \stackrel{4.1}{=} (\alpha\Delta\beta)\_\mathsf{Dlt}\_\gamma \stackrel{3.1}{=} (\alpha\_\mathsf{Dlt}\_\beta)\_\mathsf{Dlt}\_\gamma$.

Ergo `Thema1.4`:
$$\forall \alpha, \beta, \gamma : (\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{U}) \Rightarrow (\alpha\_\mathsf{Dlt}\_(\beta\_\mathsf{Dlt}\_\gamma) = (\alpha\_\mathsf{Dlt}\_\beta)\_\mathsf{Dlt}\_\gamma).$$

Konsequenz via **211-1(Def)**: Dlt assoziativ auf $\mathcal{U}$.

Konsequenz via **365-4**: $\boxed{\mathsf{Dlt} \text{ assoziativ}}$

<u>Beweis</u> **365-8** `d)`

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $\mathsf{A}, \mathsf{cup}, \mathsf{cap}, \mathsf{Dlt}$ kommutativ.

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `c)` gilt: $\mathsf{A}, \mathsf{cup}, \mathsf{cap}, \mathsf{Dlt}$ assoziativ.

`2:` Aus `1.1`“$\mathsf{A}, \mathsf{cup}, \mathsf{cap}, \mathsf{Dlt}$ kommutativ” und
aus `1.2`“$\mathsf{A}, \mathsf{cup}, \mathsf{cap}, \mathsf{Dlt}$ assoziativ”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\mathsf{A}, \mathsf{cup}, \mathsf{cap}, \mathsf{Dlt}$ tunnelt rechts.

$\square$

365-9. Dank **365-8** können die Essays um zehn Formeln bereichert werden.

365-9(Satz)

a) $(x+y)+z=(x+z)+y$.

b) $p\_\mathsf{cup}\_q = q\_\mathsf{cup}\_p$.

c) $p\_\mathsf{cup}\_(q\_\mathsf{cup}\_x) = (p\_\mathsf{cup}\_q)\_\mathsf{cup}\_x$.

d) $(p\_\mathsf{cup}\_q)\_\mathsf{cup}\_x = (p\_\mathsf{cup}\_x)\_\mathsf{cup}\_q$.

e) $p\_\mathsf{cap}\_q = q\_\mathsf{cap}\_p$.

f) $p\_\mathsf{cap}\_(q\_\mathsf{cap}\_x) = (p\_\mathsf{cap}\_q)\_\mathsf{cap}\_x$.

g) $(p\_\mathsf{cap}\_q)\_\mathsf{cap}\_x = (p\_\mathsf{cap}\_x)\_\mathsf{cap}\_q$.

h) $p\_\mathsf{Dlt}\_q = q\_\mathsf{Dlt}\_p$.

i) $p\_\mathsf{Dlt}\_(q\_\mathsf{Dlt}\_x) = (p\_\mathsf{Dlt}\_q)\_\mathsf{Dlt}\_x$.

j) $(p\_\mathsf{Dlt}\_q)\_\mathsf{Dlt}\_x = (p\_\mathsf{Dlt}\_x)\_\mathsf{Dlt}\_q$.

`ALG`-**Notation**.

Beweis **365-9**

1.a): Aus **365-8**"A tunnelt rechts"
folgt via **365-1(Def)**: $(x+y)+z = (x+z)+y.$

1.b): Aus **365-8**"cup kommutativ"
folgt via **365-1(Def)**: $p\_\mathsf{cup}\_q = q\_\mathsf{cup}\_p.$

1.c): Aus **365-8**"cup assoziativ"
folgt via **365-1(Def)**: $p\_\mathsf{cup}\_(q\_\mathsf{cup}\_x) = (p\_\mathsf{cup}\_q)\_\mathsf{cup}\_x.$

1.d): Aus **365-8**"cup tunnelt rechts"
folgt via **365-1(Def)**: $(p\_\mathsf{cup}\_q)\_\mathsf{cup}\_x = (p\_\mathsf{cup}\_x)\_\mathsf{cup}\_q.$

1.e): Aus **365-8**"cap kommutativ"
folgt via **365-1(Def)**: $p\_\mathsf{cap}\_q = q\_\mathsf{cap}\_p.$

1.f): Aus **365-8**"cap assoziativ"
folgt via **365-1(Def)**: $p\_\mathsf{cap}\_(q\_\mathsf{cap}\_x) = (p\_\mathsf{cap}\_q)\_\mathsf{cap}\_x.$

1.g): Aus **365-8**"cap tunnelt rechts"
folgt via **365-1(Def)**: $(p\_\mathsf{cap}\_q)\_\mathsf{cap}\_x = (p\_\mathsf{cap}\_x)\_\mathsf{cap}\_q.$

1.h): Aus **365-8**"Dlt kommutativ"
folgt via **365-1(Def)**: $p\_\mathsf{Dlt}\_q = q\_\mathsf{Dlt}\_p.$

1.i): Aus **365-8**"Dlt assoziativ"
folgt via **365-1(Def)**: $p\_\mathsf{Dlt}\_(q\_\mathsf{Dlt}\_x) = (p\_\mathsf{Dlt}\_q)\_\mathsf{Dlt}\_x.$

1.j): Aus **365-8**"Dlt tunnelt rechts"
folgt via **365-1(Def)**: $(p\_\mathsf{Dlt}\_q)\_\mathsf{Dlt}\_x = (p\_\mathsf{Dlt}\_x)\_\mathsf{Dlt}\_q.$

$\square$

Mengenlehre: InversionsFunktion E, D. $\mathsf{inv}_{E,D}$.
universelle InversionsFunktion. inv.
Weiteres über Kommutativität.

Ersterstellung: 16/12/15 **Letzte Änderung: 17/12/15**

366-1. Mit Hilfe von inv kann unter anderem x^{-1} gefällig dargestellt werden.

366-1(Definition)

1) $\mathsf{inv}_{E,D}$

$$\mathsf{366.0}(E, D) = \{((\lambda, \mu), (\mu, \lambda)) : (\lambda \in E) \wedge (\mu \in D)\}$$
$$= \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in E) \wedge (\Psi \in D) \wedge (\omega = ((\Omega, \Psi), (\Psi, \Omega))))\}.$$

2) "$\mathfrak{C}$ **InversionsFunktion** E, D" genau dann, wenn

$$\mathfrak{C} = \mathsf{inv}_{E,D}.$$

3) $\mathsf{inv} = \mathsf{inv}_{\mathcal{U},\mathcal{U}}$.

4) "$\mathfrak{C}$ **universelle InversionsFunktion**" genau dann, wenn

$$\mathfrak{C} = \mathsf{inv}.$$

366-2. Der Einsatz von $\mathsf{inv}_{E,D}, \mathsf{inv}$ kommt ins Rollen.

366-2(Satz)

a) $\mathsf{inv}_{E,D}$ *InversionsFunktion* E, D.

b) *Aus* "$\mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ *InversionsFunktion* E, D" *folgt* "$\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$".

c) inv *universelle InversionsFunktion.*

d) *Aus* "$\mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ *universelle InversionsFunktion*" *folgt* "$\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$".

Beweis **366-2** a)

Aus "$\mathsf{inv}_{E,D} = \mathsf{inv}_{E,D}$"
folgt via **366-1(Def)**: $\mathsf{inv}_{E,D}$ InversionsFunktion E, D.

b) VS gleich $\mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ InversionsFunktion E, D.

1.1: Aus VS gleich "$\mathfrak{C} \ldots$ InversionsFunktion E, D"
folgt via **366-1(Def)**: $\mathfrak{C} = \mathsf{inv}_{E,D}$.

1.2: Aus VS gleich "$\ldots \mathfrak{D}$ InversionsFunktion E, D"
folgt via **366-1(Def)**: $\mathfrak{D} = \mathsf{inv}_{E,D}$.

2: Aus 1.1 und
aus 1.2
folgt: $\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$.

c)

Aus "$\mathsf{inv} = \mathsf{inv}$"
folgt via **366-1(Def)**: inv universelle InversionsFunktion.

d) VS gleich $\mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ universelle InversionsFunktion.

1.1: Aus VS gleich "$\mathfrak{C} \ldots$ universelle InversionsFunktion"
folgt via **366-1(Def)**: $\mathfrak{C} = \mathsf{inv}$.

1.2: Aus VS gleich "$\ldots \mathfrak{D}$ universelle InversionsFunktion"
folgt via **366-1(Def)**: $\mathfrak{D} = \mathsf{inv}$.

2: Aus 1.1 und
aus 1.2
folgt: $\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$.

□

366-3. Es folgt ein Beitrag aus der Rubrik "unglaublicher Weise noch nicht bewiesen".

<u>366-3(Satz)</u>

a) *"$(p,q) \in E \times D$" genau dann, wenn "$(q,p) \in D \times E$".*

b) *Aus "$(p,q) = (u,v)$ Menge" folgt "$(q,p) = (v,u)$".*

c) *Aus "$(p,q) = (u,v)$" und "(p,q) Menge" folgt "$(q,p) = (v,u)$".*

d) *"(p,q) Menge" genau dann, wenn "(q,p) Menge".*

e) *"(p,q) Unmenge" genau dann, wenn "(q,p) Unmenge".*

f) *Aus "$(p$ Unmenge$) \vee (q$ Unmenge$)$" folgt "$p\_M\_q = \mathcal{U}$" und "$q\_M\_p = \mathcal{U}$".*

<u>`ALG`-**Notation**</u>.

<u>Beweis **366-3**</u> `a)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $(p,q) \in E \times D.$

1: Aus `VS` gleich "$(p,q) \in E \times D$" folgt via **folk**: $(q,p) \in (E \times D)^{-1}.$

2: Via **folk** gilt: $(E \times D)^{-1} = D \times E.$

3: Aus 1 und aus 2 folgt: $(q,p) \in D \times E.$

`a)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $(q,p) \in D \times E.$

1: Aus `VS` gleich "$(q,p) \in D \times E$" folgt via **folk**: $(p,q) \in (D \times E)^{-1}.$

2: Via **folk** gilt: $(D \times E)^{-1} = E \times D.$

3: Aus 1 und aus 2 folgt: $(p,q) \in E \times D.$

<u>Beweis **366-3**</u> `b)` `VS` gleich $(p,q)=(u,v)$ Menge.

`1:` Aus `VS` gleich "$(p,q)=(u,v)$ Menge"
folgt via **IGP**: $(p=u)\wedge(q=v)$.

`2:` Aus `1`"$\ldots q=v$" und
aus `1`"$p=u\ldots$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(q,p)=(v,u)$.

`c)` `VS` gleich $((p,q)=(u,v))\wedge((p,q)$ Menge$)$.

`1:` Aus `VS`
folgt: $(u,v)=(p,q)$ Menge.

`2:` Aus `1`"$(u,v)=(p,q)$ Menge"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $(v,u)=(q,p)$.

`3:` Aus `2`
folgt: $(q,p)=(v,u)$.

`d)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich (p,q) Menge.

`1:` Aus `VS` gleich "(p,q) Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: p,q Menge.

`2:` Aus `1`"$\ldots q$ Menge" und
aus `1`"$p\ldots$ Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: (q,p) Menge.

`d)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich (q,p) Menge.

`1:` Aus `VS` gleich "(q,p) Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: q,p Menge.

`2:` Aus `1`"$\ldots p$ Menge" und
aus `1`"$q\ldots$ Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: (p,q) Menge.

`e)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `d)` gilt: $((p,q)$ Menge$)\Leftrightarrow((q,p)$ Menge$)$.

`2:` Aus `1`
folgt: $(\neg((p,q)$ Menge$))\Leftrightarrow(\neg((q,p)$ Menge$))$.

`3:` Aus `2`
folgt: $((p,q)$ Unmenge$)\Leftrightarrow((q,p)$ Unmenge$)$.

<u>Beweis **366-3**</u> `f)` `VS` gleich $(p \text{ Unmenge}) \vee (q \text{ Unmenge})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$(p \text{ Unmenge}) \vee (q \text{ Unmenge})$"
folgt via **92-3**: (p, q) Unmenge.

`2.1:` Aus `1` "(p, q) Unmenge"
folgt via **17-3**: $M((p, q)) = \mathcal{U}$.

`2.2:` Aus `1` "(p, q) Unmenge"
folgt via des bereits bewiesenen `e)`: (q, p) Unmenge.

`3.1:` Aus `2.1`
folgt: $\boxed{p\_M\_q = \mathcal{U}}$

`3.2:` Aus `2.2` "(q, p) Unmenge"
folgt via **17-3**: $M((q, p)) = \mathcal{U}$.

`4:` Aus `3.2`
folgt: $\boxed{q\_M\_p = \mathcal{U}}$

□

366-4. Bei der Untersuchung des Element-Seins in $\mathsf{inv}_{E,D}$ gibt es Einiges zu tun.

366-4(Satz)

a) *Aus* "$w \in \mathsf{inv}_{E,D}$"
folgt "$\exists \Omega, \Psi : ((\Omega, \Psi) \in E \times D) \wedge (w = ((\Omega, \Psi), (\Psi, \Omega)))$".

b) *Aus* "$(p, q) \in \mathsf{inv}_{E,D}$"
folgt "$\exists \Omega, \Psi : (p = (\Omega, \Psi) \in E \times D) \wedge (q = (\Psi, \Omega) \in D \times E)$".

c) *Aus* "$((u, v), q) \in \mathsf{inv}_{E,D}$"
folgt "$(u, v) \in E \times D$" *und* "$q = (v, u) \in D \times E$".

d) *Aus* "$(p, (u, v)) \in \mathsf{inv}_{E,D}$"
folgt "$p = (v, u) \in E \times D$" *und* "$(u, v) \in D \times E$".

e) *Aus* "$((p, q), (u, v)) \in \mathsf{inv}_{E,D}$"
folgt "$(p, q) \in E \times D$" *und* "$p = v$" *und* "$q = u$"
und "$(u, v) \in D \times E$" *und* "$u = q$" *und* "$v = p$".

f) *Aus* "$(p, q) \in E \times D$" *folgt* "$((p, q), (q, p)) \in \mathsf{inv}_{E,D}$".

g) *Aus* "$(q, p) \in D \times E$" *folgt* "$((p, q), (q, p)) \in \mathsf{inv}_{E,D}$".

Beweis **366-4** a) VS gleich $w \in \mathsf{inv}_{E,D}$.

1: Aus VS gleich "$w \in \mathsf{inv}_{E,D}$"
folgt via **366-1(Def)**:
$$\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in E) \wedge (\Psi \in D) \wedge (w = ((\Omega, \Psi), (\Psi, \Omega))).$$

2: Aus 1"$\ldots (\Omega \in E) \wedge (\Psi \in D) \ldots$"
folgt via **folk**: $(\Omega, \Psi) \in E \times D$.

3: Aus 1"$\exists \Omega, \Psi \ldots$",
aus 2 und
aus 1"$\ldots w = ((\Omega, \Psi), (\Psi, \Omega))$"
folgt: $\exists \Omega, \Psi : ((\Omega, \Psi) \in E \times D) \wedge (w = ((\Omega, \Psi), (\Psi, \Omega)))$.

<u>Beweis **366-4**</u> `b)` `VS` gleich $(p,q)\in\mathsf{inv}_{E,D}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$(p,q)\in\mathsf{inv}_{E,D}$"
folgt via **ElementAxiom**: (p,q) Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$(p,q)\in\mathsf{inv}_{E,D}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$$\exists\Omega,\Psi:((\Omega,\Psi)\in E\times D)\wedge((p,q)=((\Omega,\Psi),(\Psi,\Omega))).$$

`2.1:` Aus `1.2`"$\ldots(\Omega,\Psi)\in E\times D\ldots$"
folgt via **366-3**: $(\Psi,\Omega)\in D\times E$.

`2.2:` Aus `1.2`"$\ldots(p,q)=((\Omega,\Psi),(\Psi,\Omega))$" und
aus `1.1`"(p,q) Menge"
folgt via **IGP**: $(p=(\Omega,\Psi))\wedge(q=(\Psi,\Omega))$.

`3:` Aus `1.2`"$\exists\Omega,\Psi\ldots$",
aus `2.2`"$p=(\Omega,\Psi)\ldots$",
aus `1.2`"$\ldots(\Omega,\Psi)\in E\times D\ldots$",
aus `2.2`"$\ldots q=(\Psi,\Omega)$" und
aus `2.1`
folgt:
$$\exists\Omega,\Psi:(p=(\Omega,\Psi)\in E\times D)\wedge(q=(\Psi,\Omega)\in D\times E).$$

<u>Beweis **366-4**</u> `c)` `VS` gleich $((u,v),q) \in \mathsf{inv}_{E,D}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$((u,v),q) \in \mathsf{inv}_{E,D}$"
folgt via **ElementAxiom**: $((u,v),q)$ Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$((u,v),q) \in \mathsf{inv}_{E,D}$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`:
$$\exists \Omega, \Psi : ((u,v) = (\Omega,\Psi) \in E \times D) \wedge (q = (\Psi,\Omega) \in D \times E).$$

`2.1:` Aus `2.1`
folgt: $\boxed{(u,v) \in E \times D}$

`2.2:` Aus `1.1`"$((u,v),q)$ Menge"
folgt via **folk**: (u,v) Menge.

`3:` Aus `1.2`$\ldots(u,v) = (\Omega,\Psi)\ldots$ und
aus `2.2`"(u,v) Menge"
folgt via **366-3**: $(v,u) = (\Psi,\Omega)$.

`4.1:` Aus `1.2`"$\ldots q = (\Psi,\Omega)\ldots$" und
aus `3`
folgt: $\boxed{q = (v,u)}$

`4.2:` Aus `3` und
aus `1.2`"$\ldots(\Psi,\Omega) \in D \times E$"
folgt: $\boxed{(v,u) \in D \times E}$

<u>Beweis **366-4**</u> `d)` `VS` gleich $(p,(u,v))\in \mathsf{inv}_{E,D}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$(p,(u,v))\in \mathsf{inv}_{E,D}$"
folgt via **ElementAxiom**: $(p,(u,v))$ Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$(p,(u,v))\in \mathsf{inv}_{E,D}$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`:
$$\exists\Omega,\Psi:(p=(\Omega,\Psi)\in E\times D)\wedge((u,v)=(\Psi,\Omega)\in D\times E).$$

`2.1:` Aus `2.1`
folgt: $\boxed{(u,v)\in D\times E}$

`2.2:` Aus `1.1`"$(p,(u,v))$ Menge"
folgt via **folk**: (u,v) Menge.

`3:` Aus 1.2... $(u,v)=(\Psi,\Omega)$... und
aus `2.2`"(u,v) Menge"
folgt via **366-3**: $(v,u)=(\Omega,\Psi)$.

`4.1:` Aus `1.2`"...$p=(\Omega,\Psi)$..." und
aus `3`
folgt: $\boxed{p=(v,u)}$

`4.2:` Aus `3` und
aus `1.2`"...$(\Omega,\Psi)\in E\times D$..."
folgt: $\boxed{(v,u)\in E\times D}$

<u>Beweis **366-4**</u> `e)` `VS` gleich $((p,q),(u,v)) \in \mathsf{inv}_{E,D}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$((p,q),(u,v)) \in \mathsf{inv}_{E,D}$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`:
$((p,q) \in E \times D) \wedge ((u,v) = (q,p) \in D \times E)$.

`2.1:` Aus `1`
folgt: $\boxed{(p,q) \in E \times D}$

`2.2:` Aus `1`"$\ldots (q,p) \in D \times E$"
folgt via **ElementAxiom**: (q,p) Menge.

`2.3:` Aus `1`"$\ldots (u,v) = (q,p) \in D \times E$"
folgt: $\boxed{(u,v) \in D \times E}$

`3:` Aus `1`"$\ldots (u,v) = (q,p) \ldots$" und
aus `2.2`"(q,p) Menge"
folgt via **IGP**: $\boxed{(u = q) \wedge (v = p)}$

`4:` Aus `3`
folgt: $\boxed{(p = v) \wedge (q = u)}$

<u>Beweis **366-4**</u> `f)` `VS` gleich $(p, q) \in E \times D$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$(p, q) \in E \times D$"
folgt: $\exists \Omega : \Omega = p$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$(p, q) \in E \times D$"
folgt: $\exists \Psi : \Psi = q$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$(p, q) \in E \times D$"
folgt via **ElementAxiom**: (p, q) Menge.

`2.1:` Aus `1.1`"$\ldots \Omega = p$" und
aus `1.2`"$\ldots \Psi = q$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega, \Psi) = (p, q)$.

`2.2:` Aus `1.2`"$\ldots \Psi = q$" und
aus `1.1`"$\ldots \Omega = p$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Psi, \Omega) = (q, p)$.

`2.3:` Aus `1.3`"(p, q) Menge"
folgt via **366-3**: (q, p) Menge.

`3.1:` Aus `2.1` und
aus `VS`
folgt: $(\Omega, \Psi) \in E \times D$.

`3.2:` Aus `2.1`"$(\Omega, \Psi) = (p, q)$" und
aus `2.2`"$(\Psi, \Omega) = (q, p)$"
folgt via **PaarAxiom I**: $((\Omega, \Psi), (\Psi, \Omega)) = ((p, q), (q, p))$.

`3.3:` Aus `1.3`"(p, q) Menge" und
aus `2.3`"(q, p) Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: $((p, q), (q, p))$ Menge.

`4.1:` Aus `3.1`
folgt via **folk**: $(\Omega \in E) \wedge (\Psi \in D)$.

`4.2:` Aus `3.2`
folgt: $((p, q), (q, p)) = ((\Omega, \Psi), (\Psi, \Omega))$.

`5:` Aus `1.1`"$\exists \Omega \ldots$",
aus `1.2`"$\exists \Psi \ldots$",
aus `4.1`"$(\Omega \in E) \wedge (\Psi \in D)$",
aus `4.2`"$((p, q), (q, p)) = ((\Omega, \Psi), (\Psi, \Omega))$" und
aus `3.3`"$((p, q), (q, p))$ Menge"
folgt via **366-1(Def)**: $((p, q), (q, p)) \in \mathsf{inv}_{E \times D}$.

<u>Beweis **366-4**</u> `g)` `VS` gleich $(q, p) \in D \times E$.

`1:` Aus `VS` gleich "$(q, p) \in D \times E$"
folgt via **366-3**: $(p, q) \in E \times D$.

`2:` Aus `1`"$(p, q) \in E \times D$"
folgt via des bereits bewiesenen `f)`: $((p, q), (q, p)) \in \mathsf{inv}_{E,D}$.

$\square$

366-5. $\mathsf{inv}_{E,D}$ ist eine Funktion mit erwarteten Eigenschaften.

366-5(Satz)

a) $\mathsf{inv}_{E,D}$ *Relation.*

b) $\mathsf{dom}\,(\mathsf{inv}_{E,D}) = E \times D$.

c) $\mathsf{ran}\,(\mathsf{inv}_{E,D}) = D \times E$.

d) $\mathsf{inv}_{E,D}$ *Funktion.*

e) $\mathsf{inv}_{E,D}$ *injektiv.*

f) $\mathsf{inv}_{E,D} : E \times D \to D \times E$.

g) $\mathsf{inv}_{E,D} : E \times D \to D \times E$ *bijektiv.*

h) $\mathsf{inv}_{E,D}$ *Bijektion.*

i) *“$\mathsf{inv}_{E,D}$ Menge” genau dann, wenn “$E \times D$ Menge”.*

j) *“$\mathsf{inv}_{E,D}$ Unmenge” genau dann, wenn “$E \times D$ Unmenge”.*

<u>Beweis</u> **366-5** `a)`

$\boxed{\texttt{Thema0}}$ $\qquad \alpha \in \mathsf{inv}_{E,D}$.

`1:` Aus `Thema0` "$\alpha \in \mathsf{inv}_{E,D}$"
folgt via **366-4**: $\exists \Omega, \Psi : \alpha = ((\Omega, \Psi), (\Psi, \Omega))$.

`2.1:` Aus `1`
folgt: $\exists \Phi : \Phi = (\Omega, \Psi)$.

`2.2:` Aus `1`
folgt: $\exists \Gamma : \Gamma = (\Psi, \Omega)$.

`3:` Aus `2.1` "$\ldots \Phi = (\Omega, \Psi)$" und
aus `2.2` "$\ldots \Gamma = (\Psi, \Omega)$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Phi, \Gamma) = ((\Omega, \Psi), (\Psi, \Gamma))$.

`4:` Aus `1` "$\ldots \alpha = ((\Omega, \Psi), (\Psi, \Omega))$" und
aus `3`
folgt: $\alpha = (\Phi, \Gamma)$.

`5:` Aus `2.1` "$\exists \Phi \ldots$",
aus `2.2` "$\exists \Gamma \ldots$" und
aus `4`
folgt: $\exists \Phi, \Gamma : \alpha = (\Phi, \Gamma)$.

Ergo `Thema0`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{inv}_{E,D}) \Rightarrow (\exists \Phi, \Gamma : \alpha = (\Phi, \Gamma))$.

Konsequenz via **folk**: $\mathsf{inv}_{E,D}$ Relation.

Beweis **366-5** `b)`

$\boxed{\texttt{Thema0.1}}$ $\alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{inv}_{E,D})$.

1: Aus `Thema0.1` " $\alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{inv}_{E,D})$ "
folgt via **folk**: $\exists \Omega : (\alpha, \Omega) \in \mathsf{inv}_{E,D}$.

2: Aus 1 " $\ldots (\alpha, \Omega) \in \mathsf{inv}_{E,D}$ "
folgt via **366-4**: $\exists \Psi, \Phi : \alpha = (\Psi, \Phi) \in E \times D$.

3: Aus 2
folgt: $\alpha \in E \times D$.

Ergo `Thema0.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{inv}_{E,D})) \Rightarrow (\alpha \in E \times D)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | " $\mathsf{dom}\,(\mathsf{inv}_{E,D}) \subseteq E \times D$ "

$\boxed{\texttt{Thema0.2}}$ $\alpha \in E \times D$.

1: Aus `Thema0.2` " $\alpha \in E \times D$ "
folgt via **folk**: $\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in E) \wedge (\Psi \in D) \wedge (\alpha = (\Omega, \Psi))$.

2: Aus 1 " $\ldots (\Omega \in E) \wedge (\Psi \in D) \ldots$ "
folgt via **folk**: $(\Omega, \Psi) \in E \times D$.

3: Aus 2 " $(\Omega, \Psi) \in E \times D$ "
folgt via **366-4**: $((\Omega, \Psi), (\Psi, \Omega)) \in \mathsf{inv}_{E,D}$.

4: Aus 4 " $((\Omega, \Psi), (\Psi, \Omega)) \in \mathsf{inv}_{E,D}$ "
folgt via **folk**: $(\Omega, \Psi) \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{inv}_{E.D})$.

5: Aus 1 " $\ldots \alpha = (\Omega, \Psi)$ " und
aus 4
folgt: $\alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{inv}_{E,D})$.

Ergo `Thema0.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in E \times D) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{inv}_{E \times D}))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` | " $E \times D \subseteq \mathsf{dom}\,(\mathsf{inv}_{E,D})$ "

1: Aus `A1` gleich " $\mathsf{dom}\,(\mathsf{inv}_{E,D}) \subseteq E \times D$ " und
aus `A2` gleich " $E \times D \subseteq \mathsf{dom}\,(\mathsf{inv}_{E,D})$ "
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathsf{dom}\,(\mathsf{inv}_{E,D}) = E \times D$.

<u>Beweis</u> **366-5** `c)`

$\boxed{\texttt{Thema0.1}}$ $\alpha \in \mathsf{ran}\,(\mathsf{inv}_{E,D})$.

`1:` Aus `Thema0.1`“$\alpha \in \mathsf{ran}\,(\mathsf{inv}_{E,D})$”
folgt via **folk**: $\exists \Omega : (\Omega, \alpha) \in \mathsf{inv}_{E,D}$.

`2:` Aus `1`“$\ldots (\Omega, \alpha) \in \mathsf{inv}_{E,D}$”
folgt via **366-4**: $\exists \Psi, \Phi : \alpha = (\Phi, \Psi) \in D \times E$.

`3:` Aus `2`
folgt: $\alpha \in D \times E$.

Ergo `Thema0.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{ran}\,(\mathsf{inv}_{E,D})) \Rightarrow (\alpha \in D \times E)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | “$\mathsf{ran}\,(\mathsf{inv}_{E,D}) \subseteq D \times E$”

$\boxed{\texttt{Thema0.2}}$ $\alpha \in D \times E$.

`1:` Aus `Thema0.2`“$\alpha \in D \times E$”
folgt via **folk**: $\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in D) \wedge (\Psi \in E) \wedge (\alpha = (\Omega, \Psi))$.

`2:` Aus `1`“$\ldots (\Omega \in D) \wedge (\Psi \in E) \ldots$”
folgt via **folk**: $(\Omega, \Psi) \in D \times E$.

`3:` Aus `2`“$(\Omega, \Psi) \in D \times E$”
folgt via **366-4**: $((\Psi, \Omega), (\Omega, \Psi)) \in \mathsf{inv}_{E,D}$.

`4:` Aus `4`“$((\Psi, \Omega), (\Omega, \Psi)) \in \mathsf{inv}_{E,D}$”
folgt via **folk**: $(\Omega, \Psi) \in \mathsf{ran}\,(\mathsf{inv}_{E.D})$.

`5:` Aus `1`“$\ldots \alpha = (\Omega, \Psi)$” und
aus `4`
folgt: $\alpha \in \mathsf{ran}\,(\mathsf{inv}_{E,D})$.

Ergo `Thema0.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in D \times E) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{ran}\,(\mathsf{inv}_{D \times E}))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` | “$D \times E \subseteq \mathsf{ran}\,(\mathsf{inv}_{E,D})$”

`1:` Aus `A1` gleich “$\mathsf{ran}\,(\mathsf{inv}_{E,D}) \subseteq D \times E$” und
aus `A2` gleich “$D \times E \subseteq \mathsf{ran}\,(\mathsf{inv}_{E,D})$”
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathsf{ran}\,(\mathsf{inv}_{E,D}) = D \times E$.

<u>Beweis **366-5** `d)`</u>

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $\mathsf{inv}_{E,D}$ Relation.

> $\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $(\alpha, \beta), (\alpha, \gamma) \in \mathsf{inv}_{E,D}$.
>
> `2.1:` Aus `Thema1.2`"$(\alpha, \beta) \ldots \in \mathsf{inv}_{E,D}$"
> folgt via **folk**: α Menge.
>
> `2.2:` Aus `Thema1.2`"$(\alpha, \beta) \ldots \in \mathsf{inv}_{E,D}$"
> folgt via **366-4**: $\exists \Omega, \Psi : (\alpha = (\Omega, \Psi)) \wedge (\beta = (\Psi, \Omega))$.
>
> `2.3:` Aus `Thema1.2`"$\ldots (\alpha, \gamma) \in \mathsf{inv}_{E,D}$"
> folgt via **366-4**: $\exists \Phi, \Gamma : (\alpha = (\Phi, \Gamma)) \wedge (\gamma = (\Gamma, \Phi))$.
>
> `3.1:` Aus `2.3`"$\ldots \alpha = (\Phi, \Gamma) \ldots$" und
> aus `2.1`
> folgt: (Φ, Γ) Menge.
>
> `3.2:` Aus `2.2`"$\ldots \alpha = (\Omega, \Psi) \ldots$" und
> aus `2.3`"$\ldots \alpha = (\Phi, \Gamma) \ldots$"
> folgt: $(\Omega, \Psi) = (\Phi, \Gamma)$.
>
> `4:` Aus `3.2`"$(\Omega, \Psi) = (\Phi, \Gamma)$" und
> aus `3.1`"(Φ, Γ) Menge"
> folgt via **IGP**: $(\Omega = \Phi) \wedge (\Psi = \Gamma)$.
>
> `5:` Aus `4`"$\ldots \Psi = \Gamma$" und
> aus `4`"$\Omega = \Phi \ldots$"
> folgt via **PaarAxiom I**: $(\Psi, \Omega) = (\Gamma, \Phi)$.
>
> `6:` Aus `2.2`"$\ldots \beta = (\Psi, \Omega)$",
> aus `2.3`$\ldots \gamma = (\Gamma, \Phi)$ und
> aus `5`
> folgt: $\beta = \gamma$.

Ergo `Thema1.2`: `A1` | "$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha, \beta), (\alpha, \gamma) \in \mathsf{inv}_{E,D}) \Rightarrow (\beta = \gamma)$"

`2:` Aus `1.1`"$\mathsf{inv}_{E,D}$ Relation" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha, \beta), (\alpha, \gamma) \in \mathsf{inv}_{E,D}) \Rightarrow (\beta = \gamma)$"
folgt via **18-18(Def)**: $\mathsf{inv}_{E,D}$ Funktion.

<u>Beweis **366-5**</u> `e)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $(\alpha, \beta), (\gamma, \beta) \in \mathsf{inv}_{E,D}$.

`2.1:` Aus `Thema1.2`"$(\alpha, \beta) \ldots \in \mathsf{inv}_{E,D}$"
folgt via **folk**: β Menge.

`2.2:` Aus `Thema1.2`"$(\alpha, \beta) \ldots \in \mathsf{inv}_{E,D}$"
folgt via **366-4**: $\exists \Omega, \Psi : (\alpha = (\Omega, \Psi)) \wedge (\beta = (\Psi, \Omega))$.

`2.3:` Aus `Thema1.2`"$\ldots (\gamma, \beta) \in \mathsf{inv}_{E,D}$"
folgt via **366-4**: $\exists \Phi, \Gamma : (\gamma = (\Phi, \Gamma)) \wedge (\beta = (\Gamma, \Phi))$.

`3.1:` Aus `2.3`"$\ldots \beta = (\Gamma, \Phi) \ldots$" und
aus `2.1`
folgt: (Γ, Φ) Menge.

`3.2:` Aus `2.2`"$\ldots \alpha = (\Psi, \Omega) \ldots$" und
aus `2.3`"$\ldots \beta = (\Gamma, \Phi) \ldots$"
folgt: $(\Psi, \Omega) = (\Gamma, \Phi)$.

`4:` Aus `3.2`"$(\Psi, \Omega) = (\Gamma, \Phi)$" und
aus `3.1`"(Γ, Φ) Menge"
folgt via **IGP**: $(\Psi = \Gamma) \wedge (\Omega = \Phi)$.

`5:` Aus `4`"$\ldots \Omega = \Phi$" und
aus `4`"$\Psi = \Gamma \ldots$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega, \Psi) = (\Phi, \Gamma)$.

`6:` Aus `2.2`"$\ldots \alpha = (\Omega, \Psi) \ldots$",
aus `2.3`$\ldots \gamma = (\Phi, \Gamma) \ldots$ und
aus `5`
folgt: $\alpha = \gamma$.

Ergo `Thema1.2`: `A1` | "$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha, \beta), (\gamma, \beta) \in \mathsf{inv}_{E,D}) \Rightarrow (\alpha = \gamma)$"

Konsequenz via **folk**: $\mathsf{inv}_{E,D}$ injektiv.

<u>Beweis **366-5**</u> `fgh)`

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `d)` gilt: $\mathsf{inv}_{E,D}$ Funktion.

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $\mathsf{dom}\,(\mathsf{inv}_{E,D}) = E \times D$.

`1.3:` Via des bereits bewiesenen `c)` gilt: $\mathsf{ran}\,(\mathsf{inv}_{E,D}) = D \times E$.

`1.4:` Via des bereits bewiesenen `e)` gilt: $\mathsf{inv}_{E,D}$ injektiv.

`2.f):` Aus `1.1`“$\mathsf{inv}_{E,D}$ Funktion”,
aus `1.2`“$\mathsf{dom}\,(\mathsf{inv}_{E,D}) = E \times D$” und
aus `1.3`“$\mathsf{ran}\,(\mathsf{inv}_{E,D}) = D \times E$”
folgt via **21-2**: $\mathsf{inv}_{E,D} : E \times D \to D \times E$.

`3.g):` Aus `2.f)`“$\mathsf{inv}_{E,D} : E \times D \to D \times E$”,
aus `1.3`“$\mathsf{ran}\,(\mathsf{inv}_{E,D}) = D \times E$” und
aus `1.4`“$\mathsf{inv}_{E,D}$ injektiv”
folgt via **22-1(Def)**: $\mathsf{inv}_{E,D} : E \times D \to D \times E$ bijektiv.

`4.h):` aus `3.g)`“$\mathsf{inv}_{E,D} : E \times D \to D \times E$ bijektiv”
folgt via **22-3**: $\mathsf{inv}_{E,D}$ Bijektion.

`ij)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `g)` gilt: $\mathsf{inv}_{E,D} : E \times D \to D \times E$ bijektiv.

`2.i):` Aus `1`“$\mathsf{inv}_{E,D} : E \times D \to D \times E$ bijektiv”
folgt via **26-7**: $(\mathsf{inv}_{E,D}$ Menge$) \Leftrightarrow (E \times D$ Menge$)$.

`2.j):` Aus `1`“$\mathsf{inv}_{E,D} : E \times D \to D \times E$ bijektiv”
folgt via **26-8**: $(\mathsf{inv}_{E,D}$ Unmenge$) \Leftrightarrow (E \times D$ Unmenge$)$.

□

366-6. Unter anderem gilt $(\mathsf{inv}_{E,D})^{-1} = \mathsf{inv}_{D,E}$.

<u>**366-6(Satz)**</u>

a) *Aus* “$(p,q) \in E \times D$” *folgt* “$\mathsf{inv}_{E,D}((p,q)) = (q,p)$”.

b) *Aus* “$(p,q) \notin E \times D$” *folgt* “$\mathsf{inv}_{E,D}((p,q)) = \mathcal{U}$”.

c) $\mathsf{inv}_{E,D}[A] = (D \times E) \cap A^{-1}$.

d) $\mathsf{inv}_{E,D}[B \times C] = (D \cap C) \times (E \cap B)$.

e) $\mathsf{inv}_{E,D}[E \times D] = D \times E$.

f) $\mathsf{inv}_{E,D} \circ \mathsf{inv}_{D,E} = \mathsf{id}_{D \times E}$.

g) $(\mathsf{inv}_{E,D})^{-1} = \mathsf{inv}_{D,E}$.

h) $(\mathsf{inv}_{E,D})^{-1}[A] = (E \times D) \cap A^{-1}$.

i) $(\mathsf{inv}_{E,D})^{-1}[B \times C] = (E \cap C) \times (D \cap B)$.

j) $(\mathsf{inv}_{E,D})^{-1}[D \times E] = E \times D$.

<u>Beweis **366-6**</u> a) VS gleich $(p,q) \in E \times D$.

1: Aus VS gleich “$(p,q) \in E \times D$”
folgt via **366-4**: $((p,q),(q,p)) \in \mathsf{inv}_{E,D}$.

2: Via **366-5** gilt: $\mathsf{inv}_{E,D}$ Funktion.

3: Aus 2“$\mathsf{inv}_{E,D}$ Funktion” und
aus 1“$((p,q),(q,p)) \in \mathsf{inv}_{E,D}$”
folgt via **folk**: $\mathsf{inv}_{E,D}((p,q)) = (q,p)$.

b) VS gleich $(p,q) \notin E \times D$.

1: Via **366-5** gilt: $\mathsf{dom}\,(\mathsf{inv}_{E,D}) = E \times D$.

2: Aus VS und
aus 1
folgt: $(p,q) \notin \mathsf{dom}\,(\mathsf{inv}_{E,D})$.

3: Aus 2“$(p,q) \notin \mathsf{dom}\,(\mathsf{inv}_{E,D})$”
folgt via **folk**: $\mathsf{inv}_{E,D}((p,q)) = \mathcal{U}$.

<u>Beweis **366-6**</u> `c)`

$\boxed{\texttt{Thema0.1}}$ $\alpha \in \mathsf{inv}_{E,D}[A]$.

`1:` Aus `Thema0.1` "$\alpha \in \mathsf{inv}_{E,D}[A]$"
folgt via **folk**: $\exists \Omega : (\Omega \in A) \wedge ((\Omega, \alpha) \in \mathsf{inv}_{E,D})$.

`2:` Aus `1` "$\ldots (\Omega, \alpha) \in \mathsf{inv}_{E,D}$"
folgt via **366-4**:
$\exists \Phi, \Gamma : (\Omega = (\Phi, \Gamma) \in E \times D) \wedge (\alpha = (\Gamma, \Phi) \in D \times E)$.

`3.1:` Aus `2` "$\ldots \Omega = (\Phi, \Gamma) \ldots$" und
aus `1` "$\ldots \Omega \in A \ldots$"
folgt: $(\Phi, \Gamma) \in A$.

`3.2:` Aus `2` "$\ldots \alpha = (\Gamma, \Phi) \in D \times E$"
folgt: $\alpha \in D \times E$.

`4:` Aus `3.1` "$(\Phi, \Gamma) \in A$"
folgt via **folk**: $(\Gamma, \Phi) \in A^{-1}$.

`5:` Aus `2` "$\ldots \alpha = (\Gamma, \Phi) \ldots$" und
aus `4`
folgt: $\alpha \in A^{-1}$.

`6:` Aus `3.2` "$\alpha \in D \times E$" und
aus `5` "$\alpha \in A^{-1}$"
folgt via **folk**: $\alpha \in (D \times E) \cap A^{-1}$.

Ergo `Thema0.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{inv}_{E,D}[A]) \Rightarrow (\alpha \in (D \times E) \cap A^{-1})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{"}\mathsf{inv}_{E,D}[A] \subseteq (D \times E) \cap A^{-1}\text{"}}$

...

Beweis **366-6** `c)` ...

$\boxed{\texttt{Thema0.2}}$ $\alpha \in (D \times E) \cap A^{-1}$.

`1:` Aus `Thema0.2`“$\alpha \in (D \times E) \cap A^{-1}$”
folgt via **folk**: $(\alpha \in D \times E) \wedge (\alpha \in A^{-1})$.

`2:` Aus `1`“$\alpha \in D \times E \ldots$”
folgt via **folk**: $\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in D) \wedge (\Psi \in E) \wedge (\alpha = (\Omega, \Psi))$.

`3.1:` Aus `2`“$\ldots \Psi \in E \ldots$” und
aus `2`“$\ldots \Omega \in D \ldots$”
folgt via **folk**: $(\Psi, \Omega) \in E \times D$.

`3.2:` Aus `2`“$\ldots \alpha = (\Omega, \Psi)$” und
aus `1`“$\ldots \alpha \in A^{-1}$”
folgt: $(\Omega, \Psi) \in A^{-1}$.

`4.1:` Aus `3.1`“$(\Psi, \Omega) \in E \times D$”
folgt via **366-4**: $((\Psi, \Omega), (\Omega, \Psi)) \in \mathsf{inv}_{E,D}$.

`4.2:` Aus `3.2`“$(\Omega, \Psi) \in A^{-1}$”
folgt via **folk**: $(\Psi, \Omega) \in A$.

`5:` Aus `4.1`“$((\Psi, \Omega), (\Omega, \Psi)) \in \mathsf{inv}_{E,D}$” und
aus `4.2`“$(\Psi, \Omega) \in A$”
folgt via **folk**: $(\Omega, \Psi) \in \mathsf{inv}_{E,D}[A]$.

`6:` Aus `2`“$\ldots \alpha = (\Omega, \Psi) \ldots$” und
aus `5`
folgt: $\alpha \in \mathsf{inv}_{E,D}[A]$.

Ergo `Thema0.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in (D \times E) \cap A^{-1}) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{inv}_{E.D}[A])$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A2} \,\Big|\, \text{“}(D \times E) \cap A^{-1} \subseteq \mathsf{inv}_{E,D}[A]\text{”}}$

`1:` Aus `A1` gleich “$\mathsf{inv}_{E,D}[A] \subseteq (D \times E) \cap A^{-1}$” und
aus `A2` gleich “$(D \times E) \cap A^{-1} \subseteq \mathsf{inv}_{E,D}[A]$”
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathsf{inv}_{E,D}[A] = (D \times E) \cap A^{-1}$.

Beweis **366-6** `d)`

$$\mathsf{inv}_{E,D}[B\times C] \stackrel{\text{c)}}{=} (D\times E)\cap(B\times C)^{-1} \stackrel{\textbf{folk}}{=} (D\times E)\cap(C\times B) \stackrel{\textbf{62-1}}{=} (D\cap C)\times(E\cap B).$$

`e)`

$$\mathsf{inv}_{E,D}[E\times D] \stackrel{\text{d)}}{=} (D\cap D)\times(E\cap E) \stackrel{\textbf{folk}}{=} D\times(E\cap E) \stackrel{\textbf{folk}}{=} D\times E.$$

`f)`

`1.1:` Via **366-5** gilt: $\mathsf{inv}_{E,D}$ Funktion.

`1.2:` Via **366-5** gilt: $\mathsf{dom}\,(\mathsf{inv}_{E,D}) = E\times D$.

`1.3:` Via **366-5** gilt: $\mathsf{inv}_{D,E}$ Funktion.

`1.4:` Via **366-5** gilt: $\mathsf{dom}\,(\mathsf{inv}_{D,E}) = D\times E$.

`1.5:` Via **366-5** gilt: $\mathsf{ran}\,(\mathsf{inv}_{D,E}) = E\times D$.

`1.6:` Via **20-11** gilt: $\mathsf{id}_{D\times E}$ Funktion.

`1.7:` Via **20-11** gilt: $\mathsf{dom}\,(\mathsf{id}_{D\times E}) = D\times E$.

`2.1:` Aus `1.1`“$\mathsf{inv}_{E,D}$ Funktion” und
aus `1.3`“$\mathsf{inv}_{D,E}$ Funktion”
folgt via **18-46**: $\mathsf{inv}_{E,D}\circ\mathsf{inv}_{D,E}$ Funktion.

`2.2:` Aus `1.2` und
aus `1.5`
folgt: $\mathsf{dom}\,(\mathsf{inv}_{E,D}) = \mathsf{ran}\,(\mathsf{inv}_{D,E})$.

`3:` Aus `2.2`“$\mathsf{dom}\,(\mathsf{inv}_{E,D}) = \mathsf{ran}\,(\mathsf{inv}_{D,E})$”
folgt via **321-5**: $\mathsf{dom}\,(\mathsf{inv}_{E,D}\circ\mathsf{inv}_{D,E}) = \mathsf{dom}\,(\mathsf{inv}_{D,E})$.

`4:` Aus `3` und
aus `1.4`
folgt: $\mathsf{dom}\,(\mathsf{inv}_{E,D}\circ\mathsf{inv}_{D,E}) = D\times E$.

`5.1:` Aus `4` und
aus `1.7`
folgt: $\mathsf{dom}\,(\mathsf{inv}_{E,D}\circ\mathsf{inv}_{D,E}) = \mathsf{dom}\,(\mathsf{id}_{D\times E})$.

...

<u>Beweis</u> **366-6** `f)` ...

$\boxed{\texttt{Thema5.2}}$ $\qquad \alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{inv}_{E,D} \circ \mathsf{inv}_{D,E})$.

`6:` Aus `Thema5.2` und
aus `4`
folgt: $\alpha \in D \times E$.

`7.1:` Aus `6`"$\alpha \in D \times E$"
folgt via **20-11**: $\mathsf{id}_{D\times E}(\alpha) = \alpha$.

`7.2:` Aus `6`"$\alpha \in D \times E$"
folgt via **folk**:
$$\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in D) \wedge (\Psi \in E) \wedge (\alpha = (\Omega, \Psi)).$$

`8.1:` Aus `7.2`
folgt: $\alpha = (\Omega, \Psi)$.

`8.2:` Aus `7.2`"$\ldots (\Omega \in D) \wedge (\Psi \in E) \ldots$"
folgt via **folk**: $(\Omega, \Psi) \in D \times E$.

`9:` Aus `8.1`"$(\Omega, \Psi) \in D \times E$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$$\mathsf{inv}_{D,E}((\Omega, \Psi)) = (\Psi, \Omega).$$

`10:` Aus `7.2`"$\ldots \Psi \in E \ldots$" und
aus `7.2`"$\ldots \Omega \in D \ldots$"
folgt via **folk**: $(\Psi, \Omega) \in E \times D$.

`11:` Aus `10`"$(\Psi, \Omega) \in E \times D$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$$\mathsf{inv}_{E,D}((\Psi, \Omega)) = (\Omega, \Psi).$$

`12:` Aus `1.1`"$\mathsf{inv}_{E,D}$ Funktion" und
aus `1.3`"$\mathsf{inv}_{D,E}$ Funktion"
folgt via **18-46**:
$$(\mathsf{inv}_{E,D} \circ \mathsf{inv}_{D,E})(\alpha)) = \mathsf{inv}_{E,D}(\mathsf{inv}_{D,E}(\alpha)).$$

...

...

<u>Beweis **366-6**</u> `f)` ...

$\boxed{\texttt{Thema5.2}}$ $\alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{inv}_{E,D} \circ \mathsf{inv}_{D,E})$.

...

`13:` $(\mathsf{inv}_{E,D} \circ \mathsf{inv}_{D,E})(\alpha) \stackrel{12}{=} \mathsf{inv}_{E,D}(\mathsf{inv}_{D,E}(\alpha))$
$\stackrel{8.1}{=} \mathsf{inv}_{E,D}(\mathsf{inv}_{D,E}((\Omega, \Psi))) \stackrel{9}{=} \mathsf{inv}_{E,D}((\Psi, \Omega)) \stackrel{11}{=} (\Omega, \Psi) \stackrel{8.1}{=} \alpha.$

`14:` Aus `13` und
aus `7.1`
folgt: $(\mathsf{inv}_{E,D} \circ \mathsf{inv}_{D,E})(\alpha) = \mathsf{id}_{D\times E}(\alpha).$

Ergo `Thema5.2`:

`A1` | "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{inv}_{E,D} \circ \mathsf{inv}_{D,E})) \Rightarrow ((\mathsf{inv}_{E,D} \circ \mathsf{inv}_{D,E})(\alpha) = \mathsf{id}_{D\times E}(\alpha)))$"

`6:` Aus `2.1`"$\mathsf{inv}_{E,D} \circ \mathsf{inv}_{D,E}$ Funktion",
aus `1.6`"$\mathsf{id}_{D\times E}$ Funktion",
aus `5.1`"$\mathsf{dom}\,(\mathsf{inv}_{E,D} \circ \mathsf{inv}_{D,E}) = \mathsf{dom}\,(\mathsf{id}_{D\times E})$" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{inv}_{E,D} \circ \mathsf{inv}_{D,E})) \Rightarrow ((\mathsf{inv}_{E,D} \circ \mathsf{inv}_{D,E})(\alpha) = \mathsf{id}_{D\times E}(\alpha)))$"
folgt via **ISF**: $\mathsf{inv}_{E,D} \circ \mathsf{inv}_{D,E} = \mathsf{id}_{D\times E}.$

Beweis **366-6** g)

1.1: Via **366-5** gilt: $\mathsf{dom}\,(\mathsf{inv}_{E,D}) = E \times D$.

1.2: Via **366-5** gilt: $\mathsf{ran}\,(\mathsf{inv}_{E,D}) = D \times E$.

1.3: Via **366-5** gilt: $\mathsf{dom}\,(\mathsf{inv}_{D,E}) = D \times E$.

1.4: Via **366-5** gilt: $\mathsf{ran}\,(\mathsf{inv}_{D,E}) = E \times D$.

1.5: Via des bereits bewiesenen f) gilt: $\mathsf{inv}_{E,D} \circ \mathsf{inv}_{D,E} = \mathsf{id}_{D\times E}$.

1.6: Via des bereits bewiesenen f) gilt: $\mathsf{inv}_{D,E} \circ \mathsf{inv}_{E.D} = \mathsf{id}_{E\times D}$.

1.7: Via **366-5** gilt: $\mathsf{inv}_{D,E}$ Relation.

2.1: Aus 1.4 "$\mathsf{ran}\,(\mathsf{inv}_{D,E}) = E \times D$"
folgt via **folk**: $\mathsf{ran}\,(\mathsf{inv}_{D,E}) \subseteq E \times D$.

2.2: Aus 1.1 "$\mathsf{dom}\,(\mathsf{inv}_{E,D}) = E \times D$"
folgt via **folk**: $E \times D \subseteq \mathsf{dom}\,(\mathsf{inv}_{E,D})$.

2.3: Aus 1.2 "$\mathsf{ran}\,(\mathsf{inv}_{E,D}) = D \times E$"
folgt via **folk**: $\mathsf{ran}\,(\mathsf{inv}_{E,D}) \subseteq D \times E$.

2.4: Aus 1.3 "$\mathsf{dom}\,(\mathsf{inv}_{D,E}) = D \times E$"
folgt via **folk**: $D \times E \subseteq \mathsf{dom}\,(\mathsf{inv}_{D,E})$.

2.5: Aus 1.5 "$\mathsf{inv}_{E,D} \circ \mathsf{inv}_{D,E} = \mathsf{id}_{D\times E}$"
folgt via **folk**: $\mathsf{inv}_{E,D} \circ \mathsf{inv}_{D,E} \subseteq \mathsf{id}_{D\times E}$.

2.6: Aus 1.6 "$\mathsf{inv}_{D,E} \circ \mathsf{inv}_{E,D} = \mathsf{id}_{E\times D}$"
folgt via **folk**: $\mathsf{inv}_{D,E} \circ \mathsf{inv}_{E,D} \subseteq \mathsf{id}_{E\times D}$.

3: Aus 1.7 "$\mathsf{inv}_{D,E}$ Relation",
aus 2.1 "$\mathsf{ran}\,(\mathsf{inv}_{D,E}) \subseteq E \times D$",
aus 2.2 "$E \times D \subseteq \mathsf{dom}\,(\mathsf{inv}_{E,D})$",
aus 2.3 "$\mathsf{ran}\,(\mathsf{inv}_{E,D}) \subseteq D \times E$",
aus 2.4 "$D \times E \subseteq \mathsf{dom}\,(\mathsf{inv}_{D,E})$",
aus 2.5 "$\mathsf{inv}_{E,D} \circ \mathsf{inv}_{D,E} \subseteq D \times E$" und
aus 2.6 "$\mathsf{inv}_{D,E} \circ \mathsf{inv}_{E,D} \subseteq E \times D$"
folgt via **20-15**: $\mathsf{inv}_{D,E} = (\mathsf{inv}_{E,D})^{-1}$.

4: Aus 3
folgt: $(\mathsf{inv}_{E,D})^{-1} = \mathsf{inv}_{D,E}$.

<u>Beweis</u> **366-6** `h)`
$$(\mathsf{inv}_{E,D})^{-1}[A] \stackrel{\mathtt{g)}}{=} \mathsf{inv}_{D,E}[A] \stackrel{\mathtt{c)}}{=} (E\times D)\cap A^{-1}.$$

`i)`
$$(\mathsf{inv}_{E,D})^{-1}[B\times C] \stackrel{\mathtt{g)}}{=} \mathsf{inv}_{D,E}[B\times C] \stackrel{\mathtt{d)}}{=} (E\cap C)\times(D\cap B).$$

`j)`
$$(\mathsf{inv}_{E,D})^{-1}[D\times E] \stackrel{\mathtt{g)}}{=} \mathsf{inv}_{D,E}[D\times E] \stackrel{\mathtt{e)}}{=} E\times D.$$

□

366-7. Nun wird das Element-Sein in inv untersucht.

366-7(Satz)

a) *Aus* "$w \in \mathsf{inv}$"
folgt "$\exists \Omega, \Psi : (\Omega, \Psi$ *Menge*$) \wedge (w = ((\Omega, \Psi), (\Psi, \Omega)))$".

b) *Aus* "$(p, q) \in \mathsf{inv}$"
folgt "$\exists \Omega, \Psi : (\Omega, \Psi$ *Menge*$) \wedge (p = (\Omega, \Psi)) \wedge (q = (\Psi, \Omega))$".

c) *Aus* "$((u, v), q) \in \mathsf{inv}$" *folgt* "$u, v, q$ *Menge*" *und* "$q = (v, u)$".

d) *Aus* "$(p, (u, v)) \in \mathsf{inv}$" *folgt* "$p, u, v$ *Menge*" *und* "$p = (v, u)$".

e) *Aus* "$((p, q), (u, v)) \in \mathsf{inv}$"
folgt "p, q, u, v *Menge*" *und* "$p = v$" *und* "$q = u$"
und "$u = q$" *und* "$v = p$".

f) *Aus* "p, q *Menge*" *folgt* "$((p, q), (q, p)) \in \mathsf{inv}$".

Beweis **366-7** `a)` `VS` gleich $w \in \mathsf{inv}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$w \in \mathsf{inv}$" und
aus **366-1(Def)** "$\mathsf{inv} = \mathsf{inv}_{\mathcal{U},\mathcal{U}}$"
folgt: $w \in \mathsf{inv}_{\mathcal{U},\mathcal{U}}$.

`2:` Aus `1` "$w \in \mathsf{inv}_{\mathcal{U},\mathcal{U}}$"
folgt via **366-4**: $\exists \Omega, \Psi : ((\Omega, \Psi) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}) \wedge (w = ((\Omega, \Psi), (\Psi, \Omega)))$.

`3:` Aus `2` "$\ldots (\Omega, \Psi) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U} \ldots$"
folgt via **folk**: Ω, Ψ Menge.

`4:` Aus `2` "$\exists \Omega, \Psi \ldots$",
aus `3` und
aus `2` "$\ldots w = ((\Omega, \Psi), (\Psi, \Omega))$"
folgt: $\exists \Omega, \Psi : (\Omega, \Psi \text{ Menge}) \wedge (w = ((\Omega, \Psi), (\Psi, \Omega)))$.

<u>Beweis **366-7**</u> `b)` `VS` gleich $(p,q) \in \mathsf{inv}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$(p,q) \in \mathsf{inv}$" und
aus **366-1(Def)** "$\mathsf{inv} = \mathsf{inv}_{\mathcal{U},\mathcal{U}}$"
folgt: $(p,q) \in \mathsf{inv}_{\mathcal{U},\mathcal{U}}$.

`2:` Aus `1` "$(p,q) \in \mathsf{inv}_{\mathcal{U},\mathcal{U}}$"
folgt via **366-4**: $\exists \Omega, \Psi : (p = (\Omega, \Psi) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}) \wedge (q = (\Psi, \Omega) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U})$.

`3:` Aus `2` "$\ldots (\Omega, \Psi) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U} \ldots$"
folgt via **folk**: Ω, Ψ Menge.

`4:` Aus `2` "$\exists \Omega, \Psi \ldots$",
aus `3`,
aus `2` "$\ldots p = (\Omega, \Psi) \ldots$" und
aus `2` "$\ldots q = (\Psi, \Omega) \ldots$"
folgt: $\exists \Omega, \Psi : (\Omega, \Psi \text{ Menge}) \wedge (p = (\Omega, \Psi)) \wedge (q = (\Psi, \Omega))$.

`c)` `VS` gleich $((u,v),q) \in \mathsf{inv}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$((u,v),q) \in \mathsf{inv}$"
folgt via **ElementAxiom**: $(u,v), q$ Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$((u,v),q) \in \mathsf{inv}$" und
aus **366-1(Def)** "$\mathsf{inv} = \mathsf{inv}_{\mathcal{U},\mathcal{U}}$"
folgt: $((u,v),q) \in \mathsf{inv}_{\mathcal{U},\mathcal{U}}$.

`2.1:` Aus `1.1` "$(u,v) \ldots$ Menge"
folgt via **folk**: $\boxed{u, v \text{ Menge}}$

`2.2:` Aus `1.1`
folgt: $\boxed{q \text{ Menge}}$

`2.3:` Aus `1.2` "$((u,v),q) \in \mathsf{inv}_{\mathcal{U},\mathcal{U}}$"
folgt via **366-4**: $q = (v,u) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

`3:` Aus `2.3`
folgt: $\boxed{q = (v,u)}$

<u>Beweis **366-7**</u> `d)` `VS` gleich $(p,(u,v)) \in \mathsf{inv}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$(p,(u,v)) \in \mathsf{inv}$"
folgt via **ElementAxiom**: $p,(u,v)$ Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$(p,(u,v)) \in \mathsf{inv}$" und
aus **366-1(Def)**"$\mathsf{inv} = \mathsf{inv}_{\mathcal{U},\mathcal{U}}$"
folgt: $(p,(u,v)) \in \mathsf{inv}_{\mathcal{U},\mathcal{U}}$.

`2.1:` Aus `1.1`
folgt: $\boxed{p \text{ Menge}}$

`2.2:` Aus `1.1`"$\ldots (u,v)$ Menge"
folgt via **folk**: $\boxed{u,v \text{ Menge}}$

`2.3:` Aus `1.2`"$(p,(u,v)) \in \mathsf{inv}_{\mathcal{U},\mathcal{U}}$"
folgt via **366-4**: $p = (v,u) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

`3:` Aus `2.3`
folgt: $\boxed{p = (v,u)}$

<u>Beweis **366-7**</u> `e)` `VS` gleich $((p,q),(u,v)) \in \mathsf{inv}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$((p,q),(u,v)) \in \mathsf{inv}$"
folgt via **folk**: $(p,q),(u,v)$ Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$((p,q),(u,v)) \in \mathsf{inv}$" und
aus **366-1(Def)** "$\mathsf{inv} = \mathsf{inv}_{\mathcal{U},\mathcal{U}}$"
folgt: $((p,q),(u,v)) \in \mathsf{inv}_{\mathcal{U},\mathcal{U}}$.

`2.1:` Aus `1.1` "$(p,q)\ldots$ Menge"
folgt via **folk**: $\boxed{p,q \text{ Menge}}$

`2.2:` Aus `1.1` "$\ldots(u,v)$ Menge"
folgt via **folk**: $\boxed{u,v \text{ Menge}}$

`2.3:` Aus `1.2` "$((p,q),(u,v)) \in \mathsf{inv}_{\mathcal{U},\mathcal{U}}$"
folgt via **366-4**: $\boxed{(p=v) \wedge (q=u)}$

`2.4:` Aus `1.2` "$((p,q),(u,v)) \in \mathsf{inv}_{\mathcal{U},\mathcal{U}}$"
folgt via **366-4**: $\boxed{(u=q) \wedge (v=p)}$

`f)` `VS` gleich p,q Menge.

`1:` Aus `VS` gleich "p,q Menge"
folgt via **6-8**: $(p,q) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

`2:` Aus `1` "$(p,q) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$"
folgt via **366-4**: $((p,q),(q,p)) \in \mathsf{inv}_{\mathcal{U},\mathcal{U}}$.

`3:` Aus `2` und
aus **366-1(Def)** "$\mathsf{inv}_{\mathcal{U},\mathcal{U}} = \mathsf{inv}$"
folgt: $((p,q),(q,p)) \in \mathsf{inv}$.

□

366-8. inv ist eine Funktion mit erwarteten Eigenschaften.

366-8(Satz)

a) inv *Relation.*

b) $\mathsf{dom}\,(\mathsf{inv}) = \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

c) $\mathsf{ran}\,(\mathsf{inv}) = \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

d) inv *Funktion.*

e) inv *injektiv.*

f) $\mathsf{inv} : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \to \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

g) $\mathsf{inv} : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \to \mathcal{U} \times \mathcal{U}$ *bijektiv.*

h) inv *Bijektion.*

i) inv *Unmenge.*

Beweis **366-8** a)

1: Via **366-5** gilt: $\mathsf{inv}_{\mathcal{U},\mathcal{U}}$ Relation.

2: Aus 1 und
aus **366-1(Def)** "$\mathsf{inv}_{\mathcal{U},\mathcal{U}} = \mathsf{inv}$"
folgt: inv Relation.

b)

1: Via **366-5** gilt: $\mathsf{dom}\,(\mathsf{inv}_{\mathcal{U},\mathcal{U}}) = \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

2: Aus 1 und
aus **366-1(Def)** "$\mathsf{inv}_{\mathcal{U},\mathcal{U}} = \mathsf{inv}$"
folgt: $\mathsf{dom}\,(\mathsf{inv}) = \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

c)

1: Via **366-5** gilt: $\mathsf{ran}\,(\mathsf{inv}_{\mathcal{U},\mathcal{U}}) = \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

2: Aus 1 und
aus **366-1(Def)** "$\mathsf{inv}_{\mathcal{U},\mathcal{U}} = \mathsf{inv}$"
folgt: $\mathsf{ran}\,(\mathsf{inv}) = \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

<u>Beweis</u> **366-8** `d)`

1: Via **366-5** gilt: $\mathsf{inv}_{\mathcal{U},\mathcal{U}}$ Funktion.

2: Aus 1 und
aus **366-1(Def)** "$\mathsf{inv}_{\mathcal{U},\mathcal{U}} = \mathsf{inv}$"
folgt: inv Funktion.

`e)`

1: Via **366-5** gilt: $\mathsf{inv}_{\mathcal{U},\mathcal{U}}$ injektiv.

2: Aus 1 und
aus **366-1(Def)** "$\mathsf{inv}_{\mathcal{U},\mathcal{U}} = \mathsf{inv}$"
folgt: inv injektiv.

`f)`

1: Via **366-5** gilt: $\mathsf{inv}_{\mathcal{U},\mathcal{U}} : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \to \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

2: Aus 1 und
aus **366-1(Def)** "$\mathsf{inv}_{\mathcal{U},\mathcal{U}} = \mathsf{inv}$"
folgt: $\mathsf{inv} : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \to \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

`g)`

1: Via **366-5** gilt: $\mathsf{inv}_{\mathcal{U},\mathcal{U}} : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \to \mathcal{U} \times \mathcal{U}$ bijektiv.

2: Aus 1 und
aus **366-1(Def)** "$\mathsf{inv}_{\mathcal{U},\mathcal{U}} = \mathsf{inv}$"
folgt: $\mathsf{inv} : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \to \mathcal{U} \times \mathcal{U}$ bijektiv.

`h)`

1: Via **366-5** gilt: $\mathsf{inv}_{\mathcal{U},\mathcal{U}}$ Bijektion.

2: Aus 1 und
aus **366-1(Def)** "$\mathsf{inv}_{\mathcal{U},\mathcal{U}} = \mathsf{inv}$"
folgt: inv Bijektion.

`i)`

Aus `b)` "$\mathsf{dom}\,(\mathsf{inv}) = \mathcal{U} \times \mathcal{U}$" und
aus **7-23** "$\mathcal{U} \times \mathcal{U}$ Unmenge"
folgt via **7-9**: inv Unmenge.

□

366-9. Unter anderem gilt $\mathsf{inv}^{-1} = \mathsf{inv}$.

366-9(Satz)

a) *Aus* “p, q *Menge*” *folgt* “$\mathsf{inv}((p, q)) = (q, p)$”.

b) *Aus* “(p *Unmenge*) $\vee$ (q *Unmenge*)” *folgt* “$\mathsf{inv}((p, q)) = \mathcal{U}$”.

c) $\mathsf{inv}[A] = A^{-1}$.

d) $\mathsf{inv}[B \times C] = C \times B$.

e) $\mathsf{inv}[\mathcal{U} \times \mathcal{U}] = \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

f) $\mathsf{inv} \circ \mathsf{inv} = \mathsf{id}_{\mathcal{U} \times \mathcal{U}}$.

g) $\mathsf{inv}^{-1} = \mathsf{inv}$.

<u>Beweis **366-9**</u> `a)` `VS` gleich p, q Menge.

`1:` Aus `VS` gleich "p, q Menge"
folgt via **6-8**: $(p, q) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

`2:` Aus `1`"$(p, q) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$"
folgt via **366-6**: $\mathsf{inv}_{\mathcal{U},\mathcal{U}}((p, q)) = (q, p)$.

`3:` Aus 2 und
aus **366-1(Def)**"$\mathsf{inv}_{\mathcal{U},\mathcal{U}} = \mathsf{inv}$"
folgt: $\mathsf{inv}((p, q)) = (q, p)$.

`b)` `VS` gleich $(p \text{ Unmenge}) \vee (q \text{ Unmenge})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$(p \text{ Unmenge}) \vee (q \text{ Unmenge})$"
folgt via **6-8**: $(p, q) \notin \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

`2:` Aus `1`"$(p, q) \notin \mathcal{U} \times \mathcal{U}$"
folgt via **366-6**: $\mathsf{inv}_{\mathcal{U},\mathcal{U}}((p, q)) = \mathcal{U}$.

`3:` Aus 2 und
aus **366-1(Def)**"$\mathsf{inv}_{\mathcal{U},\mathcal{U}} = \mathsf{inv}$"
folgt: $\mathsf{inv}((p, q)) = \mathcal{U}$.

`c)`

$$\mathsf{inv}[A] \stackrel{\mathbf{366-1(Def)}}{=} \mathsf{inv}_{\mathcal{U},\mathcal{U}}[A] \stackrel{\mathbf{366-6}}{=} (\mathcal{U} \times \mathcal{U}) \cap A^{-1} \stackrel{\mathbf{KG}\cap}{=} A^{-1} \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U}) \stackrel{\mathbf{363-1}}{=} A^{-1}.$$

`d)` $\mathsf{inv}[B \times C] \stackrel{\text{c)}}{=} (B \times C)^{-1} \stackrel{\mathbf{folk}}{=} C \times B.$

`e)` $\mathsf{inv}[\mathcal{U} \times \mathcal{U}] \stackrel{\text{d)}}{=} \mathcal{U} \times \mathcal{U}.$

`f)` $\mathsf{inv} \circ \mathsf{inv} \stackrel{\mathbf{366-1(Def)}}{=} \mathsf{inv}_{\mathcal{U},\mathcal{U}} \circ \mathsf{inv}_{\mathcal{U},\mathcal{U}} \stackrel{\mathbf{366-6}}{=} \mathsf{id}_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}}.$

`g)` $\mathsf{inv}^{-1} \stackrel{\mathbf{366-1(Def)}}{=} (\mathsf{inv}_{\mathcal{U},\mathcal{U}})^{-1} \stackrel{\mathbf{366-6}}{=} \mathsf{inv}_{\mathcal{U},\mathcal{U}} \stackrel{\mathbf{366-1(Def)}}{=} \mathsf{inv}.$

□

366-10. In einem Zwischensprint soll unter anderem über $\mathsf{id}_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}}$ geschrieben werden

366-10(Satz)

a) *Aus* "$(p,q) \in E \times D$" *folgt* "$\mathsf{id}_{E\times D}[\{(p,q)\}] = \{(p,q)\}$".

b) *Aus* "p,q *Menge*" *folgt* "$\mathsf{id}_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}}[\{(p,q)\}] = \{(p,q)\}$".

c) $\{(p,q)\}^{-1} = \{(q,p)\}$.

d) *Aus* "$(p,q) \in E \times D$" *folgt* "$\mathsf{inv}_{E\times D}[\{(p,q)\}] = \{(q,p)\}$".

e) $\mathsf{inv}[\{(p,q)\}] = \{(q,p)\}$.

f) *Aus* "$\square$ *Funktion*" *folgt* "$(\square \circ \mathsf{id}_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}})((p,q)) = p\_\square\_q$".

g) *Aus* "$\square$ *Funktion*" *folgt* "$(\square \circ \mathsf{inv})((p,q)) = q\_\square\_p$".

h) $\mathsf{id}_{E\times D}[A] = (A^{-1})^{-1} \cap (E \times D) = (E \times D) \cap (A^{-1})^{-1}$.

i) $\mathsf{id}_{E\times D}[B \times C] = (E \cap B) \times (D \cap C)$.

j) $\mathsf{id}_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}}[A] = (A^{-1})^{-1}$.

k) $\mathsf{id}_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}}[B \times C] = B \times C$.

`ALG`-**Notation**.

Beweis **366-10** `a)` `VS` gleich $(p,q) \in E \times D$.

1: Via **20-11** gilt: $\mathsf{id}_{E\times D}$ Funktion.

2: Aus 1 "$\mathsf{id}_{E\times D}$ Funktion" folgt via **259-16**: $\mathsf{id}_{E\times D}[\{(p,q)\}] = \{\mathsf{id}_{E\times D}((p,q))\}$.

3: Aus `VS` gleich "$(p,q) \in E \times D$" folgt via **20-11**: $\mathsf{id}_{E\times D}((p,q)) = (p,q)$.

4: Aus 2 und aus 3 folgt: $\mathsf{id}_{E\times D}[\{(p,q)\}] = \{(p,q)\}$.

<u>Beweis **366-10**</u> `b)` `VS` gleich "Å" §p, q Menge

`1:` Aus `VS` gleich "p, q Menge"
folgt via **6-8**: $(p, q) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

`2:` Aus `1` "$(p, q) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\mathsf{id}_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}}[\{(p, q)\}] = \{(p, q)\}$.

`c)`

$\boxed{\texttt{Thema0.1}}$ $\alpha \in \{(p, q)\}^{-1}$.

`1:` Aus `Thema0.1` "$\alpha \in \{(p, q)\}^{-1}$"
folgt via **11-3**: $\exists \Omega, \Psi : (\alpha = (\Omega, \Psi)) \wedge ((\Psi, \Omega) \in \{(p, q)\})$.

`2:` Aus `1` "$\ldots (\Psi, \Omega) \in \{(p, q)\}$"
folgt via **folk**: $((\Psi, \Omega) = (p, q)) \wedge ((\Psi, \Omega)$ Menge$)$.

`3:` Aus `2` "$((\Psi, \Omega) = (p, q)) \wedge ((\Psi, \Omega)$ Menge$)$"
folgt via **366-3**: $(\Omega, \Psi) = (q, p)$.

`4:` Aus `1` "$\ldots \alpha = (\Omega, \Psi) \ldots$" und
aus `3`
folgt: $\alpha = (q, p)$.

`5:` Aus `Thema0.1` "$\alpha \in \{(p, q)\}^{-1}$"
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`6:` Aus `4` "$\alpha = (q, p)$" und
aus `5` "α Menge"
folgt via **folk**: $\alpha \in \{(q, p)\}$.

Ergo `Thema0.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{(p, q)\}^{-1}) \Rightarrow (\alpha \in \{(q, p)\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{"}\{(p, q)\}^{-1} \subseteq \{(q, p)\}\text{"}}$

...

<u>Beweis</u> **366-10** `c)` ...

`Thema0.2` $\alpha \in \{(q,p)\}$.

`1:` Aus `Thema0.2`"$\alpha \in \{(q,p)\}$"
folgt via **folk**: $\alpha = (q,p)$ Menge.

`2:` Aus `1`"$\ldots (q,p)$ Menge"
folgt via **366-3**: (p,q) Menge.

`3:` Aus `2`"(p,q) Menge"
folgt via **folk**: $(p,q) \in \{(p,q)\}$.

`4:` Aus `3`"$(p,q) \in \{(p,q)\}$"
folgt via **folk**: $(q,p) \in \{(p,q)\}^{-1}$.

`5:` Aus `1`"$\alpha = (q,p) \ldots$" und
aus `4`
folgt: $\alpha \in \{(p,q)\}^{-1}$.

Ergo `Thema0.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{(q,p)\}) \Rightarrow (\alpha \in \{(p,q)\}^{-1})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` "$\{(q,p)\} \subseteq \{(p,q)\}^{-1}$"

`1:` Aus `A1` gleich "$\{(p,q)\}^{-1} \subseteq \{(q,p)\}$" und
aus `A2` gleich "$\{(q,p)\} \subseteq \{(p,q)\}^{-1}$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\{(p,q)\}^{-1} = \{(q,p)\}$.

<u>Beweis **366-10**</u> `d)` `VS` gleich $(p, q) \in E \times D$.

`1:` Aus `VS` gleich "$(p, q) \in E \times D$"
folgt via **folk**: $(q, p) \in (E \times D)^{-1}$.

`2:` Via **folk** gilt: $(E \times D)^{-1} = D \times E$.

`3:` Aus `1` und
aus `2`
folgt: $(q, p) \in D \times E$.

`4:` Aus `3`"$(q, p) \in D \times E$"
folgt via **1-8**: $\{(q, p)\} \subseteq D \times E$.

`5:` Aus `4`"$\{(q, p)\} \subseteq D \times E$"
folgt via **folk**: $(D \times E) \cap \{(q, p)\} = \{(q, p)\}$.

`6:` $\mathsf{inv}_{E \times D}[\{(p, q)\}] \stackrel{\mathbf{366-6}}{=} (D \times E) \cap \{(p, q)\}^{-1} \stackrel{\mathtt{c)}}{=} (D \times E) \cap \{(q, p)\} \stackrel{\mathtt{5}}{=} \{(q, p)\}$.

`e)` $\mathsf{inv}[\{(p, q)\}] \stackrel{\mathbf{366-9}}{=} \{(p, q)\}^{-1} \stackrel{\mathtt{c)}}{=} \{(q, p)\}$.

<u>Beweis **366-10**</u> `f)` `VS` gleich $\Box$ Funktion.

`1:` Via **20-11** gilt: $\mathsf{id}_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}}$ Funktion.

`2:` Aus `VS` gleich "$\Box$ Funktion" und
aus `4`"$\mathsf{id}_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}}$ Funktion"
folgt via **18-46**: $(\Box \circ \mathsf{id}_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}})((p,q)) = \Box(\mathsf{id}_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}}((p,q)))$.

`3:` Es gilt: $(p, q \text{ Menge}) \vee (p \text{ Unmenge}) \vee (q \text{ Unmenge})$

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` p, q Menge.

`4:` Aus `3.1.Fall`"p, q Menge"
folgt via **6-8**: $(p,q) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

`5:` Aus `4`"$(p,q) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$"
folgt via **20-11**: $\mathsf{id}_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}}((p,q)) = (p,q)$.

`6:` $(\Box \circ \mathsf{id}_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}})((p,q)) \stackrel{2}{=} \Box(\mathsf{id}_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}}((p,q))) \stackrel{5}{=} \Box((p,q)) = p\_\Box\_q$.

`3.2.Fall` $(p \text{ Unmenge}) \vee (q \text{ Unmenge})$.

`4.1:` Aus `3.2.Fall`"$(p \text{ Unmenge}) \vee (q \text{ Unmenge})$"
folgt via **6-8**: $(p,q) \notin \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

`4.2:` Via **20-11** gilt: $\mathsf{dom}\,(\mathsf{id}_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}}) = \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

`4.3:` Aus `3.2.Fall`"$(p \text{ Unmenge}) \vee (q \text{ Unmenge})$"
folgt via **366-2**: $p\_\Box\_q = \mathcal{U}$.

`5:` Aus `4.1` und
aus `4.2`
folgt: $(p,q) \notin \mathsf{dom}\,(\mathsf{id}_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}})$.

`6:` Aus `5`"$(p,q) \notin \mathsf{dom}\,(\mathsf{id}_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}})$"
folgt via **folk**: $\mathsf{id}_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}} = \mathcal{U}$.

`7:` $(\Box \circ \mathsf{id}_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}})((p,q)) \stackrel{2}{=} \Box(\mathsf{id}_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}}((p,q))) \stackrel{6}{=} \Box(\mathcal{U}) \stackrel{\mathbf{17\text{-}7}}{=} \mathcal{U} \stackrel{4.3}{=} p\_\Box\_q$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$(\Box \circ \mathsf{id}_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}})((p,q)) = p\_\Box\_q$.

Beweis **366-10** `g)` `VS` gleich $\square$ Funktion.

`1:` Via **20-11** gilt: inv Funktion.

`2:` Aus `VS` gleich "$\square$ Funktion" und
aus `4`"inv Funktion"
folgt via **18-46**: $(\square \circ \mathsf{inv})((p,q)) = \square(\mathsf{inv}((p,q)))$.

`3:` Es gilt: $(p,q \text{ Menge}) \vee (p \text{ Unmenge}) \vee (q \text{ Unmenge})$

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` p,q Menge.

`4:` Aus `3.1.Fall`"p,q Menge"
folgt via **366-9**: $\mathsf{inv}((p,q)) = (q,p)$.

`5:` $(\square \circ \mathsf{inv})((p,q)) \stackrel{2}{=} \square(\mathsf{inv}((p,q))) \stackrel{4}{=} \square((q,p)) = q\_\square\_p$.

`3.2.Fall` $(p \text{ Unmenge}) \vee (q \text{ Unmenge})$.

`4.1:` Aus `3.2.Fall`"$(p \text{ Unmenge}) \vee (q \text{ Unmenge})$"
folgt via **366-9**: $\mathsf{inv}((p,q)) = \mathcal{U}$.

`4.2:` Aus `3.2.Fall`"$(p \text{ Unmenge}) \vee (q \text{ Unmenge})$"
folgt via **366-3**: $q\_\square\_p = \mathcal{U}$.

`5:` $(\square \circ \mathsf{inv})((p,q)) \stackrel{2}{=} \square(\mathsf{inv}((p,q))) \stackrel{4.1}{=} \square(\mathcal{U}) \stackrel{\mathbf{17\text{-}7}}{=} \mathcal{U} \stackrel{4.2}{=} q\_\square\_p$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$(\square \circ \mathsf{inv})((p,q)) = q\_\square\_p$.

<u>Beweis **366-10** `h)`</u>

`1:` $\mathsf{id}_{E\times D}[A] \stackrel{\mathbf{94-15}}{=} (E\times D)\cap A \stackrel{\mathbf{KG}\cap}{=} A\cap(E\times D) \stackrel{\mathbf{363-1}}{=} (A^{-1})^{-1}\cap(E\times D).$

`2.1:` Aus `1`

folgt: $\boxed{\mathsf{id}_{E\times D}[A] = (A^{-1})^{-1}\cap(E\times D)}$

`2.2:` Via **KG**$\cap$ gilt: $\boxed{(E\times D)\cap(A^{-1})^{-1} = (A^{-1})^{-1}\cap(E\times D)}$

`i)` $\mathsf{id}_{E\times D}[B\times C] \stackrel{\mathtt{h)}}{=} (E\times D)\cap((B\times C)^{-1})^{-1} \stackrel{\mathbf{12-13}}{=} (E\times D)\cap(B\times C)$
$\stackrel{\mathbf{62-1}}{=} (E\cap B)\times(D\cap C).$

`j)` $\mathsf{id}_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}}[A] \stackrel{\mathtt{h)}}{=} (A^{-1})^{-1}\cap(\mathcal{U}\times\mathcal{U}) \stackrel{\mathbf{363-1}}{=} (A^{-1})^{-1}.$

`k)` $\mathsf{id}_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}}[B\times C] \stackrel{\mathtt{i)}}{=} (\mathcal{U}\cap B)\times(\mathcal{U}\cap C) \stackrel{\mathbf{folk}}{=} B\times(\mathcal{U}\cap C) \stackrel{\mathbf{folk}}{=} B\times C.$

$\square$

366-11. Zum Abschluss dieses Essays soll über eine mengentheoretische Beschreibung der Kommutativität reflektiert werden.

366-11(Satz)

a) *Aus* "$\Box \circ \mathsf{id}_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}} = \Box \circ \mathsf{inv}$" *folgt* "$\Box$ *kommutativ*".

b) *Aus* "$\Box$ *Funktion*" *und* "$\Box$ *kommutativ*" *folgt* "$\Box \circ \mathsf{id}_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}} = \Box \circ \mathsf{inv}$".

c) "$\Box$ *kommutativ*" *genau dann, wenn* "$\Box_{\mathsf{fkt}} \circ \mathsf{id}_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}} = \Box_{\mathsf{fkt}} \circ \mathsf{inv}$".

d) *Aus* "$\Box$ *Funktion*" *und* "$\Box$ *kommutativ*" *folgt* "$\Box[B \times C] = \Box[C \times B]$".

e) *Aus* "$\Box$ *kommutativ*" *folgt* "$\Box_{\mathsf{fkt}}[B \times C] = \Box_{\mathsf{fkt}}[C \times B]$".

Beweis **366-11**

`ALG`-**Notation**.

<u>Beweis **366-11**</u> `a)` `VS` gleich $\square \circ \mathsf{id}_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}} = \square \circ \mathsf{inv}$.

`Thema1` $\alpha, \beta \in \mathcal{U}$.

1: Aus `Thema1`"$\alpha, \beta \in \mathcal{U}$"
folgt via **ElementAxiom**: α, β Menge.

2: Aus `1`"α, β Menge"
folgt via **366-10**: $\mathsf{id}_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}}[\{(\alpha, \beta)\}] = \{(\alpha, \beta)\}$.

3: $$\alpha\_\square\_\beta = \square((\alpha, \beta)) \overset{\mathbf{17-1(Def)}}{=} \bigcap \square[\{(\alpha, \beta)\}]$$
$$\overset{2}{=} \bigcap \square[\mathsf{id}_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}}[\{(\alpha, \beta)\}]]$$
$$\overset{\mathbf{14-8}}{=} \bigcap(\square \circ \mathsf{id}_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}})[\{(\alpha, \beta)\}]$$
$$\overset{\mathtt{VS}}{=} (\square \circ \mathsf{inv})[\{(\alpha, \beta)\}]$$
$$\overset{\mathbf{14-8}}{=} \bigcap \square[\mathsf{inv}[\{(\alpha, \beta)\}]]$$
$$\overset{\mathbf{366-10}}{=} \bigcap \square[\{(\beta, \alpha)\}]$$
$$\overset{\mathbf{17-1(Def)}}{=} \square((\beta, \alpha))$$
$$= \beta\_\square\_\alpha.$$

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathcal{U}) \Rightarrow (\alpha\_\square\_\beta = \beta\_\square\_\alpha)$.

Konsequenz via **210-1(Def)**: $\square$ kommutativ auf $\mathcal{U}$.

Konsequenz via **365-2**: $\square$ kommutativ.

<u>Beweis **366-11**</u> `b) VS` gleich $(\Box \text{ Funktion}) \wedge (\Box \text{ kommutativ})$.

`1.1:` Via **20-11** gilt: $\mathsf{id}_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}}$ Funktion.

`1.2:` Via **366-8** gilt: inv Funktion.

`2.1:` Aus `VS` gleich "$\Box$ Funktion…" und
aus `1.1`"$\mathsf{id}_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}}$ Funktion"
folgt via **18-46**: $\Box \circ \mathsf{id}_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}}$ Funktion.

`2.2:` Aus `VS` gleich "$\Box$ Funktion…" und
aus `1.2`"inv Funktion"
folgt via **18-46**: $\Box \circ \mathsf{inv}$ Funktion.

`Thema3.1` $\alpha \in \mathsf{dom}\,(\Box \circ \mathsf{id}_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}})$.

`4:` Aus `Thema3.1`"$\alpha \in \mathsf{dom}\,(\Box \circ \mathsf{id}_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}})$"
folgt via **folk**: $\exists \Omega : (\alpha, \Omega) \in \Box \circ \mathsf{id}_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}}$.

`5:` Aus `4`"…$(\alpha, \Omega) \in \Box \circ \mathsf{id}_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}}$"
folgt via **14-4**: $\exists \Gamma : ((\alpha, \Gamma) \in \mathsf{id}_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}}) \wedge ((\Gamma, \Omega) \in \Box)$.

`6:` Aus `5`"…$(\alpha, \Gamma) \in \mathsf{id}_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}}$…"
folgt via **20-10**: $\alpha = \Gamma \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

`7:` Aus `6`"…$\Gamma \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$"
folgt via **6-8**: $\exists \Phi, \Psi : (\Phi, \Psi \text{ Menge}) \wedge (\Gamma = (\Phi, \Psi))$.

`8.1:` Aus `6`"$\alpha = \Gamma$…" und
aus `7`"…$\Gamma = (\Phi, \Psi)$"
folgt: $\alpha = (\Phi, \Psi)$.

`8.2:` Aus `VS` gleich "$\Box$ Funktion…"
folgt via **366-10**: $(\Box \circ \mathsf{id}_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}})((\Phi, \Psi)) = \Phi\_\Box\_\Psi$.

`8.3:` Aus `VS` gleich "$\Box$ Funktion…"
folgt via **366-10**: $(\Box \circ \mathsf{inv})((\Phi, \Psi)) = \Psi\_\Box\_\Phi$.

`9:` Aus `VS` gleich "…$\Box$ kommutativ"
folgt via **365-1(Def)**: $\Phi\_\Box\_\Psi = \Psi\_\Box\_\Phi$.

`10:` $(\Box \circ \mathsf{id}_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}})(\alpha) \stackrel{8.1}{=} (\Box \circ \mathsf{id}_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}})((\Phi, \Psi)) \stackrel{8.2}{=} \Phi\_\Box\_\Psi$
$\stackrel{9}{=} \Psi\_\Box\_\Phi \stackrel{8.3}{=} (\Box \circ \mathsf{inv})((\Phi, \Psi)) \stackrel{8.1}{=} (\Box \circ \mathsf{inv})(\alpha)$.

Ergo`Thema3.1`:

`A1` | "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\,(\Box \circ \mathsf{id}_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}})) \Rightarrow ((\Box \circ \mathsf{id}_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}})(\alpha) = (\Box \circ \mathsf{inv})(\alpha))$"

…

<u>Beweis **366-11**</u> `b) VS` gleich $(\Box \text{ Funktion}) \wedge (\Box \text{ kommutativ})$.

...

$\boxed{\texttt{Thema3.2}}$ $\alpha \in \mathsf{dom}\,(\Box \circ \mathsf{inv})$.

`4:` Aus `Thema3.2`"$\alpha \in \mathsf{dom}\,(\Box \circ \mathsf{inv})$"
folgt via **folk**: $\exists \Omega : (\alpha, \Omega) \in \Box \circ \mathsf{inv}$.

`5:` Aus `4`"$\ldots (\alpha, \Omega) \in \Box \circ \mathsf{inv}$"
folgt via **14-4**: $\exists \Gamma : ((\alpha, \Gamma) \in \mathsf{inv}) \wedge ((\Gamma, \Omega) \in \Box)$.

`6:` Aus `5`"$\ldots (\alpha, \Gamma) \in \mathsf{inv} \ldots$"
folgt via **366-7**: $\exists \Phi, \Psi : (\Phi, \Psi \text{ Menge}) \wedge (\alpha = (\Phi, \Psi))$.

`7.1:` Aus `6`
folgt: $\alpha = (\Phi, \Psi)$.

`7.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots \Box$ kommutativ"
folgt via **365-1(Def)**: $\Psi\_\Box\_\Phi = \Phi\_\Box\_\Psi$.

`7.3:` Aus `VS` gleich "$\Box$ Funktion..."
folgt via **366-10**: $(\Box \circ \mathsf{inv})((\Phi, \Psi)) = \Psi\_\Box\_\Phi$.

`7.4:` Aus `VS` gleich "$\Box$ Funktion..."
folgt via **366-10**: $(\Box \circ \mathsf{id}_{\mathcal{U} \times \mathcal{U}})((\Phi, \Psi)) = \Phi\_\Box\_\Psi$.

`8:` $(\Box \circ \mathsf{inv})(\alpha) \stackrel{7.1}{=} (\Box \circ \mathsf{inv})((\Phi, \Psi)) \stackrel{7.3}{=} \Psi\_\Box\_\Phi$
$\stackrel{7.2}{=} \Phi\_\Box\_\Psi \stackrel{7.4}{=} (\Box \circ \mathsf{id}_{\mathcal{U} \times \mathcal{U}})((\Phi, \Psi)) \stackrel{7.1}{=} (\Box \circ \mathsf{id}_{\mathcal{U} \times \mathcal{U}})(\alpha)$.

Ergo`Thema3.2`:

`A2`	"$\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\,(\Box \circ \mathsf{inv})) \Rightarrow ((\Box \circ \mathsf{inv})(\alpha) = (\Box \circ \mathsf{id}_{\mathcal{U} \times \mathcal{U}})(\alpha))$"

`4:` Aus `2.1`"$\Box \circ \mathsf{id}_{\mathcal{U} \times \mathcal{U}}$ Funktion",
aus `2.2`"$\Box \circ \mathsf{inv}$ Funktion",
aus `A1` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\,(\Box \circ \mathsf{id}_{\mathcal{U} \times \mathcal{U}}))$
$\Rightarrow ((\Box \circ \mathsf{id}_{\mathcal{U} \times \mathcal{U}})(\alpha) = (\Box \circ \mathsf{inv})(\alpha))$" und
aus `A2` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\,(\Box \circ \mathsf{inv})) \Rightarrow ((\Box \circ \mathsf{inv})(\alpha) = (\Box \circ \mathsf{id}_{\mathcal{U} \times \mathcal{U}})(\alpha))$"
folgt via **ISF**: $\Box \circ \mathsf{id}_{\mathcal{U} \times \mathcal{U}} = \Box \circ \mathsf{inv}$.

Beweis **366-11** c) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich $\square$ kommutativ.

1: Aus VS gleich "$\square$ kommutativ"
folgt via **365-2**: $\square_{\mathsf{fkt}}$ kommutativ.

2: Via **258-14** gilt: $\square_{\mathsf{fkt}}$ Funktion.

3: Aus 2"$\square_{\mathsf{fkt}}$ Funktion" und
aus 1"$\square$ kommutativ"
folgt via des bereits bewiesenen b): $\square_{\mathsf{fkt}} \circ \mathsf{id}_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}} = \square_{\mathsf{fkt}} \circ \mathsf{inv}$.

c) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich $\square_{\mathsf{fkt}} \circ \mathsf{id}_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}} = \square_{\mathsf{fkt}} \circ \mathsf{inv}$.

1: Aus VS gleich "$\square_{\mathsf{fkt}} \circ \mathsf{id}_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}} = \square_{\mathsf{fkt}} \circ \mathsf{inv}$"
folgt via des bereits bewiesenen a): $\square_{\mathsf{fkt}}$ kommutativ.

2: Aus 1"$\square_{\mathsf{fkt}}$ kommutativ"
folgt via **365-2**: $\square$ kommutativ.

d) VS gleich $(\square$ Funktion$) \wedge (\square$ kommutativ$)$.

1: Aus VS gleich "$(\square$ Funktion$) \wedge (\square$ kommutativ$)$"
folgt via des bereits bewiesenen b): $\square \circ \mathsf{id}_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}} = \square \circ \mathsf{inv}$.

2: $\square[B \times C] \stackrel{\mathbf{366-10}}{=} \square[\mathsf{id}_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}}[B \times C]] \stackrel{\mathbf{14-8}}{=} (\square \circ \mathsf{id}_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}})[B \times C]$
$\stackrel{1}{=} (\square \circ \mathsf{inv})[B \times C] \stackrel{\mathbf{14-8}}{=} \square[\mathsf{inv}[B \times C]] \stackrel{\mathbf{366-9}}{=} \square[C \times B]$.

e) VS gleich $\square$ kommutativ.

1: Aus VS gleich "$\square$ kommutativ"
folgt via des bereits bewiesenen c): $\square_{\mathsf{fkt}} \circ \mathsf{id}_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}} = \square_{\mathsf{fkt}} \circ \mathsf{inv}$.

2: $\square_{\mathsf{fkt}}[B \times C] \stackrel{\mathbf{366-10}}{=} \square_{\mathsf{fkt}}[\mathsf{id}_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}}[B \times C]] \stackrel{\mathbf{14-8}}{=} (\square_{\mathsf{fkt}} \circ \mathsf{id}_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}})[B \times C]$
$\stackrel{1}{=} (\square_{\mathsf{fkt}} \circ \mathsf{inv})[B \times C] \stackrel{\mathbf{14-8}}{=} \square_{\mathsf{fkt}}[\mathsf{inv}[B \times C]] \stackrel{\mathbf{366-9}}{=} \square_{\mathsf{fkt}}[C \times B]$.

$\square$

Mengenlehre: $pM_{\mathtt{in}}D = \{p\}\ {}_{\mathtt{ni}}M_{\mathtt{in}}D$. $E\ {}_{\mathtt{ni}}Mq = E\ {}_{\mathtt{ni}}M_{\mathtt{in}}\{q\}$.
$p\mathsf{cup}_{\mathtt{in}}D$. $E\ {}_{\mathtt{ni}}\mathsf{cup}q$. $E\ {}_{\mathtt{ni}}\mathsf{cup}_{\mathtt{in}}D$.
$p\mathsf{cap}_{\mathtt{in}}D$. $E\ {}_{\mathtt{ni}}\mathsf{cap}q$. $E\ {}_{\mathtt{ni}}\mathsf{cap}_{\mathtt{in}}D$.
$p\mathsf{stm}_{\mathtt{in}}D$. $E\ {}_{\mathtt{ni}}\mathsf{stm}q$. $E\ {}_{\mathtt{ni}}\mathsf{stm}_{\mathtt{in}}D$.
$p\mathsf{Dlt}_{\mathtt{in}}D$. $E\ {}_{\mathtt{ni}}\mathsf{Dlt}q$. $E\ {}_{\mathtt{ni}}\mathsf{Dlt}_{\mathtt{in}}D$.

Ersterstellung: 11/12/15 **Letzte Änderung: 18/12/15**

367-1. Ein geradezu offensichtliches Resultat belegt, dass in der Tat bereits zu viele Abkürzungen kursieren.

367-1(Satz)

a) $pM_{\mathtt{in}}D = \{p\}\ {}_{\mathtt{ni}}M_{\mathtt{in}}D$.

b) $E\ {}_{\mathtt{ni}}Mq = E\ {}_{\mathtt{ni}}M_{\mathtt{in}}\{q\}$.

c) *Aus “p Unmenge” folgt “$pM_{\mathtt{in}}D = 0$”.*

d) *Aus “q Unmenge” folgt “$E\ {}_{\mathtt{ni}}Mq = 0$”.*

e) *Aus “M Funktion” und “M kommutativ” folgt “$pM_{\mathtt{in}}D = D\ {}_{\mathtt{ni}}Mp$” und “$q\ {}_{\mathtt{ni}}ME = EM_{\mathtt{in}}q$” und “$E\ {}_{\mathtt{ni}}M_{\mathtt{in}}D = D\ {}_{\mathtt{ni}}M_{\mathtt{in}}E$”.*

f) “$p\mathsf{cup}_{\mathtt{in}}D = D\ {}_{\mathtt{ni}}\mathsf{cup}p$” *und* “$E\ {}_{\mathtt{ni}}\mathsf{cup}q = q\mathsf{cup}_{\mathtt{in}}E$” *und* “$E\ {}_{\mathtt{ni}}\mathsf{cup}_{\mathtt{in}}D = D\ {}_{\mathtt{ni}}\mathsf{cup}_{\mathtt{in}}E$”.

g) “$p\mathsf{cap}_{\mathtt{in}}D = D\ {}_{\mathtt{ni}}\mathsf{cap}p$” *und* “$E\ {}_{\mathtt{ni}}\mathsf{cap}q = q\mathsf{cap}_{\mathtt{in}}E$” *und* “$E\ {}_{\mathtt{ni}}\mathsf{cap}_{\mathtt{in}}D = D\ {}_{\mathtt{ni}}\mathsf{cap}_{\mathtt{in}}E$”.

h) “$p\mathsf{Dlt}_{\mathtt{in}}D = D\ {}_{\mathtt{ni}}\mathsf{Dlt}p$” *und* “$E\ {}_{\mathtt{ni}}\mathsf{Dlt}q = q\mathsf{Dlt}_{\mathtt{in}}E$” *und* “$E\ {}_{\mathtt{ni}}\mathsf{Dlt}_{\mathtt{in}}D = D\ {}_{\mathtt{ni}}\mathsf{Dlt}_{\mathtt{in}}E$”.

Beweis **367-1** a)
$$pM_{\mathtt{in}}D \stackrel{\textbf{316-7(Def)}}{=} M[\{p\} \times D] \stackrel{\textbf{316-7(Def)}}{=} \{p\}\ {}_{\mathtt{ni}}M_{\mathtt{in}}D.$$

b)
$$E\ {}_{\mathtt{ni}}Mq \stackrel{\textbf{316-7(Def)}}{=} M[E \times \{q\}] \stackrel{\textbf{316-7(Def)}}{=} E\ {}_{\mathtt{ni}}M_{\mathtt{in}}\{q\}.$$

<u>Beweis **367-1**</u> `c)` `VS` gleich p Unmenge.

`1:` Aus `VS` gleich "p Unmenge"
folgt via **folk**: $\{p\}=0$.

`2:` $$pM_{\mathtt{in}}E \stackrel{\mathbf{316-7(Def)}}{=} M[\{p\}\times E] \stackrel{1}{=} M[0\times E] \stackrel{\mathbf{6-13}}{=} M[0] \stackrel{\mathbf{8-12}}{=} 0.$$

`d)` `VS` gleich q Unmenge.

`1:` Aus `VS` gleich "q Unmenge"
folgt via **folk**: $\{q\}=0$.

`2:` $$D\ _{\mathtt{ni}}Mq \stackrel{\mathbf{316-7(Def)}}{=} M[D\times\{q\}] \stackrel{1}{=} M[D\times 0] \stackrel{\mathbf{6-13}}{=} M[0] \stackrel{\mathbf{8-12}}{=} 0.$$

`e)` `VS` gleich $(M$ Funktion$)\wedge(M$ kommutativ$)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$(M$ Funktion$)\wedge(M$ kommutativ$)$"
folgt via **366-11**: $M[\{p\}\times D]=M[D\times\{p\}]$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$(M$ Funktion$)\wedge(M$ kommutativ$)$"
folgt via **366-11**: $M[E\times\{q\}]=M[\{q\}\times E]$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$(M$ Funktion$)\wedge(M$ kommutativ$)$"
folgt via **366-11**: $M[E\times D]=M[D\times E]$.

`2.1:` $$pM_{\mathtt{in}}D \stackrel{\mathbf{316-7(Def)}}{=} M[\{p\}\times D] \stackrel{1.1}{=} M[D\times\{p\}] \stackrel{\mathbf{316-7(Def)}}{=} D\ _{\mathtt{ni}}Mp.$$

`2.2:` $$EM_{\mathtt{in}}q \stackrel{\mathbf{316-7(Def)}}{=} M[E\times\{q\}] \stackrel{1.2}{=} M[\{q\}\times E] \stackrel{\mathbf{316-7(Def)}}{=} qM_{\mathtt{in}}E.$$

`2.3:` $$E\ _{\mathtt{ni}}M_{\mathtt{in}}D \stackrel{\mathbf{316-7(Def)}}{=} M[E\times D] \stackrel{1.3}{=} M[D\times E] \stackrel{\mathbf{316-7(Def)}}{=} D\ _{\mathtt{ni}}M_{\mathtt{in}}E.$$

`3.1:` Aus `2.1`
folgt: $$\boxed{pM_{\mathtt{in}}D=D\ _{\mathtt{ni}}Mp}$$

`3.2:` Aus `2.2`
folgt: $$\boxed{E\ _{\mathtt{ni}}Mq=qM_{\mathtt{in}}E}$$

`3.3:` Aus `2.3`
folgt: $$\boxed{E\ _{\mathtt{ni}}M_{\mathtt{in}}D=D\ _{\mathtt{ni}}M_{\mathtt{in}}E}$$

<u>Beweis **367-1**</u> `f)`

`1.1:` Aus **298-4**“cup Funktion” und
aus **365-8**“cup kommutativ”

folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $\boxed{p\mathsf{cup}_{\mathtt{in}}D = D\ {}_{\mathtt{ni}}\mathsf{cup}p}$

`1.2:` Aus **298-4**“cup Funktion” und
aus **365-8**“cup kommutativ”

folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $\boxed{E\ {}_{\mathtt{ni}}\mathsf{cup}q = q\mathsf{cup}_{\mathtt{in}}E}$

`1.3:` Aus **298-4**“cup Funktion” und
aus **365-8**“cup kommutativ”

folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $\boxed{E\ {}_{\mathtt{ni}}\mathsf{cup}_{\mathtt{in}}D = D\ {}_{\mathtt{ni}}\mathsf{cup}_{\mathtt{in}}E}$

`g)`

`1.1:` Aus **298-7**“cap Funktion” und
aus **365-8**“cap kommutativ”

folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $\boxed{p\mathsf{cap}_{\mathtt{in}}D = D\ {}_{\mathtt{ni}}\mathsf{cap}p}$

`1.2:` Aus **298-7**“cap Funktion” und
aus **365-8**“cap kommutativ”

folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $\boxed{E\ {}_{\mathtt{ni}}\mathsf{cap}q = q\mathsf{cap}_{\mathtt{in}}E}$

`1.3:` Aus **298-7**“cap Funktion” und
aus **365-8**“cap kommutativ”

folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $\boxed{E\ {}_{\mathtt{ni}}\mathsf{cap}_{\mathtt{in}}D = D\ {}_{\mathtt{ni}}\mathsf{cap}_{\mathtt{in}}E}$

<u>Beweis **367-1** `h)`</u>

`1.1:` Aus **298-13**“ Dlt Funktion” und
aus **365-8**“ Dlt kommutativ”

folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $\boxed{p\mathsf{Dlt}_{\mathtt{in}}D = D\ {}_{\mathtt{ni}}\mathsf{Dlt}p}$

`1.2:` Aus **298-13**“ Dlt Funktion” und
aus **365-8**“ Dlt kommutativ”

folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $\boxed{E\ {}_{\mathtt{ni}}\mathsf{Dlt}q = q\mathsf{Dlt}_{\mathtt{in}}E}$

`1.3:` Aus **298-13**“ Dlt Funktion” und
aus **365-8**“ Dlt kommutativ”

folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $\boxed{E\ {}_{\mathtt{ni}}\mathsf{Dlt}_{\mathtt{in}}D = D\ {}_{\mathtt{ni}}\mathsf{Dlt}_{\mathtt{in}}E}$

□

367-2. Das nun Folgende passt gut in den Kontext.

367-2(Satz)

a) $\mathsf{cup}[E \times D] = \mathsf{cup}[D \times E]$.

b) $\mathsf{cap}[E \times D] = \mathsf{cap}[D \times E]$.

c) $\mathsf{Dlt}[E \times D] = \mathsf{Dlt}[D \times E]$.

Beweis **367-2**

`1.a):` Aus **298-4**"cup Funktion" und
aus **365-8**"cup kommutativ"
folgt via **366-11**: $\mathsf{cup}[E \times D] = \mathsf{cup}[D \times E]$.

`1.b):` Aus **298-7**"cap Funktion" und
aus **365-8**"cap kommutativ"
folgt via **366-11**: $\mathsf{cap}[E \times D] = \mathsf{cap}[D \times E]$.

`1.c):` Aus **298-13**"Dlt Funktion" und
aus **365-8**"Dlt kommutativ"
folgt via **366-11**: $\mathsf{Dlt}[E \times D] = \mathsf{Dlt}[D \times E]$.

$\square$

367-3. Die binäre Vereinigung eröffnet den Reigen.

367-3(Satz)

a) $p\mathsf{cup}_{\mathtt{in}}D = p\cup_{\mathtt{in}} D = \mathsf{cup}[\{p\}\times D]$.

b) $E\,{}_{\mathtt{ni}}\mathsf{cup}q = E\,{}_{\mathtt{ni}}\cup q = \mathsf{cup}[E\times\{q\}]$.

c) $E\,{}_{\mathtt{ni}}\mathsf{cup}_{\mathtt{in}}D = E\,{}_{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}} D = \mathsf{cup}[E\times D]$.

Beweis **367-3** a)

1.1: Via **316-7(Def)** gilt: $\boxed{p\mathsf{cup}_{\mathtt{in}}D = \mathsf{cup}[\{p\}\times D]}$

Thema1.2 $\alpha\in p\mathsf{cup}_{\mathtt{in}}D$.

2: Aus Thema1.2 "$\alpha\in p\mathsf{cup}_{\mathtt{in}}D$"
folgt via **316-8**:
$(p\text{ Menge})\wedge(\exists\Omega:((\Omega\in D)\wedge(((p,\Omega),\alpha)\in\mathsf{cup})))$.

3: Aus 2 "$\ldots((p,\Omega),\alpha)\in\mathsf{cup}$"
folgt via **298-3**: $\alpha = p\cup\Omega$.

4: Aus 2 "p Menge…" und
aus 2 "$\ldots\Omega\in D\ldots$"
folgt via **220-5**: $p\cup\Omega\in p\cup_{\mathtt{in}} D$.

5: Aus 3 und
aus 4
folgt: $\alpha\in p\cup_{\mathtt{in}} D$.

Ergo Thema1.2: $\forall\alpha:(\alpha\in p\mathsf{cup}_{\mathtt{in}}D)\Rightarrow(\alpha\in p\cup_{\mathtt{in}} D)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: A1 | "$p\mathsf{cup}_{\mathtt{in}}D\subseteq p\cup_{\mathtt{in}} D$"

…

<u>Beweis **367-3**</u> `a)` ...

$\boxed{\texttt{Thema1.3}}$ $\alpha \in p \cup_{\texttt{in}} D.$

`2:` Aus `Thema1.3`“$\alpha \in p \cup_{\texttt{in}} D$”
folgt via **220-5**: $(p \text{ Menge}) \wedge (\exists \Omega : (\Omega \in D) \wedge (\alpha = p \cup \Omega)).$

`3:` Aus `2`“$\ldots \Omega \in D \ldots$”
folgt via **ElementAxiom**: Ω Menge.

`4:` Aus `2`“p Menge...” und
aus `3`“Ω Menge”
folgt via **298-3**: $((p, \Omega), p \cup \Omega) \in \mathsf{cup}.$

`5:` Aus `2`“$\ldots \Omega \in D \ldots$” und
aus `4`“$((p, \Omega), p \cup \Omega) \in \mathsf{cup}$”
folgt via **316-8**: $p \cup \Omega \in p\mathsf{cup}_{\texttt{in}} D.$

`6:` Aus `2`“$\ldots \alpha = p \cup \Omega$” und
aus `5`
folgt: $\alpha \in p\mathsf{cup}_{\texttt{in}} D.$

Ergo `Thema1.3`: $\forall \alpha : (\alpha \in p \cup_{\texttt{in}} D) \Rightarrow (\alpha \in p\mathsf{cup}_{\texttt{in}} D).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` | “$p \cup_{\texttt{in}} D \subseteq p\mathsf{cup}_{\texttt{in}} D$”

`2:` Aus `A1` gleich “$p\mathsf{cup}_{\texttt{in}} D \subseteq p \cup_{\texttt{in}} D$” und
aus `A2` gleich “$p \cup_{\texttt{in}} D \subseteq p\mathsf{cup}_{\texttt{in}} D$”

folgt via **GleichheitsAxiom**: $\boxed{p\mathsf{cup}_{\texttt{in}} D = p \cup_{\texttt{in}} D}$

<u>Beweis **367-3**</u> `b)`

`1.1:` Via **316-7(Def)** gilt: $\boxed{E\ _{\mathtt{ni}}\mathsf{cup} q = \mathsf{cup}[E \times \{q\}]}$

`1.2:` $$E\ _{\mathtt{ni}}\mathsf{cup} q \stackrel{\mathbf{367-1}}{=} q\mathsf{cup}_{\mathtt{in}} E \stackrel{\text{a)}}{=} q \cup_{\mathtt{in}} E \stackrel{\mathbf{220-7}}{=} E\ _{\mathtt{ni}}\cup q.$$

`2:` Aus `1.2`

folgt: $\boxed{E\ _{\mathtt{ni}}\mathsf{cup} q = E\ _{\mathtt{ni}}\cup q}$

`c)`

`1.1:` Via **316-7(Def)** gilt: $\boxed{E\ _{\mathtt{ni}}\mathsf{cup}_{\mathtt{in}} D = \mathsf{cup}[E \times D]}$

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\alpha \in E\ _{\mathtt{ni}}\mathsf{cup}_{\mathtt{in}} D.$

`2:` Aus `Thema1.2` "$\alpha \in E\ _{\mathtt{ni}}\mathsf{cup}_{\mathtt{in}} D$"
folgt via **316-8**:
$$\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in E) \wedge (\Psi \in D) \wedge (((\Omega, \Psi), \alpha) \in \mathsf{cup}).$$

`3:` Aus `2` "$\ldots ((\Omega, \Psi), \alpha) \in \mathsf{cup}$"
folgt via **298-3**: $\alpha = \Omega \cup \Psi.$

`4:` Aus `2` "$\ldots (\Omega \in E) \wedge (\Psi \in D) \ldots$"
folgt via **220-6**: $\Omega \cup \Psi \in E\ _{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}} D.$

`5:` Aus `3` und
aus `4`
folgt: $\alpha \in E\ _{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}} D.$

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in E\ _{\mathtt{ni}}\mathsf{cup}_{\mathtt{in}} D) \Rightarrow (\alpha \in E\ _{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}} D).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$E\ _{\mathtt{ni}}\mathsf{cup}_{\mathtt{in}} D \subseteq E\ _{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}} D$"

...

Beweis **367-3** `c)` ...

$\boxed{\texttt{Thema1.3}}$ $\alpha \in E\ {}_{\texttt{ni}}\cup_{\texttt{in}}\ D.$

`2:` Aus `Thema1.3` "$\alpha \in E\ {}_{\texttt{ni}}\cup_{\texttt{in}}\ D$"
folgt via **220-6**:
$$\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in E) \wedge (\Psi \in D) \wedge (\alpha = \Omega \cup \Psi).$$

`3.1:` Aus 2"... $\Omega \in E$ ..."
folgt via **ElementAxiom**: Ω Menge.

`3.2:` Aus 2"... $\Psi \in D$ ..."
folgt via **ElementAxiom**: Ψ Menge.

`4:` Aus `3.1`"Ω Menge" und
aus `3.2`"Ψ Menge"
folgt via **298-3**: $((\Omega, \Psi), \Omega \cup \Psi) \in \mathsf{cup}.$

`5:` Aus 2"... $(\Omega \in E) \wedge (\Psi \in D)$ ..." und
aus 4"$((\Omega, \Psi), \Omega \cup \Psi) \in \mathsf{cup}$"
folgt via **316-8**: $\Omega \cup \Psi \in E\ {}_{\texttt{ni}}\mathsf{cup}_{\texttt{in}} D.$

`6:` Aus 2"... $\alpha = \Omega \cup \Psi$" und
aus 5
folgt: $\alpha \in E\ {}_{\texttt{ni}}\mathsf{cup}_{\texttt{in}} D.$

Ergo `Thema1.3`: $\forall \alpha : (\alpha \in E\ {}_{\texttt{ni}}\cup_{\texttt{in}}\ D) \Rightarrow (\alpha \in E\ {}_{\texttt{ni}}\mathsf{cup}_{\texttt{in}} D).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A2} \mid \text{“} E\ {}_{\texttt{ni}}\cup_{\texttt{in}}\ D \subseteq E\ {}_{\texttt{ni}}\mathsf{cup}_{\texttt{in}} D \text{”}}$

`2:` Aus `A1` gleich "$E\ {}_{\texttt{ni}}\mathsf{cup}_{\texttt{in}} D \subseteq E\ {}_{\texttt{ni}}\cup_{\texttt{in}}\ D$" und
aus `A2` gleich "$E\ {}_{\texttt{ni}}\cup_{\texttt{in}}\ D \subseteq E\ {}_{\texttt{ni}}\mathsf{cup}_{\texttt{in}} D$"

folgt via **GleichheitsAxiom**: $\boxed{E\ {}_{\texttt{ni}}\mathsf{cup}_{\texttt{in}} D = E\ {}_{\texttt{ni}}\cup_{\texttt{in}}\ D}$

$\square$

367-4. Der binäre Durchschnitt setzt den Reigen mit Modifikationen fort.

<u>**367-4(Satz)**</u>

a) $\mathsf{cap}[\{p\} \times D] = p\mathsf{cap}_{\mathtt{in}} D \subseteq p \cap_{\mathtt{in}} D$.

b) *Aus "p Menge" folgt "$p\mathsf{cap}_{\mathtt{in}} D = p \cap_{\mathtt{in}} D = \mathsf{cap}[\{p\} \times D]$".*

c) $\mathsf{cap}[E \times \{q\}] = E\ {}_{\mathtt{ni}}\mathsf{cap} q \subseteq E\ {}_{\mathtt{ni}}\cap\ q$.

d) *Aus "q Menge" folgt "$E\ {}_{\mathtt{ni}}\mathsf{cap} q = E\ {}_{\mathtt{ni}}\cap\ q = \mathsf{cap}[E \times \{q\}]$".*

e) $E\ {}_{\mathtt{ni}}\mathsf{cap}_{\mathtt{in}} D = E\ {}_{\mathtt{ni}}\cap_{\mathtt{in}} D = \mathsf{cap}[E \times D]$.

<u>Beweis **367-4**</u> a)

1.1: Via **316-7(Def)** gilt: $\boxed{p\mathsf{cap}_{\mathtt{in}} D = \mathsf{cap}[\{p\} \times D]}$

$\boxed{\mathtt{Thema1.2}}$ $\alpha \in p\mathsf{cap}_{\mathtt{in}} D$.

2: Aus Thema1.2 "$\alpha \in p\mathsf{cap}_{\mathtt{in}} D$" folgt via **316-8**:
$(p \text{ Menge}) \wedge (\exists \Omega : ((\Omega \in D) \wedge (((p, \Omega), \alpha) \in \mathsf{cap})))$.

3: Aus 2 "$\ldots ((p, \Omega), \alpha) \in \mathsf{cap}$" folgt via **298-6**: $\alpha = p \cap \Omega$.

4: Aus 2 "$\ldots \Omega \in D \ldots$" folgt via **220-5**: $p \cap \Omega \in p \cap_{\mathtt{in}} D$.

5: Aus 3 und aus 4 folgt: $\alpha \in p \cap_{\mathtt{in}} D$.

Ergo Thema1.2: $\forall \alpha : (\alpha \in p\mathsf{cap}_{\mathtt{in}} D) \Rightarrow (\alpha \in p \cap_{\mathtt{in}} D)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: A1 | "$p\mathsf{cap}_{\mathtt{in}} D \subseteq p \cap_{\mathtt{in}} D$"

...

<u>Beweis **367-4**</u> `b)` `VS` gleich p Menge.

`1.1:` Via **316-7(Def)** gilt: $\boxed{p\mathsf{cap}_{\mathtt{in}}D = \mathsf{cap}[\{p\} \times D]}$

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $p\mathsf{cap}_{\mathtt{in}}D \subseteq p \cap_{\mathtt{in}} D$.

`Thema1.3` $\alpha \in p \cap_{\mathtt{in}} D$.

`2:` Aus `Thema1.3` "$\alpha \in p \cap_{\mathtt{in}} D$"
folgt via **220-5**: $\exists \Omega : (\Omega \in D) \wedge (\alpha = p \cap \Omega)$.

`3:` Aus `2` "$\ldots \Omega \in D \ldots$"
folgt via **ElementAxiom**: Ω Menge.

`4:` Aus `VS` gleich "p Menge" und
aus `3` "Ω Menge"
folgt via **298-6**: $((p, \Omega), p \cap \Omega) \in \mathsf{cap}$.

`5:` Aus `2` "$\ldots \Omega \in D \ldots$" und
aus `4` "$((p, \Omega), p \cap \Omega) \in \mathsf{cap}$"
folgt via **316-8**: $p \cap \Omega \in p\mathsf{cap}_{\mathtt{in}}D$.

`6:` Aus `2` "$\ldots \alpha = p \cap \Omega$" und
aus `5`
folgt: $\alpha \in p\mathsf{cap}_{\mathtt{in}}D$.

Ergo `Thema1.3`: $\forall \alpha : (\alpha \in p \cap_{\mathtt{in}} D) \Rightarrow (\alpha \in p\mathsf{cap}_{\mathtt{in}}D)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` | "$p \cap_{\mathtt{in}} D \subseteq p\mathsf{cap}_{\mathtt{in}}D$"

`2:` Aus `1.2` "$p\mathsf{cap}_{\mathtt{in}}D \subseteq p \cap_{\mathtt{in}} D$" und
aus `A1` gleich "$p \cap_{\mathtt{in}} D \subseteq p\mathsf{cap}_{\mathtt{in}}D$"

folgt via **GleichheitsAxiom**: $\boxed{p\mathsf{cap}_{\mathtt{in}}D = p \cap_{\mathtt{in}} D}$

<u>Beweis **367-4**</u> `c)`

`1.1:` Via **316-7(Def)** gilt: $\boxed{E\ {}_{\mathtt{ni}}\mathsf{cap} q = \mathsf{cap}[E \times \{q\}]}$

`1.2:` Via **367-1** gilt: $E\ {}_{\mathtt{ni}}\mathsf{cap} q = q\mathsf{cap}_{\mathtt{in}} E.$

`1.3:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $q\mathsf{cap}_{\mathtt{in}} E \subseteq q \cap_{\mathtt{in}} E.$

`1.4:` Via **220-7** gilt: $q \cap_{\mathtt{in}} E = E\ {}_{\mathtt{ni}}\cap q.$

`2:` Aus `1.2`,
aus `1.3` und
aus `1.4`

folgt: $\boxed{E\ {}_{\mathtt{ni}}\mathsf{cap} q \subseteq E\ {}_{\mathtt{ni}}\cap q}$

`d)` `VS` gleich q Menge.

`1.1:` Via **316-7(Def)** gilt: $\boxed{E\ {}_{\mathtt{ni}}\mathsf{cap} q = \mathsf{cap}[E \times \{q\}]}$

`1.2:` Via **367-1** gilt: $E\ {}_{\mathtt{ni}}\mathsf{cap} = q\mathsf{cap}_{\mathtt{in}} E.$

`1.3:` Aus `VS` gleich "q Menge"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $q\mathsf{cap}_{\mathtt{in}} E = q \cap_{\mathtt{in}} E.$

`1.4:` Via **220-7** gilt: $q \cap_{\mathtt{in}} E = E\ {}_{\mathtt{ni}}\cap q.$

`2:` Aus `1.2`,
aus `1.3` und
aus `1.4`

folgt: $\boxed{E\ {}_{\mathtt{ni}}\mathsf{cap} q = E\ {}_{\mathtt{ni}}\cap q}$

Beweis **367-4** `e)`

`1.1:` Via **316-7(Def)** gilt: $E\ _{\mathtt{ni}}\mathsf{cap}_{\mathtt{in}} D = \mathsf{cap}[E \times D]$

`Thema1.2` $\alpha \in E\ _{\mathtt{ni}}\mathsf{cap}_{\mathtt{in}} D$.

`2:` Aus `Thema1.2` "$\alpha \in E\ _{\mathtt{ni}}\mathsf{cap}_{\mathtt{in}} D$"
folgt via **316-8**:
$\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in E) \wedge (\Psi \in D) \wedge (((\Omega, \Psi), \alpha) \in \mathsf{cap})$.

`3:` Aus `2` "$\ldots ((\Omega, \Psi), \alpha) \in \mathsf{cap}$"
folgt via **298-6**: $\alpha = \Omega \cap \Psi$.

`4:` Aus `2` "$\ldots (\Omega \in E) \wedge (\Psi \in D) \ldots$"
folgt via **220-6**: $\Omega \cap \Psi \in E\ _{\mathtt{ni}}\cap_{\mathtt{in}}\ D$.

`5:` Aus `3` und
aus `4`
folgt: $\alpha \in E\ _{\mathtt{ni}}\cap_{\mathtt{in}}\ D$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in E\ _{\mathtt{ni}}\mathsf{cap}_{\mathtt{in}} D) \Rightarrow (\alpha \in E\ _{\mathtt{ni}}\cap_{\mathtt{in}}\ D)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$E\ _{\mathtt{ni}}\mathsf{cap}_{\mathtt{in}} D \subseteq E\ _{\mathtt{ni}}\cap_{\mathtt{in}}\ D$"

...

Beweis **367-4** `e)` ...

$\boxed{\texttt{Thema1.3}}$ $\alpha \in E\ _{\mathtt{ni}}\cap_{\mathtt{in}}\ D.$

`2:` Aus `Thema1.3`"$\alpha \in E\ _{\mathtt{ni}}\cap_{\mathtt{in}}\ D$"
folgt via **220-6**:
$$\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in E) \wedge (\Psi \in D) \wedge (\alpha = \Omega \cap \Psi).$$

`3.1:` Aus `2`"$\ldots \Omega \in E \ldots$"
folgt via **ElementAxiom**: Ω Menge.

`3.2:` Aus `2`"$\ldots \Psi \in D \ldots$"
folgt via **ElementAxiom**: Ψ Menge.

`4:` Aus `3.1`"Ω Menge" und
aus `3.2`"Ψ Menge"
folgt via **298-6**: $((\Omega, \Psi), \Omega \cap \Psi) \in \mathsf{cap}.$

`5:` Aus `2`"$\ldots (\Omega \in E) \wedge (\Psi \in D) \ldots$" und
aus `4`"$((\Omega, \Psi), \Omega \cap \Psi) \in \mathsf{cap}$"
folgt via **316-8**: $\Omega \cap \Psi \in E\ _{\mathtt{ni}}\mathsf{cap}_{\mathtt{in}} D.$

`6:` Aus `2`"$\ldots \alpha = \Omega \cap \Psi$" und
aus `5`
folgt: $\alpha \in E\ _{\mathtt{ni}}\mathsf{cap}_{\mathtt{in}} D.$

Ergo `Thema1.3`: $\forall \alpha : (\alpha \in E\ _{\mathtt{ni}}\cap_{\mathtt{in}}\ D) \Rightarrow (\alpha \in E\ _{\mathtt{ni}}\mathsf{cap}_{\mathtt{in}} D).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` "$E\ _{\mathtt{ni}}\cap_{\mathtt{in}}\ D \subseteq E\ _{\mathtt{ni}}\mathsf{cap}_{\mathtt{in}} D$"

`2:` Aus `A1` gleich "$E\ _{\mathtt{ni}}\mathsf{cap}_{\mathtt{in}} D \subseteq E\ _{\mathtt{ni}}\cap_{\mathtt{in}}\ D$" und
aus `A2` gleich "$E\ _{\mathtt{ni}}\cap_{\mathtt{in}}\ D \subseteq E\ _{\mathtt{ni}}\mathsf{cap}_{\mathtt{in}} D$"

folgt via **GleichheitsAxiom**: $\boxed{E\ _{\mathtt{ni}}\mathsf{cap}_{\mathtt{in}} D = E\ _{\mathtt{ni}}\cap_{\mathtt{in}}\ D}$

$\square$

367-5. Auch bei der Untersuchung von $E\mathsf{stm}_{\mathtt{in}}q$ sind Mengen-Eigenschaften relevant.

367-5(Satz)

a) $p\mathsf{stm}_{\mathtt{in}}D = p \setminus_{\mathtt{in}} D = \mathsf{stm}[\{p\} \times D]$.

b) $\mathsf{stm}[E \times \{q\}] = E\ {}_{\mathtt{ni}}\mathsf{stm}q \subseteq E \setminus_{\mathtt{in}} q$.

c) *Aus "q Menge" folgt "$E\ {}_{\mathtt{ni}}\mathsf{stm}q = E\ {}_{\mathtt{ni}}\setminus q = \mathsf{stm}[E \times \{q\}]$".*

d) $E\ {}_{\mathtt{ni}}\mathsf{stm}_{\mathtt{in}}D = E\ {}_{\mathtt{ni}}\setminus_{\mathtt{in}} D = \mathsf{stm}[E \times D]$.

Beweis **367-5** a)

1.1: Via **316-7(Def)** gilt: $\boxed{p\mathsf{stm}_{\mathtt{in}}D = \mathsf{stm}[\{p\} \times D]}$

Thema1.2 $\alpha \in p\mathsf{stm}_{\mathtt{in}}D$.

2: Aus Thema1.2"$\alpha \in p\mathsf{stm}_{\mathtt{in}}D$"
folgt via **316-8**:
$(p \text{ Menge}) \wedge (\exists\Omega : ((\Omega \in D) \wedge (((p,\Omega),\alpha) \in \mathsf{stm})))$.

3.1: Aus 2"$\ldots((p,\Omega),\alpha) \in \mathsf{stm}$"
folgt via **folk**: (p,Ω) Menge.

3.2: Aus 2"$\ldots((p,\Omega),\alpha) \in \mathsf{stm}$"
folgt via **298-9**: $\alpha = p \setminus \Omega$.

4: Aus 3.1"(p,Ω) Menge"
folgt via **folk**: p Menge.

5: Aus 4"p Menge" und
aus 2"$\ldots\Omega \in D\ldots$"
folgt via **220-5**: $p \setminus \Omega \in p\ {}_{\mathtt{ni}}\setminus D$.

6: Aus 5 und
aus 3.2
folgt: $\alpha \in p\ {}_{\mathtt{ni}}\setminus D$.

Ergo Thema1.2: $\forall\alpha : (\alpha \in p\mathsf{stm}_{\mathtt{in}}D) \Rightarrow (\alpha \in p \setminus_{\mathtt{in}} D)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\text{A1} \mid \text{"}p\mathsf{stm}_{\mathtt{in}}D \subseteq p \setminus_{\mathtt{in}} D\text{"}}$

...

<u>Beweis **367-5**</u> `a)` ...

`Thema1.3` $\alpha \in p \setminus_{\mathtt{in}} D.$

`2:` Aus `Thema1.3` "$\alpha \in p \setminus_{\mathtt{in}} D$"
folgt via **220-5**:
$$(p \text{ Menge}) \wedge (\exists \Omega : (\Omega \in D) \wedge (\alpha = p \setminus \Omega)).$$

`3:` Aus 2 "$\ldots \Omega \in D \ldots$"
folgt via **ElementAxiom**: Ω Menge.

`4:` Aus 2 "p Menge..." und
aus 3 "Ω Menge"
folgt via **298-9**: $((p, \Omega), p \setminus \Omega) \in \mathsf{stm}.$

`5:` Aus 2 "$\ldots \Omega \in D \ldots$" und
aus 4 "$((p, \Omega), p \setminus \Omega) \in \mathsf{stm}$"
folgt via **316-8**: $p \setminus \Omega \in p\mathsf{stm}_{\mathtt{in}} D.$

`6:` Aus 2 "$\ldots \alpha = p \setminus \Omega$" und
aus 5
folgt: $\alpha \in p\mathsf{stm}_{\mathtt{in}} D.$

Ergo `Thema1.3`: $\forall \alpha : (\alpha \in p \setminus_{\mathtt{in}} D) \Rightarrow (\alpha \in p\mathsf{stm}_{\mathtt{in}} D).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` | "$p \setminus_{\mathtt{in}} D \subseteq p\mathsf{stm}_{\mathtt{in}} D$"

`2:` Aus `A1` gleich "$p\mathsf{stm}_{\mathtt{in}} D \subseteq p \setminus_{\mathtt{in}} D$" und
aus `A2` gleich "$p \setminus_{\mathtt{in}} D \subseteq p\mathsf{stm}_{\mathtt{in}} D$"

folgt via **GleichheitsAxiom**: $\boxed{p\mathsf{stm}_{\mathtt{in}} D = p \setminus_{\mathtt{in}} D}$

<u>Beweis **367-5**</u> `b)`

`1.1`: Via **316-7(Def)** gilt: $E \,_{\mathtt{ni}}\mathsf{stm} q = \mathsf{stm}[E \times \{q\}]$

`Thema1.2` $\alpha \in E \,_{\mathtt{ni}}\mathsf{stm} q.$

`2`: Aus `Thema1.2` "$\alpha \in E \,_{\mathtt{ni}}\mathsf{stm} q$"
folgt via **316-8**:
$(p \text{ Menge}) \wedge (\exists \Omega : ((\Omega \in E) \wedge (((\Omega, q), \alpha) \in \mathsf{stm}))).$

`3`: Aus `2` "$\ldots ((\Omega, q), \alpha) \in \mathsf{stm}$"
folgt via **298-9**: $\alpha = \Omega \setminus q.$

`4`: Aus `2` "$\ldots \Omega \in E \ldots$"
folgt via **220-4**: $\Omega \setminus q \in E \,_{\mathtt{ni}}\setminus q.$

`5`: Aus `3` und
aus `4`
folgt: $\alpha \in E \,_{\mathtt{ni}}\setminus q.$

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in E \,_{\mathtt{ni}}\mathsf{stm} q) \Rightarrow (\alpha \in E \,_{\mathtt{ni}}\setminus q).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` "$E \,_{\mathtt{ni}}\mathsf{stm} q \subseteq E \,_{\mathtt{ni}}\setminus q$"

<u>Beweis **367-5**</u> `c)` `VS` gleich q Menge.

`1.1:` Via **316-7(Def)** gilt: $$\boxed{E\ _{\mathtt{ni}}\mathsf{stm}q = \mathsf{stm}[E \times \{q\}]}$$

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $E\ _{\mathtt{ni}}\mathsf{stm}q \subseteq E\ _{\mathtt{ni}}\setminus q$.

`Thema1.3` $\alpha \in E\ _{\mathtt{ni}}\setminus q$.

`2:` Aus `Thema1.3`“$\alpha \in E\ _{\mathtt{ni}}\setminus q$”
folgt via **220-4**: $\exists\Omega : (\Omega \in E) \wedge (\alpha = \Omega \setminus q)$.

`3:` Aus `2`“$\ldots \Omega \in E \ldots$”
folgt via **ElementAxiom**: Ω Menge.

`4:` Aus `3`“Ω Menge” und
aus `VS` gleich “q Menge”
folgt via **298-9**: $((\Omega, q), \Omega \setminus q) \in \mathsf{stm}$.

`5:` Aus `2`“$\ldots \Omega \in E \ldots$” und
aus `4`“$((\Omega, q), \Omega \setminus q) \in \mathsf{stm}$”
folgt via **316-8**: $\Omega \setminus q \in E\ _{\mathtt{ni}}\mathsf{stm}q$.

`6:` Aus `2`“$\ldots \alpha = \Omega \setminus q$” und
aus `5`
folgt: $\alpha \in E\ _{\mathtt{ni}}\mathsf{stm}q$.

Ergo `Thema1.3`: $\forall\alpha : (\alpha \in E\ _{\mathtt{ni}}\setminus q) \Rightarrow (\alpha \in E\ _{\mathtt{ni}}\mathsf{stm}q)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $$\boxed{\mathtt{A2}\,\Big|\ \text{“}E\ _{\mathtt{ni}}\setminus q \subseteq E\ _{\mathtt{ni}}\mathsf{stm}q\text{”}}$$

`2:` Aus `1.2`“$E\ _{\mathtt{ni}}\mathsf{stm}q \subseteq E\ _{\mathtt{ni}}\setminus q$” und
aus `A1` gleich “$E\ _{\mathtt{ni}}\setminus q \subseteq E\ _{\mathtt{ni}}\mathsf{stm}q$”

folgt via **GleichheitsAxiom**: $$\boxed{E\ _{\mathtt{ni}}\mathsf{stm}q = E\ _{\mathtt{ni}}\setminus q}$$

<u>Beweis **367-5**</u> `d)`

`1.1:` Via **316-7(Def)** gilt: $E\ _{\mathtt{ni}}\mathsf{stm}_{\mathtt{in}} D = \mathsf{stm}[E \times D]$

`Thema1.2` $\alpha \in E\ _{\mathtt{ni}}\mathsf{stm}_{\mathtt{in}} D.$

`2:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in E\ _{\mathtt{ni}}\mathsf{stm}_{\mathtt{in}} D$"
folgt via **316-8**:
$\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in E) \wedge (\Psi \in D) \wedge (((\Omega, \Psi), \alpha) \in \mathsf{stm}).$

`3:` Aus `2`"$\ldots ((\Omega, \Psi), \alpha) \in \mathsf{stm}$"
folgt via **298-9**: $\alpha = \Omega \setminus \Psi.$

`4:` Aus `2`"$\ldots (\Omega \in E) \wedge (\Psi \in D) \ldots$"
folgt via **220-6**: $\Omega \setminus \Psi \in E\ _{\mathtt{ni}}\setminus_{\mathtt{in}}\ D.$

`5:` Aus `3` und
aus `4`
folgt: $\alpha \in E\ _{\mathtt{ni}}\setminus_{\mathtt{in}}\ D.$

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in E\ _{\mathtt{ni}}\mathsf{stm}_{\mathtt{in}} D) \Rightarrow (\alpha \in E\ _{\mathtt{ni}}\setminus_{\mathtt{in}}\ D).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$E\ _{\mathtt{ni}}\mathsf{stm}_{\mathtt{in}} D \subseteq E\ _{\mathtt{ni}}\setminus_{\mathtt{in}}\ D$"

...

Beweis **367-5** `d)` ...

$\boxed{\texttt{Thema1.3}}$ $\alpha \in E \,_{\texttt{ni}}\backslash_{\texttt{in}}\, D.$

`2:` Aus `Thema1.3`"$\alpha \in E \,_{\texttt{ni}}\backslash_{\texttt{in}}\, D$"
folgt via **220-6**:
$$\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in E) \wedge (\Psi \in D) \wedge (\alpha = \Omega \setminus \Psi).$$

`3.1:` Aus `2`"$\ldots \Omega \in E \ldots$"
folgt via **ElementAxiom**: Ω Menge.

`3.2:` Aus `2`"$\ldots \Psi \in D \ldots$"
folgt via **ElementAxiom**: Ψ Menge.

`4:` Aus `3.1`"Ω Menge" und
aus `3.2`"Ψ Menge"
folgt via **298-9**: $((\Omega, \Psi), \Omega \setminus \Psi) \in \mathsf{stm}.$

`5:` Aus `2`"$\ldots (\Omega \in E) \wedge (\Psi \in D) \ldots$" und
aus `4`"$((\Omega, \Psi), \Omega \setminus \Psi) \in \mathsf{stm}$"
folgt via **316-8**: $\Omega \setminus \Psi \in E \,_{\texttt{ni}}\mathsf{stm}_{\texttt{in}} D.$

`6:` Aus `2`"$\ldots \alpha = \Omega \setminus \Psi$" und
aus `5`
folgt: $\alpha \in E \,_{\texttt{ni}}\mathsf{stm}_{\texttt{in}} D.$

Ergo `Thema1.3`: $\forall \alpha : (\alpha \in E \,_{\texttt{ni}}\backslash_{\texttt{in}}\, D) \Rightarrow (\alpha \in E \,_{\texttt{ni}}\mathsf{stm}_{\texttt{in}} D).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A2} \mid \text{“}E \,_{\texttt{ni}}\backslash_{\texttt{in}}\, D \subseteq E \,_{\texttt{ni}}\mathsf{stm}_{\texttt{in}} D\text{”}}$

`2:` Aus `A1` gleich "$E \,_{\texttt{ni}}\mathsf{stm}_{\texttt{in}} D \subseteq E \,_{\texttt{ni}}\backslash_{\texttt{in}}\, D$" und
aus `A2` gleich "$E \,_{\texttt{ni}}\backslash_{\texttt{in}}\, D \subseteq E \,_{\texttt{ni}}\mathsf{stm}_{\texttt{in}} D$"

folgt via **GleichheitsAxiom**: $\boxed{E \,_{\texttt{ni}}\mathsf{stm}_{\texttt{in}} D = E \,_{\texttt{ni}}\backslash_{\texttt{in}}\, D}$

$\square$

367-6. Die symmetrische KlassenDifferenz beendet den Reigen.

367-6(Satz)

a) $p\mathsf{Dlt}_{\mathtt{in}}D = p\Delta_{\mathtt{in}}\, D = \mathsf{Dlt}[\{p\} \times D]$.

b) $E\,_{\mathtt{ni}}\mathsf{Dlt}q = E\,_{\mathtt{ni}}\Delta\; q = \mathsf{Dlt}[E \times \{q\}]$.

c) $E\,_{\mathtt{ni}}\mathsf{Dlt}_{\mathtt{in}}D = E\,_{\mathtt{ni}}\Delta_{\mathtt{in}}\, D = \mathsf{Dlt}[E \times D]$.

Beweis **367-6** a)

1.1: Via **316-7(Def)** gilt: $\boxed{p\mathsf{Dlt}_{\mathtt{in}}D = \mathsf{Dlt}[\{p\} \times D]}$

$\boxed{\mathtt{Thema1.2}}$ $\alpha \in p\mathsf{Dlt}_{\mathtt{in}}D$.

2: Aus Thema1.2 "$\alpha \in p\mathsf{Dlt}_{\mathtt{in}}D$"
folgt via **316-8**:
$(p \text{ Menge}) \wedge (\exists\Omega : ((\Omega \in D) \wedge (((p, \Omega), \alpha) \in \mathsf{Dlt})))$.

3: Aus 2 "$\ldots ((p, \Omega), \alpha) \in \mathsf{Dlt}$"
folgt via **298-12**: $\alpha = p\Delta\Omega$.

4: Aus 2 "p Menge…" und
aus 2 "$\ldots \Omega \in D \ldots$"
folgt via **220-5**: $p\Delta\Omega \in p\Delta_{\mathtt{in}}\, D$.

5: Aus 3 und
aus 4
folgt: $\alpha \in p\Delta_{\mathtt{in}}\, D$.

Ergo Thema1.2: $\forall\alpha : (\alpha \in p\mathsf{Dlt}_{\mathtt{in}}D) \Rightarrow (\alpha \in p\Delta_{\mathtt{in}}\, D)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: A1 | "$p\mathsf{Dlt}_{\mathtt{in}}D \subseteq p\Delta_{\mathtt{in}}\, D$"

…

Beweis **367-6** a) ...

$\boxed{\texttt{Thema1.3}}$ $\alpha \in p\Delta_{\mathtt{in}}\, D.$

2: Aus Thema1.3 "$\alpha \in p\Delta_{\mathtt{in}}\, D$"
folgt via **220-5**:
$$(p \text{ Menge}) \wedge (\exists \Omega : (\Omega \in D) \wedge (\alpha = p\Delta\Omega)).$$

3: Aus 2 "$\ldots \Omega \in D \ldots$"
folgt via **ElementAxiom**: Ω Menge.

4: Aus 2 "p Menge$\ldots$" und
aus 3 "Ω Menge"
folgt via **298-12**: $((p, \Omega), p\Delta\Omega) \in \mathsf{Dlt}.$

5: Aus 2 "$\ldots \Omega \in D \ldots$" und
aus 4 "$((p, \Omega), p\Delta\Omega) \in \mathsf{Dlt}$"
folgt via **316-8**: $p\Delta\Omega \in p\mathsf{Dlt}_{\mathtt{in}} D.$

6: Aus 2 "$\ldots \alpha = p\Delta\Omega$" und
aus 5
folgt: $\alpha \in p\mathsf{Dlt}_{\mathtt{in}} D.$

Ergo Thema1.3: $\forall \alpha : (\alpha \in p\Delta_{\mathtt{in}}\, D) \Rightarrow (\alpha \in p\mathsf{Dlt}_{\mathtt{in}} D).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: A2 | "$p\Delta_{\mathtt{in}}\, D \subseteq p\mathsf{Dlt}_{\mathtt{in}} D$"

2: Aus A1 gleich "$p\mathsf{Dlt}_{\mathtt{in}} D \subseteq p\Delta_{\mathtt{in}}\, D$" und
aus A2 gleich "$p\Delta_{\mathtt{in}}\, D \subseteq p\mathsf{Dlt}_{\mathtt{in}} D$"

folgt via **GleichheitsAxiom**:
$$\boxed{p\mathsf{Dlt}_{\mathtt{in}} D = p\Delta_{\mathtt{in}}\, D}$$

<u>Beweis</u> **367-6** `b)`

`1.1:` Via **316-7(Def)** gilt: $\boxed{E\ _{\mathtt{ni}}\mathsf{Dlt} q = \mathsf{Dlt}[E \times \{q\}]}$

`1.2:` $E\ _{\mathtt{ni}}\mathsf{Dlt} q \overset{\mathbf{367-1}}{=} q\mathsf{Dlt}_{\mathtt{in}} E \overset{\mathrm{a)}}{=} q\Delta_{\mathtt{in}}\ E \overset{\mathbf{220-7}}{=} E\ _{\mathtt{ni}}\Delta\ q.$

`2:` Aus `1.2`

folgt: $\boxed{E\ _{\mathtt{ni}}\mathsf{Dlt} q = E\ _{\mathtt{ni}}\Delta\ q}$

`c)`

`1.1:` Via **316-7(Def)** gilt: $\boxed{E\ _{\mathtt{ni}}\mathsf{Dlt}_{\mathtt{in}} D = \mathsf{Dlt}[E \times D]}$

`Thema1.2` $\alpha \in E\ _{\mathtt{ni}}\mathsf{Dlt}_{\mathtt{in}} D.$

`2:` Aus `Thema1.2`“$\alpha \in E\ _{\mathtt{ni}}\mathsf{Dlt}_{\mathtt{in}} D$”
folgt via **316-8**:
$\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in E) \wedge (\Psi \in D) \wedge (((\Omega, \Psi), \alpha) \in \mathsf{Dlt}).$

`3:` Aus `2`“$\ldots ((\Omega, \Psi), \alpha) \in \mathsf{Dlt}$”
folgt via **298-12**: $\alpha = \Omega\Delta\Psi.$

`4:` Aus `2`“$\ldots (\Omega \in E) \wedge (\Psi \in D) \ldots$”
folgt via **220-6**: $\Omega\Delta\Psi \in E\ _{\mathtt{ni}}\Delta_{\mathtt{in}}\ D.$

`5:` Aus `3` und
aus `4`
folgt: $\alpha \in E\ _{\mathtt{ni}}\Delta_{\mathtt{in}}\ D.$

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in E\ _{\mathtt{ni}}\mathsf{Dlt}_{\mathtt{in}} D) \Rightarrow (\alpha \in E\ _{\mathtt{ni}}\Delta_{\mathtt{in}}\ D).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | “$E\ _{\mathtt{ni}}\mathsf{Dlt}_{\mathtt{in}} D \subseteq E\ _{\mathtt{ni}}\Delta_{\mathtt{in}}\ D$”

...

Beweis **367-6** `c)` ...

$\boxed{\texttt{Thema1.3}}$ $\alpha \in E \ _{\texttt{ni}}\Delta_{\texttt{in}}\ D$.

`2:` Aus `Thema1.3`"$\alpha \in E \ _{\texttt{ni}}\Delta_{\texttt{in}}\ D$"
folgt via **220-6**:
$\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in E) \wedge (\Psi \in D) \wedge (\alpha = \Omega\Delta\Psi)$.

`3.1:` Aus `2`"$\ldots \Omega \in E \ldots$"
folgt via **ElementAxiom**: Ω Menge.

`3.2:` Aus `2`"$\ldots \Psi \in D \ldots$"
folgt via **ElementAxiom**: Ψ Menge.

`4:` Aus `3.1`"Ω Menge" und
aus `3.2`"Ψ Menge"
folgt via **298-12**: $((\Omega, \Psi), \Omega\Delta\Psi) \in \mathsf{Dlt}$.

`5:` Aus `2`"$\ldots (\Omega \in E) \wedge (\Psi \in D) \ldots$" und
aus `4`"$((\Omega, \Psi), \Omega\Delta\Psi) \in \mathsf{Dlt}$"
folgt via **316-8**: $\Omega\Delta\Psi \in E \ _{\texttt{ni}}\mathsf{Dlt}_{\texttt{in}}D$.

`6:` Aus `2`"$\ldots \alpha = \Omega\Delta\Psi$" und
aus `5`
folgt: $\alpha \in E \ _{\texttt{ni}}\mathsf{Dlt}_{\texttt{in}}D$.

Ergo `Thema1.3`: $\forall \alpha : (\alpha \in E \ _{\texttt{ni}}\Delta_{\texttt{in}}\ D) \Rightarrow (\alpha \in E \ _{\texttt{ni}}\mathsf{Dlt}_{\texttt{in}}D)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A2} \,\Big|\, \text{"}E \ _{\texttt{ni}}\Delta_{\texttt{in}}\ D \subseteq E \ _{\texttt{ni}}\mathsf{Dlt}_{\texttt{in}}D\text{"}}$

`2:` Aus `A1` gleich "$E \ _{\texttt{ni}}\mathsf{Dlt}_{\texttt{in}}D \subseteq E \ _{\texttt{ni}}\Delta_{\texttt{in}}\ D$" und
aus `A2` gleich "$E \ _{\texttt{ni}}\Delta_{\texttt{in}}\ D \subseteq E \ _{\texttt{ni}}\mathsf{Dlt}_{\texttt{in}}D$"

folgt via **GleichheitsAxiom**: $\boxed{E \ _{\texttt{ni}}\mathsf{Dlt}_{\texttt{in}}D = E \ _{\texttt{ni}}\Delta_{\texttt{in}}\ D}$

□

Analysis: $\mathsf{337.0}(x,y) = \mathsf{350.0}(x,\mathsf{id},y)$ und Konsequenzen.

Ersterstellung: 05/01/16 **Letzte Änderung: 05/01/16**

368-1. Nicht ohne notationellen Aufwand wird $\mathsf{337.0}(x,y) = \mathsf{350.0}(x,\mathsf{id},y)$ bewiesen.

368-1(Satz)

$$\mathsf{337.0}(x,y) = \mathsf{350.0}(x,\mathsf{id},y)\,.$$

$$\mathsf{337.0}(x,y) = \{(\{\lambda\}\cup\mu,\eta) : (\lambda\notin\mu) \wedge(\exists\Omega : ((\mu,\Omega)\in x)\wedge(((\Omega,\lambda),\eta)\in y))\}$$

$$\mathsf{350.0}(x,z,y) = \{(\{\lambda\}\cup\mu,\eta) : (\lambda\notin\mu) \wedge(\exists\Omega,\Xi : ((\mu,\Omega)\in x)\wedge((\lambda,\Xi)\in z)\wedge(((\Omega,\Xi),\eta)\in y))\}$$

Beweis **368-1**

$\boxed{\texttt{Thema0.1}}$ $\alpha\in\mathsf{337.0}(x,y)\,.$

`1.1:` Aus `Thema0.1`“$\alpha\in\mathsf{337.0}(x,y)$”
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`1.2:` Aus `Thema0.1`“$\alpha\in\mathsf{337.0}(x,y)$”
folgt **p.def.**:
$$\exists\Omega,\Phi,\Psi,\Gamma : (\Phi\notin\Psi)\wedge((\Psi,\Omega)\in x)\wedge(((\Omega,\Phi),\Gamma)\in y) \wedge(\alpha=(\{\Phi\}\cup\Psi,\Gamma)).$$

`2.1:` Aus `1.2`“$\exists\ldots\Phi\ldots$”
folgt: $\exists\Xi : \Xi=\Phi.$

`2.2:` Aus `1.2`“$\ldots((\Omega,\Phi),\Gamma)\in y\ldots$”
folgt via **folk**: (Ω,Φ) Menge.

`3.1:` Aus `2.1`
folgt: $\Phi=\Xi.$

`3.2:` Aus `2.2`“(Ω,Φ) Menge”
folgt via **PaarAxiom I**: Ω,Φ Menge.

...

...

<u>Beweis</u> **<u>368-1</u>** ...

$\boxed{\texttt{Thema0.1}}$ $\alpha \in \mathsf{337.0}(x, y)$.

...

`4.1:` Aus `3.1`"$\Phi = \Xi$" und
aus `3.2`"$\ldots \Phi$ Menge"
folgt via **364-5**: $(\Phi, \Xi) \in \mathsf{id}$.

`4.2:` Aus `3.1`"$\Phi = \Xi$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega, \Phi) = (\Omega, \Xi)$.

`5:` Aus `4.2`"$(\Omega, \Phi) = (\Omega, \Xi)$"
folgt via **PaarAxiom I**: $((\Omega, \Phi), \Gamma) = ((\Omega, \Xi), \Gamma)$.

`6:` Aus `5` und
aus `1.1`"$\ldots ((\Omega, \Phi), \Gamma) \in y \ldots$"
folgt: $((\Omega, \Xi), \Gamma) \in y$.

`7:` Aus `1.2`"$\exists \Omega, \Phi, \Psi, \Gamma \ldots$",
aus `2.1`"$\exists \Xi \ldots$",
aus `1.2`"$\ldots (\Phi \notin \Psi) \wedge ((\Psi, \Omega) \in x) \ldots$",
aus `4.1`,
aus `6` und
aus `1.2`"$\ldots \alpha = (\{\Phi\} \cup \Psi, \Gamma)$"
folgt: $\exists \Omega, \Phi, \Psi, \Gamma, \Xi : (\Phi \notin \Psi) \wedge ((\Psi, \Omega) \in x)$
$\wedge((\Phi, \Xi) \in \mathsf{id}) \wedge (((\Omega, \Xi), \Gamma) \in y)$
$\wedge(\alpha = (\{\Phi\} \cup \Psi, \Gamma))$.

`8:` Aus `7`"$\exists \Omega, \Phi, \Psi, \Gamma, \Xi : (\Phi \notin \Psi) \wedge ((\Psi, \Omega) \in x)$
$\wedge((\Phi, \Xi) \in \mathsf{id}) \wedge (((\Omega, \Xi), \Gamma) \in y)$
$\wedge(\alpha = (\{\Phi\} \cup \Psi, \Gamma))$" und
aus `1.1`"α Menge"
folgt **p.def.**: $\alpha \in \mathsf{350.0}(x, \mathsf{id}, y)$.

Ergo `Thema0.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{337.0}(x, y)) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{350.0}(x, \mathsf{id}, y))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$\mathsf{337.0}(x, y) \subseteq \mathsf{350.0}(x, \mathsf{id}, y)$"

...

Beweis **368-1** ...

$\boxed{\texttt{Thema0.2}}$ $\alpha \in 350.0(x, \mathsf{id}, y)$.

`1.1:` Aus `Thema0.2` "$\alpha \in 350.0(x, \mathsf{id}, y)$ "
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`1.2:` Aus `Thema0.2` "$\alpha \in 350.0(x, \mathsf{id}, y)$ "
folgt **p.def.**: $\exists \Omega, \Phi, \Psi, \Gamma, \Xi : (\Phi \notin \Psi) \wedge ((\Psi, \Omega) \in x)$
$\wedge((\Phi, \Xi) \in \mathsf{id}) \wedge (((\Omega, \Xi), \Gamma) \in y)$
$\wedge(\alpha = (\{\Phi\} \cup \Psi, \Gamma))$.

`2:` Aus `1.2` "$\ldots (\Phi, \Xi) \in \mathsf{id} \ldots$"
folgt via **364-5**: $\Phi = \Xi$.

`3:` Aus `2` "$\Phi = \Xi$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega, \Phi) = (\Omega, \Xi)$.

`4:` Aus `3` "$(\Omega, \Phi) = (\Omega, \Xi)$"
folgt via **PaarAxiom I**: $((\Omega, \Phi), \Gamma) = ((\Omega, \Xi), \Gamma)$.

`5:` Aus `4` und
aus `1.2` "$\ldots ((\Omega, \Xi), \Gamma) \in y \ldots$"
folgt: $((\Omega, \Phi), \Gamma) \in y$.

`6:` Aus `1.2` "$\exists \Omega, \Phi, \Psi, \Gamma \ldots$" ,
aus `1.2` "$\ldots (\Phi \notin \Psi) \wedge ((\Psi, \Omega) \in x) \ldots$" ,
aus `5` und
aus `1.2` "$\ldots \alpha = (\{\Phi\} \cup \Psi, \Gamma)$"
folgt:
$\exists \Omega, \Phi, \Psi, \Gamma : (\Phi \notin \Psi) \wedge ((\Psi, \Omega) \in x) \wedge (((\Omega, \Phi), \Gamma) \in y)$
$\wedge(\alpha = (\{\Phi\} \cup \Psi, \Gamma))$.

`7:` Aus `6` "$\exists \Omega, \Phi, \Psi, \Gamma : (\Phi \notin \Psi) \wedge ((\Psi, \Omega) \in x)$
$\wedge(((\Omega, \Phi), \Gamma) \in y) \wedge (\alpha = (\{\Phi\} \cup \Psi, \Gamma))$" und
aus `1.1` "α Menge"
folgt **p.def.**: $\alpha \in 337.0(x, y)$.

Ergo `Thema0.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in 350.0(x, \mathsf{id}, y)) \Rightarrow (\alpha \in 337.0(x, y))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A2} \mid \text{“} 350.0(x, \mathsf{id}, y) \subseteq 337.0(x, y) \text{”}}$

...

<u>Beweis</u> **<u>368-1</u>** ...

1: Aus A1 gleich “$\mathsf{337.0}(x, y) \subseteq \mathsf{350.0}(x, \mathsf{id}, y)$” und
aus A2 gleich “$\mathsf{350.0}(x, \mathsf{id}, y) \subseteq \mathsf{337.0}(x, y)$”
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathsf{337.0}(x, y) = \mathsf{350.0}(x, \mathsf{id}, y)$.

□

368-2. Aus **368-1** folgt unter anderem $\left(\overset{\mathtt{rek}}{q,x}\middle|\,\mathsf{id}\right) = \overset{\mathsf{fin}}{q,x}$.

368-2(Satz)

a) *"R ist* **ana1** *von q,x" genau dann, wenn "R ist* **ana2** *von* id,q,x*"*.

b) $\{\omega : \omega$ *ist* **ana1** *von* $q,x\} = \{\omega : \omega$ *ist* **ana2** *von* $\mathsf{id},q,x\}$.

c) $\mathtt{rf1}qx = \mathtt{rf2}(\mathsf{id})qx$.

d) $\overset{\mathsf{fin}}{q,x} = \left(\overset{\mathtt{rek}}{q,x}\middle|\,\mathsf{id}\right)$.

e) $\mathsf{A}^{\mathtt{fin}} = (\Sigma^{\mathtt{rek}}\mathsf{id})$.

f) $\mathsf{M}_x^{\mathtt{fin}} = \left(\prod_x^{\mathtt{rek}}\mathsf{id}\right)$.

$337.2(q,x) = \{\omega : \omega$ *ist* **ana1** *von* $q,x\}$.
$350.1(\mathsf{id},q,x) = \{\omega : \omega$ *ist* **ana2** *von* $\mathsf{id},q,x\}$.

Beweis **368-2**

$337.0(x,y) = \{(\{\lambda\}\cup\mu,\eta) : (\lambda \notin \mu) \wedge (\exists \Omega : ((\mu,\Omega) \in x) \wedge (((\Omega,\lambda),\eta) \in y))\}$

$350.0(x,z,y) = \{(\{\lambda\}\cup\mu,\eta) : (\lambda \notin \mu)$
$\wedge(\exists \Omega,\Xi : ((\mu,\Omega) \in x) \wedge ((\lambda,\Xi) \in z) \wedge (((\Omega,\Xi),\eta) \in y))\}$

`RECH`-**Notation**.

...

<u>Beweis **368-2**</u> ...

a) $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ `VS` gleich R ist **ana1** von q, x.

`1:` Aus `VS` gleich "R ist **ana1** von q, x"
folgt via **337-3(Def)**:

$$(R \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}) \wedge (R(0) = \{(0, q)\})$$
$$\wedge(\forall \alpha : (\alpha, 1 + \alpha \in \mathsf{dom}\, R) \Rightarrow (R(1 + \alpha) = \mathsf{337.0}(R(\alpha), x)\,)).$$

> $\boxed{\texttt{Thema2.1}}$ $\beta, 1 + \beta \in \mathsf{dom}\, R.$
>
> `3:` Aus `Thema2.1`"$\beta, 1 + \beta \in \mathsf{dom}\, R$" und
> aus `1`"$\ldots \forall \alpha : (\alpha, 1 + \alpha \in \mathsf{dom}\, R)$
> $\Rightarrow (R(1 + \alpha) = \mathsf{337.0}(R(\alpha), x)\,)$"
> folgt: $R(1 + \beta) = \mathsf{337.0}(R(\beta), x)\,.$
>
> `4:` Via **368-1** gilt: $\mathsf{337.0}(R(\beta), x) = \mathsf{350.0}(R(\beta), \mathsf{id}, x)\,.$
>
> `5:` Aus `3` und
> aus `4`
> folgt: $R(1 + \beta) = \mathsf{350.0}(R(\beta), \mathsf{id}, x)\,.$

Ergo `Thema2.1`:

`A1`	"$\forall \beta : (\beta, 1 + \beta \in \mathsf{dom}\, R) \Rightarrow (R(1 + \beta) = \mathsf{350.0}(R(\beta), \mathsf{id}, x)\,)$"

`2.2:` Aus `1`"$(R \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}) \wedge (R(0) = \{(0, q)\}) \ldots$" und
aus `A1` gleich "$\forall \beta : (\beta, 1+\beta \in \mathsf{dom}\, R) \Rightarrow (R(1+\beta) = \mathsf{350.0}(R(\beta), \mathsf{id}, x)\,)$"
folgt via **350-3(Def)**: R ist **ana2** von id, q, x.

Beweis **368-2** a) $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich R ist **ana2** von id, q, x.

`1:` Aus `VS` gleich "R ist **ana2** von id, q, x"
folgt via **350-3(Def)**:

$$(R\text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}) \wedge (R(0) = \{(0, q)\})$$
$$\wedge(\forall\alpha : (\alpha, 1 + \alpha \in \mathsf{dom}\, R) \Rightarrow (R(1 + \alpha) = \mathsf{350.0}(R(\alpha), \mathsf{id}, x))).$$

`Thema2.1` $\beta, 1 + \beta \in \mathsf{dom}\, R$.

`3:` Aus `Thema2.1`"$\beta, 1 + \beta \in \mathsf{dom}\, R$" und
aus `1`"$\ldots \forall\alpha : (\alpha, 1 + \alpha \in \mathsf{dom}\, R)$
$\Rightarrow (R(1 + \alpha) = \mathsf{350.0}(R(\alpha), \mathsf{id}, x))$"
folgt: $R(1 + \beta) = \mathsf{350.0}(R(\beta), \mathsf{id}, x)$.

`4:` Via **368-1** gilt: $\mathsf{350.0}(R(\beta), \mathsf{id}, x) = \mathsf{337.0}(R(\beta), x)$.

`5:` Aus `3` und
aus `4`
folgt: $R(1 + \beta) = \mathsf{337.0}(R(\beta), x)$.

Ergo `Thema2.1`:

`A1` | "$\forall\beta : (\beta, 1 + \beta \in \mathsf{dom}\, R) \Rightarrow (R(1 + \beta) = \mathsf{337.0}(R(\beta), x))$"

`2.2:` aus `1`"$(R\text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}) \wedge (R(0) = \{(0, q)\}) \ldots$" und
aus `A1` gleich "$\forall\beta : (\beta, 1 + \beta \in \mathsf{dom}\, R) \Rightarrow (R(1 + \beta) = \mathsf{337.0}(R(\beta), x))$"
folgt via **337-3(Def)**: R ist **ana1** von q, x.

<u>Beweis</u> **368-2** `b)`

$\boxed{\texttt{Thema0.1}}$ $\alpha \in \{\omega : \omega \text{ ist } \mathbf{ana1} \text{ von } q, x\}$.

`1.1:` Aus `Thema0.1`"$\alpha \in \{\omega : \omega \text{ ist } \mathbf{ana1} \text{ von } q, x\}$"
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`1.2:` Aus `Thema0.1`"$\alpha \in \{\omega : \omega \text{ ist } \mathbf{ana1} \text{ von } q, x\}$"
folgt: α ist **ana1** von q, x.

`2:` Aus `1.2`"α ist **ana1** von q, x"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
α ist **ana2** von id, q, x.

`3:` Aus 2"α ist **ana2** von id, q, x" und
aus `1.1`"α Menge"
folgt: $\alpha \in \{\omega : \omega \text{ ist } \mathbf{ana2} \text{ von } \mathsf{id}, q, x\}$.

Ergo `Thema0.1`:

$$\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : \omega \text{ ist } \mathbf{ana1} \text{ von } q, x\}) \Rightarrow (\alpha \in \{\omega : \omega \text{ ist } \mathbf{ana2} \text{ von } \mathsf{id}, q, x\}).$$

Konsequenz via **0-2(Def)**:

`A1`	"$\{\omega : \omega \text{ ist } \mathbf{ana1} \text{ von } q, x\} \subseteq \{\omega : \omega \text{ ist } \mathbf{ana2} \text{ von } \mathsf{id}, q, x\}$"

...

Beweis **368-2** `b)` ...

$\boxed{\texttt{Thema0.2}}$ $\alpha\in\{\omega:\omega$ ist **ana2** von $\mathsf{id},q,x\}$.

`1.1:` Aus `Thema0.1`“$\alpha\in\{\omega:\omega$ ist **ana2** von $\mathsf{id},q,x\}$”
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`1.2:` Aus `Thema0.1`“$\alpha\in\{\omega:\omega$ ist **ana2** von $\mathsf{id},q,x\}$”
folgt: α ist **ana2** von id,q,x.

`2:` Aus `1.2`“α ist **ana2** von id,q,x”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
α ist **ana1** von q,x.

`3:` Aus `2`“α ist **ana1** von q,x” und
aus `1.1`“α Menge”
folgt: $\alpha\in\{\omega:\omega$ ist **ana1** von $q,x\}$.

Ergo `Thema0.1`:
$\forall\alpha:(\alpha\in\{\omega:\omega$ ist **ana2** von $\mathsf{id},q,x\})\Rightarrow(\alpha\in\{\omega:\omega$ ist **ana1** von $q,x\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**:

`A2`	“$\{\omega:\omega$ ist **ana2** von $\mathsf{id},q,x\}\subseteq\{\omega:\omega$ ist **ana1** von $q,x\}$”

`1:` Aus `A1` gleich “$\{\omega:\omega$ ist **ana1** von $q,x\}$
$\subseteq\{\omega:\omega$ ist **ana2** von $\mathsf{id},q,x\}$” und
aus `A2` gleich “$\{\omega:\omega$ ist **ana2** von $\mathsf{id},q,x\}\subseteq\{\omega:\omega$ ist **ana1** von $q,x\}$”
folgt via **GleichheitsAxiom**:
$\{\omega:\omega$ ist **ana1** von $q,x\}=\{\omega:\omega$ ist **ana2** von $\mathsf{id},q,x\}$.

`c)` $\mathtt{rf}1qx \stackrel{\mathbf{337-23(Def)}}{=} \bigcup\{\omega:\omega \text{ ist } \mathbf{ana1} \text{ von } q,x\}$
$\stackrel{\mathtt{b)}}{=} \bigcup\{\omega:\omega \text{ ist } \mathbf{ana2} \text{ von } \mathsf{id},q,x\} \stackrel{\mathbf{350-9(Def)}}{=} \mathtt{rf}2(\mathsf{id})qx$.

`d)` $\overset{\mathsf{fin}}{q,x} \stackrel{\mathbf{345-1(Def)}}{=} \bigcup \mathsf{ran}\,(\mathtt{rf}1qx) \stackrel{\mathtt{c)}}{=} \bigcup \mathsf{ran}\,(\mathtt{rf}2(\mathsf{id})qx) \stackrel{\mathbf{357-1(Def)}}{=} \left(\overset{\mathtt{rek}}{q,x}\middle|\,\mathsf{id}\right)$.

`e)` $\mathsf{A}^{\mathtt{fin}} \stackrel{\mathbf{348-1(Def)}}{=} \overset{\mathsf{fin}}{0,\mathsf{A}} \stackrel{\mathtt{d)}}{=} \left(\overset{\mathtt{rek}}{0,\mathsf{A}}\middle|\,\mathsf{id}\right) \stackrel{\mathbf{360-1(Def)}}{=} (\Sigma^{\mathtt{rek}}\mathsf{id})$.

`f)` $\mathsf{M}_x^{\mathtt{fin}} \stackrel{\mathbf{348-1(Def)}}{=} \overbrace{1,(\mathsf{M}\downharpoonright x\times x)}^{\mathtt{fin}} \stackrel{\mathtt{d)}}{=} \left(\overbrace{1,(\mathsf{M}\downharpoonright x\times x)}^{\mathsf{rek}}\middle|\,\mathsf{id}\right) \stackrel{\mathbf{360-1(Def)}}{=} (\prod_x^{\mathtt{rek}}\mathsf{id})$.

□

Analysis: Weiteres über **ana2** von ϕ, q, x.

Ersterstellung: 06/01/16 **Letzte Änderung: 08/01/16**

369-1. Nun wird ähnlich wie in **#343** vorgegangen.

369-1(Satz)

a) $\texttt{350.0}(0, z, y) = 0$.

b) $\texttt{350.0}(x, 0, y) = 0$.

c) $\texttt{350.0}(x, z, 0) = 0$.

$$\texttt{350.0}(x, z, y) = \{(\{\lambda\} \cup \mu, \eta) : (\lambda \notin \mu) \wedge (\exists \Omega, \Xi : ((\mu, \Omega) \in x) \wedge ((\lambda, \Xi) \in z) \wedge (((\Omega, \Xi), \eta) \in y))\}$$

Beweis **369-1** a)

$\boxed{\texttt{Thema0}}$ $\alpha \in \texttt{350.0}(0, z, y)$.

1: Aus Thema0 " $\alpha \in \texttt{350.0}(0, z, y)$ "
folgt **p.def.** $\exists \Omega, \Phi, \Psi, \Gamma, \Xi : (\Phi \notin \Psi) \wedge ((\Psi, \Omega) \in 0) \wedge ((\Phi, \Xi) \in z) \wedge (((\Omega, \Xi), \Gamma) \in y) \wedge (\alpha = (\{\Phi\} \cup \Psi, \Gamma))$.

2.1: Aus 1
folgt: $(\Psi, \Omega) \in 0$.

2.2: Via **folk** gilt: $(\Psi, \Omega) \notin 0$.

Ergo Thema0: $\forall \alpha : (\alpha \in \texttt{350.0}(0, z, y)) \Rightarrow (\alpha \notin \texttt{350.0}(0, z, y))$.

Konsequenz via **folk**: $\texttt{350.0}(0, z, y) = 0$.

<u>Beweis</u> **369-1** `b)`

$\boxed{\texttt{Thema0}}$ $\alpha \in \mathsf{350.0}(x, 0, y)$.

`1:` Aus `Thema0`“ $\alpha \in \mathsf{350.0}(x, 0, y)$ ”
folgt **p.def.** $\exists \Omega, \Phi, \Psi, \Gamma, \Xi : (\Phi \notin \Psi) \wedge ((\Psi, \Omega) \in x)$
$\wedge((\Phi, \Xi) \in 0) \wedge (((\Omega, \Xi), \Gamma) \in y)$
$\wedge(\alpha = (\{\Phi\} \cup \Psi, \Gamma))$.

`2.1:` Aus `1`
folgt: $(\Phi, \Xi) \in 0$.

`2.2:` Via **folk** gilt: $(\Phi, \Xi) \notin 0$.

Ergo `Thema0`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{350.0}(x, 0, y)) \Rightarrow (\alpha \notin \mathsf{350.0}(x, 0, y))$.

Konsequenz via **folk**: $\mathsf{350.0}(x, 0, y) = 0$.

`c)`

$\boxed{\texttt{Thema0}}$ $\alpha \in \mathsf{350.0}(x, z, 0)$.

`1:` Aus `Thema0`“ $\alpha \in \mathsf{350.0}(x, z, 0)$ ”
folgt **p.def.** $\exists \Omega, \Phi, \Psi, \Gamma, \Xi : (\Phi \notin \Psi) \wedge ((\Psi, \Omega) \in x)$
$\wedge((\Phi, \Xi) \in z) \wedge (((\Omega, \Xi), \Gamma) \in 0)$
$\wedge(\alpha = (\{\Phi\} \cup \Psi, \Gamma))$.

`2.1:` Aus `1`
folgt: $((\Omega, \Xi), \Gamma) \in 0$.

`2.2:` Via **folk** gilt: $((\Omega, \Xi), \Gamma) \notin 0$.

Ergo `Thema0`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{350.0}(x, z, 0)) \Rightarrow (\alpha \notin \mathsf{350.0}(x, z, 0))$.

Konsequenz via **folk**: $\mathsf{350.0}(x, z, 0) = 0$. $\square$

369-2. Ist R **ana2** von ϕ, q, x und gilt $R(n) = 0$, so gilt $R(m) = 0$ für alle größeren $m \in \mathsf{dom}\, R$.

<u>**369-2(Satz)**</u> *Es gelte:*

$\rightarrow$) *R ist* **ana2** *von ϕ, q, x.*

$\rightarrow$) $R(n) = 0$.

$\rightarrow$) $n \leq m \in \mathsf{dom}\, R$.

Dann folgt "$R(m) = 0$".

<u>$\leq$-**Notation**</u>.

<u>Beweis **369-2**</u>

$$\mathsf{350.0}(x, z, y) = \{(\{\lambda\} \cup \mu, \eta) : (\lambda \notin \mu) \wedge (\exists \Omega, \Xi : ((\mu, \Omega) \in x) \wedge ((\lambda, \Xi) \in z) \wedge (((\Omega, \Xi), \eta) \in y))\}$$

<u>`RECH`-**Notation**</u>.

`1.1:` Aus $\rightarrow$) "R ist **ana2** von ϕ, q, x"
folgt via **350-3(Def)**: R Funktion.

`1.2:` Aus $\rightarrow$) "R ist **ana2** von ϕ, q, x" und
aus $\rightarrow$) "$\ldots m \in \mathsf{dom}\, R$"
folgt via **354-1**: $m \in \mathbb{N}$.

`1.3:` Aus $\rightarrow$) "R ist **ana2** von ϕ, q, x"
folgt via **354-2**: $R^{-1}[\{0\}] \subseteq \mathbb{N}$.

`2.1:` Aus `1.1` "R Funktion",
aus $\rightarrow$) "$R(n) = 0$" und
aus $0\mathcal{U}$**Axiom** "0 Menge"
folgt via **343-4**: $n \in R^{-1}[\{0\}]$.

`2.2:` Aus `1.2` "$m \in \mathbb{N}$"
folgt via **164-6**: $m \in \mathbb{Z}$.

`2.3:` Aus `1.3` "$R^{-1}[\{0\}] \subseteq \mathbb{N}$" und
aus **164-4** "$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$"
folgt via **folk**: $R^{-1}[\{0\}] \subseteq \mathbb{Z}$.

...

<u>Beweis</u> **<u>369-2</u>** ...

$\boxed{\texttt{Thema3}}$ $(\alpha \in R^{-1}[\{0\}]) \wedge (1+\alpha \leq m)$.

`4.1`: Aus `Thema3`“$\alpha \in R^{-1}[\{0\}]\ldots$”
folgt via **11-19**: $\alpha \in \mathsf{dom}\, R$.

`4.2`: Aus `Thema3`“$\alpha \in \mathbb{R}^{-1}[\{0\}]\ldots$” und
aus `1.3`“$R^{-1}[\{0\}] \subseteq \mathbb{N}$”
folgt via **folk**: $\alpha \in \mathbb{N}$.

`4.3`: Aus `1.1`“R Funktion” und
aus `Thema3`“$\alpha \in R^{-1}[\{0\}]\ldots$”
folgt via **18-21**: $0 = R(\alpha)$.

`5`: Aus `4.2`“$\alpha \in \mathbb{N}$”
folgt via **159-10**: $1+\alpha \in \mathbb{N}$.

`6`: Aus →)“R ist **ana2** von ϕ, q, x”,
aus `Thema3`“$\ldots 1+\alpha \leq m$”,
aus →)“$\ldots m \in \mathsf{dom}\, R$” und
aus `5`“$1+\alpha \in \mathbb{N}$”
folgt via **354-1**: $1+\alpha \in \mathsf{dom}\, R$.

`7`: Aus →)“R ist **ana2** von ϕ, q, x”,
aus `4.1`“$\alpha \in \mathsf{dom}\, R$” und
aus `6`“$1+\alpha \in \mathsf{dom}\, R$”
folgt via **350-3(Def)**: $R(1+\alpha) = \mathsf{350.0}(R(\alpha), \phi, x)$.

`8`: $$R(1+\alpha) \stackrel{7}{=} \mathsf{350.0}(R(\alpha), \phi, x) \stackrel{4.3}{=} \mathsf{350.0}(0, \phi, x) \stackrel{\mathbf{369-1}}{=} 0.$$

`9`: Aus `1.1`“R Funktion”,
aus `8`“$R(1+\alpha) = \ldots = 0$” und
aus $0\mathcal{U}$**Axiom**“0 Menge”
folgt via **343-4**: $1+\alpha \in R^{-1}[\{0\}]$.

Ergo `Thema3`:

`A1`	“$\forall \alpha : ((\alpha \in R^{-1}[\{0\}]) \wedge (1+\alpha \leq m)) \Rightarrow (1+\alpha \in R^{-1}[\{0\}])$”

...

Beweis **369-2** . . .

4: Aus 2.1 "$n \in R^{-1}[\{0\}]$", aus 2.3 "$R^{-1}[\{0\}] \subseteq \mathbb{Z}$", aus 2.2 "$m \in \mathbb{Z}$" und aus A1 gleich "$\forall \alpha : ((\alpha \in R^{-1}[\{0\}]) \wedge (1 + \alpha \leq m)) \Rightarrow (1 + \alpha \in R^{-1}[\{0\}])$" folgt via **337-11**: $\{n, \ldots, m\} \subseteq R^{-1}[\{0\}]$.

5: Aus →) "$n \leq m \ldots$" und aus 2.2 "$m \in \mathbb{Z}$" folgt via **237-2**: $m \in \{n, \ldots, m\}$.

6: Aus 5 "$m \in \{n, \ldots, m\}$" und aus 4 "$\{n, \ldots, m\} \subseteq R^{-1}[\{0\}]$" folgt via **folk**: $m \in R^{-1}[\{0\}]$.

7: Aus 1.1 "R Funktion" und aus 6 "$m \in R^{-1}[\{0\}]$" folgt via **18-21**: $R(m) = 0$.

□

369-3. Eine deutlich auf einen Induktions-Beweis hinweisende Klasse wird in die Essays eingebracht.

369-3(Definition)

$$\mathsf{369.0}(x,z,y) = \{\omega : x(1+\omega) = \mathsf{350.0}(x(\omega),z,y)\}.$$

$$\mathsf{350.0}(x,z,y) = \{(\{\lambda\}\cup\mu,\eta) : (\lambda\notin\mu)$$
$$\wedge(\exists\Omega,\Xi : ((\mu,\Omega)\in x)\wedge((\lambda,\Xi)\in z)\wedge(((\Omega,\Xi),\eta)\in y))\}$$

`RECH`-**Notation**.

369-4. Ist R **ana2** von ϕ, q, x und gilt $R(n) = 0$, so hat dies Auswirkungen auf $\mathtt{rf2}\phi qx$.

<u>**369-4(Satz)**</u> *Es gelte:*

$\rightarrow$) R *ist* **ana2** *von* ϕ, q, x.

$\rightarrow$) $R(n) = 0$.

Dann folgt:

a) $\mathsf{dom}\,(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}) = \mathbb{N}$.

b) $R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}$ *ist* **ana2** *von* ϕ, q, x.

c) $\mathtt{rf2}\phi qx = R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}$.

d) $\mathsf{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi qx) = \mathbb{N}$.

e) $\forall \alpha : (n \leq \alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\mathtt{rf2}\phi qx(\alpha) = 0)$.

<u>$\leq$-**Notation**</u>.

<u>Beweis **369-4**</u>

<u>RECH-**Notation**</u>.

$$\mathsf{369.0}(x, z, y) = \{\omega : x(1 + \omega) = \mathsf{350.0}(x(\omega), z, y)\}$$

$$\mathsf{350.0}(x, z, y) = \{(\{\lambda\} \cup \mu, \eta) : (\lambda \notin \mu) \wedge (\exists \Omega, \Xi : ((\mu, \Omega) \in x) \wedge ((\lambda, \Xi) \in z) \wedge (((\Omega, \Xi), \eta) \in y))\}.$$

---

a)

1: Aus $\rightarrow$) "$R(n) = 0$" und
aus $0\mathcal{U}$**Axiom** "0 Menge"
folgt: $R(n)$ Menge.

2: Aus 1 "$R(n)$ Menge"
folgt via **folk**: $n \in \mathsf{dom}\,R$.

3: Aus $\rightarrow$) "R ist **ana2** von ϕ, q, x" und
aus 2 "$n \in \mathsf{dom}\,R$"
folgt via **354-1**: $(\mathsf{dom}\,R) \cup \{n, \ldots\} = \mathbb{N}$.

4: $\mathsf{dom}\,(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}) \stackrel{\textbf{folk}}{=} (\mathsf{dom}\,R) \cup (\mathsf{dom}\,(\mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})) \stackrel{\textbf{20-5}}{=} (\mathsf{dom}\,R) \cup \{n, \ldots\} \stackrel{3}{=} \mathbb{N}$.

Beweis **369-4** `b)`

`1.1:` Aus $\rightarrow)$ “ R ist **ana2** von ϕ, q, x ”
folgt via **350-3(Def)**: $(R \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N})$.

`1.2:` Aus $\rightarrow)$ “ R ist **ana2** von ϕ, q, x ”
folgt via **350-4**: $0 \in \mathsf{dom}\, R$.

`Thema2` $\alpha \in (\mathsf{dom}\, R) \cap (\mathsf{dom}\, (\mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}))$.

`3:` Aus `Thema2` “ $\alpha \in (\mathsf{dom}\, R) \cap (\mathsf{dom}\, (\mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}))$ ”
folgt via **folk**: $(\alpha \in \mathsf{dom}\, R) \wedge (\alpha \in \mathsf{dom}\, (\mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}))$.

`4:` Via **20-5** gilt: $\mathsf{dom}\, (\mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}) = \{n, \ldots\}$.

`5:` Aus `3` “ $\ldots \alpha \in \mathsf{dom}\, (\mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})$ ” und
aus `4`
folgt: $\alpha \in \{n, \ldots\}$.

`6.1:` Aus `5` “ $\alpha \in \{n, \ldots\}$ ”
folgt via **169-2**: $n \leq \alpha$.

`6.2:` Aus `5` “ $\alpha \in \{n, \ldots\}$ ”
folgt via **20-5**: $\mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}(\alpha) = 0$.

`7:` Aus $\rightarrow)$ “ R ist **ana2** von ϕ, q, x ” ,
aus $\rightarrow)$ “ $R(n) = 0$ ” ,
aus `6.1` “ $n \leq \alpha$ ” und
aus `3` “ $\alpha \in \mathsf{dom}\, R \ldots$ ”
folgt via **369-2**: $R(\alpha) = 0$.

`8:` Aus `7` und
aus `6.2`
folgt: $R(\alpha) = \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}(\alpha)$.

Ergo `Thema2`:

`A1`	“ $\forall \alpha : (\alpha \in (\mathsf{dom}\, R) \cap (\mathsf{dom}\, (\mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}))) \Rightarrow (R(\alpha) = \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}(\alpha))$ ”

`3:` Via **20-5** gilt: $\mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}$ Funktion.

`4:` Aus `1.1` “ R Funktion... ” ,
aus `3` “ $\mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}$ Funktion ” und
aus `A1` gleich “ $\forall \alpha : (\alpha \in (\mathsf{dom}\, R) \cap (\mathsf{dom}\, (\mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})))$
$\Rightarrow (R(\alpha) = \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}(\alpha))$ ”
folgt via **18-41**: $R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}$ Funktion.

...

<u>Beweis</u> **369-4** `b)` ...

`5:` Aus →) " R ist **ana2** von ϕ, q, x "
folgt via **350-4**: $0 \in \mathsf{dom}\, R$.

`6:` Aus `1.1` " R Funktion... " ,
aus `4` " $R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}$ Funktion " und
aus `5` " $0 \in \mathsf{dom}\, R$ "
folgt via **259-38**: $(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})(0) = R(0)$.

`7:` Aus →) " R ist **ana2** von ϕ, q, x "
folgt via **350-3(Def)**: $R(0) = \{(0, q)\}$.

`8:` Aus `6` und
aus `7`
folgt: $(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})(0) = \{(0, q)\}$.

`9:` Aus →) " $R(n) = 0$ " und
aus 0$\mathcal{U}$**Axiom** " 0 Menge "
folgt: $R(n)$ Menge.

`10:` Aus `9` " $R(n)$ Menge "
folgt via **folk**: $n \in \mathsf{dom}\, R$.

`11:` Aus →) " R ist **ana2** von ϕ, q, x " und
aus `10` " $n \in \mathsf{dom}\, R$ "
folgt via **354-1**: $n \in \mathbb{N}$.

`12:` Es gilt: $(1 \in \mathsf{dom}\, R) \vee (1 \notin \mathsf{dom}\, R)$.
`Fallunterscheidung`

...

<u>Beweis</u> **369-4** `b)` ...

`Fallunterscheidung`

`12.1.Fall` $1 \in \mathsf{dom}\, R.$

`13:` Aus +**schola**"$1+0=1$" und
aus `12.1.Fall`
folgt: $1+0 \in \mathsf{dom}\, R.$

`14:` Aus →) "R ist **ana2** von ϕ, q, x",
aus `5`"$0 \in \mathsf{dom}\, R$" und
aus `13`"$1+0 \in \mathsf{dom}\, R$"
folgt via **350-3(Def)**: $R(1+0) = \mathsf{350.0}(R(0), \phi, x)$.

`15.1:` Aus `1.1`"R Funktion..." ,
aus `4`"$R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}$ Funktion" und
aus `13`"$1+0 \in \mathsf{dom}\, R$"
folgt via **259-38**: $(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})(1+0) = R(1+0)$.

`15.2:` Aus `14` und
aus `6`
folgt: $R(1+0) = \mathsf{350.0}((R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})(0), \phi, x)$.

`16:` Aus `15.2` und
aus `15.1`
folgt:
$$(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})(1+0) = \mathsf{350.0}((R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})(0), \phi, x).$$

`17:` Aus `16` und
aus $0\mathcal{U}$**Axiom**"0 Menge"
folgt **p.def.**: $0 \in \mathsf{369.0}(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}, \phi, x)$.

...

Beweis **369-4** `b)` ...

`Fallunterscheidung`

...

`12.2.Fall` $1 \notin \mathsf{dom}\, R.$

`13.1:` Aus `12.2.Fall`“$1 \notin \mathsf{dom}\, R$” und
aus **+schola**“$1 + 0 = 1$”
folgt: $1 + 0 \notin \mathsf{dom}\, R.$

`13.2:` Aus `12.2.Fall`“$1 \notin \mathsf{dom}\, R$”
folgt via **261-3**: $(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})(1) = \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}(1).$

`14:` Aus `1.2`“$0 \in \mathsf{dom}\, R$”,
aus `1.1`“$\ldots \mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$” und
aus `13.1`“$1 + 0 \notin \mathsf{dom}\, R$”
folgt via **337-9**: $\mathsf{dom}\, R = 1 + 0.$

`15:` Aus `14` und
aus **schola**“$1 + 0 = 1$”
folgt: $\mathsf{dom}\, R = 1.$

`16:` Aus `10` und
aus `15`
folgt: $n \in 1.$

`17:` Aus `16` und
aus **95-1(Def)**“$1 = \{0\}$”
folgt: $n \in \{0\}.$

`18:` Aus `17`
folgt via **folk**: $n = 0.$

`19:` Aus `13.2` und
aus `18`
folgt: $(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})(1) = \mathsf{zo}_{\{0,\ldots\}}(1).$

`20:` Aus **≤schola**“$0 \leq 1$” und
aus **∈schola**“$1 \in \mathbb{N}$”
folgt via **236-1**: $1 \in \{0, \ldots\}.$

`21:` Aus `20`“$1 \in \{0, \ldots\}$”
folgt via **20-5**: $\mathsf{zo}_{\{0,\ldots\}}(1) = 0.$

`22:` $(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})(1 + 0) \stackrel{\mathbf{+schola}}{=} (R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})(1) \stackrel{19}{=} \mathsf{zo}_{\{0,\ldots\}}(1)$
$\stackrel{21}{=} 0 \stackrel{\mathbf{369-1}}{=} 350.0(0, \phi, x) \stackrel{\to)}{=} 350.0(R(n), \phi, x) \stackrel{18}{=} 350.0(R(0), \phi, x)$
$\stackrel{6}{=} 350.0((R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})(0), \phi, x)\,.$

...

...

Beweis **369-4** `b)` ...

`Fallunterscheidung`

...

`12.2.Fall` $1 \notin \mathsf{dom}\, R.$

...

23: Aus 22 "$(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})(1+0)$
$= \ldots = 350.0((R \cup \mathsf{zo}_{\{0,\ldots\}})(0), \phi, x)$ und
aus 0$\mathcal{U}$**Axiom** "0 Menge"
folgt **p.def.**: $0 \in 369.0(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}, \phi, x)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

`A2` | "$0 \in 369.0(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}, \phi, x)$ "

`Thema12.3` $\alpha \in \mathbb{N} \cap 369.0(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}, \phi, x)$.

13: Aus `Thema12.3` "$\alpha \in \mathbb{N} \cap 369.0(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}, \phi, x)$ "
folgt via **folk**: $(\alpha \in \mathbb{N}) \wedge (\alpha \in 369.0(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}, \phi, x))$.

14: Aus 13 "$\ldots \alpha \in 369.0(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}, x)$ "
folgt **p.def.**:
$(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})(1+\alpha) = 350.0((R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})(\alpha), \phi, x)$.

15: Es gilt: $(1 + (1+\alpha) \in \mathsf{dom}\, R) \vee (1 + (1+\alpha) \notin \mathsf{dom}\, R)$.
`Fallunterscheidung`

...

...

Beweis **369-4** `b)` ...

`Thema12.3` $\alpha \in \mathbb{N} \cap \mathsf{369.0}(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\dots\}}, \phi, x)$.

...

`Fallunterscheidung`

`15.1.Fall` $1 + (1 + \alpha) \in \mathsf{dom}\, R$.

`16:` Aus →) “R ist **ana2** von ϕ, q, x” ,
aus `13`“$\alpha \in \mathbb{N} \dots$” und
aus `15.1.Fall`“$1 + (1 + \alpha) \in \mathsf{dom}\, R$”
folgt via **354-1**: $\alpha, 1 + \alpha \in \mathsf{dom}\, R$.

`17:` Aus →) “R ist **ana2** von ϕ, q, x” ,
aus `16`“$\dots 1 + \alpha \in \mathsf{dom}\, R$” und
aus `15.1.Fall`“$1 + (1 + \alpha) \in \mathsf{dom}\, R$”
folgt via **350-3(Def)**:
$$R(1 + (1 + \alpha)) = \mathsf{350.0}(R(1 + \alpha), \phi, x) .$$

`18.1:` Aus `1.1`“R Funktion...” ,
aus `4`“$R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\dots\}}$ Funktion” und
aus `16`“$\dots 1 + \alpha \in \mathsf{dom}\, R$”
folgt via **259-38**: $(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\dots\}})(1 + \alpha) = R(1 + \alpha)$.

`18.2:` Aus `1.1`“R Funktion...” ,
aus `4`“$R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\dots\}}$ Funktion” und
aus `15.1.Fall`“$1 + (1 + \alpha) \in \mathsf{dom}\, R$”
folgt via **259-38**:
$$(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\dots\}})(1 + (1 + \alpha)) = R(1 + (1 + \alpha)).$$

`19:` Aus `17`,
aus `18.1` und
aus `18.2`
folgt:
$$(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\dots\}})(1 + (1 + \alpha)) = \mathsf{350.0}((R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\dots\}})(1 + \alpha), \phi, x) .$$

`20:` Aus `16`“$\dots 1 + \alpha \in \mathsf{dom}\, R$”
folgt via **ElementAxiom**: $1 + \alpha$ Menge.

`21:` Aus `19`“$(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\dots\}})(1 + (1 + \alpha)) = \mathsf{350.0}((R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\dots\}})(1 + \alpha), \phi, x)$” und
aus `20`“$1 + \alpha$ Menge”
folgt **p.def.**: $1 + \alpha \in \mathsf{369.0}(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\dots\}}, \phi, x)$.

...

...

<u>Beweis</u> **369-4** `b)` ...

`Thema12.3` $\alpha \in \mathbb{N} \cap 369.0(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}, \phi, x)$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`15.2.Fall` $1 + (1 + \alpha) \notin \mathsf{dom}\, R$.

`16:` Aus `13`“$\alpha \in \mathbb{N} \ldots$”
folgt via **159-10**: $1 + \alpha \in \mathbb{N}$.

`17:` Aus `16`“$1 + \alpha \in \mathbb{N}$”
folgt via **159-10**: $1 + (1 + \alpha) \in \mathbb{N}$.

`18:` Aus →) “R ist **ana2** von ϕ, q, x” ,
aus `10`“$n \in \mathsf{dom}\, R$” ,
aus `17`“$1 + (1 + \alpha) \in \mathbb{N}$” und
aus `15.2.Fall`“$1 + (1 + \alpha) \notin \mathsf{dom}\, R$”
folgt via **354-1**: $n < 1 + (1 + \alpha)$.

`19.1:` Aus `18`“$n < 1 + (1 + \alpha)$”
folgt via **41-3**: $n \leq 1 + (1 + \alpha)$.

`19.2:` Aus `11`“$n \in \mathbb{N}$” ,
aus `16`“$1 + \alpha \in \mathbb{N}$” und
aus `18`“$n < 1 + (1 + \alpha)$”
folgt via **162-6**: $n \leq 1 + \alpha$.

`19.3:` Via **20-5** gilt: $\mathsf{dom}\,(\mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}) = \{n, \ldots\}$.

`20.1:` Aus `19.1`“$n \leq 1 + (1 + \alpha)$” und
aus `17`“$1 + (1 + \alpha) \in \mathbb{N}$”
folgt via **236-1**: $1 + (1 + \alpha) \in \{n, \ldots\}$.

`20.2:` Aus `19.2`“$n \leq 1 + \alpha$” und
aus `16`“$1 + \alpha \in \mathbb{N}$”
folgt via **236-1**: $1 + \alpha \in \{n, \ldots\}$.

...

...

...

Beweis **369-4** `b)` ...

`Thema12.3` $\alpha\in\mathbb{N}\cap\mathsf{369.0}(R\cup\mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}},\phi,x)$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`15.2.Fall` $1+(1+\alpha)\notin\mathsf{dom}\,R.$

...

`21.1:` Aus `20.1`"$1+(1+\alpha)\in\{n,\ldots\}$"
folgt via **20-5**: $\mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}(1+(1+\alpha))=0.$

`21.2:` Aus `20.2`"$1+\alpha\in\{n,\ldots\}$"
folgt via **20-5**: $\mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}(1+\alpha)=0.$

`21.3:` Aus `20.1`"$1+(1+\alpha)\in\{n,\ldots\}$" und
aus `19.3`
folgt: $1+(1+\alpha)\in\mathsf{dom}\,(\mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}).$

`21.4:` Aus `20.2`"$1+\alpha\in\{n,\ldots\}$" und
aus `19.3`
folgt: $1+\alpha\in\mathsf{dom}\,(\mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}).$

`22.1:` Aus `3`"$\mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}$ Funktion",
aus `4`"$R\cup\mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}$ Funktion" und
aus `21.3`"$1+(1+\alpha)\in\mathsf{dom}\,(\mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})$"
folgt via **343-9**:
$$(R\cup\mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})(1+(1+\alpha))=\mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}(1+(1+\alpha)).$$

`22.2:` Aus `3`"$\mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}$ Funktion",
aus `4`"$R\cup\mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}$ Funktion" und
aus `21.4`"$1+\alpha\in\mathsf{dom}\,(\mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})$"
folgt via **343-9**:
$$(R\cup\mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})(1+\alpha)=\mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}(1+\alpha).$$

`23:` $$(R\cup\mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})(1+(1+\alpha))\overset{22.1}{=}\mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}(1+(1+\alpha))\overset{21.1}{=}0\overset{369-1}{=}\mathsf{350.0}(0,\phi,x)\overset{21.2}{=}\mathsf{350.0}(\mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}(1+\alpha),\phi,x)\overset{22.2}{=}\mathsf{350.0}((R\cup\mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})(1+\alpha),\phi,x).$$

`24:` Aus `16`"$1+\alpha\in\mathbb{N}$"
folgt via **ElementAxiom**: $1+\alpha$ Menge.

...

...

...

Beweis **369-4** `b)` ...

`Thema12.3` $\alpha \in \mathbb{N} \cap \mathsf{369.0}(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}, \phi, x)\,.$

...

`Fallunterscheidung`

...

`15.2.Fall` $1 + (1+\alpha) \notin \mathsf{dom}\, R.$

...

`25:` Aus 23 “ $(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})(1 + (1+\alpha))$
$= \ldots = \mathsf{350.0}((R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})(1+\alpha), \phi, x)$ ” und
aus 24 “ $1+\alpha$ Menge ”
folgt **p.def.**: $1+\alpha \in \mathsf{369.0}(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}, \phi, x)\,.$

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$1+\alpha \in \mathsf{369.0}(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}, \phi, x)\,.$

Ergo `Thema12.3`:

`A3` | “ $\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N} \cap \mathsf{369.0}(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}, \phi, x))$
$\Rightarrow (1+\alpha \in \mathsf{369.0}(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}, \phi, x))$ ”

`13:` Aus `A2` gleich “ $0 \in \mathsf{369.0}(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}, \phi, x)$ ” und
aus `A3` gleich “ $\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N} \cap \mathsf{369.0}(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}, \phi, x))$
$\Rightarrow (1+\alpha \in \mathsf{369.0}(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}, \phi, x))$ ”
folgt via **IS**$\mathbb{N}$: $\mathbb{N} \subseteq \mathsf{369.0}(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}, \phi, x)\,.$

`14:` Aus →) “ R ist **ana2** von ϕ, q, x ” und
aus →) “ $R(n) = 0$ ”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\mathsf{dom}\,(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}) = \mathbb{N}.$

...

Beweis **369-4** `b)` ...

$\boxed{\texttt{Thema15}}$	$\alpha, 1+\alpha \in \mathsf{dom}\,(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\dots\}})$.
`16:` Aus `Thema15` und aus `14` folgt:	$\alpha, 1+\alpha \in \mathbb{N}$.
`17:` Aus `16`"$\alpha \ldots \in \mathbb{N}$" und aus `13`"$\mathbb{N} \subseteq \mathsf{369.0}(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\dots\}}, \phi, x)$" folgt via **folk**:	$\alpha \in \mathsf{369.0}(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\dots\}}, \phi, x)$.
`18:` Aus `17`"$\alpha \in \mathsf{369.0}(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\dots\}}, \phi, x)$" folgt **p.def.**:	$(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\dots\}})(1+\alpha) = \mathsf{350.0}((R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\dots\}})(\alpha), \phi, x)$.

Ergo `Thema15`:

`A4` | "$\forall \alpha : (\alpha, 1+\alpha \in \mathsf{dom}\,(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\dots\}}))$
$\Rightarrow ((R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\dots\}})(1+\alpha) = \mathsf{350.0}((R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\dots\}})(\alpha), \phi, x))$"

`16:` Via **folk** gilt: $\mathbb{N} \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

`17:` Aus `14`"$\mathsf{dom}\,(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\dots\}}) = \mathbb{N}$" und
aus `16`
folgt: $\mathsf{dom}\,(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\dots\}}) \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

`18:` Aus `4`"$R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\dots\}}$ Funktion",
aus `17`"$\mathsf{dom}\,(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\dots\}}) \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$",
aus `8`"$(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\dots\}})(0) = \{(0, q)\}$" und
aus `A4` gleich "$\forall \alpha : (\alpha, 1+\alpha \in \mathsf{dom}\,(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\dots\}}))$
$\Rightarrow ((R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\dots\}})(1+\alpha) = \mathsf{350.0}((R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\dots\}})(\alpha), \phi, x))$"
folgt via **350-3(Def)**: $R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\dots\}}$ ist **ana2** von ϕ, q, x.

<u>Beweis **369-4** `cde)`</u>

`1.1:` Aus →) “ R ist **ana2** von ϕ, q, x ” und
aus →) “ $R(n) = 0$ ”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\mathsf{dom}\,(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}) = \mathbb{N}$.

`1.2:` Aus →) “ R ist **ana2** von ϕ, q, x ” und
aus →) “ $R(n) = 0$ ”
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}$ ist **ana2** von ϕ, q, x.

`2:` Aus `1.2` “ $R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}$ ist **ana2** von ϕ, q, x ” und
aus `1.1` “ $\mathsf{dom}\,(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}) = \mathbb{N}$ ”
folgt via **354-1**: $(\mathtt{rf2}\phi qx = R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}) \wedge (\mathsf{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi qx) = \mathbb{N})$.

`3.c):` Aus 2
folgt: $\mathtt{rf2}\phi qx = R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}$.

`3.d):` Aus 2
folgt: $\mathsf{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi qx) = \mathbb{N}$.

...

Beweis **369-4** `cde)` ...

$\boxed{\texttt{Thema3.1}}$ $n \leq \alpha \in \mathbb{N}$.

`4:` Aus `Thema3.1`“$n \leq \alpha \in \mathbb{N}$”
folgt via **236-1**: $\alpha \in \{n, \ldots\}$.

`5.1:` Aus `4`“$\alpha \in \{n, \ldots\}$”
folgt via **20-5**: $\mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}(\alpha) = 0$.

`5.2:` Aus `1.2`“$R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}$ ist **ana2** von ϕ, q, x”
folgt via **350-3(Def)**: $R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}$ Funktion.

`5.3:` Via **20-5** gilt: $\mathsf{dom}\,(\mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}) = \{n, \ldots\}$.

`5.4:` Via **20-5** gilt: $\mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}$ Funktion.

`6:` Aus `4` und
aus `5.3`
folgt: $\alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})$.

`7:` Aus `5.4`“$\mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}$ Funktion”,
aus `5.2`“$R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}$ Funktion” und
aus `6`“$\alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})$”
folgt via **343-9**: $(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})(\alpha) = \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}(\alpha)$.

`8:` Aus `7` und
aus `5.1`
folgt: $(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})(\alpha) = 0$.

`9:` Aus `8` und
aus `3.c)`
folgt: $\texttt{rf2}\phi q x(\alpha) = 0$.

Ergo `Thema3.1`: $\boxed{\texttt{A1.d)} \;\Big|\; \text{“}\forall \alpha : (n \leq \alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\texttt{rf2}\phi q x(\alpha) = 0)\text{”}}$

□

369-5. Im Fall $R = \mathtt{rf2}\phi qx$ ergibt sich aus **369-4** Gefälliges.

369-5(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrowtriangle$) $\mathtt{rf2}\phi qx(n) = 0$.

Dann folgt:

a) $\mathsf{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi qx) = \mathbb{N}$.

b) $\forall\alpha : (n \leq \alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\mathtt{rf2}\phi qx(\alpha) = 0)$.

≤-Notation.

Beweis **369-5**

1: Via **350-10** gilt: $\mathtt{rf2}\phi qx$ ist **ana2** von ϕ, q, x.

2.a): Aus 1 "$\mathtt{rf2}\phi qx$ ist **ana2** von ϕ, q, x" und
aus $\rightarrowtriangle$) "$\mathtt{rf2}\phi qx(n) = 0$"
folgt via **369-4**: $\mathsf{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi qx) = \mathbb{N}$.

2.b): Aus 1 "$\mathtt{rf2}\phi qx$ ist **ana2** von ϕ, q, x" und
aus $\rightarrowtriangle$) "$\mathtt{rf2}\phi qx(n) = 0$"
folgt via **369-4**: $\forall\alpha : (n \leq \alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\mathtt{rf2}\phi qx(\alpha) = 0)$.

□

369-6. Gelgentlich ist es hilfreich, ein Kriterium für $f = \mathsf{zo}_D$ zur Verfügung zu haben.

369-6(Satz) *Die Aussagen* `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $f = \mathsf{zo}_D$.

`ii)` *“f Funktion” und “$\mathsf{dom}\, f = D$” und “$\forall \alpha : (\alpha \in D) \Rightarrow (f(\alpha) = 0)$”.*

Beweis **369-6** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $f = \mathsf{zo}_D$.

`1.1:` Via **20-5** gilt: zo_D Funktion.

`1.2:` Via **20-5** gilt: $\mathsf{dom}\,(\mathsf{zo}_D) = D$.

$\boxed{\texttt{Thema1.3}}$ $\alpha \in D$.

Aus `Thema1.3`“$\alpha \in D$”
folgt via **20-5**: $\mathsf{zo}_D(\alpha) = 0$.

Ergo `Thema1.3`: `A1` | “$\forall \alpha : (\alpha \in D) \Rightarrow (\mathsf{zo}_D(\alpha) = 0)$”

`2.1:` Aus `VS` und
aus `1.1`
folgt: $\boxed{f \text{ Funktion}}$

`2.2:` Aus `VS` und
aus `1.2`
folgt: $\boxed{\mathsf{dom}\, f = D}$

`2.3:` Aus `VS` und
aus `A1`
folgt: $\boxed{\forall \alpha : (\alpha \in D) \Rightarrow (f(\alpha) = 0)}$

Beweis **369-6** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$

`VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, f = D) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in D) \Rightarrow (f(\alpha) = 0))$.

`1.1`: Via **20-5** gilt: zo_D Funktion.

`1.2`: Via **20-5** gilt: $\mathsf{dom}\,(\mathsf{zo}_D) = D$.

> $\boxed{\texttt{Thema1.3}}$ $\beta \in \mathsf{dom}\, f$.
>
> `2`: Aus `Thema1.3` und
> aus `VS` gleich "$\ldots \mathsf{dom}\, f = D \ldots$"
> folgt: $\beta \in D$.
>
> `3.1`: Aus `2`"$\beta \in D$" und
> aus `VS` gleich "$\ldots \forall \alpha : (\alpha \in D) \Rightarrow (f(\alpha) = 0)$"
> folgt: $f(\beta) = 0$.
>
> `3.2`: Aus `2`"$\beta \in D$"
> folgt via **20-5**: $\mathsf{zo}_D(\beta) = 0$.
>
> `4`: Aus `3.1` und
> aus `3.2`
> folgt: $f(\beta) = \mathsf{zo}_D(\beta)$.

Ergo `Thema1.3`: $\boxed{\texttt{A1} \,\Big|\, \text{"}\forall \beta : (\beta \in \mathsf{dom}\, f) \Rightarrow (f(\beta) = \mathsf{zo}_D(\beta))\text{"}}$

`2`: Aus `VS` gleich "$\ldots \mathsf{dom}\, f = D \ldots$" und
aus `1.2`
folgt: $\mathsf{dom}\, f = \mathsf{dom}\,(\mathsf{zo}_D)$.

`3`: Aus `VS` gleich "f Funktion…",
aus `1.1`"zo_D Funktion",
aus `2`"$\mathsf{dom}\, f = \mathsf{dom}\,(\mathsf{zo}_D)$" und
aus `A1` gleich "$\forall \beta : (\beta \in \mathsf{dom}\, f) \Rightarrow (f(\beta) = \mathsf{zo}_D(\beta))$"
folgt via **ISF**: $f = \mathsf{zo}_D$.

□

369-7. Aus **369-6** folgt ein Kriterium für $f = \mathsf{zo}$.

<u>**369-7(Satz)**</u> *Die Aussagen* `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $f = \mathsf{zo}$.

`ii)` *"f Funktion" und "$\mathsf{dom}\, f = \mathcal{U}$" und "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U}) \Rightarrow (f(\alpha) = 0)$".*

<u>Beweis **369-7**</u>

`1:` Via **369-6** gilt:
$(f = \mathsf{zo}_{\mathcal{U}}) \Leftrightarrow ((f \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, f = \mathcal{U}) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U}) \Rightarrow (f(\alpha) = 0)))$.

`2:` Aus `1` und
aus **20-1(Def)** "$\mathsf{zo} = \mathsf{zo}_{\mathcal{U}}$"
folgt:
$(f = \mathsf{zo}) \Leftrightarrow ((f \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, f = \mathcal{U}) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U}) \Rightarrow (f(\alpha) = 0)))$.

□

369-8. Der Spezialfall $n = 0$ von **369-5** hat prominente Verursacher.

369-8(Satz)

Aus "q Unmenge" folgt "$\mathtt{rf2}\phi qx = \mathsf{zo}_{\mathbb{N}}$".

Beweis **369-8** `VS` gleich q Unmenge.

$\leq$-Notation.

`1.1:` Via **350-10** gilt: $\mathtt{rf2}\phi qx$ Funktion.

`1.2:` Via **350-10** gilt: $\mathtt{rf2}\phi qx$ ist **ana2** von ϕ, q, x.

`2:` Aus `1.2`"$\mathtt{rf2}\phi qx$ ist **ana2** von q, ϕ, x" und
aus `VS` gleich "q Unmenge"
folgt via **350-4**: $\mathtt{rf2}\phi qx(0) = 0$.

`3.1:` Aus `2`"$\mathtt{rf2}\phi qx(0) = 0$"
folgt via **369-5**: $\mathsf{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi qx) = \mathbb{N}$.

`3.2:` Aus `2`"$\mathtt{rf2}\phi qx(0) = 0$"
folgt via **369-5**: $\forall\alpha : (0 \leq \alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\mathtt{rf2}\phi qx(\alpha) = 0)$.

`Thema4.1` $\beta \in \mathbb{N}$.

`5:` Aus `Thema4.1`"$\beta \in \mathbb{N}$"
folgt via **159-11**: $0 \leq \beta$.

`6:` Aus `5`"$0 \leq \beta$",
aus `Thema4.1`"$\beta \in \mathbb{N}$" und
aus `3.2`"$\forall\alpha : (0 \leq \alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\mathtt{rf2}\phi qx(\alpha) = 0)$"
folgt: $\mathtt{rf2}\phi qx(\beta) = 0$.

Ergo `Thema4.1`: `A1` "$\forall\beta : (\beta \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\mathtt{rf2}\phi qx(\beta) = 0)$"

`4.2:` Aus `1.1`"$\mathtt{rf2}\phi qx$ Funktion",
aus `3.1`"$\mathsf{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi qx) = \mathbb{N}$" und
aus `A1` gleich "$\forall\beta : (\beta \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\mathtt{rf2}\phi qx(\beta) = 0)$"
folgt via **369-6**: $\mathtt{rf2}\phi qx = \mathsf{zo}_{\mathbb{N}}$.

□

369-9. Gelgentlich ist $\mathsf{dom}\, R$, R ist **ana2** von ϕ, q, x *nicht* gleich $\mathbb{N}$.

369-9(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow$) R *ist* **ana2** *von* ϕ, q, x.

$\rightarrow$) $n \in \mathsf{dom}\, R$.

$\rightarrow$) $\mathsf{350.0}(R(n), \phi, x)$ *Unmenge.*

Dann folgt:

a) $1 + n \notin \mathsf{dom}\, R \neq \mathbb{N}$.

b) $1 + n \notin \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf}2\phi q x) \neq \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}\mathsf{350.0}(x, z, y) = \{(\{\lambda\} \cup \mu, \eta) : (\lambda \notin \mu) \\ \wedge(\exists \Omega, \Xi : ((\mu, \Omega) \in x) \wedge ((\lambda, \Xi) \in z) \wedge (((\Omega, \Xi), \eta) \in y))\}\end{aligned}$$

$\mathtt{RECH}$-**Notation**.

Beweis **369-9** a)

1: Es gilt: $(1+n \in \mathsf{dom}\, R) \vee (1+n \notin \mathsf{dom}\, R)$.

`wfFallunterscheidung`

`1.1.Fall` $1+n \in \mathsf{dom}\, R$.

2.1: Aus 1.1.Fall "$1+n \in \mathsf{dom}\, R$"
folgt via **folk**: $R(1+n)$ Menge.

2.2: Aus →) "R ist **ana2** von ϕ, q, x",
aus →) "$n \in \mathsf{dom}\, R$" und
aus 1.1.Fall "$1+n \in \mathsf{dom}\, R$"
folgt via **350-3(Def)**: $R(1+n) = 350.0(R(n), \phi, x)$.

3: Aus 2.2 und
aus 2.1
folgt: $350.0(R(n), \phi, x)$ Menge.

4: Nach →) gilt: $350.0(R(n), \phi, x)$ Unmenge.

`Ende wfFallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: A1 "$1+n \notin \mathsf{dom}\, R$"

2: Aus →) "R ist **ana2** von ϕ, q, x" und
aus →) "$n \in \mathsf{dom}\, R$"
folgt via **354-1**: $n \in \mathbb{N}$.

3: Aus 2 "$n \in \mathbb{N}$"
folgt via **159-10**: $1+n \in \mathbb{N}$.

4: Aus 3 "$1+n \in \mathbb{N}$" und
aus A1 gleich "$1+n \notin \mathsf{dom}\, R$"
folgt via **folk**: $\mathbb{N} \neq \mathsf{dom}\, R$.

5: Aus 4
folgt: $\boxed{\mathsf{dom}\, R \neq \mathbb{N}}$

Beweis **369-9** `b)`

`1.1:` Aus →) “ R ist **ana2** von ϕ, q, x ” und
aus →) “ $n \in \mathsf{dom}\, R$ ”
folgt via **350-10**: $R(n) = \mathtt{rf2}\phi qx(n)$.

`1.2:` Aus →) “ R ist **ana2** von ϕ, q, x ” und
aus →) “ $n \in \mathsf{dom}\, R$ ”
folgt via **354-1**: $n \in \mathbb{N}$.

`2:` Es gilt: $(1 + n \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi qx)) \vee (1 + n \notin \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi qx))$.

`wfFallunterscheidung`

`2.1.Fall` $1 + n \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi qx)$.

`3.1:` Aus `2.1.Fall` $1 + n \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi qx)$
folgt via **folk**: $\mathtt{rf2}\phi qx(1 + n)$ Menge.

`3.2:` Via **350-10** gilt: $\mathtt{rf2}\phi qx$ ist **ana2** von ϕ, q, x.

`3.3:` Aus →) “ R ist **ana2** von ϕ, q, x ”
folgt via **354-2**: $\mathsf{dom}\, R \subseteq \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi qx)$.

`4:` Aus →) “ $n \in \mathsf{dom}\, R$ ” und
aus `3.3` “ $\mathsf{dom}\, R \subseteq \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi qx)$ ”
folgt via **folk**: $n \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi qx)$.

`5:` Aus `3.2` “ $\mathtt{rf2}\phi qx$ ist **ana2** von ϕ, q, x ”,
aus `4` “ $n \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi qx)$ ” und
aus `2.1.Fall` “ $1 + n \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi qx)$ ”
folgt via **350-3(Def)**: $\mathtt{rf2}\phi qx(1 + n) = \mathsf{350.0}(\mathtt{rf2}\phi qx(n), \phi, x)$.

`6:` Aus `5` und
aus `3.1`
folgt: $\mathsf{350.0}(\mathtt{rf2}\phi qx(n), \phi, x)$ Menge.

`7:` Aus `6` und
aus `1.1`
folgt: $\mathsf{350.0}(R(n), \phi, x)$ Menge.

`8:` Nach →) gilt: $\mathsf{350.0}(R(n), \phi, x)$ Unmenge.

`Ende wfFallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

`A1` | “ $1 + n \notin \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf2}\phi qx)$ ”

...

<u>Beweis</u> **369-9** `b)` ...

`2:` Aus `1.2`"$n \in \mathbb{N}$"
folgt via **159-10**: $1 + n \in \mathbb{N}$.

`3:` Aus `2`"$1 + n \in \mathbb{N}$" und
aus `A1` gleich "$1 + n \notin \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf}2\phi qx)$"
folgt via **folk**: $\mathbb{N} \neq \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf}2\phi qx)$.

`4:` Aus `3`
folgt: $\boxed{\mathsf{dom}\,(\mathtt{rf}2\phi qx) \neq \mathbb{N}}$

□

369-10. Gelgentlich ist $\mathsf{dom}\,(\mathtt{rf}2\phi qx)$ *nicht* gleich $\mathbb{N}$.

<u>**369-10(Satz)**</u> *Es gelte:*

$\rightarrow$) $n \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf}2\phi qx)$.

$\rightarrow$) $\mathsf{350.0}(\mathtt{rf}2\phi qx(n), \phi, x)$ *Unmenge.*

Dann folgt "$1 + n \notin \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf}2\phi qx) \neq \mathbb{N}$".

$$\mathsf{350.0}(x, z, y) = \{(\{\lambda\} \cup \mu, \eta) : (\lambda \notin \mu) \wedge (\exists \Omega, \Xi : ((\mu, \Omega) \in x) \wedge ((\lambda, \Xi) \in z) \wedge (((\Omega, \Xi), \eta) \in y))\}$$

<u>$\mathtt{RECH}$-**Notation**</u>.

<u>Beweis **369-10**</u>

1: Via **350-10** gilt: $\mathtt{rf}2\phi qx$ ist **ana2** von ϕ, q, x.

2: Aus 1 "$\mathtt{rf}2\phi qx$ ist **ana2** von ϕ, q, x",
aus $\rightarrow$) "$n \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf}2\phi qx)$" und
aus $\rightarrow$) "$\mathsf{350.0}(\mathtt{rf}2\phi qx(n), \phi, x)$ Unmenge"
folgt via **369-9**: $1 + n \notin \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf}2\phi qx) \neq \mathbb{N}$.

$\square$

Analysis: R ist **ana3** von q, E, x.
$\texttt{rf3}qEx$.

Ersterstellung: 08/01/16 **Letzte Änderung: 29/01/16**

370-1. Mit **ana3** von q, E, x wird der Weg zu einer gerichteten, sukzessiven Verknüpfung beschritten.

370-1(Definition)

"R **ist ana3 von** q, E, x" genau dann, wenn gilt:

1) R Funktion.

2) $\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

3) $R(0) = \{q\}$.

4) $\forall \alpha : (\alpha, 1 + \alpha \in \mathsf{dom}\, R) \Rightarrow (R(1 + \alpha) = E[R(\alpha) \times x[\{1 + \alpha\}]])$.

RECH-**Notation**.

370-2. Zwischendurch erfreut ein wenig Arithmetik.

370-2(Satz)

a) *Aus* "$p \in \mathbb{C}$" *folgt* "$1 + p \neq p$".

b) *Aus* "$x \in \{p\}$" *und* "$p \in \mathbb{C}$" *folgt* "$1 + x \notin \{p\}$".

c) *Aus* "$x \in \{0\}$" *folgt* "$1 + x \notin \{0\}$".

RECH-**Notation**.

Beweis **370-2** `a)` `VS` gleich $p \in \mathbb{C}$.

`1:` Es gilt: $(1+p=p) \vee (1+p \neq p)$.

$\boxed{\texttt{wfFallunterscheidung}}$

$\boxed{\texttt{1.1.Fall}}$ $1+p=p$.

`2:` Aus `1.1.Fall` "$1+p=p$" und
aus `VS` gleich "$p \in \mathbb{C}$"
folgt via **102-4**: $1=p-p$.

`3:` Aus `VS` gleich "$p \in \mathbb{C}$"
folgt via **102-5**: $p-p=0$.

`4:` Aus `2` und
aus `3`
folgt: $1=0$.

`5:` Via $\neq$**schola** gilt: $1 \neq 0$.

$\boxed{\texttt{Ende wfFallunterscheidung}}$ In beiden Fällen gilt: $1+p \neq p$.

`b)` `VS` gleich $(x \in \{p\}) \wedge (p \in \mathbb{C})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \{p\} \ldots$"
folgt via **folk**: $x=p$.

`2:` Aus `1`
folgt: $1+x=1+p$.

`3:` Aus `VS` gleich "$\ldots p \in \mathbb{C}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $1+p \neq p$.

`4:` Aus `2` und
aus `3`
folgt: $1+x \neq p$.

`5:` Aus `4` "$1+x \neq p$"
folgt via **1-7**: $1+x \notin \{p\}$.

`c)` `VS` gleich $x \in \{0\}$.

Aus `VS` gleich "$x \in \{0\}$" und
aus $\in$**schola** "$0 \in \mathbb{C}$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $1+x \notin \{0\}$.

□

370-3. Ist R **ana3** von q, E, x, so ist R eine Menge mit $0 \in \mathsf{dom}\, R$. Auch ist $\{(0, q)\}$ **ana3** von q, E, x.

370-3(Satz)

a) $0, \{0\} \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

b) $\{(0, \{q\})\}$ *ist* **ana3** *von* q, E, x.

c) *Aus "R ist* **ana3** *von q, E, x"*
folgt "$0 \in \mathsf{dom}\, R$" und "$0 \neq \mathsf{dom}\, R$" und "R Menge.

d) *Aus "q Unmenge" und "R ist* **ana3** *von q, E, x" folgt "$R(0) = 0$".*

Beweis **370-3**

RECH-**Notation**.

---

a)

1.1: Aus $\in$**schola**"$0 \in \mathbb{N}$"

folgt via **folk**: $\boxed{0 \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}}$

1.2: Aus $\in$**schola**"$1 \in \mathbb{N}$"
folgt via **folk**: $1 \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

2: Aus **95-1(Def)**"$1 = \{0\}$" und
aus 1.2

folgt: $\boxed{\{0\} \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}}$

<u>Beweis **370-3** `b)`</u>

`1.1:` Via **259-36** gilt: $\{(0,\{q\})\}$ Funktion.

`1.2:` Via **SingeltonAxiom** gilt: $\{q\}$ Menge.

`1.3:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $\{0\} \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

`2.1:` Aus **0$\mathcal{U}$Axiom**“0 Menge” und
aus `1.2`“$\{q\}$ Menge”
folgt via **259-36**: $\mathsf{dom}\,(\{(0,\{q\})\}) = \{0\}$.

`2.2:` Aus **0$\mathcal{U}$Axiom**“0 Menge” und
aus `1.2`“$\{q\}$ Menge”
folgt via **259-37**: $\{(0,\{q\})\}(0) = \{q\}$.

`3.1:` Aus `2.1` und
aus `1.3`
folgt: $\mathsf{dom}\,(\{(0,\{q\})\}) \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

> `Thema3.2` $\alpha, 1+\alpha \in \mathsf{dom}\,(\{(0,\{q\})\})$.
>
> `4:` Aus `Thema3.2` und
> aus `2.1`
> folgt: $\alpha, 1+\alpha \in \{0\}$.
>
> `5:` Aus `4`“$\alpha \ldots \in \{0\}$”
> folgt via **370-2**: $1+\alpha \notin \{0\}$.
>
> `6:` Aus `4`
> folgt: $1+\alpha \in \{0\}$.

Ergo `Thema3.2`:

`A1` | “$\forall \alpha : (\alpha, 1+\alpha \in \mathsf{dom}\,(\{(0,\{q\})\})) \Rightarrow (\{(0,\{q\})\}(1+\alpha) = E[\{(0,\{q\})\}(\alpha) \times x[\{1+\alpha\}]])$”

`4:` Aus `1.1`“$\{(0,\{q\})\}$ Funktion”,
aus `2.1`“$\mathsf{dom}\,(\{(0,\{q\})\}) \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$”,
aus `2.2`“$\{(0,\{q\})\}(0) = \{q\}$” und
aus `A1` gleich “$\forall \alpha : (\alpha, 1+\alpha \in \mathsf{dom}\,(\{(0,\{q\})\}))$
$\Rightarrow (\{(0,\{q\})\}(1+\alpha) = E[\{(0,\{q\})\}(\alpha) \times x[\{1+\alpha\}]])$”
folgt via **370-1(Def)**: $\{(0,\{q\})\}$ ist **ana3** von q, E, x.

Beweis **370-3** `c)` `VS` gleich R ist **ana3** von q, E, x.

`1.1:` Aus `VS` gleich "R ist **ana3** von q, E, x"
folgt via **370-1(Def)**: $(R \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N})$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "R ist **ana3** von q, E, x"
folgt via **370-1(Def)**: $R(0) = \{q\}$.

`1.3:` Via **SingeltonAxiom** gilt: $\{q\}$ Menge.

`2.1:` Aus `1.1`"$\ldots \mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$"
folgt via **ElementAxiom**: $\mathsf{dom}\, R$ Menge.

`2.2:` Aus `1.2` und
aus `1.3`
folgt: $R(0)$ Menge.

`3.1:` Aus `1.1`"R Funktion..." und
aus `2.1`"$\mathsf{dom}\, R$ Menge"
folgt via **folk**: $\boxed{R \text{ Menge}}$

`3.2:` Aus `2.2`"$R(0)$ Menge"
folgt via **folk**: $\boxed{0 \in \mathsf{dom}\, R}$

`4:` Aus `3.2`"$0 \in \mathsf{dom}\, R$"
folgt via **folk**: $\boxed{0 \neq \mathsf{dom}\, R}$

`d)` `VS` gleich $(q \text{ Unmenge}) \wedge (R \text{ ist } \textbf{ana3} \text{ von } q, E, x)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "q Unmenge..."
folgt via **folk**: $\{q\} = 0$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots R$ ist **ana3** von q, E, x"
folgt via **370-1(Def)**: $R(0) = \{q\}$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $R(0) = 0$.

$\square$

370-4. Sind R, S **ana3** von q, E, x und gilt $\mathsf{dom}\, R \subseteq \mathsf{dom}\, S$, so folgt $R \subseteq S$.

370-4(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow\!)$ *R, S ist* **ana3** *von q, E, x.*

$\rightarrow\!)$ $\mathsf{dom}\, R \subseteq \mathsf{dom}\, S$.

Dann folgt "$R \subseteq S$".

Beweis **370-4**

`RECH`-**Notation**.

`1.1:` Aus $\rightarrow\!)$ "R ist **ana3** von q, E, x"
folgt via **370-1(Def)**: $(R \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N})$
$\wedge (R(0) = \{q\})$
$\wedge (\forall \alpha : (\alpha, 1+\alpha \in \mathsf{dom}\, R) \Rightarrow (R(1+\alpha) = E[R(\alpha) \times x[\{1+\alpha\}]]))$.

`1.2:` Aus $\rightarrow\!)$ "S ist **ana3** von q, E, x"
folgt via **370-1(Def)**: $(S \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, S \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N})$
$\wedge (S(0) = \{q\})$
$\wedge (\forall \alpha : (\alpha, 1+\alpha \in \mathsf{dom}\, S) \Rightarrow (S(1+\alpha) = E[S(\alpha) \times x[\{1+\alpha\}]]))$.

`2.1:` Aus `1.1`"$\ldots R(0) = \{q\} \ldots$" und
aus `1.2`"$\ldots S(0) = \{q\} \ldots$"
folgt: $R(0) = S(0)$.

...

Beweis **370-4** ...

$\boxed{\texttt{Thema2.2}}$ $(\beta, 1+\beta \in \mathsf{dom}\, R) \wedge (R(\beta) = S(\beta))$.

`3.1:` Aus `Thema2.2` "$\beta, 1+\beta \in \mathsf{dom}\, R \ldots$" und
aus `1.1` "$\ldots \forall \alpha : (\alpha, 1+\alpha \in \mathsf{dom}\, R)$
$\Rightarrow (R(1+\alpha) = E[R(\alpha) \times x[\{1+\alpha\}]])$"
folgt: $R(1+\beta) = E[R(\beta) \times x[\{1+\beta\}]]$.

`3.2:` Aus `Thema2.2` "$\beta, 1+\beta \in \mathsf{dom}\, R \ldots$" und
aus $\rightarrow$) "$\mathsf{dom}\, R \subseteq \mathsf{dom}\, S$"
folgt via **folk**: $\beta, 1+\beta \in \mathsf{dom}\, S$.

`4.1:` Aus `3.1` und
aus `Thema2.2` "$\ldots R(\beta) = S(\beta)$"
folgt: $R(1+\beta) = E[S(\beta) \times x[\{1+\beta\}]]$.

`4.2:` Aus `3.2` "$\beta, 1+\beta \in \mathsf{dom}\, S$" und
aus `1.2` "$\ldots \forall \alpha : (\alpha, 1+\alpha \in \mathsf{dom}\, S)$
$\Rightarrow (S(1+\alpha) = E[S(\alpha) \times x[\{1+\alpha\}]])$"
folgt: $S(1+\beta) = E[S(\beta) \times x[\{1+\beta\}]]$.

`5:` Aus `4.1` und
aus `4.2`
folgt: $R(1+\beta) = S(1+\beta)$.

Ergo `Thema2.2`:

`A1`	"$\forall \beta : ((\beta, 1+\beta \in \mathsf{dom}\, R) \wedge (R(\beta) = S(\beta))) \Rightarrow (R(1+\beta) = S(1+\beta))$"

`3:` Aus `1.1` "R Funktion..." ,
aus `1.2` "S Funktion..." ,
aus `2.3` "$\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$" ,
aus `2.1` "$\mathsf{dom}\, R \subseteq \mathsf{dom}\, S$" ,
aus `2.2` "$R(0) = S(0)$" und
aus `A1` gleich "$\forall \beta : ((\beta, 1+\beta \in \mathsf{dom}\, R) \wedge (R(\beta) = S(\beta)))$
$\Rightarrow (R(1+\beta) = S(1+\beta))$"
folgt via **337-16**:

$R \subseteq S$.

□

370-5. Alle R, die **ana3** von q, E, x sind werden zu einer eigenen Klasse zusammen gefasst.

370-5(Definition)

$$\mathsf{370.0}(q, E, x) = \{\omega : \omega \text{ ist } \mathbf{ana3} \text{ von } q, E, x\}.$$

370-6. Da jede Klasse, die **ana3** von q, E, x ist, eine Menge ist, ist das Erfüllt-Sein der definierenden Eigenschaft von `370.0`(q, E, x) notwendig und hinreichend für die Zugehörigkeit zu dieser Klasse.

370-6(Satz) *Die Aussagen* `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` *R ist* **ana3** *von q, E, x.*

`ii)` $R \in \{\omega : \omega$ *ist* **ana3** *von* $q, E, x\}$.

`370.0`$(q, E, x) = \{\omega : \omega$ *ist* **ana3** *von* $q, E, x\}$

Beweis **370-6** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich R ist **ana3** von q, E, x.

`1:` Aus `VS` gleich "R ist **ana3** von q, E, x"
folgt via **370-3**: R Menge.

`2:` Aus `VS` gleich "R ist **ana3** von q, E, x" und
aus `1` "R Menge"
folgt: $R \in \{\omega : \omega$ ist **ana3** von $q, E, x\}$.

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich $R \in \{\omega : \omega$ ist **ana3** von $q, E, x\}$.
Aus `VS` gleich "$R \in \{\omega : \omega$ ist **ana3** von $q, E, x\}$"
folgt: R ist **ana3** von q, E, x.

□

370-7. Die Klasse aller R, die **ana3** von q, E, x sind, ist eine sse_Kette.

370-7(Satz)

a) *Aus* "R, S *ist* **ana3** *von* q, E, x" *folgt* "$(R \subseteq S) \vee (S \subseteq R)$".

b) $\{\omega : \omega$ *ist* **ana3** *von* $q, E, x\}$ *ist* sse_*Kette.*

370.0(q, E, x) $= \{\omega : \omega$ *ist* **ana3** *von* $q, E, x\}$

<u>Beweis **370-7**</u> `a)` `VS` gleich R, S ist **ana3** von q, E, x.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$R\ldots$ ist **ana3** von q, E, x"
folgt via **370-1(Def)**: $\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots S$ ist **ana3** von q, E, x"
folgt via **370-1(Def)**: $\mathsf{dom}\, S \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

`2:` Aus `1.1`"$\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$" und
aus `1.2`"$\mathsf{dom}\, S \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$"
folgt via **337-9**: $(\mathsf{dom}\, R \subseteq \mathsf{dom}\, S) \vee (\mathsf{dom}\, S \subseteq \mathsf{dom}\, R)$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $\mathsf{dom}\, R \subseteq \mathsf{dom}\, S$.
Aus `VS` gleich "R, S ist **ana3** von q, E, x" und
aus `2.1.Fall`"$\mathsf{dom}\, R \subseteq \mathsf{dom}\, S$"
folgt via **370-4**: $R \subseteq S$.

`2.2.Fall` $\mathsf{dom}\, S \subseteq \mathsf{dom}\, R$.
Aus `VS` gleich "$\ldots S$ ist **ana3** von q, E, x",
aus `VS` gleich "$R\ldots$ ist **ana3** von q, E, x" und
aus `2.2.Fall`"$\mathsf{dom}\, S \subseteq \mathsf{dom}\, R$"
folgt via **370-4**: $S \subseteq R$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $(R \subseteq S) \vee (S \subseteq R)$.

`b)`

`Thema0` $\alpha, \beta \in \{\omega : \omega$ ist **ana3** von $q, E, x\}$.

`1:` Aus `Thema0`"$\alpha, \beta \in \{\omega : \omega$ ist **ana3** von $q, E, x\}$
folgt: α, β ist **ana3** von q, E, x.

`2:` Aus `1`"α, β ist **ana3** von q, E, x"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $(\alpha \subseteq \beta) \vee (\beta \subseteq \alpha)$.

Ergo `Thema0`: $\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \{\omega : \omega$ ist **ana3** von $q, E, x\})$
$\Rightarrow ((\alpha \subseteq \beta) \vee (\beta \subseteq \alpha))$.

Konsequenz via **337-20**: $\{\omega : \omega$ ist **ana3** von $q, E, x\}$ ist $\mathsf{sse_}$Kette.

□

370-8. $\texttt{rf}3qEx$ ist die Vereinigung aller Mengen, die **ana3** von q, E, x sind.

<u>**370-8(Definition)**</u>

$$\texttt{rf}3qEx = \bigcup\{\omega : \omega \text{ ist } \textbf{ana3} \text{ von } q, E, x\}.$$

$\mathsf{370.0}(q, E, x) \; = \{\omega : \omega \text{ ist } \textbf{ana3} \text{ von } q, E, x\}$

370-9. $\mathtt{rf}3qEx$ ist **ana3** von q, E, x

370-9(Satz)

a) $\mathtt{rf}3qEx$ *Funktion.*

b) $\mathsf{dom}\,(\mathtt{rf}3qEx) \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

c) *Aus "R ist* **ana3** *von q, E, x"*
folgt "$R \subseteq \mathtt{rf}3qEx$" und "$\mathsf{dom}\,R \subseteq \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf}3qEx)$".

d) *Aus "R ist* **ana3** *von q, E, x" und "$n \in \mathsf{dom}\,R$"*
folgt "$R(n) = \mathtt{rf}3qEx(n)$".

e) $\mathtt{rf}3qEx(0) = \{q\}$.

f) $\mathtt{rf}3qEx$ *ist* **ana3** *von q, E, x.*

Beweis **370-9**

$\mathsf{370.0}(q, E, x) \; = \{\omega : \omega \text{ ist } \mathbf{ana3} \text{ von } q, E, x\}$
RECH-**Notation**.

Beweis **370-9** `a)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in \{\omega : \omega \text{ ist } \mathbf{ana3} \text{ von } q, E, x\}.$

`2:` Aus `Thema1.1` "$\alpha \in \{\omega : \omega \text{ ist } \mathbf{ana3} \text{ von } q, E, x\}$"
folgt: $\alpha \text{ ist } \mathbf{ana3} \text{ von } q, E, x.$

`3:` Aus `2` "$\alpha \text{ ist } \mathbf{ana3} \text{ von } q, E, x$"
folgt via **370-1(Def)**: α Funktion.

Ergo `Thema1.1`: `A1` | "$\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : \omega \text{ ist } \mathbf{ana3} \text{ von } q, E, x\}) \Rightarrow (\alpha \text{ Funktion})$"

`1.2:` Via **370-7** gilt: $\{\omega : \omega \text{ ist } \mathbf{ana3} \text{ von } q, E, x\}$ ist `sse`_Kette.

`2:` Aus `1.2` "$\{\omega : \omega \text{ ist } \mathbf{ana3} \text{ von } q, E, x\}$ ist `sse`_Kette" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : \omega \text{ ist } \mathbf{ana3} \text{ von } q, E, x\}) \Rightarrow (\alpha \text{ Funktion})$"
folgt via **337-21**:

$$\bigcup \{\omega : \omega \text{ ist } \mathbf{ana3} \text{ von } q, E, x\} \text{ Funktion.}$$

`3:` Via **370-8(Def)** gilt: $\texttt{rf3}qEx = \bigcup \{\omega : \omega \text{ ist } \mathbf{ana3} \text{ von } q, E, x\}.$

`4:` Aus `2` und
aus `3`
folgt: $\texttt{rf3}qEx$ Funktion.

Beweis **370-9** `b)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$	$\alpha \in \{\omega : \omega \text{ ist } \mathbf{ana3} \text{ von } q, E, x\}$.

`2:` Aus `Thema1.1` "$\alpha \in \{\omega : \omega \text{ ist } \mathbf{ana3} \text{ von } q, E, x\}$"
folgt: $\alpha \text{ ist } \mathbf{ana3} \text{ von } q, E, x$.

`3:` Aus `2` "$\alpha \text{ ist } \mathbf{ana3} \text{ von } q, E, x$"
folgt via **370-1(Def)**: $\mathsf{dom}\, \alpha \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

Ergo `Thema1.1`:

`A1` | "$\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : \omega \text{ ist } \mathbf{ana3} \text{ von } q, E, x\}) \Rightarrow (\mathsf{dom}\, \alpha \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N})$"

`1.2:` Aus `A1` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : \omega \text{ ist } \mathbf{ana3} \text{ von } q, E, x\})$
$\Rightarrow (\mathsf{dom}\, \alpha \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N})$"
folgt via **308-2**:
$\mathsf{dom}\, (\bigcup\{\omega : \omega \text{ ist } \mathbf{ana3} \text{ von } q, E, x\}) \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

`2:` Aus `1.2` und
aus **370-8(Def)** "$\texttt{rf}3qEx = \bigcup\{\omega : \omega \text{ ist } \mathbf{ana3} \text{ von } q, E, x\}$"
folgt: $\mathsf{dom}\, (\texttt{rf}3qEx) \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

`c)` `VS` gleich $R \text{ ist } \mathbf{ana3} \text{ von } q, E, x$.

`1:` Aus `VS` gleich "$R \text{ ist } \mathbf{ana3} \text{ von } q, E, x$"
folgt via **370-6**: $R \in \{\omega : \omega \text{ ist } \mathbf{ana3} \text{ von } q, E, x\}$.

`2:` Aus `1` "$R \in \{\omega : \omega \text{ ist } \mathbf{ana3} \text{ von } q, E, x\}$"
folgt via **folk**: $R \subseteq \bigcup\{\omega : \omega \text{ ist } \mathbf{ana3} \text{ von } q, E, x\}$.

`3:` Via **370-8(Def)** gilt: $\texttt{rf}3qEx = \bigcup\{\omega : \omega \text{ ist } \mathbf{ana3} \text{ von } q, E, x\}$.

`4:` Aus `2` und
aus `3`
folgt: $\boxed{R \subseteq \texttt{rf}3qEx}$

`5:` Aus `4` "$R \subseteq \texttt{rf}3qEx$"
folgt via **folk**: $\boxed{\mathsf{dom}\, R \subseteq \mathsf{dom}\, (\texttt{rf}3qEx)}$

<u>Beweis **370-9**</u> `d)` `VS` gleich $(R \text{ ist } \mathbf{ana3} \text{ von } q, E, x) \wedge (n \in \mathsf{dom}\, R).$

`1.1:` Aus `VS` gleich "R ist **ana3** von $q, E, x \ldots$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $R \subseteq \mathtt{rf3}qEx.$

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $\mathtt{rf3}qEx$ Funktion.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots n \in \mathsf{dom}\, R$",
aus `1.1`"$R \subseteq \mathtt{rf3}qEx$" und
aus `1.2`"$\mathtt{rf3}qEx$ Funktion"
folgt via **308-6**: $R(n) = \mathtt{rf3}qEx(n).$

`e)`

`1:` Via **370-3** gilt: $\{(0, \{q\})\}$ ist **ana3** von $q, E, x.$

`2:` Via **SingeltonAxiom** gilt: $\{q\}$ Menge.

`3.1:` Aus $0\mathcal{U}$**Axiom**"0 Menge" und
aus `2`"$\{q\}$ Menge"
folgt via **259-36**: $\mathsf{dom}\,(\{(0, \{q\})\}) = \{0\}.$

`3.2:` Aus $0\mathcal{U}$**Axiom**"0 Menge" und
aus `2`"$\{q\}$ Menge"
folgt via **259-37**: $(\{(0, \{q\})\})(0) = \{q\}.$

`4:` Aus **1-5**"$0 \in \{0\}$" und
aus `3.1`
folgt: $0 \in \mathsf{dom}\,(\{(0, \{(0, q)\})\}).$

`5:` Aus `1`"$\{(0, \{q\})\}$ ist **ana3** von q, E, x" und
aus `4`"$0 \in \mathsf{dom}\,(\{(0, \{q\})\})$"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $(\{(0, \{q\})\})(0) = \mathtt{rf3}qEx(0).$

`6:` Aus `5` und
aus `3.2`
folgt: $\mathtt{rf3}qEx(0) = \{q\}.$

Beweis **370-9** `f)`

$\boxed{\texttt{Thema0}}$ $\alpha, 1+\alpha \in \mathsf{dom}\,(\texttt{rf3}qEx)$.

`1:` Via **370-8(Def)** gilt:
$$\texttt{rf3}qEx = \bigcup\{\omega : \omega \text{ ist } \textbf{ana3} \text{ von } q, E, x\}.$$

`2:` Aus `Thema0` und
aus `1`
folgt: $\alpha, 1+\alpha \in \mathsf{dom}\,(\bigcup\{\omega : \omega \text{ ist } \textbf{ana3} \text{ von } q, E, x\})$.

`3:` Via **370-7** gilt:
$$\{\omega : \omega \text{ ist } \textbf{ana3} \text{ von } q, E, x\} \text{ ist } \mathsf{sse\_}\text{Kette}.$$

`4:` Aus `2`“$\alpha, 1+\alpha \in \mathsf{dom}\,(\bigcup\{\omega : \omega \text{ ist } \textbf{ana3} \text{ von } q, E, x\})$” und
aus `3`“$\{\omega : \omega \text{ ist } \textbf{ana3} \text{ von } q, E, x\}$ ist $\mathsf{sse_}$Kette”
folgt via **337-24**: $\exists\Omega : (\Omega \in \{\omega : \omega \text{ ist } \textbf{ana3} \text{ von } q, E, x\}) \wedge (\alpha, 1+\alpha \in \mathsf{dom}\,\Omega)$.

`5:` Aus `4`“$\ldots \Omega \in \{\omega : \omega \text{ ist } \textbf{ana3} \text{ von } q, E, x\} \ldots$”
folgt: Ω ist **ana3** von q, E, x.

`6:` Aus `5`“Ω ist **ana3** von q, E, x” und
aus `4`“$\ldots \alpha, 1+\alpha \in \mathsf{dom}\,\Omega$”
folgt via **370-1(Def)**: $\Omega(1+\alpha) = E[\Omega(\alpha) \times x[\{1+\alpha\}]]$.

`7:` Aus `5`“Ω ist **ana3** von q, E, x” und
aus `4`“$\ldots \alpha \ldots \in \mathsf{dom}\,\Omega$”
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $\Omega(\alpha) = \texttt{rf3}qEx(\alpha)$.

`8.1:` Aus `6` und
aus `7`
folgt: $\Omega(1+\alpha) = E[\texttt{rf3}qEx(\alpha) \times x[\{1+\alpha\}]]$.

`8.2:` Aus `5`“Ω ist **ana3** von q, E, x” und
aus `4`“$\ldots 1+\alpha \in \mathsf{dom}\,\Omega$”
folgt via des bereits bewiesenen `d)`:
$$\Omega(1+\alpha) = \texttt{rf3}qEx(1+\alpha).$$

`9:` Aus `8.1` und
aus `8.2`
folgt: $\texttt{rf3}qEx(1+\alpha) = E[\texttt{rf3}qEx(\alpha) \times x[\{1+\alpha\}]]$.

...

<u>Beweis</u> **370-9** `f)` ...

Ergo `Thema0`:

`A1`	"$\forall \alpha : (\alpha, 1+\alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf}3qEx)) \Rightarrow (\mathtt{rf}3qEx(1+\alpha) = E[\mathtt{rf}3qEx(\alpha) \times x[\{1+\alpha\}]])$"

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $\mathtt{rf}3qEx$ Funktion.

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $\mathsf{dom}\,(\mathtt{rf}3qEx) \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

`1.3:` Via des bereits bewiesenen `e)` gilt: $\mathtt{rf}3qEx(0) = \{q\}$.

`2:` Aus `1.1` "$\mathtt{rf}3qEx$ Funktion",
aus `1.2` "$\mathsf{dom}\,(\mathtt{rf}3qEx) \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$",
aus `1.3` "$\mathtt{rf}3qEx(0) = \{q\}$" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha : (\alpha, 1+\alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf}3qEx))$
$\Rightarrow (\mathtt{rf}3qEx(1+\alpha) = E[\mathtt{rf}3qEx(\alpha) \times x[\{1+\alpha\}]])$"
folgt via **370-1(Def)**: $\mathtt{rf}3qEx$ ist **ana3** von q, E, x.

□

370-10. Gelegentlich kann R, R ist **ana3** von q,E,x, fortgesetzt werden.

370-10(Satz)

a) *Aus* "R *ist* **ana3** *von* q,E,x"
und "$n\in\mathsf{dom}\,R$"
und "$1+n\notin\mathsf{dom}\,R$"
und "$E[R(n)\times x[\{1+n\}]]$ *Menge*"
folgt "$\{(1+n,E[R(n)\times x[\{1+n\}]])\}\cup R$ *ist* **ana3** *von* q,E,x".

b) *Aus* "R *ist* **ana3** *von* q,E,x"
und "$n\in\mathsf{dom}\,R$"
und "$E[R(n)\times x[\{1+n\}]]$ *Menge*"
folgt "$\{(1+n,E[R(n)\times x[\{1+n\}]])\}\cup R$ *ist* **ana3** *von* q,E,x".

c) *Aus* "R *ist* **ana3** *von* q,E,x"
und "$n\in\mathsf{dom}\,R$"
und "$E[R(n)\times x[\{1+n\}]]$ *Menge*"
folgt "$1+n\in\mathsf{dom}\,(\mathtt{rf3}qEx)$".

RECH-**Notation**.

Beweis **370-10**

$\leq$-**Notation**.

...

Beweis **370-10** ...

a) VS gleich $(R \text{ ist } \mathbf{ana3} \text{ von } q, E, x) \wedge (n \in \mathsf{dom}\, R) \wedge (1+n \notin \mathsf{dom}\, R)$
$\wedge(E[R(n) \times x[\{1+n\}]] \text{ Menge})$.

1: Aus →) "R ist **ana3** von $q, E, x \ldots$"
folgt via **370-1(Def)**:
$(R \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}) \wedge (R(0) = \{q\})$
$\wedge(\forall \alpha : (\alpha, 1+\alpha \in \mathsf{dom}\, R) \Rightarrow (R(1+\alpha) = E[R(\alpha) \times x[\{1+\alpha\}]]))$.

2.1: Aus 1"R Funktion..." und
aus VS gleich "$\ldots 1+n \notin \mathsf{dom}\, R \ldots$"
folgt via **261-4**: $\{(1+n, E[R(n) \times x[\{1+n\}]])\} \cup R$ Funktion.

2.2: Aus VS gleich "$\ldots n \in \mathsf{dom}\, R \ldots$" und
aus 1"$\ldots \mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **337-9**: $n \in \mathbb{N}$.

2.3: Aus VS gleich "$\ldots E[R(n) \times x[\{1+n\}]]$ Menge"
folgt via **309-2**:
$\mathsf{dom}\,(\{(1+n, E[R(n) \times x[\{1+n\}]])\} \cup R) = \{1+n\} \cup \mathsf{dom}\, R$.

2.4: Aus VS gleich "$\ldots n \in \mathsf{dom}\, R \ldots$",
aus 1"$\ldots \mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N} \ldots$" und
aus VS gleich "$\ldots 1+n \notin \mathsf{dom}\, R \ldots$"
folgt via **337-9**: $\mathsf{dom}\, R = 1+n \in \mathbb{N}$.

3.1: Aus 2.4"$\ldots 1+n \in \mathbb{N}$"
folgt via A$\mathbb{N}$**Axiom**: $1+(1+n) = \{1+n\} \cup (1+n)$.

3.2: Aus 2.4"$\ldots 1+n \in \mathbb{N}$"
folgt via **159-10**: $1+(1+n) \in \mathbb{N}$.

4: Aus 3.1 und
aus 2.4"$\mathsf{dom}\, R = 1+n \ldots$"
folgt: $1+(1+n) = \{1+n\} \cup \mathsf{dom}\, R$.

5.1: Aus 4 und
aus 2.3
folgt: $\mathsf{dom}\,(\{(1+n, E[R(n) \times x[\{1+n\}]])\} \cup R) = 1+(1+n)$.

5.2: Aus 4 und
aus 3.2
folgt: $\{1+n\} \cup \mathsf{dom}\, R \in \mathbb{N}$.

...

<u>Beweis **370-10**</u> `a)`

`VS` gleich $(R \text{ ist } \mathbf{ana3} \text{ von } q, E, x) \wedge (n \in \mathsf{dom}\, R) \wedge (1 + n \notin \mathsf{dom}\, R)$
$\wedge (E[R(n) \times x[\{1 + n\}]] \text{ Menge})$.

...

`6:` Aus `5.2`"$\{1 + n\} \cup \mathsf{dom}\, R \in \mathbb{N}$"
folgt via **folk**: $\{1 + n\} \cup \mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

`7:` Aus `6` und
aus `2.3`
folgt: $\mathsf{dom}\, (\{(1 + n, E[R(n) \times x[\{1 + n\}]])\} \cup R) \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

`8:` Aus `2.2`"$n \in \mathbb{N}$"
folgt via **307-2**: $0 \neq 1 + n$.

`9:` Aus `8`"$0 \neq 1 + n$"
folgt via **261-3**: $(\{(1 + n, E[R(n) \times x[\{1 + n\}]])\} \cup R)(0) = R(0)$.

`10:` Aus `9` und
aus `1`"$\ldots R(0) = \{q\} \ldots$"
folgt: $(\{(1 + n, E[R(n) \times x[\{1 + n\}]])\} \cup R)(0) = \{q\}$.

...

<u>Beweis **370-10**</u> `a)`

`VS` gleich $(R \text{ ist } \mathbf{ana3} \text{ von } q, E, x) \wedge (n \in \mathsf{dom}\, R) \wedge (1+n \notin \mathsf{dom}\, R)$
$\wedge(E[R(n) \times x[\{1+n\}]] \text{ Menge}).$

...

$\boxed{\texttt{Thema11}}$ $\beta, 1+\beta \in \mathsf{dom}\,(\{(1+n, E[R(n) \times x[\{1+n\}]])\} \cup R).$

`12:` Aus `Thema11` und
aus `5.1`
folgt: $\beta, 1+\beta \in 1+(1+n).$

`13.1:` Aus `12`"$\beta \ldots \in 1+(1+n)$" und
aus `4`"$1+(1+n) \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$"
folgt via **337-9**: $\beta \in \mathbb{N}.$

`13.2:` Aus `2.4`"$\ldots 1+n \in \mathbb{N}$" und
aus `12`"$\ldots 1+\beta \in 1+(1+n)$"
folgt via **237-7**: $\mathbb{N} \ni 1+\beta \leq 1+n.$

`13.3:` Aus `2.2`"$n \in \mathbb{N}$"
folgt via **239-5**: $n < 1+n.$

`14:` Aus `14.2`"$\ldots 1+\beta \leq 1+n$"
folgt via **160-10**: $\beta \leq n.$

`15:` Aus `15`"$\beta \leq n$" und
aus `13.3`"$n < 1+n$"
folgt via **folk**: $\beta < 1+n.$

`16:` aus `15`"$\beta < 1+n$"
folgt via **41-3**: $\beta \neq 1+n.$

`17:` Aus `16`"$\beta \neq 1+n$"
folgt via **261-3**:
$(\{(1+n, E[R(n) \times x[\{1+n\}]])\} \cup R)(\beta) = R(\beta).$

`18:` Aus `14`"$\beta \leq n$"
folgt via **41-5**: $(\beta < n) \vee (\beta = n).$
$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

...

<u>Beweis **370-10**</u> `a)`

`VS` gleich $(R \text{ ist } \textbf{ana3} \text{ von } q, E, x) \wedge (n \in \mathsf{dom}\, R) \wedge (1+n \notin \mathsf{dom}\, R)$
$\wedge(E[R(n) \times x[\{1+n\}]] \text{ Menge})$.

...

$\boxed{\texttt{Thema11}}$ $\beta, 1+\beta \in \mathsf{dom}\,(\{(1+n, E[R(n) \times x[\{1+n\}]])\} \cup R)$.

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

$\boxed{\texttt{18.1.Fall}}$ $\beta < n$.

`19:` Aus `13.1`“$\beta \in \mathbb{N}$”,
aus `2.2`“$n \in \mathbb{N}$” und
aus `19.1.Fall`“$\beta < n$”
folgt via **337-9**: $\beta, 1+\beta \in 1+n$.

`20:` Aus `19` und
aus `2.4`
folgt: $\beta, 1+\beta \in \mathsf{dom}\, R$.

`21:` Aus `20`“$\beta, 1+\beta \in \mathsf{dom}\, R$” und
aus `1`“$\ldots \forall \alpha : (\alpha, 1+\alpha \in \mathsf{dom}\, R)$
$\Rightarrow (R(1+\alpha) = E[R(\alpha) \times x[\{1+\alpha\}]])$”
folgt: $R(1+\beta) = E[R(\beta) \times x[\{1+\beta\}]]$.

`22:` Aus `18.1.Fall`“$\beta < n$”
folgt via **160-11**: $1+\beta < 1+n$.

`23:` Aus `22`“$1+\beta < 1+n$”
folgt via **41-3**: $1+\beta \neq 1+n$.

`24:` Aus `23`“$1+\beta \neq 1+n$”
folgt via **261-3**:
$(\{(1+n, E[R(n) \times x[\{1+n\}]])\} \cup R)(1+\beta)$
$= R(1+\beta)$.

`25:` Aus `24` und
aus `21`
folgt: $(\{(1+n, E[R(n) \times x[\{1+n\}]])\}\} \cup R)(1+\beta)$
$= E[R(\beta) \times x[\{1+\beta\}]]$.

`26:` Aus `25` und
aus `17`
folgt: $(\{(1+n, E[R(n) \times x[\{1+n\}]])\}\} \cup R)(1+\beta)$
$=$
$E[(\{(1+n, E[R(n) \times x[\{1+n\}]])\} \cup R)(\beta) \times x[\{1+\beta\}]]$.

...

...

Beweis **370-10** `a)`

`VS` gleich $(R \text{ ist } \textbf{ana3} \text{ von } q, E, x) \wedge (n \in \mathsf{dom}\, R) \wedge (1+n \notin \mathsf{dom}\, R)$
$\wedge(E[R(n) \times x[\{1+n\}]] \text{ Menge}).$

...

$\boxed{\texttt{Thema11}}$ $\beta, 1+\beta \in \mathsf{dom}\,(\{(1+n, E[R(n) \times x[\{1+n\}]])\} \cup R).$

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{18.2.Fall}}$ $\beta = n.$

`19:` Aus `2.4`“$\ldots 1+n \in \mathbb{N}$”
folgt via **ElementAxiom**: $1+n$ Menge.

`20:` Aus `VS` gleich “$\ldots 1+n \notin \mathsf{dom}\, R \ldots$”,
aus `19`“$1+n$ Menge” und
aus `VS` gleich “$\ldots E[R(n) \times x[\{1+n\}]]$ Menge”
folgt via **261-3**:

$$(\{(1+n, E[R(n) \times x[\{1+n\}]])\} \cup R)(1+n) = E[R(n) \times x[\{1+n\}]].$$

`21:` Aus `20` und
aus `18.2.Fall`“$\beta = n$”
folgt: $$(\{(1+n, E[R(n) \times x[\{1+n\}]])\} \cup R)(1+\beta) = E[R(\beta) \times x[\{1+\beta\}]].$$

`22:` Aus `21` und
aus `17`
folgt: $$(\{(1+n, E[R(n) \times x[\{1+n\}]])\} \cup R)(1+\beta) = E[(\{(1+n, E[R(n) \times x[\{1+n\}]])\} \cup R)(\beta) \times x[\{1+\beta\}]].$$

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In beiden Fällen gilt:

$$(\{(1+n, E[R(n) \times x[\{1+n\}]])\} \cup R)(1+\beta) = E[(\{(1+n, E[R(n) \times x[\{1+n\}]])\} \cup R)(\beta) \times x[\{1+\beta\}]].$$

Ergo `Thema11`:

`A1` | “$\forall \beta : (\beta, 1+\beta \in \mathsf{dom}\,(\{(1+n, E[R(n) \times x[\{1+n\}]])\} \cup R)) \Rightarrow ((\{(1+n, E[R(n) \times x[\{1+n\}]])\} \cup R)(1+\beta) = E[(\{(1+n, E[R(n) \times x[\{1+n\}]])\} \cup R)(\beta) \times x[\{1+\beta\}]])$”

<u>Beweis **370-10**</u> `a)`

`VS` gleich $(R \text{ ist } \mathbf{ana3} \text{ von } q, E, x) \wedge (n \in \mathsf{dom}\, R) \wedge (1+n \notin \mathsf{dom}\, R)$
$\wedge(E[R(n) \times x[\{1+n\}]] \text{ Menge})$.

...

`12:` Aus `2.1` "$\{(1+n, E[R(n) \times x[\{1+n\}]])\} \cup R$ Funktion",
aus `7` "$\mathsf{dom}\,(\{(1+n, E[R(n) \times x[\{1+n\}]])\} \cup R) \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$",
aus `10` "$(\{(1+n, E[R(n) \times x[\{1+n\}]])\} \cup R)(0) = \{q\}$" und
aus `A1` gleich "$\forall \beta : (\beta, 1+\beta \in \mathsf{dom}\,(\{(1+n, E[R(n) \times x[\{1+n\}]])\} \cup R))$
$\Rightarrow ((\{(1+n, E[R(n) \times x[\{1+n\}]])\} \cup R)(1+\beta)$
$= E[(\{(1+n, E[R(n) \times x[\{1+n\}]])\} \cup R)(\beta) \times x[\{1+\beta\}]])$"
folgt via **370-1(Def)**:
$\{(1+n, E[R(n) \times x[\{1+n\}]])\} \cup R \text{ ist } \mathbf{ana3} \text{ von } q, E, x.$

<u>Beweis **370-10**</u> `b)`

`VS` gleich (R ist **ana3** von q, E, x) $\wedge$ ($n \in \mathsf{dom}\, R$) $\wedge$ ($E[R(n) \times x[\{1+n\}]]$ Menge).

`1:` Es gilt: $(1 + n \in \mathsf{dom}\, R) \vee (1 + n \notin \mathsf{dom}\, R)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $1 + n \in \mathsf{dom}\, R$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "R ist **ana3** von $q, E, x \ldots$"
folgt via **370-1(Def)**: R Funktion.

`2.2:` Aus `VS` gleich "R ist **ana3** von $q, E, x \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots n \in \mathsf{dom}\, R \ldots$" und
aus `1.1.Fall` "$1 + n \in \mathsf{dom}\, R$"
folgt via **370-1(Def)**: $R(1 + n) = E[R(n) \times x[\{1 + n\}]]$.

`3.1:` Aus `2.1` "R Funktion"
folgt via **337-26**: $\{(1 + n, R(1 + n))\} \cup R = R$.

`3.2:` Aus `2.2` "$R(1 + n) = E[R(n) \times x[\{1 + n\}]]$"
folgt via **PaarAxiom I**:
$(1 + n, R(1 + n)) = (1 + n, E[R(n) \times x[\{1 + n\}]])$.

`4:` Aus `3.1` und
aus `3.2`
folgt: $\{(1 + n, E[R(n) \times x[\{1 + n\}]])\} \cup R = R$.

`5:` Aus `4` und
aus `VS` gleich "R ist **ana3** von $q, E, x \ldots$"
folgt: $\{(1 + n, E[R(n) \times x[\{1 + n\}]])\} \cup R$ ist **ana3** von q, E, x.

`1.2.Fall` $1 + n \notin \mathsf{dom}\, R$.

Aus `VS` gleich "R ist **ana3** von $q, E, x \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots n \in \mathsf{dom}\, R \ldots$",
aus `1.2.Fall` "$1 + n \notin \mathsf{dom}\, R$" und
aus `VS` gleich "$\ldots E[R(n) \times x[\{1 + n\}]]$ Menge"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$\{(1 + n, E[R(n) \times x[\{1 + n\}]])\} \cup R$ ist **ana3** von q, E, x.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$\{(1 + n, E[R(n) \times x[\{1 + n\}]])\} \cup R$ ist **ana3** von q, E, x.

<u>Beweis **370-10**</u> `c)`
`VS` gleich $(R$ ist $\mathbf{ana3}$ von $q,E,x) \wedge (n \in \mathsf{dom}\, R) \wedge (E[R(n) \times x[\{1+n\}]]$ Menge$)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "R ist $\mathbf{ana3}$ von $q,E,x\ldots$"
folgt via **370-1(Def)**: $\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "R ist $\mathbf{ana3}$ von $q,E,x\ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots n \in \mathsf{dom}\, R \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots E[R(n) \times x[\{1+n\}]]$ Menge"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`:
$\{(1+n, E[R(n) \times x[\{1+n\}]])\} \cup R$ ist $\mathbf{ana3}$ von q,E,x.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots E[R(n) \times x[\{1+n\}]]$ Menge"
folgt via **309-2**:
$\mathsf{dom}\,(\{(1+n, E[R(n) \times x[\{1+n\}]])\} \cup R) = \{1+n\} \cup \mathsf{dom}\, R$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots n \in \mathsf{dom}\, R \ldots$" und
aus `1.1`"$\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$"
folgt via **337-9**: $n \in \mathbb{N}$.

`2.2:` Aus `1.2`"$\{(1+n, E[R(n) \times x[\{1+n\}]])\} \cup R$ ist $\mathbf{ana3}$ von q,E,x"
folgt via **370-9**:
$\{(1+n, E[R(n) \times x[\{1+n\}]])\} \cup R \subseteq \mathtt{rf3}qEx$.

`3.1:` Aus `2.2`"$\{(1+n, E[R(n) \times x[\{1+n\}]])\} \cup R \subseteq \mathtt{rf3}qEx$"
folgt via **folk**:
$\mathsf{dom}\,(\{(1+n, E[R(n) \times x[\{1+n\}]])\} \cup R) \subseteq \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf3}qEx)$.

`3.2:` Aus `2.1`"$n \in \mathbb{N}$"
folgt via **folk**: $1+n \in \mathbb{N}$.

`4.1:` Aus `1.3` und
aus `3.1`
folgt: $\{1+n\} \cup \mathsf{dom}\, R \subseteq \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf3}qEx)$.

`4.2:` Aus `3.2`"$1+n \in \mathbb{N}$"
folgt via **ElementAxiom**: $1+n$ Menge.

`5:` Aus `4.2`"$1+n$ Menge"
folgt via **folk**: $1+n \in \{1+n\} \cup \mathsf{dom}\, R$.

`6:` Aus `5`"$1+n \in \{1+n\} \cup \mathsf{dom}\, R$" und
aus `4.1`"$\{1+n\} \cup \mathsf{dom}\, R \subseteq \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf3}qEx)$"
folgt via **0-4**: $1+n \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf3}qEx)$.

□

370-11. Der Definitions-Bereich von $\texttt{rf}3qEx$ ist höchstens= $\mathbb{N}$. Er ist= $\mathbb{N}$, wenn $\mathsf{ran}\,E$ eine Menge ist.

370-11(Satz)

Aus "$\mathsf{ran}\,E$ *Menge" folgt* "$\mathsf{dom}\,(\texttt{rf}3qEx) = \mathbb{N}$".

Beweis **370-11** `VS` gleich $\mathsf{ran}\,E$ Menge.

`RECH`-**Notation**.

1: Via **370-9** gilt: $\texttt{rf}3qEx(0) = \{q\}$.

2: Via **SingeltonAxiom** gilt: $\{q\}$ Menge.

3: Aus 1 und
aus 2
folgt: $\texttt{rf}1qx(0)$ Menge.

4: Aus 3"$\texttt{rf}3qEx(0)$ Menge"
folgt via **folk**: $0 \in \mathsf{dom}\,(\texttt{rf}3qEx)$.

...

Beweis **370-11** ...

$\boxed{\texttt{Thema5}}$ $\alpha \in \mathbb{N} \cap \mathsf{dom}\,(\texttt{rf}3qEx)$.

`6.1:` Aus `Thema5`“$\alpha \in \mathbb{N} \cap \mathsf{dom}\,(\texttt{rf}3qEx)$”
folgt via **folk**: $\alpha \in \mathsf{dom}\,(\texttt{rf}3qEx)$.

`6.2:` Via **370-9** gilt: $\texttt{rf}3qEx$ ist **ana3** von q, E, x.

`6.3:` Via **folk** gilt: $E[\texttt{rf}3qEx(\alpha) \times x[\{\alpha\}]] \subseteq \mathsf{ran}\,E$.

`7:` Aus `6.3`“$E[\texttt{rf}3qEx(\alpha) \times x[\{1+\alpha\}]] \subseteq \mathsf{ran}\,E$” und
aus `VS` gleich “$\mathsf{ran}\,E$ Menge”
folgt via **TeilMengenAxiom**:
$E[\texttt{rf}3qEx(\alpha) \times x[\{1+\alpha\}]]$ Menge.

`8:` Aus `6.2`“$\texttt{rf}3qEx$ ist **ana3** von q, E, x”,
aus `6.1`“$\alpha \in \mathsf{dom}\,(\texttt{rf}3qEx)$” und
aus `9`“$E[\texttt{rf}3qEx(\alpha) \times x[\{\alpha\}]]$ Menge”
folgt via **370-10**: $1+\alpha \in \mathsf{dom}\,(\texttt{rf}3qEx)$.

Ergo `Thema5`: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{“}\forall\alpha : (\alpha \in \mathbb{N} \cap \mathsf{dom}\,(\texttt{rf}3qEx)) \Rightarrow (1+\alpha \in \mathsf{dom}\,(\texttt{rf}3qEx))\text{”}}$

`6:` Aus `4`“$0 \in \mathsf{dom}\,(\texttt{rf}3qEx)$” und
aus `A1` gleich “$\forall\alpha : (\alpha \in \mathbb{N} \cap \mathsf{dom}\,(\texttt{rf}3qEx)) \Rightarrow (1+\alpha \in \mathsf{dom}\,(\texttt{rf}3qEx))$”
folgt via **IS**$\mathbb{N}$: $\mathbb{N} \subseteq \mathsf{dom}\,(\texttt{rf}3qEx)$.

`7:` Via **370-9** gilt: $\mathsf{dom}\,(\texttt{rf}3qEx) \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

`8:` Aus `6`“$\mathbb{N} \subseteq \mathsf{dom}\,(\texttt{rf}1\phi qx)$” und
aus `7`“$\mathsf{dom}\,(\texttt{rf}3qEx) \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$”
folgt via **308-6**: $\mathsf{dom}\,(\texttt{rf}3qEx) = \mathbb{N}$.

$\square$

370-12. Scheinbar zusammenhangslos aber doch Erahntes aussprechend soll hier eine Erkenntnis aus der Algebra erwähnt werden.

370-12(Satz) *Die Aussagen* `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` *“$\Box$ Funktion” und “$\Box$ Algebra auf Q”.*

`ii)` *“$\Box$ Funktion“ und “$Q \times Q \subseteq \mathsf{dom}\,\Box$” und “$\Box[Q \times Q] \subseteq Q$”.*

Beweis **370-12**

`ALG`-**Notation**.

...

Beweis **370-12** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $(\Box \text{ Funktion}) \wedge (\Box \text{ Algebra auf } Q)$.

`1.1:` Aus `VS`

folgt: $\boxed{\Box \text{ Funktion}}$

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots \Box$ Algebra auf Q"

folgt via **93-17**: $\boxed{Q \times Q \subseteq \mathsf{dom}\,\Box}$

$\boxed{\texttt{Thema1.3}}$ $\alpha \in \Box[Q \times Q]$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\Box$ Funktion…" und
aus `Thema1.3`"$\alpha \in \Box[Q \times Q]$"
folgt via **18-28**: $\exists \Omega : (\Omega \in Q \times Q) \wedge (\alpha = \Box(\Omega))$.

`3:` Aus `2`"$\ldots \Omega \in Q \times Q \ldots$"
folgt via **folk**: $\exists \Phi, \Gamma : (\Phi, \Gamma \in Q) \wedge (\Omega = (\Phi, \Gamma))$.

`4.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots \Box$ Algebra auf Q" und
aus `3`"$\ldots \Phi, \Gamma \in Q \ldots$"
folgt via **93-5(Def)**: $\Phi\_\Box\_\Gamma \in Q$.

`4.2:` Aus `2`"$\ldots \alpha = \Box(\Omega)$" und
aus `3`"$\ldots \Omega = (\Phi, \Gamma)$"
folgt: $\alpha = \Box((\Phi, \Gamma))$.

`5:` Aus `4.2`
folgt: $\alpha = \Phi\_\Box\_\Gamma$.

`6:` Aus `5` und
aus `4.1`
folgt: $\alpha \in Q$.

Ergo `Thema1.3`: $\forall \alpha : (\alpha \in \Box[Q \times Q]) \Rightarrow (\alpha \in Q)$

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\Box[Q \times Q] \subseteq Q}$

<u>Beweis **370-12**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$

`VS` gleich $(\Box \text{ Funktion}) \wedge (Q \times Q \subseteq \mathsf{dom}\,\Box) \wedge (\Box[Q \times Q] \subseteq Q)$.

`1.1:` Aus `VS`

folgt: $\boxed{\Box \text{ Funktion}}$

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\alpha, \beta \in Q$.

`2:` Aus `Thema1.2`"$\alpha, \beta \in Q$"
folgt via **folk**: $(\alpha, \beta) \in Q \times Q$.

`3:` Aus `VS` gleich "$\Box$ Funktion…",
aus `2`"$(\alpha, \beta) \in Q \times Q$" und
aus `VS` gleich "…$Q \times Q \subseteq \mathsf{dom}\,\Box$…"
folgt via **18-27**: $\Box((\alpha, \beta)) \in \Box[Q \times Q]$.

`4:` Aus `3`
folgt: $\alpha\_\Box\_\beta \in \Box[Q \times Q]$.

`5:` Aus `4`"$\alpha\_\Box\_\beta \in \Box[Q \times Q]$" und
aus `VS` gleich "…$\Box[Q \times Q] \subseteq Q$"
folgt via **folk**: $\alpha\_\Box\_\beta \in Q$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in Q) \Rightarrow (\alpha\_\Box\_\beta \in Q)$.

Konsequenz via **93-5(Def)**: $\boxed{\Box \text{ Algebra auf } Q}$

□

Analysis: Weiteres über **ana3** von q, E, x und über $\mathtt{rf}3qEx$.

Ersterstellung: 08/01/16 **Letzte Änderung: 29/01/16**

371-1. Ist R **ana3** von q, E, x, so gilt $\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$. Dies hat vertraute Konsequenzen.

<u>**371-1(Satz)**</u> *Aus "R ist* **ana3** *von q, E, x" und ...*

a) *... und "$n \in \mathsf{dom}\, R$" folgt "$n \in \mathbb{N}$" und "$(\mathsf{dom}\, R) \cup \{n, \ldots\} = \mathbb{N}$".*

b) *... und "$m \leq n \in \mathsf{dom}\, R$" und "$m \in \mathbb{N}$" folgt "$m \in \mathsf{dom}\, R$".*

c) *... und "$p \in n \in \mathsf{dom}\, R$" folgt "$p, 1+p \in \mathbb{N}$" und "$p, 1+p \in \mathsf{dom}\, R$".*

d) *... und "$n \in \mathsf{dom}\, R$" und "$m \notin \mathsf{dom}\, R$" und "$m \in \mathbb{N}$" folgt "$n < m$".*

e) *... und "$n \in \mathbb{N}$" und "$1 + n \in \mathsf{dom}\, R$" folgt "$n \in \mathsf{dom}\, R$" und "$R(1 + n) = E[R(n) \times x[\{1 + n\}]]$".*

f) *... und "$n \in \mathbb{N}$" und "$1+(1+n) \in \mathsf{dom}\, R$" folgt "$n, 1+n \in \mathsf{dom}\, R$".*

g) *... und "$\mathsf{dom}\, R = \mathbb{N}$" folgt "$R = \mathtt{rf}3qEx$" und "$\mathsf{dom}\,(\mathtt{rf}3qEx) = \mathbb{N}$".*

<u>$\leq$.`RECH`-**Notation**</u>.

<u>Beweis **371-1**</u> a) VS gleich $(R \text{ ist } \mathbf{ana3} \text{ von } q, E, x) \wedge (n \in \mathsf{dom}\, R)$.

1: Aus VS gleich "R ist **ana3** von $q, E, x \ldots$"
folgt via **370-1(Def)**: $\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

2.1: Aus VS gleich "$\ldots n \in \mathsf{dom}\, R$" und
aus 1"$\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$"
folgt via **337-9**: $\boxed{n \in \mathbb{N}}$

2.2: Aus VS gleich "$\ldots n \in \mathsf{dom}\, R$" und
aus 1"$\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$"
folgt via **343-6**: $\boxed{(\mathsf{dom}\, R) \cup \{n, \ldots\} = \mathbb{N}}$

b) VS gleich $(R \text{ ist } \mathbf{ana3} \text{ von } q, E, x) \wedge (m \le n \in \mathsf{dom}\, R) \wedge (m \in \mathbb{N})$.

1: Aus VS gleich "R ist **ana3** von $q, E, x \ldots$"
folgt via **370-1(Def)**: $\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

2: Aus VS gleich "$\ldots m \in \mathbb{N}$",
aus VS gleich "$\ldots m \le n \in \mathsf{dom}\, R \ldots$" und
aus 1"$\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$"
folgt via **338-8**: $m \in \mathsf{dom}\, R$.

c) VS gleich $(R \text{ ist } \mathbf{ana3} \text{ von } q, E, x) \wedge (p \in n \in \mathsf{dom}\, R)$.

1: Aus VS gleich "R ist **ana3** von $q, E, x \ldots$"
folgt via **370-1(Def)**: $\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

2.1: Aus VS gleich "$\ldots p \in n \in \mathsf{dom}\, R$" und
aus 1"$\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$"
folgt via **338-9**: $\boxed{p, 1 + p \in \mathsf{dom}\, R}$

2.2: Aus VS gleich "$\ldots p \in n \in \mathsf{dom}\, R$" und
aus 1"$\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$"
folgt via **338-9**: $\boxed{p \in \mathbb{N}}$

3: Aus 2.2"$p \in \mathbb{N}$"
folgt via **159-10**: $\boxed{1 + p \in \mathbb{N}}$

<u>Beweis **371-1**</u> `d)`

`VS` gleich $(R \text{ ist } \mathbf{ana3} \text{ von } q, E, x) \wedge (n \in \mathsf{dom}\, R) \wedge (m \notin \mathsf{dom}\, R) \wedge (m \in \mathbb{N})$.

`1:` Aus `VS` gleich "R ist **ana3** von $q, E, x \ldots$"
folgt via **370-1(Def)**: $\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots (n \in \mathsf{dom}\, R) \wedge (m \notin \mathsf{dom}\, R) \wedge (m \in \mathbb{N})$" und
aus `1`"$\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$"
folgt via **343-8**: $n < m$.

`e)` `VS` gleich $(R \text{ ist } \mathbf{ana3} \text{ von } q, E, x) \wedge (n \in \mathbb{N}) \wedge (1 + n \in \mathsf{dom}\, R)$.

`1:` Aus `VS` gleich "R ist **ana3** von $q, E, x \ldots$"
folgt via **370-1(Def)**: $\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots (n \in \mathbb{N}) \wedge (1 + n \in \mathsf{dom}\, R)$" und
aus `1`"$\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$"
folgt via **343-8**: $\boxed{n \in \mathsf{dom}\, R}$

`3:` Aus `VS` gleich "R ist **ana3** von $q, E, x \ldots$",
aus `2`"$n \in \mathsf{dom}\, R$" und
aus `VS` gleich "$\ldots 1 + n \in \mathsf{dom}\, R$"
folgt via **370-1(Def)**: $\boxed{R(1 + n) = E[R(n) \times x[\{1 + n\}]]}$

`f)` `VS` gleich $(R \text{ ist } \mathbf{ana3} \text{ von } q, E, x) \wedge (n \in \mathbb{N}) \wedge (1 + (1 + n) \in \mathsf{dom}\, R)$.

`1:` Aus `VS` gleich "R ist **ana3** von $q, E, x \ldots$"
folgt via **370-1(Def)**: $\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots (n \in \mathbb{N}) \wedge (1 + (1 + n) \in \mathsf{dom}\, R)$" und
aus `1`"$\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$"
folgt via **343-8**: $n, 1 + n \in \mathsf{dom}\, R$.

Beweis **371-1** g) VS gleich $(R \text{ ist } \mathbf{ana3} \text{ von } q, E, x) \wedge (\mathsf{dom}\, R = \mathbb{N})$.

1: Aus VS gleich "R ist **ana3** von $q, E, x \ldots$"
folgt via **370-9**: $R \subseteq \mathtt{rf3}qEx$.

2: Aus 1"$R \subseteq \mathtt{rf3}qEx$"
folgt via **folk**: $\mathsf{dom}\, R \subseteq \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf3}qEx)$.

3: Aus VS gleich "$\ldots \mathsf{dom}\, R = \mathbb{N}$" und
aus 2
folgt: $\mathbb{N} \subseteq \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf3}qEx)$.

4: Via **370-9** gilt: $\mathsf{dom}\,(\mathtt{rf3}qEx) \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

5: Aus 3"$\mathbb{N} \subseteq \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf3}qEx)$" und
aus 4"$\mathsf{dom}\,(\mathtt{rf3}qEx) \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$"
folgt via **308-6**: $\boxed{\mathsf{dom}\,(\mathtt{rf3}qEx) = \mathbb{N}}$

6.1: Via **370-9** gilt: $\mathtt{rf3}qEx$ Funktion.

6.2: Aus 5 und
aus VS gleich "$\ldots \mathsf{dom}\, R = \mathbb{N}$"
folgt: $\mathsf{dom}\, R = \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf3}qEx)$.

7: Aus 1"$R \subseteq \mathtt{rf3}qEx$",
aus 6.1"$\mathtt{rf3}qEx$ Funktion" und
aus 6.2"$\mathsf{dom}\, R = \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf3}qEx)$"
folgt via **308-6**: $\boxed{R = \mathtt{rf3}qEx}$

□

371-2. Ist R **ana3** von q, E, x und gilt $R(n) = 0$, so gilt $R(m) = 0$ für alle größeren $m \in \mathsf{dom}\, R$.

371-2(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow\!)$ *R ist* **ana3** *von q, E, x.*

$\rightarrow\!)$ *$R(n) = 0$.*

$\rightarrow\!)$ *$n \leq m \in \mathsf{dom}\, R$.*

Dann folgt "$R(m) = 0$".

$\leq$-**Notation**.

Beweis **371-2**

`RECH`-**Notation**.

`1.1:` Aus $\rightarrow\!)$ "R ist **ana3** von q, E, x"
folgt via **370-1(Def)**: $(R \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N})$.

`1.2:` Aus $\rightarrow\!)$ "R ist **ana3** von q, E, x" und
aus $\rightarrow\!)$ "$\ldots m \in \mathsf{dom}\, R$"
folgt via **371-1**: $m \in \mathbb{N}$.

`1.3:` Via **11-19** gilt: $R^{-1}[\{0\}] \subseteq \mathsf{dom}\, R$.

`2.1:` Aus `1.1` "R Funktion$\ldots$",
aus $\rightarrow\!)$ "$R(n) = 0$" und
aus $0\mathcal{U}$**Axiom** "0 Menge"
folgt via **343-4**: $n \in R^{-1}[\{0\}]$.

`2.2:` Aus `1.2` "$m \in \mathbb{N}$"
folgt via **164-6**: $m \in \mathbb{Z}$.

`2.3:` Aus `1.3` "$R^{-1}[\{0\}] \subseteq \mathsf{dom}\, R$" und aus `1.1` "$\ldots \mathsf{dom}\, \mathbb{R} \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$"
folgt via **343-3**: $R^{-1}[\{0\}] \subseteq \mathbb{N}$.

`3:` Aus `2.3` "$R^{-1}[\{0\}] \subseteq \mathbb{N}$" und
aus **164-4** "$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$"
folgt via **folk**: $R^{-1}[\{0\}] \subseteq \mathbb{Z}$.

$\ldots$

<u>Beweis</u> **371-2** . . .

$\boxed{\texttt{Thema4}}$ $(\alpha \in R^{-1}[\{0\}]) \wedge (1 + \alpha \leq m)$.

`5.1`: Aus `Thema4`"$\alpha \in R^{-1}[\{0\}] \ldots$"
folgt via **11-19**: $\alpha \in \mathsf{dom}\, R$.

`5.2`: Aus `Thema4`"$\alpha \in \mathbb{R}^{-1}[\{0\}] \ldots$" und
aus `2.3`"$R^{-1}[\{0\}] \subseteq \mathbb{N}$"
folgt via **folk**: $\alpha \in \mathbb{N}$.

`5.3`: Aus `1.1`"R Funktion. . . " und
aus `Thema3`"$\alpha \in R^{-1}[\{0\}] \ldots$"
folgt via **18-21**: $0 = R(\alpha)$.

`6`: Aus `5.2`"$\alpha \in \mathbb{N}$"
folgt via **159-10**: $1 + \alpha \in \mathbb{N}$.

`7`: Aus →)"R ist **ana3** von q, E, x",
aus `Thema4`"$\ldots 1 + \alpha \leq m$",
aus →)"$\ldots m \in \mathsf{dom}\, R$" und
aus `6`"$1 + \alpha \in \mathbb{N}$"
folgt via **371-1**: $1 + \alpha \in \mathsf{dom}\, R$.

`8`: Aus →)"R ist **ana3** von q, E, x",
aus `5.1`"$\alpha \in \mathsf{dom}\, R$" und
aus `7`"$1 + \alpha \in \mathsf{dom}\, R$"
folgt via **370-1(Def)**: $R(1 + \alpha) = E[R(\alpha) \times x[\{1 + \alpha\}]]$.

`9`: $R(1 + \alpha) \stackrel{8}{=} E[R(\alpha) \times x[\{1 + \alpha\}]] \stackrel{5.3}{=} E[0 \times x[\{\alpha\}]]$
$\stackrel{\textbf{folk}}{=} E[0] \stackrel{\textbf{folk}}{=} 0$.

`10`: Aus `1`"R Funktion. . . ",
aus `9`"$R(1 + \alpha) = \ldots = 0$" und
aus $0\mathcal{U}$**Axiom**"0 Menge"
folgt via **343-4**: $1 + \alpha \in R^{-1}[\{0\}]$.

Ergo `Thema4`:

`A1`	"$\forall \alpha : ((\alpha \in R^{-1}[\{0\}]) \wedge (1 + \alpha \leq m)) \Rightarrow (1 + \alpha \in R^{-1}[\{0\}])$"

. . .

<u>Beweis **371-2**</u> ...

`5:` Aus `2.1` “ $n \in R^{-1}[\{0\}]$ ”,
aus `3` “ $R^{-1}[\{0\}] \subseteq \mathbb{Z}$ ”,
aus `2.2` “ $m \in \mathbb{Z}$ ” und
aus `A1` gleich “ $\forall \alpha : ((\alpha \in R^{-1}[\{0\}]) \wedge (1+\alpha \leq m)) \Rightarrow (1+\alpha \in R^{-1}[\{0\}])$ ”
folgt via **337-11**: $\{n, \ldots, m\} \subseteq R^{-1}[\{0\}]$.

`6:` Aus →) “ $n \leq m \ldots$ ” und
aus `2.2` “ $m \in \mathbb{Z}$ ”
folgt via **237-2**: $m \in \{n, \ldots, m\}$.

`7:` Aus `6` “ $m \in \{n, \ldots, m\}$ ” und
aus `5` “ $\{n, \ldots, m\} \subseteq R^{-1}[\{0\}]$ ”
folgt via **folk**: $m \in R^{-1}[\{0\}]$.

`8:` Aus `1.1` “ R Funktion... ” und
aus `7` “ $m \in R^{-1}[\{0\}]$ ”
folgt via **18-21**: $R(m) = 0$.

$\square$

371-3. Eine deutlich auf einen Induktions-Beweis hinweisende Klasse wird in die Essays eingebracht.

371-3(Definition)

$$\mathsf{371.0}(x,z,y) = \{\omega : x(1+\omega) = z[x(\omega)\times y[\{1+\omega\}]]\}.$$

`RECH`-**Notation**.

371-4. Ist R **ana3** von q, E, x und gilt $R(n) = 0$, so hat dies Auswirkungen auf $\mathtt{rf3}qEx$.

<u>**371-4(Satz)**</u> *Es gelte:*

$\rightarrow\!)$ *R ist **ana3** von q, E, x.*

$\rightarrow\!)$ $R(n) = 0$.

Dann folgt:

a) $\mathsf{dom}\,(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}) = \mathbb{N}$.

b) $R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}$ *ist **ana3** von q, E, x.*

c) $\mathtt{rf3}qEx = R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}$.

d) $\mathsf{dom}\,(\mathtt{rf3}qEx) = \mathbb{N}$.

e) $\forall \alpha : (n \leq \alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\mathtt{rf3}qEx(\alpha) = 0)$.

<u>$\leq$-**Notation**</u>.

<u>Beweis **371-4**</u>

$$371.0(x, z, y) = \{\omega : x(1+\omega) = z[x(\omega) \times y[\{1+\omega\}]]\}$$

<u>$\mathtt{RECH}$-**Notation**</u>.

---

a)

1: Aus $\rightarrow\!)$ "$R(n) = 0$" und
aus $0\mathcal{U}$**Axiom** "0 Menge"
folgt: $R(n)$ Menge.

2: Aus 1 "$R(n)$ Menge"
folgt via **folk**: $n \in \mathsf{dom}\,R$.

3: Aus $\rightarrow\!)$ "R ist **ana3** von q, E, x" und
aus 2 "$n \in \mathsf{dom}\,R$"
folgt via **371-1**: $(\mathsf{dom}\,R) \cup \{n, \ldots\} = \mathbb{N}$.

4: $\mathsf{dom}\,(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}) \stackrel{\textbf{folk}}{=} (\mathsf{dom}\,R) \cup (\mathsf{dom}\,(\mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})) \stackrel{\textbf{20-5}}{=} (\mathsf{dom}\,R) \cup \{n, \ldots\} \stackrel{3}{=} \mathbb{N}$.

<u>Beweis **371-4**</u> `b)`

`1:` Aus →) “ R ist **ana3** von q, E, x ”
folgt via **370-1(Def)**: $(R \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N})$.

> `Thema2` $\alpha \in (\mathsf{dom}\, R) \cap (\mathsf{dom}\,(\mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}))$.
>
> `3:` Aus `Thema2` “ $\alpha \in (\mathsf{dom}\, R) \cap (\mathsf{dom}\,(\mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}))$ ”
> folgt via **folk**: $(\alpha \in \mathsf{dom}\, R) \wedge (\alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}))$.
>
> `4:` Via **20-5** gilt: $\mathsf{dom}\,(\mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}) = \{n, \ldots\}$.
>
> `5:` Aus `3` “ $\ldots \alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})$ ” und
> aus `4`
> folgt: $\alpha \in \{n, \ldots\}$.
>
> `6.1:` Aus `5` “ $\alpha \in \{n, \ldots\}$ ”
> folgt via **169-2**: $n \le \alpha$.
>
> `6.2:` Aus `5` “ $\alpha \in \{n, \ldots\}$ ”
> folgt via **20-5**: $\mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}(\alpha) = 0$.
>
> `7:` Aus →) “ R ist **ana3** von q, E, x ” ,
> aus →) “ $R(n) = 0$ ” ,
> aus `6.1` “ $n \le \alpha$ ” und
> aus `3` “ $\alpha \in \mathsf{dom}\, R \ldots$ ”
> folgt via **371-2**: $R(\alpha) = 0$.
>
> `8:` Aus `7` und
> aus `6.2`
> folgt: $R(\alpha) = \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}(\alpha)$.

Ergo `Thema2`:

`A1`	“ $\forall \alpha : (\alpha \in (\mathsf{dom}\, R) \cap (\mathsf{dom}\,(\mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}))) \Rightarrow (R(\alpha) = \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}(\alpha))$ ”

`3:` Via **20-5** gilt: $\mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}$ Funktion.

`4:` Aus `1` “ R Funktion... ” ,
aus `3` “ $\mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}$ Funktion ” und
aus `A1` gleich “ $\forall \alpha : (\alpha \in (\mathsf{dom}\, R) \cap (\mathsf{dom}\,(\mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})))$
$\Rightarrow (R(\alpha) = \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}(\alpha))$ ”
folgt via **18-41**: $R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}$ Funktion.

...

Beweis **371-4** `b)` ...

`5:` Aus →) " R ist **ana3** von q, E, x "
folgt via **370-3**: $0 \in \mathsf{dom}\, R$.

`6:` Aus `1.1` " R Funktion... " ,
aus `4` " $R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}$ Funktion " und
aus `5` " $0 \in \mathsf{dom}\, R$ "
folgt via **259-38**: $(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})(0) = R(0)$.

`7:` Aus →) " R ist **ana3** von q, E, x "
folgt via **370-1(Def)**: $R(0) = \{q\}$.

`8:` Aus `6` und
aus `7`
folgt: $(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})(0) = \{q\}$.

`9:` Aus →) " $R(n) = 0$ " und
aus $0\mathcal{U}$**Axiom** " 0 Menge"
folgt: $R(n)$ Menge.

`10:` Aus `9` " $R(n)$ Menge "
folgt via **folk**: $n \in \mathsf{dom}\, R$.

`11:` Aus →) " R ist **ana3** von q, E, x " und
aus `10` " $n \in \mathsf{dom}\, R$ "
folgt via **371-1**: $n \in \mathbb{N}$.

`12:` Es gilt: $(1 \in \mathsf{dom}\, R) \vee (1 \notin \mathsf{dom}\, R)$.
$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

<u>Beweis</u> **371-4** `b)` ...

`Fallunterscheidung`

`12.1.Fall` $1 \in \mathsf{dom}\, R.$

`13:` Aus +**schola**“$1+0=1$” und
aus `12.1.Fall`
folgt: $1+0 \in \mathsf{dom}\, R.$

`14:` Aus →) “R ist **ana3** von q, E, x” ,
aus `5`“$0 \in \mathsf{dom}\, R$” und
aus `13`“$1+0 \in \mathsf{dom}\, R$”
folgt via **370-1(Def)**: $R(1+0) = E[R(0) \times x[\{1+0\}]].$

`15.1:` Aus `1`“R Funktion...” ,
aus `4`“$R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\dots\}}$ Funktion” und
aus `13`“$1+0 \in \mathsf{dom}\, R$”
folgt via **259-38**: $(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\dots\}})(1+0) = R(1+0).$

`15.2:` Aus `14` und
aus `6`
folgt: $R(1+0) = E[(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\dots\}})(0) \times x[\{1+0\}]].$

`16:` Aus `15.2` und
aus `15.1`
folgt:
$$(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\dots\}})(1+0) = E[(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\dots\}})(0) \times x[\{1+0\}]].$$

`17:` Aus `16` und
aus $0\mathcal{U}$**Axiom**“0 Menge”
folgt **p.def.**: $0 \in \mathsf{371.0}(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\dots\}}, E, x)\,.$

...

Beweis **371-4** `b)` ...

`Fallunterscheidung`

...

`12.2.Fall` $1 \notin \mathsf{dom}\, R.$

`13.1:` Aus `12.2.Fall` "$1 \notin \mathsf{dom}\, R$" und
aus **+schola** "$1 + 0 = 1$"
folgt: $1 + 0 \notin \mathsf{dom}\, R.$

`13.2:` Aus `12.2.Fall` "$1 \notin \mathsf{dom}\, R$"
folgt via **261-3**: $(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})(1) = \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}(1).$

`14:` Aus `5` "$0 \in \mathsf{dom}\, R$",
aus `1` "$\ldots \mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$" und
aus `13.1` "$1 + 0 \notin \mathsf{dom}\, R$"
folgt via **337-9**: $\mathsf{dom}\, R = 1 + 0.$

`15:` Aus `14` und
aus **schola** "$1 + 0 = 1$"
folgt: $\mathsf{dom}\, R = 1.$

`16:` Aus `10` und
aus `15`
folgt: $n \in 1.$

`17:` Aus `16` und
aus **95-1(Def)** "$1 = \{0\}$"
folgt: $n \in \{0\}.$

`18:` Aus `17`
folgt via **folk**: $n = 0.$

`19:` Aus `13.2` und
aus `18`
folgt: $(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})(1) = \mathsf{zo}_{\{0,\ldots\}}(1).$

`20:` Aus **≤schola** "$0 \leq 1$" und
aus **∈schola** "$1 \in \mathbb{N}$"
folgt via **236-1**: $1 \in \{0, \ldots\}.$

`21:` Aus `20` "$1 \in \{0, \ldots\}$"
folgt via **20-5**: $\mathsf{zo}_{\{0,\ldots\}}(1) = 0.$

`22:` $(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})(1 + 0) \overset{+\textbf{schola}}{=} (R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})(1) \overset{19}{=} \mathsf{zo}_{\{0,\ldots\}}(1)$
$\overset{21}{=} 0 \overset{\textbf{folk}}{=} E[0] \overset{\textbf{folk}}{=} E[0 \times x[\{1 + 0\}]] \overset{\to)}{=} E[R(n) \times x[\{1 + 0\}]]$
$\overset{18}{=} E[R(0) \times x[\{1 + 0\}]] \overset{6}{=} E[(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})(0) \times x[\{1 + 0\}]].$

...

...

Beweis **371-4** `b)` ...

`Fallunterscheidung`

...

`12.2.Fall` $1 \notin \mathsf{dom}\, R.$

...

23: Aus 22 "$(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\dots\}})(1+0)$
$= \dots = E[R \cup \mathsf{zo}_{\{0,\dots\}})(0) \times x[\{1+0\}]]$ und
aus 0$\mathcal{U}$**Axiom** "0 Menge"
folgt **p.def.**: $0 \in \mathsf{371.0}(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\dots\}}, E, x)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

`A2` | "$0 \in \mathsf{371.0}(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\dots\}}, E, x)$"

`Thema12.3` $\alpha \in \mathbb{N} \cap \mathsf{371.0}(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\dots\}}, E, x)$.

13: Aus `Thema12.3` "$\alpha \in \mathbb{N} \cap \mathsf{371.0}(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\dots\}}, E, x)$"
folgt via **folk**: $(\alpha \in \mathbb{N}) \wedge (\alpha \in \mathsf{371.0}(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\dots\}}, E, x))$.

14: Aus 13 "$\dots \alpha \in \mathsf{371.0}(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\dots\}}, E, x)$"
folgt **p.def.**:
$(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\dots\}})(1+\alpha) = E[(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\dots\}})(\alpha) \times x[\{1+\alpha\}]]$.

15: Es gilt: $(1+(1+\alpha) \in \mathsf{dom}\, R) \vee (1+(1+\alpha) \notin \mathsf{dom}\, R)$.
`Fallunterscheidung`

...

...

Beweis **371-4** `b)` ...

`Thema12.3` $\alpha\in\mathbb{N}\cap 371.0(R\cup\mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}},E,x)$.

...

`Fallunterscheidung`

`15.1.Fall` $1+(1+\alpha)\in\operatorname{dom}R$.

`16:` Aus →) "R ist **ana3** von q,E,x",
aus `13`"$\alpha\in\mathbb{N}\ldots$" und
aus `15.1.Fall`"$1+(1+\alpha)\in\operatorname{dom}R$"
folgt via **371-1**: $\alpha,1+\alpha\in\operatorname{dom}R$.

`17:` Aus →) "R ist **ana3** von q,E,x",
aus `16`"$\ldots1+\alpha\in\operatorname{dom}R$" und
aus `15.1.Fall`"$1+(1+\alpha)\in\operatorname{dom}R$"
folgt via **370-1(Def)**:
$R(1+(1+\alpha))=E[R(1+\alpha)\times x[\{1+(1+\alpha)\}]]$.

`18.1:` Aus `1`"R Funktion..." ,
aus `4`"$R\cup\mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}$ Funktion" und
aus `16`"$\ldots1+\alpha\in\operatorname{dom}R$"
folgt via **259-38**: $(R\cup\mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})(1+\alpha)=R(1+\alpha)$.

`18.2:` Aus `1`"R Funktion..." ,
aus `4`"$R\cup\mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}$ Funktion" und
aus `15.1.Fall`"$1+(1+\alpha)\in\operatorname{dom}R$"
folgt via **259-38**:
$(R\cup\mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})(1+(1+\alpha))=R(1+(1+\alpha))$.

`19:` Aus `17`,
aus `18.1` und
aus `18.2`
folgt:
$(R\cup\mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})(1+(1+\alpha))$
$=E[(R\cup\mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})(1+\alpha)\times x[\{1+(1+\alpha)\}]]$.

`20:` Aus `16`"$\ldots1+\alpha\in\operatorname{dom}R$"
folgt via **ElementAxiom**: $1+\alpha$ Menge.

`21:` Aus `19`"$(R\cup\mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})(1+(1+\alpha))$
$=E[(R\cup\mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})(1+\alpha)\times x[\{1+(1+\alpha)\}]]$" und
aus `20`"$1+\alpha$ Menge"
folgt **p.def.**: $1+\alpha\in 371.0(R\cup\mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}},E,x)$.

...

...

<u>Beweis</u> **371-4** `b)` ...

`Thema12.3` $\alpha \in \mathbb{N} \cap 371.0(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\dots\}}, E, x)$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`15.2.Fall` $1 + (1 + \alpha) \notin \mathsf{dom}\, R$.

`16:` Aus `13`“$\alpha \in \mathbb{N} \dots$”
folgt via **159-10**: $1 + \alpha \in \mathbb{N}$.

`17:` Aus `16`“$1 + \alpha \in \mathbb{N}$”
folgt via **159-10**: $1 + (1 + \alpha) \in \mathbb{N}$.

`18:` Aus →) “R ist **ana3** von q, E, x” ,
aus `10`“$n \in \mathsf{dom}\, R$” ,
aus `17`“$1 + (1 + \alpha) \in \mathbb{N}$” und
aus `15.2.Fall`“$1 + (1 + \alpha) \notin \mathsf{dom}\, R$”
folgt via **371-1**: $n < 1 + (1 + \alpha)$.

`19.1:` Aus `18`“$n < 1 + (1 + \alpha)$”
folgt via **41-3**: $n \leq 1 + (1 + \alpha)$.

`19.2:` Aus `11`“$n \in \mathbb{N}$” ,
aus `16`“$1 + \alpha \in \mathbb{N}$” und
aus `18`“$n < 1 + (1 + \alpha)$”
folgt via **162-6**: $n \leq 1 + \alpha$.

`19.3:` Via **20-5** gilt: $\mathsf{dom}\,(\mathsf{zo}_{\{n,\dots\}}) = \{n, \dots\}$.

`20.1:` Aus `19.1`“$n \leq 1 + (1 + \alpha)$” und
aus `17`“$1 + (1 + \alpha) \in \mathbb{N}$”
folgt via **236-1**: $1 + (1 + \alpha) \in \{n, \dots\}$.

`20.2:` Aus `19.2`“$n \leq 1 + \alpha$” und
aus `16`“$1 + \alpha \in \mathbb{N}$”
folgt via **236-1**: $1 + \alpha \in \{n, \dots\}$.

...

...

...

<u>Beweis</u> **371-4** `b)` ...

`Thema12.3` $\alpha \in \mathbb{N} \cap 371.0(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}, E, x)$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`15.2.Fall` $1 + (1 + \alpha) \notin \mathsf{dom}\, R.$

...

`21.1:` Aus `20.1`“$1 + (1 + \alpha) \in \{n, \ldots\}$”
folgt via **20-5**: $\mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}(1 + (1 + \alpha)) = 0.$

`21.2:` Aus `20.2`“$1 + \alpha \in \{n, \ldots\}$”
folgt via **20-5**: $\mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}(1 + \alpha) = 0.$

`21.3:` Aus `20.1`“$1 + (1 + \alpha) \in \{n, \ldots\}$” und
aus `19.3`
folgt: $1 + (1 + \alpha) \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}).$

`21.4:` Aus `20.2`“$1 + \alpha \in \{n, \ldots\}$” und
aus `19.3`
folgt: $1 + \alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}).$

`22.1:` Aus `3`“$\mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}$ Funktion”,
aus `4`“$R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}$ Funktion” und
aus `21.3`“$1 + (1 + \alpha) \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})$”
folgt via **343-9**:
$(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})(1 + (1 + \alpha)) = \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}(1 + (1 + \alpha)).$

`22.2:` Aus `3`“$\mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}$ Funktion”,
aus `4`“$R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}$ Funktion” und
aus `21.4`“$1 + \alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})$”
folgt via **343-9**:
$(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})(1 + \alpha) = \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}(1 + \alpha).$

`23:` $$(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})(1 + (1 + \alpha)) \stackrel{22.1}{=} \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}(1 + (1 + \alpha))$$
$$\stackrel{21.1}{=} 0 \stackrel{\text{folk}}{=} E[0] \stackrel{\textbf{folk}}{=} E[0 \times x[\{1 + (1 + \alpha)\}]]$$
$$\stackrel{21.2}{=} E[\mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}(1 + \alpha) \times x[\{1 + (1 + \alpha)\}]]$$
$$\stackrel{22.2}{=} E[(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})(1 + \alpha) \times x[\{1 + (1 + \alpha)\}]].$$

`24:` Aus `16`“$1 + \alpha \in \mathbb{N}$”
folgt via **ElementAxiom**: $1 + \alpha$ Menge.

...

...

...

<u>Beweis</u> **371-4** `b)` ...

$\boxed{\texttt{Thema12.3}}$ $\alpha \in \mathbb{N} \cap \mathsf{371.0}(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\dots\}}, E, x)$.

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{15.2.Fall}}$ $1 + (1 + \alpha) \notin \mathsf{dom}\, R$.

...

`25:` Aus `23` "$(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\dots\}})(1 + (1 + \alpha))$
$= \dots = E[(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\dots\}})(1 + \alpha) \times x[\{1 + (1 + \alpha)\}]]$
und
aus `24` "$1 + \alpha$ Menge"
folgt **p.def.**: $1 + \alpha \in \mathsf{371.0}(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\dots\}}, E, x)$.

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In beiden Fällen gilt:
$1 + \alpha \in \mathsf{371.0}(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\dots\}}, E, x)$.

Ergo `Thema12.3`:

`A3`	"$\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N} \cap \mathsf{371.0}(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\dots\}}, E, x)) \Rightarrow (1 + \alpha \in \mathsf{371.0}(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\dots\}}, E, x))$"

`13:` Aus `A2` gleich "$0 \in \mathsf{371.0}(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\dots\}}, E, x)$" und
aus `A3` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N} \cap \mathsf{371.0}(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\dots\}}, E, x))$
$\Rightarrow (1 + \alpha \in \mathsf{371.0}(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\dots\}}, E, x))$"
folgt via **IS**$\mathbb{N}$: $\mathbb{N} \subseteq \mathsf{371.0}(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\dots\}}, E, x)$.

`14:` Aus →) "R ist **ana3** von q, E, x" und
aus →) "$R(n) = 0$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\mathsf{dom}\,(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\dots\}}) = \mathbb{N}$.

...

Beweis **371-4** `b)` ...

$\boxed{\texttt{Thema15}}$ $\alpha, 1+\alpha \in \mathsf{dom}\,(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})$.

16: Aus Thema15 und
aus 14
folgt: $\alpha, 1+\alpha \in \mathbb{N}$.

17: Aus 16 "$\alpha \ldots \in \mathbb{N}$" und
aus 13 "$\mathbb{N} \subseteq \mathtt{371.0}(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}, E, x)$"
folgt via **folk**: $\alpha \in \mathtt{371.0}(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}, E, x)$.

18: Aus 17 "$\alpha \in \mathtt{371.0}(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}, E, x)$"
folgt **p.def.**:
$(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})(1+\alpha) = E[(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})(\alpha) \times x[\{1+\alpha\}]]$.

Ergo Thema15:

A4 | "$\forall \alpha : (\alpha, 1+\alpha \in \mathsf{dom}\,(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}))$
$\Rightarrow ((R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})(1+\alpha) = E[(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})(\alpha) \times x[\{1+\alpha\}]])$"

16: Via **folk** gilt: $\mathbb{N} \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

17: Aus 14 "$\mathsf{dom}\,(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}) = \mathbb{N}$" und
aus 16
folgt: $\mathsf{dom}\,(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}) \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

18: Aus 4 "$R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}$ Funktion",
aus 17 "$\mathsf{dom}\,(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}) \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$",
aus 8 "$(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})(0) = \{q\}$" und
aus A4 gleich "$\forall \alpha : (\alpha, 1+\alpha \in \mathsf{dom}\,(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}))$
$\Rightarrow ((R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})(1+\alpha) = E[(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})(\alpha) \times x[\{1+\alpha\}]])$
folgt via **370-1(Def)**: $R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}$ ist **ana3** von q, E, x.

<u>Beweis **371-4**</u> `cde)`

`1.1:` Aus →) “ R ist **ana3** von q, E, x ” und
aus →) “ $R(n) = 0$ ”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\mathsf{dom}\,(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}) = \mathbb{N}$.

`1.2:` Aus →) “ R ist **ana3** von q, E, x ” und
aus →) “ $R(n) = 0$ ”
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}$ ist **ana3** von q, E, x.

`2:` Aus `1.2` “ $R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}$ ist **ana3** von q, E, x ” und
aus `1.1` “ $\mathsf{dom}\,(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}) = \mathbb{N}$ ”
folgt via **371-1**: $(\mathtt{rf}3qEx = R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}) \wedge (\mathsf{dom}\,(\mathtt{rf}3qEx) = \mathbb{N})$.

`3.c):` Aus `2`
folgt: $\mathtt{rf}3qEx = R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}$.

`3.d):` Aus `2`
folgt: $\mathsf{dom}\,(\mathtt{rf}3qEx) = \mathbb{N}$.

…

Beweis **371-4** `cde)` ...

$\boxed{\texttt{Thema3.1}}$ $n \leq \alpha \in \mathbb{N}$.

`4:` Aus `Thema3.1`“$n \leq \alpha \in \mathbb{N}$”
folgt via **236-1**: $\alpha \in \{n, \ldots\}$.

`5.1:` Aus `4`“$\alpha \in \{n, \ldots\}$”
folgt via **20-5**: $\mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}(\alpha) = 0$.

`5.2:` Aus `1.2`“$R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}$ ist **ana3** von q, E, x”
folgt via **370-1(Def)**: $R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}$ Funktion.

`5.3:` Via **20-5** gilt: $\mathsf{dom}\,(\mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}) = \{n, \ldots\}$.

`5.4:` Via **20-5** gilt: $\mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}$ Funktion.

`6:` Aus `4` und
aus `5.3`
folgt: $\alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})$.

`7:` Aus `5.4`“$\mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}$ Funktion”,
aus `5.2`“$R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}$ Funktion” und
aus `6`“$\alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})$”
folgt via **343-9**: $(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})(\alpha) = \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}}(\alpha)$.

`8:` Aus `7` und
aus `5.1`
folgt: $(R \cup \mathsf{zo}_{\{n,\ldots\}})(\alpha) = 0$.

`9:` Aus `8` und
aus `3.c)`
folgt: $\mathtt{rf}3qEx(\alpha) = 0$.

Ergo `Thema3.1`: `A1.d)` “$\forall \alpha : (n \leq \alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\mathtt{rf}3qEx(\alpha) = 0)$”

□

371-5. Im Fall $R = \mathtt{rf}3qEx$ ergibt sich aus **371-4** Gefälliges.

<u>**371-5(Satz)**</u> *Es gelte:*

→) $\mathtt{rf}3qEx(n) = 0$.

Dann folgt:

a) $\mathsf{dom}\,(\mathtt{rf}3qEx) = \mathbb{N}$.

b) $\forall \alpha : (n \leq \alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\mathtt{rf}3qEx(\alpha) = 0)$.

<u>$\leq$**-Notation**</u>.

<u>Beweis **371-5**</u>

1: Via **370-9** gilt: $\mathtt{rf}3qEx$ ist **ana3** von q, E, x.

2.a): Aus 1 "$\mathtt{rf}3qEx$ ist **ana3** von q, E, x" und
aus →) "$\mathtt{rf}3qEx(n) = 0$"
folgt via **371-4**: $\mathsf{dom}\,(\mathtt{rf}3qEx) = \mathbb{N}$.

2.b): Aus 1 "$\mathtt{rf}3qEx$ ist **ana3** von q, E, x" und
aus →) "$\mathtt{rf}3qEx(n) = 0$"
folgt via **371-4**: $\forall \alpha : (n \leq \alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\mathtt{rf}3qEx(\alpha) = 0)$.

□

371-6. Gelgentlich ist $\mathsf{dom}\,R$, R ist **ana3** von q, E, x *nicht* gleich $\mathbb{N}$.

371-6(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow$) *R ist* **ana3** *von q, E, x.*

$\rightarrow$) $n \in \mathsf{dom}\,R$.

$\rightarrow$) $E[R(n) \times x[\{1+n\}]]$ *Unmenge.*

Dann folgt:

a) $1+n \notin \mathsf{dom}\,R \neq \mathbb{N}$.

b) $1+n \notin \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf}3qEx) \neq \mathbb{N}$.

RECH-**Notation**.

<u>Beweis **371-6** a)</u>

1: Es gilt: $(1 + n \in \mathsf{dom}\, R) \vee (1 + n \notin \mathsf{dom}\, R)$.

`wfFallunterscheidung`

`1.1.Fall` $1 + n \in \mathsf{dom}\, R$.

2.1: Aus 1.1.Fall "$1 + n \in \mathsf{dom}\, R$"
folgt via **folk**: $R(1 + n)$ Menge.

2.2: Aus →) "R ist **ana3** von q, E, x",
aus →) "$n \in \mathsf{dom}\, R$" und
aus 1.1.Fall "$1 + n \in \mathsf{dom}\, R$"
folgt via **370-1(Def)**: $R(1 + n) = E[R(n) \times x[\{1 + n\}]]$.

3: Aus 2.2 und
aus 2.1
folgt: $E[R(n) \times x[\{1 + n\}]]$ Menge.

4: Nach →) gilt: $E[R(n) \times x[\{1 + n\}]]$ Unmenge.

`Ende wfFallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: A1 | "$1 + n \notin \mathsf{dom}\, R$"

2: Aus →) "R ist **ana3** von q, E, x" und
aus →) "$n \in \mathsf{dom}\, R$"
folgt via **371-1**: $n \in \mathbb{N}$.

3: Aus 2 "$n \in \mathbb{N}$"
folgt via **159-10**: $1 + n \in \mathbb{N}$.

4: Aus 3 "$1 + n \in \mathbb{N}$" und
aus A1 gleich "$1 + n \notin \mathsf{dom}\, R$"
folgt via **folk**: $\mathbb{N} \neq \mathsf{dom}\, R$.

5: Aus 4
folgt: $\boxed{\mathsf{dom}\, R \neq \mathbb{N}}$

<u>Beweis **371-6** `b)`</u>

`1.1:` Aus →) “ R ist **ana3** von q, E, x ” und
aus →) “ $n \in \mathsf{dom}\, R$ ”
folgt via **370-9**: $R(n) = \mathtt{rf3}qEx(n)$.

`1.2:` Aus →) “ R ist **ana3** von q, E, x ” und
aus →) “ $n \in \mathsf{dom}\, R$ ”
folgt via **371-1**: $n \in \mathbb{N}$.

`2:` Es gilt: $(1+n \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf3}qEx)) \vee (1+n \notin \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf3}qEx))$.

`wfFallunterscheidung`

`2.1.Fall` $1+n \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf3}qEx)$.

`3.1:` Aus `2.1.Fall` “ $1+n \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf3}qEx)$ ”
folgt via **folk**: $\mathtt{rf3}qEx(1+n)$ Menge.

`3.2:` Via **370-9** gilt: $\mathtt{rf3}qEx$ ist **ana3** von q, E, x.

`3.3:` Aus →) “ R ist **ana3** von q, E, x ”
folgt via **370-9**: $\mathsf{dom}\, R \subseteq \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf3}qEx)$.

`4:` Aus →) “ $n \in \mathsf{dom}\, R$ ” und
aus `3.3` “ $\mathsf{dom}\, R \subseteq \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf3}qEx)$ ”
folgt via **folk**: $n \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf3}qEx)$.

`5:` Aus `3.2` “ $\mathtt{rf3}qEx$ ist **ana3** von q, E, x ”,
aus `4` “ $n \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf3}qEx)$ ” und
aus `2.1.Fall` “ $1+n \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf3}qEx)$ ”
folgt via **370-1(Def)**:
$\mathtt{rf3}qEx(1+n) = E[\mathtt{rf3}qEx(n) \times x[\{1+n\}]]$.

`6:` Aus `5` und
aus `3.1`
folgt: $E[\mathtt{rf3}qEx(n) \times x[\{1+n\}]]$ Menge.

`7:` Aus `6` und
aus `1.1`
folgt: $E[R(n) \times x[\{1+n\}]]$ Menge.

`8:` Nach →) gilt: $E[R(n) \times x[\{1+n\}]]$ Unmenge.

`Ende wfFallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

`A1` “ $1+n \notin \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf3}qEx)$ ”

...

<u>Beweis</u> **371-6** `b)` ...

`2:` Aus `1.2`"$n \in \mathbb{N}$"
folgt via **159-10**: $1 + n \in \mathbb{N}$.

`3:` Aus `2`"$1 + n \in \mathbb{N}$" und
aus `A1` gleich "$1 + n \notin \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf}3qEx)$"
folgt via **folk**: $\mathbb{N} \neq \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf}3qEx)$.

`4:` Aus `3`
folgt: $\boxed{\mathsf{dom}\,(\mathtt{rf}3qEx) \neq \mathbb{N}}$

□

371-7. Gelgentlich ist $\mathsf{dom}\,(\mathtt{rf}3qEx)$ *nicht* gleich $\mathbb{N}$.

371-7(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow$) $n \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf}3qEx)$.

$\rightarrow$) $E[\mathtt{rf}3qEx(n) \times x[\{1+n\}]]$ *Unmenge.*

Dann folgt "$1+n \notin \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf}3qEx) \neq \mathbb{N}$".

RECH-**Notation**.

Beweis **371-7**

1: Via **370-9** gilt: $\mathtt{rf}3qEx$ ist **ana3** von q, E, x.

2: Aus 1"$\mathtt{rf}3qEx$ ist **ana3** von q, E, x",
aus $\rightarrow$)"$n \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf}3qEx$" und
aus $\rightarrow$)"$E[\mathtt{rf}3qEx(n) \times x[\{1+n\}]]$ Unmenge"
folgt via **371-6**: $1+n \notin \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf}3qEx) \neq \mathbb{N}$.

□

Analysis: IS$\{\mathbb{N}\}\cup\mathbb{N}$.
Weiteres über R ist **ana3** von $q,f,\phi,\ f,\phi$ Funktion.
Weiteres über $\texttt{rf3}q\phi f,\ f,\phi$ Funktion.

Ersterstellung: 12/01/16 **Letzte Änderung: 11/02/16**

372-1. Soll über $\mathsf{ran}\,R$, R ist **ana3** von q,x,E, eine Aussage getroffen werden fällt die Abwesenheit eines Induktions-Verfahrens für $\{\mathbb{N}\}\cup\mathbb{N}$ störend auf. Dies soll so nicht bleiben.

372-1(Satz) **(IS$\{\mathbb{N}\}\cup\mathbb{N}$: InduktionsSatz$\{\mathbb{N}\}\cup\mathbb{N}$)**

Es gelte:

$\rightarrow)$ $n\in\{\mathbb{N}\}\cup\mathbb{N}$.

$\rightarrow)$ $0\in x$.

$\rightarrow)$ $\forall\alpha:((\alpha\in x)\wedge(1+\alpha\in n))\Rightarrow(1+\alpha\in x)$.

Dann folgt "$n\subseteq x$".

RECH-**Notation**.

<u>Beweis **372-1**</u>

`1:` Aus →) “$n \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$”
folgt via **folk**: $(n = \mathbb{N}) \vee (n \in \mathbb{N})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $n = \mathbb{N}$.

`Thema2.1` $\beta \in \mathbb{N} \cap x$.

`3:` Aus `Thema2.1`“$\beta \in \mathbb{N} \cap x$”
folgt via **folk**: $(\beta \in \mathbb{N}) \wedge (\beta \in x)$.

`4:` Aus `3`“$\beta \in \mathbb{N} \ldots$”
folgt via **folk**: $1 + \beta \in \mathbb{N}$.

`5:` Aus `4` und
aus `1.1.Fall`
folgt: $1 + \beta \in n$.

`6:` Aus `3`“$\ldots \beta \in x$”,
aus `5`“$1 + \beta \in n$” und
aus →) “$\forall \alpha : ((\alpha \in x) \wedge (1 + \alpha \in n)) \Rightarrow (1 + \alpha \in x)$”
folgt: $1 + \beta \in x$.

Ergo `Thema2.1`: `A1` | “$\forall \beta : (\beta \in \mathbb{N} \cap x) \Rightarrow (1 + \beta \in x)$”

`2.2:` Aus →) “$0 \in x$” und
aus `A1` gleich “$\forall \beta : (\beta \in \mathbb{N} \cap x) \Rightarrow (1 + \beta \in x)$”
folgt via **IS**$\mathbb{N}$: $\mathbb{N} \subseteq x$.

`3:` Aus `2.2` und
aus `1.1.Fall`“$n = \mathbb{N}$”
folgt: $n \subseteq x$.

`1.2.Fall` $n \in \mathbb{N}$

Aus `1.2.Fall`“$n \in \mathbb{N}$”,
aus →) “$0 \in x$” und
aus →) “$\forall \alpha : ((\alpha \in x) \wedge (1 + \alpha \in n)) \Rightarrow (1 + \alpha \in n)$”
folgt via **337-12**: $n \subseteq x$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $n \subseteq x$.

$\square$

372-2. Mit Hilfe der vorliegenden Klasse soll die Untersuchung von $\mathsf{ran}\,(R(n))$, R ist **ana3** von q, x, E, $n \in \mathsf{dom}\, R$, ermöglicht werden.

372-2(Definition)

$$\mathsf{372.0}(x, y) \;= \{\omega : x(\omega) \subseteq y\}.$$

372-3. Nun soll $\mathsf{ran}\, R(n)$, $n \in \mathsf{dom}\, R$, R ist **ana3** von q, x, E, untersucht werden.

372-3(Satz)

a) *Aus* "R *ist* **ana3** *von* q, x, E" *und* "$n \in \mathsf{dom}\, R$" *folgt* "$\mathsf{ran}\,(R(n)) \subseteq \{q\} \cup \mathsf{ran}\, E$".

b) *Aus* "R *ist* **ana3** *von* q, x, E" *und* "$1 \le n \in \mathsf{dom}\, R$" *folgt* "$\mathsf{ran}\,(R(n)) \subseteq \mathsf{ran}\, E$".

c) *Aus* "R *ist* **ana3** *von* q, x, E" *folgt* "$\mathsf{ran}\, R \subseteq \mathcal{P}(\{q\} \cup \mathsf{ran}\, E)$".

$\le .$**-Notation**

Beweis **372-3**

$\mathsf{372.0}(x, y) = \{\omega : x(\omega) \subseteq y\}$
`RECH`-**Notation**.

---

a) `VS` gleich $(R \text{ ist } \mathbf{ana3} \text{ von } q, x, E) \wedge (n \in \mathsf{dom}\, R)$.

`1.1`: Aus `VS` gleich "R ist **ana3** von $q, x, E \ldots$"
folgt via **370-1(Def)**: $R(0) = \{q\}$.

`1.2`: Aus `VS` gleich "R ist **ana3** von $q, x, E \ldots$"
folgt via **370-3**: $0 \in \mathsf{dom}\, R$.

`1.3`: Via **folk** gilt: $\{q\} \subseteq \{q\} \cup \mathsf{ran}\, E$.

`2`: Aus `1.1` und
aus `1.3`
folgt: $R(0) \subseteq \{q\} \cup \mathsf{ran}\, E$.

`3`: Aus `2`"$R(0) \subseteq \{q\} \cup \mathsf{ran}\, E$" und
aus $0\mathcal{U}$**Axiom**"0 Menge"
folgt: $0 \in \{\omega : R(\omega) \subseteq \{q\} \cup \mathsf{ran}\, E\}$.

`4`: Aus `1.2`"$0 \in \mathsf{dom}\, R$" und
aus `3`"$0 \in \{\omega : R(\omega) \subseteq \{q\} \cup \mathsf{ran}\, E\}$"
folgt via **folk**: $0 \in (\mathsf{dom}\, R) \cap \{\omega : R(\omega) \subseteq \{q\} \cup \mathsf{ran}\, E\}$.

...

<u>Beweis **372-3**</u> `a)` `VS` gleich $(R \text{ ist } \mathbf{ana3} \text{ von } q, x, E) \wedge (n \in \mathsf{dom}\, R)$.

...

`Thema5`

$$(\alpha \in (\mathsf{dom}\, R) \cap \{\omega : R(\omega) \subseteq \{q\} \cup \mathsf{ran}\, E\}) \wedge (1 + \alpha \in \mathsf{dom}\, R)$$

`6.1:` Aus `Thema5`"$\ldots 1 + \alpha \in \mathsf{dom}\, R$"
folgt via **ElementAxiom**: $1 + \alpha$ Menge.

`6.2:` Aus `Thema5`"$\alpha \in (\mathsf{dom}\, R) \cap \{\omega : R(\omega) \subseteq \{q\} \cup \mathsf{ran}\, E\} \ldots$"
folgt via **folk**: $\alpha \in \mathsf{dom}\, R$.

`7:` Aus →) "R ist **ana3** von q, x, E",
aus `6.2`"$\alpha \in \mathsf{dom}\, R$" und
aus `Thema5`"$\ldots 1 + \alpha \in \mathsf{dom}\, R$"
folgt via **370-1(Def)**: $R(1 + \alpha) = E[R(\alpha) \times x[\{1 + \alpha\}]]$.

`8:` Via **folk** gilt: $E[R(\alpha) \times x[\{1 + \alpha\}]] \subseteq \mathsf{ran}\, E$.

`9:` Aus `7` und
aus `8`
folgt: $R(1 + \alpha) \subseteq \mathsf{ran}\, E$.

`10:` Via **folk** gilt: $\mathsf{ran}\, E \subseteq \{q\} \cup \mathsf{ran}\, E$.

`11:` Aus `9`"$R(1 + \alpha) \subseteq \mathsf{ran}\, E$" und
aus `10`"$\mathsf{ran}\, E \subseteq \{q\} \cup \mathsf{ran}\, E$"
folgt via **folk**: $R(1 + \alpha) \subseteq \{q\} \cup \mathsf{ran}\, E$.

`12:` Aus `11`"$R(1 + \alpha) \subseteq \{q\} \cup \mathsf{ran}\, E$" und
aus `6.1`"$1 + \alpha$ Menge"
folgt: $1 + \alpha \in \{\omega : R(\omega) \subseteq \{q\} \cup \mathsf{ran}\, E\}$.

`13:` Aus `Thema5`"$\ldots 1 + \alpha \in \mathsf{dom}\, R$" und
aus `12`"$1 + \alpha \in \{\omega : R(\omega) \subseteq \{q\} \cup \mathsf{ran}\, E\}$"
folgt via **folk**:

$$1 + \alpha \in (\mathsf{dom}\, R) \cap \{\omega : R(\omega) \subseteq \{q\} \cup \mathsf{ran}\, E\}.$$

Ergo `Thema5`:

`A1` | "$\forall \alpha : ((\alpha \in (\mathsf{dom}\, R) \cap \{\omega : R(\omega) \subseteq \{q\} \cup \mathsf{ran}\, E\}) \wedge (1 + \alpha \in \mathsf{dom}\, R)) \Rightarrow (1 + \alpha \in (\mathsf{dom}\, R) \cap \{\omega : R(\omega) \subseteq \{q\} \cup \mathsf{ran}\, E\})$"

...

<u>Beweis **372-3**</u> `a)` `VS` gleich $(R \text{ ist } \mathbf{ana3} \text{ von } q, x, E) \wedge (n \in \mathsf{dom}\, R)$.

...

`6:` Aus `VS` gleich "R ist **ana3** von $q, x, E \ldots$"
folgt via **370-1(Def)**: $\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

`7:` Aus `6`"$\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$",
aus `4`"$0 \in (\mathsf{dom}\, R) \cap \{\omega : R(\omega) \subseteq \{q\} \cup \mathsf{ran}\, E\}$" und
aus `A1` gleich
"$\forall \alpha : ((\alpha \in (\mathsf{dom}\, R) \cap \{\omega : R(\omega) \subseteq \{q\} \cup \mathsf{ran}\, E\}) \wedge (1 + \alpha \in \mathsf{dom}\, R))$
$\Rightarrow (1 + \alpha \in (\mathsf{dom}\, R) \cap \{\omega : R(\omega) \subseteq \{q\} \cup \mathsf{ran}\, E\})$"
folgt via $\mathbf{IS}\{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$: $\mathsf{dom}\, R \subseteq (\mathsf{dom}\, R) \cap \{\omega : R(\omega) \subseteq \{q\} \cup \mathsf{ran}\, E\}$.

`8:` Aus `7`"$\mathsf{dom}\, R \subseteq (\mathsf{dom}\, R) \cap \{\omega : R(\omega) \subseteq \{q\} \cup \mathsf{ran}\, E\}$"
folgt via **folk**: $\mathsf{dom}\, R \subseteq \{\omega : R(\omega) \subseteq \{q\} \cup \mathsf{ran}\, E\}$.

`9:` Aus `VS` gleich "$\ldots n \in \mathsf{dom}\, R$" und
aus `8`"$\mathsf{dom}\, R \subseteq \{\omega : R(\omega) \subseteq \{q\} \cup \mathsf{ran}\, E\}$"
folgt via **folk**: $n \in \{\omega : R(\omega) \subseteq \{q\} \cup \mathsf{ran}\, E\}$.

`10:` Aus `9`
folgt: $R(n) \subseteq \{q\} \cup \mathsf{ran}\, E$.

<u>Beweis **372-3**</u> `b)` `VS` gleich $(R \text{ ist } \mathbf{ana3} \text{ von } q, x, E) \wedge (1 \le n \in \mathsf{dom}\, R)$.

`1:` Aus `VS` gleich "R ist **ana3** von $q, x, E \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots n \in \mathsf{dom}\, R$"
folgt via **371-1**: $n \in \mathbb{N}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots 1 \le n \ldots$" und
aus `1`"$n \in \mathbb{N}$"
folgt via **300-9**: $\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (n = 1 + \Omega)$.

`3:` Aus `2`"$\ldots n = 1 + \Omega$" und
aus `VS` gleich "$\ldots n \in \mathsf{dom}\, R$"
folgt: $1 + \Omega \in \mathsf{dom}\, R$.

`4:` Aus `VS` gleich "R ist **ana3** von $q, x, E \ldots$",
aus `2`"$\ldots \Omega \in \mathbb{N} \ldots$" und
aus `3`"$1 + \Omega \in \mathsf{dom}\, R$"
folgt via **371-1**: $\Omega \in \mathsf{dom}\, R$.

`5:` Aus `VS` gleich "R ist **ana3** von $q, x, E \ldots$",
aus `4`"$\Omega \in \mathsf{dom}\, R$" und
aus `3`"$1 + \Omega \in \mathsf{dom}\, R$"
folgt via **370-1(Def)**: $R(1 + \Omega) = E[R(\Omega) \times x[\{1 + \Omega\}]]$.

`6:` Via **folk** gilt: $E[R(\Omega) \times x[\{1 + \Omega\}]] \subseteq \mathsf{ran}\, E$.

`7:` Aus `5` und
aus `6`
folgt: $R(1 + \Omega) \subseteq \mathsf{ran}\, E$.

`8:` Aus `7` und
aus `2`"$\ldots n = 1 + \Omega$"
folgt: $R(n) \subseteq \mathsf{ran}\, E$.

<u>Beweis **372-3**</u> `c)` `VS` gleich R ist **ana3** von q, x, E.

`Thema0` $\alpha \in \mathsf{ran}\, R$.

`1:` Aus `VS` gleich "R ist **ana3** von q, x, E"
folgt via **370-1(Def)**: R Funktion.

`2:` Aus `1`"R Funktion" und
aus `Thema0`"$\alpha \in \mathsf{ran}\, R$"
folgt via **folk**: $\exists \Omega : (\Omega \in \mathsf{dom}\, R) \wedge (\alpha = R(\Omega))$.

`3:` Aus `VS` gleich "R ist **ana3** von q, x, E" und
aus `2`"$\ldots \Omega \in \mathsf{dom}\, R \ldots$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $R(\Omega) \subseteq \{q\} \cup \mathsf{ran}\, E$.

`4:` Aus `2`"$\ldots \alpha = R(\Omega)$" und
aus `3`
folgt: $\alpha \subseteq \{q\} \cup \mathsf{ran}\, E$.

`5:` Aus `Thema0`"$\alpha \in \mathsf{ran}\, R$"
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`6:` Aus `4`"$\alpha \subseteq \{q\} \cup \mathsf{ran}\, E$" und
aus `5`"α Menge"
folgt via **folk**: $\alpha \in \mathcal{P}(\{q\} \cup \mathsf{ran}\, E)$.

Ergo `Thema0`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{ran}\, R) \Rightarrow (\alpha \in \mathcal{P}(\{q\} \cup \mathsf{ran}\, E))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\mathsf{ran}\, R \subseteq \mathcal{P}(\{q\} \cup \mathsf{ran}\, E)$.

□

372-4. Da es sich bei $\mathtt{rf3}qEx$ um **ana3** von q, x, E handelt, liegt eine Spezialisierung von **372-3** nahe.

372-4(Satz)

a) *Aus* "$n \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf3}qEx)$" *folgt* "$\mathsf{ran}\,(\mathtt{rf3}qEx(n)) \subseteq \{q\} \cup \mathsf{ran}\,E$".

b) *Aus* "$1 \leq n \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf3}qEx)$" *folgt* "$\mathsf{ran}\,(\mathtt{rf3}qEx(n)) \subseteq \mathsf{ran}\,E$".

c) $\mathsf{ran}\,(\mathtt{rf3}qEx) \subseteq \mathcal{P}(\{q\} \cup \mathsf{ran}\,E)$.

≤-Notation.

Beweis **372-4** a) VS gleich $n \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf3}qEx)$.

1: Via **370-9** gilt: $\mathtt{rf3}qEx$ ist **ana3** von q, x, E.

2: Aus 1"$\mathtt{rf3}qEx$ ist **ana3** von q, x, E" und
aus VS gleich "$\ldots n \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf3}qEx)$"
folgt via **372-3**: $\mathsf{ran}\,(\mathtt{rf3}qEx(n)) \subseteq \{q\} \cup \mathsf{ran}\,E$.

b) VS gleich $1 \leq n \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf3}qEx)$.

1: Via **370-9** gilt: $\mathtt{rf3}qEx$ ist **ana3** von q, x, E.

2: Aus 1"$\mathtt{rf3}qEx$ ist **ana3** von q, x, E" und
aus VS gleich "$\ldots 1 \leq n \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf3}qEx)$"
folgt via **372-3**: $\mathsf{ran}\,(\mathtt{rf3}qEx(n)) \subseteq \mathsf{ran}\,E$.

c)

1: Via **370-9** gilt: $\mathtt{rf3}qEx$ ist **ana3** von q, x, E.

2: Aus 1"$\mathtt{rf3}qEx$ ist **ana3** von q, x, E"
folgt via **372-3**: $\mathsf{ran}\,(\mathtt{rf3}qEx(n)) \subseteq \mathcal{P}(\{q\} \cup \mathsf{ran}\,E)$.

□

372-5. Zwischendurch sei uns Erhellung über $(x \cup y)_{\text{sngltn}}$ gegönnt.

372-5(Satz)

a) $(x_{\text{sngltn}}) \cup (y_{\text{sngltn}}) = (x \cup y)_{\text{sngltn}}$.

b) $\{p\}_{\text{sngltn}} \subseteq \{\{p\}\}$.

c) *Aus "p Menge" folgt "$\{p\}_{\text{sngltn}} = \{\{p\}\}$".*

d) *Aus "p Menge" folgt "$\{p\} \in (\{p\} \cup x)_{\text{sngltn}}$".*

<u>Beweis</u> **372-5** `a)`

`1.1:` Via **folk** gilt: $(x \subseteq x \cup y) \wedge (y \subseteq x \cup y)$.

`Thema1.2` $\alpha \in (x \cup y)_{\text{sngltn}}$.

`2:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in (x \cup y)_{\text{sngltn}}$"
folgt via **27-3**: $\exists \Omega : (\Omega \in x \cup y) \wedge (\alpha = \{\Omega\})$.

`3:` Aus `2`"$\ldots \Omega \in x \cup y \ldots$"
folgt via **folk**: $(\Omega \in x) \vee (\Omega \in y)$.

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` $\Omega \in x$.

`4:` Aus `3.1.Fall`"$\Omega \in x$"
folgt via **27-3**: $\{\Omega\} \in x_{\text{sngltn}}$.

`5:` Aus `2`"$\ldots \alpha = \{\Omega\}$" und
aus `4`
folgt: $\alpha \in x_{\text{sngltn}}$.

`6:` Aus `5`"$\alpha \in x_{\text{sngltn}}$"
folgt via **folk**: $\alpha \in (x_{\text{sngltn}}) \cup (y_{\text{sngltn}})$.

`3.2.Fall` $\Omega \in y$.

`4:` Aus `3.2.Fall`"$\Omega \in y$"
folgt via **27-3**: $\{\Omega\} \in y_{\text{sngltn}}$.

`5:` Aus `2`"$\ldots \alpha = \{\Omega\}$" und
aus `4`
folgt: $\alpha \in y_{\text{sngltn}}$.

`6:` Aus `5`"$\alpha \in y_{\text{sngltn}}$"
folgt via **folk**: $\alpha \in (x_{\text{sngltn}}) \cup (y_{\text{sngltn}})$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$\alpha \in (x_{\text{sngltn}}) \cup (y_{\text{sngltn}})$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in (x \cup y)_{\text{sngltn}}) \Rightarrow (\alpha \in (x_{\text{sngltn}}) \cup (y_{\text{sngltn}}))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$(x \cup y)_{\text{sngltn}} \subseteq (x_{\text{sngltn}}) \cup (y_{\text{sngltn}})$"

...

Beweis **372-5** `a)` ...

`2.1:` Aus `1.1` “$x \subseteq x \cup y \ldots$”
folgt via **27-4**: $x_{\text{sngltn}} \subseteq (x \cup y)_{\text{sngltn}}$.

`2.2:` Aus `1.1` “$\ldots y \subseteq x \cup y$”
folgt via **27-4**: $y_{\text{sngltn}} \subseteq (x \cup y)_{\text{sngltn}}$.

`3:` Aus `2.1` “$x_{\text{sngltn}} \subseteq (x \cup y)_{\text{sngltn}}$” und
aus `2.2` “$y_{\text{sngltn}} \subseteq (x \cup y)_{\text{sngltn}}$”
folgt via **folk**: $(x_{\text{sngltn}}) \cup (y_{\text{sngltn}}) \subseteq (x \cup y)_{\text{sngltn}}$.

`4:` Aus `3` “$(x_{\text{sngltn}}) \cup (y_{\text{sngltn}}) \subseteq (x \cup y)_{\text{sngltn}}$” und
aus `A1` gleich “$(x \cup y)_{\text{sngltn}} \subseteq (x_{\text{sngltn}}) \cup (y_{\text{sngltn}})$”
folgt via **GleichheitsAxiom**: $(x_{\text{sngltn}}) \cup (y_{\text{sngltn}}) = (x \cup y)_{\text{sngltn}}$.

`b)`

`Thema0` $\alpha \in \{p\}_{\text{sngltn}}$.

`1:` Aus `Thema0` “$\alpha \in \{p\}_{\text{sngltn}}$”
folgt via **27-3**: $\exists \Omega : (\Omega \in \{p\}) \wedge (\alpha = \{\Omega\})$.

`2:` Aus `1` “$\ldots \Omega \in \{p\} \ldots$”
folgt via **folk**: $\Omega = p$.

`3:` Aus `2` und
aus `1` “$\ldots \alpha = \{\Omega\}$”
folgt: $\alpha = \{p\}$.

`4:` Via **SingeltonAxiom** gilt: $\{p\}$ Menge.

`5:` Aus `4` “$\{p\}$ Menge”
folgt via **folk**: $\{p\} \in \{\{p\}\}$.

`6:` Aus Aus `3` und
aus `5`
folgt: $\alpha \in \{\{p\}\}$.

Ergo `Thema0`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{p\}_{\text{sngltn}}) \Rightarrow (\alpha \in \{\{p\}\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\{p\}_{\text{sngltn}} \subseteq \{\{p\}\}$.

<u>Beweis **372-5**</u> `c)` `VS` gleich p Menge.

`1:` Aus `VS` gleich "p Menge"
folgt via **folk**: $p \in \{p\}$.

`2:` Aus `1` "$p \in \{p\}$"
folgt via **27-3**: $\{p\} \in \{p\}_{\text{sngltn}}$.

`3:` Aus `2` "$\{p\} \in \{p\}_{\text{sngltn}}$"
folgt via **folk**: $\{\{p\}\} \subseteq \{p\}_{\text{sngltn}}$.

`4:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $\{p\}_{\text{sngltn}} \subseteq \{\{p\}\}$.

`5:` Aus `5` "$\{p\}_{\text{sngltn}} \subseteq \{\{p\}\}$" und
aus `3` "$\{\{p\}\} \subseteq \{p\}_{\text{sngltn}}$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\{p\}_{\text{sngltn}} = \{\{p\}\}$.

`d)` `VS` gleich p Menge.

`1:` Aus `VS` gleich "p Menge"
folgt via **folk**: $p \in \{p\} \cup x$.

`2:` Aus `1` "$p \in \{p\} \cup x$"
folgt via **27-3**: $\{p\} \in (\{p\} \cup x)_{\text{sngltn}}$.

□

372-6. Aus $0 \neq n \in p \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$ folgt gelegentlich gut Verwendbares. Aus R, R ist **ana3** von q, x, E, rückt wieder in den Focus des Interesses.

372-6(Satz)

a) *Aus* "$0 \neq n \in p \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$"
folgt "$\exists \Omega : (\Omega, 1 + \Omega \in p, \mathbb{N}) \wedge (n = 1 + \Omega)$".

b) *Aus* "R *ist* **ana3** *von* q, x, E" *und* "$0 \neq n \in \mathsf{dom}\, R$"
folgt "$\exists \Omega : (\Omega, 1 + \Omega \in \mathsf{dom}\, R, \mathbb{N}) \wedge (n = 1 + \Omega)$
$\wedge (R(n) = E[R(\Omega) \times x[\{1 + \Omega\}]])$".

c) *Aus* "R *ist* **ana3** *von* q, x, E"
und "$n \in \mathsf{dom}\, R$"
und "$0 \neq R(n)$"
und "$m \leq n$" *folgt* "$0 \neq R(m)$".

d) *Aus* "R *ist* **ana3** *von* q, x, E"
und "$n \in \mathsf{dom}\, R$"
und "$0 \neq R(n)$" *folgt* "q *Menge*".

$\leq$.`RECH`-**Notation**.

<u>Beweis **372-6**</u> `a)` `VS` gleich $0 \neq n \in p \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots n \in p \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$"
folgt via **337-9**: $n \in \mathbb{N}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$0 \neq n \ldots$" und
aus `1`"$n \in \mathbb{N}$"
folgt via **300-9**: $\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (n = 1 + \Omega)$.

`3.1:` Aus `2`"$\ldots \Omega \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **folk**: $1 + \Omega \in \mathbb{N}$.

`3.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots n \in p \ldots$" und
aus `2`"$\ldots n = 1 + \Omega$"
folgt: $1 + \Omega \in p$.

`4:` Aus `2`"$\ldots \Omega \in \mathbb{N} \ldots$",
aus `3.2`"$1 + \Omega \in p$" und
aus `VS` gleich "$\ldots p \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$"
folgt via **343-8**: $\Omega \in p$.

`5:` Aus `2`"$\exists \Omega \ldots$",
aus `4`,
aus `3.2`,
aus `2`"$\ldots \Omega \in \mathbb{N} \ldots$",
aus `3.1` und
aus `2`"$\ldots n = 1 + \Omega$"
folgt: $\exists \Omega : (\Omega, 1 + \Omega \in p, \mathbb{N}) \wedge (n = 1 + \Omega)$.

Beweis **372-6** `b)` `VS` gleich $(R \text{ ist } \mathbf{ana3} \text{ von } q, x, E) \wedge (0 \neq n \in \mathsf{dom}\, R)$.

`1:` Aus `VS` gleich "R ist **ana3** von $q, x, E \ldots$"
folgt via **370-1(Def)**: $\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots 0 \neq n \in \mathsf{dom}\, R$" und
aus `1`"$\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$\exists \Omega : (\Omega, 1 + \Omega \in \mathsf{dom}\, R, \mathbb{N}) \wedge (n = 1 + \Omega)$.

`3:` Aus `VS` gleich "R ist **ana3** von $q, x, E \ldots$" und
aus `2`"$\ldots \Omega, 1 + \Omega \in \mathsf{dom}\, R \ldots$"
folgt via **370-1(Def)**: $R(1 + \Omega) = E[R(\Omega) \times x[\{1 + \Omega\}]]$.

`4:` Aus `3` und
aus `2`"$\ldots n = 1 + \Omega$"
folgt: $R(n) = E[R(\Omega) \times x[\{1 + \Omega\}]]$.

`6:` Aus `2` und
aus `4`
folgt:
$\exists \Omega : (\Omega, 1 + \Omega \in \mathsf{dom}\, R, \mathbb{N}) \wedge (n = 1 + \Omega) \wedge (R(n) = E[R(\Omega) \times x[\{1 + \Omega\}]])$.

`c)` `VS` gleich $(R \text{ ist } \mathbf{ana3} \text{ von } q, x, E) \wedge (n \in \mathsf{dom}\, R) \wedge (0 \neq R(n)) \wedge (m \leq n)$.

`1:` Es gilt: $(R(m) = 0) \vee (0 \neq R(m))$.
`wfFallunterscheidung`

`1.1.Fall` $R(m) = 0$.

`2:` Aus `VS` gleich "R ist **ana3** von $q, x, E \ldots$",
aus `1.1.Fall`"$R(m) = 0$",
aus `VS` gleich "$\ldots m \leq n$" und
aus `VS` gleich "$\ldots n \in \mathsf{dom}\, R \ldots$"
folgt via **371-2**: $R(n) = 0$.

`3:` Nach `VS` gilt: $0 \neq R(n)$.

`Ende wfFallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $0 \neq R(m)$.

<u>Beweis</u> **372-6** `d)` `VS` gleich $(R \text{ ist } \mathbf{ana3} \text{ von } q, x, E) \wedge (n \in \mathsf{dom}\, R) \wedge (0 \neq R(n))$.

`1:` Aus `VS` gleich "$(R \text{ ist } \mathbf{ana3} \text{ von } q, x, E) \wedge (n \in \mathsf{dom}\, R) \ldots$"
folgt via **371-1**: $n \in \mathbb{N}$.

`2:` Aus `1`"$n \in \mathbb{N}$"
folgt via **159-11**: $0 \leq n$.

`3:` Aus `VS` gleich "$(R \text{ ist } \mathbf{ana3} \text{ von } q, x, E) \wedge (n \in \mathsf{dom}\, R) \wedge (0 \neq R(n))$" und
aus `2`"$0 \leq n$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $0 \neq R(0)$.

`4:` Aus `VS` gleich "$R \text{ ist } \mathbf{ana3} \text{ von } q, x, E \ldots$"
folgt via **370-1(Def)**: $R(0) = \{q\}$.

`5:` Aus `3` und
aus `4`
folgt: $0 \neq \{q\}$.

`6:` Aus `5`"$0 \neq \{q\}$"
folgt via **folk**: q Menge.

□

372-7. Es überrascht, Vorliegendes nicht schon früher in die Essays eingebracht zu haben.

<u>**372-7(Satz)**</u> *Die Aussagen* `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $p \in \{\omega : x(\omega) \in y\}$.

`ii)` $x(p) \in y$.

$\mathsf{18.6}(x, y) \;= \{\omega : x(\omega) \in y\}$.

<u>Beweis **372-7**</u> $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $p \in \{\omega : x(\omega) \in y\}$.

Aus `VS` gleich "$p \in \{\omega : x(\omega) \in y\}$"
folgt: $x(p) \in y$.

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich $x(p) \in y$.

`1`: Aus `VS` gleich "$x(p) \in y$"
folgt via **344-3**: p Menge.

`2`: Aus `VS` gleich "$x(p) \in y$" und
aus `1`"p Menge"
folgt: $p \in \{\omega : x(\omega) \in y\}$.

□

372-8. Sind f, ϕ Funktionen, so ist $R(n)$, R ist **ana3** von q, f, ϕ, $n \in \mathsf{dom}\, R$, ein Singelton.

372-8(Satz)

a) *Aus "R ist* **ana3** *von q, f, ϕ"*
und "f, ϕ Funktion"
und "$n \in \mathsf{dom}\, R$" *folgt "$R(n) \in \mathcal{U}_1$" und "$\exists \Omega : R(n) = \{\Omega\}$".*

b) *Aus "R ist* **ana3** *von q, f, ϕ"*
und "f, ϕ Funktion"
und "$n, 1+n \in \mathsf{dom}\, R$"
folgt "$\exists \Omega : (R(n) = \{\Omega\}) \wedge (R(1+n) = \{\Omega\_\phi\_f(1+n)\})$".

`ALG.RECH`-**Notation**.

Beweis **372-8**

$\mathsf{18.6}(x, y) = \{\omega : x(\omega) \in y\}$

---

a) `VS` gleich $(R$ ist **ana3** von $q, f, \phi) \wedge (f, \phi$ Funktion$) \wedge (n \in \mathsf{dom}\, R)$.

`1.1:` Via **240-3** gilt: $\{q\} \in \mathcal{U}_1$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "R ist **ana3** von $q, f, \phi \ldots$"
folgt via **370-1(Def)**: $R(0) = \{q\}$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "R ist **ana3** von $q, f, \phi \ldots$"
folgt via **370-1(Def)**: $\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $R(0) \in \mathcal{U}_1$.

`3:` Aus `2`"$R(0) \in \mathcal{U}_1$"
folgt via **372-7**: $0 \in \{\omega : R(\omega) \in \mathcal{U}_1\}$.

...

Beweis **372-8** `a)` `VS` gleich $(R \text{ ist } \textbf{ana3} \text{ von } q, f, \phi) \wedge (f, \phi \text{ Funktion})$
$\wedge(n \in \mathsf{dom}\, R)$.

...

`Thema4` $(\alpha \in \{\omega : R(\omega) \in \mathcal{U}_1\}) \wedge (1 + \alpha \in \mathsf{dom}\, R)$.

`5:` Aus `Thema4` "$\alpha \in \{\omega : R(\omega) \in \mathcal{U}_1\} \ldots$"
folgt: $R(\alpha) \in \mathcal{U}_1$.

`6.1:` Aus `5` "$R(\alpha) \in \mathcal{U}_1$"
folgt via **344-3**: $\alpha \in \mathsf{dom}\, R$.

`6.2:` Aus `5` "$R(\alpha) \in \mathcal{U}_1$"
folgt via **240-3**: $\exists \Omega : R(\alpha) = \{\Omega\}$.

`7.1:` Aus `VS` gleich "R ist **ana3** von $q, \phi, f \ldots$",
aus `6.1` "$\alpha \in \mathsf{dom}\, R$" und
aus `Thema4` "$\ldots 1 + \alpha \in \mathsf{dom}\, R$"
folgt via **370-1(Def)**: $R(1 + \alpha) = \phi[R(\alpha) \times f[\{1 + \alpha\}]]$.

`7.2:` Aus `6.2`
folgt: $R(\alpha) = \{\Omega\}$.

`8.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots f \ldots$ Funktion..."
folgt via **259-16**: $f[\{1 + \alpha\}] = \{f(1 + \alpha)\}$.

`8.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots \phi$ Funktion..."
folgt via **259-16**:
$$\phi[\{(\Omega, f(1 + \alpha))\}] = \{\phi((\Omega, f(1 + \alpha)))\}.$$

`9:` $R(1 + \alpha) \stackrel{7.1}{=} \phi[R(\alpha) \times f[\{1 + \alpha\}]] \stackrel{7.2}{=} \phi[\{\Omega\} \times f[\{1 + \alpha\}]]$
$\stackrel{8.1}{=} \phi[\{\Omega\} \times \{f(1 + \alpha)\}] \stackrel{\mathbf{307-8}}{=} \phi[\{(\Omega, f(1 + \alpha))\}$
$\stackrel{8.2}{=} \{\phi((\Omega, f(1 + \alpha)))\}$.

`10:` Via **240-3** gilt: $\{\phi((\Omega, f(1 + \alpha)))\} \in \mathcal{U}_1$.

`11:` Aus `9` "$R(1 + \alpha) = \ldots = \{\phi((\Omega, f(1 + \alpha)))\}$" und
aus `10`
folgt: $R(1 + \alpha) \in \mathcal{U}_1$.

`12:` Aus `11` "$R(1 + \alpha) \in \mathcal{U}_1$"
folgt via **372-7**: $1 + \alpha \in \{\omega : R(\omega) \in \mathcal{U}_1\}$.

...

<u>Beweis **372-8**</u> `a)` `VS` gleich $(R \text{ ist } \mathbf{ana3} \text{ von } q, f, \phi) \wedge (f, \phi \text{ Funktion})$
$\wedge (n \in \mathsf{dom}\, R)$

...

Ergo `Thema4`:

`A1`	"$\forall \alpha : ((\alpha \in \{\omega : R(\omega) \in \mathcal{U}_1\}) \wedge (1 + \alpha \in \mathsf{dom}\, R)) \Rightarrow (1 + \alpha \in \{\omega : R(\omega) \in \mathcal{U}_1\})$"

`5:` Aus `1.3`"$\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$",
aus `3`"$0 \in \{\omega : R(\omega) \in \mathcal{U}_1\}$" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha : ((\alpha \in \{\omega : R(\omega) \in \mathcal{U}_1\}) \wedge (1 + \alpha \in \mathsf{dom}\, R)) \Rightarrow (1 + \alpha \in \{\omega : R(\omega) \in \mathcal{U}_1\})$"
folgt via **IS**$\{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$: $\mathsf{dom}\, R \subseteq \{\omega : R(\omega) \in \mathcal{U}_1\}$.

`6:` Aus `VS` gleich "$\ldots n \in \mathsf{dom}\, R$" und
aus `5`"$\mathsf{dom}\, R \subseteq \{\omega : R(\omega) \in \mathcal{U}_1\}$"
folgt via **folk**: $n \in \{\omega : R(\omega) \in \mathcal{U}_1\}$.

`7:` Aus `6`"$n \in \{\omega : R(\omega) \in \mathcal{U}_1\}$"
folgt: $\boxed{R(n) \in \mathcal{U}_1}$

`8:` Aus `7`"$R(n) \in \mathcal{U}_1$"
folgt via **240-3**: $\boxed{\exists \Omega : R(n) = \{\Omega\}}$

<u>Beweis **372-8**</u> `b)` `VS` gleich $(R \text{ ist } \mathbf{ana3} \text{ von } q, f, \phi) \wedge (f, \phi \text{ Funktion}) \wedge (n, 1+n \in \mathsf{dom}\, R)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "R ist **ana3** von $q, f, \phi \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots n, 1+n \in \mathsf{dom}\, R$"
folgt via **370-1(Def)**: $R(1+n) = \phi[R(n) \times f[\{1+n\}]]$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$(R$ ist **ana3** von $q, f, \phi) \wedge (f, \phi$ Funktion$)\ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots n \ldots \in \mathsf{dom}\, R$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\exists \Omega : R(n) = \{\Omega\}$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots f \ldots$ Funktion$\ldots$"
folgt via **259-16**: $f[\{1+n\}] = \{f(1+n)\}$.

`1.4:` Aus `VS` gleich "$\ldots \phi$ Funktion$\ldots$"
folgt via **259-16**: $\phi[\{(\Omega, f(1+n))\}] = \{\phi((\Omega, f(1+n)))\}$.

`2:` Aus `1.2`
folgt: $R(n) = \{\Omega\}$.

`3:` $$R(1+n) \overset{1.1}{=} \phi[R(n) \times f[\{1+n\}]] \overset{2}{=} \phi[\{\Omega\} \times f[\{1+n\}]] \overset{1.3}{=} \phi[\{\Omega\} \times \{f(1+n)\}] \overset{\mathbf{307-8}}{=} \phi[\{(\Omega, f(1+n))\}] \overset{1.4}{=} \{\phi((\Omega, f(1+n)))\} = \{\Omega{}_\_\phi{}_\_f(1+n)\}.$$

`4:` Aus `1.2` und
aus `3`
folgt: $\exists \Omega : (R(n) = \{\Omega\}) \wedge (R(1+n) = \{\Omega{}_\_\phi{}_\_f(1+n)\})$.

□

372-9. Der Focus ist nun auf $\mathtt{rf3}q\phi f$, f,ϕ Funktion, gerichtet.

372-9(Satz)

a) $\mathtt{rf3}qEx$ *Menge.*

b) $0 \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf3}qEx)$.

c) $0 \neq \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf3}qEx)$.

d) *Aus* "$n, 1+n \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf3}qEx)$"
folgt "$\mathtt{rf3}qEx(1+n) = E[\mathtt{rf3}qEx(n) \times x[\{1+n\}]]$".

e) *Aus* "f,ϕ *Funktion*" *folgt* "$\mathsf{dom}\,(\mathtt{rf3}q\phi f) = \mathbb{N}$".

Beweis **372-9**

`RECH`-**Notation**.

---

abc)

1: Via **370-9** gilt: $\mathtt{rf3}qEx$ ist **ana3** von q, x, E.

2.a): Aus 1"$\mathtt{rf3}qEx$ ist **ana3** von q, x, E"
folgt via **370-3**: $\mathtt{rf3}qEx$ Menge.

2.b): Aus 1"$\mathtt{rf3}qEx$ ist **ana3** von q, x, E"
folgt via **370-3**: $0 \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf3}qEx)$.

2.c): Aus 1"$\mathtt{rf3}qEx$ ist **ana3** von q, x, E"
folgt via **370-3**: $0 \neq \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf3}qEx)$.

d) VS gleich $n, 1+n \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf3}qEx)$.

1: Via **370-9** gilt: $\mathtt{rf3}qEx$ ist **ana3** von q, x, E.

2: Aus 1"$\mathtt{rf3}qEx$ ist **ana3** von q, x, E" und
aus VS gleich "$n, 1+n \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf3}qEx)$"
folgt via **370-1(Def)**: $\mathtt{rf3}qEx(1+n) = E[\mathtt{rf3}qEx(n) \times x[\{1+n\}]]$.

<u>Beweis **372-9**</u> `e)` `VS` gleich f, ϕ Funktion.

`1.1:` Via **370-9** gilt: $\mathsf{dom}\,(\mathtt{rf}3q\phi f) \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $0 \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf}3qx\phi)$.

$\boxed{\mathtt{Thema2}}$ $\alpha \in \mathbb{N} \cap \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf}3q\phi f)$.

`3.1:` Via **370-9** gilt: $\mathtt{rf}3q\phi f$ ist **ana3** von q, f, ϕ.

`3.2:` Aus `VS` gleich "$f \ldots$ Funktion"
folgt via **259-16**: $f[\{1+\alpha\}] = \{f(1+\alpha)\}$.

`3.3:` Aus `Thema2`"$\alpha \in \mathbb{N} \cap \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf}3q\phi f)$"
folgt via **folk**: $\alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf}3q\phi f)$.

`4:` Aus `3.1`"$\mathtt{rf}3q\phi f$ ist **ana3** von q, f, ϕ",
aus `VS` gleich "f, ϕ Funktion" und
aus `3.3`"$\alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf}2q\phi f)$"
folgt via **372-8**: $\exists \Omega : \mathtt{rf}3q\phi f(\alpha) = \{\Omega\}$.

`5.1:` Aus `4`
folgt: $\mathtt{rf}3q\phi f(\alpha) = \{\Omega\}$.

`5.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots \phi$ Funktion"
folgt via **259-16**: $\phi[\{(\Omega, f(1+\alpha))\}] = \{\phi((\Omega, f(1+\alpha)))\}$.

`6:` $$\phi[\mathtt{rf}3q\phi f(\alpha) \times f[\{\alpha\}]] \stackrel{5.1}{=} \phi[\{\Omega\} \times f[\{1+\alpha\}]] \stackrel{3.2}{=} \phi[\{\Omega\} \times \{f(1+\alpha)\}] \stackrel{\mathbf{307-8}}{=} \phi[\{(\Omega, f(1+\alpha))\}] \stackrel{5.2}{=} \{\phi((\Omega, f(1+\alpha)))\}.$$

`7:` Via **SingeltonAxiom** gilt: $\{\phi((\Omega, f(1+\alpha)))\}$ Menge.

`8:` Aus `6`"$\phi[\mathtt{rf}3q\phi f(\alpha) \times f[\{1+\alpha\}]] = \ldots = \{\phi((\Omega, f(1+\alpha)))\}$" und
aus `7`
folgt: $\phi[\mathtt{rf}3q\phi(\alpha) \times f[\{1+\alpha\}]]$ Menge.

`9:` Aus `3.1`"$\mathtt{rf}3q\phi f$ ist **ana3** von q, f, ϕ",
aus `3.3`"$\alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf}3q\phi f)$" und
aus `8`"$\phi[\mathtt{rf}3q\phi f(\alpha) \times f[\{1+\alpha\}]]$ Menge"
folgt via **370-10**: $1+\alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf}3q\phi f)$.

Ergo `Thema2`:

`A1`	"$\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N} \cap \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf}3q\phi f)) \Rightarrow (1+\alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf}3q\phi f))$"

...

<u>Beweis **372-9**</u> `e)` `VS` gleich f, ϕ Funktion.

...

`2:` Aus `1.2`"$0 \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf}3q\phi f)$" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N} \cap \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf}3q\phi f)) \Rightarrow (1 + \alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf}3q\phi f))$"
folgt via **IS**$\mathbb{N}$: $\mathbb{N} \subseteq \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf}3q\phi f)$.

`3:` Aus 2"$\mathbb{N} \subseteq \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf}3q\phi f)$" und
aus `1.1`"$\mathsf{dom}\,(\mathtt{rf}3q\phi f) \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$"
folgt via **308-6**: $\mathsf{dom}\,(\mathtt{rf}3q\phi f) = \mathbb{N}$.

$\square$

372-10. Die rekursive Idee hinter **ana3** von $q, f, \Box$ wird nun sichtbar.

372-10(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow\!)$ $q \in D$.

$\rightarrow\!)$ $f, \Box$ *Funktion.*

$\rightarrow\!)$ $\Box$ *Algebra auf* D.

$\rightarrow\!)$ $n \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

$\rightarrow\!)$ $n \setminus \{0\} \subseteq \mathsf{dom}\, f$.

$\rightarrow\!)$ $f[n \setminus \{0\}] \subseteq D$.

Dann folgt:

a) $\forall \alpha : (\alpha \in n) \Rightarrow (\exists \Omega : (\Omega \in D) \wedge (\mathtt{rf3}q\Box f(\alpha) = \{\Omega\}))$.

b) $\forall \alpha : (\alpha, 1+\alpha \in n) \Rightarrow (\exists \Omega : (\Omega \in D) \wedge (\mathtt{rf3}q\Box f(\alpha) = \{\Omega\})$
$\wedge(\mathtt{rf3}q\Box f(1+\alpha) = \{\Omega{\_}\Box{\_}f(1+\alpha)\}))$.

ALG.RECH-**Notation**.

Beweis **372-10**

$\mathsf{18.6}(x, y) \;= \{\omega : x(\omega) \in y\}$

---

a)

1.1: Via **370-9** gilt: $\mathtt{rf3}q\Box f(0) = \{q\}$.

1.2: Aus $\rightarrow\!)$ "$\dots \Box$ Funktion" und aus $\rightarrow\!)$ "$\Box$ Algebra auf D" folgt via **370-12**: $(D \times D \subseteq \mathsf{dom}\, \Box) \wedge (\Box[D \times D] \subseteq D)$.

2: Aus $\rightarrow\!)$ "$q \in D$" folgt via **27-3**: $\{q\} \in D_{\text{sngltn}}$.

3: Aus 1.1 und aus 2 folgt: $\mathtt{rf3}q\Box f(0) \in D_{\text{sngltn}}$.

4: Aus 3 "$\mathtt{rf3}q\Box f(0) \in D_{\text{sngltn}}$" folgt via **372-7**: $0 \in \{\omega : \mathtt{rf3}q\Box f(\omega) \in D_{\text{sngltn}}\}$.

<u>Beweis **372-10**</u> `a)` ...

$\boxed{\texttt{Thema5}}$

$$(\beta \in \{\omega : \texttt{rf3}q\Box f(\omega) \in D_{\text{sngltn}}\}) \wedge (1+\beta \in n).$$

`6.1:` Aus `Thema5`"$\beta \in \{\omega : \texttt{rf3}q\Box f(\omega) \in D_{\text{sngltn}}\} \ldots$"
folgt: $\texttt{rf3}q\Box f(\beta) \in D_{\text{sngltn}}$.

`6.2:` Aus `Thema5`"$\ldots 1+\beta \in n$" und
aus →) "$n \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$"
folgt via **337-9**: $1+\beta \in \mathbb{N}$.

`6.3:` Aus →) "$f, \Box$ Funktion"
folgt via **372-9**: $\mathsf{dom}\,(\texttt{rf3}q\Box f) = \mathbb{N}$.

`6.4:` Aus →) "$f \ldots$ Funktion"
folgt via **259-16**: $f[\{1+\beta\}] = \{f(1+\beta)\}$.

`7.1:` Aus `6.1`"$\texttt{rf3}q\Box f(\beta) \in D_{\text{sngltn}}$"
folgt via **344-3**: $\beta \in \mathsf{dom}\,(\texttt{rf3}q\Box f)$.

`7.2:` Aus `6.1`"$\texttt{rf3}q\Box f(\beta) \in D_{\text{sngltn}}$"
folgt via **27-3**: $\exists \Omega : (\Omega \in D) \wedge (\texttt{rf3}q\Box f(\beta) = \{\Omega\})$.

`7.3:` Aus `6.2` und
aus `6.3`
folgt: $1+\beta \in \mathsf{dom}\,(\texttt{rf3}q\Box f)$.

...

...

Beweis **372-10** `a)` ...

`Thema5`

$$(\beta \in \{\omega : \mathtt{rf3}q\Box f(\omega) \in D_{\text{sngltn}}\}) \wedge (1 + \beta \in n).$$

...

`8.1:` Aus `7.1`“$\beta \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf3}q\Box f)$” und
aus `7.3`“$1 + \beta \in \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf3}q\Box f)$”
folgt via **372-9**:
$$\mathtt{rf3}q\Box f(1 + \beta) = \Box[\mathtt{rf3}q\Box f(\beta) \times f[\{1 + \beta\}]].$$

`8.2:` Aus `7.2`
folgt: $\mathtt{rf3}q\Box f(\beta) = \{\Omega\}.$

`8.3:` Aus →)“... $\Box$ Funktion”
folgt via **259-16**:
$$\Box[\{(\Omega, f(1 + \beta))\}] = \{\Box((\Omega, f(1 + \beta)))\}.$$

`8.4:` Aus `7.1` und
aus `6.3`
folgt: $\beta \in \mathbb{N}.$

`9.1:` $$\mathtt{rf3}q\Box f(1 + \beta) \stackrel{8.1}{=} \Box[\mathtt{rf3}q\Box f(\beta) \times f[\{1 + \beta\}]]$$
$$\stackrel{8.2}{=} \Box[\{\Omega\} \times f[\{1 + \beta\}] \stackrel{6.4}{=} \Box[\{\Omega\} \times \{f(1 + \beta)\}]$$
$$\stackrel{\mathbf{307-8}}{=} \Box[\{(\Omega, f(1 + \beta))\}]) \stackrel{8.3}{=} \{\Box((\Omega, f(1 + \beta)))\}.$$

`9.2:` Aus `8.4`“$\beta \in \mathbb{N}$”
folgt via **307-2**: $0 \neq 1 + \beta.$

`10:` Aus `Thema5`“... $1 + \beta \in n$” und
aus `9.2`“$0 \neq 1 + \beta$”
folgt via **folk**: $1 + \beta \in n \setminus \{0\}.$

`11:` Aus →)“f ... Funktion”,
aus `10`“$1 + \beta \in n \setminus \{0\}$” und
aus →)“$n \setminus \{0\} \subseteq \mathsf{dom}\, f$”
folgt via **18-27**: $f(1 + \beta) \in f[n \setminus \{0\}].$

`12:` Aus `11`“$f(1 + \beta) \in f[n \setminus \{0\}]$” und
aus →)“$f[n \setminus \{0\}] \subseteq D$”
folgt via **folk**: $f(1 + \beta) \in D.$

...

...

Beweis **372-10** `a)` ...

$\boxed{\texttt{Thema5}}$

$$(\beta \in \{\omega : \texttt{rf3}q\Box f(\omega) \in D_{\text{sngltn}}\}) \wedge (1 + \beta \in n).$$

...

`13:` Aus `7.2`"$\ldots \Omega \in D \ldots$" und
aus `12`"$f(1+\beta) \in D$"
folgt via **folk**: $(\Omega, f(1+\beta)) \in D \times D$.

`14:` Aus →)"$\ldots \Box$ Funktion",
aus `13`"$(\Omega, f(1+\beta)) \in D \times D$" und
aus `1.2`"$D \times D \subseteq \mathsf{dom}\,\Box \ldots$"
folgt via **18-27**: $\Box((\Omega, f(1+\beta))) \in \Box[D \times D]$.

`15:` Aus `14`"$\Box((\Omega, f(1+\beta))) \in \Box[D \times D]$" und
aus `1.2`"$\ldots \Box[D \times D] \subseteq D$"
folgt via **folk**: $\Box((\Omega, f(1+\beta))) \in D$.

`16:` Aus `15`"$\Box((\Omega, f(1+\beta))) \in D$"
folgt via **27-3**: $\{\Box((\Omega, f(1+\beta)))\} \in D_{\text{sngltn}}$.

`17:` Aus `9.1`"$\texttt{rf3}q\Box f(1+\beta) = \ldots = \{\Box((\Omega, f(1+\beta)))\}$" und
aus `16`
folgt: $\texttt{rf3}q\Box f(1+\beta) \in D_{\text{sngltn}}$.

`18:` Aus `17`"$\texttt{rf3}q\Box f(1+\beta) \in D_{\text{sngltn}}$"
folgt via **372-7**: $1 + \beta \in \{\omega : \texttt{rf3}q\Box f(\omega) \in D_{\text{sngltn}}\}$.

Ergo `Thema5`:

`A1`	"$\forall \beta : ((\beta \in \{\omega : \texttt{rf3}q\Box f(\omega) \in D_{\text{sngltn}}\}) \wedge (1 + \beta \in n)) \Rightarrow (1 + \beta \in \{\omega : \texttt{rf3}q\Box f(\omega) \in D_{\text{sngltn}}\})$"

...

<u>Beweis **372-10** `a)` ...</u>

`6:` Aus →) “ $n \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$ ”,
aus `4` “ $0 \in \{\omega : \mathtt{rf3}q\square f(\omega) \in D_{\text{sngltn}}\}$ ” und
aus `A1` gleich “ $\forall \beta : ((\beta \in \{\omega : \mathtt{rf3}q\square f(\omega) \in D_{\text{sngltn}}\}) \wedge (1 + \beta \in n))$
$\Rightarrow (1 + \beta \in \{\omega : \mathtt{rf3}qfphi(\beta) \in D_{\text{sngltn}}\})$ ”
folgt via **IS** $\{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$: $n \subseteq \{\omega : \mathtt{rf3}q\square f(\omega) \in D_{\text{sngltn}}\}$.

> `Thema7` $\alpha \in n$.
>
> `8:` Aus `Thema7` “ $\alpha \in n$ ” und
> aus `6` “ $n \subseteq \{\omega : \mathtt{rf3}q\square f(\omega) \in D_{\text{sngltn}}\}$ ”
> folgt via **folk**: $\alpha \in \{\omega : \mathtt{rf3}q\square f(\omega) \in D_{\text{sngltn}}\}$.
>
> `9:` Aus `8`
> folgt: $\mathtt{rf3}q\square f(\alpha) \in D_{\text{sngltn}}$.
>
> `10:` Aus `9` “ $\mathtt{rf3}q\square f(\alpha) \in D_{\text{sngltn}}$ ”
> folgt via **27-3**: $\exists \Omega : (\Omega \in D) \wedge (\mathtt{rf3}q\square f(\alpha) = \{\Omega\})$.

Ergo `Thema7`: $\forall \alpha : (\alpha \in n) \Rightarrow (\exists \Omega : (\Omega \in D) \wedge (\mathtt{rf3}q\square f(\alpha) = \{\Omega\}))$.

<u>Beweis **372-10**</u> `b)`

$\boxed{\texttt{Thema0}}$ $\alpha, 1+\alpha \in n.$

`1.1:` Aus →) “ $q \in D$ ” ,
aus →) “ $f, \Box$ Funktion ” ,
aus →) “ $\Box$ Algebra auf D ” ,
aus →) “ $n \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$ ” ,
aus →) “ $n \setminus \{0\} \subseteq \mathsf{dom}\, f$ ” ,
aus →) “ $f[n \setminus \{0\}] \subseteq D$ ” und
aus `Thema0` “ $\alpha \ldots \in n$ ”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$$\exists \Omega : (\Omega \in D) \wedge (\texttt{rf}3q\Box f(\alpha) = \{\Omega\}).$$

`1.2:` Aus `Thema0` “ $\alpha, 1+\alpha \in n$ ” und
aus →) “ $n \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$ ”
folgt via **337-9**: $\alpha, 1+\alpha \in \mathbb{N}.$

`1.3:` Aus →) “ $f, \Box$ Funktion ”
folgt via **372-9**: $\mathsf{dom}\,(\texttt{rf}3q\Box f) = \mathbb{N}.$

`1.4:` Aus →) “ $f \ldots$ Funktion ”
folgt via **259-16**: $f[\{1+\alpha\}] = \{f(1+\alpha)\}.$

`1.5:` Aus →) “ $\ldots \Box$ Funktion ”
folgt via **259-16**:
$$\Box[\{(\Omega, f(1+\alpha))\}] = \{\Box((\Omega, f(1+\alpha)))\}.$$

`2.1:` Aus `1.1`
folgt: $\texttt{rf}3q\Box f(\alpha) = \{\Omega\}.$

`2.2:` Aus `1.2` und
aus `1.3`
folgt: $\alpha, 1+\alpha \in \mathsf{dom}\,(\texttt{rf}3q\Box f).$

`3:` Aus `2.2` “ $\alpha, 1+\alpha \in \mathsf{dom}\,(\texttt{rf}3q\Box f)$ ”
folgt via **372-9**:
$$\texttt{rf}3q\Box f(1+\alpha) = \Box[\texttt{rf}3q\Box f(\alpha) \times f[\{1+\alpha\}]].$$

...

...

Beweis **372-10** `b)` ...

$\boxed{\texttt{Thema0}}$ $\alpha, 1+\alpha \in n.$

...

`4:` $\texttt{rf3}q\Box f(1+\alpha) \stackrel{3}{=} \Box[\texttt{rf3}q\Box f(\alpha) \times f[\{1+\alpha\}]]$

$\stackrel{2.1}{=} \Box[\{\Omega\} \times f[\{1+\alpha\}]]$

$\stackrel{1.4}{=} \Box[\{\Omega\} \times \{f(1+\alpha)\}] \stackrel{\mathbf{307-8}}{=} \Box[\{(\Omega, f(1+\alpha))\}]$

$\stackrel{1.5}{=} \{\Box((\Omega, f(1+\alpha)))\}\} = \{\Omega\_\Box\_f(1+\alpha)\}.$

`5:` Aus `1.1`“$\exists\Omega : (\Omega \in D) \wedge (\texttt{rf3}q\Box f(\alpha) = \{\Omega\})\ldots$” und aus `4` folgt: $\exists\Omega : (\Omega \in D) \wedge (\texttt{rf3}q\Box f(\alpha) = \{\Omega\})$
$\wedge(\texttt{rf3}q\Box f(1+\alpha) = \{\Omega\_\Box\_f(1+\alpha)\}).$

Ergo `Thema0`: $\forall\alpha : (\alpha, 1+\alpha \in n) \Rightarrow (\exists\Omega : (\Omega \in D) \wedge (\texttt{rf3}q\Box f(\alpha) = \{\Omega\})$
$\wedge(\texttt{rf3}q\Box f(1+\alpha) = \{\Omega\_\Box\_f(1+\alpha)\})).$

$\Box$

372-11. Die "$n = \mathbb{N}$-Version" von **372-10** wird nachgereicht.

<u>**372-11(Satz)**</u> *Es gelte:*

$\rightarrow$) $q \in D$.

$\rightarrow$) $f, \Box$ *Funktion.*

$\rightarrow$) $\Box$ *Algebra auf* D.

$\rightarrow$) $\mathbb{N} \setminus \{0\} \subseteq \mathsf{dom}\, f$.

$\rightarrow$) $f[\mathbb{N} \setminus \{0\}] \subseteq D$.

$\rightarrow$) $a \in \mathbb{N}$.

Dann folgt: "$\exists \Omega : (\Omega \in D) \wedge (\mathtt{rf}3q\Box f(a) = \{\Omega\})$
$\wedge(\mathtt{rf}3q\Box f(1+a) = \{\Omega\_\Box\_f(1+a)\})$".

<u>`RECH`-**Notation**</u>.

<u>Beweis **372-11**</u>

`1.1`: Aus **159-9**"$\mathbb{N}$ Menge"
folgt via **folk**: $\mathbb{N} \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

`1.2`: Aus $\rightarrow$)"$a \in \mathbb{N}$"
folgt via **folk**: $1 + a \in \mathbb{N}$.

`2`: Aus $\rightarrow$)"$q \in D$",
aus $\rightarrow$)"$f, \Box$ Funktion",
aus $\rightarrow$)"$\Box$ Algebra auf D",
aus `1.1`"$\mathbb{N} \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$",
aus $\rightarrow$)"$\mathbb{N} \setminus \{0\} \subseteq \mathsf{dom}\, f$",
aus $\rightarrow$)"$f[\mathbb{N} \setminus \{0\}] \subseteq D$",
aus $\rightarrow$)"$a \in \mathbb{N}$" und
aus `1.2`"$1 + a \in \mathbb{N}$"
folgt via **372-10**:
$\exists \Omega : (\Omega \in D) \wedge (\mathtt{rf}3q\Box f(a) = \{\Omega\}) \wedge (\mathtt{rf}3q\Box f(1+a) = \{\Omega\_\Box\_f(1+a)\})$.

$\Box$

Mengenlehre: bigcup. bigcap.

Ersterstellung: 14/01/16 **Letzte Änderung: 15/01/16**

373-1. Es wird mit den erwarteten Definitionen begonnen.

373-1(Definition)

1) bigcup

$$= 373.0() = \{(\lambda, \bigcup \lambda) : \lambda \in \mathcal{U}\}$$
$$= \{\omega : (\exists \Omega : \omega = (\Omega, \bigcup \Omega))\}.$$

2) bigcap

$$= 373.1() = \{(\lambda, \bigcap \lambda) : \lambda \in \mathcal{U}\}$$
$$= \{\omega : (\exists \Omega : \omega = (\Omega, \bigcap \Omega))\}.$$

373-2. Das Element-Sein in $\mathsf{bigcup}, \mathsf{bigcap}$ nimmt viel vorweg nehmende Form an.

373-2(Satz)

a) *Aus* "$w \in \mathsf{bigcup}$" *folgt* "$\exists \Omega : (\Omega \text{ Menge}) \wedge (w = (\Omega, \bigcup \Omega))$".

b) *Aus* "$w \in \mathsf{bigcap}$" *folgt* "$\exists \Omega : (0 \neq \Omega \text{ Menge}) \wedge (w = (\Omega, \bigcap \Omega))$".

c) *Aus* "$(p, q) \in \mathsf{bigcup}$" *folgt* "$p$ *Menge*" *und* "$q = \bigcup p$".

d) *Aus* "$(p, q) \in \mathsf{bigcap}$" *folgt* "$0 \neq p$ *Menge*" *und* "$q = \bigcap p$".

e) *Aus* "x *Menge*" *folgt* "$(x, \bigcup x) \in \mathsf{bigcup}$".

f) *Aus* "$0 \neq x$ *Menge*" *folgt* "$(x, \bigcap x) \in \mathsf{bigcap}$".

g) *Aus* "p *Menge*" *folgt* "$(\{p\}, p) \in \mathsf{bigcup}$" *und* "$(\{p\}, p) \in \mathsf{bigcap}$".

Beweis **373-2** `a)` `VS` gleich $w \in \mathsf{bigcup}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$w \in \mathsf{bigcup}$"
folgt via **ElementAxiom**: w Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$w \in \mathsf{bigcup}$"
folgt **p.def.**: $\exists \Omega : w = (\Omega, \bigcup \Omega)$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`"$\ldots w = (\Omega, \bigcup \Omega)$"
folgt: $(\Omega, \bigcup \Omega)$ Menge.

`3:` Aus `2`"$(\Omega, \bigcup \Omega)$ Menge"
folgt via **folk**: Ω Menge.

`4:` Aus `1.2` und
aus `3`
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \text{ Menge}) \wedge (w = (\Omega, \bigcup \Omega))$.

<u>Beweis **373-2**</u> `b)` `VS` gleich $w \in \mathsf{bigcap}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$w \in \mathsf{bigcap}$"
folgt via **ElementAxiom**: w Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$w \in \mathsf{bigcap}$"
folgt **p.def.**: $\exists \Omega : w = (\Omega, \bigcap \Omega)$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`"$\ldots w = (\Omega, \bigcap \Omega)$"
folgt: $(\Omega, \bigcap \Omega)$ Menge.

`3:` Aus `2`"$(\Omega, \bigcap \Omega)$ Menge"
folgt via **folk**: $\Omega, \bigcap \Omega$ Menge.

`4:` Aus `3`"$\ldots \bigcap \Omega$ Menge"
folgt via **folk**: $0 \neq \Omega$.

`5:` Aus `1.2`,
aus `3`"$\Omega \ldots$ Menge" und
aus `4`
folgt: $\exists \Omega : (0 \neq \Omega \text{ Menge}) \wedge (w = (\Omega, \bigcap \Omega))$.

`c)` `VS` gleich $(p, q) \in \mathsf{bigcup}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$(p, q) \in \mathsf{bigcup}$"
folgt via **ElementAxiom**: (p, q) Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$(p, q) \in \mathsf{bigcup}$"
folgt via **folk**: $\boxed{p \text{ Menge}}$

`1.3:` Aus `VS` gleich "$(p, q) \in \mathsf{bigcup}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$\exists \Omega : (\Omega \text{ Menge}) \wedge ((p, q) = (\Omega, \bigcup \Omega))$.

`2:` Aus `1.3`"$\ldots (p, q) = (\Omega, \bigcup \Omega)$" und
aus `1.1`"(p, q) Menge"
folgt via **IGP**: $(p = \Omega) \wedge (q = \bigcup \Omega)$.

`3:` Aus `2`
folgt: $\boxed{q = \bigcup p}$

<u>Beweis **373-2**</u> `d)` `VS` gleich $(p,q) \in \mathsf{bigcap}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$(p,q) \in \mathsf{bigcap}$"
folgt via **ElementAxiom**: (p,q) Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$(p,q) \in \mathsf{bigcap}$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`:
$\exists \Omega : (0 \neq \Omega \text{ Menge}) \wedge ((p,q) = (\Omega, \bigcap \Omega))$.

`2:` Aus `1.3`"$\ldots (p,q) = (\Omega, \bigcap \Omega)$" und
aus `1.1`"(p,q) Menge"
folgt via **IGP**: $(p = \Omega) \wedge (q = \bigcap \Omega)$.

`3.1:` Aus `2`"$p = \Omega \ldots$" und
aus `1.2`"$\ldots 0 \neq \Omega$ Menge$\ldots$"
folgt. $\boxed{0 \neq p \text{ Menge}}$

`3.2:` Aus `2`
folgt: $\boxed{q = \bigcap p}$

`e)` `VS` gleich x Menge.

`1.1:` Aus `VS` gleich "x Menge"
folgt: $\exists \Omega : x = \Omega$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "x Menge"
folgt via $\bigcup$**Axiom**: $\bigcup x$ Menge.

`2.1:` Aus `1.1`"$\ldots x = \Omega$"
folgt: $\bigcup x = \bigcup \Omega$.

`2.2:` Aus `VS` gleich "x Menge" und
aus `1.2`"$\bigcup x$ Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: $(x, \bigcup x)$ Menge.

`3:` Aus `1.1`"$\ldots x = \Omega$" und
aus `2.1`"$\bigcup x = \bigcup \Omega$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(x, \bigcup x) = (\Omega, \bigcup \Omega)$.

`4:` Aus `1.1`"$\exists \Omega \ldots$" und
aus `3`
folgt: $\exists \Omega : (x, \bigcup x) = (\Omega, \bigcup \Omega)$.

...

<u>Beweis **373-2**</u> `e)` `VS` gleich x Menge.

...

`5:` Aus `4`“$\exists\Omega : (x, \bigcup x) = (\Omega, \bigcup\Omega)$” und
aus `2.2`“$(x, \bigcup x)$ Menge”
folgt **p.def.**: $(x, \bigcup x) \in \mathsf{bigcup}$.

`f)` `VS` gleich $0 \neq x$ Menge.

`1.1:` Aus `VS` gleich “x Menge”
folgt: $\exists\Omega : x = \Omega$.

`1.2:` Aus `VS` gleich “$0 \neq x \ldots$”
folgt via **folk**: $\bigcap x$ Menge.

`2.1:` Aus `1.1`“$\ldots x = \Omega$”
folgt: $\bigcap x = \bigcap\Omega$.

`2.2:` Aus `VS` gleich “$\ldots x$ Menge” und
aus `1.2`“$\bigcap x$ Menge”
folgt via **PaarAxiom I**: $(x, \bigcap x)$ Menge.

`3:` Aus `1.1`“$\ldots x = \Omega$” und
aus `2.1`“$\bigcap x = \bigcap\Omega$”
folgt via **PaarAxiom I**: $(x, \bigcap x) = (\Omega, \bigcap\Omega)$.

`4:` Aus `1.1`“$\exists\Omega \ldots$” und
aus `3`
folgt: $\exists\Omega : (x, \bigcap x) = (\Omega, \bigcap\Omega)$.

`5:` Aus `4`“$\exists\Omega : (x, \bigcap x) = (\Omega, \bigcap\Omega)$” und
aus `2.2`“$(x, \bigcap x)$ Menge”
folgt **p.def.**: $(x, \bigcap x) \in \mathsf{bigcap}$.

<u>Beweis</u> **373-2** `g)` `VS` gleich p Menge.

`1.1:` Aus `VS` gleich "p Menge"
folgt via **folk**: $0 \neq \{p\}$.

`1.2:` Via **SingeltonAxiom** gilt: $\{p\}$ Menge.

`1.3:` Aus `VS` gleich "p Menge"
folgt via **1-14**: $\bigcup\{p\} = p$.

`1.4:` Aus `VS` gleich "p Menge"
folgt via **1-14**: $\bigcap\{p\} = p$.

`2.1:` Aus `1.2`"$\{p\}$ Menge"
folgt via des bereits bewiesenen `e)`: $(\{p\}, \bigcup\{p\}) \in \mathsf{bigcup}$.

`2.2:` Aus `1.1`"$0 \neq \{p\}$" und
aus `1.2`"$\{p\}$ Menge"
folgt via des bereits bewiesenen `f)`: $(\{p\}, \bigcap\{p\}) \in \mathsf{bigcap}$.

`2.3:` Aus `1.3`"$\bigcup\{p\} = p$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\{p\}, \bigcup\{p\}) = (\{p\}, p)$.

`2.4:` Aus `1.4`"$\bigcap\{p\} = p$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\{p\}, \bigcap\{p\}) = (\{p\}, p)$.

`3.1:` Aus `2.1` und
aus `2.3`
folgt: $\boxed{(\{p\}, p) \in \mathsf{bigcup}}$

`3.2:` Aus `2.2` und
aus `2.4`
folgt: $\boxed{(\{p\}, p) \in \mathsf{bigcap}}$

□

373-3. Dass es sich bei $\mathcal{U}\setminus\{0\}$ um eine Unmenge handelt beruht auf allgemeineren Prinzipien.

373-3(Satz)

a) *"$x \setminus \{p\}$ Menge" genau dann, wenn "x Menge".*

b) *"$x \setminus \{p\}$ Unmenge" genau dann, wenn "x Unmenge".*

c) *$\mathcal{U} \setminus \{p\}$ Unmenge.*

Beweis **373-3** a) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich $x \setminus \{p\}$ Menge.

1: Via **SingeltonAxiom** gilt: $\{p\}$ Menge.

2: Aus VS gleich "$x \setminus \{p\}$ Menge" und
aus 1 "$\{p\}$ Menge"
folgt via **213-10**: x Menge.

a) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich x Menge.

Aus VS gleich "x Menge"
folgt via **94-6**: $x \setminus \{p\}$ Menge.

b)

1: Via des bereits bewiesenen a) gilt: $(x \setminus \{p\} \text{ Menge}) \Leftrightarrow (x \text{ Menge})$.

2: Aus 1
folgt: $(\neg(x \setminus \{p\} \text{ Menge})) \Leftrightarrow (\neg(x \text{ Menge}))$.

3: Aus 2
folgt: $(x \setminus \{p\} \text{ Unmenge}) \Leftrightarrow (x \text{ Unmenge})$.

c)

Aus 0$\mathcal{U}$**Axiom** "$\mathcal{U}$ Unmenge"
folgt via des bereits bewiesenen b): $\mathcal{U} \setminus \{p\}$ Unmenge.

□

373-4. $\mathsf{bigcup}, \mathsf{bigcap}$ sind Funktionen mit erwarteten Eigenschaften. Einzig die Gleichung $\mathsf{bigcap}(x) = \bigcap x$ für alle Mengen x ist ein wenig unerwartet.

373-4(Satz)

a) bigcup *Relation.*

b) bigcap *Relation.*

c) $\mathsf{dom}\,(\mathsf{bigcup}) = \mathcal{U}$.

d) $\mathsf{dom}\,(\mathsf{bigcap}) = \mathcal{U} \setminus \{0\}$.

e) bigcup *Unmenge.*

f) bigcap *Unmenge.*

g) $\mathsf{ran}\,(\mathsf{bigcup}) = \mathcal{U}$.

h) $\mathsf{ran}\,(\mathsf{bigcap}) = \mathcal{U}$.

i) bigcup *Funktion.*

j) bigcap *Funktion.*

k) "$\mathsf{bigcup}(x) = \bigcup x$" *genau dann, wenn* "$(x$ *Menge*$) \vee (\bigcup x = \mathcal{U})$".

l) "$\mathsf{bigcap}(x) = \bigcap x$" *genau dann, wenn* "$x$ *Menge*".

<u>Beweis **373-4**</u> `a)`

$\boxed{\texttt{Thema0}}$	$\alpha \in \mathsf{bigcup}.$
`1:` Aus `Thema0`“$\alpha \in \mathsf{bigcup}$” folgt via **373-2**:	$\exists \Omega : \alpha = (\Omega, \bigcup \Omega).$
`2:` Aus `1`“$\exists \Omega \ldots$” folgt:	$\exists \Phi : \Phi = \bigcup \Omega.$
`3:` Aus `2`“$\ldots \Phi = \bigcup \Omega$” folgt via **PaarAxiom I**:	$(\Omega, \Phi) = (\Omega, \bigcup \Omega).$
`4:` Aus `3` und aus `1`“$\ldots \alpha = (\Omega, \bigcup \Omega)$” folgt:	$\alpha = (\Omega, \Phi).$
`5:` Aus `1`“$\exists \Omega \ldots$”, aus `2`“$\exists \Phi \ldots$” und aus `4` folgt:	$\exists \Omega, \Phi : \alpha = (\Omega, \Phi).$

Ergo `Thema0`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{bigcup}) \Rightarrow (\exists \Omega, \Phi : \alpha = (\Omega, \Phi)).$

Konsequenz via **folk**: bigcup Relation.

<u>Beweis **373-4**</u> `b)`

$\boxed{\texttt{Thema0}}$ $\alpha \in \mathsf{bigcap}$.

1: Aus `Thema0`"$\alpha \in \mathsf{bigcap}$"
folgt via **373-2**: $\exists \Omega : \alpha = (\Omega, \bigcap \Omega)$.

2: Aus 1"$\exists \Omega \ldots$"
folgt: $\exists \Phi : \Phi = \bigcap \Omega$.

3: Aus 2"$\ldots \Phi = \bigcap \Omega$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega, \Phi) = (\Omega, \bigcap \Omega)$.

4: Aus 3 und
aus 1"$\ldots \alpha = (\Omega, \bigcap \Omega)$"
folgt: $\alpha = (\Omega, \Phi)$.

5: Aus 1"$\exists \Omega \ldots$",
aus 2"$\exists \Phi \ldots$" und
aus 4
folgt: $\exists \Omega, \Phi : \alpha = (\Omega, \Phi)$.

Ergo `Thema0`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{bigcap}) \Rightarrow (\exists \Omega, \Phi : \alpha = (\Omega, \Phi))$.

Konsequenz via **folk**: bigcap Relation.

`c)`

$\boxed{\texttt{Thema0}}$ $\alpha \in \mathcal{U}$.

1: Aus `Thema0`"$\alpha \in \mathcal{U}$"
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

2: Aus 1"α Menge"
folgt via **373-2**: $(\alpha, \bigcup \alpha) \in \mathsf{bigcup}$.

3: Aus 2"$(\alpha, \bigcup \alpha) \in \mathsf{bigcup}$"
folgt via **folk**: $\alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{bigcup})$.

Ergo `Thema0`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U}) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{bigcup}))$.

Konsequenz via **folk**: $\mathsf{dom}\,(\mathsf{bigcup}) = \mathcal{U}$.

Beweis **373-4** `d)`

`Thema0.1` $\alpha \in \mathcal{U} \setminus \{0\}$.

1: Aus `Thema0` "$\alpha \in \mathcal{U} \setminus \{0\}$"
folgt via **332-1**: $0 \neq \alpha$ Menge.

2: Aus 1 "$0 \neq \alpha$ Menge"
folgt via **373-2**: $(\alpha, \bigcap \alpha) \in \mathsf{bigcap}$.

3: Aus 2 "$(\alpha, \bigcap \alpha) \in \mathsf{bigcap}$"
folgt via **folk**: $\alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{bigcap})$.

Ergo `Thema0.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U} \setminus \{0\}) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{bigcap}))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$\mathcal{U} \setminus \{0\} \subseteq \mathsf{dom}\,(\mathsf{bigcap})$"

`Thema0.2` $\alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{bigcap})$.

1: Aus `Thema0.2` "$\alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{bigcap})$"
folgt via **folk**: $\exists \Omega : (\alpha, \Omega) \in \mathsf{bigcap}$.

2: Aus 1 "$\ldots (\alpha, \Omega) \in \mathsf{bigcap}$"
folgt via **373-2**: $0 \neq \alpha$ Menge.

3: Aus 2 "$0 \neq \alpha$ Menge"
folgt via **332-1**: $\alpha \in \mathcal{U} \setminus \{0\}$.

Ergo `Thema0.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{bigcap})) \Rightarrow (\alpha \in \mathcal{U} \setminus \{0\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` | "$\mathsf{dom}\,(\mathsf{bigcap}) \subseteq \mathcal{U} \setminus \{0\}$"

1: Aus `A2` gleich "$\mathsf{dom}\,(\mathsf{bigcap}) \subseteq \mathcal{U} \setminus \{0\}$" und
aus `A1` gleich "$\mathcal{U} \setminus \{0\} \subseteq \mathsf{dom}\,(\mathsf{bigcap})$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathsf{dom}\,(\mathsf{bigcap}) = \mathcal{U} \setminus \{0\}$.

<u>Beweis **373-4**</u> `e)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `c)` gilt: $\mathsf{dom}\,(\mathsf{bigcup}) = \mathcal{U}$.

`2:` Aus `1`“$\mathsf{dom}\,(\mathsf{bigcup}) = \mathcal{U}$”
folgt via **7-9**: bigcup Unmenge.

`f)`

`1:` Via **373-3** gilt: $\mathcal{U} \setminus \{0\}$ Unmenge.

`2:` Via des bereits bewiesenen `d)` gilt: $\mathsf{dom}\,(\mathsf{bigcap}) = \mathcal{U} \setminus \{0\}$.

`3:` Aus `2` und
aus `1`
folgt: $\mathsf{dom}\,(\mathsf{bigcap})$ Unmenge.

`4:` Aus `3`“$\mathsf{dom}\,(\mathsf{bigcap})$ Unmenge”
folgt via **7-9**: bigcap Unmenge.

`g)`

`Thema0`	$\alpha \in \mathcal{U}$.
`1:` Aus `Thema0`“$\alpha \in \mathcal{U}$” folgt via **ElementAxiom**:	α Menge.
`2:` Aus `1`“α Menge” folgt via **373-2**:	$(\{\alpha\}, \alpha) \in \mathsf{bigcup}$.
`3:` Aus `2`“$(\{\alpha\}, \alpha) \in \mathsf{bigcup}$” folgt via **folk**:	$\alpha \in \mathsf{ran}\,(\mathsf{bigcup})$.

Ergo `Thema0`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U}) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{ran}\,(\mathsf{bigcup}))$.

Konsequenz via **folk**: $\mathsf{ran}\,(\mathsf{bigcup}) = \mathcal{U}$.

Beweis **373-4** `h)`

`Thema0` $\alpha \in \mathcal{U}$.

`1:` Aus `Thema0` "$\alpha \in \mathcal{U}$"
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`2:` Aus `1` "α Menge"
folgt via **373-2**: $(\{\alpha\}, \alpha) \in \mathsf{bigcap}$.

`3:` Aus `2` "$(\{\alpha\}, \alpha) \in \mathsf{bigcap}$"
folgt via **folk**: $\alpha \in \mathsf{ran}\,(\mathsf{bigcap})$.

Ergo `Thema0`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U}) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{ran}\,(\mathsf{bigcap}))$.

Konsequenz via **folk**: $\mathsf{ran}\,(\mathsf{bigcap}) = \mathcal{U}$.

`i)`

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: bigcup Relation.

`Thema1.2` $(\alpha, \beta), (\alpha, \gamma) \in \mathsf{bigcup}$.

`2.1:` Aus `Thema1.2` "$(\alpha, \beta) \ldots \in \mathsf{bigcup}$"
folgt via **373-2**: $\beta = \bigcup \alpha$.

`2.2:` Aus `Thema1.2` "$\ldots (\alpha, \gamma) \ldots \in \mathsf{bigcup}$"
folgt via **373-2**: $\gamma = \bigcup \alpha$.

`3:` Aus `2.1` und
aus `2.2`
folgt: $\beta = \gamma$.

Ergo `Thema1.2`: `A1` | "$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha, \beta), (\alpha, \gamma) \in \mathsf{bigcup}) \Rightarrow (\beta = \gamma)$"

`2:` Aus `1.1` "bigcup Relation" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha, \beta), (\alpha, \gamma) \in \mathsf{bigcup}) \Rightarrow (\beta = \gamma)$"
folgt via **18-18(Def)**: bigcup Funktion.

Beweis **373-4** `j)`

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: bigcap Relation.

> `Thema1.2` $(\alpha, \beta), (\alpha, \gamma) \in \mathsf{bigcap}$.
>
> `2.1:` Aus `Thema1.2`“$(\alpha, \beta) \ldots \in \mathsf{bigcap}$”
> folgt via **373-2**: $\beta = \bigcap \alpha$.
>
> `2.2:` Aus `Thema1.2`“$\ldots (\alpha, \gamma) \ldots \in \mathsf{bigcap}$”
> folgt via **373-2**: $\gamma = \bigcap \alpha$.
>
> `3:` Aus `2.1` und
> aus `2.2`
> folgt: $\beta = \gamma$.

Ergo `Thema1.2`: `A1` | “$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha, \beta), (\alpha, \gamma) \in \mathsf{bigcap}) \Rightarrow (\beta = \gamma)$”

`2:` Aus `1.1`“bigcap Relation” und
aus `A1` gleich “$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha, \beta), (\alpha, \gamma) \in \mathsf{bigcap}) \Rightarrow (\beta = \gamma)$”
folgt via **18-18(Def)**: bigcap Funktion.

`k)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $\mathsf{bigcup}(x) = \bigcup x$.

`1:` Es gilt: $(x \in \mathcal{U}) \vee (x \notin \mathcal{U})$.

`Fallunterscheidung`

> `1.1.Fall` $x \in \mathcal{U}$.
>
> Aus `1.1.Fall`“$x \in \mathcal{U}$”
> folgt via **ElementAxiom**: x Menge.

> `1.2.Fall` $x \notin \mathcal{U}$.
>
> `2:` Via des bereits bewiesenen `c)` gilt: $\mathsf{dom}\,(\mathsf{bigcup}) = \mathcal{U}$.
>
> `3:` Aus `2` und
> aus `1.2.Fall`
> folgt: $x \notin \mathsf{dom}\,(\mathsf{bigcup})$.
>
> `4:` Aus `3`“$x \notin \mathsf{dom}\,(\mathsf{bigcup})$”
> folgt via **folk**: $\mathsf{bigcup}(x) = \mathcal{U}$.
>
> `5:` Aus `4` und
> aus `VS`
> folgt: $\bigcup x = \mathcal{U}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $(x \text{ Menge}) \vee (\bigcup x = \mathcal{U})$.

<u>Beweis **373-4** `k)`</u> $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $(x \text{ Menge}) \vee (\bigcup x = \mathcal{U})$.

`Fallunterscheidung`

`0.1.Fall` x Menge.

`1:` Aus `0.1.Fall`“x Menge”
folgt via **373-2**: $(x, \bigcup x) \in \mathsf{bigcup}$.

`2:` Via des bereits bewiesenen `i)` gilt: bigcup Funktion.

`3:` Aus `1`“$(x, \bigcup x) \in \mathsf{bigcup}$” und
aus `2`“bigcup Funktion”
folgt via **folk**: $\mathsf{bigcup}(x) = \bigcup x$.

`0.2.Fall` $\bigcup x = \mathcal{U}$.

`1:` Aus `0.2.Fall`“$\bigcup x = \mathcal{U}$” und
aus $0\mathcal{U}$**Axiom**“$\mathcal{U}$ Unmenge”
folgt: $\bigcup x$ Unmenge.

`2:` Aus `1`“$\bigcup x$ Unmenge”
folgt via **331-4**: x Unmenge.

`3:` Aus `2`“x Unmenge”
folgt via **17-3**: $\mathsf{bigcup}(x) = \mathcal{U}$.

`4:` Aus `3` und
aus `0.2.Fall`
folgt: $\mathsf{bigcup}(x) = \bigcup x$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\mathsf{bigcup}(x) = \bigcup x$.

<u>Beweis</u> **373-4** `1)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $\mathsf{bigcap}(x) = \bigcap x$.

`1:` Es gilt: $(x \text{ Menge}) \vee (x \text{ Unmenge})$.

wf`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` x Unmenge.

`2.1:` Aus `1.1.Fall`“x Unmenge”
folgt via **17-3**: $\mathsf{bigcap}(x) = \mathcal{U}$.

`2.2:` Aus `1.1.Fall`“x Unmenge”
folgt via **0-17**: $0 \neq x$.

`3:` Aus `2.2`“$0 \neq x$”
folgt via **folk**: $\bigcap x$ Menge.

`4:` Aus `3`“$\bigcap x$ Menge”
folgt via **0-17**: $\bigcap x \neq \mathcal{U}$.

`5:` Aus `4` und
aus `2.1`
folgt: $\mathsf{bigcap}(x) \neq \bigcap x$.

`6:` Nach `VS` gilt: $\mathsf{bigcap}(x) = \bigcap x$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: x Menge.

<u>Beweis **373-4**</u> `l)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich x Menge.

`1:` Es gilt: $(x = 0) \vee (0 \neq x)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x = 0$.

`1.1:` Via **5-14** gilt: $0 \notin \mathcal{U} \setminus \{0\}$.

`1.2:` Aus **1-14**“$\bigcap 0 = \mathcal{U}$” und aus `1.1.Fall` folgt: $\bigcap x = \mathcal{U}$.

`1.3:` Via des bereits bewiesenen `d)` gilt: $\mathsf{dom}\,(\mathsf{bigcap}) = \mathcal{U} \setminus \{0\}$.

`2:` Aus `1.1` und aus `1.3` folgt: $0 \notin \mathsf{dom}\,(\mathsf{bigcap})$.

`3:` Aus `2`“$0 \notin \mathsf{dom}\,(\mathsf{bigcap})$” folgt via **folk**: $\mathsf{bigcap}(0) = \mathcal{U}$.

`4:` Aus `3` und aus `1.1.Fall` folgt: $\mathsf{bigcap}(x) = \mathcal{U}$.

`5:` Aus `4` und aus `1.2` folgt: $\mathsf{bigcap}(x) = \bigcap x$.

`1.2.Fall` $0 \neq x$.

`2.1:` Aus `1.2.Fall`“$0 \neq x$” und aus `VS` gleich “x Menge” folgt via **373-2**: $(x, \bigcap x) \in \mathsf{bigcap}$.

`2.2:` Via des bereits bewiesenen `j)` gilt: bigcap Funktion.

`3:` Aus `2.2`“bigcap Funktion” und aus `2.1`“$(x, \bigcap x) \in \mathsf{bigcap}$” folgt via **folk**: $\mathsf{bigcap}(x) = \bigcap x$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\mathsf{bigcap}(x) = \bigcap x$.

□

373-5. Zu Beginn des LWs war ich von den Operationen der Klassen-Algebra überzeugt. Jetzt bin ich weniger davon eingenommen. Siehe **373-5** `b)`.

373-5(Satz)

`a)` *Aus* "$\mathsf{dom}\, x = \mathcal{U}$" *und* "$\mathsf{dom}\, y = D$" *folgt* "$\mathsf{dom}\,(x \circ y) = D$".

`b)` *Aus* "f *Funktion*" *und* "$p \in E, \mathsf{dom}\, f$" *folgt* "$f(p) \in f[E]$".

`c)` *Aus* "f *Funktion*" *und* "$(p,q) \in f$" *und* "$q \neq x$" *folgt* "$(p,x) \notin f$".

`d)` *Aus* "f *Funktion*" *und* "$f(p) = q$ *Menge*" *folgt* "$(p, f(p)), (p,q) \in f$"

Beweis **373-5** `a)` `VS` gleich $(\mathsf{dom}\, x = \mathcal{U}) \wedge (\mathsf{dom}\, y = D)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\mathsf{dom}\, x = \mathcal{U} \ldots$"
folgt via **311-10**: $\mathsf{dom}\,(x \circ y) = \mathsf{dom}\, y$.

`2:` Aus `1` und
aus `VS` gleich "$\ldots \mathsf{dom}\, y = D$"
folgt: $\mathsf{dom}\,(x \circ y) = D$.

`b)` `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (p \in E, \mathsf{dom}\, f)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots p \in E, \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **folk**: $p \in E \cap \mathsf{dom}\, f$.

`2:` Aus `VS` gleich "f Funktion..." und
aus `1` "$p \in E \cap \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **folk**: $f(p) \in f[E]$.

`c)` `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge ((p,q) \in f) \wedge (q \neq x)$.

`1:` Es gilt: $((p,x) \in f) \vee ((p,x) \notin f)$.

`wfFallunterscheidung`

`1.1.Fall` $(p,x) \in f$.

`2:` Aus `VS` gleich "$(f \text{ Funktion}) \wedge ((p,q) \in f) \ldots$" und
aus `1.1.Fall` "$(p,x) \in f$"
folgt via **18-18(Def)**: $q = x$.

`3:` Nach `VS` gilt: $q \neq x$.

`Ende wfFallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $(p,x) \notin f$.

<u>Beweis **373-5**</u> `d)` `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (f(p) = q \text{ Menge})$.

`1:` Aus `VS`
folgt: $f(p)$ Menge.

`2:` Aus `VS` gleich "f Funktion…" und
aus `1` "$f(p)$ Menge"

folgt via **188-2**: $\boxed{(p, f(p)) \in f}$

`3:` Aus `VS` gleich "…$f(p) = q$…"
folgt via **PaarAxiom I**: $(p, f(p)) = (p, q)$.

`4:` Aus `3` und
aus `2`

folgt: $\boxed{(p, q) \in f}$

□

373-6. Wenn ich *dies* früher geahnt hätte, dann wären einige Klassen-Terme nicht so prominent geworden. So geht es im LW voran.

373-6(Satz)

a) $\mathsf{bigcup}[E] = \{\bigcup \lambda : \lambda \in E\}$.

b) $\mathsf{bigcap}[E] = \{\bigcap \lambda : \lambda \in E\}$.

$\mathsf{331.0}(E) = \{\bigcup \lambda : \lambda \in E\}$
$\mathsf{331.1}(E) = \{\bigcap \lambda : \lambda \in E\}$

Beweis **373-6** a)

`Thema0.1` $\alpha \in \mathsf{bigcup}[E]$.

1: Aus **373-4**"bigcup" Funktion" und
aus `Thema0.1`"$\alpha \in \mathsf{bigcup}[E]$"
folgt via **folk**: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\alpha = \mathsf{bigcup}(\Omega))$.

2: Aus 1"$\ldots \Omega \in E \ldots$"
folgt via **ElementAxiom**: Ω Menge.

3: Aus 2"Ω Menge"
folgt via **373-4**: $\mathsf{bigcup}(\Omega) = \bigcup \Omega$.

4: Aus 1"$\ldots \Omega \in E \ldots$"
folgt via **331-2**: $\bigcup \Omega \in \{\bigcup \lambda : \lambda \in E\}$.

5: Aus 4 und
aus 3
folgt: $\mathsf{bigcup}(\Omega) \in \{\bigcup \lambda : \lambda \in E\}$.

6: Aus 1"$\ldots \alpha = \mathsf{bigcup}(\Omega)$" und
aus 5
folgt: $\alpha \in \{\bigcup \lambda : \lambda \in E\}$.

Ergo `Thema0.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{bigcup}[E]) \Rightarrow (\alpha \in \{\bigcup \lambda : \lambda \in E\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` "$\mathsf{bigcup}[E] \subseteq \{\bigcup \lambda : \lambda \in E\}$"

...

Beweis **373-6** `a)` ...

$\boxed{\texttt{Thema0.2}}$ $\alpha \in \{\bigcup \lambda : \lambda \in E\}$.

`1:` Aus `Thema0.2`“$\alpha \in \{\bigcup \lambda : \lambda \in E\}$”
folgt via **331-2**: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\alpha = \bigcup \Omega)$.

`2:` Aus `1`“$\ldots \Omega \in E \ldots$”
folgt via **ElementAxiom**: Ω Menge.

`3.1:` Aus `2`“Ω Menge”
folgt via **373-4**: $\mathsf{bigcup}(\Omega) = \bigcup \Omega$.

`3.2:` Aus `2`“Ω Menge”
folgt via **folk**: $\Omega \in \mathcal{U}$.

`4.1:` Aus `3.1` und
aus `1`“$\ldots \alpha = \bigcup \Omega$”
folgt: $\alpha = \mathsf{bigcup}(\Omega)$.

`4.2:` Aus `3.2` und
aus **373-4**“$\mathsf{dom}\,(\mathsf{bigcup}) = \mathcal{U}$”
folgt: $\Omega \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{bigcup})$.

`5:` Aus **373-4**“bigcup Funktion”,
aus `1`“$\ldots \Omega \in E \ldots$” und
aus `4.2`“$\Omega \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{bigcup})$”
folgt via **373-5**: $\mathsf{bigcup}(\Omega) \in \mathsf{bigcup}[E]$.

`6:` Aus `4.1` und
aus `5`
folgt: $\alpha \in \mathsf{bigcup}[E]$.:

Ergo `Thema0.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{\bigcup \lambda : \lambda \in E\}) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{bigcup}[E]$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` “$\{\bigcup \lambda : \lambda \in E\} \subseteq \mathsf{bigcup}[E])$”

`1:` Aus `A1` gleich “$\mathsf{bigcup}[E] \subseteq \{\bigcup \lambda : \lambda \in E\}$” und
aus `A2` gleich “$\{\bigcup \lambda : \lambda \in E\} \subseteq \mathsf{bigcup}[E]$”
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathsf{bigcup}[E] = \{\bigcup \lambda : \lambda \in E\}$.

<u>Beweis **373-6**</u> `b)`

$\boxed{\texttt{Thema0.1}}$ $\alpha \in \mathsf{bigcap}[E]$.

`1.1:` Aus `Thema0.1`"$\alpha \in \mathsf{bigcap}[E]$"
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`1.2:` Aus **373-4**"bigcap" Funktion" und
aus `Thema0.1`"$\alpha \in \mathsf{bigcap}[E]$"
folgt via **folk**: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\alpha = \mathsf{bigcap}(\Omega))$.

`2.1:` Aus `1.2`"$\ldots \Omega \in E \ldots$"
folgt via **ElementAxiom**: Ω Menge.

`2.2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`"$\ldots \alpha = \mathsf{bigcap}(\Omega)$"
folgt: $\mathsf{bigcap}(\Omega)$ Menge.

`3.1:` Aus `2.1`"Ω Menge"
folgt via **373-4**: $\mathsf{bigcap}(\Omega) = \bigcap \Omega$.

`3.2:` Aus `2.2`"$\mathsf{bigcap}(\Omega)$ Menge"
folgt via **folk**: $\Omega \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{bigcap})$.

`4.1:` Aus `3.1` und
aus `1.2`"$\ldots \alpha = \mathsf{bigcap}(\Omega)$"
folgt: $\alpha = \bigcap \Omega$.

`4.2:` Aus `3.2` und
aus **373-4**"$\mathsf{dom}\,(\mathsf{bigcap}) = \mathcal{U} \setminus \{0\}$"
folgt: $\Omega \in \mathcal{U} \setminus \{0\}$.

`5:` Aus `4.2`"$\Omega \in \mathcal{U} \setminus \{0\}$"
folgt via **folk**: $\Omega \neq 0$.

`6:` Aus `5`"$\Omega \neq 0$" und
aus `1.2`"$\ldots \Omega \in E \ldots$"
folgt via **331-2**: $\bigcap \Omega \in \{\bigcap \lambda : \lambda \in E\}$.

`7:` Aus `4.1` und
aus `6`
folgt: $\alpha \in \{\bigcap \lambda : \lambda \in E\}$.

...

Beweis **373-6** `b)` ...

Ergo `Thema0.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{bigcap}[E]) \Rightarrow (\alpha \in \{\bigcap \lambda : \lambda \in E\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{"} \mathsf{bigcap}[E] \subseteq \{\bigcap \lambda : \lambda \in E\} \text{"}}$

$\boxed{\texttt{Thema0.2}}$ $\alpha \in \{\bigcap \lambda : \lambda \in E\}$.

`1:` Aus `Thema0.2`"$\alpha \in \{\bigcap \lambda : \lambda \in E\}$"
folgt via **331-2**: $\exists \Omega : (0 \neq \Omega \in E) \wedge (\alpha = \bigcap \Omega)$.

`2.1:` Aus `1`"$\ldots \Omega \in E \ldots$"
folgt via **ElementAxiom**: Ω Menge.

`2.2:` Aus `1`"$\ldots \Omega \in E \ldots$"
folgt via **332-1**: $\Omega \in \mathcal{U}$.

`3.1:` Aus `2.1`"Ω Menge"
folgt via **373-4**: $\mathsf{bigcap}(\Omega) = \bigcap \Omega$.

`3.2:` Aus `1`"$\ldots 0 \neq \Omega \ldots$" und
aus `2.2`"$\Omega \in \mathcal{U}$"
folgt via **folk**: $\Omega \in \mathcal{U} \setminus \{0\}$.

`4.1:` Aus `3.1` und
aus `1`"$\ldots \alpha = \bigcap \Omega$"
folgt: $\alpha = \mathsf{bigcap}(\Omega)$.

`4.2:` Aus `3.2`"$\Omega \in \mathcal{U} \setminus \{0\}$" und
aus **373-4**"$\mathsf{dom}\,(\mathsf{bigcap}) = \mathcal{U} \setminus \{0\}$"
folgt: $\Omega \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{bigcap})$.

`5:` Aus **373-4**"bigcap Funktion",
aus `1`"$\ldots \Omega \in E \ldots$" und
aus `4.2`"$\Omega \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{bigcap})$"
folgt via **373-5**: $\mathsf{bigcap}(\Omega) \in \mathsf{bigcap}[E]$.

`6:` Aus `4.1` und
aus `5`
folgt: $\alpha \in \mathsf{bigcap}[E]$.:

...

<u>Beweis</u> **373-6** `b)` ...

Ergo `Thema0.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{\bigcap \lambda : \lambda \in E\}) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{bigcap}[E])$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A2} \mid \text{“}\{\bigcap \lambda : \lambda \in E\} \subseteq \mathsf{bigcap}[E]\text{”}}$

`1:` Aus `A1` gleich “$\mathsf{bigcap}[E] \subseteq \{\bigcap \lambda : \lambda \in E\}$” und
aus `A2` gleich “$\{\bigcap \lambda : \lambda \in E\} \subseteq \mathsf{bigcap}[E]$”
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathsf{bigcap}[E] = \{\bigcap \lambda : \lambda \in E\}$.

□

373-7. Das **SingeltonAxiom** führt zu Folgerungen aus **373-4**, die noch eine offene Frage aus **#1** beantworten.

<u>**373-7(Satz)**</u>

a) $\mathsf{bigcup}(\{p\}) = \bigcup\{p\}$.

b) $\mathsf{bigcap}(\{p\}) = \bigcap\{p\}$.

c) *“$\mathsf{bigcup}(\{p\}) = p$” genau dann, wenn “$\bigcup\{p\} = p$” genau dann, wenn “$p$ Menge”.*

d) *“$\mathsf{bigcap}(\{p\}) = p$” genau dann, wenn “$\bigcap\{p\} = p$” genau dann, wenn “($p$ Menge) $\vee$ ($p = \mathcal{U}$)”.*

e) *“$\mathsf{bigcup}(\{p\}) \neq p$” genau dann, wenn “$\bigcup\{p\} \neq p$” genau dann, wenn “$p$ Unmenge”.*

f) *“$\mathsf{bigcap}(\{p\}) \neq p$” genau dann, wenn “$\bigcap\{p\} \neq p$” genau dann, wenn “($p$ Unmenge) $\wedge$ ($p \neq \mathcal{U}$)”.*

<u>Beweis **373-7**</u> `ab)`

`1:` Via **SingeltonAxiom** gilt: $\{p\}$ Menge.

`2.a):` Aus `1`“$\{p\}$ Menge” folgt via **373-4**: $\mathsf{bigcup}(\{p\}) = \bigcup\{p\}$.

`2.b):` Aus `1`“$\{p\}$ Menge” folgt via **373-4**: $\mathsf{bigcap}(\{p\}) = \bigcap\{p\}$.

`c)` $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $\mathsf{bigcup}(\{p\}) = p$.

`1:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $\mathsf{bigcup}(\{p\}) = \bigcup\{p\}$.

`2:` Aus `1` und aus `VS` folgt: $\bigcup\{p\} = p$.

Beweis **373-7** `c)` $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $\bigcup\{p\} = p.$

`1:` Es gilt: $(p \text{ Menge}) \vee (p \text{ Unmenge}).$

`wfFallunterscheidung`

`1.1.Fall` p Unmenge.

`2:` Aus `1.1.Fall`“p Unmenge” folgt via **folk**: $\{p\} = 0.$

`3:` $\bigcup\{p\} \stackrel{2}{=} \bigcup 0 \stackrel{\textbf{1-14}}{=} 0.$

`4:` Aus `3` und aus `VS` folgt: $p = 0,$

`5:` Aus `1.1.Fall`“p Unmenge” folgt via **0-17**: $0 \neq p.$

`Ende wfFallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: p Menge.

`c)` $\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich p Menge.

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $\mathsf{bigcup}(\{p\}) = \bigcup\{p\}.$

`1.2:` Aus `VS` gleich “p Menge” folgt via **1-14**: $\bigcup\{p\} = p.$

`2:` Aus `1.1` und aus `1.2` folgt: $\mathsf{bigcup}(\{p\}) = p.$

`d)` $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $\mathsf{bigcap}(\{p\}) = p.$

`1:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $\mathsf{bigcap}(\{p\}) = \bigcap\{p\}.$

`2:` Aus `1` und aus `VS` folgt: $\bigcap\{p\} = p.$

<u>Beweis **373-7**</u> `d)` $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $\qquad \bigcap\{p\} = p.$

`1:` Es gilt: $\qquad (p \text{ Menge}) \vee (p \text{ Unmenge}).$

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $\qquad p$ Menge.

`1.2.Fall` $\qquad p$ Unmenge.

`2:` Aus `1.2.Fall`“p Unmenge”
folgt via **folk**: $\qquad \{p\} = 0.$

`3:` Aus `2` und
aus `VS`
folgt: $\qquad \bigcap 0 = p.$

`4:` Aus `3` und
aus **1-14**“$\bigcap 0 = \mathcal{U}$”
folgt: $\qquad p = \mathcal{U}.$

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\qquad (p \text{ Menge}) \vee (p = \mathcal{U}).$

Beweis **373-7** `d)` $\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(p \text{ Menge}) \vee (p = \mathcal{U})$.

`Fallunterscheidung`

`0.1.Fall` p Menge.

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $\mathsf{bigcap}(\{p\}) = \bigcap\{p\}$.

`1.2:` Aus `0.1.Fall`“p Menge”
folgt via **1-14**: $\bigcap\{p\} = p$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $\mathsf{bigcap}(\{p\}) = p$.

`0.2.Fall` $p = \mathcal{U}$.

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $\mathsf{bigcap}(\{p\}) = \bigcap\{p\}$.

`1.2:` Aus 0$\mathcal{U}$**Axiom**“$\mathcal{U}$ Unmenge”
folgt via **1-14**: $\bigcap\{p\} = \mathcal{U}$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $\mathsf{bigcap}(\{p\}) = \mathcal{U}$.

`3:` Aus `2` und
aus `0.2.Fall`
folgt: $\mathsf{bigcap}(\{p\}) = p$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\mathsf{bigcap}(\{p\}) = p$.

`e)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `c)` gilt:
$$(\mathsf{bigcup}(\{p\}) = p) \Leftrightarrow (\bigcup\{p\} = p) \Leftrightarrow (p \text{ Menge}).$$

`2:` Aus `1`
folgt: $$(\neg(\mathsf{bigcup}(\{p\}) = p)) \Leftrightarrow (\neg(\bigcup\{p\} = p)) \Leftrightarrow (\neg(p \text{ Menge})).$$

`3:` Aus `2`
folgt: $$(\mathsf{bigcup}(\{p\}) \neq p) \Leftrightarrow (\bigcup\{p\} \neq p) \Leftrightarrow (p \text{ Unmenge}).$$

<u>Beweis</u> **373-7** `f)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `d)` gilt:
$$(\mathsf{bigcap}(\{p\}) = p) \Leftrightarrow (\bigcap\{p\} = p) \Leftrightarrow ((p \text{ Menge}) \vee (p = \mathcal{U})).$$

`2:` Aus `1`
folgt:
$$(\neg(\mathsf{bigcap}(\{p\}) = p)) \Leftrightarrow (\neg(\bigcap\{p\} = p)) \Leftrightarrow (\neg((p \text{ Menge}) \vee (p = \mathcal{U}))).$$

`3:` Aus `2`
folgt: $$(\mathsf{bigcap}(\{p\}) \neq p) \Leftrightarrow (\bigcap\{p\} \neq p) \Leftrightarrow ((p \text{ Unmenge}) \wedge (p \neq \mathcal{U})).$$

$\square$

373-8. Es gilt $f = \mathsf{id}_D$ genau dann, wenn f eine Funktion mit $\mathsf{dom}\, f = D$ ist, für die $f(p) = p$ für alle $p \in D$ gilt.

373-8(Satz) *Die Aussagen* `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $f = \mathsf{id}_D$.

`ii)` *"f Funktion" und "$\mathsf{dom}\, f = D$" und "$\forall \alpha : (\alpha \in D) \Rightarrow (f(\alpha) = \alpha)$".*

Beweis **373-8** `i) ⇒ ii)` `VS` gleich $f = \mathsf{id}_D$.

`1.1:` Via **20-11** gilt: id_D Funktion.

`1.2:` Via **20-11** gilt: $\mathsf{dom}\,(\mathsf{id}_D) = D$.

`Thema1.3` $\alpha \in D$.

Aus `Thema1.3`"$\alpha \in D$"
folgt via **20-11**: $\mathsf{id}_D(\alpha) = \alpha$.

Ergo `Thema1.3`: `A1` | "$\forall \alpha : (\alpha \in D) \Rightarrow (\mathsf{id}_D(\alpha) = \alpha)$"

`2.1:` Aus `1.1` und
aus `VS`
folgt: $\boxed{f \text{ Funktion}}$

`2.2:` Aus `1.2` und
aus `VS`
folgt: $\boxed{\mathsf{dom}\, f = D}$

`2.3:` Aus `A1` und
aus `VS`
folgt: $\boxed{\forall \alpha : (\alpha \in D) \Rightarrow (f(\alpha) = \alpha)}$

<u>Beweis **373-8**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$

`VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, f = D) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in D) \Rightarrow (f(\alpha) = \alpha))$.

`1.1`: Via **20-11** gilt: id_D Funktion.

`1.2`: Via **20-11** gilt: $\mathsf{dom}\,(\mathsf{id}_D) = D$.

> $\boxed{\texttt{Thema1.3}}$ $\beta \in \mathsf{dom}\, f$.
>
> `2`: Aus `Thema1.3`"$\beta \in \mathsf{dom}\, f$" und
> aus `VS` gleich "$\ldots \mathsf{dom}\, f = D \ldots$"
> folgt: $\beta \in D$.
>
> `3`: Aus 2"$\beta \in D$"
> folgt via **20-11**: $\mathsf{id}_D(\beta) = \beta$.
>
> `4`: Aus `VS` gleich "$\ldots \forall \alpha : (\alpha \in D) \Rightarrow (f(\alpha) = \alpha)$" und
> aus 2"$\beta \in D$"
> folgt: $f(\beta) = \beta$.
>
> `5`: Aus 4 und
> aus 3
> folgt: $f(\beta) = \mathsf{id}_D(\beta)$.

Ergo `Thema1.3`: `A1` | "$\forall \beta : (\beta \in \mathsf{dom}\, f) \Rightarrow (f(\beta) = \mathsf{id}_D(\beta))$"

`2`: Aus `VS` gleich "$\ldots \mathsf{dom}\, f = D \ldots$" und
aus `1.2`
folgt: $\mathsf{dom}\, f = \mathsf{dom}\,(\mathsf{id}_D)$.

`3`: Aus `VS` gleich "f Funktion…",
aus `A1` gleich "$\forall \beta : (\beta \in \mathsf{dom}\, f) \Rightarrow (f(\beta) = \mathsf{id}_D(\beta))$" und
aus 2"$\mathsf{dom}\, f = \mathsf{dom}\,(\mathsf{id}_D)$"
folgt via **ISF**: $f = \mathsf{id}_D$.

□

373-9. Aus **373-8** folgt ohne allzu viel Weiteres ein Kriterium für $f = \mathsf{id}$.

373-9(Satz) *Die Aussagen* `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $f = \mathsf{id}$.

`ii)` *"f Funktion" und "*$\mathsf{dom}\, f = \mathcal{U}$*" und "*$\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U}) \Rightarrow (f(\alpha) = \alpha)$*".*

Beweis **373-9** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $f = \mathsf{id}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$f = \mathsf{id}$" und
aus **20-7(Def)** "$\mathsf{id} = \mathsf{id}_\mathcal{U}$"
folgt: $f = \mathsf{id}_\mathcal{U}$.

`2:` Aus `1` "$f = \mathsf{id}_\mathcal{U}$"
folgt via **373-8**:
$(f \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, f = \mathcal{U}) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U}) \Rightarrow (f(\alpha) = \alpha))$.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$

`VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, f = \mathcal{U}) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U}) \Rightarrow (f(\alpha) = \alpha))$.

`1:` Aus `VS` gleich "$(f \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, f = \mathcal{U}) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U}) \Rightarrow (f(\alpha) = \alpha))$"
folgt via **373-8**: $f = \mathsf{id}_\mathcal{U}$.

`2:` Aus `1` "$f = \mathsf{id}_\mathcal{U}$" und
aus **20-7(Def)** "$\mathsf{id} = \mathsf{id}_\mathcal{U}$"
folgt: $f = \mathsf{id}$.

□

373-10. Aus $\mathsf{dom}\,x \neq \mathsf{dom}\,y$ folgt natürlich $x \neq y$.

373-10(Satz)

a) *Aus* "$\mathsf{dom}\,x \neq \mathsf{dom}\,y$" *folgt* "$x \neq y$".

b) *Aus* "$\mathsf{ran}\,x \neq \mathsf{ran}\,y$" *folgt* "$x \neq y$".

c) "$2 \in \mathcal{U}$" *und* "$2 \in \mathcal{U} \setminus \{0\}$".

d) $2 \notin \mathcal{U}_{\text{sngltn}}$.

e) "$\mathcal{U}_{\text{sngltn}} \neq \mathcal{U} \setminus \{0\}$" *und* "$\mathcal{U}_{\text{sngltn}} \subseteq \mathcal{U} \setminus \{0\}$".

f) $\bigcup\{0,1\} = 1$.

g) $\bigcap\{0,1\} = 0$.

h) $\mathsf{bigcup}(2) = 1$.

i) $\mathsf{bigcap}(2) = 0$.

j) "$(2,0) \notin \mathsf{bigcup}$" *und* "$(2,1) \in \mathsf{bigcup}$".

k) "$(2,0) \in \mathsf{bigcap}$" *und* "$(2,1) \notin \mathsf{bigcap}$".

l) "$\mathsf{ran}\,\{.\} \subseteq \mathcal{U} \setminus \{0\}$" *und* "$\mathsf{dom}\,(\mathsf{bigcap} \circ \{.\}) = \mathcal{U}$".

Beweis **373-10** a) `VS` gleich $\mathsf{dom}\,x \neq \mathsf{dom}\,y$.

1: Es gilt: $(x = y) \vee (x \neq y)$.

`wfFallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x = y$.

2: Aus `1.1.Fall` "$x = y$" folgt: $\mathsf{dom}\,x = \mathsf{dom}\,y$.

3: Nach `VS` gilt: $\mathsf{dom}\,x \neq \mathsf{dom}\,y$.

`Ende wfFallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $x \neq y$.

<u>Beweis **373-10**</u> `b)` `VS` gleich $\mathsf{dom}\, x \neq \mathsf{dom}\, y$.

`1:` Es gilt: $(x = y) \vee (x \neq y)$.

$\boxed{\texttt{wfFallunterscheidung}}$

$\boxed{\texttt{1.1.Fall}}$ $x = y$.

`2:` Aus `1.1.Fall` "$x = y$"
folgt: $\mathsf{ran}\, x = \mathsf{ran}\, y$.

`3:` Nach `VS` gilt: $\mathsf{ran}\, x \neq \mathsf{ran}\, y$.

$\boxed{\texttt{Ende wfFallunterscheidung}}$ In beiden Fällen gilt: $x \neq y$.

`c)`

`1.1:` Aus $\in$**schola** "2 Menge"

folgt via **folk**: $\boxed{2 \in \mathcal{U}}$

`1.2:` Aus $\in$**schola** "2 Menge" und
aus $\neq$**schola** "$2 \neq 0$"

folgt via **332-1**: $\boxed{2 \in \mathcal{U} \setminus \{0\}}$

`d)`

`1:` Via **240-3** gilt: $2 \notin \mathcal{U}_1$.

`2:` Aus `1` "$2 \notin \mathcal{U}_1$"
folgt via **5-4**: $2 \notin \mathcal{U}_1 \setminus \mathcal{U}_0$.

`3:` Aus `2` und
aus **296-12** "$\mathcal{U}_{\text{sngltn}} = \mathcal{U}_1 \setminus \mathcal{U}_0$"
folgt: $2 \notin \mathcal{U}_{\text{sngltn}}$.

<u>Beweis **373-10**</u> `e)`

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `c)` gilt: $2 \in \mathcal{U} \setminus \{0\}$.

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `d)` gilt: $2 \notin \mathcal{U}_{\mathrm{sngltn}}$.

> `Thema1.3` $\alpha \in \mathcal{U}_{\mathrm{sngltn}}$.
>
> `2.1:` Aus `Thema1.3`"$\alpha \in \mathcal{U}_{\mathrm{sngltn}}$" folgt via **332-1**: $\alpha \in \mathcal{U}$.
>
> `2.2:` Aus `Thema1.3`"$\alpha \in \mathcal{U}_{\mathrm{sngltn}}$" folgt via **27-6**: $\exists \Omega : (\Omega \text{ Menge}) \wedge (\alpha = \{\Omega\})$.
>
> `3:` Aus `2.2`"$\ldots \Omega$ Menge$\ldots$" folgt via **folk**: $0 \neq \{\Omega\}$.
>
> `4:` Aus `2.2`"$\ldots \alpha = \{\Omega\}$" und aus `3`"$0 \neq \{\Omega\}$" folgt: $0 \neq \alpha$.
>
> `5:` Aus `4` folgt: $\alpha \neq 0$.
>
> `6:` Aus `2.1`"$\alpha \in \mathcal{U}$" und aus `5`"$\alpha \neq 0$" folgt via **folk**: $\alpha \in \mathcal{U} \setminus \{0\}$.

Ergo `Thema1.3`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U}_{\mathrm{sngltn}}) \Rightarrow (\alpha \in \mathcal{U} \setminus \{0\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$\mathcal{U}_{\mathrm{sngltn}} \subseteq \mathcal{U} \setminus \{0\}$"

`2:` Aus `1.1`"$2 \in \mathcal{U} \setminus \{0\}$" und aus `1.2`"$2 \notin \mathcal{U}_{\mathrm{sngltn}}$" folgt via **folk**: $\mathcal{U} \setminus \{0\} \neq \mathcal{U}_{\mathrm{sngltn}}$.

`3:` Aus `2`

folgt: $\boxed{\mathcal{U}_{\mathrm{sngltn}} \neq \mathcal{U} \setminus \{0\}}$

<u>Beweis</u> **373-10** `fg)`

`1.1:` Aus $\in$**schola**“0 Menge” und
aus $\in$**schola**“1 Menge”
folgt via **4-16**: $\bigcup\{0,1\} = 0 \cup 1.$

`1.2:` Aus $\in$**schola**“0 Menge” und
aus $\in$**schola**“1 Menge”
folgt via **4-17**: $\bigcap\{0,1\} = 0 \cup 1.$

`2.1:` Via **folk** gilt: $0 \cup 1 = 1.$

`2.2:` Via **folk** gilt: $0 \cap 1 = 0.$

`1.f):` Aus `1.1` und
aus `2.1`
folgt: $\bigcup\{0,1\} = 1.$

`1.g):` Aus `1.2` und
aus `2.2`
folgt: $\bigcap\{0,1\} = 0.$

`h)`

`1:` Aus $\in$**schola**“2 Menge”
folgt via **373-4**: $\mathsf{bigcup}(2) = \bigcup 2.$

`2:` $\mathsf{bigcup}(2) \stackrel{\mathtt{1}}{=} \bigcup 2 \stackrel{\mathbf{238-1}}{=} \bigcup\{0,1\} \stackrel{\mathtt{f)}}{=} 1.$

`i)`

`1:` Aus $\in$**schola**“2 Menge”
folgt via **373-4**: $\mathsf{bigcap}(2) = \bigcap 2.$

`2:` $\mathsf{bigcap}(2) \stackrel{\mathtt{1}}{=} \bigcap 2 \stackrel{\mathbf{238-1}}{=} \bigcap\{0,1\} \stackrel{\mathtt{g)}}{=} 0.$

Beweis **373-10** `j)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `h)` gilt: $\mathsf{bigcup}(2) = 1.$

`2:` Aus **373-4**“bigcup Funktion” ,
aus `1`“$\mathsf{bigcup}(2) = 1$” und
aus $\in$**schola**“1 Menge”

folgt via **373-5**: $\boxed{(2, 1) \in \mathsf{bigcup}}$

`3:` Aus **373-4**“bigcup Funktion” ,
aus `2`“$(2, 1) \in \mathsf{bigcup}$” und
aus $\neq$**schola**“$0 \neq 1$”

folgt via **373-5**: $\boxed{(2, 0) \notin \mathsf{bigcup}}$

`k)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `i)` gilt: $\mathsf{bigcap}(2) = 0.$

`2:` Aus **373-4**“bigcap Funktion” ,
aus `1`“$\mathsf{bigcap}(2) = 0$” und
aus $\in$**schola**“0 Menge”

folgt via **373-5**: $\boxed{(2, 0) \in \mathsf{bigcap}}$

`3:` Aus **373-4**“bigcap Funktion” ,
aus `2`“$(2, 0) \in \mathsf{bigcap}$” und
aus $\neq$**schola**“$1 \neq 0$”

folgt via **373-5**: $\boxed{(2, 1) \notin \mathsf{bigcap}}$

Beweis **373-10** `1)`

`1:` Via **27-14** gilt: $\mathsf{ran}\,\{.\} = \mathcal{U}_{\text{sngltn}}$.

`2:` Aus `1` und
aus `e)` "$\mathcal{U}_{\text{sngltn}} \subseteq \mathcal{U} \setminus \{0\}$"
folgt: $\boxed{\mathsf{ran}\,\{.\} \subseteq \mathcal{U} \setminus \{0\}}$

`3:` Aus `2` und
aus **373-4** "$\mathsf{dom}\,(\mathsf{bigcap}) = \mathcal{U} \setminus \{0\}$"
folgt: $\mathsf{ran}\,\{.\} \subseteq \mathsf{dom}\,(\mathsf{bigcap})$.

`4:` Aus `3` "$\mathsf{ran}\,\{.\} \subseteq \mathsf{dom}\,(\mathsf{bigcap})$"
folgt via **14-6**: $\mathsf{dom}\,(\mathsf{bigcap} \circ \{.\}) = \mathsf{dom}\,\{.\}$.

`5:` Aus `4` und
aus **27-14** "$\mathsf{dom}\,\{.\} = \mathcal{U}$"
folgt: $\boxed{\mathsf{dom}\,(\mathsf{bigcap} \circ \{.\}) = \mathcal{U}}$

□

373-11. In Verbindung mit **27-14**“$\{.\} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}_{\mathrm{sngltn}}$” ergibt sich via **373-12** die Erkenntnis, dass auch für $f : \mathcal{U} \to B$ bijektiv und $g \circ f = f^{-1} \circ f = \mathsf{id}$ nicht notwendiger Weise $g = f^{-1}$ folgt.

373-11.Bemerkung

Die Aussage
“$((f : \mathcal{U} \to B \text{ bijektiv}) \wedge (g \circ f = \mathsf{id}) \wedge (g \text{ Funktion})) \Rightarrow (g = f^{-1})$”
ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

373-12. Sowohl $\{.\}^{-1}$ als auch bigcup und bigcap ergeben id, wenn sie von rechts mit $\{.\}$ verknüpft werden. Dennoch sind sie ungleich.

373-12(Satz)

a) $\{.\}^{-1} : \mathcal{U}_{\text{sngltn}} \to \mathcal{U}$ *bijektiv.*

b) $\{.\}^{-1} : \mathcal{U}_{\text{sngltn}} \to \mathcal{U}$.

c) $\{.\}^{-1}$ *Funktion.*

d) $\mathsf{dom}\,(\{.\}^{-1}) = \mathcal{U}_{\text{sngltn}}$.

e) $\mathsf{ran}\,(\{.\}^{-1}) = \mathcal{U}$.

f) $\{.\}^{-1} \circ \{.\} = \mathsf{id}$.

g) "$\{.\}^{-1}(\{p\}) = p$" *genau dann, wenn* "$(p$ *Menge*$) \vee (p = \mathcal{U})$".

h) "$\{.\}^{-1}(\{p\}) \neq p$" *genau dann, wenn* "$(p$ *Unmenge*$) \wedge (p \neq \mathcal{U})$".

i) $\mathsf{bigcup} \circ \{.\} = \mathsf{id}$.

j) $\mathsf{bigcap} \circ \{.\} = \mathsf{id}$.

k) $\{.\}^{-1} \circ \{.\} = \mathsf{bigcup} \circ \{.\} = \mathsf{bigcap} \circ \{.\}$.

l) "$\{.\}^{-1} \subseteq \mathsf{bigcup}$" *und* "$\{.\}^{-1} \neq \mathsf{bigcup}$".

m) "$\{.\}^{-1} \subseteq \mathsf{bigcap}$" *und* "$\{.\}^{-1} \neq \mathsf{bigcap}$".

n) "$\mathsf{bigcup} \not\subseteq \mathsf{bigcap}$" *und* "$\mathsf{bigcap} \not\subseteq \mathsf{bigcup}$".

o) $\mathsf{bigcup} \neq \mathsf{bigcap}$.

<u>Beweis **373-12**</u> `abcde)`

`1.a)`: Aus **27-14** "$\{.\}:\mathcal{U}\to\mathcal{U}_{\mathrm{sngltn}}$ bijektiv"
folgt via **22-6**: $\{.\}^{-1}:\mathcal{U}_{\mathrm{sngltn}}\to\mathcal{U}$ bijektiv.

`2.b)`: Aus `1.a)` "$\{.\}^{-1}:\mathcal{U}_{\mathrm{sngltn}}\to\mathcal{U}$ bijektiv"
folgt via **22-1(Def)**: $\{.\}^{-1}:\mathcal{U}_{\mathrm{sngltn}}\to\mathcal{U}$.

`3.c)`: Aus `2.b)` "$\{.\}^{-1}:\mathcal{U}_{\mathrm{sngltn}}\to\mathcal{U}$"
folgt via **21-1(Def)**: $\{.\}^{-1}$ Funktion.

`3.d)`: Aus `2.b)` "$\{.\}^{-1}:\mathcal{U}_{\mathrm{sngltn}}\to\mathcal{U}$"
folgt via **21-1(Def)**: $\mathsf{dom}\,(\{.\}^{-1})=\mathcal{U}_{\mathrm{sngltn}}$.

`3.e)`: Aus `1.a)` "$\{.\}^{-1}:\mathcal{U}_{\mathrm{sngltn}}\to\mathcal{U}$ bijektiv"
folgt via **22-1(Def)**: $\mathsf{ran}\,(\{.\}^{-1})=\mathcal{U}$.

`f)`

`1`: Aus **27-14** "$\{.\}:\mathcal{U}\to\mathcal{U}_{\mathrm{sngltn}}$ bijektiv"
folgt via **22-7**: $\{.\}^{-1}\circ\{.\}=\mathsf{id}_{\mathcal{U}}$.

`2`: Aus `1` und
aus **20-7(Def)** "$\mathsf{id}=\mathsf{id}_{\mathcal{U}}$"
folgt: $\{.\}^{-1}\circ\{.\}=\mathsf{id}$.

<u>Beweis **373-12**</u> `g)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $\{.\}^{-1}(\{p\}) = p.$

`1:` Es gilt: $(p \text{ Menge}) \vee (p \text{ Unmenge}).$

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` p Menge.

`1.2.Fall` p Unmenge.

`2:` Aus `1.2.Fall`"p Unmenge"
folgt via **folk**: $\{p\} = 0.$

`3:` Aus **27-7**"$0 \notin \mathcal{U}_{\text{sngltn}}$" und
aus `2`
folgt: $\{p\} \notin \mathcal{U}_{\text{sngltn}}.$

`4:` Via des bereits bewiesenen `d)` gilt: $\mathsf{dom}\,(\{.\}^{-1}) = \mathcal{U}_{\text{sngltn}}.$

`5:` Aus `3` und
aus `4`
folgt: $\{p\} \notin \mathsf{dom}\,(\{.\}^{-1}).$

`6:` Aus `5`"$\{p\} \notin \mathsf{dom}\,(\{.\}^{-1})$"
folgt via **folk**: $\{.\}^{-1}(\{p\}) = \mathcal{U}.$

`7:` Aus `6` und
aus `VS`
folgt: $p = \mathcal{U}.$

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $(p \text{ Menge}) \vee (p = \mathcal{U}).$

Beweis **373-12** g) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich $(p \text{ Menge}) \vee (p = \mathcal{U})$.

Fallunterscheidung

0.1.Fall p Menge.

1.1: Aus 0.1.Fall "p Menge" folgt via **27-14**: $\{.\}(p) = \{p\}$.

1.2: Aus 0.1.Fall "p Menge" folgt via **folk**: $p \in \mathcal{U}$.

2: Aus **27-14** "$\{.\} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}_{\text{sngltn}}$ bijektiv" und aus 1.2 "$p \in \mathcal{U}$" folgt via **22-7**: $\{.\}^{-1}(\{.\}(p)) = p$.

3: Aus 2 und aus 1.1 folgt: $\{.\}^{-1}(\{p\}) = p$.

0.2.Fall $p = \mathcal{U}$.

1: Aus 0.2.Fall und aus **1-5** "$\{\mathcal{U}\} = 0$" folgt: $\{p\} = 0$.

2: Aus **27-7** "$0 \notin \mathcal{U}_{\text{sngltn}}$" und aus 1 folgt: $\{p\} \notin \mathcal{U}_{\text{sngltn}}$.

3: Via des bereits bewiesenen c) gilt: $\mathsf{dom}\,(\{.\}^{-1}) = \mathcal{U}_{\text{sngltn}}$.

4: Aus 2 und aus 3 folgt: $\{p\} \notin \mathsf{dom}\,(\{.\}^{-1})$.

5: Aus 4 "$\{p\} \notin \mathsf{dom}\,(\{.\}^{-1})$" folgt via **folk**: $\{.\}^{-1}(\{p\}) = \mathcal{U}$.

6: Aus 5 und aus 0.2.Fall folgt: $\{.\}^{-1}(\{p\}) = p$.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt: $\{.\}^{-1}(\{p\}) = p$.

<u>Beweis **373-12** `h)`</u>

`1:` Via des bereits bewiesenen `g)` gilt:
$$(\{.\}^{-1}(\{p\}) = p) \Leftrightarrow ((p \text{ Menge}) \vee (p = \mathcal{U})).$$

`2:` Aus `1`
folgt:
$$(\neg(\{.\}^{-1}(\{p\}) = p)) \Leftrightarrow (\neg((p \text{ Menge}) \vee (p = \mathcal{U}))).$$

`3:` Aus `2`
folgt:
$$(\{.\}^{-1}(\{p\}) \neq p) \Leftrightarrow ((p \text{ Unmenge}) \wedge (p \neq \mathcal{U})).$$

Beweis **373-12** `i)`

`1.1:` Aus **373-4**"bigcup Funktion" und
aus **27-14**"$\{.\}$ Funktion"
folgt via **18-46**: $\mathsf{bigcup} \circ \{.\}$ Funktion.

`1.2:` Aus **373-4**"$\mathsf{dom}\,(\mathsf{bigcup}) = \mathcal{U}$" und
aus **27-14**"$\mathsf{dom}\,(\{.\}) = \mathcal{U}$"
folgt via **373-5**: $\mathsf{dom}\,(\mathsf{bigcup} \circ \{.\}) = \mathcal{U}$.

`Thema1.3` $\alpha \in \mathcal{U}$.

`2.1:` Aus **373-4**"bigcup Funktion" und
aus **27-14**"$\{.\}$ Funktion"
folgt via **18-46**: $(\mathsf{bigcup} \circ \{.\})(\alpha) = \mathsf{bigcup}(\{.\}(\alpha))$.

`2.2:` Aus `Thema1.3`"$\alpha \in \mathcal{U}$"
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`3.1:` Aus `2.2`"α Menge"
folgt via **27-14**: $\{.\}(\alpha) = \{\alpha\}$.

`3.2:` Aus `2.2`"α Menge"
folgt via **373-7**: $\mathsf{bigcup}(\{\alpha\}) = \alpha$.

`4:` Aus `3.1` und
aus `2.1`
folgt: $(\mathsf{bigcup} \circ \{.\})(\alpha) = \mathsf{bigcup}(\{\alpha\})$.

`5:` Aus `4` und
aus `3.2`
folgt: $(\mathsf{bigcup} \circ \{.\})(\alpha) = \alpha$.

Ergo `Thema1.3`: `A1` | "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U}) \Rightarrow ((\mathsf{bigcup} \circ \{.\})(\alpha) = \alpha)$"

`2:` Aus `1.1`"$\mathsf{bigcup} \circ \{.\}$ Funktion",
aus `1.2`"$\mathsf{dom}\,(\mathsf{bigcup} \circ \{.\}) = \mathcal{U}$" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U}) \Rightarrow ((\mathsf{bigcup} \circ \{.\})(\alpha) = \alpha)$"
folgt via **373-9**: $\mathsf{bigcup} \circ \{.\} = \mathsf{id}$.

<u>Beweis **373-12**</u> `j)`

`1.1:` Aus **373-4**“bigcap Funktion” und
aus **27-14**“$\{.\}$ Funktion”
folgt via **18-46**: $\mathsf{bigcap} \circ \{.\}$ Funktion.

`1.2:` Via **373-10** gilt: $\mathsf{dom}\,(\mathsf{bigcap} \circ \{.\}) = \mathcal{U}$.

> $\boxed{\texttt{Thema1.3}}$ $\alpha \in \mathcal{U}$.
>
> `2.1:` Aus **373-4**“bigcap Funktion” und
> aus **27-14**“$\{.\}$ Funktion”
> folgt via **18-46**: $(\mathsf{bigcap} \circ \{.\})(\alpha) = \mathsf{bigcap}(\{.\}(\alpha))$.
>
> `2.2:` Aus `Thema1.3`“$\alpha \in \mathcal{U}$”
> folgt via **ElementAxiom**: α Menge.
>
> `3.1:` Aus `2.2`“α Menge”
> folgt via **27-14**: $\{.\}(\alpha) = \{\alpha\}$.
>
> `3.2:` Aus `2.2`“α Menge”
> folgt via **373-7**: $\mathsf{bigcap}(\{\alpha\}) = \alpha$.
>
> `4:` Aus `3.1` und
> aus `2.1`
> folgt: $(\mathsf{bigcap} \circ \{.\})(\alpha) = \mathsf{bigcap}(\{\alpha\})$.
>
> `5:` Aus `4` und
> aus `3.2`
> folgt: $(\mathsf{bigcap} \circ \{.\})(\alpha) = \alpha$.

Ergo `Thema1.3`: `A1` | “$\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U}) \Rightarrow ((\mathsf{bigcap} \circ \{.\})(\alpha) = \alpha)$”

`2:` Aus `1.1`“$\mathsf{bigcap} \circ \{.\}$ Funktion”,
aus `1.2`“$\mathsf{dom}\,(\mathsf{bigcap} \circ \{.\}) = \mathcal{U}$” und
aus `A1` gleich “$\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{U}) \Rightarrow ((\mathsf{bigcap} \circ \{.\})(\alpha) = \alpha)$”
folgt via **373-9**: $\mathsf{bigcap} \circ \{.\} = \mathsf{id}$.

Beweis **373-12** `k)`

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `f)` gilt: $\{.\}^{-1} \circ \{.\} = \mathsf{id}$.

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `i)` gilt: $\mathsf{bigcup} \circ \{.\} = \mathsf{id}$.

`1.3:` Via des bereits bewiesenen `j)` gilt: $\mathsf{bigcap} \circ \{.\} = \mathsf{id}$.

`2:` Aus `1.1`,
aus `1.2` und
aus `1.3`
folgt: $\{.\}^{-1} \circ \{.\} = \mathsf{bigcup} \circ \{.\} = \mathsf{bigcap} \circ \{.\}$.

`l)`

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `c)` gilt: $\{.\}^{-1}$ Funktion.

`1.2:` Via **373-4** gilt: bigcup Funktion.

> `Thema1.3` $\alpha \in \mathsf{dom}\,(\{.\}^{-1})$.
>
> `2:` Via des bereits bewiesenen `d)` gilt: $\mathsf{dom}\,(\{.\}^{-1}) = \mathcal{U}_{\mathrm{sngltn}}$.
>
> `3:` Aus `Thema1.3` und
> aus `2`
> folgt: $\alpha \in \mathcal{U}_{\mathrm{sngltn}}$.
>
> `4:` Aus `3`“$\alpha \in \mathcal{U}_{\mathrm{sngltn}}$”
> folgt via **27-6**: $\exists \Omega : (\Omega \text{ Menge}) \wedge (\alpha = \{\Omega\})$.
>
> `5.1:` Aus `4`“$\ldots \Omega$ Menge$\ldots$”
> folgt via des bereits bewiesenen `g)`: $\{.\}^{-1}(\{\Omega\}) = \Omega$.
>
> `5.2:` Aus `4`“$\ldots \Omega$ Menge$\ldots$”
> folgt via **373-7**: $\mathsf{bigcup}(\{\Omega\}) = \Omega$.
>
> `6:` Aus `5.1` und
> aus `5.2`
> folgt: $\{.\}^{-1}(\{\Omega\}) = \mathsf{bigcup}(\{\Omega\})$.
>
> `7:` Aus `6` und
> aus `4`“$\ldots \alpha = \{\Omega\}$”
> folgt: $\{.\}^{-1}(\alpha) = \mathsf{bigcup}(\alpha)$.

Ergo `Thema1.3`: `A1` | “$\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\,(\{.\}^{-1})) \Rightarrow (\{.\}^{-1}(\alpha) = \mathsf{bigcup}(\alpha))$”

...

Beweis **373-12** `l)` ...

2: Aus `1.1`“$\{.\}^{-1}$ Funktion”,
aus `1.2`“bigcup Funktion” und
aus `A1` gleich “$\forall\alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\,(\{.\}^{-1})) \Rightarrow (\{.\}^{-1}(\alpha) = \mathsf{bigcup}(\alpha))$”

folgt via **18-43**: $\boxed{\{.\}^{-1} \subseteq \mathsf{bigcup}}$

3.1: Via des bereits bewiesenen `d)` gilt: $\mathsf{dom}\,(\{.\}^{-1}) = \mathcal{U}_{\text{sngltn}}$.

3.2: Via **373-4** gilt: $\mathsf{dom}\,(\mathsf{bigcup}) = \mathcal{U}$.

3.3: Via **27-7** gilt: $\mathcal{U}_{\text{sngltn}} \neq \mathcal{U}$.

4: Aus `3.1`,
aus `3.2` und
aus `3.3`
folgt: $\mathsf{dom}\,(\{.\}^{-1}) \neq \mathsf{dom}\,(\mathsf{bigcup})$.

5: Aus `4`“$\mathsf{dom}\,(\{.\}^{-1}) \neq \mathsf{dom}\,(\mathsf{bigcup})$”

folgt via **373-10**: $\boxed{\{.\}^{-1} \neq \mathsf{bigcup}}$

<u>Beweis **373-12** `m)`</u>

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `c)` gilt: $\{.\}^{-1}$ Funktion.

`1.2:` Via **373-4** gilt: bigcap Funktion.

$\boxed{\texttt{Thema1.3}}$ $\alpha \in \mathsf{dom}\,(\{.\}^{-1})$.

`2:` Via des bereits bewiesenen `d)` gilt: $\mathsf{dom}\,(\{.\}^{-1}) = \mathcal{U}_{\mathrm{sngltn}}$.

`3:` Aus `Thema1.3` und
aus `2`
folgt: $\alpha \in \mathcal{U}_{\mathrm{sngltn}}$.

`4:` Aus `3`"$\alpha \in \mathcal{U}_{\mathrm{sngltn}}$"
folgt via **27-6**: $\exists \Omega : (\Omega \text{ Menge}) \wedge (\alpha = \{\Omega\})$.

`5.1:` Aus `4`"$\ldots \Omega$ Menge$\ldots$"
folgt via des bereits bewiesenen `g)`: $\{.\}^{-1}(\{\Omega\}) = \Omega$.

`5.2:` Aus `4`"$\ldots \Omega$ Menge$\ldots$"
folgt via **373-7**: $\mathsf{bigcap}(\{\Omega\}) = \Omega$.

`6:` Aus `5.1` und
aus `5.2`
folgt: $\{.\}^{-1}(\{\Omega\}) = \mathsf{bigcap}(\{\Omega\})$.

`7:` Aus `6` und
aus `4`"$\ldots \alpha = \{\Omega\}$"
folgt: $\{.\}^{-1}(\alpha) = \mathsf{bigcap}(\alpha)$.

Ergo `Thema1.3`: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{"}\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\,(\{.\}^{-1})) \Rightarrow (\{.\}^{-1}(\alpha) = \mathsf{bigcap}(\alpha))\text{"}}$

...

<u>Beweis</u> **373-12** `m)` ...

`2:` Aus `1.1`“$\{.\}^{-1}$ Funktion”,
aus `1.2`“bigcap Funktion” und
aus `A1` gleich “$\forall\alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\,(\{.\}^{-1})) \Rightarrow (\{.\}^{-1}(\alpha) = \mathsf{bigcap}(\alpha))$”

folgt via **18-43**: $\boxed{\{.\}^{-1} \subseteq \mathsf{bigcap}}$

`3.1:` Via des bereits bewiesenen `d)` gilt: $\mathsf{dom}\,(\{.\}^{-1}) = \mathcal{U}_{\text{sngltn}}$.

`3.2:` Via **373-4** gilt: $\mathsf{dom}\,(\mathsf{bigcap}) = \mathcal{U} \setminus \{0\}$.

`3.3:` Via **373-10** gilt: $\mathcal{U}_{\text{sngltn}} \neq \mathcal{U} \setminus \{0\}$.

`4:` Aus `3.1`,
aus `3.2` und
aus `3.3`
folgt: $\mathsf{dom}\,(\{.\}^{-1}) \neq \mathsf{dom}\,(\mathsf{bigcap})$.

`5:` Aus `4`“$\mathsf{dom}\,(\{.\}^{-1}) \neq \mathsf{dom}\,(\mathsf{bigcap})$”

folgt via **373-10**: $\boxed{\{.\}^{-1} \neq \mathsf{bigcap}}$

`n)`

`1.1:` Aus **373-10**“$(2,0) \in \mathsf{bigcap}$” und
aus **373-10**“$(2,0) \notin \mathsf{bigcup}$”

folgt via **0-5**: $\boxed{\mathsf{bigcap} \not\subseteq \mathsf{bigcup}}$

`1.2:` Aus **373-10**“$(2,1) \in \mathsf{bigcup}$” und
aus **373-10**“$(2,1) \notin \mathsf{bigcap}$”

folgt via **0-5**: $\boxed{\mathsf{bigcup} \not\subseteq \mathsf{bigcap}}$

`o)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `n)` gilt: $\mathsf{bigcup} \not\subseteq \mathsf{bigcap}$.

`2:` Aus `1`“$\mathsf{bigcup} \not\subseteq \mathsf{bigcap}$”
folgt via **0-10**: $\mathsf{bigcup} \neq \mathsf{bigcap}$.

□

Algebra: $(q, E|_{\mathsf{to}}\, x)$. $(q, E|_{\mathsf{to}\, n}\, x)$.
Grid0. **Grid1**.

Ersterstellung: 22/01/16 **Letzte Änderung: 23/05/16**

374-1. In etwas verklausulierter Form erscheint die Verallgemeinerung der gerichteten Summation in den Essays. Als Vorbereitung wird $\mathtt{374.0}(D)$ definiert.

374-1(Definition)

1) $\mathtt{374.0}(D) = \{(\lambda, \mu) : \mu \in \bigcup [\lambda \overset{D}{|} \cdot\rangle\}$
$= \{\omega : (\exists \Omega, \Phi : (\Phi \in [\Omega \overset{D}{|} \cdot\rangle) \wedge (\omega = (\Omega, \Phi)))\}$.

2) $(q, E|_{\mathsf{to}}\, x) = \mathtt{374.0}(\mathtt{rf}3qEx)$.

3) $(q, E|_{\mathsf{to}\, n}\, x) = (q, E|_{\mathsf{to}}\, x)\,(n)$.

374-2. Für das "Element-Sein" geordneter Paare in $\mathsf{374.0}(D)$ ist ein Kriterium verfügbar.

<u>**374-2(Satz)**</u>

a) "$(p,q) \in \mathsf{374.0}(D)$" *genau dann, wenn* "$q \in \bigcup [p \overset{D}{|} \cdot\rangle$"
genau dann, wenn "$\exists \Omega : q \in \Omega \in [p \overset{D}{|} \cdot\rangle$"
genau dann, wenn "$\exists \Omega : (q \in \Omega) \wedge ((p,\Omega) \in D)$".

b) *Aus* "$q \in u \in [p \overset{D}{|} \cdot\rangle$" *folgt* "$(p,q) \in \mathsf{374.0}(D)$.

c) *Aus* "$(p,u) \in D$" *und* "$q \in u$" *folgt* "$(p,q) \in \mathsf{374.0}(D)$".

d) $\mathsf{374.0}(D)$ *Relation.*

e) $\mathsf{dom}\,(\mathsf{374.0}(D)) = D^{-1}[\mathcal{U} \setminus \{0\}]$.

f) $\mathsf{ran}\,(\mathsf{374.0}(D)) \subseteq \bigcup \mathsf{ran}\, D$.

g) *Aus* "D *Menge*" *folgt* "$\mathsf{374.0}(D)$" *Menge.*

h) *Aus* "f *Funktion*" *und* "$\mathsf{ran}\, f \subseteq \mathcal{U}_1$" *folgt* "$\mathsf{374.0}(f)$ *Funktion*"

$$\mathsf{374.0}(D) = \{(\lambda,\mu) : \mu \in \bigcup [\lambda \overset{D}{|} \cdot\rangle\}$$

<u>Beweis **374-2**</u> `a)` $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $(p,q) \in \texttt{374.0}(D)$.

`1:` Aus `VS` gleich “$(p,q) \in \texttt{374.0}(D)$”
folgt **p.def.**: $\exists \Omega, \Phi : (\Phi \in \bigcup [\Omega \overset{D}{|} \cdot\rangle) \wedge ((p,q) = (\Omega, \Phi))$.

`2:` Aus `VS` gleich “$\ldots (p,q) \in \texttt{374.0}(D)$”
folgt via **ElementAxiom**: (p,q) Menge.

`3:` Aus `1`“$\ldots (p,q) = (\Omega, \Phi)$” und
aus `2`“(p,q) Menge”
folgt via **IGP**: $(p = \Omega) \wedge (q = \Phi)$.

`4:` Aus `1`“$\ldots \Phi \in \bigcup [\Omega \overset{D}{|} \cdot\rangle \ldots$” und
aus `3`“$p = \Omega \ldots$”
folgt: $\Phi \in \bigcup [p \overset{D}{|} \cdot\rangle$.

`5:` Aus `4` und
aus `3`“$\ldots q = \Phi$”
folgt: $q \in \bigcup [p \overset{D}{|} \cdot\rangle$.

`a)` $\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}$ `VS` gleich $q \in \bigcup [p \overset{D}{|} \cdot\rangle$.

Aus `VS` gleich “$q \in \bigcup pD$”
folgt via **folk**: $\exists \Omega : q \in \Omega \in [p \overset{D}{|} \cdot\rangle$.

`a)` $\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{iv)}}$ `VS` gleich $\exists \Omega : q \in \Omega \in [p \overset{D}{|} \cdot\rangle$.

`1:` Aus `VS` gleich “$\ldots \Omega \in [p \overset{D}{|} \cdot\rangle$”
folgt via **41-25**: p_D_Ω.

`2:` Aus `1`
folgt: $(p, \Omega) \in D$.

`3:` Aus `VS` gleich “$\exists \Omega \ldots$”,
aus `VS` gleich “$\ldots q \in \Omega \ldots$” und
aus `2`
folgt: $\exists \Omega : (q \in \Omega) \wedge ((p, \Omega) \in D)$.

<u>Beweis **374-2**</u> `a)` $\boxed{\boxed{\texttt{iv)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $\exists \Omega : (q \in \Omega) \wedge ((p, \Omega) \in D)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots (p, \Omega) \in D$"
folgt: p_D_Ω.

`2:` Aus `1`"p_D_Ω"
folgt via **41-25**: $\Omega \in [p \overset{D}{|} \cdot\rangle$.

`3:` Aus `VS` gleich "$\ldots q \in \Omega \ldots$" und
aus `2`"$\Omega \in [p \overset{D}{|} \cdot\rangle$"
folgt via **folk**: $q \in \bigcup [p \overset{D}{|} \cdot\rangle$.

`4:` Aus `3`"$q \in \bigcup [p \overset{D}{|} \cdot\rangle$"
folgt: $\exists \Gamma, \Psi : (\Gamma = p) \wedge (\Psi = q)$.

`5.1:` Aus `3` und
aus `4`"$\ldots \Gamma = p \ldots$"
folgt: $q \in \bigcup [\Gamma \overset{D}{|} \cdot\rangle$.

`5.2:` Aus `4`"$\ldots (\Gamma = p) \wedge (\Psi = q)$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Gamma, \Psi) = (p, q)$.

`5.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots q \in \Omega \ldots$"
folgt via **ElementAxiom**: q Menge.

`5.4:` Aus `1`"p_D_Ω"
folgt via **folk**: p Menge.

`6.1:` Aus `5.1` und
aus `4`"$\ldots \Psi = q$"
folgt: $\Psi \in \bigcup [\Gamma \overset{D}{|} \cdot\rangle$.

`6.2:` Aus `5.4`"p Menge" und
aus `5.3`"q Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: (p, q) Menge.

`6.3:` Aus `5.2`
folgt: $(p, q) = (\Gamma, \Psi)$.

`7:` Aus `4`"$\exists \Gamma, \Psi \ldots$",
aus `6.1` und
aus `6.3`
folgt: $\exists \Gamma, \Psi : (\Psi \in \bigcup [\Gamma \overset{D}{|} \cdot\rangle) \wedge ((p, q) = (\Gamma, \Psi))$.

...

Beweis **374-2** a) $\boxed{\text{iv)} \Rightarrow \text{i)}}$ VS gleich $\exists \Omega : (q \in \Omega) \wedge ((p, \Omega) \in D)$.

...

8: Aus 7 “$\exists \Gamma, \Psi : (\Psi \in \bigcup [\Gamma \stackrel{D}{|} \cdot\rangle) \wedge ((p, q) = (\Gamma, \Psi))$” und
aus 6.2 “(p, q) Menge”
folgt **p.def.**: $(p, q) \in 374.0(D)$.

b) VS gleich $q \in u \in [p \stackrel{D}{|} \cdot\rangle$.

1: Aus VS gleich “$q \in u \in [p \stackrel{D}{|} \cdot\rangle$”
folgt: $\exists \Omega : \Omega = u$.

2: Aus 1 “$\ldots \Omega = u$” und
aus VS
folgt: $p \in \Omega \in [p \stackrel{D}{|} \cdot\rangle$.

3: Aus 1 “$\exists \Omega \ldots$” und
aus 2
folgt: $\exists \Omega : q \in \Omega \in [p \stackrel{D}{|} \cdot\rangle$.

4: Aus 3 “$\exists \Omega : q \in \Omega \in [p \stackrel{D}{|} \cdot\rangle$”
folgt via des bereits bewiesenen a): $(p, q) \in 374.0(D)$.

c) VS gleich $(q \in u) \wedge ((p, u) \in D)$.

1: Aus VS gleich “$q \in u \ldots$”
folgt: $\exists \Omega : \Omega = u$.

2.1: Aus VS gleich “$q \in u \ldots$” und
aus 1 “$\ldots \Omega = u$”
folgt: $q \in \Omega$.

2.2: Aus 1 “$\ldots \Omega = u$”
folgt via **PaarAxiom I**: $(p, \Omega) = (p, u)$.

3: Aus 2.2 und
aus VS gleich “$\ldots (p, u) \in D$”
folgt: $(p, \Omega) \in D$.

4: Aus 1 “$\exists \Omega \ldots$”,
aus 2.1 “$q \in \Omega$” und
aus 3 “$(p, \Omega) \in D$”
folgt: $\exists \Omega : (q \in \Omega) \wedge ((p, \Omega) \in D)$.

...

<u>Beweis **374-2**</u> `c)` `VS` gleich $(q \in u) \wedge ((p, u) \in D)$.

...

`5:` Aus `4`“$\exists \Omega : (q \in \Omega) \wedge ((p, \Omega) \in D)$”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $(p, q) \in \mathsf{374.0}(D)$.

`d)`

$\boxed{\texttt{Thema0}}$ $\alpha \in \mathsf{374.0}(D)$.

Aus `Thema0`“$\alpha \in \mathsf{374.0}(D)$”
folgt **p.def.**: $\exists \Omega, \Phi : \alpha = (\Omega, \Phi)$.

Ergo `Thema0`: $\forall \alpha.(\alpha \in \mathsf{374.0}(D)) \Rightarrow (\exists \Omega, \Phi : \alpha = (\Omega, \Phi))$.

Konsequenz via **folk**: $\mathsf{374.0}(D)$ Relation.

<u>Beweis **374-2**</u> `e)`

$\boxed{\texttt{Thema0.1}}$ $\alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{374.0}(D)\,)$.

`1:` Aus `Thema0.1`“$\alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{374.0}(D)\,)$”
folgt via **folk**: $\exists \Psi : (\alpha, \Psi) \in \mathsf{374.0}(D)\,.$

`2:` Aus `1`“$\ldots (\alpha, \Psi) \in \mathsf{374.0}(D)$ ”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$\exists \Omega : (\Psi \in \Omega) \wedge ((\alpha, \Omega) \in D).$

`3.1:` Aus `2`“$\ldots \Psi \in \Omega \ldots$”
folgt via **folk**: $0 \neq \Omega.$

`3.2:` Aus `2`“$\ldots (\alpha, \Omega) \in D$”
folgt via **folk**: Ω Menge.

`4:` Aus `3.1`“$0 \neq \Omega$” und
aus `3.2`“Ω Menge”
folgt via **332-1**: $\Omega \in \mathcal{U} \setminus \{0\}.$

`5:` Aus `2`“$\ldots (\alpha, \Omega) \in D$” und
aus `4`“$\Omega \in \mathcal{U} \setminus \{0\}$”
folgt via **folk**: $\alpha \in D^{-1}[\mathcal{U} \setminus \{0\}.$

Ergo `Thema0.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{374.0}(D)\,)) \Rightarrow (\alpha \in D^{-1}[\mathcal{U} \setminus \{0\}]).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | “$\mathsf{dom}\,(\mathsf{374.0}(D)\,) \subseteq D^{-1}[\mathcal{U} \setminus \{0\}]$”

...

Beweis **374-2** `e)` ...

$\boxed{\texttt{Thema0.2}}$ $\alpha \in D^{-1}[\mathcal{U} \setminus \{0\}]$.

`1:` Aus `Thema0.2`"$\alpha \in D^{-1}[\mathcal{U} \setminus \{0\}]$"
folgt via **folk**: $\exists \Gamma : (\Gamma \in \mathcal{U} \setminus \{0\}) \wedge ((\alpha, \Gamma) \in D)$.

`2:` Aus `1`"$\ldots \Gamma \in \mathcal{U} \setminus \{0\} \ldots$"
folgt via **332-1**: $0 \neq \Gamma$ Menge.

`3:` Aus `2`"$0 \neq \Gamma \ldots$"
folgt via **folk**: $\exists \Omega : \Omega \in \Gamma$.

`4:` Aus `1`"$\ldots (\alpha, \Gamma) \in D$" und
aus `3`"$\ldots \Omega \in \Gamma$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $(\alpha, \Omega) \in \mathsf{374.0}(D)$.

`5:` Aus `4`"$(\alpha, \Omega) \in \mathsf{374.0}(D)$"
folgt via **folk**: $\alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{374.0}(D))$.

Ergo `Thema0.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in D^{-1}[\mathcal{U} \setminus \{0\}]) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{374.0}(D)))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A2} \mid \text{"} D^{-1}[\mathcal{U} \setminus \{0\}] \subseteq \mathsf{dom}\,(\mathsf{374.0}(D)) \text{"}}$

`1:` Aus `A1` gleich "$\mathsf{dom}\,(\mathsf{374.0}(D)) \subseteq D^{-1}[\mathcal{U} \setminus \{0\}]$" und
aus `A2` gleich "$D^{-1}[\mathcal{U} \setminus \{0\}] \subseteq \mathsf{dom}\,(\mathsf{374.0}(D))$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathsf{dom}\,(\mathsf{374.0}(D)) = D^{-1}[\mathcal{U} \setminus \{0\}]$.

<u>Beweis **374-2** `f)`</u>

$\boxed{\texttt{Thema0}}$ $\alpha \in \mathsf{ran}\,(\mathsf{374.0}(D)\,)$.

`1:` Aus `Thema0`“$\alpha \in \mathsf{ran}\,(\mathsf{374.0}(D)\,)$”
folgt via **folk**: $\exists \Gamma : (\Gamma, \alpha) \in \mathsf{374.0}(D)\,.$

`2:` Aus `1`“$\ldots(\Gamma, \alpha) \in \mathsf{374.0}(D)$ ”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$\exists \Omega : \alpha \in \Omega \in [\Gamma \overset{D}{|} \cdot\rangle$.

`3:` Via **41-26** gilt: $[\Gamma \overset{D}{|} \cdot\rangle \subseteq \mathsf{ran}\,D$.

`4:` Aus `2`“$\ldots\Omega \in [\Gamma \overset{D}{|} \cdot\rangle$” und
aus `3`“$[\Gamma \overset{D}{|} \cdot\rangle \subseteq \mathsf{ran}\,D$”
folgt via **folk**: $\Omega \in \mathsf{ran}\,D$.

`5:` Aus `2`“$\ldots\alpha \in \Omega\ldots$” und
aus `4`“$\Omega \in \mathsf{ran}\,D$”
folgt via **folk**: $\alpha \in \bigcup \mathsf{ran}\,D$.

Ergo `Thema0`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{ran}\,(\mathsf{374.0}(D)\,)) \Rightarrow (\alpha \in \bigcup \mathsf{ran}\,D)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\mathsf{ran}\,(\mathsf{374.0}(D)\,) \subseteq \bigcup \mathsf{ran}\,D$.

<u>Beweis **374-2**</u> `g)` `VS` gleich D Menge.

`1:` Aus `VS` gleich "D Menge"
folgt via $\mathsf{dom}\,\mathsf{ran}$ **Axiom**: $\mathsf{dom}\,D, \mathsf{ran}\,D$ Menge.

`2.1:` Via **folk** gilt: $D^{-1}[\mathcal{U} \setminus \{0\}] \subseteq \mathsf{dom}\,D$.

`2.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots \mathsf{ran}\,D$ Menge"
folgt via $\bigcup$**Axiom**: $\bigcup \mathsf{ran}\,D$ Menge.

`3.1:` Via des bereits bewiesenen `e)` gilt: $\mathsf{dom}\,(374.0(D)) = D^{-1}[\mathcal{U} \setminus \{0\}]$.

`3.2:` Via des bereits bewiesenen `f)` gilt: $\mathsf{ran}\,(374.0(D)) \subseteq \bigcup \mathsf{ran}\,D$.

`4.1:` Aus `3.1` und
aus `2.1`
folgt: $\mathsf{dom}\,(374.0(D)) \subseteq \mathsf{dom}\,D$.

`4.2:` Aus `3.2`"$\mathsf{ran}\,(374.0(D)) \subseteq \bigcup \mathsf{ran}\,D$" und
aus `2.2`"$\bigcup \mathsf{ran}\,D$ Menge"
folgt via **TeilMengenAxiom**: $\mathsf{ran}\,(374.0(D))$ Menge.

`5:` Aus `4.1`"$\mathsf{dom}\,(374.0(D)) \subseteq \mathsf{dom}\,D$" und
aus `1`"$\mathsf{dom}\,D \ldots$ Menge"
folgt via **TeilMengenAxiom**: $\mathsf{dom}\,(374.0(D))$ Menge.

`6:` Via des bereits bewiesenen `d)` gilt: $374.0(D)$ Relation.

`7:` Aus `6`"$374.0(D)$ Relation",
aus `5`"$\mathsf{dom}\,(374.0(D))$ Menge" und
aus `4.2`"$\mathsf{ran}\,(374.0(D))$ Menge"
folgt via **10-5**: $374.0(D)$ Menge.

<u>Beweis **374-2**</u> `h) VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{ran}\, f \subseteq \mathcal{U}_1)$.

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `d)` gilt: $\mathsf{374.0}(f)$ Relation.

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $(\alpha, \beta), (\alpha, \gamma) \in \mathsf{374.0}(f)$.

`2.1:` Aus `Thema1.2`“$(\alpha, \beta) \ldots \in \mathsf{374.0}(f)$”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$\exists \Omega : (\beta \in \Omega) \wedge ((\alpha, \Omega) \in f)$.

`2.2:` Aus `Thema1.2`“$\ldots (\alpha, \gamma) \in \mathsf{374.0}(f)$”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$\exists \Gamma : (\gamma \in \Gamma) \wedge ((\alpha, \Gamma) \in f)$.

`3.1:` Aus `2.1`“$\ldots (\alpha, \Omega) \in f$”
folgt via **folk**: $\Omega \in \mathsf{ran}\, f$.

`3.2:` Aus `VS` gleich “f Funktion…”,
aus `2.1`“$\ldots (\alpha, \Omega) \in f$” und
aus `2.2`“$\ldots (\alpha, \Gamma) \in f$”
folgt via **18-18(Def)**: $\Omega = \Gamma$.

`4.1:` Aus `3.1`“$\Omega \in \mathsf{ran}\, f$” und
aus `VS` gleich “$\ldots \mathsf{ran}\, f \subseteq \mathcal{U}_1$”
folgt via **folk**: $\Omega \in \mathcal{U}_1$.

`4.2:` Aus `2.2`“$\ldots \gamma \in \Gamma \ldots$” und
aus `3.2`
folgt: $\gamma \in \Omega$.

`5:` Aus `4.1`“$\Omega \in \mathcal{U}_1$”
folgt via **240-3**: $\exists \Psi : \Omega = \{\Psi\}$.

`6.1:` Aus `2.1`“$\ldots \beta \in \Omega \ldots$” und
aus `5`“$\ldots \Omega = \{\Psi\}$”
folgt: $\beta \in \{\Psi\}$.

`6.2:` Aus `4.2` und
aus `5`“$\ldots \Omega = \{\Psi\}$”
folgt: $\gamma \in \{\Psi\}$.

`7.1:` Aus `6.1`“$\beta \in \{\Psi\}$”
folgt via **folk**: $\beta = \Psi$.

`7.2:` Aus `6.2`“$\gamma \in \{\Psi\}$”
folgt via **folk**: $\gamma = \Psi$.

…

…

<u>Beweis **374-2**</u> `h)` `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{ran}\, f \subseteq \mathcal{U}_1)$.

...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $(\alpha, \beta), (\alpha, \gamma) \in \mathsf{374.0}(f)$.

...

`8:` Aus `7.1` und
aus `7.2`
folgt: $\beta = \gamma$.

Ergo `Thema1.2`: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{“}\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha, \beta), (\alpha, \gamma) \in \mathsf{374.0}(f)) \Rightarrow (\beta = \gamma)\text{”}}$

`2:` Aus `1.1`“$\mathsf{374.0}(f)$ Relation” und
aus `A1` gleich “$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha, \beta), (\alpha, \gamma) \in \mathsf{374.0}(f)) \Rightarrow (\beta = \gamma)$”
folgt via **18-18(Def)**: $\mathsf{374.0}(f)$ Funktion.

$\square$

374-3. Die Präsentation erster Eigenschaften von $(q, E|_{\mathsf{to}}\, x)$ setzt die Untersuchungen fort.

374-3(Satz)

a) $(q, E|_{\mathsf{to}}\, x)$ *Relation.*

b) *Aus "R ist* **ana3** *von q, ϕ, f" und "ϕ, f Funktion"*
folgt "$\mathsf{ran}\, R \subseteq \mathcal{U}_1$".

c) *Aus "ϕ, f Funktion" folgt* "$\mathsf{ran}\,(\mathtt{rf3}q\phi f) \subseteq \mathcal{U}_1$".

d) *Aus "ϕ, f Funktion" folgt "$(q, \phi|_{\mathsf{to}}\, f)$ Funktion".*

e) $\mathsf{dom}\ (q, E|_{\mathsf{to}}\, x) = (\mathtt{rf3}qEx)^{-1}[\mathcal{U} \setminus \{0\}]$.

f) $\mathsf{dom}\ (q, E|_{\mathsf{to}}\, x) \subseteq \mathbb{N}$.

g) $\mathsf{ran}\ (q, E|_{\mathsf{to}}\, x) \subseteq \{q\} \cup \mathsf{ran}\, E$.

h) *Aus "ϕ, f Funktion"*
folgt $(q, \phi|_{\mathsf{to}}\, f) : (\mathtt{rf3}q\phi f)^{-1}[\mathcal{U} \setminus \{0\}] \to \{q\} \cup \mathsf{ran}\, \phi$.

i) $(q, E|_{\mathsf{to}}\, x)$ *Menge.*

Beweis **374-3**

$$\mathsf{374.0}(\mathtt{rf3}qEx) = \{(\lambda, \mu) : \mu \in \bigcup\,[\lambda \overset{\mathtt{rf3}qEx}{|} \cdot\rangle\}.$$

a)

1: Via **374-2** gilt: $\mathsf{374.0}(\mathtt{rf3}qEx)$ Relation.

2: Via **374-1(Def)** gilt: $(q, E|_{\mathsf{to}}\, x) = \mathsf{374.0}(\mathtt{rf3}qEx)$.

3: Aus 1 und
aus 2
foglt: $(q, E|_{\mathsf{to}}\, x)$ Relation.

Beweis **374-3** b) VS gleich $(R \text{ ist } \mathbf{ana3} \text{ von } q, \phi, f) \wedge (\phi, f \text{ Funktion})$.

$\boxed{\texttt{Thema0}}$ $\alpha \in \mathsf{ran}\, R$.

1: Aus VS gleich "R ist **ana3** von $q, \phi, f \ldots$"
folgt via **370-1(Def)**: R Funktion.

2: Aus 1"$\ldots R$ Funktion" und
aus Thema0"$\alpha \in \mathsf{ran}\, R$"
folgt via **folk**: $\exists \Omega : (\Omega \in \mathsf{dom}\, R) \wedge (\alpha = R(\Omega))$.

3: Aus VS gleich "R ist **ana3** von $q, \phi, f \ldots$",
aus VS gleich "$\ldots \phi, f$ Funktion" und
aus 2"$\ldots \Omega \in \mathsf{dom}\, R \ldots$"
folgt via **372-8**: $R(\Omega) \in \mathcal{U}_1$.

4: Aus 2"$\ldots \alpha = R(\Omega)$" und
aus 3
folgt: $\alpha \in \mathcal{U}_1$.

Ergo Thema0: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{ran}\, R) \Rightarrow (\alpha \in \mathcal{U}_1)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\mathsf{ran}\, R \subseteq \mathcal{U}_1$.

c) VS gleich ϕ, f Funktion.

1: Via **370-9** gilt: $\texttt{rf3}q\phi f$ ist **ana3** von q, ϕ, f.

2: Aus 1"$\texttt{rf2}q\phi f$ ist **ana3** von q, ϕ, f" und
aus VS gleich "ϕ, f Funktion"
folgt via des bereits bewiesenen b): $\mathsf{ran}\,(\texttt{rf3}q\phi f) \subseteq \mathcal{U}_1$.

<u>Beweis **374-3**</u> `d)` `VS` gleich ϕ, f Funktion.

1: Aus `VS` gleich "f, ϕ Funktion"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $\mathsf{ran}\,(\mathtt{rf3}q\phi f) \subseteq \mathcal{U}_1$.

2: Via **370-9** gilt: $\mathtt{rf3}q\phi f$ Funktion.

3: Aus 2"$\mathtt{rf3}q\phi f$ Funktion" und
aus 1"$\mathsf{ran}\,(\mathtt{rf3}q\phi f) \subseteq \mathcal{U}_1$"
folgt via **374-2**: $\mathsf{374.0}(\mathtt{rf3}q\phi f)$ Funktion.

4: Via **374-1(Def)** gilt: $(q, \phi|_{\mathsf{to}}\, f) = \mathsf{374.0}(\mathtt{rf3}q\phi f)$.

5: Aus 4 und
aus 3
folgt: $(q, \phi|_{\mathsf{to}}\, f)$ Funktion.

`e)`

$$\mathsf{dom}\ (q, E|_{\mathsf{to}}\, x) \stackrel{\mathbf{374-1(Def)}}{=} \mathsf{dom}\,(\mathsf{374.0}(\mathtt{rf3}qEx)) \stackrel{\mathbf{374-2}}{=} (\mathtt{rf3}qEx)^{-1}[\mathcal{U} \setminus \{0\}].$$

`f)`

1: Via des bereits bewiesenen `e)` gilt:
$\mathsf{dom}\ (q, E|_{\mathsf{to}}\, x) = (\mathtt{rf3}qEx)^{-1}[\mathcal{U} \setminus \{0\}]$.

2: Via **folk** gilt: $(\mathtt{rf3}qEx)^{-1}[\mathcal{U} \setminus \{0\}] \subseteq \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf3}qEx)$.

3: Via **370-9** gilt: $\mathsf{dom}\,(\mathtt{rf3}qEx) \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

4: Aus 2"$(\mathtt{rf3}qEx)^{-1}[\mathcal{U} \setminus \{0\}] \subseteq \mathsf{dom}\,(\mathtt{rf3}qEx)$" und
aus 3"$\mathsf{dom}\,(\mathtt{rf3}qEx) \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$"
folgt via **343-3**: $(\mathtt{rf3}qEx)^{-1}[\mathcal{U} \setminus \{0\}] \subseteq \mathbb{N}$.

5: Aus 1 und
aus 4
folgt: $\mathsf{dom}\ (q, E|_{\mathsf{to}}\, x) \subseteq \mathbb{N}$.

<u>Beweis **374-3**</u> g)

1.1: Via **374-2** gilt: $\mathsf{ran}\,(374.0(\mathtt{rf3}qEx)\,) \subseteq \bigcup \mathsf{ran}\,(\mathtt{rf3}qEx)$.

1.2: Via **374-1(Def)** gilt: $374.0(\mathtt{rf3}qEx) = (q, E|_{\mathsf{to}}\, x)$.

1.3: Via **372-4** gilt: $\mathsf{ran}\,(\mathtt{rf3}qEx) \subseteq \mathcal{P}(\{q\} \cup \mathsf{ran}\, E)$.

2.1: Aus 1.1 und
aus 1.2
folgt: $\mathsf{ran}\ (q, E|_{\mathsf{to}}\, x) \subseteq \bigcup \mathsf{ran}\,(\mathtt{rf3}qEx)$.

2.2: Aus 1.3 "$\mathsf{ran}\,(\mathtt{rf3}qEx) \subseteq \mathcal{P}(\{q\} \cup \mathsf{ran}\, E)$"
folgt via **1-15**: $\bigcup \mathsf{ran}\,(\mathtt{rf3}qEx) \subseteq \bigcup \mathcal{P}(\{q\} \cup \mathsf{ran}\, E)$.

3: Aus 2.1 "$\mathsf{ran}\ (q, E|_{\mathsf{to}}\, x) \subseteq \bigcup \mathsf{ran}\,(\mathtt{rf3}qEx)$" und
aus 2.2 "$\bigcup \mathsf{ran}\,(\mathtt{rf3}qEx) \subseteq \bigcup \mathcal{P}(\{q\} \cup \mathsf{ran}\, E)$"
folgt via **folk**: $\mathsf{ran}\ (q, E|_{\mathsf{to}}\, x) \subseteq \bigcup \mathcal{P}(\{q\} \cup \mathsf{ran}\, E)$.

4: Via **1-19** gilt: $\bigcup \mathcal{P}(\{q\} \cup \mathsf{ran}\, E) = \{q\} \cup \mathsf{ran}\, E$.

5: Aus 3 und
aus 4
folgt: $\mathsf{ran}\ (q, E|_{\mathsf{to}}\, x) \subseteq \{q\} \cup \mathsf{ran}\, E$.

h) VS gleich ϕ, f Funktion.

1.1: Aus VS gleich "ϕ, f Funktion"
folgt via des bereits bewiesenen d): $(q, \phi|_{\mathsf{to}}\, f)$ Funktion.

1.2: Via des bereits bewiesenen e) gilt: $\mathsf{dom}\ (q, \phi|_{\mathsf{to}}\, f) = (\mathtt{rf3}q\phi f)^{-1}[\mathcal{U} \setminus \{0\}]$.

1.3: Via des bereits bewiesenen g) gilt: $\mathsf{ran}\ (q, \phi|_{\mathsf{to}}\, f) \subseteq \{q\} \cup \mathsf{ran}\, \phi$.

2: Aus 1.1 "$(q, \phi|_{\mathsf{to}}\, f)$ Funktion",
aus 1.2 "$\mathsf{dom}\ (q, \phi|_{\mathsf{to}}\, f) = (\mathtt{rf3}q\phi f)^{-1}[\mathcal{U} \setminus \{0\}]$" und
aus 1.3 "$\mathsf{ran}\ (q, \phi|_{\mathsf{to}}\, f) \subseteq \{q\} \cup \mathsf{ran}\, \phi$"
folgt via **21-1(Def)**: $(q, \phi|_{\mathsf{to}}\, f) : (\mathtt{rf3}q\phi f)^{-1}[\mathcal{U} \setminus \{0\}] \to \{q\} \cup \mathsf{ran}\, \phi$.

<u>Beweis **374-3** `i)`</u>

`1:` Via **372-9** gilt: $\mathtt{rf}3qEx$ Menge.

`2:` Aus `1`“$\mathtt{rf}3qEx$ Menge”
folgt via **374-2**: $\mathtt{374.0}(\mathtt{rf}3qEx)$ Menge.

`3:` Via **374-1(Def)** gilt: $(q, E|_{\mathsf{to}}\, x) = \mathtt{374.0}(\mathtt{rf}3qEx)$.

`4:` Aus `3` und
aus `2`
folgt: $(q, E|_{\mathsf{to}}\, x)$ Menge.

□

374-4. Die Mengenlehre ist noch lange nicht zu Ende.

374-4(Satz) *Die Aussagen* `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` $x = y$.

`ii)` "$x \subseteq y$" *und* "$y \setminus x = 0$".

`iii)` "$y \subseteq x$" *und* "$x \setminus y = 0$".

<u>Beweis **374-4**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $x = y.$

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x = y$"

folgt via **folk**: $\boxed{x \subseteq y}$

`1.2:` Aus `VS` gleich "$x = y$"

folgt via **5-8**: $\boxed{y \setminus x = 0}$

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $(x \subseteq y) \wedge (y \setminus x = 0).$

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \setminus x = 0$"
folgt via **5-6**: $y \subseteq x.$

`2:` Aus `VS` gleich "$x \subseteq y \ldots$" und
aus `1`"$y \subseteq x$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $x = y.$

`3.1:` Aus `2`"$x = y$"

folgt via **folk**: $\boxed{y \subseteq x}$

`3.2:` Aus `2`"$x = y$"

folgt via **5-8**: $\boxed{x \setminus y = 0}$

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(y \subseteq x) \wedge (x \setminus y = 0).$

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \setminus y = 0$"
folgt via **5-6**: $x \subseteq y.$

`2:` Aus `1`"$x \subseteq y$" und
aus `VS` gleich "$y \subseteq x \ldots$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $x = y.$

$\square$

374-5. Vorheriges Resultat ladet zum Negieren ein.

374-5(Satz) *Die Aussagen* `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` $x \neq y$.

`ii)` $(x \not\subseteq y) \vee (0 \neq y \setminus x)$.

`iii)` $(y \not\subseteq x) \vee (0 \neq x \setminus y)$.

Beweis **374-5**

`1:` Via **374-4** gilt:
$$(x = y) \Leftrightarrow ((x \subseteq y) \wedge (y \setminus x = 0)) \Leftrightarrow ((y \subseteq x) \wedge (x \setminus y = 0)).$$

`2:` Aus `1`
folgt:
$$(\neg(x = y)) \Leftrightarrow (\neg((x \subseteq y) \wedge (y \setminus x) = 0)) \Leftrightarrow (\neg((y \subseteq x) \wedge (x \setminus y = 0))).$$

`3:` Aus `2`
folgt:
$$(x \neq y) \Leftrightarrow ((x \not\subseteq y) \vee (0 \neq y \setminus x)) \Leftrightarrow ((y \not\subseteq x) \vee (0 \neq x \setminus y)).$$

□

374-6. Aus **374-5** ergibt sich eine nett zu lesende Folgerung.

374-6(Satz)

a) *Aus* "$x \subseteq y$" *und* "$x \neq y$" *folgt* "$0 \neq y \setminus x$".

b) *Aus* "$n, m \in \mathbb{N}$" *folgt* "$(n < m) \vee (m \leq n)$" *und* "$(n \leq m) \vee (m < n)$" *und* "$(n < m) \vee (n = m) \vee (m < n)$".

c) *Aus* "$0 \neq x \subseteq \mathbb{N}$" *und* "$o$ *obere* $\leq$ *_Schranke von* x" *und* "$o \in \mathbb{N}$" *folgt* "$\exists \Omega : (\Omega$ *ist* $\leq$ *_Maximum von* $x) \wedge (\Omega \in \mathbb{N})$".

d) *Aus* "$x \subseteq \mathbb{N}$" *und* "max *ist* $\leq$ *_Maximum von* x" *folgt* "$max \in \mathbb{N}$" *und* "$0 \neq x \subseteq 1 + max$".

e) *Aus* "$x \in 1 + n$" *und* "$n \in \mathbb{N}$" *folgt* "$(x = n) \vee (x \in n)$".

f) $\mathbb{N} \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

g) *Aus* "x *endlich*" *und* "y *unendlich*" *folgt* "$x \neq y$".

h) *Aus* "$n \in \mathbb{N}$" *folgt* "$n \neq \mathbb{N}$" *und* "$n \subset \mathbb{N}$".

i) *Aus* "$x, 1 + x \in n \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$" *folgt* "$0 \neq 1 + x \in n$" *und* "$1 + x \in n \setminus \{0\}$".

$\leq$.RECH-**Notation**.

Beweis **374-6** a) VS gleich $(x \subseteq y) \wedge (x \neq y)$.

1: Aus VS gleich "$\ldots x \neq y$"
folgt via **374-5**: $(x \not\subseteq y) \vee (0 \neq y \setminus x)$.

2: Aus 1
folgt **p.def.**: $(\neg(x \subseteq y)) \vee (0 \neq y \setminus x)$.

3: Aus 2 und
aus VS gleich "$x \subseteq y \ldots$"
folgt: $0 \neq y \setminus x$.

Beweis **374-6** `b)` `VS` gleich $n, m \in \mathbb{N}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$n, m \in \mathbb{N}$"
folgt via **159-11**: $n, m \in \mathbb{S}$.

`2.1:` Aus `1`"$n, m \in \mathbb{S}$"
folgt via **107-14**: $\boxed{(n < m) \vee (m \leq n)}$

`2.2:` Aus `1`"$n, m \in \mathbb{S}$"
folgt via **107-14**: $\boxed{(n \leq m) \vee (m < n)}$

`2.3:` Aus `1`"$n, m \in \mathbb{S}$"
folgt via **107-14**: $\boxed{(n < m) \vee (n = m) \vee (m < n)}$

`c)` `VS` gleich $(0 \neq x \subseteq \mathbb{N}) \wedge (o \text{ obere } \leq \text{\_Schranke von } x) \wedge (o \in \mathbb{N})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots o \in \mathbb{N}$"
folgt via **166-1**: $o \neq +\infty$.

`2:` Aus `VS` gleich "$(0 \neq x \subseteq \mathbb{N}) \wedge (o \text{ obere } \leq \text{\_Schranke von } x) \ldots$" und
aus `1`"$o \neq +\infty$"
folgt via **MMS**$\mathbb{N}$:
$$\exists \Omega : (\Omega \text{ ist } \leq \text{\_Maximum von } x) \wedge (\Omega \in \mathbb{N}).$$

<u>Beweis **374-6**</u> `d)` `VS` gleich $(x \subseteq \mathbb{N}) \wedge (max \text{ ist } \leq \text{\_Maximum von } x)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\dots max$ ist $\leq$ _Maximum von x"
folgt via **38-1(Def)**: $(max \in x) \wedge (max \text{ obere } \leq \text{\_Schranke von } x)$.

`2.1:` Aus `1`"$max \in x \dots$" und
aus `VS` gleich "$x \subseteq \mathbb{N} \dots$"

folgt via **folk**: $\boxed{max \in \mathbb{N}}$

`2.2:` Aus `1`"max $\in x \dots$"

folgt via **folk**: $\boxed{0 \neq x}$

`3:` Aus `VS` gleich "$x \subseteq \mathbb{N} \dots$",
aus `1`"$\dots max$ obere $\leq$ _Schranke von x" und
aus `2.1`"$max \in \mathbb{N}$"

folgt via **241-2**: $\boxed{x \subseteq 1 + max}$

`e)` `VS` gleich $(x \in 1 + n) \wedge (n \in \mathbb{N})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\dots n \in \mathbb{N}$"
folgt via **folk**: $1 + n \in \mathbb{N}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$x \in 1 + n \dots$" und
aus `1`"$1 + n \in \mathbb{N}$"
folgt via **338-5**: $(x = -1 + (1 + n)) \vee (x \in -1 + (1 + n))$.

`3:` Aus `VS` gleich "$\dots n \in \mathbb{N}$"
folgt via **297-4**: $-1 + (1 + n) = n$.

`4:` Aus 2 und
aus 3
folgt: $(x = n) \vee (x \in n)$.

`f)`

Aus **folk**"$\mathbb{N}$ Menge"
folgt via **folk**: $\mathbb{N} \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

<u>Beweis</u> **374-6** `g)` `VS` gleich $(x \text{ endlich}) \wedge (y \text{ unendlich})$.

`1:` Es gilt: $(x = y) \vee (x \neq y)$.

`wfFallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x = y$.

`2:` Aus `1.1.Fall` und
aus `VS` gleich "$\ldots y$ unendlich"
folgt: x unendlich.

`3:` Aus `2`"x unendlich"
folgt via **29-1(Def)**: $\neq (x \text{ endlich})$.

`2:` Nach `VS` gilt: x endlich.

`Ende wfFallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $x \neq y$.

`h)` `VS` gleich $n \in \mathbb{N}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$n \in \mathbb{N}$"
folgt via **197-4**: $n \subseteq \mathbb{N}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$n \in \mathbb{N}$"
folgt via **241-1**: n endlich.

`2:` Aus `1.2`"n endlich" und
aus **241-1**"$\mathbb{N}$ unendlich"

folgt via des bereits bewiesenen `g)`: $\boxed{n \neq \mathbb{N}}$

`3:` Aus `1.1`"$n \subseteq \mathbb{N}$" und
aus `2`"$n \neq \mathbb{N}$"

folgt via **57-1(Def)**: $\boxed{n \subset \mathbb{N}}$

<u>Beweis **374-6**</u> `i)` `VS` gleich $x, 1+x \in n \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

`1.1:` Aus `VS`

folgt: $\boxed{1+x \in n}$

`1.2:` Aus `VS` gleich "$x \ldots \in n \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$"
folgt via **337-9**: $x \in \mathbb{N}$.

`2:` Aus `1.2`"$x \in \mathbb{N}$"

folgt via **307-2**: $\boxed{0 \neq 1+x}$

`3:` Aus `2`"$0 \neq 1+x$" und
aus `1.1`"$1+x \in n$"

folgt via **folk**: $\boxed{1+x \in n \setminus \{0\}}$

□

374-7. Zu meiner Überraschung gibt es nicht gerade viel Hinreichendes für $x \in \mathbb{N}$. Dies soll anders werden.

374-7(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow)$ $0 \neq x \subseteq \mathbb{N}$.

$\rightarrow)$ $x \neq \mathbb{N}$.

$\rightarrow)$ $\forall \alpha, \beta : ((\alpha < \beta \in x) \wedge (\alpha \in \mathbb{N})) \Rightarrow (\alpha \in x)$.

Dann folgt "$x \in \mathbb{N}$".

$\leq$-Notation.

Beweis **374-7**

`RECH`-**Notation**.

1: Aus $\rightarrow)$ "$\ldots x \subseteq \mathbb{N}$" und
aus $\rightarrow)$ "$x \neq \mathbb{N}$"
folgt via **374-6**: $0 \neq \mathbb{N} \setminus x$.

2: Aus 1"$0 \neq \mathbb{N} \setminus x$"
folgt via **folk**: $\exists \Omega : \Omega \in \mathbb{N} \setminus x$.

3: Aus 2"$\ldots \Omega \in \mathbb{N} \setminus x$"
folgt via **folk**: $(\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (\Omega \notin x)$.

...

Beweis **374-7** ...

`Thema4` $\gamma \in x.$

5: Aus `Thema4`“$\gamma \in x$” und
aus →) “$\ldots x \subseteq \mathbb{N}$”
folgt via **folk**: $\gamma \in \mathbb{N}.$

6: Aus 5“$\gamma \in \mathbb{N}$” und
aus 3“$\Omega \in \mathbb{N} \ldots$”
folgt via **374-6**: $(\gamma \leq \Omega) \vee (\Omega < \gamma).$

`wfFallunterscheidung`

`6.1.Fall` $\Omega < \gamma.$

7: Aus `6.1.Fall`“$\Omega < \gamma$”,
aus `Thema4`“$\gamma \in x$”,
aus 3“$\Omega \in \mathbb{N} \ldots$” und
aus →) “$\forall \alpha, \beta : ((\alpha < \beta \in x) \wedge (\alpha \in \mathbb{N})) \Rightarrow (\alpha \in x)$”
folgt: $\Omega \in x.$

8: Via 3
gilt: $\Omega \notin x.$

`Ende wfFallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\gamma \leq \Omega.$

Ergo `Thema4`: `A1` | “$\forall \gamma : (\gamma \in x) \Rightarrow (\gamma \leq \Omega)$”

5: Aus →) “$0 \neq x \ldots$” und
aus `A1` gleich “$\forall \gamma : (\gamma \in x) \Rightarrow (\gamma \leq \Omega)$”
folgt via **35-3**: Ω obere $\leq$ _Schranke von $x.$

6: Aus →) “$0 \neq x \subseteq \mathbb{N}$”,
aus 5“Ω obere $\leq$ _Schranke von x” und
aus 3“$\Omega \in \mathbb{N} \ldots$”
folgt via **374-6**: $\exists \Phi : (\Phi$ ist $\leq$ _Maximum von $x) \wedge (\Phi \in \mathbb{N}).$

7.1: Aus →) “$\ldots x \subseteq \mathbb{N}$” und
aus 6“$\ldots \Phi$ ist $\leq$ _Maximum von $x \ldots$”
folgt via **374-6**: $x \subseteq 1 + \Phi.$

7.2: Aus 6“$\ldots \Phi$ ist $\leq$ _Maximum von $x \ldots$”
folgt via **38-1(Def)**: $\Phi \in x.$

...

Beweis **374-7** ...

$\boxed{\texttt{Thema8}}$ $\delta \in 1 + \Phi$.

9: Aus Thema8"$\delta \in 1 + \Phi$" und
aus 6"$\ldots \Phi \in \mathbb{N}$"
folgt via **374-6**: $(\delta = \Phi) \vee (\delta \in \Phi)$.

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

$\boxed{\texttt{9.1.Fall}}$ $\delta = \Phi$.

Aus 9.1.Fall und
aus 7.2
folgt: $\delta \in x$.

$\boxed{\texttt{9.2.Fall}}$ $\delta \in \Phi$.

10: Aus 9.2.Fall"$\delta \in \Phi$" und
aus 6"$\ldots \Phi \in \mathbb{N}$"
folgt via **307-2**: $(\delta \in \mathbb{N}) \wedge (\delta < \Phi)$.

11: Aus 10"$\ldots \delta < \Phi$",
aus 7.2"$\Phi \in x$",
aus 10"$\delta \in \mathbb{N} \ldots$" und
aus →)"$\forall \alpha, \beta : ((\alpha < \beta \in x) \wedge (\alpha \in \mathbb{N})) \Rightarrow (\alpha \in x)$"
folgt: $\delta \in x$.

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In beiden Fällen gilt: $\delta \in x$.

Ergo Thema8: $\forall \delta : (\delta \in 1 + \Phi) \Rightarrow (\delta \in x)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A2} \mid \text{“}1 + \Phi \subseteq x\text{”}}$

9: Aus 7.1"$x \subseteq 1 + \Phi$" und
aus A2 gleich "$1 + \Phi \subseteq x$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $x = 1 + \Phi$.

10: Aus 6"$\ldots \Phi \in \mathbb{N}$"
folgt via **folk**: $1 + \Phi \in \mathbb{N}$.

11: Aus 9 und
aus 10
folgt: $x \in \mathbb{N}$.

□

374-8. Die Voraussetzung "$0 \neq x \ldots$" in **374-7** ist natürlich verzichtbar.

374-8(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrowtail$) $x \subseteq \mathbb{N}$.

$\rightarrowtail$) $x \neq \mathbb{N}$.

$\rightarrowtail$) $\forall \alpha, \beta : ((\alpha < \beta \in x) \wedge (\alpha \in \mathbb{N})) \Rightarrow (\alpha \in x)$.

Dann folgt "$x \in \mathbb{N}$".

$\leq$-Notation.

Beweis **374-8**

1: Es gilt: $(x = 0) \vee (0 \neq x)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x = 0$.

Aus `1.1.Fall` "$x = 0$" und
aus $\in$**schola** "$0 \in \mathbb{N}$"
folgt: $x \in \mathbb{N}$.

`1.2.Fall` $0 \neq x$.

Aus `1.2.Fall` "$0 \neq x$",
aus $\rightarrowtail$) "$x \subseteq \mathbb{N}$",
aus $\rightarrowtail$) "$x \neq \mathbb{N}$" und
aus $\rightarrowtail$) "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha < \beta \in x) \wedge (\alpha \in \mathbb{N})) \Rightarrow (\alpha \in x)$"
folgt via **374-7**: $x \in \mathbb{N}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $x \in \mathbb{N}$.

$\square$

374-9. Nun bin ich auf den Geschmack gekommen. Hier ist noch weiter Hinreichendes für $x \in \mathbb{N}$.

374-9(Satz) *Es gelte:*

→) $x \subseteq \mathbb{N}$.

→) $x \neq \mathbb{N}$.

→) $\forall \alpha, \beta : (\alpha \in \beta \in x) \Rightarrow (\alpha \in x)$.

Dann folgt "$x \in \mathbb{N}$".

Beweis **374-9**

≤-Notation.

`Thema0` $(\gamma < \delta \in x) \wedge (\gamma \in \mathbb{N})$.

1: Aus `Thema0`"$\ldots \delta \in x \ldots$" und
aus →)"$x \subseteq \mathbb{N}$"
folgt via **folk**: $\delta \in \mathbb{N}$.

2: Aus `Thema0`"$\gamma < \delta \ldots$",
aus 1"$\delta \in \mathbb{N}$" und
aus `Thema0`"$\ldots \gamma \in \mathbb{N}$"
folgt via **197-5**: $\gamma \in \delta$.

3: Aus 2"$\gamma \in \delta$",
aus `Thema0`"$\ldots \delta \in x \ldots$" und
aus →)"$\forall \alpha, \beta : (\alpha \in \beta \in x) \Rightarrow (\alpha \in x)$"
folgt: $\gamma \in x$.

Ergo `Thema0`: `A1` | "$\forall \gamma, \delta : ((\gamma < \delta \in x) \wedge (\gamma \in \mathbb{N})) \Rightarrow (\gamma \in x)$"

1: Aus →)"$x \subseteq \mathbb{N}$",
aus →)"$x \neq \mathbb{N}$" und
aus `A1` gleich "$\forall \gamma, \delta : ((\gamma < \delta \in x) \wedge (\gamma \in \mathbb{N})) \Rightarrow (\gamma \in x)$"
folgt via **374-8**: $x \in \mathbb{N}$.

□

374-10. Wird in **374-8** auf die Voraussetzung $x \neq \mathbb{N}$ verzichtet ändert sich an anderer Stelle $\mathbb{N}$ zu $\{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

374-10(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow)$ $x \subseteq \mathbb{N}$.

$\rightarrow)$ $\forall \alpha, \beta : ((\alpha < \beta \in x) \wedge (\alpha \in \mathbb{N})) \Rightarrow (\alpha \in x)$.

Dann folgt "$x \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$".

Beweis **374-10**

1: Es gilt: $(x = \mathbb{N}) \vee (x \neq \mathbb{N})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x = \mathbb{N}$.

Aus `1.1.Fall` und
aus **374-6**"$\mathbb{N} \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$"
folgt: $x \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

`1.2.Fall` $x \neq \mathbb{N}$.

1: Aus $\rightarrow)$"$x \subseteq \mathbb{N}$",
aus `1.2.Fall`"$x \neq \mathbb{N}$" und
aus $\rightarrow)$"$\forall \alpha, \beta : ((\alpha < \beta \in x) \wedge (\alpha \in \mathbb{N})) \Rightarrow (\alpha \in x)$"
folgt via **374-8**: $x \in \mathbb{N}$.

2: Aus 2"$x \in \mathbb{N}$"
folgt via **folk**: $x \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $x \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

$\square$

374-11. Wird in **374-9** auf die Voraussetzung $x \neq \mathbb{N}$ verzichtet ändert sich an anderer Stelle $\mathbb{N}$ zu $\{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

374-11(Satz) *Es gelte:*

→) $x \subseteq \mathbb{N}$.

→) $\forall \alpha, \beta : (\alpha \in \beta \in x) \Rightarrow (\alpha \in x)$.

Dann folgt "$x \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$".

Beweis **374-11**

1: Es gilt: $(x = \mathbb{N}) \vee (x \neq \mathbb{N})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x = \mathbb{N}$.

Aus `1.1.Fall` und
aus **374-6**"$\mathbb{N} \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$"
folgt: $x \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

`1.2.Fall` $x \neq \mathbb{N}$.

1: Aus →) "$x \subseteq \mathbb{N}$",
aus `1.2.Fall` "$x \neq \mathbb{N}$" und
aus →) "$\forall \alpha, \beta : (\alpha \in \beta \in x) \Rightarrow (\alpha \in x)$"
folgt via **374-9**: $x \in \mathbb{N}$.

2: Aus 2"$x \in \mathbb{N}$"
folgt via **folk**: $x \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $x \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

□

374-12. Im Beweis von **374-3** ist eine Aussage versteckt, die nun in `a)` an die Oberfläche geholt werden soll.

374-12(Satz)

a) *Aus "R ist* **ana3** *von q, E, x" folgt "$R^{-1}[D] \subseteq \mathbb{N}$".*

b) *Aus "R ist* **ana3** *von q, E, x" folgt "$R^{-1}[\mathcal{U} \setminus \{0\}] \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$".*

c) $(\mathtt{rf}3qEx)^{-1}[D] \subseteq \mathbb{N}$.

d) $(\mathtt{rf}3qEx)^{-1}[\mathcal{U} \setminus \{0\}] \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

e) $\mathsf{dom}\,(q, E|_{\mathsf{to}}\, x) \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

Beweis **374-12** `a)` `VS` gleich R ist **ana3** von q, E, x.

`1.1:` Aus `VS` gleich "R ist **ana3** von q, E, x"
folgt via **370-1(Def)**: $\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

`1.2:` Via **folk** gilt: $R^{-1}[D] \subseteq \mathsf{dom}\, R$.

`2:` Aus `1.2`"$R^{-1}[D] \subseteq \mathsf{dom}\, R$" und
aus `1.1`"$\mathsf{dom}\, R \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$"
folgt via **343-3**: $R^{-1}[D] \subseteq \mathbb{N}$.

Beweis **374-12** `b)` `VS` gleich R ist **ana3** von q, E, x.

`1.1:` Aus `VS` gleich “R ist **ana3** von q, E, x”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $R^{-1}[\mathcal{U} \setminus \{0\}] \subseteq \mathbb{N}$.

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $(\alpha < \beta \in R^{-1}[\mathcal{U} \setminus \{0\}]) \wedge (\alpha \in \mathbb{N})$.

`2.1:` Aus `VS` gleich “R ist **ana3** von q, E, x”
folgt via **370-1(Def)**: R Funktion.

`2.2:` Aus `Thema1.2`“$\alpha < \beta \ldots$”
folgt via **41-3**: $\alpha \leq \beta$.

`3:` Aus `2.1`“R Funktion” und
aus `Thema1.2`“$\ldots \beta \in R^{-1}[\mathcal{U} \setminus \{0\}] \ldots$”
folgt via **18-29**: $(\beta \in \mathsf{dom}\, R) \wedge (R(\beta) \in \mathcal{U} \setminus \{0\})$.

`4.1:` Aus `VS` gleich “R ist **ana3** von q, E, x”,
aus `2.2`“$\alpha \leq \beta$”,
aus `3`“$\beta \in \mathsf{dom}\, R \ldots$” und
aus `Thema1.2`“$\ldots \alpha \in \mathbb{N}$”
folgt via **371-1**: $\alpha \in \mathsf{dom}\, R$.

`4.2:` Aus `3`“$\ldots R(\beta) \in \mathcal{U} \setminus \{0\}$”
folgt via **folk**: $R(\beta) \neq 0$.

`5.1:` Aus `4.1`“$\alpha \in \mathsf{dom}\, R$”
folgt via **folk**: $R(\alpha)$ Menge.

`5.2:` Aus `VS` gleich “R ist **ana3** von q, E, x”,
aus aus `3`“$\beta \in \mathsf{dom}\, R \ldots$”,
aus `4.2`“$R(\beta) \neq 0$” und
aus `2.2`“$\alpha \leq \beta$”
folgt via **372-6**: $R(\alpha) \neq 0$.

`6:` Aus `5.1`“$R(\alpha)$ Menge”
folgt via **folk**: $R(\alpha) \in \mathcal{U}$.

`7:` Aus `6`“$R(\alpha) \in \mathcal{U}$” und
aus `5.2`“$R(\alpha) \neq 0$”
folgt via **folk**: $R(\alpha) \in \mathcal{U} \setminus \{0\}$.

`8:` Aus `2.1`“R Funktion” und
aus `7`“$R(\alpha) \in \mathcal{U} \setminus \{0\}$”
folgt via **18-29**: $\alpha \in R^{-1}[\mathcal{U} \setminus \{0\}]$.

...

Beweis **374-12** `b)` `VS` gleich R ist **ana3** von q, E, x.

...

Ergo `Thema1.2`:

`A1`	"$\forall \alpha, \beta : ((\alpha < \beta \in R^{-1}[\mathcal{U} \setminus \{0\}]) \wedge (\alpha \in \mathbb{N})) \Rightarrow (\alpha \in R^{-1}[\mathcal{U} \setminus \{0\}])$"

`2:` Aus `1.1` "$R^{-1}[\mathcal{U} \setminus \{0\}] \subseteq \mathbb{N}$" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha < \beta \in R^{-1}[\mathcal{U} \setminus \{0\}]) \wedge (\alpha \in \mathbb{N}))$
$\Rightarrow (\alpha \in R^{-1}[\mathcal{U} \setminus \{0\}])$"
folgt via **374-10**: $R^{-1}[\mathcal{U} \setminus \{0\}] \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

`cd)`

`1:` Via **370-9** gilt: $\texttt{rf3}qEx$ ist **ana3** von q, E, x.

`2.c):` Aus `1` "$\texttt{rf3}qEx$ ist **ana3** von q, E, x"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $(\texttt{rf3}qEx)^{-1}[D] \subseteq \mathbb{N}$.

`2.d):` Aus `1` "$\texttt{rf3}qEx$ ist **ana3** von q, E, x"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $(\texttt{rf3}qEx)^{-1}[\mathcal{U} \setminus \{0\}] \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

`e)`

`1.1:` Via **374-3** gilt: $\mathsf{dom}\ (q, E|_{\mathsf{to}}\, x) = (\texttt{rf3}qEx)^{-1}[\mathcal{U} \setminus \{0\}]$.

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `d)` gilt: $(\texttt{rf3}qEx)^{-1}[\mathcal{U} \setminus \{0\}] \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $\mathsf{dom}\ (q, E|_{\mathsf{to}}\, x) \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

□

374-13. Ein kurzes Wort über $(q, E|_{\mathsf{to}\,n}\, x)$ - im Speziellen über $(q, E|_{\mathsf{to}\,0}\, x)$ - ist an dieser Stelle angebracht.

374-13(Satz)

a) *Aus* “f *Funktion*” *und* “$(p, q) \in \mathsf{374.0}(f)$” *folgt* “$p \in \mathsf{dom}\, f$” *und* “$q \in f(p)$”.

b) *Aus* “f *Funktion*” *und* “$p \in \mathsf{dom}\, f$” *und* “$q \in f(p)$” *folgt* “$(p, q) \in \mathsf{374.0}(f)$”.

c) *Aus* “f *Funktion*” *und* “$f(p) = 0$” *folgt* “$p \notin \mathsf{dom}\,(\mathsf{374.0}(f))$” *und* “$\mathsf{374.0}(f)\,(p) = \mathcal{U}$”.

d) *Aus* “f *Funktion*” *und* “$f(p) = \{q\}$” *und* “q *Menge*” *folgt* “$\mathsf{374.0}(f)\,(p) = q$”.

e) *Aus* “f *Funktion*” *und* “$f(p) = \{q\}$” *folgt* “$\mathsf{374.0}(f)\,(p) = \bigcap\{q\}$”.

f) *Aus* “f *Funktion*” *und* “$f(p) = \{q\}$” *und* “$(q$ *Menge*$) \vee (q = \mathcal{U})$” *folgt* “$\mathsf{374.0}(f)\,(p) = q$”.

g) $(q, E|_{\mathsf{to}\,0}\, x) = \bigcap\{q\}$.

h) “$(q, E|_{\mathsf{to}\,0}\, x) = q$” *genau dann, wenn* “$q$ *Menge*” *oder* “$q = \mathcal{U}$”.

$$\mathsf{374.0}(f) = \{(\lambda, \mu) : \mu \in \bigcup [\lambda \overset{f}{|} \cdot\rangle\}$$

<u>Beweis **374-13**</u> `a)` `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge ((p,q) \in \mathsf{374.0}(f))$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots (p,q) \in \mathsf{374.0}(f)$"
folgt via **374-2**: $\exists \Omega : (q \in \Omega) \wedge ((p,\Omega) \in f)$.

`2.1:` Aus `1`"$\ldots (p,\Omega) \in f$"

folgt via **folk**: $\boxed{p \in \mathsf{dom}\, f}$

`2.2:` Aus `VS` gleich "f Funktion…" und
aus `1`"$\ldots (p,\Omega) \in f$"
folgt via **folk**: $\Omega = f(p)$.

`3:` Aus `1`"$\ldots q \in \Omega \ldots$" und
aus `2.2`

folgt: $\boxed{q \in f(p)}$

`b)` `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (p \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (q \in f(p))$.

`1:` Aus `VS` gleich "f Funktion…" und
aus `VS` gleich "$\ldots p \in \mathsf{dom}\, f \ldots$"
folgt via **folk**: $(p, f(p)) \in f$.

`2:` Aus `1`"$(p, f(p)) \in f$" und
aus `VS` gleich "$\ldots q \in f(p)$"
folgt via **374-2**: $(p,q) \in \mathsf{374.0}(f)$.

<u>Beweis **374-13**</u> `c)` `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (f(p) = 0)$.

`1:` Es gilt: $(p \in \mathsf{dom}\,(374.0(f)\,)) \vee (p \notin \mathsf{dom}\,374.0(f)\,)$.

`wfFallunterscheidung`

`1.1.Fall` $p \in \mathsf{dom}\,(374.0(f)\,)$.

`2:` Aus `1.1.Fall` "$p \in \mathsf{dom}\,(374.0(f)\,)$"
folgt via **folk**: $\exists \Omega : (p, \Omega) \in 347.0(f)$.

`3:` Aus `VS` gleich "f Funktion…" und
aus 2 "…$(p, \Omega) \in 347.0(f)$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\Omega \in f(p)$.

`4:` Aus 3 "$\Omega \in f(p)$"
folgt via **folk**: $0 \neq f(p)$.

`5:` Nach `VS` gilt: $f(p) = 0$.

`Ende wfFallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

`A1` | "$p \notin \mathsf{dom}\,(374.0(f)\,)$"

`6:` Aus `A1` gleich "$p \notin \mathsf{dom}\,(374.0(f)\,)$"

folgt via **folk**: $\boxed{374.0(f)\,(p) = \mathcal{U}}$

<u>Beweis **374-13**</u> `d)` `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (f(p) = \{q\}) \wedge (q \text{ Menge})$.

`1.1:` Via **SingeltonAxiom** gilt: $\{q\}$ Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots q$ Menge"
folgt via **1-14**: $\bigcap\{q\} = q$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots f(p) = \{q\} \ldots$" und
aus `1.1`
folgt: $f(p)$ Menge.

`3:` Aus `2`"$f(p)$ Menge"
folgt via **folk**: $p \in \mathsf{dom}\, f$.

`4:` Aus `VS` gleich "$\ldots q$ Menge"
folgt via **folk**: $q \in \{q\}$.

`5:` Aus `VS` gleich "$\ldots f(p) = \{q\} \ldots$" und
aus `4`
folgt: $q \in f(p)$.

`6:` Aus `VS` gleich "f Funktion$\ldots$",
aus `3`"$p \in \mathsf{dom}\, f$" und
aus `5`"$q \in f(p)$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $(p, q) \in \mathsf{374.0}(f)$.

`7:` Aus `6`"$(p, q) \in \mathsf{374.0}(f)$"
folgt via **9-15**: $q \in \mathsf{374.0}(f)\,[\{p\}]$.

> `Thema8` $\alpha \in \mathsf{374.0}(f)\,[\{p\}]$.
>
> `9:` Aus `Thema9`"$\alpha \in (\mathsf{374.0}(f))[\{p\}]$"
> folgt via **9-15**: $(p, \alpha) \in \mathsf{374.0}(f)$.
>
> `10:` Aus `VS` gleich "f Funktion$\ldots$" und
> aus `9`"$(p, \alpha) \in \mathsf{374.0}(f)$"
> folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\alpha \in f(p)$.
>
> `11:` Aus `10` und
> aus `VS` gleich "$\ldots f(p) = \{q\} \ldots$"
> folgt: $\alpha \in \{q\}$.
>
> `12:` Aus `11`"$\alpha \in \{q\}$"
> folgt via **folk**: $\alpha = q$.

Ergo `Thema8`: `A1` | "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{374.0}(f)\,[\{p\}]) \Rightarrow (\alpha = q)$"

...

<u>Beweis **374-13**</u> `d)` `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (f(p) = \{q\}) \wedge (q \text{ Menge})$.

...

`9:` Aus `A1` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in 374.0(f)\,[\{p\}]) \Rightarrow (\alpha = q)$" und
aus `7`"$q \in 374.0(f)\,[\{p\}]$"
folgt via **174-1**: $374.0(f)\,[\{p\}] = \{q\}$.

`10:` $374.9(f)\,(p) \stackrel{\mathbf{17-1(Def)}}{=} \bigcap 374.0(f)\,[\{p\}] \stackrel{9}{=} \bigcap\{q\} \stackrel{1.2}{=} q$.

`e)` `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (f(p) = \{q\})$.

`1:` Es gilt: $(q \text{ Menge}) \vee (q \text{ Unmenge})$.

`1.1.Fall` q Menge.

`2.1:` Aus `1.1.Fall`"q Menge"
folgt via **1-14**: $\bigcap\{q\} = q$.

`2.2:` Aus `VS` gleich "f Funktion..." ,
aus `VS` gleich "$\ldots f(p) = \{q\}$" und
aus `1.1.Fall`"q Menge"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $374.0(f)\,(p) = q$.

`3:` Aus `2.2` und
aus `2.1`
folgt: $374.0(f)\,(p) = \bigcap\{q\}$.

`1.2.Fall` q Unmenge.

`2:` Aus `1.2.Fall`"q Unmenge
folgt via **folk**: $\{q\} = 0$.

`3:` Aus `VS` gleich "$\ldots f(p) = \{q\}$" und
aus `2`
folgt: $f(p) = 0$.

`4:` Aus `VS` gleich "f Funktion..." und
aus `3`"$f(p) = 0$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $374.0(f)\,(0) = \mathcal{U}$.

`5:` Aus `1.2.Fall`"q Unmenge"
folgt via **1-14**: $\bigcap\{q\} = \mathcal{U}$.

`6:` Aus `4` und
aus `5`
folgt: $374.0(f)\,(0) = \bigcap\{q\}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $374.0(f)\,(0) = \bigcap\{q\}$.

<u>Beweis **374-13**</u> `f)`

`VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (f(p) = \{q\}) \wedge ((q \text{ Menge}) \vee (q = \mathcal{U}))$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$(f \text{ Funktion}) \wedge (f(p) = \{q\}) \ldots$"
folgt via des bereits bewiesenen `e)`: $\mathsf{374.0}(f)\,(p) = \bigcap\{q\}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots (q \text{ Menge}) \vee (q = \mathcal{U})$"
folgt via **373-7**: $\bigcap\{q\} = q$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $\mathsf{374.0}(f)\,(p) = q$.

`g)`

`1.1:` Via **370-9** gilt: $(\mathtt{rf3}qEx)(0) = \{q\}$.

`1.2:` Via **370-9** gilt: $\mathtt{rf3}qEx$ Funktion.

`2.1:` Aus `1.2`"$\mathtt{rf3}qEx$ Funktion" und
aus `1.1`"$(\mathtt{rf3}qEx)(0) = \{q\}$"
folgt via des bereits bewiesenen `e)`: $\mathsf{374.0}(\mathtt{rf3}qEx)\,(0) = \bigcap\{q\}$.

`2.2:` Via **374-1(Def)** gilt: $(q, E|_{\mathsf{to}}\, x) = \mathsf{374.0}(\mathtt{rf3}qEx)$.

`3:` Aus `2.1` und
aus `2.2`
folgt: $(q, E|_{\mathsf{to}}\, x)\,(0) = \bigcap\{q\}$.

`4:` Via **374-1(Def)** gilt: $(q, E|_{\mathsf{to}\,0}\, x) = (q, E|_{\mathsf{to}}\, x)\,(0)$.

`5:` Aus `4` und
aus `3`
folgt: $(q, E|_{\mathsf{to}\,0}\, x) = \bigcap\{q\}$.

`h)`

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `g)` gilt: $(q, E|_{\mathsf{to}\,0}\, x) = \bigcap\{q\}$.

`1.2:` Via **373-7** gilt: $(\bigcap\{q\} = q) \Leftrightarrow ((q \text{ Menge}) \vee (q = \mathcal{U}))$.

`2:` Aus `1.2` und
aus `1.1`
folgt: $((q, E|_{\mathsf{to}\,0}\, x) = q) \Leftrightarrow ((q \text{ Menge}) \vee (q = \mathcal{U}))$.

$\square$

374-14. Die Aussagen **374-13** `cd)` verdienen eine weitere Untersuchung.

374-14(Satz)

`a)` *Aus* "$\mathtt{rf3}qEx(n) = \{p\}$" *und* "$(p \text{ Menge}) \vee (p = \mathcal{U})$"
folgt "$(q, E|_{\mathsf{to}\, n}\, x) = p$".

`b)` *Aus* "$\mathtt{rf3}qEx(n) = \{p\}$" *und* "$p$ *Menge*"
folgt "$n \in \mathsf{dom}\ (q, E|_{\mathsf{to}}\, x)$" *und* "$(q, E|_{\mathsf{to}\, n}\, x) = p$".

<u>Beweis **374-14**</u> `a)` `VS` gleich $(\mathtt{rf}3qEx(n) = \{p\}) \wedge ((p \text{ Menge}) \vee (p = \mathcal{U}))$.

`1:` Via **370-9** gilt: $\mathtt{rf}3qEx$ Funktion.

`2:` Aus `1`“$\mathtt{rf}3qEx$ Funktion”,
aus `VS` gleich “$\mathtt{rf}3qEx(n) = \{p\} \ldots$” und
aus `VS` gleich “$\ldots (p \text{ Menge}) \vee (p = \mathcal{U})$”
folgt via **374-13**: $\mathsf{374.0}(\mathtt{rf}3qEx)\,(n) = p$.

`3:` Via **374-1(Def)** gilt: $(q, E|_{\mathsf{to}}\, x) = \mathsf{374.0}(\mathtt{rf}3qEx)$.

`4:` Aus `2` und
aus `3`
folgt: $(q, E|_{\mathsf{to}}\, x)\,(n) = p$.

`5:` Via **374-1(Def)** gilt: $(q, E|_{\mathsf{to}\, n}\, x) = (q, E|_{\mathsf{to}}\, x)\,(n)$.

`6:` Aus `4` und
aus `5`
folgt: $(q, E|_{\mathsf{to}\, n}\, x) = p$.

`b)` `VS` gleich $(\mathtt{rf}3qEx(n) = \{p\}) \wedge (p \text{ Menge})$.

`1:` Aus `VS` gleich “$(\mathtt{rf}3qEx(n) = \{p\}) \wedge (p \text{ Menge})$”

folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\boxed{(q, E|_{\mathsf{to}\, n}\, x) = p}$

`2:` Aus `1` und
aus `VS` gleich “$\ldots p$ Menge”
folgt: $(q, E|_{\mathsf{to}\, n}\, x)$ Menge.

`3:` Aus `2`
folgt via **374-1(Def)**: $(q, E|_{\mathsf{to}}\, x)\,(n)$ Menge.

`4:` Aus `3`“$(q, E|_{\mathsf{to}}\, x)\,(n)$ Menge”

folgt via **folk**: $\boxed{n \in \mathsf{dom}\ (q, E|_{\mathsf{to}}\, x)}$

□

374-15. Nun wird $(q, \Box|_{\mathsf{to}\,n}\, f)$ im vielleicht interessantesten Fall $q \in D$, $f, \Box$ Funktion, $\Box$ Algebra auf D, untersucht.

374-15(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow)$ $q \in D$.

$\rightarrow)$ $f, \Box$ *Funktion.*

$\rightarrow)$ $\Box$ *Algebra auf* D.

$\rightarrow)$ $n \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

$\rightarrow)$ $n \setminus \{0\} \subseteq \mathsf{dom}\, f$.

$\rightarrow)$ $f[n \setminus \{0\}] \subseteq D$.

Dann folgt:

a) $n \subseteq \mathsf{dom}\,(q, \Box|_{\mathsf{to}}\, f)$.

b) $(q, \Box|_{\mathsf{to}}\, f)\,[n] \subseteq D$.

c) $(q, \Box|_{\mathsf{to}\,0}\, f) = q$.

d) $\forall \alpha : (\alpha, 1 + \alpha \in n) \Rightarrow (\left(q, \Box|_{\mathsf{to}\,(1+\alpha)}\, f\right) = (q, \Box|_{\mathsf{to}\,\alpha}\, f)\, {}_{-}\Box_{-} f(1 + \alpha))$.

`RECH.ALG`-**Notation**.

Beweis **374-15** `ab)`

`1.1:` Aus →) "$\ldots \square$ Funktion" und
aus →) "$f \ldots$ Funktion"
folgt via **374-3**: $(q, \square|_{\mathsf{to}}\, f)$ Funktion.

`1.2:` Aus →) "$q \in D$",
aus →) "$f, \square$ Funktion",
aus →) "$\square$ Algebra auf D",
aus →) "$n \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$",
aus →) "$n \setminus \{0\} \subseteq \mathsf{dom}\, f$" und
aus →) "$f[n \setminus \{0\}] \subseteq D$"
folgt via **372-10**: $\forall \alpha : (\alpha \in n) \Rightarrow (\exists \Omega : (\Omega \in D) \wedge (\mathtt{rf3}q\square f(\alpha) = \{\Omega\}))$.

> `Thema2.1` $\beta \in n$.
>
> `3:` Aus `Thema2.1`"$\beta \in n$" und
> aus `1.2`"$\forall \alpha : (\alpha \in n)$
> $\Rightarrow (\exists \Omega : (\Omega \in D) \wedge (\mathtt{rf3}q\square f(\alpha) = \{\Omega\}))$"
> folgt: $\exists \Phi : (\Phi \in D) \wedge (\mathtt{rf3}q\square f(\beta) = \{\Phi\})$.
>
> `4:` Aus `3`"$\ldots \Phi \in D \ldots$"
> folgt via **ElementAxiom**: Φ Menge.
>
> `5:` Aus `3`"$\ldots \mathtt{rf3}q\square f(\beta) = \{\Phi\}$" und
> aus `4`"Φ Menge"
> folgt via **374-14**: $\beta \in \mathsf{dom}\ (q, \square|_{\mathsf{to}}\, f)$.

Ergo `Thema2.1`: $\forall \beta : (\beta \in n) \Rightarrow (\beta \in \mathsf{dom}\ (q, \square|_{\mathsf{to}}))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `Aa)` | "$n \subseteq \mathsf{dom}\ (q, \square|_{\mathsf{to}}\, f)$"

...

<u>Beweis **374-15**</u> `ab)` ...

$\boxed{\texttt{Thema2.2}}$ $\beta \in (q, \Box|_{\mathsf{to}}\, f)\,[n]$.

`3:` Aus `1.1`"$(q, \Box|_{\mathsf{to}}\, f)$ Funktion" und
aus `Thema2`"$\beta \in (q, \Box|_{\mathsf{to}}\, f)\,[n]$"
folgt via **18-28**: $\exists \Phi : (\Phi \in n) \wedge (\beta = (q, \Box|_{\mathsf{to}}\, f)\,(\Phi))$.

`4.1:` Aus `3`"$\ldots \Phi \in n \ldots$" und
aus `1.2`"$\forall \alpha : (\alpha \in n)$
$\Rightarrow (\exists \Omega : (\Omega \in D) \wedge (\mathtt{rf3}q\Box f(\alpha) = \{\Omega\}))$"
folgt: $\exists \Gamma : (\Gamma \in D) \wedge (\mathtt{rf3}q\Box f(\Phi) = \{\Gamma\})$.

`4.2:` Via **374-1(Def)** gilt: $(q, \Box|_{\mathsf{to}}\, f)\,(\Phi) = (q, \Box|_{\mathsf{to}\,\Phi}\, f)$.

`5.1:` Aus `4.1`"$\ldots \Gamma \in D \ldots$"
folgt via **ElementAxiom**: Γ Menge.

`5.2:` Aus `3`"$\ldots \beta = (q, \Box|_{\mathsf{to}}\, f)\,(\Phi)$" und
aus `4.2`
folgt: $\beta = (q, \Box|_{\mathsf{to}\,\Phi}\, f)$.

`6:` Aus `4.1`"$\ldots \mathtt{rf3}q\Box f(\Phi) = \{\Gamma\}$" und
aus `5.1`"Γ Menge"
folgt via **374-14**: $(q, \Box|_{\mathsf{to}\,\Phi}\, f) = \Gamma$.

`7:` Aus `5.2` und
aus `6`
folgt: $\beta = \Gamma$.

`8:` Aus `7` und
aus `4.1`"$\ldots \Gamma \in D \ldots$"
folgt: $\beta \in D$.

Ergo `Thema2`: $\forall \beta : (\beta \in (q, \Box|_{\mathsf{to}}\, f)\,[n]) \Rightarrow (\beta \in D)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `Ab)` | "$(q, \Box|_{\mathsf{to}}\, f)\,[n] \subseteq D$"

Beweis **374-15** `c)`

`1:` Aus →) “$q \in D$”
folgt via **ElementAxiom**: q Menge.

`2:` Aus `1`“q Menge”
folgt via **374-13**: $(q, \Box|_{\mathsf{to}\ 0}\, f) = q$.

`d)`

`Thema0` $\alpha, 1 + \alpha \in n$.

`1.1:` Aus →) “$q \in D$”,
aus →) “$f, \Box$ Funktion”,
aus →) “$\Box$ Algebra auf D”,
aus →) “$n \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$”,
aus →) “$n \setminus \{0\} \subseteq \mathsf{dom}\, f$”,
aus →) “$f[n \setminus \{0\}] \subseteq D$” und
aus `Thema0`“$\alpha, 1 + \alpha \in n$”
folgt via **372-10**: $\exists \Omega : (\Omega \in D) \wedge (\mathtt{rf3}q\Box f(\alpha) = \{\Omega\})$
$\wedge(\mathtt{rf3}q\Box f(1 + \alpha) = \{\Omega_{-}\Box_{-} f(1 + \alpha)\})$.

`1.2:` Aus `Thema0`“$\alpha, 1 + \alpha \in n$” und
aus →) “$n \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$”
folgt via **374-6**: $1 + \alpha \in n \setminus \{0\}$.

`2.1:` Aus `1.1`“$\ldots \Omega \in D \ldots$”
folgt via **ElementAxiom**: Ω Menge.

`2.2:` Aus →) “$f \ldots$ Funktion”,
aus `1.2`“$1 + \alpha \in n \setminus \{0\}$” und
aus →) “$n \setminus \{0\} \subseteq \mathsf{dom}\, f$”
folgt via **18-27**: $f(1 + \alpha) \in f[n \setminus \{0\}]$.

`3.1:` Aus `1.1`“$\ldots \mathtt{rf3}q\Box f(\alpha) = \{\Omega\} \ldots$” und
aus `2.1`“Ω Menge”
folgt via **374-14**: $(q, \Box|_{\mathsf{to}\ \alpha}\, f) = \Omega$.

`3.2:` Aus `2.2`“$f(1 + \alpha) \in f[n \setminus \{0\}]$” und
aus →) “$f[n \setminus \{0\}] \subseteq D$”
folgt via **folk**: $f(1 + \alpha) \in D$.

...

...

Beweis **374-15** `d)` ...

$\boxed{\texttt{Thema0}}$ $\alpha, 1+\alpha \in n$.

...

`4:` Aus →) "$\square$ Algebra auf D",
aus `1.1` "$\ldots \Omega \in D \ldots$" und
aus `3.2` "$f(1+\alpha) \in D$"
folgt via **93-5(Def)**: $\Omega{}_{-}\square{}_{-}f(1+\alpha) \in D$.

`5:` Aus `4` "$\Omega{}_{-}\square{}_{-}f(1+\alpha) \in D$"
folgt via **ElementAxiom**: $\Omega{}_{-}\square{}_{-}f(1+\alpha)$ Menge.

`6:` Aus `1.1` "$\ldots \texttt{rf}3q\square f(1+\alpha) = \{\Omega{}_{-}\square{}_{-}f(1+\alpha)\}$" und
aus `5` "$\Omega{}_{-}\square{}_{-}f(1+\alpha)$ Menge"
folgt via **374-14**: $\left(q, \square|_{\mathsf{to}\,(1+\alpha)}\, f\right) = \Omega{}_{-}\square{}_{-}f(1+\alpha)$.

`7:` Aus `6` und
aus `3.1`
folgt: $\left(q, \square|_{\mathsf{to}\,(1+\alpha)}\, f\right) = (q, \square|_{\mathsf{to}\,\alpha}\, f)\,{}_{-}\square{}_{-}f(1+\alpha)$.

Ergo `Thema0`:

$$\forall \alpha : (\alpha, 1+\alpha \in n) \Rightarrow \left(\left(q, \square|_{\mathsf{to}\,(1+\alpha)}\, f\right) = (q, \square|_{\mathsf{to}\,\alpha}\, f)\,{}_{-}\square{}_{-}f(1+\alpha)\right).$$

$\square$

374-16. *Dieser* Satz musste ja einmal kommen.

374-16(Satz) (Grid0)

a) $0 \subset 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \mathsf{ten}$.

b) $0 \subseteq 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \mathsf{ten}$.

c) $1 \subset 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \mathsf{ten}$.

d) $1 \subseteq 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \mathsf{ten}$.

e) $2 \subset 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \mathsf{ten}$.

f) $2 \subseteq 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \mathsf{ten}$.

g) $3 \subset 4, 5, 6, 7, 8, 9, \mathsf{ten}$.

h) $3 \subseteq 4, 5, 6, 7, 8, 9, \mathsf{ten}$.

i) $4 \subset 5, 6, 7, 8, 9, \mathsf{ten}$.

j) $4 \subseteq 5, 6, 7, 8, 9, \mathsf{ten}$.

k) $5 \subset 6, 7, 8, 9, \mathsf{ten}$.

l) $5 \subseteq 6, 7, 8, 9, \mathsf{ten}$.

m) $6 \subset 7, 8, 9, \mathsf{ten}$.

n) $6 \subseteq 7, 8, 9, \mathsf{ten}$.

o) $7 \subset 8, 9, \mathsf{ten}$.

p) $7 \subseteq 8, 9, \mathsf{ten}$.

q) $8 \subset 9, \mathsf{ten}$.

r) $8 \subseteq 9, \mathsf{ten}$.

s) $9 \subset \mathsf{ten}$.

t) $9 \subseteq \mathsf{ten}$.

u) $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \mathsf{ten} \subset \mathbb{N}$.

v) $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \mathsf{ten} \subseteq \mathbb{N}$.

<u>Beweis **374-16**</u> `a)`

`1.1:` Aus $\in$**schola**“$0, 1 \in \mathbb{N}$” und
aus $<$**schola**“$0 < 1$”

folgt via **197-5**: $\boxed{0 \subset 1}$

`1.2:` Aus $\in$**schola**“$0, 2 \in \mathbb{N}$” und
aus $<$**schola**“$0 < 2$”

folgt via **197-5**: $\boxed{0 \subset 2}$

`1.3:` Aus $\in$**schola**“$0, 3 \in \mathbb{N}$” und
aus $<$**schola**“$0 < 3$”

folgt via **197-5**: $\boxed{0 \subset 3}$

`1.4:` Aus $\in$**schola**“$0, 4 \in \mathbb{N}$” und
aus $<$**schola**“$0 < 4$”

folgt via **197-5**: $\boxed{0 \subset 4}$

`1.5:` Aus $\in$**schola**“$0, 5 \in \mathbb{N}$” und
aus $<$**schola**“$0 < 5$”

folgt via **197-5**: $\boxed{0 \subset 5}$

`1.6:` Aus $\in$**schola**“$0, 6 \in \mathbb{N}$” und
aus $<$**schola**“$0 < 6$”

folgt via **197-5**: $\boxed{0 \subset 6}$

`1.7:` Aus $\in$**schola**“$0, 7 \in \mathbb{N}$” und
aus $<$**schola**“$0 < 7$”

folgt via **197-5**: $\boxed{0 \subset 7}$

`1.8:` Aus $\in$**schola**“$0, 8 \in \mathbb{N}$” und
aus $<$**schola**“$0 < 8$”

folgt via **197-5**: $\boxed{0 \subset 8}$

...

<u>Beweis **374-16**</u> `a)` ...

`1.9:` Aus $\in$**schola**"$0, 9 \in \mathbb{N}$" und
aus $<$**schola**"$0 < 9$"

folgt via **197-5**: $\boxed{0 \subset 9}$

`1.10:` Aus $\in$**schola**"$0, \mathsf{ten} \in \mathbb{N}$" und
aus $<$**schola**"$0 < \mathsf{ten}$"

folgt via **197-5**: $\boxed{0 \subset \mathsf{ten}}$

`b)`

Aus `a)` "$0 \subset 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \mathsf{ten}$"
folgt via **57-1(Def)**: $0 \subseteq 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \mathsf{ten}$.

`c)`

`1.1:` Aus $\in$**schola**"$1, 2 \in \mathbb{N}$" und
aus $<$**schola**"$1 < 2$"

folgt via **197-5**: $\boxed{1 \subset 2}$

`1.2:` Aus $\in$**schola**"$1, 3 \in \mathbb{N}$" und
aus $<$**schola**"$1 < 3$"

folgt via **197-5**: $\boxed{1 \subset 3}$

`1.3:` Aus $\in$**schola**"$1, 4 \in \mathbb{N}$" und
aus $<$**schola**"$1 < 4$"

folgt via **197-5**: $\boxed{1 \subset 4}$

`1.4:` Aus $\in$**schola**"$1, 5 \in \mathbb{N}$" und
aus $<$**schola**"$1 < 5$"

folgt via **197-5**: $\boxed{1 \subset 5}$

`1.5:` Aus $\in$**schola**"$1, 6 \in \mathbb{N}$" und
aus $<$**schola**"$1 < 6$"

folgt via **197-5**: $\boxed{1 \subset 6}$

...

Beweis **374-16** c ...

1.6: Aus $\in$**schola**"$1, 7 \in \mathbb{N}$" und
aus $<$**schola**"$1 < 7$"

folgt via **197-5**: $\boxed{1 \subset 7}$

1.7: Aus $\in$**schola**"$1, 8 \in \mathbb{N}$" und
aus $<$**schola**"$1 < 8$"

folgt via **197-5**: $\boxed{1 \subset 8}$

1.8: Aus $\in$**schola**"$1, 9 \in \mathbb{N}$" und
aus $<$**schola**"$1 < 9$"

folgt via **197-5**: $\boxed{1 \subset 9}$

1.9: Aus $\in$**schola**"$1, \mathsf{ten} \in \mathbb{N}$" und
aus $<$**schola**"$1 < \mathsf{ten}$"

folgt via **197-5**: $\boxed{1 \subset \mathsf{ten}}$

d)

Aus c)"$1 \subset 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \mathsf{ten}$"
folgt via **57-1(Def)**: $1 \subseteq 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \mathsf{ten}$.

e)

1.1: Aus $\in$**schola**"$2, 3 \in \mathbb{N}$" und
aus $<$**schola**"$2 < 3$"

folgt via **197-5**: $\boxed{2 \subset 3}$

1.2: Aus $\in$**schola**"$2, 4 \in \mathbb{N}$" und
aus $<$**schola**"$2 < 4$"

folgt via **197-5**: $\boxed{2 \subset 4}$

1.3: Aus $\in$**schola**"$2, 5 \in \mathbb{N}$" und
aus $<$**schola**"$2 < 5$"

folgt via **197-5**: $\boxed{2 \subset 5}$

...

Beweis **374-16** `e)` ...

`1.4:` Aus $\in$**schola**“$2, 6 \in \mathbb{N}$” und
aus $<$**schola**“$2 < 6$”

folgt via **197-5**: $\boxed{2 \subset 6}$

`1.5:` Aus $\in$**schola**“$2, 7 \in \mathbb{N}$” und
aus $<$**schola**“$2 < 7$”

folgt via **197-5**: $\boxed{2 \subset 7}$

`1.6:` Aus $\in$**schola**“$2, 8 \in \mathbb{N}$” und
aus $<$**schola**“$2 < 8$”

folgt via **197-5**: $\boxed{2 \subset 8}$

`1.7:` Aus $\in$**schola**“$2, 9 \in \mathbb{N}$” und
aus $<$**schola**“$2 < 9$”

folgt via **197-5**: $\boxed{2 \subset 9}$

`1.8:` Aus $\in$**schola**“$2, \mathsf{ten} \in \mathbb{N}$” und
aus $<$**schola**“$2 < \mathsf{ten}$”

folgt via **197-5**: $\boxed{2 \subset \mathsf{ten}}$

`f)`

Aus `e)`“$2 \subset 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \mathsf{ten}$”
folgt via **57-1(Def)**: $2 \subseteq 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \mathsf{ten}.$

`g)`

`1.1:` Aus $\in$**schola**“$3, 4 \in \mathbb{N}$” und
aus $<$**schola**“$3 < 4$”

folgt via **197-5**: $\boxed{3 \subset 4}$

`1.2:` Aus $\in$**schola**“$3, 5 \in \mathbb{N}$” und
aus $<$**schola**“$3 < 5$”

folgt via **197-5**: $\boxed{3 \subset 5}$

...

<u>Beweis</u> **374-16** `g)` ...

`1.3:` Aus $\in$**schola**“$3, 6 \in \mathbb{N}$” und
aus $<$**schola**“$3 < 6$”

folgt via **197-5**: $\boxed{3 \subset 6}$

`1.4:` Aus $\in$**schola**“$3, 7 \in \mathbb{N}$” und
aus $<$**schola**“$3 < 7$”

folgt via **197-5**: $\boxed{3 \subset 7}$

`1.5:` Aus $\in$**schola**“$3, 8 \in \mathbb{N}$” und
aus $<$**schola**“$3 < 8$”

folgt via **197-5**: $\boxed{3 \subset 8}$

`1.6:` Aus $\in$**schola**“$3, 9 \in \mathbb{N}$” und
aus $<$**schola**“$3 < 9$”

folgt via **197-5**: $\boxed{3 \subset 9}$

`1.7:` Aus $\in$**schola**“$3, \mathsf{ten} \in \mathbb{N}$” und
aus $<$**schola**“$3 < \mathsf{ten}$”

folgt via **197-5**: $\boxed{3 \subset \mathsf{ten}}$

`h)`

Aus `g)` “$3 \subset 4, 5, 6, 7, 8, 9, \mathsf{ten}$”
folgt via **57-1(Def)**: $3 \subseteq 4, 5, 6, 7, 8, 9, \mathsf{ten}$.

`i)`

`1.1:` Aus $\in$**schola**“$4, 5 \in \mathbb{N}$” und
aus $<$**schola**“$4 < 5$”

folgt via **197-5**: $\boxed{4 \subset 5}$

`1.2:` Aus $\in$**schola**“$4, 6 \in \mathbb{N}$” und
aus $<$**schola**“$4 < 6$”

folgt via **197-5**: $\boxed{4 \subset 6}$

...

<u>Beweis **374-16**</u> `i)` ...

`1.3:` Aus $\in$**schola**“$4, 7 \in \mathbb{N}$” und
aus $<$**schola**“$4 < 7$”

folgt via **197-5**: $\boxed{4 \subset 7}$

`1.4:` Aus $\in$**schola**“$4, 8 \in \mathbb{N}$” und
aus $<$**schola**“$4 < 8$”

folgt via **197-5**: $\boxed{4 \subset 8}$

`1.5:` Aus $\in$**schola**“$4, 9 \in \mathbb{N}$” und
aus $<$**schola**“$4 < 9$”

folgt via **197-5**: $\boxed{4 \subset 9}$

`1.6:` Aus $\in$**schola**“$4, \mathsf{ten} \in \mathbb{N}$” und
aus $<$**schola**“$4 < \mathsf{ten}$”

folgt via **197-5**: $\boxed{4 \subset \mathsf{ten}}$

`j)`

Aus `i)`“$4 \subset 5, 6, 7, 8, 9, \mathsf{ten}$”
folgt via **57-1(Def)**: $4 \subseteq 5, 6, 7, 8, 9, \mathsf{ten}$.

`k)`

`1.1:` Aus $\in$**schola**“$5, 6 \in \mathbb{N}$” und
aus $<$**schola**“$5 < 6$”

folgt via **197-5**: $\boxed{5 \subset 6}$

`1.2:` Aus $\in$**schola**“$5, 7 \in \mathbb{N}$” und
aus $<$**schola**“$5 < 7$”

folgt via **197-5**: $\boxed{5 \subset 7}$

`1.3:` Aus $\in$**schola**“$5, 8 \in \mathbb{N}$” und
aus $<$**schola**“$5 < 8$”

folgt via **197-5**: $\boxed{5 \subset 8}$

...

<u>Beweis</u> **374-16** `k)` ...

`1.4:` Aus $\in$**schola**"$5, 9 \in \mathbb{N}$" und
aus $<$**schola**"$5 < 9$"

folgt via **197-5**: $\boxed{5 \subset 9}$

`1.5:` Aus $\in$**schola**"$5, \mathsf{ten} \in \mathbb{N}$" und
aus $<$**schola**"$5 < \mathsf{ten}$"

folgt via **197-5**: $\boxed{5 \subset \mathsf{ten}}$

`l)`

Aus `k)`"$5 \subset 6, 7, 8, 9, \mathsf{ten}$"
folgt via **57-1(Def)**: $5 \subseteq 6, 7, 8, 9, \mathsf{ten}$.

`m)`

`1.1:` Aus $\in$**schola**"$6, 7 \in \mathbb{N}$" und
aus $<$**schola**"$6 < 7$"

folgt via **197-5**: $\boxed{6 \subset 7}$

`1.2:` Aus $\in$**schola**"$6, 8 \in \mathbb{N}$" und
aus $<$**schola**"$6 < 8$"

folgt via **197-5**: $\boxed{6 \subset 8}$

`1.3:` Aus $\in$**schola**"$6, 9 \in \mathbb{N}$" und
aus $<$**schola**"$6 < 9$"

folgt via **197-5**: $\boxed{6 \subset 9}$

`1.4:` Aus $\in$**schola**"$6, \mathsf{ten} \in \mathbb{N}$" und
aus $<$**schola**"$6 < \mathsf{ten}$"

folgt via **197-5**: $\boxed{6 \subset \mathsf{ten}}$

`n)`

Aus `m)`"$6 \subset 7, 8, 9, \mathsf{ten}$"
folgt via **57-1(Def)**: $6 \subseteq 7, 8, 9, \mathsf{ten}$.

<u>Beweis **374-16**</u> `o)`

`1.1:` Aus $\in$**schola**“$7, 8 \in \mathbb{N}$” und
aus $<$**schola**“$7 < 8$”

folgt via **197-5**: $\boxed{7 \subset 8}$

`1.2:` Aus $\in$**schola**“$7, 9 \in \mathbb{N}$” und
aus $<$**schola**“$7 < 9$”

folgt via **197-5**: $\boxed{7 \subset 9}$

`1.3:` Aus $\in$**schola**“$7, \mathsf{ten} \in \mathbb{N}$” und
aus $<$**schola**“$7 < \mathsf{ten}$”

folgt via **197-5**: $\boxed{7 \subset \mathsf{ten}}$

`p)`

Aus `o)` “$7 \subset 8, 9, \mathsf{ten}$”
folgt via **57-1(Def)**: $7 \subseteq 8, 9, \mathsf{ten}$.

`q)`

`1.1:` Aus $\in$**schola**“$8, 9 \in \mathbb{N}$” und
aus $<$**schola**“$8 < 9$”

folgt via **197-5**: $\boxed{8 \subset 9}$

`1.2:` Aus $\in$**schola**“$8, \mathsf{ten} \in \mathbb{N}$” und
aus $<$**schola**“$8 < \mathsf{ten}$”

folgt via **197-5**: $\boxed{8 \subset \mathsf{ten}}$

`r)`

Aus `q)` “$8 \subset 9, \mathsf{ten}$”
folgt via **57-1(Def)**: $8 \subseteq 9, \mathsf{ten}$.

<u>Beweis</u> **374-16** `s)`

Aus $\in$**schola**“$9, \mathsf{ten} \in \mathbb{N}$” und
aus $<$**schola**“$9 < \mathsf{ten}$”
folgt via **197-5**: $9 \subset \mathsf{ten}$.

`t)`

Aus `s)` “$9 \subset 9, \mathsf{ten}$”
folgt via **57-1(Def)**: $9 \subseteq \mathsf{ten}$.

`u)`

`1.1:` Aus $\in$**schola**“$0 \in \mathbb{N}$”

folgt via **374-6**: $\boxed{0 \subset \mathbb{N}}$

`1.2:` Aus $\in$**schola**“$1 \in \mathbb{N}$”

folgt via **374-6**: $\boxed{1 \subset \mathbb{N}}$

`1.3:` Aus $\in$**schola**“$2 \in \mathbb{N}$”

folgt via **374-6**: $\boxed{2 \subset \mathbb{N}}$

`1.4:` Aus $\in$**schola**“$3 \in \mathbb{N}$”

folgt via **374-6**: $\boxed{3 \subset \mathbb{N}}$

`1.5:` Aus $\in$**schola**“$4 \in \mathbb{N}$”

folgt via **374-6**: $\boxed{4 \subset \mathbb{N}}$

`1.6:` Aus $\in$**schola**“$5 \in \mathbb{N}$”

folgt via **374-6**: $\boxed{5 \subset \mathbb{N}}$

`1.7:` Aus $\in$**schola**“$6 \in \mathbb{N}$”

folgt via **374-6**: $\boxed{6 \subset \mathbb{N}}$

...

<u>Beweis **374-16**</u> `u)` ...

`1.8:` Aus $\in$**schola**"$7 \in \mathbb{N}$"

folgt via **374-6**: $\boxed{7 \subset \mathbb{N}}$

`1.9:` Aus $\in$**schola**"$8 \in \mathbb{N}$"

folgt via **374-6**: $\boxed{8 \subset \mathbb{N}}$

`1.10:` Aus $\in$**schola**"$9 \in \mathbb{N}$"

folgt via **374-6**: $\boxed{9 \subset \mathbb{N}}$

`1.11:` Aus $\in$**schola**"$\mathsf{ten} \in \mathbb{N}$"

folgt via **374-6**: $\boxed{\mathsf{ten} \subset \mathbb{N}}$

`v)`

Aus `u)` "$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \mathsf{ten} \subset \mathbb{N}$"
folgt via **57-1(Def)**: $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \mathsf{ten} \subseteq \mathbb{N}$.

$\square$

374-17. Auch *dieser* Satz musste ja einmal kommen.

374-17(Satz) **(Grid1)**

a) $0 \in 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \mathsf{ten}$.

b) $1 \in 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \mathsf{ten}$.

c) $2 \in 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \mathsf{ten}$.

d) $3 \in 4, 5, 6, 7, 8, 9, \mathsf{ten}$.

e) $4 \in 5, 6, 7, 8, 9, \mathsf{ten}$.

f) $5 \in 6, 7, 8, 9, \mathsf{ten}$.

g) $6 \in 7, 8, 9, \mathsf{ten}$.

h) $7 \in 8, 9, \mathsf{ten}$.

i) $8 \in 9, \mathsf{ten}$.

j) $9 \in \mathsf{ten}$.

Beweis **374-17** a)

1: Aus **1-5**“$0 \in \{0\}$” und
aus **95-1(Def)**“$1 = \{0\}$”

folgt: $\boxed{0 \in 1}$

2: Aus 1“$0 \in 1$” und
aus **Grid0**“$1 \subseteq 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \mathsf{ten}$”

folgt via **folk**: $\boxed{0 \in 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \mathsf{ten}}$

<u>Beweis **374-17**</u> `b)`

`1:` Aus $\in$**schola**“$1, 2 \in \mathbb{N}$” und
aus $<$**schola**“$1 < 2$”

folgt via **197-5**: $\boxed{1 \in 2}$

`2:` Aus `1`“$1 \in 2$” und
aus **Grid0**“$2 \subseteq 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \mathsf{ten}$”

folgt via **folk**: $\boxed{1 \in 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \mathsf{ten}}$

`c)`

`1:` Aus $\in$**schola**“$2, 3 \in \mathbb{N}$” und
aus $<$**schola**“$2 < 3$”

folgt via **197-5**: $\boxed{2 \in 3}$

`2:` Aus `1`“$2 \in 3$” und
aus **Grid0**“$3 \subseteq 4, 5, 6, 7, 8, 9, \mathsf{ten}$”

folgt via **folk**: $\boxed{2 \in 4, 5, 6, 7, 8, 9, \mathsf{ten}}$

`d)`

`1:` Aus $\in$**schola**“$3, 4 \in \mathbb{N}$” und
aus $<$**schola**“$3 < 4$”

folgt via **197-5**: $\boxed{3 \in 4}$

`2:` Aus `1`“$3 \in 4$” und
aus **Grid0**“$4 \subseteq 5, 6, 7, 8, 9, \mathsf{ten}$”

folgt via **folk**: $\boxed{3 \in 5, 6, 7, 8, 9, \mathsf{ten}}$

<u>Beweis **347-16**</u> `e)`

`1:` Aus $\in$**schola**“$4, 5 \in \mathbb{N}$” und
aus $<$**schola**“$4 < 5$”

folgt via **197-5**: $\boxed{4 \in 5}$

`2:` Aus `1`“$4 \in 5$” und
aus **Grid0**“$5 \subseteq 6, 7, 8, 9, \mathsf{ten}$”

folgt via **folk**: $\boxed{4 \in 6, 7, 8, 9, \mathsf{ten}}$

`f)`

`1:` Aus $\in$**schola**“$5, 6 \in \mathbb{N}$” und
aus $<$**schola**“$5 < 6$”

folgt via **197-5**: $\boxed{5 \in 6}$

`2:` Aus `1`“$5 \in 6$” und
aus **Grid0**“$6 \subseteq 7, 8, 9, \mathsf{ten}$”

folgt via **folk**: $\boxed{5 \in 7, 8, 9, \mathsf{ten}}$

`g)`

`1:` Aus $\in$**schola**“$6, 7 \in \mathbb{N}$” und
aus $<$**schola**“$6 < 7$”

folgt via **197-5**: $\boxed{6 \in 7}$

`2:` Aus `1`“$6 \in 7$” und
aus **Grid0**“$7 \subseteq 8, 9, \mathsf{ten}$”

folgt via **folk**: $\boxed{6 \in 8, 9, \mathsf{ten}}$

<u>Beweis **374-17**</u> `h)`

`1:` Aus $\in$**schola**“$7, 8 \in \mathbb{N}$” und
aus $<$**schola**“$7 < 8$”

folgt via **197-5**: $\boxed{7 \in 8}$

`2:` Aus `1`“$7 \in 8$” und
aus **Grid0**“$8 \subseteq 9, \mathsf{ten}$”

folgt via **folk**: $\boxed{7 \in 9, \mathsf{ten}}$

`i)`

`1:` Aus $\in$**schola**“$8, 9 \in \mathbb{N}$” und
aus $<$**schola**“$8 < 9$”

folgt via **197-5**: $\boxed{8 \in 9}$

`2:` Aus `1`“$8 \in 9$” und
aus **Grid0**“$9 \subseteq \mathsf{ten}$”

folgt via **folk**: $\boxed{8 \in \mathsf{ten}}$

`j)`

Aus $\in$**schola**“$9, \mathsf{ten} \in \mathbb{N}$” und
aus $<$**schola**“$9 < \mathsf{ten}$”
folgt via **197-5**: $9 \in \mathsf{ten}$.

$\square$

374-18. Gelengtlich schadet es nicht, expliziter als gewöhnlich zu sein.

374-18(Satz) *Aus ...*

$\rightarrow$) $q \in D$.

$\rightarrow$) $f, \square$ *Funktion.*

$\rightarrow$) $\square$ *Algebra auf* D.

$\rightarrow$) $n \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

$\rightarrow$) $n \setminus \{0\} \subseteq \mathsf{dom}\, f$.

$\rightarrow$) $f[n \setminus \{0\}] \subseteq D$.

a) ... *und* "$2 \subseteq n$" *folgt* "$(q, \square|_{\mathsf{to}\ 0}\, f) = q$" *und* "$(q, \square|_{\mathsf{to}\ 1}\, f) = q \_ \square \_ f(1)$".

b) ... *und* "$3 \subseteq n$" *folgt* "$(q, \square|_{\mathsf{to}\ 0}\, f) = q$" *und* "$(q, \square|_{\mathsf{to}\ 1}\, f) = q \_ \square \_ f(1)$" *und* "$(q, \square|_{\mathsf{to}\ 2}\, f) = (q \_ \square \_ f(1)) \_ \square \_ f(2)$".

c) ... *und* "$4 \subseteq n$" *folgt* "$(q, \square|_{\mathsf{to}\ 0}\, f) = q$" *und* "$(q, \square|_{\mathsf{to}\ 1}\, f) = q \_ \square \_ f(1)$" *und* "$(q, \square|_{\mathsf{to}\ 2}\, f) = (q \_ \square \_ f(1)) \_ \square \_ f(2)$" *und* "$(q, \square|_{\mathsf{to}\ 3}\, f) = ((q \_ \square \_ f(1)) \_ \square \_ f(2)) \_ \square \_ f(3)$".

`ALG`-**Notation**.

Beweis **374-18**

`RECH`-**Notation**.

...

<u>Beweis **374-18**</u> `a)` `VS` gleich $2 \subseteq n$.

`1.1:` Aus →) “ $q \in D$ ” ,
aus →) “ $f, \square$ Funktion ” ,
aus →) “ $\square$ Algebra auf D ” ,
aus →) “ $n \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$ ” ,
aus →) “ $n \setminus \{0\} \subseteq \mathsf{dom}\, f$ ” und
aus →) “ $f[n \setminus \{0\}] \subseteq D$ ”

folgt via **374-15**: $\boxed{(q, \square|_{\mathsf{to}\ 0}\, f) = q}$

`1.2:` Aus **Grid1** “ $0, 1 \in 2$ ” und
aus `VS` gleich “ $2 \subseteq n$ ”
folgt via **folk**: $0, 1 \in n$.

`2:` Aus `1.2` “ $\ldots 1 \in n$ ” und
aus +**schola** “ $1 + 0 = 1$ ”
folgt: $1 + 0 \in n$.

`3:` Aus →) “ $q \in D$ ” ,
aus →) “ $f, \square$ Funktion ” ,
aus →) “ $\square$ Algebra auf D ” ,
aus →) “ $n \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$ ” ,
aus →) “ $n \setminus \{0\} \subseteq \mathsf{dom}\, f$ ” ,
aus →) “ $f[n \setminus \{0\}] \subseteq D$ ” ,
aus `1.2` “ $0 \ldots \in n$ ” und
aus `2` “ $1 + 0 \in n$ ”
folgt via **374-15**: $\left(q, \square|_{\mathsf{to}\ (1+0)}\, f\right) = (q, \square|_{\mathsf{to}\ 0}\, f)\,{}_{-}\square_{-} f(1+0)$.

`4:` Aus `3` und
aus `1.1`
folgt: $\left(q, \square|_{\mathsf{to}\ (1+0)}\, f\right) = q_{-}\square_{-} f(1+0)$.

`5:` Aus `4` und
aus +**schola** “ $1 + 0 = 1$ ”

folgt: $\boxed{(q, \square|_{\mathsf{to}\ 1}\, f) = q_{-}\square_{-} f(1)}$

<u>Beweis **374-18**</u> `b)` `VS` gleich $3 \subseteq n.$

`1.1:` Aus **Grid0**“$2 \subseteq 3$” und
aus `VS` gleich “$3 \subseteq n$”
folgt via **folk**: $2 \subseteq n.$

`1.2:` Aus **Grid1**“$1, 2 \in 3$” und
aus →) “$3 \subseteq n$”
folgt via **folk**: $1, 2 \in n.$

`2.1:` Aus →) “$q \in D$”,
aus →) “$f, \Box$ Funktion”,
aus →) “$\Box$ Algebra auf D”,
aus →) “$n \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$”,
aus →) “$n \setminus \{0\} \subseteq \mathsf{dom}\, f$”,
aus →) “$f[n \setminus \{0\}] \subseteq D$” und
aus `1.1`“$2 \subseteq n$”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:

$$\boxed{((q, \Box|_{\mathsf{to}\ 0}\, f) = q) \wedge ((q, \Box|_{\mathsf{to}\ 1}\, f) = q\_\Box\_f(1))}$$

`2.2:` Aus `1.2` und
aus +**schola**“$1 + 1 = 2$”
folgt: $1, 1 + 1 \in n.$

`3:` Aus →) “$q \in D$”,
aus →) “$f, \Box$ Funktion”,
aus →) “$\Box$ Algebra auf D”,
aus →) “$n \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$”,
aus →) “$n \setminus \{0\} \subseteq \mathsf{dom}\, f$”,
aus →) “$f[n \setminus \{0\}] \subseteq D$” und
aus `2.2`“$1, 1 + 1 \in n$”
folgt via **374-15**: $\left(q, \Box|_{\mathsf{to}\ (1+1)}\, f\right) = (q, \Box|_{\mathsf{to}\ 1}\, f)\,\_\Box\_f(1 + 1).$

`4:` Aus `3` und
aus `2.1`“$\ldots (q, \Box|_{\mathsf{to}\ 1}\, f) = q\_\Box\_f(1)$”
folgt: $\left(q, \Box|_{\mathsf{to}\ (1+1)}\, f\right) = (q\_\Box\_f(1))\_\Box\_f(1 + 1).$

`5:` Aus `4` und
aus +**schola**“$1 + 1 = 2$”
folgt: $$\boxed{(q, \Box|_{\mathsf{to}\ 2}\, f) = (q\_\Box\_f(1))\_\Box\_f(2)}$$

<u>Beweis **374-18**</u> `c) VS` gleich $4 \subseteq n.$

`1.1:` Aus **Grid0**“$3 \subseteq 4$” und
aus `VS` gleich “$4 \subseteq n$”
folgt via **folk**: $3 \subseteq n.$

`1.2:` Aus **Grid1**“$2, 3 \in 4$” und
aus →) “$4 \subseteq n$”
folgt via **folk**: $2, 3 \in n.$

`2.1:` Aus →) “$q \in D$”,
aus →) “$f, \square$ Funktion”,
aus →) “$\square$ Algebra auf D”,
aus →) “$n \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$”,
aus →) “$n \setminus \{0\} \subseteq \mathsf{dom}\, f$”,
aus →) “$f[n \setminus \{0\}] \subseteq D$” und
aus `1.1`“$3 \subseteq n$”
folgt via des bereits bewiesenen `b)`:

$$\boxed{((q, \square|_{\mathsf{to}\ 0}\, f) = q) \wedge ((q, \square|_{\mathsf{to}\ 1}\, f) = q\_\square\_f(1)) \wedge ((q, \square|_{\mathsf{to}\ 2}\, f) = (q\_\square\_f(1))\_\square\_f(2))}$$

`2.2:` Aus `1.2` und
aus +**schola**“$1 + 2 = 3$”
folgt: $2, 1 + 2 \in n.$

`3:` Aus →) “$q \in D$”,
aus →) “$f, \square$ Funktion”,
aus →) “$\square$ Algebra auf D”,
aus →) “$n \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$”,
aus →) “$n \setminus \{0\} \subseteq \mathsf{dom}\, f$”,
aus →) “$f[n \setminus \{0\}] \subseteq D$” und
aus `2.2`“$2, 1 + 2 \in n$”
folgt via **374-15**: $\left(q, \square|_{\mathsf{to}\ (1+2)}\, f\right) = (q, \square|_{\mathsf{to}\ 2}\, f)\ \_\square\_f(1 + 2).$

`4:` Aus `3` und
aus `2.1`“$\ldots (q, \square|_{\mathsf{to}\ 2}\, f) = (q\_\square\_f(1))\_\square\_f(2)$”
folgt: $\left(q, \square|_{\mathsf{to}\ (1+2)}\, f\right) = ((q\_\square\_f(1))\_\square\_f(2))\_\square\_f(1 + 2).$

`5:` Aus `4` und
aus +**schola**“$1 + 2 = 3$”
folgt: $\boxed{(q, \square|_{\mathsf{to}\ 3}\, f) = ((q\_\square\_f(1))\_\square\_f(2))\_\square\_f(3)}$ □

374-19. Die "$n = \mathbb{N}$-Version" von **374-15,18** wird nachgereicht.

374-19(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow$) $q \in D$.

$\rightarrow$) $f, \Box$ *Funktion.*

$\rightarrow$) $\Box$ *Algebra auf* D.

$\rightarrow$) $\mathbb{N} \setminus \{0\} \subseteq \mathsf{dom}\, f$.

$\rightarrow$) $f[\mathbb{N} \setminus \{0\}] \subseteq D$.

Dann folgt:

a) $\mathsf{dom}\,(q, \Box|_{\mathsf{to}}\, f) = \mathbb{N}$.

b) $\mathsf{ran}\,(q, \Box|_{\mathsf{to}}\, f) \subseteq D$.

c) $(q, \Box|_{\mathsf{to}}\, f) : \mathbb{N} \rightarrow D$.

d) $\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\Big(q, \Box|_{\mathsf{to}\ (1+\alpha)}\, f\Big) = (q, \Box|_{\mathsf{to}\ \alpha}\, f)\, {}_{-}\Box_{-} f(1 + \alpha))$.

e) $(q, \Box|_{\mathsf{to}\ 0}\, f) = q$.

f) $(q, \Box|_{\mathsf{to}\ 1}\, f) = q_{-}\Box_{-} f(1)$.

g) $(q, \Box|_{\mathsf{to}\ 2}\, f) = (q_{-}\Box_{-} f(1))_{-}\Box_{-} f(2)$.

h) $(q, \Box|_{\mathsf{to}\ 3}\, f) = ((q_{-}\Box_{-} f(1))_{-}\Box_{-} f(2))_{-}\Box_{-} f(3)$.

`RECH.ALG`-**Notation**.

<u>Beweis **374-19**</u>

1: Aus →) “ $q \in D$ ” ,
aus →) “ $f, \square$ Funktion ” ,
aus →) “ $\square$ Algebra auf D ” ,
aus **374-6** “ $\mathbb{N} \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$ ” ,
aus →) “ $\mathbb{N} \setminus \{0\} \subseteq \mathsf{dom}\, f$ ” und
aus →) “ $f[\mathbb{N} \setminus \{0\}] \subseteq D$ ”
folgt via **374-15**: $(\mathbb{N} \subseteq \mathsf{dom}\,(q, \square|_{\mathsf{to}}\, f)) \wedge ((q, \square|_{\mathsf{to}}\, f)\,[\mathbb{N}] \subseteq D)$
$\wedge(\forall \beta : (\beta, 1+\beta \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\left(q, \square|_{\mathsf{to}\,(1+\beta)}\, f\right) = \left(q, \square|_{\mathsf{to}\,\beta}\, f\right) {}_{-}\square_{-} f(1+\beta)))$.

2: Via **374-3** gilt: $\mathsf{dom}\,(q, \square|_{\mathsf{to}}\, f) \subseteq \mathbb{N}$.

3.a): Aus 2 “ $\mathsf{dom}\,(q, \square|_{\mathsf{to}}\, f) \subseteq \mathbb{N}$ ” und
aus 1 “ $\mathbb{N} \subseteq \mathsf{dom}\,(q, \square|_{\mathsf{to}}\, f) \ldots$ ”
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathsf{dom}\,(q, \square|_{\mathsf{to}}\, f) = \mathbb{N}$.

4: $\mathsf{ran}\,(q, \square|_{\mathsf{to}}\, f) \overset{\mathbf{8-10}}{=} (q, \square|_{\mathsf{to}}\, f)\,[\mathsf{dom}\,(q, \square|_{\mathsf{to}}\, f)] \overset{3.a)}{=} (q, \square|_{\mathsf{to}}\, f)\,[\mathbb{N}]$.

5.b): Aus 4 “ $\mathsf{ran}\,(q, \square|_{\mathsf{to}}\, f) = \ldots = (q, \square|_{\mathsf{to}}\, f)\,[\mathbb{N}]$ ” und
aus 1 “ $\ldots (q, \square|_{\mathsf{to}}\, f)\,[\mathbb{N}] \subseteq D \ldots$ ”
folgt: $\mathsf{ran}\,(q, \square|_{\mathsf{to}}\, f) \subseteq D$.

6: Aus →) “ $\ldots \square$ Funktion ” und aus →) “ $f \ldots$ Funktion ”
folgt via **374-3**: $(q, \square|_{\mathsf{to}}\, f)$ Funktion.

7.c): Aus 6 “ $(q, \square|_{\mathsf{to}}\, f)$ Funktion ” ,
aus 3.a) “ $\mathsf{dom}\,(q, \square|_{\mathsf{to}}\, f) = \mathbb{N}$ ” und
aus 5.b) “ $\mathsf{ran}\,(q, \square|_{\mathsf{to}}\, f) \subseteq D$ ”
folgt via **21-1(Def)**: $(q, \square|_{\mathsf{to}}\, f) : \mathbb{N} \to D$.

...

Beweis **374-19** . . .

$\boxed{\texttt{Thema8}}$ $\alpha \in \mathbb{N}$.

9: Aus Thema8"$\alpha \in \mathbb{N}$"
folgt via **folk**: $1 + \alpha \in \mathbb{N}$.

10: Aus Thema8"$\alpha \in \mathbb{N}$",
aus 9"$1 + \alpha \in \mathbb{N}$" und
aus 1"$\ldots \forall \beta : (\beta, 1 + \beta \in \mathbb{N})$
$\Rightarrow \left(\left(q, \square|_{\mathsf{to}\ 1+\beta}\, f\right) = \left(q, \square|_{\mathsf{to}\ \beta}\, f\right) {}_{-}\square_{-} f(1 + \beta)\right)$"
folgt: $\left(q, \square|_{\mathsf{to}\ (1+\alpha)}\, f\right) = (q, \square|_{\mathsf{to}\ \alpha}\, f) {}_{-}\square_{-} f(1 + \alpha)$.

Ergo Thema8:

Ad) "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow \left(\left(q, \square|_{\mathsf{to}\ (1+\alpha)}\, f\right) = (q, \square|_{\mathsf{to}\ \alpha}\, f) {}_{-}\square_{-} f(1 + \alpha)\right)$"

9.efgh): Aus Aus →)"$q \in D$",
aus →)"$f, \square$ Funktion",
aus →)"$\square$ Algebra auf D",
aus **374-6**"$\mathbb{N} \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$",
aus →)"$\mathbb{N} \setminus \{0\} \subseteq \mathsf{dom}\, f$",
aus →)"$f[\mathbb{N} \setminus \{0\}] \subseteq D$" und
aus **Grid0**"$4 \subseteq \mathbb{N}$"
folgt via **374-18**:

$$(q, \square|_{\mathsf{to}\ 0}\, f) = q$$
$$\wedge \quad (q, \square|_{\mathsf{to}\ 1}\, f) = q {}_{-}\square_{-} f(1)$$
$$\wedge \quad (q, \square|_{\mathsf{to}\ 2}\, f) = (q {}_{-}\square_{-} f(1)) {}_{-}\square_{-} f(2)$$
$$\wedge \quad (q, \square|_{\mathsf{to}\ 3}\, f) = ((q {}_{-}\square_{-} f(1)) {}_{-}\square_{-} f(2)) {}_{-}\square_{-} f(3).$$

□

- **H. Bauer**, *Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie*, De-Gruyter, 1978(3).
- **H. Brauner**, *Differentialgeometrie*, Vieweg, 1981.
- **H. Federer**, *Geometric Measure Theory*, Springer, 1996.
- **K.P. Grotemeyer**, *Topologie*, B.I. Mannheim/Wien/Zürich, 1969.
- **Wikipedia**. *http://de.wikipedia.org/wiki/Neutrophiler_Granulozyt*. Datum: 14-01-09. Letzte Änderung: 13-12-12 06:46.